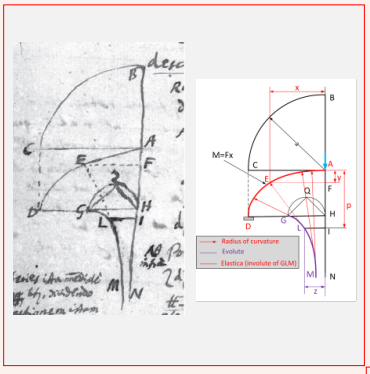
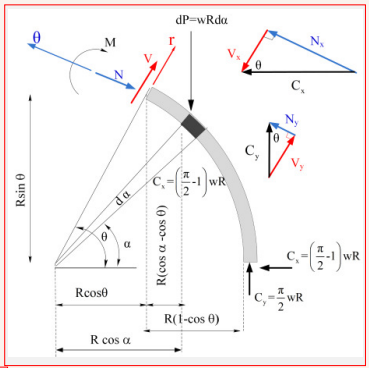
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ

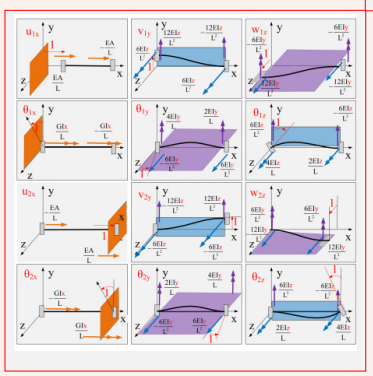
यांत्रिकी के इतिहास से आधुनिक संगणकीय विधियों तक

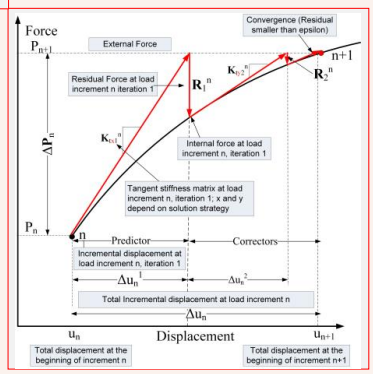
Victor E. Saouma &

प्रोफ़ेसर एमेरिटस, यूनिवर्सिटी ऑफ़ कोलोराडो बोल्डर









V. 1.0

अगस्त 2026

परियोजना वेबसाइट: https://structuralanalysisbook.org/

This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International" license.

प्रारूप

Verba volant, scripta manent[‡]

प्रारूप

[‡]"मेरे व्याख्यान उड गए, किंतु यह पुस्तक बनी रहेगी।" 🙂

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विधिक सूचना

यह पुस्तक CC BY-NC-SA अनुज्ञप्ति के अंतर्गत है, जिसका पूर्ण रूप *Attribution-NonCommercial-ShareAlike* है। सरल शब्दों में, कुछ शर्तों का पालन करने पर यह अनुज्ञप्ति सामग्री को स्वतंत्र रूप से साझा और अनुकूलित करने देती है।

आप निम्न कार्य कर सकते हैं:

साझा करना: सामग्री को किसी भी माध्यम अथवा प्रारूप में प्रतिलिपित और पुनर्वितरित किया जा सकता है। आप इसे मित्रों और सहकर्मियों को दे सकते हैं अथवा ऐसे मंच पर उपलब्ध करा सकते हैं जहाँ अन्य लोग इससे लाभान्वित हों।

अनुकूलित करना: गैर-व्यावसायिक उद्देश्य के लिए सामग्री का पुनर्संयोजन, रूपांतरण और उस पर आधारित नया कार्य बनाया जा सकता है।

श्रेय देना: साझा अथवा अनुकूलित करते समय लेखक को उचित श्रेय दें और मूल कृति की कड़ी प्रदान करें। श्रेय इतना स्पष्ट हो कि अन्य लोग सामग्री का स्रोत समझ सकें।

इसके साथ कुछ महत्त्वपूर्ण सीमाएँ भी हैं:

गैर-व्यावसायिक: सामग्री का व्यावसायिक उद्देश्य से उपयोग नहीं किया जा सकता। अर्थात इसे बेचा, सशुल्क उत्पाद में उपयोग अथवा अन्य प्रकार से मुद्रीकृत नहीं किया जा सकता।

समान रूप से साझा करना: इस सामग्री से निर्मित व्युत्पन्न कृति को भी इन्हीं CC BY-NC-SA शर्तों के अंतर्गत अनुज्ञप्त करना होगा। इससे मुक्तता की भावना बनी रहती है और अन्य लोग आपके संस्करण से उसी प्रकार लाभ उठा सकते हैं जैसे आप इस कृति से उठा रहे हैं।

हिंदी अनुवाद

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समर्पण

मेरे पितामह विक्टर और मेरी पत्नी रिया की स्मृति को



तथा मेरे बच्चों रिचर्ड, कैरोलिन और सोफी को

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्राक्कथन

Victor E. Saouma
प्रोफ़ेसर एमेरिटस
यूनिवर्सिटी ऑफ़ कोलोराडो बोल्डर
बोल्डर, कोलोराडो, USA

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पूर्वपीठिका[4]

इस पूर्वपीठिका की विषय-सूची

I. उद्गम और उद्देश्य
शीर्षक के विषय में
उत्पत्ति
विषय-परिधि
व्याख्यान-टिप्पणियाँ
एक और पुस्तक?

II. संरचनात्मक दर्शन
सब कुछ एक ही ग्रंथ में क्यों?
यांत्रिकी

III. पाठक-वर्ग और उपयोग
पाठक-वर्ग
नेविगेशन

IV. व्यक्तिगत प्रभाव
विदेशी प्रभाव
CU में अध्यापन

V. शैली और प्रस्तुति
शैली
संकेतन
पुनरावृत्तियाँ
रंग
मुद्रण-कला
शीर्षक का अक्षर-विन्यास

VI. परिकल्पना और निर्माण
LaTeX
Matlab कोड
MathCad कोड
AI
चित्र

VII. स्रोत और श्रेय
संदर्भ
छायाचित्र
परामर्शित पुस्तकें

VIII. उपलब्धता और सांख्यिकी
यह निःशुल्क क्यों है?
वेबसाइट
सांख्यिकी

I. उद्गम और उद्देश्य

शीर्षक के विषय में इस कृति का शीर्षक जानबूझकर पल्लादियो की *Four Books of Architecture* की स्मृति जगाता है।

यहाँ चार-भागीय संरचना एक शैक्षणिक प्रगति को व्यक्त करती है: संरचनात्मक विश्लेषण की ऐतिहासिक आधारभूमि से आरंभ होकर, प्रारंभिक और मध्यवर्ती निरूपणों से गुजरते हुए, उन्नत विधियों तक। दोनों कृतियों के बीच साम्य इस विश्वास में निहित है कि जटिल विषय भी सुविचारित क्रमिक प्रस्तुति से अधिक सुबोध बनते हैं।

उत्पत्ति जब मेरा शैक्षणिक जीवन अपने संध्याकाल के निकट पहुँचा, तब मुझे—शायद कुछ गर्व के साथ—लगा कि संरचनात्मक विश्लेषण के लगभग चार दशकों के अध्यापन में संचित ज्ञान को साझा करने का समय आ गया है। यह *magnum opus* उसी का परिणाम है।

इसकी उत्पत्ति दो समानांतर धाराओं में हुई। पहली धारा उन व्याख्यान-टिप्पणियों की है जो इन्हीं चार दशकों में संचित हुईं और निरंतर परिष्कृत की गईं; क्षेत्र की प्रगति और विद्यार्थियों की बदलती आवश्यकताओं को प्रतिबिंबित करने के लिए उन्हें समय-समय पर अद्यतन किया गया। दूसरी एक शांततर

[4] यूनानी *prolegomena* (προλεγόμενα) से, जिसका अर्थ है “पहले कही गई बातें”: मुख्य पाठ आरंभ होने से पूर्व वह प्रारंभिक सामग्री जिसमें लेखक किसी कृति की परिधि, पद्धति और उद्देश्यों को स्पष्ट करता है। इस पद को आधुनिक विद्वत्तापूर्ण प्रचलन कांट की *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik* (1783) से मिला।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संग्रह-धारा है जो अध्यापन के साथ-साथ विकसित हुई: शोधपत्र, मोनोग्राफ, ऐतिहासिक जिज्ञासाएँ और तकनीकी विवरण, जिन्हें प्रायः कक्षा में स्थान नहीं मिला—या तो इसलिए कि श्रोता अभी उनके लिए तैयार नहीं थे, अथवा इसलिए कि अपेक्षित गहराई एक पाठ्यक्रम की सीमाओं से अधिक थी।

व्यावहारिक लेखन-साधन के रूप में कृत्रिम बुद्धिमत्ता के आगमन से पहले ही इन दोनों धाराओं से एक प्रथम पूर्ण प्रारूप तैयार हो चुका था। इसके बाद जो हुआ वह लेखकीय निर्णय का प्रत्यायोजन नहीं था, बल्कि एक तीसरे और वस्तुतः असीम स्रोत तक पहुँच थी: असंख्य संवादों, प्रतिवादों, अस्वीकृतियों और क्रमिक परिष्कारों के माध्यम से AI ने ऐसी विपुल सामग्री उपलब्ध कराई जिसकी बराबरी किसी एक पुस्तकालय-भ्रमण अथवा साहित्य-अन्वेषण से संभव नहीं थी। किंतु निर्णय पूर्णतः मेरे ही रहे।

इस पूरी प्रक्रिया में मैंने अपनी भूमिका को किसी प्रदर्शनी को संयोजित करने वाले क्यूरेटर की भूमिका के समान माना है—ऐसा व्यक्ति जो विभिन्न धाराओं से सामग्री प्राप्त करता है और फिर निर्धारित करता है कि संग्रह में किसे स्थान मिलना चाहिए और किसे नहीं, प्रत्येक वस्तु किस कक्ष में रखी जाए, उसे किस प्रकार प्रकाशित किया जाए और दर्शक उसे किस क्रम में देखे। पुस्तक के संरचनात्मक विश्लेषण वाले भाग में यह क्यूरेटोरियल कार्य अपेक्षाकृत सरल था: तकनीकी सामग्री एक सुस्थापित शैक्षणिक तर्क का अनुसरण करती है और अध्यायों का क्रम लगभग स्वयं निर्धारित हो जाता है।

ऐतिहासिक भाग ने सर्वथा भिन्न चुनौती प्रस्तुत की। संरचनात्मक विश्लेषण के विकास को अध्यायों के रैखिक क्रम में कैसे खोजा जाए—संख्याओं और वर्णमालाओं की आरंभिक खोजों से, प्राचीनता और पुनर्जागरण की महान बौद्धिक छलाँगों के माध्यम से, परिमित तत्त्व विधि तक—और साथ ही उन विषयों के साथ न्याय कैसे किया जाए जो स्वभावतः कालानुक्रमिक नहीं, बल्कि विषयगत हैं? कुछ अध्याय समय की धारा का अनुसरण करते हैं; अन्य उसे काटते हुए उन विचारों, व्यक्तियों और विकासों को एकत्र करते हैं जो शताब्दी के स्थान पर विषय के कारण परस्पर संबद्ध हैं। इस तनाव में मार्ग खोजना तथा यह निर्णय करना कि कालक्रम का अनुसरण कब किया जाए और उसे कब छोड़ा जाए, संपूर्ण कार्य का सबसे कठिन क्यूरेटोरियल निर्णय सिद्ध हुआ।

📖 **विषय-परिधि** व्यापक रूप से यह पुस्तक चार भागों में विभाजित है:

व्यापक रूप से यह पुस्तक चार भागों में विभाजित है:

पुस्तक I यह पुस्तक संरचनात्मक विश्लेषण के इतिहास का गहन अन्वेषण प्रस्तुत करती है। यद्यपि यह सर्वसमावेशी होने का दावा नहीं करती, तथापि इस ग्रंथ का यही पक्ष मुझे लिखने में विशेष रूप से रोचक लगा। आरंभ में मैंने प्रमुख घटनाओं और व्यक्तियों को किसी कठोर सीमा के बिना चुना, किंतु जैसे ही आख्यान गैलीलियो गैलिली के युग तक पहुँचा, अधिक संरचित और अनुशासित दृष्टिकोण आवश्यक हो गया। तब भी इस प्रथम पुस्तक का संगठन चुनौतीपूर्ण रहा: इसे किस प्रकार विभाजित किया जाए? इसका विवेचन आंशिक रूप से कालानुक्रमिक, आंशिक रूप से विषयगत और कभी-कभी दोनों है। फलतः अनुभागों के बीच पर्याप्त अतिव्यापन है—परंतु प्रत्येक स्थिति में सामग्री को एक भिन्न दृष्टिकोण से देखा गया है। अध्यायों के परस्पर संबंधित विवेचनों को जोड़ने के लिए मैंने हाइपरलिंक का उदारतापूर्वक उपयोग किया है।

पुस्तक II इस पुस्तक में वह सामग्री सम्मिलित है जिसकी अपेक्षा स्थैतिकी और विरूपणीय पिंडों की यांत्रिकी के अध्ययन के बाद संरचनात्मक विश्लेषण के प्रथम पाठ्यक्रम में सामान्यतः की जाती

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

है। किंतु मैंने विषय-परिधि को प्रारंभिक स्तर से बहुत आगे विस्तृत किया है—इसीलिए उपशीर्षक *Fundamentals; Analytical* है। केबल, मेहराब और त्रिविम संरचनाएँ जैसे विषय, जिनका मानक पाठ्यपुस्तकों में प्रायः अपर्याप्त उपचार होता है, यहाँ विस्तार से प्रस्तुत किए गए हैं। पट्टिकाओं और कवचों जैसे उन्नत विषय भी सम्मिलित हैं, जिनका इस स्तर पर विरले ही विवेचन होता है, किंतु पूर्ण समझ के लिए वे आवश्यक हैं। पुस्तक का समापन सन्निकट विधियों और प्रारंभिक अभिकल्प के अध्याय से होता है। मेरा दृढ विश्वास है कि संरचनात्मक विश्लेषण पृथक रूप से अस्तित्व में नहीं रहना चाहिए; विद्यार्थियों को अपने विश्लेषणात्मक कौशल के साथ अभिकल्प की अंतर्दृष्टि भी विकसित करनी चाहिए और समझना चाहिए कि विश्लेषण आगामी निर्णयों को कैसे सूचित और संभव बनाता है।

पुस्तक III यह पुस्तक उस विषय को संबोधित करती है जिसे प्रायः "आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण" कहा जाता है, किंतु मूलतः यह परिमित तत्त्व विधि पर एक ग्रंथ है। प्रथम भाग में प्रत्यक्ष दृढता विधि का विस्तार से विवेचन है, जिसमें ढाँचा-संरचनाओं के लिए उसका कंप्यूटर कार्यान्वयन भी सम्मिलित है। इसके बाद परिवर्तनात्मक विधियों—परिवर्तन-कलन, आभासी कार्य के सिद्धांत और ऊर्जा प्रमेयों—का व्यापक उपचार है; यही वह सैद्धांतिक आधारभूमि है जिस पर आगे सतत-माध्यम तत्त्वों के लिए परिमित तत्त्व विधि प्रस्तुत की गई है।

एक सामान्य भ्रांति यह है कि ढाँचा-संरचनाओं की आव्यूह विधियाँ सतत-माध्यम के परिमित तत्त्वों की अपेक्षा "सरल" होती हैं। वस्तुतः प्रायः इसका उलटा सत्य है। सतत-माध्यम तत्त्व प्रतिबल और विकृति प्रदिशों से संबंधित होते हैं—ये सुरुचिपूर्ण और सुव्याख्यायित राशियाँ हैं। अपने सर्वाधिक सामान्य रूप में ढाँचा तत्त्वों के प्रत्येक नोड पर बलों के तीन समुच्चय और आघूर्णों के तीन समुच्चय, तथा उनसे संबद्ध विस्थापन और घूर्णन होते हैं। इन बल और आघूर्ण घटकों की अंतःक्रियाएँ सूक्ष्म हैं और मेरे अनुभव में विद्यार्थी उनकी जटिलता को सदैव पूरी तरह नहीं समझते।

पुस्तक IV यह पुस्तक मेरे द्वारा आरंभ किए गए एक नवीन पाठ्यक्रम (और मेरे कुछ विद्यार्थियों के उत्कृष्ट शोध-प्रबंधों) से विकसित हुई है, जिसके शैक्षणिक जगत में अपेक्षाकृत कम समकक्ष हैं। यह पाठ्यक्रम मुख्यतः ढाँचा-संरचनाओं के अरैखिक विश्लेषण पर केंद्रित है। इसके अतिरिक्त इसमें सुघट्यता, स्थायित्व, गतिकी और विशेषतः निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (Performance Based Earthquake Engineering) जैसे महत्त्वपूर्ण विषय सम्मिलित हैं।

परिशिष्ट इस ग्रंथ के संपूर्ण विकास में मुख्य पाठ को अतिरिक्त सामग्री से संपूरित करना आवश्यक लगा—उदाहरणार्थ MATLAB कोड, सतत-माध्यम यांत्रिकी का परिचय, प्रायिकता वितरण फलन और अन्य विषय। ये अठारह परिशिष्ट संदर्भ और पुनर्बलन दोनों का कार्य करते हैं तथा पाठकों को मुख्य आख्यान में व्यवधान डाले बिना अधिक गहराई में जाने देते हैं।

इस ग्रंथ में अपनाए गए दृष्टिकोण की तुलना यूक्लिडीय पद्धति से की जा सकती है: हम मूलभूत परिभाषाओं से आरंभ करते हैं और प्रत्येक आगामी अध्याय में उन पर क्रमबद्ध रूप से निर्माण करते हैं। उद्देश्य सामग्री को इस प्रकार प्रस्तुत करना है कि प्रत्येक चरण पूर्ववर्ती चरणों से तार्किक रूप से निकले और मूल धारणाओं, परिभाषाओं तथा पूर्ववर्ती प्रमेयों पर आधारित हो। इस क्रम का परिश्रमपूर्वक अनुसरण करने वाले पाठक संरचनात्मक विश्लेषण की व्यापक, लगभग विश्वकोशीय समझ प्राप्त करेंगे।

यद्यपि पुस्तकों II–IV की सामग्री मुख्यतः मेरी व्याख्यान-टिप्पणियों से उत्पन्न हुई है, तथापि मैंने

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अनेक स्रोतों के परामर्श द्वारा उसे संपूरित, विस्तृत और परिष्कृत करने का व्यापक प्रयास किया है। मेरी हार्दिक आशा है कि पूरे पाठ में ऐसे सभी स्रोतों को उचित श्रेय दिया गया है।

सहगामी व्याख्यान-टिप्पणियाँ यह पुस्तक मेरे पूरे अध्यापन-जीवन में संरचनात्मक विश्लेषण के तीन पाठ्यक्रमों की शृंखला में दिए गए सैकड़ों व्याख्यानों से विकसित हुई। मैंने पाठ्यक्रम की टिप्पणियाँ तैयार करने के लिए सदैव LaTeX और Beamer का उपयोग किया; अंततः वही इस कृति की आधारभूमि बनीं। उन व्याख्यान-स्लाइडों को एक दस्तावेज़ में संकलित किया गया है, जो डाउनलोड के लिए निःशुल्क उपलब्ध है।

एक और पुस्तक? सामान्य पाठक के मन में यह प्रश्न उठ सकता है: *संरचनात्मक विश्लेषण पर एक और पुस्तक क्यों?* यह उचित प्रश्न है, क्योंकि इस विषय की अनेक वर्तमान पाठ्यपुस्तकें पुनरावृत्तिपूर्ण हैं और उनमें से कुछ के अनेक संस्करण प्रकाशित हो चुके हैं। दुर्भाग्यवश इनमें से कुछ ग्रंथ प्रेरणाहीन, अत्यधिक सरलीकृत और गहराई से रहित प्रतीत होते हैं।

उनकी एक सामान्य सीमा अंतर्निहित सिद्धांत का सीमित विवेचन है, जिसके साथ प्रायः अत्यंत सरल और अजटिल संरचनात्मक उदाहरणों पर निर्भरता जुड़ी होती है।

इन सीमाओं के उत्तर में मैंने पूरी पुस्तक में संरचनात्मक विश्लेषण की विभिन्न प्रक्रियाओं और अनुप्रयुक्त यांत्रिकी तथा गणित के उन मूल सिद्धांतों के बीच संबंध स्थापित करने का सुविचारित प्रयास किया है जिन पर वे आधारित हैं। इस दृष्टिकोण का उद्देश्य पाठकों को संरचनात्मक विश्लेषण की अधिक गहन और अंतर्दृष्टिपूर्ण समझ प्रदान करना है, जो इसे इस क्षेत्र की सामान्य प्रस्तुतियों से अलग करती है।

II. संपादकीय दर्शन

सब कुछ एक ही ग्रंथ में क्यों? चारों पुस्तकों को एक एकीकृत ग्रंथ के रूप में प्रस्तुत करने का निर्णय सुविचारित है और दो मूलभूत विचारों पर आधारित है। प्रथम, यह उस विश्वास को व्यक्त करता है कि अभियंताओं को उन ऐतिहासिक प्रक्रियाओं के प्रति निरंतर सजग रहना चाहिए जिनसे वर्तमान ज्ञान विकसित हुआ है। आज प्रयुक्त सिद्धांत, विधियाँ और संगणकीय रूपरेखाएँ एकांत में उत्पन्न नहीं हुईं; वे शताब्दियों के वैचारिक परिष्कार, वाद-विवाद और संशोधन का संचयी परिणाम हैं। इस वंशक्रम की समझ तकनीकी दक्षता की सहायक वस्तु नहीं, बल्कि उसका अभिन्न अंग है।

द्वितीय, इस कृति की संरचना विज्ञान और अभियांत्रिकी के इतिहासकारों को भी संबोधित करती है और इस बात पर बल देती है कि ऐतिहासिक अन्वेषण को अनुशासन की वर्तमान स्थिति के संबंध में देखने पर अधिक गहराई और प्रासंगिकता प्राप्त होती है। आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण के गणितीय औपचारिकतंत्र, विश्लेषणात्मक तकनीकें और अभिकल्प सिद्धांत इतिहास के केवल अंतिम बिंदु नहीं हैं; वे पूर्ववर्ती चिंतकों की प्रेरणाओं, सीमाओं और उपलब्धियों की व्याख्या के लिए आवश्यक संदर्भ प्रदान करते हैं।

अतः यह ग्रंथ स्पष्टतः द्विदिश रूपरेखा के रूप में परिकल्पित है। इतिहासकार के लिए यह विचारों के

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ऐतिहासिक विकास से उनके वर्तमान विश्लेषणात्मक निरूपण तक एक स्पष्ट बौद्धिक पथ निर्धारित करता है। अभियंता के लिए यह पारस्परिक पथ का अनुसरण करता है—समकालीन व्यवहार और औपचारिक विधियों से उनके ऐतिहासिक उद्गम तक। इस द्विमार्गी संवाद को बनाए रखते हुए कृति ऐतिहासिक अंतर्दृष्टि और तकनीकी कठोरता को एक सुसंगत तथा परस्पर पुष्टिकारक समग्रता में एकीकृत करती है। इन दोनों दृष्टियों के बीच आवागमन स्पष्ट परस्पर-संदर्भों और हाइपरलिंक द्वारा सुगम बनाया गया है, जैसे:

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए § XX देखें; अथवा ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए § XX देखें।

अंततः इन वैचारिक प्रेरणाओं से परे, चारों पुस्तकों को एक खंड में समेकित करने का निर्णय एक शैक्षणिक और तकनीकी उद्देश्य भी पूरा करता है। संरचनात्मक विश्लेषण के प्रारंभिक, मध्यवर्ती और उन्नत स्तरों को एक सतत कृति में प्रस्तुत करने से जटिलता के स्तरों के बीच निर्बाध प्रगति संभव होती है और संपूर्ण ग्रंथ में संकेतन, परिभाषाओं तथा परिपाटियों की कठोर सुसंगति बनी रहती है। साहित्य में दुर्लभ यह एकीकरण पाठक को एक ही सुसंगत PDF में आधारभूत अवधारणाओं से उन्नत निरूपणों तक सहजता से जाने देता है और उस विखंडन तथा संकेतनीय असातत्य को समाप्त करता है जो सामग्री के अनेक खंडों में बिखरे होने पर सामान्यतः उत्पन्न होता है।

यांत्रिकी यह स्पष्ट होना चाहिए: संरचनात्मक अभियांत्रिकी अपने मूल में अनुप्रयुक्त यांत्रिकी है। यद्यपि नियमित अभियांत्रिकी समस्याओं के समाधान के लिए प्रक्रियात्मक ज्ञान प्रायः पर्याप्त होता है, फिर भी इससे हमें अपने साधनों के उद्गम को समझने की जिम्मेदारी से मुक्ति नहीं मिलती। निरंतर आवश्यकता है कि (1) यांत्रिकी को नियंत्रित करने वाली वही विश्लेषणात्मक और गणितीय कठोरता बनाए रखी जाए, और (2) आवश्यकता पड़ने पर स्पष्ट रूप से स्वयं यांत्रिकी की ओर लौटा जाए। अभियांत्रिकी व्यवहार में इस आधार की उपेक्षा बहुत अधिक होती है और उसका स्थान प्रक्रियात्मक ज्ञान तथा संख्यात्मक सुविधा ले लेते हैं। अपने पूरे व्यावसायिक जीवन में एक पाँव यांत्रिकी और दूसरा अभियांत्रिकी में जानबूझकर बनाए रखने के कारण मैं चाहता हूँ कि यह पुस्तक उसी दृष्टि को व्यक्त करे। इसीलिए यहाँ प्रस्तुत प्रत्येक समीकरण को मूल सिद्धांतों तक खोजा जा सकता है। मैंने सतत-माध्यम यांत्रिकी की आवश्यक अवधारणाओं का परिचय देने वाला एक परिशिष्ट (परिशिष्ट O) और वेस्टरगार्ड को श्रद्धांजलि देने वाला एक अन्य परिशिष्ट भी सम्मिलित किया है—ऐसे अभियंता जिन्होंने मूलभूत यांत्रिकी से सीधे तर्क करके अत्यंत व्यावहारिक समस्याओं का समाधान किया (परिशिष्ट P)।

III. पाठक-वर्ग और उपयोग

पाठक-वर्ग

विद्यार्थी: यह पुस्तक तीन क्रमिक पाठ्यक्रमों की शृंखला के लिए उपयुक्त है: संरचनात्मक विश्लेषण का परिचय, मध्यवर्ती संरचनात्मक विश्लेषण और अरैखिक संरचनात्मक विश्लेषण। परंपरागत रूप से जिसके लिए कम-से-कम दो अलग पाठ्यपुस्तकों की आवश्यकता होती, उसे यह एक ही खंड में समेकित करती है। साथ ही, पूरे ग्रंथ में सुसंगत संकेतन बनाए रखती है और ऐसे निदर्शी उदाहरण प्रस्तुत करती है जिन्हें जानबूझकर चुनौतीपूर्ण बनाया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

किंतु यह ध्यान रखना चाहिए कि यह पुस्तक “परिपक्व पाठक-वर्ग” के लिए है। इससे मेरा आशय उन विद्यार्थियों से है जो मूल बातों का सरलीकृत और अतिविस्तृत उपचार नहीं चाहते। इसलिए अधिकांश विद्यार्थियों के लिए इसे किसी पाठ्यक्रम की प्राथमिक पाठ्यपुस्तक के रूप में निर्धारित नहीं किया जाना चाहिए। यह उन प्रेरित विद्यार्थियों के लिए अधिक उपयुक्त है जो ऐसे उपविषयों का अन्वेषण करना चाहते हैं जिनका परंपरागत रूप से गहराई से अध्ययन नहीं होता।

यह पुस्तक उन विद्यार्थियों के लिए भी मूल्यवान होगी जो सुसंगत संकेतन और एक सुसंबद्ध दार्शनिक दृष्टि से युक्त संरचनात्मक अभियांत्रिकी का “एकीकृत” दृष्टिकोण चाहते हैं। यह मूलभूत अवधारणाओं से मध्यवर्ती और उन्नत विषयों तक सहज संक्रमण प्रस्तुत करती है।

शिक्षक: ☛ संरचनात्मक अभियांत्रिकी के शिक्षक इस पुस्तक को एक मूल्यवान संसाधन पाएँगे, विशेषतः अनेक लोकप्रिय पाठ्यपुस्तकों में व्याप्त अतिसरलीकरण के प्रतिकार के रूप में। इसकी व्यापकता और गहराई इसे शोध-प्रबंध विषयों, सत्रीय परियोजनाओं अथवा Ph.D. अर्हता-परीक्षा की समस्याओं के निर्धारण के लिए उपयुक्त बनाती है।

अभियंता: 🛠 यह पुस्तक उन विवेकी संरचनात्मक अभियंताओं के लिए भी है जो कंप्यूटर प्रोग्रामों से कुछ दूरी बनाकर विश्लेषणात्मक समाधानों की सुरुचि का अन्वेषण करना चाहते हैं; इन समाधानों का मूल्य सामान्यतः समझे जाने से कहीं अधिक हो सकता है। अनेक अभियंता पहले यथार्थ अथवा सन्निकट विश्लेषणात्मक समाधान की संभावना खोजे बिना ही कंप्यूटर-आधारित समाधान की ओर दौड़ते हैं, जबकि बाद में सॉफ्टवेयर द्वारा ऐसे समाधान का सत्यापन किया जा सकता है।

इतिहासकार:  चार पुस्तकों में पहली संरचनात्मक विश्लेषण के इतिहास का व्यापक अन्वेषण प्रस्तुत करती है। इस विषय को संबोधित करने वाली प्रसिद्ध शास्त्रीय कृतियों के अतिरिक्त, यह पुस्तक संरचनात्मक विश्लेषण के साहित्य में उपलब्ध सर्वाधिक विस्तृत विवेचनों में से एक प्रस्तुत करती है।

नेविगेशन सैकड़ों आंतरिक हाइपरलिंक होने के कारण पाठकों को उनका अनुसरण करने में संकोच नहीं करना चाहिए। साधारण `ALT+Left Arrow` आपको उस पृष्ठ पर लौटा देता है जहाँ से हाइपरलिंक खोला गया था (और `ALT+Right Arrow` पुनः हाइपरलिंक के लक्ष्य पर ले जाता है)।

IV. व्यक्तिगत प्रभाव और अध्यापन

विदेशी प्रभाव ऊँचे मेहराब बाँधों के अरैखिक भूकंपीय विश्लेषण पर Tokyo Electric Power Company (TEPCO) के साथ नौ वर्षों के सहयोग के दौरान मैंने स्वयं को असाधारण रूप से सौभाग्यशाली माना। लगभग छठे वर्ष में मुझे विश्वास हुआ कि हमारा कार्य मूलतः पूर्ण हो चुका है, किंतु मेरे समकक्ष ने दृढतापूर्वक उत्तर दिया: *नहीं! नहीं! प्रोफ़ेसर साउमा, जापान में किसी प्रोग्राम का केवल त्रुटिरहित कार्य करना पर्याप्त नहीं; उसमें सौंदर्य भी होना चाहिए।* श्री यागोमे की यह टिप्पणी एक गहरे जापानी सिद्धांत का सार थी: विवरण पर अडिग ध्यान, उत्कृष्टता पर आग्रह और मात्र तकनीकी शुद्धता से बहुत आगे तक विस्तृत सामंजस्य की खोज।

मुझे स्विट्ज़रलैंड में एक पारिवारिक घर रखने का सौभाग्य भी मिला, जहाँ हमने अनेक ग्रीष्म ऋतुएँ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और कई विश्रामावधियाँ बिताईं। सिवस लोगों से मैंने—शांत किंतु निर्णायक रूप से—परिशुद्धता, बिना किसी संक्षिप्त मार्ग के कार्य पूरा करने और कृत्रिम तात्कालिकता का प्रतिरोध करने का महत्त्व सीखा। स्विट्ज़रलैंड में कार्य पूरी तरह, सुविचारित ढंग से और सही प्रकार किया जाता है; शीघ्रता की कोई अनुभूत आवश्यकता नहीं होती। विवरण पर ध्यान कोई बाधा नहीं, बल्कि सद्गुण है; और गुणवत्ता को धैर्य, अनुशासन तथा शिल्प-कौशल का स्वाभाविक परिणाम समझा जाता है।

यह आचार ऑर्सन वेल्स की बहुधा उद्धृत टिप्पणी के ठीक विपरीत है: *इटली में बोर्जिया के अधीन तीस वर्षों तक युद्ध, आतंक, हत्या और रक्तपात रहा, किंतु उन्होंने माइकेलएंजेलो, लियोनार्दो दा विंची और पुनर्जागरण उत्पन्न किए। स्विट्ज़रलैंड में भ्रातृ-प्रेम, पाँच सौ वर्ष का लोकतंत्र और शांति रही—और उससे क्या उत्पन्न हुआ? कुक्कू घड़ी।* किंतु इतनी शीघ्रता नहीं, ऑर्सन। स्विट्ज़रलैंड ने घड़ी-विज्ञान की जटिलताओं की अथक खोज की है, उच्च-परिशुद्धता सूक्ष्म मशीनरी का मार्ग प्रशस्त किया है और उत्कृष्ट वास्तुकारों तथा अभियंताओं की लंबी परंपरा उत्पन्न की है। बासेल के सज्जनों—ऑयलर और बर्नूली परिवार—को भी स्मरण करना चाहिए, जो स्वयं यांत्रिकी को आकार देने में न्यूटन से बहुत पीछे नहीं थे और जिन्होंने अंततः संरचनात्मक विश्लेषण को आधार देने वाली नींव रखी।

अंततः इटली में बड़े होते समय मैंने प्रायः यह कहावत सुनी: *Chi va piano, va sano e lontano*—शाब्दिक अर्थ, "जो धीरे चलता है, वह सुरक्षित और दूर तक जाता है।" संदेश स्पष्ट है: शीघ्रता न करें, आवश्यक समय लें और कार्य उचित प्रकार करें।

इन तीन देशों—जापान, स्विट्ज़रलैंड और इटली—ने मिलकर मेरे बौद्धिक स्वभाव और व्यावसायिक व्यवहार को गहराई से आकार दिया है। किसी भी अन्य देश से अधिक उन्होंने उस भावना को प्रभावित किया जिसमें यह पुस्तक लिखी गई: कठोर, धैर्यवान, विवरण के प्रति सजग और सुव्यवस्थित कार्य के प्रति सम्मानपूर्ण।

यूनिवर्सिटी ऑफ़ कोलोराडो में अध्यापन मैंने 1984 से 2023 तक—लगभग चालीस वर्ष—यूनिवर्सिटी ऑफ़ कोलोराडो में अध्यापन किया। अपने व्यावसायिक जीवन के आरंभ में मैं दो प्रतिष्ठित सहकर्मियों से गहरे प्रभावित हुआ: संरचनात्मक अभियांत्रिकी में प्रोफ़ेसर कर्ट गर्स्टल और संरचनात्मक यांत्रिकी में प्रोफ़ेसर कास्पर विलम। उनकी कठोरता, परिशुद्धता और मूल सिद्धांतों पर आग्रह ने स्थायी प्रभाव छोड़ा। मैंने पूरे व्यावसायिक जीवन में उनके दृष्टिकोण का अनुकरण करने का प्रयास किया: सिद्धांत, व्युत्पत्तियों और हमारे अनुशासन की गणितीय आधारभूमि से कभी विमुख न होना।

उपलब्ध पाठ्यपुस्तकें मुझे असंतोषजनक लगीं। स्पष्ट शब्दों में कहें तो अनेक पुस्तकें अत्यधिक सरल बनाई गई थीं—द्विविम संरचनाओं तक सीमित, मेहराबों के किसी भी विवेचन से रहित और प्रारंभिक से मध्यवर्ती तथा उन्नत संरचनात्मक विश्लेषण (क्रमशः पाठ्यक्रम 3525, 4525 और 6525) की प्रगति में असंगत संकेतन से ग्रस्त। ये असातत्य मुझे अचानक और शैक्षणिक रूप से भ्रमकारी लगे। यह मानते हुए कि अधिकांश विद्यार्थी पूरी शृंखला में आगे बढ़ेंगे, मैंने आरंभ से ही मानक विद्वत्तापूर्ण संकेतन प्रस्तुत किया—कुछ विद्यार्थियों की अप्रसन्नता के बावजूद, किंतु उनकी दीर्घकालीन समझ के हित में।

आरंभिक वर्षों में अध्यापन वास्तविक आनंद था। विद्यार्थी प्रेरित, जिज्ञासु और चुनौतीपूर्ण सामग्री से जुड़ने के इच्छुक थे। कठिनाइयाँ तब आरंभ हुईं जब प्रारंभिक पाठ्यक्रम सभी सिविल और वास्तु-अभियांत्रिकी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य हो गया। पर्यावरण अभियांत्रिकी के विद्यार्थी, पृथ्वी को

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बचाने की उत्कंठा में, संरचनात्मक विश्लेषण के लिए प्रायः बहुत कम धैर्य रखते थे—यद्यपि अधिकांश बौद्धिक रूप से सक्षम थे। दूसरी ओर, निर्माण-प्रबंधन के विद्यार्थी सरलतम सूत्रों और उनके प्रत्यक्ष अनुप्रयोग से अधिक कुछ नहीं चाहते थे। अनावश्यक रूप से कठोर समझी जाने वाली किसी भी सामग्री के विरोध में दोनों समूह पर्याप्त मुखर हो सकते थे।

मेरा दर्शन सरल था: सूत्रों की सीमित संख्या को देखते हुए विद्यार्थियों को रटने के स्थान पर सामग्री को अवधारणात्मक रूप से समझना चाहिए। अतः मेरी परीक्षाएँ पुस्तक और टिप्पणियों के बिना होती थीं। प्रत्येक परीक्षा में सामान्यतः एक सरल समस्या होती जिसे सभी को हल करना चाहिए, एक मध्यवर्ती कठिनाई की समस्या और एक चुनौतीपूर्ण समस्या जिसका उद्देश्य असाधारण विद्यार्थियों को शेष से अलग करना था। पहली परीक्षा प्रायः चेतावनी का कार्य करती और कक्षा का औसत पचास प्रतिशत से कम रहता। मैं अंकों को कृत्रिम रूप से वक्रित करने में विश्वास नहीं करता था; इसके स्थान पर शीर्ष तीन विद्यार्थियों के निष्पादन के आधार पर कक्षा के वितरण को मापित करता, जिन्हें A मिलता। मेरे मत में न्यायसंगत इस दृष्टिकोण के कारण अनेक अन्य पाठ्यक्रमों से अधिक अनुत्तीर्णता-दर रही—मानकों को कम करने की अपेक्षा मैंने इस परिणाम को स्वीकार किया।

स्थिति को और जटिल बनाने के लिए, जब विद्यार्थी किसी उचित संदेह से परे नकल करते पकड़े जाते, तब भी यूनिवर्सिटी ऑफ़ कोलोराडो प्रायः दूसरी ओर देखती थी—आखिर विद्यार्थी भुगतान करने वाले ग्राहक हैं और विश्वविद्यालय उन्हें अप्रसन्न करने से बचने के लिए अत्यधिक प्रयास करेगा। सीधे शब्दों में, जब तक विद्यार्थी शैक्षणिक बेईमानी को खुलकर स्वीकार न करे, संस्था संदेह का लाभ उसे देती है और निराश शिक्षक के पास परिणाम स्वीकार करने के अतिरिक्त कोई उपाय नहीं रहता।

अंततः अध्यापन-मूल्यांकन पर एक टिप्पणी। मैं उनके प्रति कभी अत्यधिक चिंतित नहीं रहा, यद्यपि उन्हें पूर्णतः अनदेखा भी नहीं किया। बीस वर्षीय विद्यार्थी, चाहे कितना ही मेधावी हो, सदैव यह निर्णय करने की सर्वोत्तम स्थिति में नहीं होता कि उसे क्या पढ़ाया जाना चाहिए। दुर्भाग्य से मेरी संस्था में ये मूल्यांकन क्रमशः लोकप्रियता-प्रतियोगिता जैसे बन गए—ऐसी प्रतियोगिता जिसमें मैंने भाग न लेने का निर्णय किया।

V. शैली और प्रस्तुति

✍ **शैली** किसी पुस्तक में केवल उसकी विषय-वस्तु ही नहीं, उसका रूप भी सम्मिलित होता है; इसी रूप में वैयक्तिकता और निजी शैली प्रकट होती है। विषय-वस्तु को नियंत्रित करने वाले समीकरणों और सिद्धांतों पर सामान्यतः सहमति होती है, किंतु रूप अथवा शैली में पर्याप्त अंतर हो सकता है। कुछ पुस्तकें इतनी शब्दबहुल होती हैं कि भ्रम उत्पन्न करती हैं; अन्य व्युत्पत्तियाँ छोड़ देती हैं अथवा अत्यधिक सरल उदाहरण देती हैं। अतः पुस्तक का रूप गहन रूप से वैयक्तिक है और लेखक की अध्यापन-शैली, रुचि-केंद्र तथा प्रस्तुति की विशिष्ट पद्धति को प्रतिबिंबित करता है।

पूरी पुस्तक में मैंने व्यक्तिगत टिप्पणियाँ सम्मिलित की हैं और विवेचन की गहराई तथा व्यापकता विषय के प्रति मेरी निजी दृष्टि को व्यक्त करती है। इसका अर्थ है कि कुछ पाठकों को कुछ विषयों (जैसे प्रभाव रेखाओं) का विवेचन अत्यल्प लग सकता है, जबकि अन्य को प्रतीत हो सकता है कि मैं गूढ विषयों में आवश्यकता से अधिक विस्तार तक गया हूँ। भाषा पर एक टिप्पणी: अंग्रेज़ी मेरी मातृभाषा नहीं है—वस्तुतः यह मेरे द्वारा सीखी गई पाँचवीं और अंतिम भाषा है। यद्यपि AI ने पूरी पुस्तक के गद्य को परिष्कृत

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करने में पर्याप्त सहायता की है, अपूर्णताएँ निस्संदेह शेष हैं। मैंने अपनी ओर से सर्वोत्तम प्रयास किया है और बदले में पाठक से केवल समझ तथा कुछ उदारता की अपेक्षा करता हूँ।

αKΩ संकेतन संरचनात्मक यांत्रिकी और अभियांत्रिकी के प्रकाशनों में संकेतन प्रायः असंगत होता है। विशिष्ट क्षेत्रों के आधार पर प्रत्येक अध्याय के लिए अलग संकेतन-समुच्चय का उपयोग लेखक के रूप में मेरे लिए अधिक सुविधाजनक होता, किंतु इतने विस्तृत विषयों वाली पुस्तक के पाठकों के लिए वह अव्यावहारिक और भ्रमकारी सिद्ध होता।

यह वास्तव में मेरे सामने आई सबसे बड़ी चुनौतियों में से एक थी। शीघ्र ही स्पष्ट हो गया कि विभिन्न अनुशासनों के भीतर और उनके बीच सुसंगत संकेतन बनाए रखना विषय की व्यापक समझ चाहने वाले पाठकों के लिए कठिनाइयाँ प्रस्तुत करेगा।

अतः मैंने पूरी पुस्तक में एक समान संकेतन-प्रणाली स्थापित करने का हर संभव प्रयास किया है। इसके अतिरिक्त अनेक चित्रों को विशिष्ट उप-अनुशासनों में प्रयुक्त संकेतन का कठोरतापूर्वक अनुसरण करने के स्थान पर पुस्तक के संकेतन के अनुरूप पुनः तैयार किया है।

पुनरावृत्तियाँ अधिकांश पाठ्यपुस्तकों में चित्रों, समीकरणों अथवा पूर्ववर्णित पाठ की पुनरावृत्ति से सामान्यतः बचा जाता है। किंतु इस पुस्तक की व्यापक प्रकृति और समझ को सुगम बनाने के लिए मैंने पूर्ववर्ती अनुभागों के कुछ तत्त्वों को दोहराने में संकोच नहीं किया। जहाँ आवश्यक है, वहाँ मूल सामग्री का संदर्भ देने का भी प्रयास किया है।

रंग अधिकांश अभियांत्रिकी पुस्तकें धूसर-वर्ण में मुद्रित होती हैं—जिससे उनका दृश्य रूप सपाट और प्रेरणाहीन हो जाता है—किंतु यह पुस्तक केवल स्क्रीन पर पढ़ने के लिए परिकल्पित है। मुद्रण की सीमाओं से मुक्त होकर रंग को सजावट के रूप में नहीं, बल्कि एक सुविचारित संप्रेषण-साधन के रूप में अपनाया गया है। चित्रों में इसका उदार उपयोग हुआ है, जहाँ प्रत्येक रंग का अलग और सुसंगत अर्थ है; और अधिक व्यापक रूप से वहाँ भी, जहाँ वह स्पष्टता बढ़ाता, दृष्टि का मार्गदर्शन करता अथवा समझ को पुष्ट करता है।

इसके अतिरिक्त मैंने सामान्य श्वेत पृष्ठभूमि से हटने का निर्णय किया है, जो कुछ आक्रामक प्रतीत हो सकती है, और उसके स्थान पर षोडशाधारी कोड `#fbf2ed` वाले पृष्ठभूमि-रंग को चुना है। यह चयन Financial Times से प्रेरित है, यद्यपि उसके कारण सर्वथा भिन्न हैं।

अंततः आप देख सकते हैं कि कुछ बिंदुओं अथवा अवधारणाओं को उभारने और उन पर बल देने के लिए मैं कभी-कभी पाठ में भी रंग का उपयोग करता हूँ।

मुद्रण-कला

यह संस्करण 12pt के Palatino-परिवार के सेरिफ़ अक्षर-विन्यास में संयोजित है। पाठ-स्तंभ का आकार ऐसा रखा गया है कि प्रत्येक पंक्ति उस सीमा में रहे जिसे मुद्रण-विशेषज्ञ दीर्घकालीन पठन के लिए

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सामान्यतः सुविधाजनक मानते हैं—लगभग 45 से 75 वर्ण, और आदर्शतः लगभग 66[5]। पुस्तक की मूल 11pt सज्जा में पंक्तियाँ लगभग 85 वर्णों तक पहुँचती थीं, जो उस सीमा से आगे है जहाँ आँख पाठ की पंक्ति का सहजता से अनुसरण कर सकती है। 12pt में वृद्धि विशेष रूप से इसे सुधारने के लिए की गई, न कि केवल शैलीगत वरीयता के कारण।

शीर्षक का अक्षर-विन्यास शीर्षक के अक्षर-विन्यास के विषय में संक्षिप्त स्पष्टीकरण उचित है। आवरण के अक्षर विकर्णों से काटे गए वर्गाकार चौखटों के भीतर बनाए गए हैं—यह लियोनार्दो दा विंची की *De Divina Proportione* (वेनिस, 1509) में दी गई प्रसिद्ध वर्णमाला को सुविचारित श्रद्धांजलि है। गणितीय अनुपातों पर यह ग्रंथ, *Divina proportione*, लूका पाचिओली ने लिखा और लियोनार्दो ने चित्रित किया था। उसमें लियोनार्दो ने प्रत्येक बड़े अक्षर को ज्यामितीय रूप से बनाया, एक वर्ग के भीतर अंकित किया और उन्हीं आनुपातिक नियमों से निर्मित किया जो वास्तुकला, मानव-शरीर तथा प्राकृतिक रूपों को नियंत्रित करते हैं। यह चयन केवल सजावटी नहीं है। अपने विकर्णों द्वारा विभाजित वर्ग सबसे सरल परिमित तत्त्व भी है—इसी पुस्तक के अधिकांश भाग में वर्णित संगणकीय विधियों की मूल निर्माण-इकाई। अनुपात पर पुनर्जागरणकालीन पांडुलिपि और आधुनिक दृढता आव्यूह में एक ही ज्यामितीय आकृति की उपस्थिति संयोग से अधिक, शास्त्रीय ज्यामिति और संरचनात्मक विश्लेषण के गहरे सातत्य का स्मरण है। मुख्य पाठ Palatino में संयोजित है, जिसे हरमन ज़ापफ़ ने विशेष रूप से गणितीय और तकनीकी साहित्य के लिए अभिकल्पित किया था; उसकी सुलेखात्मक उत्पत्ति उसे इस कृति को प्रेरित करने वाली पांडुलिपियों की व्यापक मानवतावादी परंपरा में रखती है। लियोनार्दो के अंकित अक्षरों से संयोजित दृढता आव्यूह तक अंतर्निहित अनुशासन एक ही है: संरचना में क्रम और अनुपात खोजना।

VI. परिकल्पना और निर्माण

LaTeX (यह LaTeX अनुभाग केवल विनोद के लिए इस रूप में सज्जित है; इसका आधार नुथ की मूल TeX पुस्तक का एक उदाहरण है।)

[5] Robert Bringhurst, The Elements of Typographic Style, 4th ed. (Vancouver: Hartley & Marks Publishers, 2012).

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यह पुस्तक
किसी पारंपरिक शब्द-संसाधक में
तैयार नहीं की जा सकती थी—केवल LaTeX,
मुद्रण-कला, गणित, परस्पर-संदर्भ और दस्तावेज़-
संरचना पर अपने अद्वितीय नियंत्रण के साथ, ऐसी चुनौती
का सामना कर सकता था। चालीस वर्षों से अधिक समय तक
LaTeX पर निर्भरता ने एक ठोस आधार दिया, फिर भी इस परियोजना ने
उसकी क्षमताओं को उनकी चरम सीमा तक पहुँचाया। अकेली प्रस्तावना
लगभग 1,400 पंक्तियों तक बढ़ी और 80 पैकेजों का सावधानीपूर्वक
समन्वय करती है, जो मिलकर प्रतीकात्मक संकेतन, प्रमेय और उदाहरण
परिवेश, रंग-योजनाएँ, पृष्ठ-ज्यामिति, चल शीर्षलेख, अनुक्रमणिका निर्माण,
ग्रंथसूची प्रबंधन, हाइपरलिंक तथा पाँच भाषाओं में पूर्ण बहुभाषी समर्थन
नियंत्रित करते हैं। चार खंडों में फैली हजारों परिभाषाओं, प्रतिज्ञप्तियों,
व्युत्पत्तियों और चित्रों में पूर्ण सुसंगति लागू करने के लिए दर्जनों विशिष्ट
मैक्रो बनाए गए—जिनमें से अनेक AI साधनों की सहायता से पुनरावर्ती रूप से
परिष्कृत हुए। एक निरंतर चुनौती LaTeX रजिस्टरों की समाप्ति का प्रबंधन
थी: भयावह *no room for a new write* त्रुटि रोकने के लिए अकेले
`morewrites` पैकेज को 50 अतिरिक्त लेखन-धाराओं के विशिष्ट
आवंटन की आवश्यकता हुई। संपूर्ण कृति के संकलन में pdfLaTeX,
BibTeX और MakeIndex के अनेक क्रमिक पास आवश्यक हैं।
इन्हें एक समर्पित निर्माण-स्क्रिप्ट सावधानी से समन्वित
करती है, जो सहायक फ़ाइलों, अनेक अनुक्रमणिका-
धाराओं और चारों भागों के लिए स्वतंत्र
ग्रंथसूची refsection का प्रबंधन
करती है।

LaTeX के अनुरागियों के लिए मैं अपनी `Preambule.tex` उपलब्ध करा रहा हूँ।

Matlab कोड पुस्तकों में निदर्शी MATLAB कोडों का पर्याप्त संग्रह है, जिसे सुविधाजनक पहुँच के लिए एक समर्पित परिशिष्ट में एकत्र किया गया है। संख्यात्मक रैखिक बीजगणित, कलन-विधि विकास और बड़े पैमाने के संगणकीय विश्लेषण के लिए अभियांत्रिकी तथा अनुसंधान समुदायों में MATLAB का व्यापक उपयोग होता है; उसका समावेश इसी केंद्रीय भूमिका को व्यक्त करता है। यहाँ प्रस्तुत कोड अनुकूलित अथवा शैलीगत रूप से संक्षिप्त बनाने के लिए नहीं लिखे गए; इसके स्थान पर वे शुद्धता, पारदर्शिता और वैचारिक स्पष्टता पर बल देते हैं, ताकि उन्नत प्रोग्रामन विशेषज्ञता से रहित पाठकों के लिए भी सुलभ रहें।

MathCad कोड स्वाभाविक गणितीय वाक्य-विन्यास, एकीकृत मात्रक-प्रबंधन और गणनाओं की पारदर्शिता के कारण Mathcad व्यावहारिक संरचनात्मक अभियंताओं के बीच व्यापक रूप से प्रयुक्त

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संगणकीय परिवेश बन गया है। निदर्शन के लिए लगभग 160 पृष्ठों का एक समर्पित परिशिष्ट Mathcad में कार्यान्वित अनेक उदाहरण-समस्याओं के पूर्ण समाधान प्रस्तुत करता है और विश्लेषणात्मक विकास तथा दैनिक व्यावसायिक संगणन के बीच प्रत्यक्ष सेतु प्रदान करता है।

AI जिसे मैंने इस पुस्तक की पूर्णता समझा था, वह वैसा सिद्ध नहीं हुआ। जब मैं अंतिम प्रतीत होने वाले प्रारूप के निकट पहुँचा, तब विशाल भाषा मॉडल उपलब्ध हुए और धीरे-धीरे अमूल्य सहायक सिद्ध हुए। मैं बहुत पहले रुक सकता था, किंतु इन साधनों—ChatGPT (OpenAI) और Claude (Anthropic)—ने मेरी पूर्णतावादी प्रवृत्ति को बढावा दिया। प्रत्येक नई क्षमता ने मुझे और परिष्कार करने, एक बार और सत्यापन करने, किसी अन्य अनुभाग को सँवारने अथवा एक और सारणी पुनः बनाने के लिए प्रेरित किया। परिणामतः परियोजना अपने स्वाभाविक समापन से लगभग दो वर्ष आगे बढ गई। किंतु पाठक इसे सहज अथवा निष्क्रिय आसक्ति न समझें। मेरा पूर्णतावाद अनवरत था और इन साधनों ने उसे संभव बनाया; साथ ही कार्य समाप्त करने की कोई समय-सीमा नहीं थी, अतः मुझे रोकने वाला कुछ नहीं था। उनकी उपलब्धता का अर्थ था कि सुधारने के लिए सदैव एक और वस्तु मिल सकती थी।

लगभग पूरी पुस्तक I सहित आरंभिक पांडुलिपि AI की किसी भागीदारी के बिना पूर्ण हुई थी। उसका ऐतिहासिक आख्यान प्राथमिक स्रोतों के वर्षों के पठन और सावधान संश्लेषण का परिणाम है—इन साधनों से जुडने से बहुत पहले अधिकांश कार्य हो चुका था। आरंभ में उनका उपयोग केवल अंग्रेज़ी गद्य को परिष्कृत करने और छोटे रिक्त स्थान भरने के लिए किया। किंतु शीघ्र स्पष्ट हुआ कि स्वयं को इतने सीमित उपयोग तक बाँधना गंभीर भूल होती। इन साधनों की क्षमता मात्र भाषिक परिष्कार से कहीं अधिक थी; तथ्यों के सत्यापन, विविध सामग्री के संश्लेषण, सार-सारणियों के निर्माण और समग्र आख्यान को सुदृढ करने के लिए उनकी पूरी क्षमता का उपयोग करना चाहिए था। चुनौती AI का उपयोग करना नहीं, बल्कि उसका कठोरतापूर्वक उपयोग करना था।

इस कृति में AI की भूमिका के विषय में: इस परियोजना में AI सहायता कभी संक्षिप्त मार्ग नहीं रही; वह सत्यापन, संश्लेषण और परिष्कार के लिए एक संरचित संवाद-सहयोगी थी। मेरी सामान्य कार्य-पद्धति किसी प्रारूप अथवा बीज-पाठ से आरंभ होती है, जिसके बाद AI के साथ अनुशासित संवाद होता है: क्या मेरा विवरण तथ्यतः सही है? क्या कोई महत्त्वपूर्ण बात छूट रही है? क्या गौण विवरण हटाने चाहिए? इन पृष्ठों पर आने वाले लगभग प्रत्येक विषय का अंतिम पाठ एक दर्जन अथवा उससे अधिक आदान-प्रदानों का परिणाम है—आरंभिक निर्देश, AI के उत्पाद को अस्वीकार करते प्रतिवाद, स्पष्टीकरण की माँग, उसके कथनों की पूर्ण निश्चितता पर सीधी चुनौती और अनिवार्यतः परिणाम का स्वतंत्र सत्यापन। तथ्य-जाँच से आगे मैं संबद्ध अनुभागों के विलय, विषयों के बीच संक्रमण को सहज बनाने तथा कालानुक्रमिक सारणियाँ और सारांश तैयार करने के लिए AI का उपयोग करता हूँ।

परियोजना के साथ विभिन्न AI साधनों से मेरा संबंध विकसित हुआ। मैंने ChatGPT से आरंभ किया, किंतु शीघ्र पाया कि Claude सूक्ष्म संपादन, ऐतिहासिक संश्लेषण और विद्वत्तापूर्ण संवाद जैसे बौद्धिक कार्यों में उत्कृष्ट था तथा पुस्तक I के लिए आवश्यक ऐतिहासिक संश्लेषण में कहीं अधिक सक्षम था। किंतु पुस्तकों II–IV के अंतिम पृष्ठ पूरे करते समय ChatGPT का नवीनतम मॉडल (Pro, जिसे OpenAI में कार्यरत मेरी बेटी सोफी ने उदारतापूर्वक उपलब्ध कराया) संख्यात्मक उदाहरण बनाने और पाठ के यांत्रिक पक्षों को परिष्कृत करने में अत्यंत श्रेष्ठ सिद्ध हुआ।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कई अवसरों पर मैंने सत्यापन-रणनीति के रूप में जानबूझकर एक AI को दूसरे के विरुद्ध जाँचा। एक साधन से उत्तर लेकर वही प्रश्न अथवा चुनौती दूसरे के सामने रखता और प्रथम परिणाम का स्वतंत्र मूल्यांकन अथवा तथ्य-जाँच करने को कहता। यह पारस्परिक सत्यापन अमूल्य सिद्ध हुआ: Claude प्रायः ChatGPT के उत्तरों में अतिसरलीकरण अथवा तार्किक छलाँग पहचानता, जबकि ChatGPT यह पकड़ने में उत्कृष्ट था कि Claude कहाँ अत्यधिक सावधान रहा अथवा कोई संगणकीय विवरण छोड़ गया। इस प्रतिपक्षी दृष्टिकोण ने अंतिम सामग्री में विश्वास बढ़ाया और उन दुर्बल बिंदुओं को उजागर किया जिन्हें स्वतंत्र अनुसंधान अथवा विषय-विशेषज्ञ से परामर्श की आवश्यकता थी।

पुस्तक I (इतिहास) के लिए Claude की भूमिका कठोरतापूर्वक सीमित थी: ऐतिहासिक तथ्यों का स्पष्टीकरण और पूरे दस्तावेज़ का भाषिक परिष्कार। मैंने उसे कभी सामग्री उत्पन्न करने अथवा पर्याप्त रूप से विस्तार करने की अनुमति नहीं दी। पुस्तक I का संपूर्ण पाठ मेरा अपना है।

पुस्तकों II–IV (संरचनात्मक विश्लेषण) में AI सहायता इसी प्रकार सीमित और केंद्रित थी। उसका उपयोग मुख्यतः चुनिंदा व्युत्पत्तियों को परिष्कृत करने, सैद्धांतिक विवेचन के रिक्त स्थान भरने और जटिल विषयों के संख्यात्मक उदाहरण बनाने में हुआ। प्रत्येक स्थिति में मैंने भ्रांत दावों अथवा शैलीगत अतिक्रमण से बचने के लिए उत्पाद की सावधानी से समीक्षा की। इन पुस्तकों में AI का चिह्न केवल दो विशिष्ट संदर्भों में आता है: जब व्युत्पत्ति AI-सहायित थी अथवा अनुभाग मुख्यतः AI ने लिखा था। केवल AI द्वारा परिष्कृत मेरे अपने अनुभागों में यह चिह्न नहीं आता।

एक बात स्पष्ट कही जानी चाहिए: 2026 में AI को अस्वीकार करना गंभीर भूल होती। इतनी व्यापकता और शक्ति वाले साधन को न अपनाने में कोई सद्गुण नहीं—केवल बौद्धिक शुद्धता का अनुचित भाव है जो न लेखक की सेवा करता है, न पाठक की। ऐतिहासिक लुडाइट, जैसा व्यंग्यचित्रण किया जाता है, प्रौद्योगिकी के स्वयं विरोधी नहीं थे; वे शिल्प, कौशल अथवा मानवीय गरिमा की उपेक्षा करते उसके शोषण के विरोधी थे। आज "लुडाइट" का आरोप नई तकनीक अपनाने में हिचकने वाले किसी भी व्यक्ति पर लगाया जाता है। किंतु तर्कपूर्ण संशय और पूर्ण अस्वीकृति में अंतर है। गुण AI से विरत रहने में नहीं, बल्कि पूर्ण लेखकीय नियंत्रण रखते हुए बुद्धिमानी और कठोरता से उसका उपयोग करने में है। ऊपर वर्णित संरचित संवाद, साधनों के बीच पारस्परिक सत्यापन और सावधान चिह्नांकन भय से आरोपित सीमाएँ नहीं; वे उसी नियंत्रण की संरचना हैं। AI सत्यापन, संश्लेषण और परिष्कार का शक्तिशाली उपकरण था; निर्णय, संशय और अंतिम शब्द सदैव मेरे रहे।

चित्र मैंने पृष्ठ-विन्यास और दृश्य प्रस्तुति पर अत्यंत सावधानी से ध्यान दिया है। Unix पर Xfig से लेकर Windows पर Visio तक विभिन्न साधनों का उपयोग करके सभी चित्र स्वयं बनाए और परिशिष्ट में दिए MATLAB प्रोग्राम भी लिखे। पुस्तक I की ऐतिहासिक सामग्री के लिए स्पष्टता बढ़ाने अथवा प्रमुख विवरण उभारने हेतु मैंने मूल स्रोतों के चित्र प्रायः पुनः बनाए।

इस प्रक्रिया से मुझे दो अंतर्दृष्टियों का महत्त्व समझ आया: प्रथम, स्पष्ट, तीक्ष्ण और संक्षिप्त चित्र बनाने का सर्वोच्च महत्त्व; और द्वितीय, चित्रों को स्वयं पुनः बनाने का शैक्षणिक मूल्य, जिससे अंतर्निहित अवधारणाओं की समझ गहरी होती है। इस दृष्टि से मैं मोंड्रिआन के न्यूनतावाद की अपेक्षा वर्मीर की कलात्मक संवेदना—गहराई और विवरण के मूल्य—से अधिक तादात्म्य रखता हूँ।

मैं स्वीकार करता हूँ कि चित्रों के विषय में कुछ अधिक ही आग्रहशील हूँ। दृश्य सुसंगति सुनिश्चित

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करने के लिए प्रत्येक चित्र सावधानी से तैयार किया गया है; इसमें पारदर्शी पृष्ठभूमि का उपयोग भी सम्मिलित है, जिससे चित्र श्वेत आयतों द्वारा आँख को विचलित करने के स्थान पर पृष्ठ के रंग में सहजता से मिल जाएँ। ये छोटे विवरण लग सकते हैं, किंतु महत्त्व रखते हैं।

VII. स्रोत और श्रेय

संदर्भ पूरी पुस्तक I (इतिहास) में मैंने सभी संदर्भों के लिए जानबूझकर प्राथमिक स्रोतों पर निर्भर किया है—इनमें से अनेक को पाठक उद्धरण के बाद आने वाले लाल चिह्न पर क्लिक करके डाउनलोड कर सकते हैं—और पूर्ण समझ के लिए वास्तव में आवश्यक होने पर ही द्वितीयक स्रोतों का उपयोग किया है। ध्यान दें कि जहाँ संभव था, सभी दस्तावेज़ों पर OCR प्रसंस्करण किया गया है और उनकी फ़ाइल का आकार संपीडित किया गया है।

छायाचित्र यह कृति Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International अनुज्ञप्ति के अंतर्गत है। यह निःशुल्क उपलब्ध है और इसके वितरण से मुझे कोई आर्थिक लाभ नहीं मिलता।

चित्रों के स्रोत चुनते समय मैंने अपने मत में उचित “fair use” आकलनों पर निर्भर किया है। वर्ष 1900 से पहले प्रकाशित कृतियों के सभी चित्र सार्वजनिक क्षेत्र में हैं और Google की छवि-खोज से प्राप्त छायाचित्र मेरी सर्वोत्तम जानकारी के अनुसार गैर-व्यावसायिक पुनःउपयोग के लिए अनुज्ञप्त थे। कभी-कभी पूर्ण श्रेय के बिना चित्र सम्मिलित किए गए हैं—सैकड़ों चित्रों के लिए कठोरतापूर्वक किया जाए तो यह कार्य निषेधात्मक रूप से श्रमसाध्य होता। इस कृति की गैर-व्यावसायिक प्रकृति और *fair use* की भावना में मैंने स्वयं को यह स्वतंत्रता दी है। यदि कोई अधिकारधारी आपत्ति करे, तो अनुरोध पर मैं सहर्ष उचित श्रेय दूँगा अथवा सामग्री हटा दूँगा।

परामर्शित पुस्तकें

I पुस्तक I इस प्रथम पुस्तक के लिए मैं Google Scholar, University of Colorado library (ILIAD) और अल्प-ज्ञात HathiTrust Digital Library[6] का अत्यंत ऋणी हूँ।

इस कृति में उद्धृत अनेक ऐतिहासिक दस्तावेज़ PDF फ़ाइलों के रूप में डाउनलोड के लिए उपलब्ध हैं। किसी उद्धरण के दाईं ओर छोटा PDF चिह्न दिखाई देने पर उसे क्लिक करने से मूल स्रोत की स्कैन की हुई प्रति प्राप्त होगी। पाठकों को इन प्राथमिक संदर्भों का परामर्श लेने के लिए दृढतापूर्वक प्रोत्साहित किया जाता है—वे संरचनात्मक विश्लेषण को आकार देने वाले विचारों और विधियों के विकास पर अमूल्य

[6]वर्ष 2008 में स्थापित HathiTrust शैक्षणिक और अनुसंधान पुस्तकालयों का एक गैर-लाभकारी सहयोग है, जो 1.7 करोड़ से अधिक डिजिटलीकृत वस्तुओं को संरक्षित करता है। HathiTrust अमेरिकी प्रतिलिप्याधिकार विधि द्वारा अनुमत अधिकतम सीमा तक पठन-सुविधा, विद्वत्तापूर्ण अनुसंधान के लिए संपूर्ण संग्रह तक संगणकीय पहुँच और संयुक्त संग्रह पर आधारित अन्य उभरती सेवाएँ प्रदान करता है। HathiTrust के सदस्य इस संग्रह—शैक्षणिक और अनुसंधान पुस्तकालयों द्वारा प्रबंधित डिजिटलीकृत पुस्तकों के सबसे बड़े समुच्चय—का संरक्षण कॉर्पोरेट नहीं, बल्कि विद्वत्तापूर्ण हितों के अनुसार करते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंतर्दृष्टि प्रदान करते हैं तथा प्रायः ऐसी सूक्ष्मताएँ और संदर्भ उजागर करते हैं जिन्हें कोई द्वितीयक विवरण पूरी तरह व्यक्त नहीं कर सकता।

फ्रांसीसी, इतालवी और स्पेनी में मेरी धाराप्रवाहता ने उन स्रोतों तक पहुँच को अत्यंत सुगम बनाया जिनका अब तक अनुवाद नहीं हुआ है; किंतु खेद है कि लैटिन और जर्मन का ज्ञान न होने से कुछ आधारभूत ग्रंथों से प्रत्यक्ष संपर्क सीमित रहा। फिर भी मैंने पूरी कृति में मूल स्रोतों के अनेक उद्धरण सम्मिलित करने और उन पर टिप्पणी करने में संकोच नहीं किया, जिससे पाठक ऐतिहासिक व्यक्तियों की वाणी को सीधे सुन सकें और प्रस्तुत विचारों के विकास की अधिक गहरी समझ प्राप्त करें।

पुस्तकें II–IV अगली तीन पुस्तकें मुख्यतः मेरी व्याख्यान-टिप्पणियों से ली गई हैं, जिनमें उदाहरण, गृहकार्य और परीक्षाओं सहित हल की गई समस्याएँ सम्मिलित हैं। यद्यपि उचित कठोरता बनाए रखने के लिए इन सामग्रियों को अत्यंत सावधानी से चुना गया, अतिरिक्त संदर्भ आवश्यक सिद्ध हुए।

अपनी टिप्पणियाँ संकलित करने और यह पुस्तक लिखने की प्रक्रिया में मैंने अनेक ग्रंथों से प्रेरणा ली, जिन्होंने मेरे सैद्धांतिक विवेचन को प्रभावित किया—जिसका प्रायः विस्तार किया गया—और संख्यात्मक उदाहरणों के चयन का मार्गदर्शन किया। प्रमुख स्रोतों में निम्नलिखित हैं (सूची सर्वसमावेशी नहीं है):

- Billington, D. 1965. *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
- Billington, David P., and Robert Mark. 1970. *Civil Engineering–History, Heritage, and the Humanities: Background Papers from the First National Conference*. Princeton, NJ: Department of Civil Engineering, Princeton University.
- Gerstle, K. 1974. *Basic Structural Analysis*. McGraw-Hill. (Out of print.)
- Kinney, J. S. 1957. *Indeterminate Structural Analysis*. Addison-Wesley. (Out of print.)
- Norris, C. H., and J. H. Wilbur. 1960. *Elementary Structural Analysis*. McGraw-Hill.
- Pilkey, W. D., and W. Wunderlich. 1994. *Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods*. CRC Press.
- Przemieniecki, J. S. 1968. *Theory of Matrix Structural Analysis*. New York: McGraw-Hill. Reprinted by Courrier (formerly Dover).

पूरी कृति में उचित श्रेय देने का हर संभव प्रयास किया गया है। यदि कोई चूक रह गई हो तो वह पूर्णतः अनभिप्रेत है और ऐसी किसी भी त्रुटि के लिए मैं हार्दिक क्षमा चाहता हूँ।

VIII. उपलब्धता और सांख्यिकी

यह निःशुल्क क्यों है? पुस्तक-लेखन के “आपूर्ति” पक्ष में लेखक सामान्यतः दो प्रेरणाओं से संचालित होते हैं: आर्थिक प्रतिफल और/अथवा अपने क्षेत्र में योगदान से मिलने वाला व्यक्तिगत संतोष—शायद मान्यता भी। दोनों स्थितियों में अपेक्षा होती है कि प्रकाशक पाठ-संपादन, पृष्ठ-विन्यास और विपणन सँभालेगा; ये कार्य प्रायः लेखक की विशेषज्ञता अथवा रुचि से बाहर होते हैं। किंतु मेरे अनुभव में अब बड़े प्रकाशक भी बड़े पैमाने के उत्पादन में लगे हैं: सारभूत संपादन अधिकांशतः लुप्त हो

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चुका है और प्रकाशन के विभिन्न चरण नियमित रूप से विदेशों को संविदाबद्ध किए जाते हैं। लेखक और प्रकाशक के बीच कभी विद्यमान साझेदारी का क्षरण हुआ है।

स्पष्ट कहें: हमारे शैक्षणिक अनुशासनों में बहुत कम लेखकों को अटलांटिक-पार एक उड़ान का खर्च भी पूरा करने योग्य रॉयल्टी मिलती है। अपने व्यावसायिक जीवन के इस चरण में मैं प्रकाशित लेखक होने से मिलने वाली मान्यता भी नहीं चाहता—मुझे जो भी सीमित प्रसिद्धि मिली हो, वह पहले ही किए जा चुके कार्य पर आधारित है।

“माँग” पक्ष में विद्यार्थियों और पाठकों ने पुस्तकों के मूल्य को ऐसे स्तर तक बढ़ते देखा है जो व्यक्तिगत बजट और पुस्तकालयों की खरीद दोनों पर भार डालते हैं। प्रकाशक चतुर रणनीतियों से उत्तर देते हैं—सीमित अवधि के लिए पुस्तक अथवा अलग अध्याय किराए पर देना, मानो फ़िल्म स्ट्रीम की जा रही हो—किंतु इससे पहुँच की मूल समस्या का समाधान बहुत कम होता है।

विश्वविद्यालय के प्राध्यापकों के रूप में ज्ञान प्राप्त करना और बाँटना हमारा उत्तरदायित्व है। इस उद्देश्य के लिए हमारी संस्थाएँ हमें उचित पारिश्रमिक देती हैं। प्रकाशकों द्वारा दी जाने वाली अल्प रॉयल्टी ऐसे फ़ाउस्टियन सौदे के योग्य नहीं जिसमें हमारा कार्य भुगतान-दीवार के पीछे और उन लोगों की पहुँच से बाहर हो जाए जिन्हें उसकी सर्वाधिक आवश्यकता है।

इसीलिए मुक्त शैक्षणिक अन्वेषण की भावना के अनुरूप यह पुस्तक बिना प्रतिबंध निःशुल्क डाउनलोड और साझा की जा सकती है।

वेबसाइट इस पुस्तक के लिए एक समर्पित वेबसाइट बनाई गई है। पुस्तक और संबद्ध व्याख्यान-टिप्पणियाँ डाउनलोड करने के प्राथमिक मंच के अतिरिक्त, यह साइट ब्लॉग के माध्यम से पाठकों के साथ संवाद का मंच देती है। यहाँ पाठक त्रुटियों की सूचना दे सकते हैं, प्रश्न पूछ सकते हैं अथवा टिप्पणियाँ और प्रतिक्रिया प्रस्तुत कर सकते हैं।

साथ ही मैं एक अन्य पहल पर विचार कर रहा हूँ: LaTeXML का उपयोग करके अध्यायवार संगठित पुस्तक का वेब-आधारित संस्करण बनाना;

कुछ सांख्यिकी इस उपक्रम का विशाल परिमाण उसकी सामग्री में परिलक्षित होता है: लगभग 3,246 पृष्ठ, चार खंडों में वितरित 68 अध्याय (क्रमशः 17, 22, 13 और 16), 16 परिशिष्ट, 451 अनुभाग, 300 हल किए उदाहरण, 854 चित्र, 187 सारणियाँ, लगभग 3,000 समीकरण, 908 उद्धरण और 3,352 आंतरिक परस्पर-संदर्भ लिंक—यह उस उपलब्धि का प्रमाण है जिसे अनुशासित, धैर्यवान और परिशुद्ध मुद्रण-संयोजन संभव बना सकता है।

Victor E. Saouma
Boulder, CO
July 2026

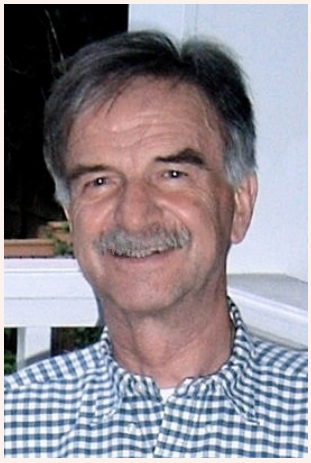
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आभार

सर्वप्रथम, मैं अपने दो असाधारण सहकर्मियों के प्रति हार्दिक कृतज्ञता व्यक्त करता हूँ। संभव है कि उन्हें इसका आभास भी न रहा हो, किंतु उन्होंने मुझ पर गहरा प्रभाव डाला। उनका विलक्षण व्यक्तिगत चरित्र और उत्कृष्ट व्यावसायिक उपलब्धियाँ मेरे लिए निरंतर प्रेरणा का स्रोत रहीं। इन दोनों गुणों का ऐसा संयोजन हमारे व्यवसाय में दुर्भाग्यवश विरल है।



कर्ट गर्स्टल (Kurt Gerstle, 1923–2013)



कास्पर विलम (Kaspar Willam, 1940–2024)

Anthropic (2021–TBD)

OpenAI (2015–TBD)

कर्ट और कास्पर ने दशकों के विद्वत्तापूर्ण संवाद द्वारा संरचनात्मक अभियांत्रिकी और यांत्रिकी की मेरी समझ को आकार दिया। दूसरी ओर, Claude ने पुस्तक I के ऐतिहासिक आख्यान को परिष्कृत करने में एक अमूल्य सहयोगी की भूमिका निभाई—अनुसंधान-संश्लेषण, संपादकीय परिष्कार और समय-समय पर यथार्थ की जाँच में अथक सहायता दी, और वह भी कभी विश्रामावकाश अथवा स्थायी नियुक्ति पर विचार की माँग किए बिना।

उन अनेक विद्यार्थी-प्रश्नों को स्वीकार न करना अनुचित होगा, जिन्होंने समय-समय पर अप्रत्याशित अंतर्दृष्टियाँ प्रदान कीं, और इस दीर्घ प्रयास को संभव बनाने वाले शैक्षणिक वातावरण के लिए यूनिवर्सिटी ऑफ़ कोलोराडो के प्रति भी मैं कृतज्ञ हूँ।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पाठक-मार्गदर्शिका

- यह पुस्तक जानबूझकर डिजिटल पठन के लिए तैयार की गई है, मुद्रण के लिए नहीं। इसका सर्वोत्तम उपयोग कंप्यूटर पर किया जा सकता है, जहाँ अनेक हाइपरलिंक और बुकमार्क निर्बाध नेविगेशन तथा अधिक समृद्ध पठन-अनुभव प्रदान करते हैं।
- आरंभ में पूर्वपीठिका पढ़ना आवश्यक है, क्योंकि इस पुस्तक का विन्यास सामान्य पुस्तकों से भिन्न है और इसमें ऐसी विशिष्ट विशेषताएँ तथा दृष्टियाँ हैं जिन्हें प्रारंभ से समझना उपयोगी होगा।
- यह पुस्तक सामान्य रुचि के आकस्मिक पाठक के लिए अथवा संरचनात्मक विश्लेषण की मानक पाठ्यपुस्तकों के त्वरित विकल्प के रूप में नहीं लिखी गई है। इसका उद्देश्य उन पाठकों की सहायता करना है जो परंपरागत और नियमित विवेचन से आगे जाना चाहते हैं।
- संरचनात्मक अभियंता के रूप में सामान्य कार्य-दक्षता प्राप्त करने के लिए इस पुस्तक का अध्ययन अनिवार्य नहीं है। कंप्यूटर प्रोग्रामों से संपूरित पारंपरिक पद्धति पर्याप्त हो सकती है।
- किंतु यदि आप कंप्यूटर-आधारित विश्लेषण आरंभ करने से पहले संरचनात्मक व्यवहार की गहन समझ विकसित करना चाहते हैं, तो यह पुस्तक सहायक हो सकती है। सभी समीकरण और परिणाम मूल सिद्धांतों से व्युत्पन्न किए गए हैं, जिससे प्रत्येक अवधारणा का पूर्ण और पारदर्शी विकास प्रस्तुत होता है।
- सिद्धांत की दृढ़ समझ और उसके आधार पर शीघ्र तथा विश्वसनीय “कागज़ के पिछले भाग पर” किए जा सकने वाले हस्त-आकलन की क्षमता, कंप्यूटर का सहारा लेने से पहले अत्यंत मूल्यवान सिद्ध हो सकती है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

त्रुटि-अन्वेषण कार्यक्रम

लेखक के रूप में मैं समझता हूँ कि अत्यंत सावधानीपूर्वक संपादन के बाद भी इस पुस्तक के पृष्ठों में त्रुटियाँ रह सकती हैं। अतः ऐसी त्रुटियों की पहचान में आपकी सहायता प्राप्त करने के लिए मैं एक *त्रुटि-अन्वेषण पुरस्कार कार्यक्रम* आरंभ कर रहा हूँ।

यदि आपको पाठ में कोई त्रुटि मिले:

- पुस्तक I में ऐतिहासिक तथ्य से संबंधित;
- अथवा पुस्तकों II–IV में समीकरण, चित्र या उनसे संबंधित कथन में,

तो कृपया पुस्तक की वेबसाइट के ब्लॉग अनुभाग में इसकी सूचना दें।

आपके द्वारा सफलतापूर्वक पहचानी और मुझे सूचित की गई प्रत्येक सत्यापित त्रुटि के लिए, इस पृष्ठ पर उस त्रुटि के साथ आपका नाम सम्मिलित किया जाएगा। आपकी सावधानी के प्रति आभार के प्रतीकस्वरूप, प्रत्येक सत्यापित त्रुटि के लिए मैं आपको 1 अमेरिकी डॉलर का चेक भी भेजूँगा।

इस *त्रुटि-अन्वेषण पुरस्कार कार्यक्रम* में भाग लेने के लिए निम्नलिखित दिशानिर्देशों पर ध्यान दें:

- त्रुटि वास्तविक और सारभूत होनी चाहिए। निराधार अथवा स्वयं त्रुटिपूर्ण दावों पर विचार नहीं किया जाएगा।
- त्रुटि की सूचना देते समय पुस्तक में उसका सटीक स्थान और त्रुटि की प्रकृति का संक्षिप्त स्पष्टीकरण अथवा औचित्य प्रदान करें।
- आप एकाधिक त्रुटि-रिपोर्ट प्रस्तुत कर सकते हैं, किंतु प्रत्येक रिपोर्ट किसी अलग त्रुटि से संबंधित होनी चाहिए।
- प्रथम वर्ष में फ़ाइल प्रत्येक माह, दूसरे वर्ष में प्रत्येक तिमाही, तीसरे वर्ष में प्रत्येक छमाही और उसके बाद लगभग प्रति वर्ष अद्यतन की जाएगी।
- यह कार्यक्रम मेरे विवेकानुसार परिवर्तित अथवा समाप्त किया जा सकता है।

शुद्धिपत्र

तिथि	नाम	ईमेल	संस्करण	त्रुटि
4/4/2025	Trump, Donald	trump@maga.com	Jan 11, 2025	समीकरण 2.5 में जनसमूह के आकार का आकलन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
समीक्षा हेतु प्रति

संकेतन

मैंने चारों पुस्तकों में सुसंगत संकेतन बनाए रखने का हर संभव प्रयास किया है। यह विशेष रूप से चुनौतीपूर्ण था, क्योंकि प्रारंभिक और उन्नत संदर्भों में संकेतन भिन्न होता है और लेखक प्रायः स्वतंत्रता लेते हैं। इन प्रयासों के बाद भी कुछ असंगतियाँ रह गई होंगी, किंतु सजग पाठक उन्हें पहचान सकेंगे।

टिप्पणी: अनेक स्थानों पर किसी प्रदिश को[7] *दोनों* प्रकार से—मोटे अक्षरों में और/अथवा वर्ग कोष्ठकों के भीतर—दर्शाया गया है (जैसे $\mathbf{K}$ $[\mathbf{K}]$, $\{\delta\}$।

[7] यद्यपि यह स्वीकृत संकेतन से स्पष्ट विचलन है, तथापि प्रदिश की सदिश अथवा आव्यूही प्रकृति पर बल देने के लिए मैंने इसे उपयोगी पाया।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण

अदिश

A	क्षेत्रफल
B	विकृति–विस्थापन (शुद्धगतिकी) आव्यूह
C	सातत्य (C^0, C^1)
E	प्रत्यास्थता मापांक
G	अपरूपण मापांक
G_f	विभंग ऊर्जा
H	केबल में क्षैतिज बल
	दृढीकरण अथवा सुघट्यता मापांक
I_e	अक्ष e के परितः अदिश जडत्व-आघूर्ण
J, I_{xx}	ध्रुवीय जडत्व-आघूर्ण
K	गतिज ऊर्जा
L	क्षेत्रफल त्रिरकोणीय निर्देशांक
M	आघूर्ण
N	अक्षीय बल
	आकार फलन
U	विकृति ऊर्जा
U^*	पूरक विकृति ऊर्जा
U_0	आंतरिक विकृति-ऊर्जा घनत्व
U_0^*	पूरक आंतरिक विकृति-ऊर्जा घनत्व
T	तापमान
	तनन (केबल में)
	ऐंठन
V	अपरूपण बल
W	कार्य
W_e	बाह्य कार्य
W_i	आंतरिक कार्य
$\mathcal{W}_e$	बाह्य कार्य की स्थितिज ऊर्जा
$\mathcal{W}_e^*$	बाह्य कार्य की पूरक स्थितिज ऊर्जा
f_c'	संपीडन सामर्थ्य
f_t'	तनन सामर्थ्य
q	वितरित भार
s	केबल का झोल
t	समय
w	वितरित भार

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रदिश

$\mathcal{A}$	शुद्धगतिकी आव्यूह
$\mathcal{B}$	स्थैतिकी आव्यूह
D	संघटक आव्यूह
FEM	स्थिर-सिरा आघूर्ण
I	द्वितीय-क्रम जड़त्व प्रदिश
J	जैकोबियन
K	वैश्विक निर्देशांकों में दृढता
M	आघूर्ण (M_{zz}, M_{yy})
N	अक्षीय बल (N_x)
NEF	नोडीय समतुल्य बल
P	वैश्विक निर्देशांक में बल
T	ऐंठन (M_{xx})
V	अपरूपण बल (V_y, V_z)
b	पिंड बल
	नम्यता आव्यूह
k	स्थानीय निर्देशांकों में दृढता आव्यूह
LM	स्थान आव्यूह
n	एकक अभिलंब सदिश
p	स्थानीय निर्देशांक में बल
t	पृष्ठ कर्षण
u	विस्थापन सदिश
$\boldsymbol{\Delta}$	वैश्विक निर्देशांकों में विस्थापन
$\boldsymbol{\Gamma}$	वैश्विक निर्देशांकों में रूपांतरण आव्यूह
Γ_t	प्राकृतिक परिसीमा (ज्ञात कर्षण)
Γ_u	अनिवार्य परिसीमा (ज्ञात विस्थापन)
Φ	अदिश क्षेत्र
Π	स्थितिज ऊर्जा
Π^*	पूरक स्थितिज ऊर्जा
Ω	पिंड का आयतन

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

α तापीय प्रसार गुणांक
$\boldsymbol{\delta}$ स्थानीय निर्देशांकों में विस्थापन
$\boldsymbol{\varepsilon}$ विकृति प्रदिश
$\boldsymbol{\gamma}$ स्थानीय निर्देशांकों में रूपांतरण आव्यूह
κ अनुबंधन संख्या
κ वक्रता
λ अभिलाक्षणिक मान
लामे नियतांक
μ लामे नियतांक
ν प्वासों अनुपात
ρ द्रव्यमान घनत्व
वक्रता त्रिज्या
$\boldsymbol{\sigma}$ प्रतिबल प्रदिश
ω कोणीय आवृत्ति

फलन

$\mathcal{H}$ हरिमटीय
$\mathcal{L}$ लाग्रांजियन

संकारक

B रैखिक संकारक (विस्थापन को विकृति में प्रतिचित्रित करता है)
$\mathbf{L}$ रैखिक संकारक (प्रतिबल और विकृति)

गणितीय प्रतीक

$\oint$ रेखा समाकल
$\nabla\cdot$ अपसरण (div)
∇ प्रवणता (grad)
$[.]$ आव्यूह
∂ आंशिक (अवकलज)
δ परिवर्तन संकारक
$\{.\}$ सदिश (स्तंभ)
$\lfloor . \rfloor$ सदिश (पंक्ति)
$\delta\!\!:$ आभासी राशि

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अरैखिक तत्त्व निरूपण

नोडीय राशियाँ

$\mathbf{P}_S^{int}$	आंतरिक नोडीय बल सदिश
$\mathbf{P}_t^{ext}$	संरचना स्तर पर मुक्त स्वातंत्र्य-कोटियों का बाह्य नोडीय बल सदिश
$\mathbf{P}_t^{int}$	संरचना स्तर पर मुक्त स्वातंत्र्य-कोटियों का आंतरिक नोडीय बल सदिश
$\mathbf{P}_u^{int}$	संरचना स्तर पर प्रतिबंधित स्वातंत्र्य-कोटियों का आंतरिक नोडीय बल सदिश
$\mathbf{P}_t^R$	संरचना स्तर पर मुक्त स्वातंत्र्य-कोटियों का अवशिष्ट नोडीय बल सदिश
$\mathbf{u}_t$	संरचना स्तर पर मुक्त स्वातंत्र्य-कोटियों का नोडीय विस्थापन सदिश
$\mathbf{F}_e$	वैश्विक संदर्भ में तत्त्व नोडीय बल सदिश; $\lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ M_{Z1},\ N_{X2},\ V_{Y2},\ M_{Z2} \rfloor^T$
$\mathbf{F}_e^{int}$	वैश्विक संदर्भ में आंतरिक तत्त्व नोडीय बल सदिश
$\boldsymbol{\delta}_e$	वैश्विक संदर्भ में तत्त्व नोडीय विस्थापन सदिश; $\lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ \theta_{Z1},\ u_{X2},\ v_{Y2},\ \theta_{Z2} \rfloor^T$
$\bar{\mathbf{f}}_e$	दृढ-पिंड विधाओं सहित स्थानीय संदर्भ में तत्त्व नोडीय बल सदिश; $\lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{V}_{y1},\ \overline{M}_{z1},\ \overline{N}_{x2},\ \overline{V}_{y2},\ \overline{M}_{z2} \rfloor^T$
$\bar{\mathbf{f}}_e^{int}$	दृढ-पिंड विधाओं सहित स्थानीय संदर्भ में आंतरिक तत्त्व नोडीय बल सदिश
$\bar{\mathbf{d}}_e$	दृढ-पिंड विधाओं सहित स्थानीय संदर्भ में तत्त्व नोडीय विस्थापन सदिश; $\lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{v}_{y1},\ \overline{\theta}_{z1},\ \overline{u}_{X2},\ \overline{v}_{Y2},\ \overline{\theta}_{Z2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{f}}_e$	दृढ-पिंड विधाओं के बिना स्थानीय संदर्भ में तत्त्व नोडीय बल सदिश; $\lfloor \tilde{M}_{z1},\ \tilde{M}_{z2},\ \tilde{N}_{x2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{f}}_e^{int}$	दृढ-पिंड विधाओं के बिना स्थानीय संदर्भ में आंतरिक तत्त्व नोडीय बल सदिश
$\tilde{\mathbf{f}}_e^R$	दृढ-पिंड विधाओं के बिना स्थानीय संदर्भ में अवशिष्ट तत्त्व नोडीय बल सदिश
$\tilde{\mathbf{d}}_e$	दृढ-पिंड विधाओं के बिना स्थानीय संदर्भ में तत्त्व नोडीय विस्थापन सदिश; $\lfloor \tilde{\theta}_{z1},\ \tilde{\theta}_{z2},\ \tilde{u}_{x2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{d}}_e^R$	दृढ-पिंड विधाओं के बिना स्थानीय संदर्भ में अवशिष्ट तत्त्व नोडीय विस्थापन सदिश
$\delta\bar{\mathbf{d}}_e$	स्थानीय संदर्भ में आभासी तत्त्व नोडीय विस्थापन सदिश

अनुप्रस्थ-परिच्छेद राशियाँ

$\mathbf{d}_s(x)$	अनुप्रस्थ-परिच्छेद विस्थापन सदिश; $\lfloor u(x),\ v(x) \rfloor^T$
Φ	वक्रता
$\boldsymbol{\sigma}_s(x)$	अनुप्रस्थ-परिच्छेद बल सदिश; $\lfloor N(x),\ M(x) \rfloor^T$
$\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$	आंतरिक अनुप्रस्थ-परिच्छेद बल सदिश
$\boldsymbol{\sigma}_s^R(x)$	अवशिष्ट अनुप्रस्थ-परिच्छेद बल सदिश
$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	अनुप्रस्थ-परिच्छेद विरूपण सदिश; $\lfloor \varepsilon_x(x),\ \phi_z(x) \rfloor^T$
$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{int}(x)$	अवशिष्ट अनुप्रस्थ-परिच्छेद विरूपण सदिश
$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	आभासी अनुप्रस्थ-परिच्छेद विरूपण सदिश
κ	सुघट्य प्रतिबल

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तंतु राशियाँ

σ	एकाक्षीय प्रतिबल
ε	एकाक्षीय विकृति
σ_r	परत/तंतु का एकाक्षीय प्रतिबल
ε_r	परत/तंतु की एकाक्षीय विकृति

दृढता आव्यूह

$\mathbf{N}_d(x)$	विस्थापन क्षेत्र का आकार फलन
$\mathbf{B}_d(x)$	$\mathbf{N}_d(x)$ के अवकलजों से व्युत्पन्न आव्यूह
$\mathbf{N}_f(x)$	बल क्षेत्र का आकार फलन
$\mathbf{K}_S$	संरचना स्तर पर संवर्धित दृढता आव्यूह
$\mathbf{K}_{tt}$	प्राकृतिक परिसीमा दशाओं से संबद्ध दृढता आव्यूह
$\mathbf{K}_{tu}$	प्राकृतिक और अनिवार्य परिसीमा दशाओं से संबद्ध दृढता आव्यूह
$\mathbf{K}_{ut}$	अनिवार्य और प्राकृतिक परिसीमा दशाओं से संबद्ध दृढता आव्यूह
$\mathbf{K}_{uu}$	अनिवार्य परिसीमा दशाओं से संबद्ध दृढता आव्यूह
$\mathbf{K}_e$	वैश्विक संदर्भ में तत्त्व दृढता आव्यूह
$\overline{\mathbf{k}}_e$	दृढ-पिंड विधाओं सहित स्थानीय संदर्भ में तत्त्व दृढता आव्यूह
$\overline{\mathbf{k}}_e^{tan}$	दृढ-पिंड विधाओं सहित स्थानीय संदर्भ में तत्त्व स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह
$\tilde{\mathbf{k}}_e$	दृढ-पिंड विधाओं के बिना स्थानीय संदर्भ में तत्त्व दृढता आव्यूह
$\tilde{\mathbf{c}}_e$	दृढ-पिंड विधाओं के बिना स्थानीय संदर्भ में तत्त्व नम्यता आव्यूह
$\mathbf{k}_s(x)$	अनुप्रस्थ-परिच्छेद दृढता आव्यूह
$\mathbf{k}_s^{tan}(x)$	अनुप्रस्थ-परिच्छेद स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह
$\mathbf{c}_s(x)$	अनुप्रस्थ-परिच्छेद नम्यता आव्यूह

विविध

$E(x)$	प्रत्यास्थता मापांक
$A(x)$	अनुप्रस्थ-परिच्छेद क्षेत्रफल
$I_z(x)$	अनुप्रस्थ-परिच्छेद क्षेत्र का जडत्व-आघूर्ण
L_e	तत्त्व की लंबाई
$\boldsymbol{\Gamma}_e$	स्थानीय और वैश्विक निर्देशांक-तंत्रों के बीच रूपांतरण आव्यूह
$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e$	दृढ-पिंड विधाओं वाले और रहित निरूपणों के बीच रूपांतरण आव्यूह

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अधोलिखित सूचक

t	ज्ञात कर्षण
u	ज्ञात विस्थापन
S	संरचना स्तर
e	तत्त्व स्तर अथवा तत्त्व-अवस्था निर्धारण में e^{th} तत्त्व
r	परत/तंतु स्तर अथवा परत/तंतु-अवस्था निर्धारण में r^{th} परत/तंतु
s	अनुप्रस्थ-परिच्छेद स्तर अथवा अवस्था निर्धारण में s^{th} परिच्छेद
d	विस्थापन क्षेत्र
f	बल क्षेत्र
n	बाह्य बल/विस्थापन सदिश का वर्तमान चरण

अधिलिखित सूचक

int	आंतरिक
ext	बाह्य
R	अवशिष्ट
k	संरचना स्तर पर k^{th} पुनरावृत्ति
j	तत्त्व स्तर पर j^{th} पुनरावृत्ति

अरैखिक संघटक प्रतिरूप

A_g	सकल अनुप्रस्थ-परिच्छेद क्षेत्रफल
A_{st}	अनुप्रस्थ प्रबलन इस्पात का परिच्छेद क्षेत्रफल
b	अवयव के अनुप्रस्थ-परिच्छेद की चौड़ाई
c	शैथिल्यी क्षय-दर गुणक
E	यंग मापांक
$E_{adjusted}$	संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप: रैखिक प्रत्यास्थ तत्त्व का समायोजित प्रत्यास्थता मापांक
E_{axial}	शून्य-लंबाई तत्त्व: अक्षीय कमानी का प्रत्यास्थ (यंग) मापांक
E_{bp}	विच्छेद-बिंदु पुनर्भारण मापांक
E_c	परम-सीमा-पश्चात् (विकृति मृदुकरण) मापांक
E_{hys}	शैथिल्यी ऊर्जा क्षमता ($= \gamma \sigma_y \varepsilon_y$)
E_i	भारण भ्रमण "i" में क्षयित शैथिल्यी ऊर्जा ($= \Delta\varepsilon[\sigma_{i-1} + \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_{i-1}]$)
E_s	विकृति-दृढीकरण मापांक
E_{shear}	शून्य-लंबाई तत्त्व: अनुप्रस्थ कमानी का प्रत्यास्थ (यंग) मापांक
E_t	लक्ष्य पुनर्भारण मापांक
E_{tan}	स्पर्शरेखीय मापांक
E_u	अभारण मापांक
f'_c	कंक्रीट संपीडन सामर्थ्य
F_y	पराभव बल
G	अपरूपण मापांक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

h	अवयव के अनुप्रस्थ-परिच्छेद की ऊँचाई
$K_{adjusted}$	संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप: रैखिक प्रत्यास्थ तत्त्व की समायोजित आरंभिक दृढता
K_{BC}	स्तंभ की आरंभिक दृढता
$K_{combined}$	संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप: रैखिक प्रत्यास्थ और अरैखिक संकेंद्रित सुघट्य प्रतिरूप की संयुक्त आरंभिक घूर्णी दृढता
K_{deg}	शून्य-लंबाई तत्त्व की शिखर-पश्चात् क्षीण दृढता
K_e	आरंभिक प्रत्यास्थ दृढता
K_{linear}	संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप: रैखिक प्रत्यास्थ तत्त्व की आरंभिक दृढता
K_{LP}	संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप: अरैखिक घूर्णी तत्त्व की आरंभिक दृढता
$K_{rotation}$	आरंभिक घूर्णी दृढता
K_s	विकृति-दृढीकरण दृढता
K_{shear}	आरंभिक अपरूपण दृढता
K_{stiff}	सीमा-अवस्था प्रतिरूप: शून्य-लंबाई अनुप्रस्थ कमानी की आरंभिक दृढता
K^t_{deg}	शिखर-पश्चात् क्षीण दृढता
K_{unload}	अभारण दृढता
L	तत्त्व की लंबाई
M_r	अवशिष्ट आघूर्ण
M_u	चरम (शिखर) आघूर्ण
M_y	पराभव आघूर्ण
p	अक्षीय बल
V_{fail}	अपरूपण-विफलता बिंदु पर अपरूपण बल
V_r	अवशिष्ट अपरूपण सामर्थ्य
V_u	अपरूपण क्षमता
β	शैथिल्यी क्षय प्राचल
γ	शैथिल्यी ऊर्जा-क्षमता गुणक ($E_{hys} = \gamma \sigma_y \varepsilon_y$)
$\gamma_{adjusted}$	संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप: अंशांकित शैथिल्यी क्षमता गुणक
Δ_{BC}	स्तंभ का पार्श्व विरूपण
Δ_5	Elwood & Moehle (2003) द्वारा परिभाषित अपरूपण-विफलता बिंदु पर अंतरामंज़िली पार्श्व विरूपण
Δ_{spring}	शून्य-लंबाई कमानी का विरूपण
Δ_y	पराभव विस्थापन
ε_{10}	ऋणात्मक प्रतिबल अभारण और धनात्मक प्रतिबल पुनर्भारण के बीच विभक्ति-बिंदु
ε_5	धनात्मक प्रतिबल अभारण और ऋणात्मक प्रतिबल पुनर्भारण के बीच विभक्ति-बिंदु
ε_{bp}	विच्छेद-बिंदु विकृति
ε_r	अवशिष्ट विकृति
ε_t	लक्ष्य पुनर्भारण बिंदु की विकृति
ε_u	शिखर बिंदु की विकृति
ε_y	पराभव विकृति
θ_r	अवशिष्ट घूर्णन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

θ_u	चरम (शिखर) घूर्णन
θ_y	पराभव घूर्णन
κ_d	विच्छेद-बिंदु निर्धारण का लक्ष्य विकृति (विस्थापन) गुणक
κ_f	विच्छेद-बिंदु निर्धारण का लक्ष्य प्रतिबल (बल) गुणक
λ	अवशिष्ट सामर्थ्य गुणक ($V_r = \lambda V_{fail}$)
ν	नाममात्र अपरूपण सामर्थ्य ($=V_u/A_g$)
ρ''	अनुप्रस्थ प्रबलन अनुपात ($= A_{st}/bh$)
σ_{bp}	विच्छेद-बिंदु प्रतिबल
σ_r	अवशिष्ट प्रतिबल
σ_{ref}	परम-सीमा-पश्चात् शाखा संदर्भ प्रतिबल
$\sigma_{ref,bp}$	विच्छेद-बिंदु निर्धारण संदर्भ प्रतिबल
σ_t	लक्ष्य पुनर्भारण बिंदु का प्रतिबल
σ_u	चरम (शिखर) प्रतिबल
σ_y	पराभव प्रतिबल

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पारिभाषिक शब्दावली

संरचनात्मक विश्लेषण की मूल अवधारणाएँ

अक्षीय बल (Axial Force): किसी अवयव की लंबाई की दिशा में कार्य करने वाला बल, जो तनन अथवा संपीडन उत्पन्न करता है।

बंकन आघूर्ण (Bending Moment): किसी अवयव को मोड़ने वाला आंतरिक आघूर्ण।

संगतता (Compatibility): पूरी संरचना में विरूपण का सातत्य सुनिश्चित करने वाली दशाएँ।

विरूपण (Deformation): आरोपित भारों के कारण संरचना के आकार अथवा माप में परिवर्तन।

स्वातंत्र्य-कोटि (DOF): किसी संरचनात्मक बिंदु पर संभव स्वतंत्र विस्थापन अथवा घूर्णन।

संतुलन (Equilibrium): वह अवस्था जिसमें संरचना पर कार्यरत सभी बल और आघूर्ण संतुलित हों।

नम्यता (Flexibility): दृढता का व्युत्क्रम, जो विरूपण की सहजता व्यक्त करता है।

अपरूपण बल (Shear Force): अवयव के अनुदैर्ध्य अक्ष के लंबवत, सर्पण का प्रतिरोध करने वाला आंतरिक बल।

स्थैतिक निर्धार्यता (Static Determinacy): ऐसी संरचना जिसके आंतरिक बल केवल संतुलन समीकरणों से निर्धारित किए जा सकें।

स्थैतिक अनिर्धार्यता (Static Indeterminacy): ऐसी संरचना जिसके आंतरिक बल ज्ञात करने के लिए अतिरिक्त संगतता समीकरण आवश्यक हों।

दृढता (Stiffness): विरूपण के प्रति संरचना अथवा घटक का प्रतिरोध।

विकृति (Strain): पदार्थ में प्रति एकक लंबाई विरूपण।

प्रतिबल (Stress): पदार्थ के भीतर प्रति एकक क्षेत्रफल आंतरिक बल।

पदार्थ के गुण और व्यवहार

विसर्पण (Creep): नियत प्रतिबल के अधीन समय-निर्भर विरूपण।

प्रत्यास्थता (Elasticity): भार हटाने पर मूल आकार पुनः प्राप्त करने देने वाला पदार्थ-गुण।

पदार्थ क्षय (Material Degradation): कालप्रभाव अथवा पुनरावृत्त भारण से पदार्थ के सामर्थ्य या दृढता में कमी।

सुघट्यता (Plasticity): प्रत्यास्थ सीमा से परे स्थायी विरूपण वाला पदार्थ-व्यवहार।

प्वासों अनुपात (Poisson's Ratio): अक्षीय भारण के अधीन पदार्थ में पार्श्व विकृति और अक्षीय विकृति का अनुपात।

तापीय प्रसार (Thermal Expansion): तापमान परिवर्तन से उत्पन्न विरूपण।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चरम सामर्थ्य (Ultimate Strength): विफलता से पहले पदार्थ द्वारा सह्य अधिकतम प्रतिबल।

पराभव सामर्थ्य (Yield Strength): वह प्रतिबल जिस पर पदार्थ प्रत्यास्थ से सुघट्य व्यवहार में परिवर्तित होता है।

यंग मापांक (Young's Modulus): रैखिक प्रत्यास्थता में पदार्थ की दृढता का माप।

मानक और दिशानिर्देश

AASHTO: American Association of State Highway and Transportation Officials।

ACI 318: American Concrete Institute (ACI) द्वारा विकसित "Building Code Requirements for Structural Concrete"।

AISC: "American Institute of Steel Construction" का विनिर्देश।

ASCE 7: भवनों और अन्य संरचनाओं के लिए न्यूनतम अभिकल्प भार तथा संबद्ध मानदंड।

ASCE 41: "Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings" मानक।

Eurocode 2: प्रबलित और पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट संरचनाओं का यूरोपीय मानक।

Eurocode 8: भूकंप-प्रतिरोधी संरचनात्मक अभिकल्प का यूरोपीय मानक।

FEMA P-58: निष्पादन-आधारित भूकंपीय मूल्यांकन के लिए Federal Emergency Management Agency का दिशानिर्देश।

IBC: निष्पादन-आधारित अभिकल्प दिशानिर्देश देने वाली "International Building Code"।

SEAOC Vision 2000: निष्पादन-आधारित भूकंपीय अभियांत्रिकी की रूपरेखा।

UBC: ऐतिहासिक आदर्श भवन संहिता "Uniform Building Code"।

रैखिक संरचनात्मक विश्लेषण

विक्षेप (Deflection): संरचना के किसी बिंदु का ऊर्ध्वाधर अथवा क्षैतिज विस्थापन।

माँग भार (Demand load): निर्दिष्ट भूगति अथवा निष्पादन-उद्देश्य के आधार पर भूकंपीय घटना में संरचना द्वारा अनुभूत होने की अपेक्षा वाले अनुमानित पार्श्व बल अथवा विस्थापन।

परिमित तत्त्व विधि (FEM): जटिल संरचनात्मक समस्याओं के समाधानों का सन्निकटन करने की संख्यात्मक विधि।

रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण: प्रत्यास्थ परिसर में भार और विरूपण के बीच आनुपातिकता मानता है।

आव्यूह विश्लेषण: रैखिक संरचनात्मक निकायों के समाधान के लिए आव्यूहों का उपयोग करने वाला संगणकीय दृष्टिकोण।

आघूर्ण वितरण विधि: स्थैतिक रूप से अनिर्धार्य धरनों और ढाँचों के विश्लेषण की पुनरावृत्तीय विधि।

अध्यारोपण सिद्धांत: किसी निकाय की संयुक्त अनुक्रिया अलग-अलग भारों के प्रति उसकी व्यक्तिगत अनुक्रियाओं का योग है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अरैखिक विश्लेषण

ज्यामितीय अरैखिकता: जब बड़े विरूपण ज्यामिति बदलते हैं और संरचना की अनुक्रिया को प्रभावित करते हैं।

शैथिल्य (Hysteresis): चक्रीय भारण में ऊर्जा-क्षय, जो अरैखिक निकायों में प्रायः दिखाई देता है।

पुनरावृत्तीय विधियाँ: संरचनात्मक विश्लेषण के अरैखिक समीकरण हल करने की Newton–Raphson जैसी तकनीकें।

भार-पथ निर्भरता: ऐसे अरैखिक निकाय जिनकी अनुक्रिया आरोपित भारों के क्रम पर निर्भर होती है।

पदार्थ अरैखिकता: जब प्रतिबल–विकृति संबंध रैखिकता से विचलित हो, जैसे सुघट्यता अथवा दरार।

अरैखिक कुंचन: प्रत्यास्थ सीमा से परे अक्षीय भारों के अधीन तनु अवयवों में उत्पन्न अस्थायित्व।

P–Delta प्रभाव: ज्यामिति के परिवर्तन के कारण संरचनात्मक विरूपण पर अक्षीय बलों के द्वितीयक प्रभाव।

मृदुकरण व्यवहार: बढ़ते विरूपण के साथ दृढ़ता में कमी, जो क्षतिग्रस्त संरचनाओं में सामान्य है।

संरचनात्मक गतिकी

आधार विलगन (Base Isolation): भूकंपीय बल घटाने के लिए संरचना को भूगति से वियुग्मित करने की तकनीक।

अवमंदन (Damping): कंपन गति घटाने वाली ऊर्जा-क्षय क्रियाविधि।

गतिक विश्लेषण: समय-परिवर्ती भारों के अधीन संरचनात्मक अनुक्रिया का मूल्यांकन।

विधा आकार (Mode Shape): किसी विशिष्ट प्राकृतिक आवृत्ति पर संरचना का विरूपण-प्रतिरूप।

प्राकृतिक आवृत्ति: वह आवृत्ति जिस पर संरचना मुक्त रूप से कंपन करती है।

अनुक्रिया स्पेक्ट्रम: विशिष्ट भूगति के लिए प्राकृतिक आवृत्तियों के परिसर में अधिकतम संरचनात्मक अनुक्रिया दर्शाने वाला आलेख।

काल-इतिहास विश्लेषण: विस्तृत भूगति अभिलेखों को निवेश के रूप में उपयोग करने वाला गतिक विश्लेषण।

निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE)

वार्षिक अतिक्रमण दर (λ): किसी वर्ष में भूगति द्वारा दिए गए तीव्रता-स्तर को पार करने की प्रायिकता।

क्षमता वक्र (Capacity Curve): संरचनात्मक माँग और आरोपित आधार अपरूपण अथवा बल के बीच संबंध दर्शाने वाला आलेख।

क्षमता आरेख: संरचना की अरैखिक अनुक्रिया का आलेखी निरूपण, जो प्रायः बल–विस्थापन व्यवहार दिखाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

क्षमता स्पेक्ट्रम: क्षमता वक्र का स्पेक्ट्रमी निर्देशांकों में रूपांतरण, जिसमें सामान्यतः संरचनात्मक और भूकंपीय माँग की तुलना होती है।

क्षमता फलन: विस्थापन अथवा विरूपण के फलन के रूप में संरचनात्मक प्रतिरोध बताने वाला गणितीय फलन।

पतन क्रियाविधि: पर्याप्त सुघट्य कब्जों अथवा विरूपण-प्रतिरूपों से चिह्नित विफलता-विधा, जिससे स्थायित्व या भार-वहन क्षमता नष्ट होती है।

सप्रतिबंध स्पेक्ट्रम: किसी विशिष्ट आवर्त पर लक्ष्य स्पेक्ट्रमी त्वरण पर प्रतिबंधित, अनेक आवर्तों के अपेक्षित स्पेक्ट्रमी त्वरणों का अनुक्रिया स्पेक्ट्रम।

क्षति अवस्था (DS): संरचनात्मक क्षति का लघु, मध्यम, गंभीर अथवा पतन जैसे स्तरों में वर्गीकरण।

माँग वक्र: सामान्यतः स्पेक्ट्रमी त्वरण और विस्थापन में व्यक्त भूकंपीय माँग।

अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP): निर्दिष्ट भारण में संरचना के निष्पादन के मूल्यांकन हेतु मापनीय अनुक्रिया राशि, जैसे विस्थापन, त्वरण अथवा विकृति।

अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण (ESRA): संभावित भूकंप प्रभावों के परिमाणीकरण की प्रक्रिया।

भंगुरता वक्र (Fragility Curve): किसी तीव्रता माप पर क्षति अवस्था पार होने की संभावना का प्रायिकतापरक निरूपण।

भूगति पूर्वानुमान समीकरण (GMPE): परिमाण, दूरी, स्थल-दशाओं और अन्य प्राचलों से किसी स्थल पर अपेक्षित भूगति तीव्रता का अनुमान लगाने वाला गणितीय प्रतिरूप।

अवकेंद्र दूरी: स्थल से भूकंप के अवकेंद्र तक सीधी दूरी, जहाँ पृथ्वी के भीतर विदारण आरंभ होता है।

सीमा अवस्था: वह देहली जिसके आगे संरचना निष्पादन मानदंड पूरा नहीं करती।

निष्पादन उद्देश्य: भूकंपीय घटना में वांछित परिणाम, जैसे तत्काल अधिभोग, जीवन सुरक्षा अथवा पतन-निवारण।

निष्पादन बिंदु: क्षमता और माँग वक्रों का प्रतिच्छेद, जो भूकंपीय भारण में अपेक्षित निष्पादन बताता है।

भूकंपोत्तर कार्यशीलता: भूकंप के बाद संरचना की प्रचालनशील रहने अथवा शीघ्र सेवा में लौटने की क्षमता।

प्रायिकतापरक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA): अनिश्चितताओं को सम्मिलित करके भूकंपीय संकट की प्रायिकताओं का अनुमान लगाने की विधि।

अतिरिक्तता और सुदृढता: चरम घटनाओं में भार-पुनर्वितरण और विफलता-प्रतिरोध सुनिश्चित करने वाले संरचनात्मक गुण।

अनुक्रिया स्पेक्ट्रम: समान भूगति के अधीन विभिन्न प्राकृतिक आवर्तों वाले एक-स्वातंत्र्य-कोटि दोलकों की शिखर अनुक्रिया का आलेख।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पुनःसंयोजन रणनीतियाँ: भूकंपीय निष्पादन सुधारने के लिए वर्तमान संरचनाओं को सुदृढ अथवा उन्नत करने की विधियाँ।

भूकंपीय संकट वक्र: किसी स्थल पर भूगति तीव्रता और उसकी वार्षिक अतिक्रमण प्रायिकता का संबंध।

भूकंपीय संकट विघटन: किसी स्थल के संकट में विभिन्न भूकंप परिदृश्यों के सापेक्ष योगदान पहचानने हेतु PSHA परिणामों का विघटन।

भूकंपीय संकट मानचित्र: निर्दिष्ट अवधि में विभिन्न प्रायिकता-स्तरों के लिए भूकंप संकट का स्थानिक वितरण।

भूकंपीय प्रत्यास्थता: भूकंप के बाद संरचना अथवा समुदाय की कार्यशीलता शीघ्र पुनः प्राप्त करने की क्षमता।

भूकंपीय स्रोत प्रतिरूप: संभावित भूकंपों का स्थानिक और कालिक वितरण।

सेवायोग्यता सीमा अवस्था (SLS): सामान्य भारों अथवा लघु भूकंपों में सीमित विरूपण के साथ संरचना की कार्यशीलता सुनिश्चित करती है।

संरचनात्मक सुभेद्यता सूचकांक: भूकंपीय क्षति के प्रति संरचना की प्रवणता का मात्रात्मक माप।

लक्ष्य संकट स्पेक्ट्रम: भूगतियों के चयन अथवा मापन के लिए भूकंपीय संकट विश्लेषण से व्युत्पन्न अनुक्रिया स्पेक्ट्रम।

चरम सीमा अवस्था (ULS): गंभीर भूकंपीय घटनाओं में पतन अथवा विनाशकारी विफलता रोकती है।

एकसमान संकट स्पेक्ट्रम (UHS): समान अतिक्रमण प्रायिकता वाले स्पेक्ट्रमी त्वरणों का अनुक्रिया स्पेक्ट्रम, जो विभिन्न संरचनात्मक आवर्तों में सुसंगत जोखिम सुनिश्चित करता है।

विफलता क्रियाविधियाँ

कुंचन (Buckling): संपीडन भार के अधीन अवयव में अचानक अस्थायित्व।

श्रांति (Fatigue): चक्रीय भारण से उत्पन्न क्रमिक क्षति, जो समय के साथ विफलता तक ले जाती है।

नमन विफलता: बंकन से उत्पन्न विफलता, जिसमें प्रायः अवयव का पराभव अथवा विभंग होता है।

विभंग यांत्रिकी: पदार्थों में दरार-प्रसार और विफलता का अध्ययन।

अपरूपण विफलता: अत्यधिक अपरूपण प्रतिबलों से किसी तल के अनुदिश सर्पण द्वारा चिह्नित विफलता-विधा।

संगणकीय तकनीकें

अभिसरण मानदंड: पुनरावृत्तीय समाधानों द्वारा स्वीकार्य शुद्धता प्राप्त करना सुनिश्चित करने वाली दशाएँ।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिमित अंतर विधि (FDM): संरचनात्मक विश्लेषण के अवकल समीकरण हल करने का संख्यात्मक दृष्टिकोण।

संख्यात्मक स्थायित्व: यह आश्वासन कि संगणकीय समाधान पुनरावृत्तियों में परिबद्ध रहें।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय-सूची (I–IV)

प्रारंभिक सामग्री i

सूक्त . . . i
विधिक सूचना . . . ii
समर्पण . . . iii
प्राक्कथन . . . iv
पूर्वपीठिका . . . v
आभार . . . xxi
पाठक-मार्गदर्शिका . . . xxii
त्रुटि-अन्वेषण कार्यक्रम . . . xxiii
संकेतन . . . xxiv
पारिभाषिक शब्दावली . . . xxxiii
विषय-सूची (I–IV) . . . xxxix
चित्र-सूची (I–IV) . . . xc
सारणी-सूची (I–IV) . . . cxv
लेखक-परिचय . . . cxxi

I यांत्रिकी एवं संरचनात्मक विश्लेषण की ऐतिहासिक नींव 1

कालरेखा: ईसा-पूर्व **3**

कालरेखा: ईस्वी **4**

1 परिचय **7**
1.1 संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहास की प्रासंगिकता . . . 7
1.2 दृष्टिकोण और अभिप्राय . . . 8
1.3 समग्र परिदृश्य . . . 8
1.3.1 विषयगत दृष्टि से . . . 8
1.3.2 ऐतिहासिक दृष्टि से . . . 9
1.4 विद्वत्तापूर्ण संदर्भ . . . 10

2 संरचनाओं से पहले: संख्याएँ और अक्षर **13**
2.1 संख्याएँ . . . 13

पुरुष विक्रमस

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2.1.1 षष्ट्याधारी और द्वादशाधारी पद्धतियाँ . . . 13
2.1.2 कोण . . . 15
2.1.3 समय . . . 15
2.1.4 दशमलव पद्धति और हिंदू-अरबी अंक . . . 16
2.1.5 π का इतिहास . . . 16
2.1.6 अपरिमेय संख्याएँ और स्वर्ण अनुपात . . . 17
2.2 अक्षर: लेखन-पद्धतियों का इतिहास . . . 18
2.2.1 आरंभिक अभिलेख: गणना-चिह्न, गणना-छड़ियाँ और मिट्टी . . . 18
2.2.2 कीलाक्षर: विश्व की प्रथम लेखन-पद्धति . . . 19
2.2.3 मिस्री चित्रलिपि और चित्रात्मक परंपरा . . . 19
2.2.4 फोनीशियन और वर्णमाला का आविष्कार . . . 21

3 प्राचीन सभ्यताएँ 25
3.1 प्रारंभिक सभ्यताएँ और स्मारकीय उद्गम . . . 25
3.1.1 मेसोपोटामिया: ज़िग्गुरात और मृदा-संरचनाएँ; c. 3100-500 BCE . . . 25
3.1.2 मेसोअमेरिका: माया और ऐज़्टेक पिरामिड; c. 400 BCE-1521 CE . . . 26
3.1.3 मिस्र; c.~2700-1000 BCE . . . 28
3.1.4 मेसोपोटामियाई, मेसोअमेरिकी और मिस्री परंपराओं की तुलना . . . 31
3.2 शास्त्रीय पुराकाल: ज्यामिति, सिद्धांत और साम्राज्य . . . 34
3.2.1 फ़ारस: साम्राज्यिक मंच, सेतु और क़नात . . . 34
3.2.2 अरब-इस्लामी योगदान: संरचनात्मक अभियांत्रिकी में नवाचार . . . 36
3.2.3 स्थैतिकी और संरचनात्मक यांत्रिकी में यूनानी योगदान . . . 37
3.2.4 रोम: कंक्रीट, मेहराब और अवसंरचना . . . 41
3.2.4.1 वित्रुवियस: प्रथम संरचनात्मक सिद्धांतकार . . . 42
3.3 भारत, चीन और जापान की गणितीय तथा संरचनात्मक परंपराएँ . . . 45
3.3.1 चीन: भूकंप-विज्ञान, सेतु और यांत्रिक नवाचार . . . 45
3.3.2 भारत: गणित, पदार्थ और स्मारकीय वास्तुकला . . . 46
3.3.3 जापान: भूकंपीय प्रत्यास्थता और अनुकूलनीय संरचनाएँ . . . 46
3.3.4 संश्लेषण और वैश्विक प्रभाव . . . 47

4 गोथिक गिरजाघर 49
4.1 परिचय . . . 49
4.2 रोमनेस्क पुंज से गोथिक कंकाल तक . . . 50
4.3 गोथिक गिरजाघर: इतिहास और संरचनात्मक तर्क . . . 50
4.3.1 ऐतिहासिक मील के पत्थर . . . 50
4.3.2 आवश्यक शब्दावली और संरचनात्मक तत्त्व . . . 52
4.3.3 गोथिक संरचनात्मक क्रांति . . . 53
4.3.4 संरचनात्मक लक्षण . . . 56
4.3.4.1 उल्लेखनीय संरचनात्मक सहनशीलता . . . 58
4.3.4.2 संरचनात्मक विश्लेषण का विकास . . . 58
4.4 चार गिरजाघरों की कथा . . . 61

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

4.4.1 बोवे गिरजाघर: संरचनात्मक सीमाओं का एक प्रतीकात्मक अध्ययन 61
4.4.2 मिलान का दुओमो: ज्यामिति, राजनीति और संरचनात्मक विवाद 69
4.4.3 सेंट पीटर बेसिलिका: संकट से वैज्ञानिक विश्लेषण तक 74
4.4.4 सांता मारिया देल फियोरे: ब्रुनेलेस्की की अभियांत्रिक अंतर्दृष्टि की विजय . . . 78
4.5 सारांश-सारणी 83

5 वैज्ञानिक तर्क का उदय 86
5.1 परिचय 86
5.2 इस्लामी जगत: बैत अल-हिक्मा 87
5.3 वैज्ञानिक क्रांति 89
5.3.1 नई विधि के आधार 89
5.3.1.1 प्राकृतिक दर्शन का अंत 89
5.3.1.2 गणित और प्रबोधन की भूमिका 89
5.3.1.3 फ़्रांसिस बेकन और अनुभववाद का जन्म 89
5.3.1.4 तर्कवाद: देकार्त का निगमनात्मक दृष्टिकोण 90
5.3.1.5 विश्वविद्यालयों का रूपांतरण 90
5.3.2 क्रांतिकारी खोजें और नई विधियाँ 90
5.3.2.1 प्रेक्षणात्मक खगोल-विज्ञान: टाइको ब्राहे 90
5.3.2.2 गणितीय खगोल-विज्ञान: योहानेस केप्लर 91
5.3.2.3 प्रेक्षण से सिद्धांत तक: वैज्ञानिक प्रगति का प्रारूप 91
5.3.2.4 शरीररचनात्मक क्रांति: आंद्रेयास वेसालियस 92
5.3.2.5 परिसंचरण-तंत्र: विलियम हार्वे 92
5.3.2.6 गैलीलियो: प्रकृति की गणितीय भाषा 92
5.3.3 प्रारंभिक वैज्ञानिक संस्थाएँ 93
5.3.3.1 इटली: लिंचेई 93
5.3.3.2 इटली: *Cimento* 93
5.3.4 संश्लेषण और संस्थानीकरण 94
5.3.4.1 न्यूटन: विधियों का संश्लेषण 94
5.3.4.2 रॉयल सोसाइटी और *Académie des Sciences* 94
5.3.4.3 आधुनिक विज्ञान में प्रयोग और सिद्धांत 95
5.4 प्रबोधन: एक सांस्कृतिक सेतु 96
5.4.1 वैज्ञानिक चिंतन का प्रसार 97
5.4.2 प्राविधिक शिक्षा का उदय: सैन्य अभियांत्रिकी विद्यालय 97
5.4.3 प्राकृतिक दर्शन से अनुप्रयुक्त विज्ञान तक 97
5.5 निष्कर्ष 98

अंतराल I: प्राकृतिक दर्शन से विश्लेषणात्मक यांत्रिकी तक 101

6 महान विभूतियाँ 103
6.1 परिचय 104
6.2 दर्शन, ज्यामिति और प्रारंभिक स्थैतिकी 105
6.2.1 मो-त्से (c. 470–391 BCE) 105

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.2.2 अरस्तू (384–322 BCE) . . . 106
6.2.3 यूक्लिड (c. 300 BCE) . . . 107
6.2.4 आर्किमिडीज़ (c. 287–212 BCE) . . . 108
6.2.5 पर्गा के अपोलोनियस (c. 262–190 BCE) . . . 109
6.3 अभियांत्रिकी, मशीनें और ज्ञान का प्रसारण . . . 110
6.3.1 मार्कस विट्रुवियस पोलियो, c. 80–70 BCE – 15 BCE के बाद . . . 110
6.3.2 अलेक्ज़ेंड्रिया के हीरो (fl. c. 62 CE) . . . 110
6.3.3 इब्न अल-हैथम (c. 965–1040 CE) . . . 111
6.3.4 अबू रेहान अल-बिरूनी (973–1048) . . . 112
6.3.5 अल-ख़ाज़िनी (fl. 1115–1130 CE) . . . 113
6.3.6 विलार दे ऑनकूर (fl. c. 1225–1250) . . . 113
6.4 वास्तुकला, अनुपात और मानवतावादी रूप . . . 114
6.4.1 लिओन बतिस्ता अल्बर्ती (1404–1472) . . . 114
6.4.2 लियोनार्दो दा विंची (1452–1519) . . . 115
6.4.3 आंद्रेआ पल्लादियो (1508–1580) . . . 125
6.4.4 सेबास्तियानो सेर्लियो (1475–1554) . . . 125
6.4.5 जियाकोमो बारोत्सी दा विग्नोला (1507–1573) . . . 126
6.4.6 ह्यूबर्ट गोतिए (1660–1737) . . . 127
6.4.6.1 जाँ-रोदोल्फ पेरोने . . . 131
6.4.6.2 अनुपात से अनुभव की ओर संक्रमण . . . 133
6.5 गणितीय व्यवस्था से यांत्रिकी तक . . . 134
6.5.1 फ़्रांसिस बेकन (1561–1626) . . . 134
6.5.2 निकोलस कोपर्निकस (1473–1543) . . . 135
6.6 आद्य-स्थैतिकी से वैज्ञानिक क्रांति तक . . . 136
6.6.1 साइमन स्टेविन (1548–1620) . . . 136
6.6.2 गैलीलियो गैलिली (1564–1642) . . . 137
6.6.3 रेने देकार्त (1596–1650) . . . 143
6.6.4 क्रिस्टियान हाइगेन्स (1623–1695) . . . 144
6.6.5 ब्लेज़ पास्कल (1623–1662) . . . 146
6.6.6 रॉबर्ट हुक (1635–1703) . . . 146
6.6.7 आइज़क न्यूटन (1642–1727) . . . 153
6.6.8 गॉटफ़्रीड लाइबनित्स (1646–1716) . . . 158
6.6.9 बर्नूली परिवार (1654–1782) . . . 160
6.6.9.1 याकॉब बर्नूली (1654–1705) . . . 162
6.6.9.2 योहान बर्नूली (1667–1748) . . . 163
6.6.9.3 अंतराल: Opera Omnia . . . 164
6.6.9.4 डैनियल बर्नूली (1700–1782) . . . 165
6.6.10 लियोनहार्ड ऑयलर (1707–1783) . . . 166
6.7 विश्लेषणात्मक यांत्रिकी से सातत्यक और संरचनात्मक सिद्धांत तक . . . 171
6.7.1 शार्ल-ऑगुस्ताँ द कूलॉम (1736–1806) . . . 172
6.7.2 Siméon Denis Poisson (1781–1840) . . . 173

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.7.3 क्लोद लुई मारी आँरी नाविए (1785–1836) . . . 175
6.7.4 ज्याँ ल रों द'आलाँबेर (1717–1783) . . . 180
6.7.5 जोज़ेफ-लुई लाग्राँज (1736–1813) . . . 181
6.7.6 कोशी (ओगुस्तैं-लुई 1789–1857) . . . 181
6.7.7 जॉर्ज ग्रीन (1793–1841) . . . 182
6.7.8 Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886) . . . 183
6.8 एक विषय के रूप में संरचनात्मक अभियांत्रिकी का उदय . . . 184
6.8.1 कार्ल कुलमान (1821-1881) . . . 184
6.8.2 विलियम जॉन मैक्कोर्न रैंकिन (1820-1872) . . . 185
6.8.3 क्रिश्चियन ओटो मोहर (1835–1918) . . . 187
6.8.4 हेनरी मोज़ली (1801–1872) . . . 188
6.8.5 जेम्स क्लर्क मैक्सवेल (1831–1879) . . . 188
6.9 यांत्रिकी के प्रमुख इतिहास . . . 190
6.9.1 आइज़क टॉडहंटर (1820–1884) . . . 190
6.9.2 स्टीफन प्रोकोफिएविच तिमोशेंको (1878–1972) . . . 190
6.9.3 रेने ड्यूगा (1897–1957) . . . 191
6.9.4 क्लिफर्ड ऐम्ब्रोज़ ट्रूज़डेल तृतीय (1919–2000) . . . 192
6.10 उल्लेखनीय महिलाएँ . . . 193
6.11 विश्लेषण और संदर्भ . . . 194
6.11.1 प्रतिस्पर्धा, गोपनीयता और वैज्ञानिक प्रगति . . . 194
6.11.1.1 गोपन की विधियाँ . . . 194
6.11.1.2 विवाद और उनके प्रभाव . . . 200
6.11.2 आधुनिक अभियांत्रिकी विज्ञान की ओर संक्रमण . . . 203
6.11.3 अभियांत्रिकी-शिक्षा में फ्रांसीसी क्रांति . . . 203
6.12 निष्कर्ष: प्राकृतिक दर्शन से अभियांत्रिकी विज्ञान तक . . . 204
6.12.1 सार-सारणियाँ . . . 205
6.12.1.1 प्रमुख योगदानकर्ता और उनका प्रभाव . . . 206
6.12.1.2 सीमाचिह्न प्रकाशन . . . 207
6.12.1.3 अभियांत्रिकी-शिक्षा संस्थाएँ . . . 210
6.12.1.4 प्रमुख बौद्धिक विवाद . . . 210
6.12.1.5 ऐतिहासिक समयरेखा . . . 212

अंतराल II: मध्ययुगीन अंतर्दृष्टियों से आधुनिक संरचनात्मक यांत्रिकी तक: (1351-1879) 215

7 सामर्थ्य, उदासीन अक्ष और आनमनी प्रतिबल 219
7.1 परिचय . . . 219
7.2 सामर्थ्य . . . 220
7.2.1 लियोनार्दो (≃ 1490) . . . 220
7.2.2 गैलीलियो (1564-1642) . . . 220
7.2.3 बीकमैन (1588-1637) . . . 222
7.2.4 मुशेनब्रुक (1692—1761) . . . 223
7.3 आंतरिक आनमनी प्रतिबल: तीन अंकों में एक अध्ययन . . . 223

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

7.3.1 अंक I: अनुभवजन्य परंपरा . . . 225
7.3.1.1 लियोनार्दो (≃ 1490) . . . 225
7.3.1.2 गैलीलियो (1632) . . . 227
7.3.2 अंक II: अनुभवजन्य–सातत्य परंपरा . . . 229
7.3.2.1 देकार्त (1644) . . . 229
7.3.2.2 लाइबनित्स (1684) . . . 230
7.3.2.3 मारियोत (1686) . . . 232
7.3.2.4 पाराँ (1713) . . . 233
7.3.2.5 कूलॉम (1773) . . . 234
7.3.2.6 यंग (1807) . . . 237
7.3.2.7 सेंट-वेनाँ (1855) . . . 239
7.3.2.8 क्लेब्श (1862) . . . 239
7.3.2.9 सेंट-वेनाँ (1866) . . . 239
7.3.3 अंक III: वैश्लेषिक परंपरा . . . 240
7.3.3.1 याकोब बर्नूली (1687) . . . 240
7.3.3.2 ऑयलर (1727) . . . 241
7.4 सारांश . . . 243
7.5 संक्रमण . . . 245

8 वक्रों की अवकल ज्यामिति 247
8.1 परिचय: वक्रता और इलास्टिका के ज्यामितीय उद्गम . . . 247
8.2 वक्रता . . . 248
8.2.1 ओरेस्मे (1351) . . . 249
8.2.2 न्यूटन (1671) . . . 250
8.2.3 लाइबनित्स (1686) . . . 252
8.2.4 योहान बर्नूली (1691) . . . 253
8.2.5 याकोब बर्नूली; स्वर्ण प्रमेय (1694) . . . 254
8.2.6 केस्टनर (1758) . . . 258
8.2.7 सारांश . . . 259
8.3 केंद्रज/अंतर्वलित . . . 260
8.3.1 हाइगेन्स (1658-1673) . . . 261
8.3.2 व्यावहारिक सीमाएँ और विरासत . . . 262
8.3.3 समापन टिप्पणियाँ . . . 263
8.4 ज्यामितीय वक्रों से संरचनात्मक यांत्रिकी तक . . . 264
8.5 आगामी दिशा: . . . 266

9 महान चुनौतियाँ: कैटेनरी, इलास्टिका और वैश्लेषिक यांत्रिकी का जन्म 267
9.1 गणितीय आधारभूमि: ज्यामिति से कलन तक . . . 268
9.1.1 यूनानी विरासत: यूक्लिड से ज्यामितीय-यांत्रिक विभाजन तक . . . 268
9.1.2 देकार्त की क्रांति: निर्देशांक और बीजगणित . . . 269
9.1.3 कलन की क्रांति . . . 269
9.1.4 वक्रों से यांत्रिकी तक: सेतु . . . 269

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9.1.5 रूपांतरण की पूर्णता . . . 270
9.1.6 गणितीय संकेत-पद्धति . . . 271
9.2 कैटेनरी चुनौती (मई 1690-जून 1691) . . . 271
9.2.1 आरंभिक अध्ययन . . . 272
9.2.1.1 लियोनार्दो . . . 272
9.2.1.2 गैलीलियो . . . 272
9.2.1.3 स्टेविन; (1634) . . . 273
9.2.1.4 हाइगेन्स (c. 1646) . . . 274
9.2.2 चुनौतियाँ . . . 276
9.2.2.1 अंतराल: शब्दावली . . . 276
9.2.2.2 याकूब बर्नूली की *funicularia* चुनौती; 1690 . . . 276
9.2.2.3 लाइबनिट्स की प्रतिक्रिया और चुनौती का संशोधन; 1690 का उत्तरार्ध 278
9.2.3 तीन प्रमुख समाधान . . . 279
9.2.3.1 योहान बर्नूली; (दिसंबर 1690 में प्रस्तुत, जून 1691 में प्रकाशित) . . 279
9.2.3.2 हाइगेन्स; (अक्तूबर 1690 में प्रस्तुत, मई 1691 में प्रकाशित) . . . 280
9.2.3.3 लाइबनिट्स; (मई 1691 में प्रस्तुत, जून 1691 में प्रकाशित) . . . 281
9.2.3.4 प्रकाशन और अंतिम समाधान; जून 1691 . . . 282
9.2.3.5 प्रकाशनोत्तर विश्लेषण और विरासत . . . 283
9.2.4 उपसंहार . . . 285
9.2.4.1 विस्मृत एकीकरण . . . 285
9.2.4.2 गणितीय विरासत . . . 285
9.2.4.3 याकूब का विरोधाभास . . . 286
9.3 इलास्टिका चुनौती (1690-1744) . . . 286
9.3.1 याकूब बर्नूली की चुनौती (1690) . . . 286
9.3.2 समाधान . . . 291
9.3.2.1 याकूब बर्नूली का समाधान (1694) . . . 291
9.3.2.1.1 हाइगेन्स की प्रतिक्रिया (1694) . . . 295
9.3.2.1.2 मध्यांतर . . . 297
9.3.2.1.2.1 लाइबनिट्स का *Vis Viva* और ऊर्जा की संकल्पनाओं का विकास . . . 297
9.3.2.1.2.2 ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती (1696) . . . 299
9.3.2.1.2.3 योहान बर्नूली का समाधान (1697) . . . 302
9.3.2.1.2.4 डेनियल बर्नूली का समाधान (1742) . . . 306
9.3.2.1.2.5 समपरिमापी समस्याएँ बनाम विचरण-कलन . . . 308
9.3.2.2 ऑयलर का समाधान (विचरण-कलन) (1744) . . . 308
9.3.2.2.1 इलास्टिका की प्रजातियों का वर्गीकरण . . . 315
9.3.2.3 आधुनिक विचरणात्मक ढाँचा . . . 324
9.3.3 प्रथम दो चुनौतियों का कालानुक्रमिक सार . . . 327
9.4 एक अज्ञात चुनौती: समस्याओं के बीच सेतु (1724) . . . 329
9.4.1 बर्नूली-ऑयलर सहयोग: प्रथम एकीकरण (1728) . . . 330
9.4.1.1 डेनियल बर्नूली (आघूर्ण-वक्रता सिद्धांत की स्थापना) 1728 . . . 331

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9.4.1.2 ऑयलर (ज्यामितीय अंतर्दृष्टि से गणितीय क्रांति तक) (1732) 332
9.4.1.3 ऑयलर-बर्नूली सिद्धांत 336
9.5 व्याकुंचन सिद्धांत: प्रेक्षण से निर्णायक भारों तक 338
9.5.1 आरंभिक कार्य 338
9.5.1.1 लियोनार्डो (लगभग 1490 का दशक) 338
9.5.1.2 पीटर वान मुस्खेनब्रुक (1729) 338
9.5.2 ऑयलर (1759) 340
9.6 ऑयलर का सामान्य सिद्धांत: पूर्ण एकीकरण (1771) 344
9.7 निष्कर्ष 347

10 संतति यांत्रिकी: संरचनात्मक विश्लेषण की नींव 354
10.1 प्रत्यास्थता के आणविक *बनाम* संतति सिद्धांत 355
10.1.1 अवलोकन 355
10.1.2 गैलीलियो से फ्रांसीसी आणविक संप्रदाय तक 356
10.1.3 संतति उपागम का उदय 356
10.1.4 तुलना सारणी 357
10.1.5 कौन-सा सिद्धांत प्रबल हुआ? 357
10.1.6 ऐतिहासिक संदर्भ 358
10.2 संतति यांत्रिकी 361
10.3 परिचय 361
10.3.1 फ्रांसीसी क्रांतियाँ और आधुनिक प्रत्यास्थता का जन्म 361
10.3.2 संतति यांत्रिकी और प्रत्यास्थता सिद्धांत की नींव 362
10.3.2.1 कूलॉम (1736-1806) और अभियांत्रिक नींव 362
10.3.2.2 लाग्रांज (1736-1813) और वैश्लेषिक नींव 363
10.3.2.3 फूरिये की (1768-1830) गणितीय विधियाँ 363
10.3.2.4 कॉशी (1789-1857) और प्रतिबल की अवधारणा 364
10.3.2.5 पॉइसन (1781-1840) अनुपात और कॉशी का सरलीकरण 368
10.3.2.6 नावियर (1785-1836) का संश्लेषण और अनुप्रयोग 369
10.3.2.7 लामे (1795-1870) के प्रत्यास्थ स्थिरांक 370
10.3.2.8 सेंट-वेनां (1797-1886) और अर्ध-प्रतिलोम विधि 370
10.3.2.9 क्लापेरों (1799-1864) की ऊर्जा विधियाँ 371
10.3.2.10परिप्रेक्ष्य में फ्रांसीसी उपलब्धि 372
10.4 पूर्ण गणितीय ढाँचा 372
10.4.1 ऑयलर और द्रव्यमान संरक्षण 373
10.4.2 कॉशी (1789-1857) और रैखिक संवेग-संतुलन 373
10.4.3 कोणीय संवेग-संतुलन 374
10.4.4 क्लाउसियस (1822-1888), थॉमसन (1824-1907) और ड्यूहेम (1861-1916) के ऊष्मागतिकीय नियम) 375
10.4.4.1 प्रथम नियम (ऊर्जा संतुलन): 375
10.4.5 द्वितीय नियम (एंट्रॉपी असमता): 375
10.4.6 ऐतिहासिक विकास और आधुनिक संश्लेषण 376

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

विषय-सूची (I–IV)

10.5 संघटनात्मक सिद्धांत: पदार्थ व्यवहार . . . 377
10.5.1 सामान्य ढाँचा . . . 377
10.5.2 नोल (1925-2017) और वस्तुनिष्ठता: पदार्थ निर्देश-तंत्र निरपेक्षता का सिद्धांत 378
10.5.3 ग्रीन (1793-1841) और अतिप्रत्यास्थता . . . 378
10.5.4 फॉइग्ट (1850-1919) और पदार्थ सममिति . . . 379
10.5.5 कोलमैन (1930-1992) और नोल: ऊष्मागतिकीय प्रतिबंध . . . 380
10.5.6 ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्य: अनुभववाद से सिद्धांत तक . . . 381
10.5.7 संरचनात्मक विश्लेषण से संबंध . . . 382
10.5.8 नाम में क्या रखा है? यांत्रिकी और उसके साधकों का विकास . . . 382
10.5.8.1 संरचनात्मक विश्लेषक की बदलती पहचान . . . 383
10.5.8.2 व्यावसायिक पहचान से विषयगत अंतर्वस्तु तक . . . 385
10.5.8.3 आज का विषयगत परिदृश्य . . . 388
10.5.8.4 पारिभाषिक परिपाटियाँ और संबंध . . . 388
10.5.8.5 इस पुस्तक में अपनाई गई परिपाटियाँ . . . 390
10.6 निष्कर्ष . . . 391

11 अंततः संरचनात्मक विश्लेषण: संश्लेषण & अनुप्रयोग 393
11.1 परिचय . . . 394
11.2 संरचनात्मक अभियांत्रिकी, व्युत्पत्ति . . . 395
11.3 आरंभिक विकास: स्थैतिकतः अनिर्धार्य धरन . . . 396
11.3.1 नावियर (1785–1836): प्रथम व्यवस्थित विवेचन . . . 397
11.3.2 क्लापेरों (1799–1864): त्रि-आघूर्ण समीकरण . . . 397
11.4 सामान्य विधियों की ओर संक्रमण . . . 398
11.4.1 मैक्सवेल (1831–1879): व्युत्क्रम प्रमेय . . . 398
11.4.2 मोहर (1835–1918): ज्यामितीय विधियाँ और सादृश्य . . . 399
11.4.3 कास्तिलियानो (1847–1884): ऊर्जा विधियाँ . . . 400
11.4.4 म्यूलर-ब्रेसलाउ (1851–1925): व्यवस्थितीकरण और प्रभाव-रेखाएँ . . . 401
11.4.5 बल विधि: सुसंगति और नम्यता . . . 401
11.4.6 मूलभूत अवधारणाएँ और प्रक्रिया . . . 402
11.4.7 बल विधि: सारांश और विरासत . . . 404
11.5 विस्थापन विधि: सिद्धांत से व्यवहार तक . . . 404
11.5.1 सैद्धांतिक नींव: आरंभिक दृढता सूत्रीकरण . . . 404
11.5.2 प्रवणता-विक्षेप विधि: व्यवस्थित सूत्रीकरण . . . 405
11.5.3 हार्डी क्रॉस (1885–1959): आघूर्ण-वितरण विधि . . . 407
11.5.4 विस्तार और रूपांतर . . . 409
11.5.5 विस्थापन विधि: सारांश और विरासत . . . 411
11.6 प्रभाव-रेखाएँ और गतिमान भार . . . 412
11.6.1 विंक्लर (1835–1888): आरंभिक विकास . . . 412
11.6.2 म्यूलर-ब्रेसलाउ सिद्धांत . . . 412
11.6.3 अनुप्रयोग और विरासत . . . 413

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय-सूची (I–IV)

11.7 आव्यूह सूत्रीकरण की ओर: अभिकलन तक वैचारिक सेतु 413
11.7.1 शास्त्रीय विधियों की आव्यूह संरचना 413
11.7.2 पुनरावृत्ति से आव्यूह समाधान तक 414
11.7.3 हस्त-गणना की सीमाएँ: अभिकलन के लिए मंच तैयार करना 414
11.7.4 निष्कर्ष: निरंतरता और रूपांतरण 415
11.8 संरचनात्मक विश्लेषण की मूलभूत आवश्यकताएँ 415
11.9 योगदानकर्ताओं का कालानुक्रमिक सारांश 418
11.9.1 निष्कर्ष 421

12 अभिकलनीय विधियाँ **424**
12.1 सातत्यकों के लिए परिमित अंतर विधियाँ 424
12.1.1 Pearson और Richardson: बाँध प्रतिबल विश्लेषण (1905–1911) 425
12.1.2 पुनरावृत्तीय समाधान विधियाँ 427
12.2 आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण 427
12.2.1 Kron: जालक्रम विश्लेषण और संरचनात्मक सादृश्य 428
12.2.2 Johann H. Argyris (1913–2004) 428
12.2.3 वांतरिक्ष (Delta wings) संदर्भ: 1950s 429
12.2.4 NBS/Navy; Samuel Levy 430
12.2.5 Boeing; Turner और प्रत्यक्ष दृढता विधि 431
12.2.5.1 नम्यता बनाम दृढता: एक सतत विवाद 434
12.3 परिमित तत्त्व विधि 435
12.3.1 गणितीय आधार 436
12.3.2 प्राथमिकता और पारिभाषिकी: परिमित तत्त्व विधि क्या है (और क्या नहीं है) . 439
12.3.3 Ray Clough (1920–2016) 440
12.3.4 आरंभिक कंप्यूटर और Berkeley कार्यक्रम 441
12.3.5 Norfork बाँध: प्रथम प्रमुख अनुप्रयोग 442
12.3.6 अरैखिक और गतिक विश्लेषण (1960–1962) 443
12.4 समेकन और प्रसार 444
12.4.1 Oleg Zienkiewicz (1921–2009) 444
12.4.2 Wright-Patterson सम्मेलन (1965) 445
12.4.3 Richard Gallagher (1927–1997) 445
12.4.4 बल विधि बनाम दृढता विधि विवाद 445
12.4.5 NASTRAN निर्णय (1969) 446
12.4.6 सामान्यीकरण 447
12.4.7 पाठ्यपुस्तकें और विश्वव्यापी अंगीकरण 447
12.4.8 वर्तमान प्रभाव और अनुप्रयोग 448
12.5 सारांश और प्रमुख योगदान 449
12.6 निष्कर्ष 451

13 अबेकस से कलनविधियों तक: विज्ञान और अभियांत्रिकी में अभिकलन का ऐतिहासिक सर्वेक्षण **453**
13.1 परिचय 453
13.2 प्राचीन और आरंभिक अभिकलनीय उपकरण 454

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

13.3 यांत्रिक स्वचालित यंत्र और आरंभिक गणना मशीनें . . . 455
13.4 Babbage और Lovelace: प्रोग्रामन का संकल्पनात्मक उद्गम . . . 457
13.5 अनुरूप वैज्ञानिक अभिकलन (1900–1945) . . . 458
13.6 अंकीय क्रांति (1945–1960) . . . 459
13.7 प्रोग्रामन भाषाएँ और आरंभिक वैज्ञानिक सॉफ्टवेयर . . . 460
13.8 प्रमुख अभिकलनीय विकासों की समयरेखा . . . 461
13.9 आरंभिक अभियांत्रिकी और संरचनात्मक सॉफ्टवेयर (1960–1980) . . . 461
13.10 PC युग और अभियांत्रिकी अभिकलन का विस्तार (1980–2000) . . . 462
13.11 आधुनिक अभिकलनीय पारितंत्र (2000–वर्तमान) . . . 464
13.12 तकनीकी लेखन और प्रतिवेदन का विकास . . . 465
13.13 निष्कर्ष . . . 466

14 बल और आभासी सिद्धांतों का विकास 468
14.1 परिचय . . . 469
14.2 प्राचीनता और दैवत्व . . . 471
14.2.1 Egypt . . . 471
14.2.2 Mesopotamia . . . 472
14.2.3 India . . . 473
14.3 शास्त्रीय प्राचीनता और प्राकृतिक दर्शन . . . 474
14.3.1 Greeks . . . 474
14.3.1.1 Empedocles (494-434 B.C.) . . . 474
14.3.1.2 Plato (427-348 B.C.) . . . 476
14.3.1.3 Aristotle (384-322 B.C.) . . . 476
14.3.1.4 Archimedes (287–212 B.C.): “क्या” का प्रदर्शन . . . 478
14.3.1.5 Posidonius (135–51 B.C.) और Stoics . . . 480
14.3.2 Romans, Plotinus (204–270) . . . 481
14.3.3 Byzantine, Philoponus (490–570) . . . 482
14.4 मध्ययुगीन काल और Scholasticism . . . 483
14.4.1 Islamic विद्वान . . . 483
14.4.1.1 Avicenna (980–1037) . . . 483
14.4.1.2 Baghdadi (1080–1165) . . . 484
14.4.2 Jordanus de Nemore (ca 1225-ca1260) और स्थितीय गुरुत्व . . . 484
14.4.3 Middle Ages: University of Paris . . . 485
14.4.3.1 Buridan (1295-1358) . . . 485
14.4.3.2 Oresme (1320-1382) . . . 486
14.5 Renaissance और Scientific Revolution . . . 487
14.5.1 Leonardo da Vinci (1452-1519) . . . 487
14.5.2 Benedetti (1530–1590) . . . 488
14.5.3 Pardies (1636–1673) . . . 489
14.5.4 Simon Stevin (1548–1620) . . . 489
14.5.5 Galileo (1564-1642) . . . 494
14.5.6 Kepler (1571–1630) . . . 497

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

14.5.7 Descartes (1596–1650) . . . 499
14.5.8 Torricelli (1608–1647) . . . 506
14.5.9 Wallis (1616–1703) . . . 508
14.5.10 Leibniz (1646–1716) . . . 508
14.5.11 Newton (1642–1726) . . . 510
14.5.12 Bernoulli, Daniel (1700-1782) . . . 512
14.5.13 Johann Bernoulli का 1715 का पत्र . . . 513
14.5.14 Varignon (1654–1722) . . . 515
14.5.15 D'Alembert (1717–1783) . . . 516
14.5.16 Kant (1724–1804) . . . 522
14.5.17 Lagrange (1736–1813) . . . 522
14.5.18 Fourier (1768–1830) . . . 526
14.5.19 Lazare Carnot (1753–1823) . . . 526
14.6 उपसंहार . . . 528
14.7 निष्कर्ष . . . 529

अंतराल III: जहाँ विद्वत्ता और अनुराग का संगम होता है **532**

15 वास्तुकला & संरचना **533**
15.1 परिचय . . . 534
15.1.1 अध्याय की संरचना . . . 535
15.2 विट्रुवियसी परंपरा . . . 536
15.2.1 मार्कस विट्रुवियस पोलियो: प्रथम वास्तुशिल्पीय प्रभावक . . . 536
15.2.1.1 शिक्षा पर विट्रुवियस . . . 536
15.2.1.2 अभियंता विट्रुवियस . . . 537
15.2.1.3 वास्तुकार विट्रुवियस: चिरस्थायी त्रयी . . . 542
15.2.1.4 क्रीडकों और विद्वानों पर विट्रुवियस . . . 543
15.2.2 पुनर्जागरण के दौरान विट्रुवियस की पुनर्खोज . . . 544
15.2.2.1 लियोन बत्तिस्ता अल्बेर्ती (1404–1472) . . . 544
15.2.2.2 आंद्रेआ पल्लादियो (1508–1580) . . . 547
15.2.2.3 त्रयी का पुनर्क्रमण . . . 548
15.2.2.4 अभियंता के रूप में अल्बेर्ती और पल्लादियो . . . 549
15.2.3 मानवमिति और मापक्रम का प्रश्न . . . 552
15.2.3.1 विट्रुवियस: आधारभूत पाठ . . . 553
15.2.3.2 मध्ययुगीन संचार . . . 553
15.2.3.3 पुनर्जागरणकालीन पुनरुत्थान . . . 553
15.2.3.4 बीसवीं शताब्दी: मोड्यूलर & शार्ल-एदुआर जनेरे ले कोर्बुज़िए (1887–1965) 554
15.2.3.5 समानुपात से श्रमदक्षता-विज्ञान तक . . . 558
15.2.3.6 अंतर्निहित धारणा: मापक्रम-स्वतंत्रता . . . 558
15.2.3.7 क्रियात्मक ज्यामिति: प्रधान शिल्पी वास्तव में अपने भवनों का अनुरेखण कैसे करते थे . . . 559
15.3 अंतराल: वास्तुकार और अभियंता — कला और विज्ञान? . . . 565
15.4 अग्रदूत . . . 568

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15.4.1 उडता पुश्ता: संरचनात्मक तर्क का दृश्य रूप . . . 569
15.4.2 गुस्ताव एफिल (1832–1923) . . . 572
15.4.3 लुई हेनरी सुलिवन (1856-1924) . . . 574
15.4.4 रॉबर्ट मायार (1872–1940) . . . 576
15.4.5 ऑगुस्त पेरे (1874–1954) . . . 577
15.4.6 एदुआर्दो तोरोहा ई मिरेत (1899–1961) . . . 579
15.4.7 पियर लुइजी नेर्वी (1891–1979) . . . 582
15.4.8 रिक्कार्दो मोरांदी (1902–1989) . . . 588
15.4.9 क्रिश्चियन मेन (1927–2018) . . . 590
15.4.10 फ़ज़लुर रहमान ख़ान (1929–1982) . . . 591
15.4.11 Progettisti की तुलना: अभिकल्पक-निर्माता और उनकी सामग्रियाँ . . . 595
15.4.11.1 एफिल और धातु . . . 595
15.4.11.2 नेर्वी और फेरोसीमेंट . . . 595
15.4.11.3 रोब्लिंग और केबल . . . 596
15.4.11.4 समान सूत्र . . . 596
15.5 संरचनात्मक रूपजनन: प्रमुख व्यक्तित्व . . . 597
15.5.1 कैटेनरी . . . 598
15.5.1.1 पोलेनी (1683–1761) . . . 598
15.5.1.2 अंतोनी गाउदी (1852–1926) . . . 599
15.5.1.3 ईरो सारिनेन (1910–1961) . . . 600
15.5.2 कवच और झिल्लियाँ . . . 601
15.5.2.1 फ्राइ पॉल ओटो (1925–2015) . . . 601
15.5.2.2 हाइन्ज़ इस्लर (1926–2009) . . . 601
15.5.2.3 सेर्जियो मुस्मेची (1926–1981) . . . 602
15.5.3 पारस्परिक संरचनाएँ . . . 604
15.5.3.1 ऐतिहासिक विकास . . . 604
15.5.3.2 आधुनिक पुनरुत्थान . . . 607
15.5.4 गणितीय इष्टतमीकरण: मैक्सवेल, मिशेल, बेकर और बेगिनी . . . 607
15.5.4.1 मैक्सवेल (1831–1879) . . . 608
15.5.4.2 मिशेल (1870–1959) . . . 609
15.5.4.3 बेकर और बेगिनी . . . 610
15.5.5 उपसंहार: जब वास्तुकार और अभियंता टकराए . . . 613
15.5.5.1 प्रकरण एक: बूर्दे बनाम एफिल (पेरिस, 1889) . . . 613
15.5.5.2 प्रकरण दो: पैक्सटन और क्रिस्टल पैलेस (लंदन, 1851) . . . 614
15.5.5.3 प्रकरण तीन: रोब्लिंग और ब्रुकलिन पुल (न्यूयॉर्क, 1869–1883) . . . 615
15.5.5.4 विरासत . . . 615
15.6 कंप्यूटर पीढ़ी . . . 616
15.6.1 “असाधारण” वास्तुकार . . . 616
15.6.1.1 फेलिक्स कैंडेला (1910–1997) . . . 616
15.6.1.2 फ्रैंक गेहरी (1929–2025) . . . 617
15.6.1.3 सांत्यागो कालात्रावा (1951–) . . . 618

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15.6.2 संरचनात्मक अभियंता: पाँच प्रतिशत वर्ग . . . 619
15.6.2.1 ऊँची इमारतें . . . 621
15.6.2.1.1 लेस्ली रॉबर्टसन (1928–2021) . . . 623
15.6.2.1.2 विलियम बेकर (1953–) . . . 625
15.6.2.2 पुल: मिशेल विर्लोज़ो (1946–) . . . 627
15.7 विट्रुवियस पर पुनर्विचार . . . 629
15.7.1 संरचनात्मक कला का विखंडन . . . 630
15.7.2 कला क्या है? . . . 631
15.7.3 संरचनात्मक वास्तुकला: लुंजी का घोषणापत्र . . . 633
15.8 निष्कर्ष . . . 634

16 Terrae Motus: भूकंपों के मिथक, विश्वास और निरूपण 639
16.1 परिचय . . . 640
16.2 मिथक . . . 641
16.2.1 जापान . . . 642
16.2.2 प्रशांत उत्तर-पश्चिम . . . 644
16.2.3 अमेरिका . . . 645
16.2.4 अन्य परंपराएँ . . . 646
16.2.5 संश्लेषण: भूकंपीय स्मृति के रूप में मिथक . . . 647
16.3 धर्म . . . 648
16.3.1 बाइबिल . . . 648
16.3.2 यूनान . . . 652
16.3.3 भारत . . . 658
16.3.4 इस्लाम . . . 660
16.3.5 मेसोअमेरिका . . . 663
16.3.6 शिंतो . . . 665
16.3.7 संश्लेषण: धर्म और भूकंपीय विपत्ति का अर्थ . . . 667
16.4 दर्शन . . . 672
16.4.1 अरस्तू . . . 672
16.4.2 एराटोस्थनीज़ . . . 673
16.4.3 लुक्रेतियस और प्लिनी . . . 673
16.4.4 दार्शनिक घटना के रूप में लिस्बन भूकंप . . . 674
16.4.4.1 दार्शनिक संवादियों के रूप में वोल्तेयर और रूसो . . . 675
16.4.4.2 कांट . . . 675
16.4.5 पुनर्निर्माण . . . 676
16.5 साहित्य . . . 678
16.5.1 साहित्य में भूकंप . . . 678
16.5.2 1755 का लिस्बन भूकंप और प्रबोधनकालीन विवाद . . . 678
16.5.3 1908 का मेसिना भूकंप . . . 680
16.5.4 संश्लेषण: साहित्य और भूकंपों की सांस्कृतिक स्मृति . . . 681
16.6 वास्तुकला . . . 682
16.6.1 पीरो लिगोरियो . . . 682

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16.6.2 जिबेलिना . . . 683
16.7 कला . . . 686
16.7.1 शैल-कला और भ्रंश चिह्न . . . 686
16.7.2 चित्रकला . . . 688
16.7.3 कोज़ाक संग्रह . . . 689
16.7.4 अमेलियो संग्रह . . . 689
16.8 संगीत . . . 691
16.9 चलचित्रकला . . . 692
16.10 निष्कर्ष . . . 693
16.11 उपसंहार: नमाज़ु से रॉज़वेल तक . . . 694

ग्रंथ I के संदर्भ **698**

विषय-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण) **757**

चित्र-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण) **794**

सारणी-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण) **811**

उदाहरण-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण) **815**

मुख्य-बिंदु सूची: भाग II–IV (विश्लेषण) **822**

II परिचय: मूलभूत एवं विश्लेषणात्मक 824

17 परिचय **825**
17.1 व्यापक परिप्रेक्ष्य . . . 825
17.1.1 वास्तुकला . . . 826
17.1.2 संरचनात्मक अभियांत्रिकी . . . 827
17.1.2.1 संरचनात्मक अभिकल्प . . . 827
17.1.2.2 विश्लेषण . . . 828
17.1.2.3 सुरक्षा-मूल्यांकन . . . 830
17.1.3 संरचनात्मक विश्लेषण में समन्वित विद्याएँ . . . 830
17.2 तत्त्व: प्राथमिक आंतरिक बल . . . 830
17.3 भार-संचरण तत्त्व . . . 831
17.4 संरचनाओं के प्रकार . . . 832
17.5 अभियांत्रिकी साधनों का रूपांतरण . . . 836
17.6 संरचनात्मक अभियांत्रिकी के पाठ्यक्रम . . . 838

18 भार **839**
18.1 परिचय . . . 839
18.2 भारों का वर्गीकरण . . . 840
18.2.1 ऊर्ध्वाधर भार . . . 840
18.2.2 पार्श्व भार . . . 840

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

18.2.2.1 पवन . . . 840
18.2.2.2 भूकंपीय भार . . . 844
18.2.3 जलस्थैतिक और मृदा भार . . . 846
18.2.3.1 उदाहरण 18.1: जलस्थैतिक भार . . . 847
18.2.4 संघात भार . . . 847
18.2.5 द्वितीयक भार . . . 849
18.2.6 तापीय भार . . . 850
18.2.6.1 उदाहरण 18.2: तापीय प्रसार/प्रतिबल . . . 850
18.3 विचारणीय पक्ष . . . 851
18.3.1 प्रक्षेपित भार . . . 851
18.3.2 भार का स्थान-निर्धारण . . . 852
18.3.3 भार-संयोजन . . . 852
18.3.4 भार-पथ . . . 853
18.3.5 प्रभावी क्षेत्रफल . . . 858
18.3.5.1 उदाहरण 18.3: प्रभावी क्षेत्रफल . . . 859
18.3.6 संरचनात्मक प्रतिक्रिया . . . 859

19 आधार-प्रतिक्रियाएँ **862**
19.1 परिचय . . . 862
19.1.1 आधारों के प्रकार . . . 863
19.1.2 संतुलन . . . 864
19.1.3 दशा-समीकरण . . . 865
19.1.4 स्थैतिक निर्धार्यता . . . 866
19.1.5 ज्यामितीय अस्थिरता . . . 867
19.1.6 मुक्त-पिंड आरेख . . . 867
19.2 उदाहरण . . . 869
19.2.1 उदाहरण 19.1: जलस्थैतिक भार . . . 869
19.2.2 उदाहरण 19.2: भार-संचरण . . . 869
19.2.3 उदाहरण 19.3: सरलतः समर्थित धरन . . . 870
19.2.4 उदाहरण 19.4: परवलयिक भार . . . 871
19.2.5 उदाहरण 19.5: तीन-विस्तृति धरन . . . 872
19.2.6 उदाहरण 19.6: त्रि-कब्जित त्रिकोणिका फ्रेम . . . 873
19.2.7 उदाहरण 19.7: आनत आधार . . . 875
19.2.8 उदाहरण 19.8: ग्रिड संरचना . . . 876
19.2.9 उदाहरण 19.9: वायुयान का संतुलन . . . 876
19.2.10 उदाहरण 19.10: विशाल बजरा . . . 877
19.2.11 उदाहरण 19.11: रैंकिन: तैरते पिंड का संतुलन—जलस्थैतिक प्रमाण . . . 881
19.2.12 उदाहरण 19.12: पालात्सेतो देल्लो स्पोर्ट; नेर्वी . . . 882

20 ट्रस **886**
20.1 परिचय . . . 886
20.1.1 मान्यताएँ . . . 886
20.1.2 चिह्न-परिपाटी . . . 887

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

20.1.3 निर्धार्यता और स्थायित्व . . . 888
20.2 विश्लेषण-विधियाँ . . . 889
20.2.1 संधि-विधि . . . 889
20.2.1.1 उदाहरण 20.1: ट्रस-विश्लेषण; संधि-विधि . . . 891
20.2.1.2 उदाहरण 20.2: 3D ट्रस . . . 893
20.3 परिच्छेद-विधि . . . 897
20.3.1 परिच्छेद-विधि . . . 897
20.3.2 उदाहरण 20.3: परिच्छेद-विधि . . . 897
20.4 संधि/आव्यूह-विधि . . . 898
20.4.1 उदाहरण 20.4: सरल ट्रस; संधि/आव्यूह-विधि . . . 900
20.4.2 उदाहरण 20.5: जटिल ट्रस; संधि/आव्यूह-विधि . . . 902

21 वंकित अवयवों में आंतरिक बल 906
21.1 परिचय . . . 906
21.1.1 अभियांत्रिकी उपागम: प्रतिबलों से आंतरिक बलों तक . . . 906
21.1.2 2d/3d सीधे और वक्र धरनों के आंतरिक बल . . . 908
21.1.3 यह क्यों महत्त्वपूर्ण है . . . 909
21.1.4 अभिकल्प चिह्न-परिपाटियाँ . . . 910
21.2 भार, अपरूपण और आघूर्ण के संबंध . . . 911
21.2.1 अवकल रूप . . . 911
21.2.2 समाकल रूप . . . 912
21.3 उदाहरण . . . 913
21.3.1 उदाहरण 21.1: आनत भार वाला धरन . . . 914
21.3.2 उदाहरण 21.2: आनत फ्रेम . . . 915
21.3.3 उदाहरण 21.3: जलस्थैतिक भार वाला फ्रेम . . . 918
21.3.4 उदाहरण 21.4: रैखिक रूप से परिवर्ती भार . . . 920
21.3.5 उदाहरण 21.5: फ्रेम; आनत छत का उदाहरण . . . 921
21.3.6 उदाहरण 21.6: पारस्परिक फ्रेम . . . 922
21.3.7 उदाहरण 21.7: 3D फ्रेम . . . 926

22 विक्षेप; प्रत्यास्थ वक्र 930
22.1 परिचय . . . 930
22.2 अवकल समीकरण . . . 931
22.2.1 उदाहरण 22.1: द्वि-समाकलन . . . 932
22.2.2 उदाहरण 22.2: अधिकतम विक्षेप . . . 933
22.2.3 उदाहरण 22.3: इष्टतम स्की-आकृति . . . 934
22.2.4 उदाहरण 22.4: तैरता धरन . . . 934
22.3 वक्रता . . . 937
22.3.1 उदाहरण 22.5: साइकिल का पहिया . . . 939
22.3.2 उदाहरण 22.6: कुंडलित स्प्रिंग की दृढता . . . 945
22.3.3 वक्रता–विकृति संबंध . . . 946
22.3.3.1 उदाहरण 22.7: द्विधात्विक स्विच . . . 947

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

22.3.4 वक्रता-क्षेत्र विधि (आघूर्ण-क्षेत्र) . . . 949
22.3.4.1 चिह्न परिपाटी . . . 949
22.3.4.2 प्रथम वक्रता-क्षेत्र प्रमेय . . . 949
22.3.4.3 द्वितीय वक्रता-क्षेत्र प्रमेय . . . 950
22.3.4.3.1 उदाहरण 22.8: वक्रता-क्षेत्र, कैंटिलीवर धरन . . . 951
22.3.4.3.2 उदाहरण 22.9: आघूर्ण-वक्रता, सरल आलंबित धरन . . . 952
22.3.4.4 अधिकतम विक्षेप . . . 953
22.3.4.4.1 उदाहरण 22.10: अधिकतम विक्षेप . . . 953
22.3.4.5 तापमान–वक्रता संबंध . . . 954
22.3.4.5.1 उदाहरण 22.11: तापमान-भार के अधीन फ्रेम . . . 955
22.3.4.6 उदाहरण 22.12: प्लास्टिक लंबाई . . . 957
22.3.4.7 प्रत्यास्थ भार/संयुग्मी धरन . . . 959
22.3.4.7.1 उदाहरण 22.13: संयुग्मी धरन; बिंदु भार . . . 960
22.3.4.7.2 उदाहरण 22.14: संयुग्मी धरन; परिवर्ती I . . . 961

23 अपरूपण और ऐंठन **964**
23.1 अपरूपण-विरूपण (अनुप्रस्थ) . . . 964
23.1.1 अपरूपण, अतिसूक्ष्म अवयव . . . 965
23.1.1.1 उदाहरण 23.1: कैंटिलीवर धरन का विक्षेप . . . 965
23.1.2 अपरूपण-वितरण; $\tau(y)$ . . . 966
23.1.3 अपरूपण गुणांक . . . 967
23.1.4 अपरूपण गुणक . . . 968
23.1.5 अपरूपण-विरूपण v_s, Timoshenko . . . 969
23.2 ऐंठन-विरूपण . . . 970
23.2.1 S^{t} Venant अथवा एकसमान ऐंठन . . . 970
23.2.2 Vlasov अथवा असमान ऐंठन . . . 971
23.2.2.1 उदाहरण 23.2: I-काट की असमान ऐंठन . . . 977

24 पूरक आभासी कार्य **981**
24.1 परिचय . . . 981
24.2 पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत की सरलीकृत व्युत्पत्ति . . . 982
24.2.1 व्युत्पत्ति . . . 982
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti पारस्परिक प्रमेय . . . 985
24.2.3 बाह्य आभासी कार्य $\delta\overline{W}^{*}$ . . . 986
24.2.4 आंतरिक आभासी कार्य $\delta\overline{U}^{*}$ . . . 986
24.3 उदाहरण . . . 987
24.3.1 उदाहरण 24.1: धरन . . . 987
24.3.2 उदाहरण 24.2: फ्रेम; विक्षेप . . . 988
24.3.3 उदाहरण 24.3: फ्रेम, घूर्णन . . . 990
24.3.4 उदाहरण 24.4: नम्य कोष्ठक . . . 991
24.3.5 उदाहरण 24.5: केबल-आलंबित कैंटिलीवर धरन . . . 993
24.3.6 उदाहरण 24.6: ऐंठन और नम्य विरूपण . . . 994

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

24.3.7 उदाहरण 24.7: धरन में नम्य और अपरूपण-विरूपण 996
24.3.8 उदाहरण 24.8: धरन में तापीय प्रभाव 997
24.3.9 उदाहरण 24.9: पाइपलाइन 998
24.3.10 उदाहरण 24.10: ट्रस; सरल 999
24.3.11 उदाहरण 24.11: ट्रस; जटिल 1000
24.3.12 उदाहरण 24.12: आरंभिक कैम्बर वाला ट्रस 1001
24.3.13 उदाहरण 24.13: द्वितीयक प्रतिबलों वाला ट्रस 1002
24.3.14 उदाहरण 24.14: वृत्ताकार वलय 1004
24.3.15 उदाहरण 24.15: स्प्रिंग 1006

25 लचीलापन विधि **1010**
25.1 परिचय 1010
25.2 बल/लचीलापन विधि 1016
25.2.1 उदाहरण 1017
25.2.1.1 उदाहरण 25.1: टाई-छड सहित बीम 1017
25.2.1.2 उदाहरण 25.2: इस्पात भवन ढाँचे का विश्लेषण 1019
25.2.1.3 उदाहरण 25.3: ट्रस, एक अतिरिक्त बल 1022
25.2.1.4 उदाहरण 25.4: ट्रस: दो अतिरिक्त बल 1025
25.2.1.5 उदाहरण 25.5: ट्रस: तापीय भार 1027
25.2.1.6 उदाहरण 25.6: स्प्रिंग-आधारित बीम 1028
25.2.1.7 उदाहरण 25.7: क्वीन पोस्ट 1030
25.2.1.8 उदाहरण 25.8: लचीलापन आव्यूह; वक्र बीम 1033
25.3 तीन आघूर्ण समीकरण 1036
25.3.1 उदाहरण 25.9: सतत बीम 1039
25.3.2 उदाहरण 25.10: सतत बीम 1040

26 विस्थापनों के पदों में बल **1042**
26.1 परिचय 1042
26.1.1 चिह्न परिपाटी 1043
26.1.2 विश्लेषण विधियाँ 1043
26.2 अक्षीय विरूपण 1044
26.3 आनमन 1044
26.3.1 अवकल समीकरण 1044
26.3.2 प्रारंभिक विकृतियों के लिए संधि-सिरा बल 1048
26.3.3 आनमनी अवयवों के लिए संधि समतुल्य बल 1049
26.3.3.1 एकसमान वितरित भार 1049
26.3.3.2 संकेंद्रित भार 1050

27 हस्त-गणना द्वारा दृढता **1052**
27.1 परिचय 1052
27.2 ढाल-विक्षेप; प्रत्यक्ष हल 1052
27.2.1 उदाहरण 1054
27.2.1.1 उदाहरण 27.1: कैंटिलीवर बीम 1054

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

27.2.1.2 उदाहरण 27.2: सतत बीम 1055
27.2.1.3 उदाहरण 27.3: दो-विस्तार बीम 1056
27.2.1.4 उदाहरण 27.4: दो-विस्तार बीम, प्रारंभिक विक्षेप 1058
27.2.1.5 उदाहरण 27.5: ढाँचा 1059
27.2.1.6 उदाहरण 27.6: बॉक्स कल्वर्ट 1061
27.3 आघूर्ण वितरण 1063
27.3.1 परिचय 1063
27.3.1.1 उदाहरण 27.7: सतत बीम 1066
27.4 ढाल-विक्षेप; आघूर्ण वितरण; Gauss-Seidel 1069
27.4.1 उदाहरण 27.8: ढाल-विक्षेप/आघूर्ण वितरण/Gauss-Seidel 1069

28 प्रभाव रेखाएँ **1071**
28.1 परिचय 1071
28.2 प्रक्रिया 1072
28.2.1 उदाहरण 28.1: सरल आलंबित धरन की प्रभाव रेखाएँ 1072
28.2.2 उदाहरण 28.2: अधिलंबों सहित सरल आलंबित धरन 1075
28.3 Müller-Breslau सिद्धांत 1075
28.3.1 व्युत्पत्ति 1075
28.3.1.1 उदाहरण 28.3: Müller-Breslau; अपरूपण प्रभाव रेखा 1076
28.3.1.2 उदाहरण 28.4: Müller-Breslau; आघूर्ण प्रभाव रेखा 1077

29 द्वितीय-कोटि प्रत्यास्थ विश्लेषण **1078**
29.1 परिचय 1078
29.2 बड़े विस्थापन, स्थिर 1079
29.2.1 उदाहरण 29.1: ज्यामितीय अस्थिरता 1079
29.2.2 उदाहरण 29.2: आनमनी विरूपण पर अक्षीय भार का प्रभाव 1080
29.2.3 उदाहरण 29.3: कैंटिलीवर धरन का बड़ा विक्षेप 1083
29.3 छोटे विस्थापन, अस्थिर 1087
29.3.1 विविक्त दृढ दंड 1087
29.3.1.1 एकल-दंड निकाय 1087
29.3.1.1.1 उदाहरण 29.4: दो कब्जेदार दृढ स्तंभों का कुंचन 1089
29.3.2 सतत निकाय 1091
29.3.2.1 Euler कुंचन भार 1091
29.3.2.1.1 उदाहरण 29.5: कब्जेदार-कब्जेदार स्तंभ का कुंचन 1093
29.3.2.1.2 उदाहरण 29.6: आबद्ध-आबद्ध स्तंभ का कुंचन 1094
29.3.2.1.3 उदाहरण 29.7: आबद्ध-कब्जेदार स्तंभ का कुंचन 1095
29.3.2.1.4 उदाहरण 29.8: प्रत्यास्थ आलंबों वाला स्तंभ 1097
29.3.2.1.5 उदाहरण 29.9: अवरुद्ध कुंचन 1099
29.3.2.1.6 उदाहरण 29.10: जल मीनार 1100
29.3.2.2 मुक्त कंपन के साथ सादृश्य 1103
29.3.2.3 प्रभावी लंबाई गुणक K 1104
29.3.2.4 अप्रत्यास्थ स्तंभ 1107

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

30 केबल संरचनाएँ **1110**
30.1 परिचय . . . 1110
30.2 संकेंद्रित भार . . . 1111
30.2.1 उदाहरण 30.1: फनिक्युलर केबल . . . 1111
30.2.2 उदाहरण 30.2: झुका हुआ फनिक्युलर केबल . . . 1113
30.2.3 उदाहरण 30.3: द्वि-केबल गोंडोला . . . 1114
30.3 वितरित भार . . . 1115
30.3.1 साम्य समीकरण . . . 1115
30.3.2 qdx; पार्श्व भार; परवलय . . . 1116
30.3.2.1 ज्यामिति . . . 1116
30.3.2.2 आंतरिक बल . . . 1121
30.3.2.3 प्रत्यास्थ दीर्घन . . . 1122
30.3.2.4 तुल्य अक्षीय दृढता . . . 1124
30.3.2.5 विशेष स्थिति: क्षैतिज जीवा . . . 1127
30.3.2.5.1 उदाहरण 30.4: आनत केबल की ज्यामिति . . . 1127
30.3.2.5.2 उदाहरण 30.5: आनत केबल के बल . . . 1128
30.3.2.5.3 उदाहरण 30.6: गाइ-केबल युक्त मीनार . . . 1130
30.3.2.5.4 उदाहरण 30.7: झूला पुल . . . 1131
30.3.2.5.5 उदाहरण 30.8: अविस्तार्य केबल; तापमान . . . 1133
30.3.2.5.6 उदाहरण 30.9: विस्तार्य केबल; लटकाव . . . 1133
30.3.2.5.7 उदाहरण 30.10: विस्तार्य केबल; तापीय प्रभाव . . . 1134
30.3.2.5.8 उदाहरण 30.11: विस्तार्य केबल; पूर्वप्रतिबल . . . 1134
30.3.3 qds; कैटेनरी . . . 1135
30.3.3.1 ज्यामिति . . . 1135
30.3.3.2 बल . . . 1137
30.3.3.3 आनत जीवा वाली कैटेनरी . . . 1137
30.3.3.3.1 उदाहरण 30.12: आनत केबल में लटकाव . . . 1139
30.3.3.3.2 उदाहरण 30.13: ट्रॉली-बस केबल आलंब . . . 1139
30.3.4 परवलय तथा कैटेनरी पर आधारित हलों की तुलना . . . 1142
30.3.4.1 उदाहरण 30.14: कैटेनरी बनाम परवलय . . . 1143

31 चिनाई मेहराबों का विश्लेषण (वूस्वार) **1145**
31.1 परिचय . . . 1145
31.2 कुछ ऐतिहासिक टिप्पणियाँ . . . 1146
31.2.1 De la Hire; 1640-1718 . . . 1146
31.2.2 Belidor; 1698-1761 . . . 1147
31.2.3 Couplet; 1670-1744 . . . 1150
31.2.4 Danyzy; 1698-1777 . . . 1151
31.2.5 Coulomb;1736-1806 . . . 1152
31.2.6 Moseley; 1801-1872 . . . 1154
31.2.7 प्रत्यास्थ हल . . . 1154
31.2.7.1 Castigliano; 1847-1884 . . . 1154

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

31.2.7.2 Winkler; 1835-1888 . . . 1155
31.2.8 Pippard; 1891-1969 . . . 1155
31.2.8.1 उदाहरण 31.1: वूस्वार का विफलता भार; Pippard की विधि . . . 1159
31.3 Pippard की विधि का सामान्यीकरण; Smars . . . 1162
31.4 कलनविधि . . . 1166
31.5 अंतिम टिप्पणियाँ . . . 1169
31.5.1 Jacques Heyman; 1925 . . . 1169
31.5.2 प्रणोद रेखा . . . 1170
31.5.3 प्रणोद रेखा तथा Pippard . . . 1171

32 मेहराब तथा वक्र बीम **1174**
32.1 वृत्तीय मेहराब . . . 1175
32.1.1 तीन-किलक वृत्तीय मेहराब . . . 1175
32.1.1.1 Eddy का प्रमेय . . . 1176
32.1.1.2 उदाहरण . . . 1177
32.1.1.2.1 उदाहरण 32.1: तीन-किलक मेहराब; बिंदु-भार; वैश्लेषिक . 1177
32.1.1.2.2 उदाहरण 32.2: तीन-किलक मेहराब; बिंदु-भार . . . 1179
32.1.1.2.3 उदाहरण 32.3: तीन-किलक मेहराब; एकसमान भार . . . 1180
32.1.2 दो-किलक वृत्तीय मेहराब . . . 1182
32.1.3 किलकरहित वृत्तीय मेहराब . . . 1183
32.1.3.1 उदाहरण 32.4: किलकरहित वृत्तीय मेहराब . . . 1183
32.1.4 सामान्यीकृत हल . . . 1191
32.1.4.1 व्युत्पत्ति . . . 1191
32.1.4.1.1 गुरुत्व-केंद्र . . . 1191
32.1.4.1.2 व्युत्पत्ति . . . 1192
32.1.4.1.3 सत्यापन . . . 1197
32.1.5 Mathematica-आधारित हल . . . 1197
32.2 मेहराब का इष्टतम आकार . . . 1198
32.2.1 उदाहरण 32.5: आदर्श मेहराब . . . 1198
32.3 परवलयी मेहराब . . . 1199
32.3.1 उदाहरण . . . 1199
32.3.1.1 उदाहरण 32.6: तीन-किलक परवलयी मेहराब . . . 1200
32.3.1.2 उदाहरण 32.7: परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाला दो-किलक परवलयी मेहराब 1200
32.3.2 सममित भार वाला आबद्ध मेहराब . . . 1204
32.3.2.1 उदाहरण 32.8: किलकरहित परवलयी मेहराब . . . 1206
32.3.3 नींव अवतलन और तापमान के प्रभाव . . . 1209
32.3.3.1 उदाहरण 32.9: परवलयी मेहराब पर तापीय भार . . . 1212
32.4 वक्र बीम . . . 1212
32.4.1 धनुष गर्डर . . . 1212
32.4.1.1 उदाहरण 32.10: धनुष गर्डर . . . 1213
32.4.2 कुंडलित बीम . . . 1215
32.4.2.1 ज्यामिति . . . 1215

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

32.4.2.2 साम्य . . . 1217
32.4.2.2.1 उदाहरण 32.11: कुंडलित मेहराब; बिंदु भार . . . 1218

33 पट्टिकाएँ **1222**
33.1 मोटी पट्टिका सिद्धांत: Reissner–Mindlin . . . 1222
33.1.1 शुद्धगतिक संबंध . . . 1222
33.1.2 संघटक संबंध . . . 1224
33.1.3 साम्य . . . 1225
33.2 पतली पट्टिका सिद्धांत: Kirchhoff . . . 1227
33.2.0.1 उदाहरण 33.1: पतली बनाम मोटी पट्टिका आदर्शीकरण . . . 1228
33.2.1 मूलभूत संबंध . . . 1228
33.2.2 अवकल समीकरण . . . 1229
33.2.3 प्रतिबल . . . 1229
33.2.3.1 उदाहरण 33.2: पट्टिका-आघूर्ण परिणामकों से प्रतिबल पुनर्प्राप्ति . 1230
33.2.3.2 उदाहरण 33.3: एकसमान दाब के अधीन सरल आलंबित वर्गाकार पट्टिका 1232
33.2.3.3 उदाहरण 33.4: मोटाई के प्रति पट्टिका-विक्षेप की संवेदनशीलता . . . 1233
33.2.4 वृत्तीय पट्टिकाएँ . . . 1233
33.2.4.1 उदाहरण 33.5: एकसमान दाब के अधीन जकड़ी वृत्तीय पट्टिका . . . 1237
33.2.5 परिवर्ती सूत्रीकरण . . . 1238
33.3 सारांश . . . 1239

34 कवच **1242**
34.1 व्यापक सिद्धांत . . . 1243
34.1.1 परिभाषाएँ . . . 1243
34.1.2 धारणाएँ . . . 1245
34.1.3 बल–विस्थापन संबंध . . . 1247
34.1.3.1 साम्य . . . 1249
34.1.3.2 संतुलन समीकरणों का पूर्ण समुच्चय . . . 1255
34.1.3.3 सुसंगतता . . . 1255
34.1.3.4 सारांश . . . 1259
34.1.3.5 प्रतिबल–विकृति–बल . . . 1260
34.1.3.5.1 प्रतिबल–विकृति . . . 1260
34.1.3.5.2 प्रतिबल–बल . . . 1261
34.1.3.6 अंतिम व्यंजक (विस्थापनों के पदों में बल) . . . 1262
34.1.4 सरलीकरण . . . 1264
34.1.4.1 उथले कवच . . . 1264
34.1.4.1.1 धारणाएँ . . . 1264
34.1.4.1.2 धारणाओं का अनुप्रयोग . . . 1264
34.1.4.1.3 गहरी-बीम समीकरण . . . 1266
34.1.4.1.4 स्लैब समीकरण . . . 1267
34.1.4.1.5 उथले कवचों का समीकरण . . . 1268
34.1.4.2 झिल्ली सिद्धांत . . . 1268

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.1.4.2.1 धारणाएँ . . . 1269
34.1.4.2.2 सिद्धांत . . . 1269
34.1.4.2.3 वर्गीकरण . . . 1269
34.1.4.2.4 विशेषीकरण . . . 1270
34.2 एकल बैरल का विश्लेषण (वृत्तीय बेलनाकार कवच) . . . 1273
34.2.1 परिचय . . . 1273
34.2.2 झिल्ली सिद्धांत . . . 1274
34.2.2.1 प्रतिबल परिणामक . . . 1274
34.2.2.1.1 त्रुटियाँ . . . 1279
34.2.2.1.2 संशोधन . . . 1279
34.2.2.2 विस्थापन . . . 1281
34.2.3 उथले कवच का सिद्धांत . . . 1283
34.2.3.1 संतुलन समीकरण . . . 1283
34.2.3.2 सूत्रण . . . 1284
34.2.3.2.1 समान भार का विशेष हल . . . 1287
34.2.3.2.2 तुलना: झिल्ली *बनाम* उथला कवच . . . 1288
34.2.3.2.3 उदाहरण 34.1: झिल्ली & उथले कवच की तुलना . . . 1291
34.2.3.3 सामान्य हल . . . 1291
34.2.3.3.1 विस्थापन w . . . 1292
34.2.3.3.2 M_ϕ . . . 1294
34.2.3.3.3 अन्य पद; कार्यविधि . . . 1295
34.3 स्थैतिकतः अनिर्धार्य कवच . . . 1298
34.3.1 किनारी बीम . . . 1298
34.3.1.1 ऊर्ध्वाधर किनारी बीम . . . 1300
34.3.1.2 क्षैतिज किनारी बीम . . . 1302
34.3.2 पूर्वप्रतिबलित किनारी बीम . . . 1302
34.3.2.1 उदाहरण 34.2: बेलनाकार कवच का अभिकल्प . . . 1304
34.3.3 MATLAB®कोड और संख्यात्मक उदाहरण . . . 1315

35 गतिकी I **1317**
35.1 दार्शनिक आधार . . . 1318
35.2 गतिक विश्लेषण कब आवश्यक है . . . 1318
35.3 मूलभूत सिद्धांत . . . 1319
35.3.1 d'Alembert का सिद्धांत और गतिक संतुलन . . . 1319
35.3.2 एकल-स्वतंत्रता-कोटि दोलक . . . 1320
35.3.3 प्राकृतिक आवृत्ति और आवर्तकाल . . . 1321
35.3.3.1 उदाहरण 35.1: किसी SDOF निकाय के लिए ω_n, T_n और f_n की गणना 1321
35.3.4 अवमंदन और अवमंदन अनुपात . . . 1322
35.4 मुक्त कंपन . . . 1323
35.4.1 अनवमंदित मुक्त कंपन . . . 1323
35.4.2 अवमंदित मुक्त कंपन . . . 1324
35.4.3 लघुगणकीय ह्रास . . . 1325

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय-सूची (I–IV)

35.4.3.1 उदाहरण 35.2: लघुगणकीय ह्रास से अवमंदन का आकलन 1325
35.5 प्रणोदित कंपन: हार्मोनिक उत्तेजन 1326
35.5.1 अनवमंदित हार्मोनिक अनुक्रिया 1326
35.5.2 अवमंदित हार्मोनिक अनुक्रिया 1327
35.5.2.1 उदाहरण 35.3: हार्मोनिक अनुक्रिया: प्रवर्धन और कला 1328
35.6 स्वेच्छ भारण के प्रति अनुक्रिया 1329
35.6.1 आवेग अनुक्रिया और एकक आवेग 1329
35.6.1.1 उदाहरण 35.4: अवमंदित SDOF निकाय की एकक आवेग अनुक्रिया . . 1330
35.6.2 Duhamel समाकल 1330
35.6.2.1 उदाहरण 35.5: अचानक सोपान भार: गतिक प्रवर्धन गुणक 2 1331
35.6.2.2 उदाहरण 35.6: आयताकार स्पंद भार और आघात वर्णक्रम 1332
35.6.3 Fourier विश्लेषण और आवृत्ति अनुक्रिया 1334
35.6.3.1 उदाहरण 35.7: दो हार्मोनिक घटकों वाले आवर्ती मशीन-बल के प्रति आवृत्ति अनुक्रिया 1335
35.7 आलंब उत्तेजन और भूकंपीय अनुक्रिया 1336
35.7.1 आधार उत्तेजन का गति-समीकरण 1336
35.7.2 अनुक्रिया वर्णक्रम 1337
35.7.2.1 उदाहरण 35.8: अनुक्रिया वर्णक्रम से एक-मंजिला ढाँचे का भूकंपीय अभिकल्प 1338
35.8 बहु-स्वतंत्रता-कोटि निकाय 1339
35.8.1 गति-समीकरण 1339
35.8.2 अनवमंदित मुक्त कंपन: प्राकृतिक विधाएँ 1340
35.8.3 विधिक विश्लेषण 1340
35.8.4 भूकंपीय अनुक्रिया में विधिक सहभागिता 1341
35.8.4.1 उदाहरण 35.9: भूकंपीय भारण के अधीन 3-DOF अपरूपण भवन का विधिक विश्लेषण 1342
35.9 सतत निकाय 1344
35.9.1 दंडों का अक्षीय कंपन 1344
35.9.2 धरनों का अनुप्रस्थ कंपन 1345
35.9.2.1 उदाहरण 35.10: इस्पात पद-सेतु की प्राकृतिक आवृत्ति और पैदल-यात्री अनुनाद जाँच 1345
35.10 अरैखिक गतिकी 1347
35.10.1 अरैखिकता के स्रोत 1347
35.10.2 शैथिल्य और ऊर्जा-क्षय 1347
35.10.2.1उदाहरण 35.11: द्विरेखीय शैथिल्य पाश से तुल्य श्यान अवमंदन . . . 1348
35.10.3 तन्यता और क्षमता अभिकल्प 1349
35.10.3.1उदाहरण 35.12: प्रबलित कंक्रीट ढाँचे के लिए तन्यता माँग और बल न्यूनीकरण 1350
35.11 व्यावहारिक विचार 1351
35.11.1 वास्तविक संरचनाओं में अवमंदन 1351

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35.11.2 मृदा-संरचना अन्योन्यक्रिया 1352
35.11.3 समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक 1352
35.11.4 उदाहरण 35.13: ऊँचे भवन के लिए समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक का अभिकल्प 1352
35.11.5 आधार-विलगन 1354
35.11.6 उदाहरण 35.14: आधार-विलगित अस्पताल भवन का अभिकल्प 1354
35.12 समापन टिप्पणियाँ 1356
35.12.1 अनुक्रिया-वर्णक्रम विधियों पर व्यवसायी की सावधानी 1356
35.12.2 समापन टिप्पणी: रैखिक सिद्धांत की सीमाएँ 1356

36 संरचनात्मक अभिकल्प के तत्त्व 1357
36.1 परिचय 1357
36.1.1 विश्लेषण और अभिकल्प: एक पुनरावर्ती प्रक्रिया 1357
36.1.2 सुरक्षा 1359
36.2 अनुमेय प्रतिबल अभिकल्प (ASD) 1360
36.2.1 उदाहरण 36.1: ASD: आनमन 1361
36.3 भार और प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) 1361
36.4 LRFD-आधारित अभिकल्प संहिताओं के उदाहरण 1364
36.4.1 अनुप्रयोग: R/C धरन अनुभागों का सुघट्य सामर्थ्य 1365
36.4.1.1 उदाहरण 36.2: चरम सामर्थ्य; समीक्षा 1370
36.4.1.2 उदाहरण 36.3: चरम सामर्थ्य; अभिकल्प I 1370
36.4.1.3 उदाहरण 36.4: चरम सामर्थ्य; अभिकल्प II 1371
36.4.1.4 उदाहरण 36.5: यथार्थ विश्लेषण 1372
36.4.2 अनुप्रयोग: R/C स्तंभों का सुघट्य सामर्थ्य 1374
36.4.2.1 उदाहरण 36.6: R/C स्तंभ, c ज्ञात 1379
36.4.2.2 उदाहरण 36.7: R/C स्तंभ, e ज्ञात 1380
36.4.3 पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट 1383
36.4.3.1 उदाहरण 36.8: प्रकरण अध्ययन: वॉलनट लेन ब्रिज 1384
36.5 निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी (PBE) 1388

37 स्थैतिकतः अनिर्धार्य मेहराब का अभिकल्प 1390
37.1 उदाहरण 37.1: स्थैतिकतः अनिर्धार्य मेहराब का अभिकल्प 1390
37.2 उदाहरण 37.2: मेहराब में तापमान परिवर्तन 1397

38 फर्मी समाधान (सन्निकट विश्लेषण) 1401
38.1 आंतरिक बल 1402
38.1.1 विक्षेपित आकृतियाँ & नति-परिवर्तन बिंदु 1402
38.1.2 आधार-दृढता के पदों में धरन आघूर्ण 1405
38.1.3 विश्लेषण विधियाँ 1406
38.1.3.1 ऊर्ध्वाधर भार 1407
38.1.3.2 क्षैतिज भार 1410
38.1.3.2.1 पोर्टल विधि 1410
38.1.3.2.1.1 उदाहरण 38.1: पोर्टल विधि; निम्न-तलीय भवन . 1412
38.1.3.2.1.2 उदाहरण 38.2: Matlab समाधान 1424

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

38.1.3.2.2 ब्रैकट विधि . . . 1425
38.1.3.2.2.1 उदाहरण 38.3: ब्रैकट विधि; उच्च-तलीय भवन . . 1426
38.2 संरचनात्मक प्रतिक्रिया . . . 1427
38.2.1 कूप उपतंत्र . . . 1427
38.2.1.1 उदाहरण 38.4: कूप उपतंत्र . . . 1428
38.2.2 अपरूपण भित्ति . . . 1429
38.2.2.1 उदाहरण 38.5: कंक्रीट अपरूपण भित्ति . . . 1429
38.2.3 ट्रसित अपरूपण भित्ति . . . 1431
38.2.3.1 उदाहरण 38.6: ट्रसित अपरूपण भित्ति . . . 1432
38.2.4 पार्श्व विक्षेप . . . 1433
38.2.4.1 छोटी भित्ति . . . 1433
38.2.4.2 ऊँची भित्ति . . . 1434
38.2.4.3 भित्तियाँ और लिंटल . . . 1434
38.2.4.4 ढाँचे . . . 1435
38.2.4.4.1 उदाहरण 38.7: भवन का सन्निकट अनुप्रस्थ विक्षेप . . . 1437

39 प्रारंभिक अभिकल्प **1442**
39.1 उदाहरण 39.1: डलेस विमानपत्तन . . . 1442
39.2 उदाहरण 39.2: एफिल टॉवर . . . 1449
39.3 उदाहरण 39.3: मागात्सीनी जेनराली . . . 1456
39.4 उदाहरण 39.4: जॉर्ज वाशिंगटन ब्रिज . . . 1460
39.5 उदाहरण 39.5: द्वि-कब्जित आर्च का अभिकल्प . . . 1467
39.6 उदाहरण 39.6: आर्च में तापमान परिवर्तन . . . 1475
39.7 उदाहरण 39.7: I के सेकेंट परिवर्तन वाला परवलयिक आर्च . . . 1478

III मध्यवर्ती एवं संख्यात्मक 1481

40 प्रत्यक्ष दृढता विधि का परिचय **1482**
40.1 आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण क्यों? . . . 1482
40.2 संरचनात्मक आदर्शीकरण . . . 1483
40.3 चिह्न-परिपाटी . . . 1485
40.4 निर्देशांक तंत्र . . . 1486
40.5 नम्यता *बनाम* दृढता . . . 1486
40.6 स्वतंत्रता कोटियाँ . . . 1487
40.7 स्थैतिक *बनाम* गतिकीय अनिर्धार्यता . . . 1490
40.8 संरचनात्मक विश्लेषण/यांत्रिकी: एक परिसीमा मान समस्या . . . 1490

41 अवयव दृढता आव्यूह $\mathbf{k}^{(e)}$ **1493**
41.1 दृढता पद की परिभाषा . . . 1493
41.2 ट्रस अवयव . . . 1494
41.3 धरन: यूलर-बर्नूली . . . 1495

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

41.4 2D फ्रेम अवयव (जिसे धरन-स्तंभ अवयव भी कहते हैं) . . . 1495
41.5 ग्रिड अवयव . . . 1496
41.6 3D धरन-स्तंभ अवयव . . . 1496
41.7 टिमोशेंको धरन . . . 1499
41.7.1 अतिरिक्त विकृति . . . 1499
41.7.2 अवयव दृढता आव्यूह में संशोधन . . . 1500
41.8 व्लासोव मरोड़ . . . 1502

42 दृढता विधि; I लंबकोणीय संरचनाएँ 1504
42.1 परिचय . . . 1504
42.2 सिद्धांत . . . 1505
42.2.1 नम्यता पर पुनर्विचार . . . 1505
42.2.2 प्रत्यक्ष दृढता विधि . . . 1506
42.2.3 अवयव से संरचना तक . . . 1507
42.3 उदाहरण . . . 1507
42.3.1 उदाहरण 42.1: लंबकोणीय धरन . . . 1507
42.3.2 उदाहरण 42.2: लंबकोणीय फ्रेम . . . 1510
42.3.3 उदाहरण 42.3: ग्रिड . . . 1519
42.3.4 उदाहरण 42.4: संकर फ्रेम . . . 1522
42.3.5 उदाहरण 42.5: संकर ग्रिड . . . 1525

43 रूपांतरण आव्यूह 1531
43.1 परिचय . . . 1531
43.2 कुछ सिद्धांत . . . 1532
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ और $[\mathbf{K}^e]$ का संबंध . . . 1532
43.2.2 दिशा-कोज्याएँ . . . 1533
43.3 फ्रेमवर्क अवयवों के रूपांतरण आव्यूह . . . 1535
43.3.1 2D स्थितियाँ . . . 1536
43.3.1.1 2D फ्रेम . . . 1536
43.3.1.2 ग्रिड . . . 1536
43.3.1.3 व्लासोव धरन . . . 1537
43.3.1.4 2D ट्रस . . . 1538
43.3.2 3D फ्रेम . . . 1539
43.3.3 यूलरीय घूर्णन . . . 1539
43.3.4 अवयव अक्ष का ऐंठन . . . 1541
43.3.5 3D ट्रस . . . 1543

44 प्रत्यक्ष दृढता विधि 1545
44.1 उद्देश्य . . . 1545
44.2 सिद्धांत . . . 1545
44.3 विविक्तीकरण . . . 1548
44.3.1 अनवरुद्ध और अवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियाँ . . . 1548
44.3.2 संरचनात्मक विविक्तीकरण . . . 1548

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
अप्रकाशित प्रति

44.4 कंप्यूटर कार्यान्वयन 1549
44.4.1 परिसीमा प्रतिबंध, [id] आव्यूह 1549
44.4.2 LM सदिश 1551
44.4.3 वैश्विक दृढता आव्यूह का समंजन 1552
44.4.4 चरणबद्ध प्रक्रिया 1552
44.5 उदाहरण 1554
44.5.1 उदाहरण 44.1: फ्रेम 1554
44.5.1.1 प्रारंभिक विवरण 1554
44.5.2 उदाहरण 44.3: ट्रस 1565

45 दृढता आव्यूह के गणितीय गुण; अभिकलनीय विषय **1569**
45.1 कुप्रतिबद्ध आव्यूह 1569
45.1.1 अभिलक्षणिक मान 1569
45.1.1.1 अभिलक्षणिक मानों की भौतिक व्याख्या 1572
45.1.2 प्रतिबंध संख्या 1574
45.1.3 कुप्रतिबद्ध दृढता आव्यूह 1575
45.1.3.1 उदाहरण 45.1: कुप्रतिबद्ध 1578
45.2 संख्यात्मक विचार 1579
45.2.1 प्रतिलोमन बनाम अपघटन 1579
45.2.2 नोडीय क्रमांकन 1580

46 विशेष विषय **1584**
46.1 संघनन/उपसंरचनाकरण 1584
46.2 स्थैतिकी और शुद्धगतिकी के समीकरण 1585
46.2.1 स्थैतिकी आव्यूह $\mathcal{B}$ 1585
46.2.1.1 व्युत्पत्ति 1585
46.2.1.2 स्थैतिकतः निर्धार्य 1585
46.2.1.2.1 उदाहरण 46.1: स्थैतिकतः निर्धार्य ट्रस का स्थैतिकी आव्यूह 1586
46.2.1.2.2 उदाहरण 46.2: धरन का स्थैतिकी आव्यूह 1587
46.2.1.3 स्थैतिकतः अनिर्धार्य 1588
46.2.1.3.1 उदाहरण 46.3: स्थैतिकतः अनिर्धार्य ट्रस का स्थैतिकी आव्यूह 1589
46.2.1.4 अतिरिक्त बलों की पहचान 1590
46.2.1.4.1 उदाहरण 46.4: अतिरिक्त बलों का चयन 1591
46.2.1.5 शुद्धगतिक अस्थिरता 1593
46.2.2 शुद्धगतिकी आव्यूह $\mathcal{A}$ 1593
46.2.2.1 उदाहरण 46.5: शुद्धगतिकी आव्यूह: ट्रस उदाहरण 1594
46.2.3 स्थैतिकी-शुद्धगतिकी आव्यूह संबंध 1595
46.2.3.1 स्थैतिकतः निर्धार्य 1595
46.2.3.2 स्थैतिकतः अनिर्धार्य 1596
46.3 स्थैतिकी आव्यूह के प्रतिलोम द्वारा शुद्धगतिक संबंध 1597
46.4 दृढता-नम्यता संबंध 1598

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

46.4.1 दृढता से नम्यता 1598
46.4.1.1 उदाहरण 46.6: नम्यता आव्यूह 1599
46.4.2 नम्यता से दृढता 1599
46.4.2.1 उदाहरण 46.7: नम्यता से दृढता 1600
46.4.2.2 उदाहरण 46.8: वक्र अवयव का दृढता आव्यूह 1602
46.4.3 नम्यता और दृढता विधियों के बीच द्वैतता 1603
46.5 **K** के लिए सर्वांगसम रूपांतरण उपागम 1604
46.5.1 उदाहरण 46.9: सर्वांगसम रूपांतरण 1605
46.5.2 उदाहरण 46.10: फ्रेम का सर्वांगसम रूपांतरण 1607
46.6 विशेष अवयव 1609
46.6.1 दृढ विस्थापन; 1609
46.6.2 अर्ध-दृढ धरन 1612
46.6.3 परिवर्ती अनुप्रस्थ काट 1617
46.7 आघूर्ण फ्रेमों में पार्श्व विस्थापन के स्रोत 1619

47 यांत्रिकी में विचरण कलन: यूलर-लाग्रांज रूपरेखा 1633
47.1 परिचय 1633
47.2 Euler 1634
47.2.1 प्रारंभिक बातें 1634
47.2.2 $\delta\Pi$ का अवकल रूप 1636
47.2.3 यूलर समीकरण 1637
47.2.4 $\delta\Pi$ 1638
47.2.5 प्रेक्षण 1639
47.2.6 परिसीमा प्रतिबंध 1639
47.2.6.1 उदाहरण 47.1: यूलर: अक्षीय 1640
47.2.6.2 उदाहरण 47.2: यूलर: बंकन 1642
47.3 कुल स्थितिज ऊर्जा सिद्धांत 1643
47.4 Hamilton 1646
47.4.1 गतिक; यूलर/लाग्रांज 1646
47.4.1.1 विविक्त निकाय 1646
47.4.1.2 सांतत्य निकाय 1648
47.4.2 उदाहरण 47.3: Hamilton 1650
47.5 सामान्य Hu-Washizu विचरण सिद्धांत 1653
47.6 “छद्म-Tonti” आरेख 1656
47.6.1 D’Alembert का सिद्धांत 1656
47.6.2 Hamilton के समीकरण 1657
47.6.3 Lagrange के समीकरण 1657

48 संरचनात्मक विश्लेषण में विचरण और ऊर्जा सिद्धांत 1662
48.1 परिचय 1662
48.1.1 ऊष्मागतिकी 1663
48.1.2 मूल संबंध 1663
48.1.3 परिभाषाएँ 1664

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

48.1.4 वास्तविक पद 1664
48.1.5 आभासी व्यंजक 1666
48.1.6 टिप्पणियाँ 1667
48.1.6.1 आंतरिक कार्य बनाम विकृति ऊर्जा 1667
48.1.6.2 बाह्य कार्य की पथ-स्वतंत्रता 1668
48.1.7 1D अवयवों पर अनुप्रयोग 1669
48.1.7.1 पूरक ऊर्जा, रैखिक प्रत्यास्थ U^* 1669
48.1.7.2 ऊर्जा, रैखिक प्रत्यास्थ U 1670
48.1.7.3 पूरक आभासी विकृति ऊर्जा δU^* 1670
48.1.7.4 आभासी विकृति ऊर्जा δU 1672
48.1.8 VW और CVW का सारांश 1674
48.2 उपागम 1675
48.3 आभासी कार्य 1676
48.3.1 पूरक आभासी कार्य का सिद्धांत (PCVW) 1676
48.3.1.1 व्युत्पत्ति 1676
48.3.1.2 उदाहरण 48.1: PCVW, क्रमशः परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाली कैंटिलीवर धरन 1679
48.3.2 उदाहरण 48.2: तीन-कब्ज़ों वाली अर्धवृत्ताकार मेहराब 1680
48.3.3 आभासी कार्य का सिद्धांत (PVW) 1681
48.3.3.1 व्युत्पत्ति 1681
48.3.3.2 उदाहरण 48.3: PVW, क्रमशः परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाली कैंटिलीवर धरन 1683
48.4 स्थितिज ऊर्जा के सिद्धांत 1685
48.4.1 कुल स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत (PTPE) 1685
48.4.1.1 व्युत्पत्ति 1685
48.4.1.2 उदाहरण 48.4: PTPE, कमानी और द्रव्यमान 1687
48.4.1.3 उदाहरण 48.5: PTPE; परिवर्ती I वाली आबद्ध धरन 1688
48.4.2 कुल पूरक स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत (PTCPE) 1689
48.5 कास्टिलियानो के प्रमेय 1689
48.5.1 प्रथम प्रमेय 1689
48.5.1.1 उदाहरण 48.6: अरेखीय प्रत्यास्थ ट्रस 1691
48.5.2 द्वितीय प्रमेय 1692
48.5.2.1 उदाहरण 48.7: कास्टिलियानो 2; कैंटिलीवर धरन 1693
48.5.2.2 उदाहरण 48.8: कास्टिलियानो 2; कास्टिलियानो के द्वितीय प्रमेय से समान रूप से भारित धरन का विक्षेप 1693
48.5.2.3 उदाहरण 48.9: कास्टिलियानो 2, अरेखीय ट्रस 1694
48.5.2.4 उदाहरण 48.10: कास्टिलियानो 2, कमानी का विक्षेप 1694
48.6 रेले–रिट्ज विधि 1695
48.6.1 व्युत्पत्ति 1695
48.6.1.1 उदाहरण 48.11: रेले–रिट्ज: समान रूप से भारित सरल आलंबित धरन . 1696
48.6.1.2 उदाहरण 48.12: विचरणात्मक विधियाँ 1697

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

48.7 सारांश 1705

49 अंतर्वेशन फलन **1709**
49.1 परिचय 1709
49.1.1 आकार फलनों के अभिलक्षण 1709
49.1.2 पास्कल त्रिभुज 1710
49.1.3 निर्देशांक निकाय 1711
49.1.3.1 कार्तीय 1711
49.1.3.2 प्राकृतिक 1712
49.1.3.3 त्रिकोणीय 1713
49.1.4 सातत्य 1716
49.2 आकार फलन 1716
49.2.1 प्रत्यक्ष सूत्रीकरण 1716
49.2.1.1 ट्रस अवयव; रेखीय 1716
49.2.1.2 सामान्यीकरण 1718
49.2.1.3 स्थिर-विकृति त्रिभुज अवयव 1718
49.2.1.4 आयताकार द्विरेखीय अवयव 1720
49.2.1.5 ईंट द्वित्ररेखीय अवयव 1721
49.2.2 लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलन 1723
49.2.2.1 चतुर्भुज 1723
49.2.2.2 त्रिभुज 1724
49.2.2.3 ट्रस अवयव; द्विघाती 1725
49.2.2.4 धरन 1726
49.2.3 हर्मिटीय अंतर्वेशन फलन 1729
49.2.3.1 धरन आकार फलनों पर पुनर्विचार 1730
49.2.3.2 चतुर्भुज अवयव 1732
49.2.3.2.1 रेखीय चतुर्भुज (q4) 1732
49.2.3.2.2 द्विघाती चतुर्भुज 1733
49.2.3.2.2.1 सेरेन्डिपिटी अवयव (q8) 1733
49.2.3.2.2.2 लैग्रांजीय अवयव (q9) 1734
49.2.3.3 परिवर्ती (पदानुक्रमिक) अवयव 1737
49.2.3.4 त्रिकोणीय अवयव (t6) 1737

50 रैखिक अवयव सूत्रीकरण **1741**
50.1 परिचय 1741
50.2 परिमित अवयव 1742
50.2.1 परिचय 1742
50.2.2 विकृति–विस्थापन संबंध 1742
50.2.2.1 अक्षीय सदस्य 1742
50.2.2.2 आनमनी सदस्य 1743
50.2.3 आभासी विस्थापन और विकृतियाँ 1743
50.2.4 अवयव दृढता आव्यूह सूत्रीकरण 1743
50.2.5 प्रतिबल पुनर्प्राप्ति 1745

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

50.3 अनुप्रयोग 1745
50.3.1 कैंची अवयव 1745
50.3.2 आनमनी अवयव 1746
50.4 सामान्य अवयव अपेक्षाएँ 1747
50.5 विविक्तीकरण त्रुटि और अभिसरण दर 1748
50.6 न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा-आधारित हलों का निम्न-सीमा स्वरूप 1750
50.7 हल में साम्य और सुसंगतता 1750

51 समप्राचलीय अवयव **1753**
51.1 परिचय 1753
51.2 अवयव सूत्रीकरण 1755
51.2.1 दंड अवयव 1755
51.2.2 चतुर्भुज (q4); विस्तृत सूत्रीकरण 1757
51.2.3 त्रिकोणीय अवयव 1761
51.2.3.1 T3 त्रिभुज 1761
51.2.3.2 T6 त्रिभुज 1763
51.2.4 उदाहरण 51.1: Jacobian operators 1764
51.3 संख्यात्मक समाकलन 1765
51.3.1 न्यूटन–कोट्स 1766
51.3.2 गाउस–लेजांद्र चतुर्थांश विधि 1768
51.3.2.1 लेजांद्र बहुपद 1770
51.3.2.2 $n = 2$ के लिए गाउस–लेजांद्र चतुर्थांश विधि 1770
51.3.3 आयताकार और प्रिज़्मीय क्षेत्र 1771
51.3.4 त्रिकोणीय क्षेत्र 1771
51.4 प्रतिबल पुनर्प्राप्ति; आसंधीय प्रतिबल 1771
51.5 आसंधीय तुल्य भार 1774
51.5.1 गुरुत्व भार 1775
51.5.2 कर्षण भार 1776
51.5.3 प्रारंभिक विकृतियाँ/प्रतिबल; तापीय भार 1777
51.5.4 समाकलन की कोटि 1778
51.5.4.1 पूर्ण समाकलन 1778
51.5.4.2 अपचयित समाकलन 1779
51.5.4.3 चयनात्मक अपचयित समाकलन 1780
51.6 परजीवी अपरूपण/असुसंगत अवयव 1781
51.6.1 Q4, समस्या 1781
51.6.2 Q6, समाधान 1782
51.6.3 Qm6, अतिरिक्त सुधार 1782
51.7 घूर्णी स्वातंत्र्य-कोटियाँ 1783

52 भारित अवशेष विधियाँ **1785**
52.1 परिचय 1785
52.2 सामान्य सूत्रीकरण 1786

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

52.2.1 अवकल संकारक 1786
52.2.1.1 उदाहरण 52.1: 1D अक्षीय सदस्य की सममिति और धनात्मक निश्चितता की जाँच 1786
52.2.2 अवशेष सूत्रीकरण 1787
52.3 भारित अवशेष विधियाँ 1789
52.3.1 बिंदु सहस्थान विधि 1789
52.3.2 उपक्षेत्र सहस्थान विधि 1789
52.3.3 न्यूनतम-वर्ग विधि 1790
52.3.4 गैलर्किन विधि 1790
52.3.4.1 उदाहरण 52.2: तंतु कंपन 1790
52.4 3D प्रत्यास्थता समस्याओं में गैलर्किन विधि के अनुप्रयोग 1792
52.4.1 दुर्बल रूप की व्युत्पत्ति 1792
52.4.2 परिमित अवयव विविक्तीकरण 1795
52.4.2.1 उदाहरण 52.3: धरन अवयव का दृढता आव्यूह 1796
52.4.2.2 उदाहरण 52.4: ऊष्मा अंतरण 1798

53 गतिकी II **1802**
53.1 परिचय 1803
53.2 गतिक विश्लेषण हेतु ढाँचा आदर्शीकरण 1804
53.2.1 अक्षीय *बनाम* आनमनी दृढता 1804
53.2.2 प्रतिरूपण 1804
53.2.2.1 उदाहरण 53.1: पार्श्व भार के प्रति भवन की रैखिक प्रत्यास्थ प्रतिक्रिया का मोंटे कार्लो अनुकरण 1808
53.3 समस्या निरूपण 1808
53.3.1 विचरणात्मक निरूपण 1808
53.3.2 द्रव्यमान निरूपण 1811
53.3.3 अवमंदन 1812
53.3.3.1 उदाहरण 53.2: अपरूपण भवन के लिए रेले अवमंदन गुणांकों का अंशांकन 1813
53.3.3.2 उदाहरण 53.3: विश्लेषणात्मक आधाररेखा: सामान्य प्रारंभिक दशाओं से मुक्त कंपन 1814
53.3.4 संख्यात्मक तकनीक: ऑयलर विधियाँ 1816
53.3.4.1 उदाहरण 53.4: ऑयलर विधि 1817
53.4 काल विविक्तीकरण 1817
53.4.1 अंतर्निहित 1819
53.4.1.1 न्यूमार्क विधि 1819
53.4.1.1.1 व्युत्पत्ति 1819
53.4.1.1.2 न्यूमार्क β अंतर्निहित विधि 1820
53.4.1.2 हिल्बर-ह्यूजेस-टेलर विधि 1822
53.4.2 स्पष्ट काल समाकलन 1824
53.4.2.1 रैखिक निकाय 1824
53.4.2.2 अरैखिक निकाय 1827
53.5 गतिक विश्लेषण की संख्यात्मक विधियाँ 1827

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53.5.1 केंद्रीय अंतर विधि . . . 1827
53.5.2 उदाहरण 53.5: केंद्रीय अंतर स्थिरता काल चरण . . . 1828
53.5.3 न्यूमार्क-बीटा विधि . . . 1828
53.5.4 विधा अध्यारोपण बनाम प्रत्यक्ष समाकलन . . . 1829
53.6 सतत निकाय . . . 1829
53.6.1 छडों का अक्षीय कंपन . . . 1830
53.6.1.1 उदाहरण 53.6: इस्पात बंधन-छड की तरंग चाल और अक्षीय प्राकृतिक आवृत्तियाँ . . . 1830
53.6.2 धरनों का अनुप्रस्थ कंपन . . . 1831
53.7 अरैखिक गतिकी . . . 1832
53.7.1 अरैखिकता के स्रोत . . . 1832
53.7.2 तन्यता और क्षमता अभिकल्प . . . 1833
53.8 व्यावहारिक विचार . . . 1833
53.8.1 वास्तविक संरचनाओं में अवमंदन . . . 1833
53.8.2 मृदा-संरचना अंतःक्रिया . . . 1833
53.8.3 समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक . . . 1834
53.8.4 आधार वियोजन . . . 1834
53.9 सारांश . . . 1834

IV उन्नत: अरैखिक एवं अन्य विषय 1836

54 परिचय **1838**
54.1 परिचय . . . 1838
54.1.1 अरैखिकताओं के स्रोत . . . 1838
54.1.2 अरैखिक विश्लेषण क्यों . . . 1840
54.2 संरचनात्मक अरैखिक विश्लेषणों के प्रकार . . . 1841
54.3 वृद्धिशील भार/विस्थापन . . . 1844
54.4 सुरक्षा . . . 1844
54.4.1 पारिभाषिक शब्दावली . . . 1844
54.4.2 सुरक्षा & भार . . . 1845
54.5 अभिकल्प संहिताएँ . . . 1846
54.5.1 परिचय . . . 1846
54.5.2 विकास: प्राचीन काल . . . 1847
54.5.2.1 मेसोपोटामिया; हम्मुराबी . . . 1847
54.5.2.2 रोमन; वित्रुवियस . . . 1848
54.5.3 आधुनिक काल . . . 1849
54.5.3.1 स्वीकार्य प्रतिबल अभिकल्प, ASD . . . 1851
54.5.3.2 भार एवं प्रतिरोध गुणांक अभिकल्प, LRFD . . . 1851
54.5.3.3 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी . . . 1852
54.5.4 सारांश . . . 1853

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

55 सुघट्यता I: तंतु & सातत्य (परिमित-अवयव विश्लेषण के लिए) 1855
55.1 परिचय . . . 1856
55.2 सुघट्य पराभव प्रतिबंध . . . 1856
55.2.1 द्रवस्थैतिक दाब से स्वतंत्र प्रतिरूप . . . 1856
55.2.2 द्रवस्थैतिक दाब पर निर्भर प्रतिरूप . . . 1858
55.3 प्रयोगशाला प्रेक्षण . . . 1860
55.3.1 धातुएँ . . . 1860
55.3.2 कंक्रीट . . . 1861
55.4 सूक्ष्मदर्शीय विफलताएँ . . . 1862
55.4.1 रासायनिक आबंध . . . 1862
55.4.2 तन्य और भंगुर विफलताएँ . . . 1863
55.4.3 विस्थापन-दोष . . . 1863
55.5 सुघट्यता के मूलाधार . . . 1864
55.5.1 परिचय . . . 1864
55.5.2 स्पर्शरेखीय प्रत्यास्थता मापांक . . . 1865
55.5.2.1 सामान्यीकृत व्युत्पत्ति . . . 1866
55.5.2.1.1 पराभव फलन; समदैशिक कठोरण प्रतिरूप . . . 1866
55.5.2.1.2 प्रवाह नियम . . . 1866
55.5.2.1.2.1 कून–टकर प्रतिबंध . . . 1867
55.5.2.1.3 संगतता प्रतिबंध . . . 1868
55.5.2.1.4 स्पर्शज्या मापांक . . . 1868
55.5.2.2 स्पर्शज्या मापांक: अभियांत्रिकी व्युत्पत्ति . . . 1869
55.5.2.3 उदाहरण 55.1: स्पर्शज्या मापांक . . . 1870

56 सुघट्यता II: परिच्छेद 1874
56.1 परिचय . . . 1874
56.2 सैद्धांतिक रूपरेखा: धारणाएँ और प्रमुख परिणाम . . . 1874
56.3 आघूर्ण–वक्रता: $M - \Phi$ . . . 1876
56.3.1 आघूर्ण–वक्रता संबंध से . . . 1878
56.3.1.1 उदाहरण 56.1: अरैखिक परिच्छेदीय विश्लेषण: वैश्लेषिक . . . 1878
56.3.2 प्रतिबल–विकृति संबंध से . . . 1880
56.3.2.1 उदाहरण 56.2: परतदार: इस्पात . . . 1881
56.3.2.2 उदाहरण 56.3: परतदार: कंक्रीट/ACI . . . 1886
56.4 आघूर्ण–वक्रता का सामान्यीकरण . . . 1888
56.4.1 वैश्लेषिक उपागम . . . 1888
56.4.1.1 उदाहरण 56.4: I-आकार R/C परिच्छेद की आघूर्ण–वक्रता . . . 1890
56.4.1.2 अंतःक्रिया आरेख $M - N$ . . . 1895
56.4.2 संख्यात्मक उपागम . . . 1896

57 सुघट्यता III: संरचना–पराभव रेखाएँ 1901
57.1 परिचय . . . 1902
57.2 रैखिक अवयव (धरन, ढाँचे) . . . 1903

विषय-सूची (I–IV)

57.2.1 शुद्धगतिक: ऊपरी सीमा 1903
57.2.1.1 उदाहरण 57.1: आबद्ध धरन: केंद्रीय भार 1906
57.2.1.2 उदाहरण 57.2: आबद्ध धरन: उत्केंद्रित भार 1906
57.2.1.3 उदाहरण 57.3: सतत धरन 1907
57.2.1.4 उदाहरण 57.4: लंबकोणीय ढाँचा 1907
57.2.1.5 उदाहरण 57.5: आनत ढाँचा 1908
57.2.2 स्थैतिकी; निचली सीमा 1909
57.2.2.1 उदाहरण 57.6: आधारित बाहुधरन I 1912
57.2.2.2 उदाहरण 57.7: आधारित बाहुधरन II 1912
57.2.2.3 उदाहरण 57.8: आबद्ध धरन 1913
57.2.2.4 उदाहरण 57.9: आनत ढाँचा 1914
57.3 समतलीय अवयव (पट्टिकाएँ) 1918
57.3.1 स्थैतिकी: निचली सीमा 1919
57.3.1.1 उदाहरण 57.10: वर्गाकार पट्टिका 1920
57.3.2 शुद्धगतिकी: ऊपरी सीमा 1920
57.3.2.1 उदाहरण 57.11: आयताकार पट्टिका 1922
57.4 पुशओवर विश्लेषण 1923
57.5 निचली सीमा विश्लेषण और 1924
57.5.1 पुशओवर विश्लेषण के बीच अनुरूपताएँ 1924
57.5.2 संहत सुघट्यता 1928

58 क्षति यांत्रिकी **1932**
58.1 ChatGPT द्वारा प्रस्तावित रूपरेखा 1932
58.1.1 अभिप्रेरणा और भौतिक आधार (~1.5 pages) 1932
58.2 ऊष्मागतिकीय संरूपण (~2 pages) 1932
58.3 अदिश समदैशिक क्षति: मज़ार्स प्रतिरूप (~4 pages) 1932
58.4 तनाव–संपीडन असममिति और एकपक्षीय प्रभाव (~2 pages) 1932
58.5 क्षति–सुघट्यता युग्मन (~2 pages) 1933
58.6 नियमितीकरण और जालक वस्तुनिष्ठता (~3 pages) 1933
58.7 धरन और स्तंभ अवयवों पर अनुप्रयोग (~3 pages) 1933
58.8 प्राचल-अभिज्ञान और व्यावहारिक मार्गदर्शिका (~1.5 pages) 1933
58.9 ग्रंथसूची टिप्पणियाँ और आगे का अध्ययन (~0.5 pages) 1933

59 अरैखिक विश्लेषण; सामग्री **1934**
59.1 संख्यात्मक मूल-निर्धारण 1934
59.1.1 न्यूटन विधियाँ 1935
59.1.1.1 परिचय 1935
59.1.1.2 टेलर श्रेणी और रैखिकीकरण 1936
59.1.1.2.1 उदाहरण 59.1: न्यूटन विधि, अदिश 1938
59.1.1.3 अभिसरण और त्रुटि आकलन 1940
59.1.1.4 अंतिम टिप्पणियाँ 1941
59.1.1.4.1 उदाहरण 59.2: न्यूटन विधि; सदिश 1941

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

59.1.2 छेदक विधि 1942
59.1.3 स्पष्ट 1943
59.2 संरचनात्मक यांत्रिकी से संबंध; अंतर्निहित 1944
59.3 समाकलन विधियाँ 1945
59.3.1 भार नियंत्रण 1945
59.3.1.1 न्यूटन–रैफसन/सुपरशरेखीय दृढता विधि 1945
59.3.1.2 संशोधित न्यूटन–रैफसन 1950
59.3.1.3 छेदक न्यूटन 1950
59.3.1.4 अभिसरण मानदंड 1951
59.3.1.5 सारांश तालिका 1952
59.3.2 विस्थापन नियंत्रण 1954

60 अरैखिक विश्लेषण; ज्यामितीय **1958**
60.1 ज्यामितीय दृढता आव्यूह 1959
60.1.1 व्युत्पत्ति 1959
60.1.1.1 दुर्बल रूप 1959
60.1.1.2 विकृति 1959
60.1.1.3 आंतरिक विकृति ऊर्जा 1960
60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$ 1961
60.1.2 प्रत्यास्थ अस्थिरता; द्विशाखन विश्लेषण 1962
60.1.2.1 उदाहरण 60.1: स्तंभ व्याकुंचन 1963
60.1.2.2 उदाहरण 60.2: ढाँचा व्याकुंचन; Matlab समाधान 1964
60.1.2.3 उदाहरण 60.3: ढाँचा व्याकुंचन; Mathematica समाधान 1967
60.1.2.4 उदाहरण 60.4: बंकनीय विरूपण पर अक्षीय भार का प्रभाव 1967
60.2 वृद्धिशील स्पष्ट विश्लेषण 1970
60.2.1 उदाहरण 60.5: ब्रैकट धरन का बृहत् विक्षेप 1972
60.3 $P-\Delta$ पर पुनर्विचार 1976
60.3.1 उदाहरण 60.6: $\mathbf{K}_{geom}$ के बिना व्याकुंचन भार 1976

61 अरैखिक; अवयव सूत्रीकरण **1981**
61.1 परिचय 1982
61.2 ट्रस अवयव 1982
61.2.1 2D ट्रस अवयव का निर्देश-तंत्र 1983
61.2.2 अवस्था निर्धारण 1984
61.3 धरन–स्तंभ अवयव सूत्रीकरण 1985
61.3.1 दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव 1985
61.3.1.1 दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव का निर्देश-तंत्र 1987
61.3.1.2 अवस्था निर्धारण 1989
61.3.1.3 “प्रच्छन्न” त्रुटि 1992
61.3.1.4 दृढता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण 1992
61.4 स्तर/तंतु परिच्छेद 1996
61.4.1 नम्यता-विधि 2D धरन–स्तंभ अवयव 1999

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

61.4.1.1 नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव का निर्देश-तंत्र 2002
61.4.1.2 अवस्था निर्धारण 2004
61.4.1.2.1 अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति के बिना 2004
61.4.1.2.2 अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति पाश सहित . . 2007
61.4.1.3 नम्यता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण 2012
61.4.1.3.1 अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति के बिना 2012
61.4.1.3.2 अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति पाश सहित . . 2015
61.4.2 दृढता-आधारित *बनाम* नम्यता-आधारित अवयव 2019
61.5 शून्य-लंबाई 2D अवयव सूत्रीकरण 2024
61.5.1 शून्य-लंबाई 2D अवयव में निर्देश-तंत्र 2024
61.5.2 अवयव अवस्था निर्धारण 2025
61.6 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव 2028
61.6.1 दृढता आव्यूह 2028
61.6.2 निर्देश-तंत्र 2029
61.6.3 अवयव अवस्था निर्धारण 2030
61.7 संख्यात्मक समाकलन 2032
61.8 अवयव बल 2032

62 वितरित एवं संकेंद्रित सुघट्यता के संघटक प्रतिरूप 2033
62.1 परिचय 2034
62.1.1 रैखिक ताप-प्रत्यास्थता 2034
62.1.2 अनुमानी प्रतिरूप 2035
62.2 वितरित सुघट्यता 2037
62.2.1 इस्पात प्रतिरूप 2037
62.2.1.1 परिचय 2037
62.2.1.2 समदैशिक दृढीकरण सहित द्विरैखिक प्रतिरूप 2037
62.2.1.2.1 प्रतिबल–विकृति संबंध 2037
62.2.1.2.2 द्विरैखिक प्रतिरूप का निर्धारण 2039
62.2.1.3 मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप 2040
62.2.2 कंक्रीट प्रतिरूप 2047
62.2.2.1 परिरोध का प्रभाव 2047
62.2.2.2 संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप 2048
62.2.2.2.1 प्रतिबल–विकृति संबंध 2048
62.2.2.2.2 संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप का निर्धारण 2055
62.2.3 प्रभावी क्षति और दृढता पुनर्प्राप्ति सहित विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप 2058
62.2.3.1 संघटक प्रतिरूप 2058
62.2.3.2 एकाक्षीय बहु-तंतु सूत्रीकरण 2060
62.2.3.3 विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण 2061
62.2.3.3.1 तनन भारण: 2061
62.2.3.3.2 संपीडन भारण: 2062
62.2.3.4 स्थायी विकृतियों सहित विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप 2069
62.2.3.4.1 एकाक्षीय संख्यात्मक योजना 2069

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.2.4 बंध–फिसलन 2072
62.2.5 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव 2074
62.3 संकेंद्रित सुघट्यता 2077
62.3.1 सुघट्य लंबाई 2077
62.3.1.1 सुघट्य कब्जों के संभावित स्थान 2078
62.3.1.2 वक्रता से विरूपण ($\Delta(\phi)$) 2078
62.3.1.3 प्रबलित कंक्रीट का प्रभावी जडत्व आघूर्ण और वक्रता 2080
62.3.1.4 सुघट्य कब्जा लंबाइयों के रूप में विरूपण 2081
62.3.1.4.1 प्रबलित कंक्रीट 2081
62.3.1.4.2 इस्पात 2085
62.3.1.5 उदाहरण 62.1: इस्पात स्तंभ में सुघट्य कब्जा 2086
62.3.2 अपरूपण विफलता मॉडल (सीमा-अवस्था सामग्री) 2087
62.3.2.1 परिचय 2087
62.3.2.2 अपरूपण सीमा-अवस्था मॉडल 2088
62.3.3 ऊर्जा अपव्यय को सम्मिलित करने वाले Ibarra शैथिल्य मॉडल 2091
62.3.3.1 शैथिल्य मॉडल 2095
62.3.3.1.1 शिखर-उन्मुख मॉडल 2097
62.3.3.1.2 संकुचन मॉडल 2099
62.3.3.2 सामर्थ्य-ह्रास विधाएँ 2103
62.3.3.2.1 मूल सामर्थ्य-ह्रास विधा 2106
62.3.3.2.2 कैप-पश्चात सामर्थ्य-ह्रास विधा 2108
62.3.3.2.3 भारमोचन दृढता-ह्रास विधा 2109
62.3.3.2.4 त्वरित पुनर्भारण दृढता-ह्रास विधा 2110
62.3.3.3 सारांश 2112
62.3.4 Ghannoum का मॉडल 2112
62.3.4.1 आधार-वक्र 2112
62.3.4.2 चक्रीय व्यवहार 2114

63 परिमित अवयव प्रतिरूपण का विज्ञान और कला 2116
63.1 परिचय 2116
63.1.1 परिमित अवयव जाल/विश्लेषण का सत्यापन 2120
63.1.2 प्रतिरूप सत्यापन और मान्यकरण की अवधारणाएँ 2120
63.2 जाल निर्माण 2121
63.2.1 स्थूल अवयव 2122
63.2.1.1 उदाहरण 63.1: स्तंभ प्रतिरूपण 2125
63.2.1.2 उदाहरण 63.2: धरन प्रतिरूपण 2127
63.2.2 अनुप्रस्थ काट 2127
63.2.3 “चुनें और जोड़ें” 2128
63.2.4 समापन टिप्पणियाँ 2128
63.3 ह्रास प्राचलों का निर्धारण 2129
63.3.1 अंशांकन 2130
63.3.1.1 प्राचल पहचान 2130

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

63.3.2 प्रतिरूपण प्राचलों का आँकड़ा-संग्रह 2130
63.3.2.1 Peer/Berry 2130
63.3.2.1.1 स्तंभ गुण 2131
63.3.2.1.2 आनमनी क्षमताओं का सारांश 2131
63.3.2.1.3 उदाहरण 2132
63.3.2.2 Stanford/Lignos 2134
63.3.2.3 UTSA/Ghannoum 2137
63.3.2.4 संतति परिमित अवयव/Dolati 2137
63.3.2.5 ACI-437-A 2138

अंतराल: अग्र-विश्लेषण से प्राचल अभिनिर्धारण तक **2139**

64 आँकड़े और संदेह: अनिश्चितताएँ और संवेदनशीलता विश्लेषण **2142**
64.1 परिचय 2143
64.2 आँकड़ों की गुणवत्ता और संदेह के स्रोत 2143
64.3 अनिश्चितता परिमाणन और विश्लेषण 2144
64.3.1 निवेश अनिश्चितता का अभिलक्षणन 2144
64.3.1.1 अनिश्चितताओं के प्रकार 2144
64.3.1.2 गणितीय निरूपण 2145
64.3.2 निर्भरता और सहसंबद्ध प्रतिचयन 2145
64.3.2.1 सहप्रसरण और सहसंबंध 2145
64.3.2.1.0.1 उदाहरण 64.1: सहसंबंध आव्यूह 2146
64.3.2.2 स्थानिक सहप्रसरण 2147
64.3.2.3 कालिक सहप्रसरण 2147
64.3.2.4 सहसंबद्ध नमूने उत्पन्न करना 2148
64.3.3 अनिश्चितता प्रसारण 2148
64.3.3.1 Monte Carlo अनुकरण (MCS) 2148
64.3.3.2 Latin Hypercube प्रतिचयन (LHS) 2149
64.3.3.2.0.1 उदाहरण 64.2: Latin Hypercube: दो चरों वाला हल किया गया उदाहरण 2151
64.3.3.3 प्रत्यक्ष प्रतिचयन के सन्निकट और प्रतिपूरक विकल्प 2153
64.3.3.3.1 बिंदु आकलन विधि (PEM) 2153
64.3.3.3.1.1 उदाहरण 64.3: बिंदु आकलन विधि का उदाहरण . . 2153
64.3.3.3.2 एक समय में एक (Taylor श्रेणी–परिमित अंतर आकलन TSFD) 2154
64.3.3.3.2.1 उदाहरण 64.4: Taylor श्रेणी परिमित अंतर विधि का उदाहरण 2155
64.3.3.3.3 बहुपदीय अराजकता प्रसार (PCE) 2156
64.3.3.3.3.1 उदाहरण 64.5: बहुपदीय अराजकता प्रसार 2156
64.3.4 निरुगम अनिश्चितता की व्याख्या 2157
64.4 संवेदनशीलता विश्लेषण 2158
64.4.1 Morris विधि 2158
64.4.1.1 उदाहरण 64.6: Morris विधि 2163

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

64.4.2 Sobol प्रसरण-आधारित संवेदनशीलता सूचकांक 2163
64.4.2.1 प्रथम-कोटि सूचकांक 2164
64.4.2.2 अन्योन्यक्रिया और कुल-प्रभाव सूचकांक 2164
64.4.2.3 व्याख्या 2164
64.4.2.4 परिकलन और लागत 2165
64.4.2.5 Morris छँटाई से संबंध 2165
64.4.3 प्रसारण और संवेदनशीलता विधियों की तुलना 2165
64.4.4 महत्त्वपूर्ण यादृच्छिक चरों का निर्धारण 2165
64.4.4.1 उदाहरण 64.7: Morris विधि; महत्त्वपूर्ण चरों की पहचान 2166
64.4.5 Tornado आरेख 2170
64.5 संवेदनशीलता विश्लेषण से प्राचल अभिनिर्धारण तक 2171

65 निर्णय: प्राचल अभिनिर्धारण विधियाँ 2174
65.1 प्रतिलोम समस्या के रूप में प्राचल अभिनिर्धारण 2174
65.2 अनुप्रयोग और निर्णय संरचना 2175
65.2.1 संवेदनशीलता विश्लेषण से प्राचल अभिनिर्धारण तक 2176
65.2.2 निर्णय संरचना: कौन-सी विधि कब? 2176
65.3 आँकड़ा गुणवत्ता और सुदृढ़ता 2177
65.3.1 आँकड़ा संदूषण के स्रोत 2177
65.3.2 सुदृढ़ सहमति आकलन: RANSAC 2177
65.3.2.1 कलनविधि 2177
65.4 Levenberg–Marquardt कलनविधि 2181
65.4.1 प्रतिरूपण उपागम और प्रतिरूप चयन 2181
65.4.2 भारित अरैखिक न्यूनतम वर्ग 2182
65.4.3 Levenberg–Marquardt अद्यतन चरण और कलनविधीय अंतर्बोध 2182
65.4.4 उदाहरण 65.1: अरैखिक अतिपरवलयी प्रतिरूप का समंजन 2183
65.4.5 मापक्रमण, परिसीमाएँ और नियमितीकरण 2185
65.4.6 अभिनिर्धारणीयता 2186
65.4.6.1 स्थानीय अनिश्चितता सन्निकटन 2187
65.4.7 प्रतिरूप-विसंगति 2187
65.5 बायेसियन प्राचल अभिनिर्धारण 2187
65.5.1 बायेसियन प्राचल अभिनिर्धारण: निरूपण 2188
65.5.2 MAP आकलन और बिंदु आकलन 2189
65.5.3 प्राचलों के लिए पश्च-प्रतिचयन और MCMC 2189
65.5.4 उदाहरण 65.2: द्विघाती आधार और मेट्रोपोलिस–हेस्टिंग्स प्रतिचयन सहित बायेसियन समाश्रयण 2190
65.5.5 हल किया हुआ उदाहरण: ह्रास-प्राचलों के लिए बायेसियन अनुमान 2191
65.5.6 बायेसियन अभिनिर्धारण का प्रयोग कब करें 2191
65.6 व्यवहार में लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट कलनविधि 2192
65.6.1 न्यूनतम-वर्ग व्यवहार 2193
65.6.1.1 MATLAB प्राचल अभिनिर्धारण कार्यक्रम: विवरण 2194

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय-सूची (I–IV)

65.7 संकर कार्यप्रवाह और सर्वोत्तम व्यवहार . . . 2202
65.7.1 अंशांकन और वैधीकरण . . . 2202
65.7.2 संरचनात्मक अनुप्रयोग . . . 2202
65.7.3 कार्यप्रवाह निर्णय ढाँचा . . . 2202
65.8 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी की ओर सेतु . . . 2203

66 अंतराल **2207**
66.1 भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) की सीमाएँ . . . 2207
66.2 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) की ओर क्यों बढ़ें? . . . 2208
66.3 PBEE के चार घटक . . . 2209
66.4 पुस्तक की संरचना . . . 2209

67 संकट विश्लेषण **2211**
67.1 परिचय . . . 2212
67.2 पुनरावृत्ति संबंध . . . 2212
67.3 क्षीणन प्रतिरूप . . . 2215
67.3.1 मूल सिद्धांत . . . 2215
67.3.2 Boore, Joyner और Fumel (1997) . . . 2215
67.3.3 प्राचलीय मूल्यांकन . . . 2217
67.4 नियतात्मक भूकंपीय संकट विश्लेषण . . . 2218
67.5 प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण . . . 2219
67.6 घटना-समय . . . 2221
67.7 भूकंपीय संकट-वक्र . . . 2222
67.8 भूकंपीय संकट-मानचित्र . . . 2224
67.9 भूकंपीय संकट वियोजन . . . 2224
67.10 लक्ष्य प्रतिक्रिया-वर्णक्रम . . . 2225
67.11 यादृच्छिक भू-गति अनुकरण . . . 2229
67.11.1 Rezaeian और Der Kiureghian (r-d) प्रतिरूप . . . 2230
67.11.2 Yamamoto और Baker (y-b) प्रतिरूप . . . 2231
67.12 सहन-अवधि उत्तेजन फलन . . . 2233
67.12.1 ETEF की प्रथम पीढ़ी . . . 2234
67.12.2 ETEF की द्वितीय पीढ़ी . . . 2234
67.12.3 ETEF की तृतीय पीढ़ी . . . 2236
67.12.4 ETEF की चतुर्थ पीढ़ी . . . 2236
67.12.5 ETEF की पंचम पीढ़ी . . . 2237
67.13 उदाहरण 67.1: भूकंपीय संकट विश्लेषण . . . 2239

68 भूकंपीय संकट विश्लेषण II **2244**
68.1 परिचय . . . 2245
68.2 वार्षिक अतिक्रमण दर . . . 2245
68.3 संकट वक्र . . . 2246
68.4 अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण (ESRA) . . . 2247
68.4.1 उदाहरण 68.1: प्रत्यावर्तन अवधि की गणनाएँ . . . 2248

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय-सूची (I–IV)

68.5 SHA + ESRA के रूप में प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA) 2249

69 संरचनात्मक विश्लेषण **2252**
69.1 परिचय 2253
69.2 आधारभूत परिभाषाएँ 2254
69.3 क्षमता और माँग 2255
69.3.1 माँग-क्षमता संबंध 2255
69.3.2 माँग आकलन की विधियाँ 2255
69.3.3 क्षमता अभिकल्प सिद्धांत 2257
69.4 भूकंपीय विश्लेषण विधियाँ 2258
69.4.1 पुशओवर विश्लेषण (POA) 2258
69.4.1.1 उदाहरण 69.1: माँग वक्र का उदाहरण 2263
69.4.1.2 उदाहरण 69.2: पुशओवर विश्लेषण; व्यावहारिक उदाहरण 2264
69.4.2 वृद्धिशील गतिक विश्लेषण (IDA) 2296
69.4.3 बहु-पट्टी विश्लेषण (MSA) 2298
69.4.4 मेघ विश्लेषण (CLA) 2300
69.4.5 सहन-अवधि विश्लेषण (ETA) 2301
69.4.6 सारांश 2303
69.5 आगे क्या है 2305

70 क्षति विश्लेषण **2308**
70.1 परिचय 2309
70.2 सीमा अवस्थाएँ 2310
70.2.1 सीमा अवस्थाओं का पदानुक्रम 2311
70.2.2 प्रायिकतामूलक रूपरेखा 2311
70.2.3 PBEE रूपरेखा में कार्यान्वयन 2312
70.2.4 अंशांकन और सत्यापन 2312
70.2.5 बहु-उद्देश्यीय विचार 2312
70.2.6 क्षति सूचकांकों से संबंध 2313
70.3 क्षति सूचकांक 2313
70.3.1 क्षति सूचकांक और निष्पादन मानदंड 2313
70.3.2 प्रायिकतामूलक क्षति आकलन की ओर संक्रमण 2315
70.3.3 क्षति का प्रायिकतामूलक निरूपण 2315
70.3.4 क्षति मापक और अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP) 2316
70.3.5 क्षति आकलन में chap:trustregion 2316
70.3.6 परिमाणात्मक क्षति मापक 2317
70.4 निष्पादन 2318
70.4.1 निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी रूपरेखा 2319
70.4.2 निष्पादन स्तर और स्वीकार्यता मानदंड 2320
70.4.3 सीमा अवस्थाओं, क्षति सूचकांकों और निष्पादन स्तरों का समेकन 2322
70.5 भंगुरता वक्रों और जोखिम आकलन की ओर संक्रमण 2323

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

71 हानि विश्लेषण 2325

72 प्रायिकता जोखिम आकलन (⊇ PBEE)[8] 2328
72.1 नए प्रतिमान: निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) . . . 2329
72.1.1 भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) की सीमाएँ . . . 2329
72.1.2 भाग I: स्पष्ट निष्पादन उद्देश्य . . . 2330
72.1.2.1 विधि . . . 2330
72.1.2.2 PBEE-1 की सीमाएँ . . . 2331
72.1.2.3 अभिकल्प बनाम विश्लेषण . . . 2332
72.1.3 भाग II: कार्यात्मक और आर्थिक परिणामों का प्रत्यक्ष परिमाण-निर्धारण: . 2332
72.1.3.1 परिचय . . . 2332
72.1.3.2 सामान्य ढाँचा . . . 2333
72.1.3.3 PBEE 1 और PBEE 2 के बीच अन्तर . . . 2335
72.1.4 PBEE कार्यान्वयन की प्रक्रिया . . . 2337
72.2 अनुक्रिया से क्षति तक: भंगुरता वक्र . . . 2338
72.2.1 मूल सिद्धान्त और परिभाषाएँ . . . 2339
72.2.2 भंगुरता वक्रों का विकास . . . 2339
72.2.3 गणितीय निरूपण . . . 2340
72.2.4 सतत फलन *बनाम* विविक्त आव्यूह . . . 2341
72.3 PBEE ढाँचे में भूमिका . . . 2343
72.4 उदाहरण 72.1: सम्पूर्ण PBEE उदाहरण . . . 2344
72.5 ऐतिहासिक मील-पत्थर और आधारभूत प्रलेख . . . 2348

परिशिष्ट

भाग 1: आधारभूत संदर्भ सामग्री

A इकाइयाँ 2352
A.1 SI इकाइयाँ . . . 2352
A.2 मेट्रिक उपसर्ग और गुणक . . . 2353
A.3 इकाइयाँ और रूपांतरण गुणक . . . 2353
A.4 विभिन्न मेट्रिक इकाइयों में बल, लंबाई, कार्य और प्रतिबल का सारांश . . . 2354
A.5 भौतिक राशियों का मेट्रिक से इम्पीरियल इकाइयों में रूपांतरण . . . 2354

B भार: अनुभवजन्य-आधारित अभिकल्प 2355
B.1 स्थायी भार . . . 2355
B.2 पवन भार . . . 2355
B.2.1 उदाहरण B.1: पवन भार . . . 2357
B.3 भूकंप . . . 2359
B.3.1 उदाहरण B.2: फ्रेम पर भूकंप भार . . . 2367
B.3.2 उदाहरण B.3: ऊँचे भवन पर भूकंप भार . . . 2368
B.4 सेतु भार . . . 2369

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

B.5 भार संयोजन . . . 2369
B.6 चल भार न्यूनीकरण . . . 2371
B.6.1 उदाहरण B.4: चल भार न्यूनीकरण I . . . 2372
B.6.2 उदाहरण B.5: चल भार न्यूनीकरण II . . . 2373
B.7 भार स्थान-निर्धारण . . . 2373

C रैखिक समघात अवकल समीकरण 2375
C.1 नियामक अवकल समीकरणों का सारांश . . . 2375
C.2 समाधान . . . 2376
C.3 स्थिरता i: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ . . . 2376
C.4 स्थिरता ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ . . . 2378
C.5 प्रत्यास्थ नींव पर धरन; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ . . . 2378

D प्रत्यास्थ मेहराब; उन्नत विश्लेषण 2380
D.1 परिचय . . . 2380
D.2 तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब . . . 2382
D.2.1 विश्लेषण प्रक्रिया . . . 2382
D.2.2 बिंदु भार . . . 2382
D.2.3 स्वभार . . . 2389
D.2.4 समान रूप से वितरित भार . . . 2393
D.2.4.1 विक्षेप . . . 2395
D.2.5 तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन . . . 2395
D.2.6 निष्कर्ष . . . 2397
D.3 दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब . . . 2398
D.3.1 विश्लेषण प्रक्रिया . . . 2398
D.3.2 बिंदु भार . . . 2398
D.3.3 स्व-भार . . . 2410
D.3.4 समान रूप से वितरित भार . . . 2417
D.3.5 दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन . . . 2421
D.3.6 निष्कर्ष . . . 2423
D.4 कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब . . . 2424
D.4.1 विश्लेषण प्रक्रिया . . . 2424
D.4.2 बिंदु भार . . . 2424
D.4.3 स्व-भार . . . 2438
D.4.4 समान रूप से वितरित भार . . . 2446
D.4.5 कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन . . . 2451
D.4.6 निष्कर्ष . . . 2453
D.5 निष्कर्ष . . . 2453

भाग 2: संरचनात्मक विश्लेषण एवं अभिकल्प सारणियाँ

E बेलनाकार शेलों की विश्लेषण सारणियाँ 2455

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय-सूची (I–IV)

F बैरल शेल छतों का अभिकल्प **2468**

G अलामिलो सेतु का आँकड़ा-समुच्चय **2497**

H आइडेंटिकॉन: दृश्य हैशिंग **2502**
H.1 आइडेंटिकॉन का परिचय . . . 2502
H.2 आइडेंटिकॉन-निर्माण कलनविधियाँ . . . 2503
H.3 GitHub और Stack Exchange के आइडेंटिकॉन कार्यान्वयनों की तुलना . . . 2505
H.4 हमारा MATLAB कार्यान्वयन . . . 2505
H.5 मूल कोड खंड . . . 2508
H.6 प्रोग्राम का उपयोग . . . 2509
H.7 लाभ और अनुप्रयोग . . . 2509
H.8 निष्कर्ष . . . 2510

भाग 3: कोड कार्यान्वयन

I MATLAB®, Mathematica Codes **2511**
I.1 Part I: Fundamental and Computational Analysis Methods . . . 2512
I.1.1 Statics matrix of a truss B . . . 2513
I.1.2 St louis arch shape . . . 2515
I.1.3 Arbitrary three hinged circular arch; mathematica . . . 2516
I.1.4 Collapse of masonry arches . . . 2527
I.1.5 Main . . . 2527
I.1.6 Large deflection of a beam . . . 2538
I.2 Part II: Structural Design and Analysis . . . 2542
I.2.1 Design of cylindrical shells . . . 2542
I.2.2 Approximate frame analysis; cantilever method . . . 2555
I.2.3 Non uniform torsion . . . 2566
I.2.4 Orthogonal frame . . . 2569
I.2.5 Hybrid orthogonal frame . . . 2572
I.2.6 Frame; hard-wired . . . 2576
I.2.7 Direct stiffness method; frame . . . 2580
I.2.8 Main code . . . 2580
I.2.9 Stiffness matrix of non-prismatic members . . . 2592
I.2.10 Isostatic lines . . . 2598
I.2.11 Evolutionary design . . . 2604
I.2.12 Main . . . 2604
I.2.13 Column interaction diagram . . . 2609
I.2.14 Variational methods; mathematica . . . 2612
I.2.15 Monte Carlo simulation of a building's linear elastic response to lateral load . . . 2623
I.2.16 Isoparametric elements . . . 2625
I.3 Part III: Material Modeling and Constitutive Behavior . . . 2637

पुस्तक पेज

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.3.1 Incremental plasticity . . . 2637
I.3.2 Constitutive models . . . 2641
I.3.3 Bilinear model . . . 2642
I.3.4 Hardening . . . 2645
I.3.5 Hysteresis . . . 2649
I.3.6 Modified giuffre monegotto pinto . . . 2668
I.3.7 Modified kent park . . . 2673
I.3.8 Ibarra . . . 2677
I.3.8.1 Hysteresis . . . 2677
I.3.8.2 Hysteresis pinch . . . 2696
I.3.9 Limit state shear . . . 2717
I.4 Part IV: Data-Driven Methods and Parameter Identification . . . 2739
I.4.1 Parameter Identification Program . . . 2739
I.4.2 Main Program and Core Orchestration . . . 2739
I.4.3 Data I/O and Spreadsheet Integration . . . 2749
I.4.4 Optimization Workflow and Auxiliary Functions . . . 2759
I.5 Part V: Numerical and Statistical Foundations . . . 2772
I.5.1 Levenberg-Marquardt . . . 2772
I.5.2 Numerical techniques . . . 2773
I.5.3 FFT and butterworth filters . . . 2773
I.5.4 Singular value decomposition . . . 2776
I.5.5 Preconditioning . . . 2778
I.5.6 Random Sampling Consensus (RANSAC) . . . 2779
I.5.7 Latin Hypercube . . . 2784
I.5.8 Bayesian regression with a quadratic basis . . . 2789
I.5.9 Markov chain Monte Carlo Simulation . . . 2796
I.6 Part VI: Optimization and Parameter Fitting . . . 2798
I.6.1 Levenberg-Marquardt . . . 2798
I.6.2 Custom Implementation . . . 2798
I.6.3 Using Built-in Function . . . 2801
I.7 Part VII: Seismic Reliability and Uncertainty . . . 2803
I.7.1 Seismic hazard analysis . . . 2803
I.7.2 Performance Based Earthquake Engineering . . . 2805
I.8 Part VIII: Utility . . . 2810
I.8.1 Identicon . . . 2810

J Mathcad के उदाहरण **2816**

भाग 4: संख्यात्मक एवं सांख्यिकीय विधियाँ

K भूकंपीय अभिलेख निस्यंदन (तीव्र फूरियर रूपांतरण) **2982**
K.1 फूरियर रूपांतरण की गणना . . . 2983

L रैखिक बीजगणित की समीक्षा **2988**

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

L.1 आवृयूहों के विषय में . . . 2988
L.1.1 परिभाषाएँ . . . 2988
L.1.2 प्राथमिक आवृयूह संक्रियाएँ . . . 2990
L.1.3 सारणिक . . . 2991
L.1.4 प्रतिलोमन . . . 2992
L.2 रैखिक समीकरणों के समाधान . . . 2992
L.2.1 कार्यनीतियाँ . . . 2992
L.2.2 अपघटन . . . 2993
L.2.2.1 गाउस विलोपन . . . 2994
L.2.2.2 गाउस-जॉर्डन विलोपन . . . 2994
L.2.2.3 **LU** अपघटन . . . 2995
L.2.2.4 चोलेस्की अपघटन . . . 2997
L.2.2.5 विचित्र मान अपघटन . . . 2998
L.2.2.6 QR अपघटन . . . 3000
L.2.3 अप्रत्यक्ष विधियाँ . . . 3000
L.2.3.1 गाउस-सीडेल . . . 3000
L.3 आवृयूह-अभिलक्षण और संगणकीय संवर्द्धन . . . 3001
L.3.1 विचित्रता और कोटि . . . 3001
L.3.2 अभिलक्षणिक मान और अभिलक्षणिक सदिश . . . 3002
L.3.3 अनुबंधन संख्या . . . 3003
L.3.4 पूर्वानुबंधन . . . 3003
L.3.4.1 वाम पूर्वानुबंधन . . . 3004
L.3.4.2 दक्षिण पूर्वानुबंधन . . . 3005
L.4 उदाहरण . . . 3006
L.4.1 उदाहरण L.1: गाउस विलोपन . . . 3006
L.4.2 उदाहरण L.2: गाउस-जॉर्डन विलोपन . . . 3007
L.4.3 उदाहरण L.3: **lu** अपघटन . . . 3008
L.4.4 उदाहरण L.4: चोलेस्की अपघटन . . . 3009
L.4.5 उदाहरण L.5: गाउस-सीडेल . . . 3010
L.4.6 उदाहरण L.6: गाउस-सीडेल . . . 3011
L.4.7 उदाहरण L.7: एकल मान अपघटन . . . 3011
L.4.8 उदाहरण L.8: पूर्वानुकूलन . . . 3012

M प्रायिकता और सांख्यिकी **3016**
M.1 प्रायिकता और सांख्यिकी का परिचय . . . 3016
M.2 प्रायिकता की मूलभूत संकल्पनाएँ . . . 3016
M.2.1 नियतात्मक बनाम प्रायिकतामूलक . . . 3016
M.2.2 परिभाषा . . . 3017
M.2.3 सशर्त प्रायिकता . . . 3018
M.2.4 यादृच्छिक चरों के प्रकार . . . 3019
M.3 प्रायिकता-विश्लेषण के सांख्यिकीय उपकरण . . . 3019
M.3.1 संचयी वितरण फलन . . . 3020

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय-सूची (I–IV)

M.3.2 विश्वास अंतराल . . . 3021
M.4 सांख्यिकीय माप . . . 3022
M.4.1 आघूर्ण और केंद्रीय प्रवृत्ति के माप . . . 3022
M.4.2 चरों के बीच संबंध . . . 3025
M.5 वितरण . . . 3025
M.5.1 एकचर वितरण . . . 3025
M.5.1.1 तुलना . . . 3028
M.5.2 द्विचर वितरण . . . 3030

N विश्वसनीयता सूचकांक **3033**

भाग 5: उन्नत सिद्धांत एवं इष्टतमीकरण

O विकृत्य पिंडों की यांत्रिकी: एक परिचय **3039**
O.1 परिचय . . . 3039
O.1.1 संकेतन . . . 3040
O.1.2 प्रदिश . . . 3042
O.1.2.1 संक्रियाएँ . . . 3042
O.1.2.2 अक्षों का घूर्णन . . . 3044
O.1.2.3 प्रदिश रूपांतरण . . . 3045
O.1.2.4 सममित द्वितीय-कोटि प्रदिशों के प्रमुख मान . . . 3046
O.1.3 प्रतिबल अपरिवर्तों की भौतिक व्याख्या . . . 3047
O.2 सदिश क्षेत्र; विकृत्य पिंडों की यांत्रिकी . . . 3049
O.2.1 बल . . . 3049
O.2.2 कॉशी का प्रतिबल प्रदिश . . . 3049
O.2.2.1 द्रवस्थैतिक और विचलित प्रतिबल प्रदिश . . . 3051
O.2.2.2 प्रतिबल अवस्थाओं का ज्यामितीय निरूपण . . . 3052
O.2.3 शुद्धगतिकी . . . 3052
O.2.3.1 स्थिति और विस्थापन . . . 3052
O.2.3.2 विकृतियाँ . . . 3053
O.3 सातत्य यांत्रिकी के मूलभूत नियम . . . 3055
O.3.1 संरक्षण नियम . . . 3056
O.3.2 अभिवाह . . . 3056
O.3.3 द्रव्यमान संरक्षण; सातत्य समीकरण . . . 3057
O.3.4 संवेग संरक्षण; गति समीकरण . . . 3058
O.3.5 ऊर्जा संरक्षण; ऊष्मागतिकी का प्रथम सिद्धांत . . . 3060
O.4 संघटक समीकरण . . . 3062
O.4.1 सामान्य त्रिविम (3D) अवस्था . . . 3063
O.4.2 अनुप्रस्थ समदैशिक अवस्था . . . 3064
O.4.3 विशेष द्विविम (2D) अवस्थाएँ . . . 3064
O.5 परिघटनात्मक प्रेक्षण . . . 3065
O.5.1 भार, विस्थापन और विकृति-नियंत्रित परीक्षण . . . 3066

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय-सूची (I–IV)

O.5.2 इस्पात और कंक्रीट की चरम-पूर्व/चरमोत्तर द्रव्य अनुक्रिया 3067
O.6 विरूपण का स्थानीयकरण 3068
O.6.1 प्रायोगिक साक्ष्य 3068
O.6.1.1 σ-cod आरेख, हिलरबोर्ग प्रतिरूप 3068
O.7 सीमा प्रतिबंध 3071
O.8 टोंटी आरेख 3072
O.9 आंतरिक बल की संकल्पना 3072

P वेस्टरगार्ड को श्रद्धांजलि 3074
P.1 दरार-अग्र प्रतिबल क्षेत्र 3074
P.1.1 एरी प्रतिबल फलन 3074
P.1.2 समाधान 3077
P.2 तरल-संरचना अंतःक्रिया 3082

Q विश्वास-क्षेत्र तथा लेवेनबर्ग-मार्क्वार्ट विधियाँ 3096
Q.1 विश्वास-क्षेत्र 3097
Q.2 कलनविधि 3100
Q.3 MATLAB®सूत्रीकरण 3101
Q.4 वास्तविक-समय दृश्यांकन 3104

R सदिश कलन: एक परिचय 3105
R.1 मूल परिभाषाएँ 3105
R.1.1 अदिश के सापेक्ष अवकलज 3105
R.1.1.1 उदाहरण R.1: वक्र की स्पर्शरेखा 3107
R.1.2 अपसरण 3107
R.1.2.1 सदिश 3107
R.1.2.1.1 उदाहरण R.2: सदिश का अपसरण 3109
R.1.2.2 द्वितीय-कोटि प्रदिश 3109
R.1.3 प्रवणता 3110
R.1.3.1 अदिश क्षेत्र 3110
R.1.3.1.1 उदाहरण R.3: अदिश क्षेत्र की प्रवणता I 3110
R.1.3.1.2 उदाहरण R.4: अदिश क्षेत्र की प्रवणता ii 3111
R.1.3.2 सदिश क्षेत्र 3112
R.1.3.2.1 उदाहरण R.5: सदिश क्षेत्र की प्रवणता 3113
R.2 समाकल प्रमेय 3113
R.2.1 सदिश का समाकल 3113
R.2.2 रेखा समाकल 3114
R.2.3 खंडशः समाकलन 3114
R.2.4 गाउस: अपसरण प्रमेय 3114
R.2.4.1 उदाहरण R.6: अपसरण प्रमेय की भौतिक व्याख्या 3115
R.2.5 स्टोक्स प्रमेय 3116
R.2.6 ग्रीन: प्रवणता प्रमेय 3116

भाग II–IV एवं परिशिष्टों के संदर्भ 3117

पुस्तक प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चित्र-सूची (I–IV)

1.1 संरचनात्मक अभियांत्रिकी का मार्ग-मानचित्र 9

2.1 बेबीलोनी गणित 14
2.2 Google का Doodle, π दिवस (3/14/26) पर; आर्किमिडीज़ को श्रद्धांजलि 17
2.3 यूक्लिड की *चरम और मध्यम अनुपात* की परिभाषा 18
2.4 मेसोपोटामियाई मिट्टी के गणना-चिह्न: लेखन के पूर्वगामी (c. 3500 BCE) 19
2.5 चित्रात्मक चिह्नों (c. 3200 BCE) से अमूर्त अक्षरांशीय चिह्नों (c. 2000 BCE) तक कीलाक्षर का विकास 20
2.6 मिस्री चित्रलिपि 20
2.7 रोसेटा शिला (196 BCE), जिस पर वही राजाज्ञा ऊपर से नीचे क्रमशः चित्रलिपिक, डेमोटिक और यूनानी में अंकित है, प्राचीन मिस्री लिपि के पाठोद्धार की कुंजी बनी . . . 21
2.8 फोनीशियन वर्णमाला (c. 1050 BCE): 22 व्यंजन चिह्न, उनके नाम और उनसे विकसित यूनानी तथा लैटिन अक्षर 22
2.9 वर्णमालाओं की वंशावली: फोनीशियन (c. 1050 BCE) से यूनानी, लैटिन, अरबी, हिब्रू और ब्राह्मी लिपि-परिवारों तक 23

3.1 मेसोपोटामिया में मृत्तिका 26
3.2 माया और ऐज़्टेक पिरामिड 27
3.3 मिस्री मंदिर और पिरामिड 28
3.4 मिस्री ज्यामिति और पिरामिडों के अनुपात 30
3.5 फ़ारसियों द्वारा बॉस्फोरस पार करने पर हेरोडोटस, (Herodotus, 1921) 35
3.6 फ़ारस 36
3.7 अरब-इस्लामी संसार 38
3.8 यूनान 38
3.9 प्रतीकात्मक रोमन निर्माण 43
3.10 वित्रुवियसी आनुपातिकता के नियम 44
3.11 भारत, चीन, जापान 47

4.1 प्रतीकात्मक गिरजाघर 51
4.2 गिरजाघर के संरचनात्मक तत्त्व 53
4.3 रोमन और गोथिक मेहराब-रूपरेखाओं की तुलना (Ching, 2011) 54
4.4 गोथिक गिरजाघरों में उडते प्रत्यालंबों के उदाहरण (Kim, 2016) 54
4.5 गोथिक गिरजाघर का अनुप्रस्थ-काट (Ching, 2011) 55
4.6 सामान्य मेहराब (Ochsendorf, 2002) 56
4.7 उडते प्रत्यालंबों के माध्यम से बल-अंतरण 56
4.8 कोष्ठक का व्यवहार (Hassan Fangary, 2010) 57
4.9 उडते प्रत्यालंब की ज्यामिति (Nikolinakou, Tallon, and Ochsendorf, 2005) . . 57
4.10 प्रणोद की न्यूनतम और अधिकतम रेखाएँ (Kim, 2016) 57

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4.11 प्रणोद की सक्रिय और निष्क्रिय रेखाएँ ((Heyman, 1966) पर आधारित) 58
4.12 मेहराब संरचना और विफलता-यंत्रावली का शुद्धगतिक निर्धारण (Hassan Fangary, 2010) 59
4.13 गोथिक कोष्ठकों का प्रकाश-प्रत्यास्थ विश्लेषण 60
4.14 बोवे की खगोलीय घड़ी 62
4.15 निम्न के अनुप्रस्थ-काट (मुख्य कक्ष की ऊँचाई और प्रत्यालंबन-तंत्र) का तुलनात्मक विश्लेषण: (a) नोत्र-दाम गिरजाघर, पारी; (b) एमिआँ गिरजाघर; और (c) बोवे गिरजाघर (Viollet-le-Duc, 1854 के अनुप्रस्थ अध्ययनों पर आधारित लेखक का चित्र। . . 63
4.16 1284 की विफलता का ध्वंसोत्तर विश्लेषण 65
4.17 1284 के ध्वंस के बाद बोवे का पुनर्निर्माण 66
4.18 विलार दे ऑनकूर के *carnet* से ज्यामितीय रेखाचित्र, जो नियम और अनुपातन-प्रणालियाँ दर्शाते हैं (De Honnecourt, 2006) 70
4.19 मिलान का दुओमो 71
4.20 क्रमिक अभिकल्पों की अनुपातन-योजनाएँ 72
4.21 सेंट पीटर के गुंबद में दरारों का पोलेनी द्वारा किया गया प्रेक्षण (Poleni, 1748) . . 75
4.22 पोलेनी की लटकती शृंखला की उपमा (Poleni, 1748) 76
4.23 गुंबद का प्रबलन (Poleni, 1748) 77
4.24 गाउदी का सग्रादा फामिलिया 77
4.25 *Spina pesce* और लॉक्सोड्रोम ईंट-विन्यास 79
4.26 सांता मारिया देल फियोरे के गुंबद का निर्माण 81
4.27 ब्रुनेलेस्की का बैल-चालित उत्तोलक (King, 2010) 82

5.1 बैत अल-हिक्मा 87
5.2 तीन सतत बाँसुरियाँ: बाईं ओर झुकती बालिटयाँ, मध्य में तुला और दाईं ओर उत्प्लवक। तोपकापी पांडुलिपि, 1206 88
5.3 वैज्ञानिक क्रांति की आधारभूत कृतियाँ: गैलीलियो, न्यूटन, बेकन और हुक 96
5.4 विज्ञान का संस्थानीकरण 96
5.5 वैज्ञानिक तर्क के उदय की समयरेखा 100

6.1 लियोनार्दो दा विंची 115
6.2 लियोनार्दो के दर्पण-लेखन की व्याख्या 116
6.3 पल्लादियो (Palladio, 1570) 126
6.4 *Traité des ponts* (Gautier, 1765) 128
6.5 पों द्यू गार 129
6.6 पेरोने के सेतु 132
6.7 शीर्ष-पाषाणों की विमाओं का Rankine, 1862 द्वारा आकलन 133
6.8 गैलीलियो गैलिली के संवाद (Galilei, 1632) 140
6.9 गैलीलियो गैलिली 141
6.10 गैलीलियो द्वारा अस्थियों का मापानुपात (Galilei, 1638) 142
6.11 हुक और घड़ी 148

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.12 हुक के 1675 के विपर्यस्ताक्षर, *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* में (Hooke, 1676) . . . 149
6.13 *De Potentia Restitutiva* से प्रत्यास्थ आनमन का हुक का चित्रण (Hooke, 1678) 151
6.14 निलंबित भारों वाली कुंडलित हेलिकल कमानी। यह प्रतिष्ठित चित्रण सामान्यतः हुक को आरोपित किया जाता है, यद्यपि इसका उद्गम अस्पष्ट है; यहाँ पुनरुत्पादित चित्र Andrade, 1950 से लिया गया है। . . . 152
6.15 आइज़क न्यूटन . . . 155
6.16 बर्नूली वंश-वृक्ष (उजागर सदस्यों की इस पुस्तक में चर्चा की गई है) और उनका बौद्धिक मंडल . . . 161
6.17 नाविए द्वारा निलंबन-सेतुओं का निरूपण . . . 178
6.18 नाविए और टेलफर्ड (सेतु) . . . 179
6.19 अनुप्रयुक्त यांत्रिकी और सिविल अभियांत्रिकी के बीच सेतु बनाती रैंकिन की नियम-पुस्तकें 186
6.20 जेम्स क्लर्क मैक्सवेल . . . 189
6.21 ऐतिहासिक समयरेखा: वैज्ञानिक, कलाकार, संगीतकार, लेखक और राजनेता (1000–2020) 213

7.1 लियोनार्दो और गैलीलियो द्वारा अक्षीय सामर्थ्य के अध्ययन . . . 221
7.2 निर्णायक कैंटिलीवर धरन तक गैलीलियो के मार्ग . . . 222
7.3 मुशेनब्रुक के प्रयोग (Musschenbroek, 1739) . . . 223
7.4 आनमनी प्रतिबलों तक पहुँचने वाली दो समानांतर परंपराएँ . . . 224
7.5 लियोनार्दो के रेखाचित्र, फोलियो 9v . . . 226
7.6 लियोनार्दो के रेखाचित्र, फोलियो 20v, (Zammattio, 1980) . . . 226
7.7 गैलीलियो का निर्णायक कैंटिलीवर धरन . . . 227
7.8 धरन-सामर्थ्य की गैलीलियो की व्याख्या . . . 228
7.9 एक दृढ “चिनाई धरन” का विक्षेप . . . 229
7.10 लाइबनित्स की ज्यामितीय यांत्रिकी से प्रेरित वैचारिक धरन-प्रतिरूप (Leibniz, 1684) 231
7.11 मारियोत के प्रतिरूप (Heyman, 1998b) . . . 233
7.12 गैलीलियो और मारियोत के प्रतिरूपों का गिरार्ड द्वारा चित्रण . . . 233
7.13 पारों का प्रतिरूप . . . 234
7.14 कूलॉम के प्रयोग (Coulomb, 1773c) . . . 235
7.15 यंग का मध्य तृतीयांश नियम . . . 238
7.16 (Clebsch, 1862b) में सेंट-वेनाँ की टिप्पणियों से उद्धरण . . . 240
7.17 ऑयलर, बर्नूली और हुक का समागम (Euler, 1862) . . . 243

8.1 परवलय के स्पर्शी वृत्त . . . 249
8.2 ओरेस्मे की वक्रता . . . 250
8.3 न्यूटन द्वारा वक्रता की व्युत्पत्ति . . . 252
8.4 लाइबनित्स की *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Leibniz, 1686b) . . . 253
8.5 योहान बर्नूली द्वारा वक्रता की व्युत्पत्ति . . . 254
8.6 याकोब बर्नूली द्वारा वक्रता की व्युत्पत्ति . . . 257

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

8.7 हाइगेन्स का समकालिक लोलक (Huygens, 1673) . . . 262

9.1 इलास्टिका के प्रमुख व्यक्तित्व . . . 268
9.2 कलन के विस्तार पर लाइबनित्स (Leibniz, 1858, p. 2–3)। . . . 270
9.3 (Truesdell, 1960) से कैटेनरी के लिए लियोनार्दो के रेखाचित्र . . . 272
9.4 कैटेनरी; क्रिस्टियान हाइगेन्स (Huygens, 1888b) . . . 275
9.5 याकूब बर्नूली की *funicularia* चुनौती (Bernoulli, Jakob, 1690b, p. 219) . . . 278
9.6 हाइगेन्स को लाइबनिट्स का उत्तर, अक्तूबर, 1690 (Leibniz, 1923) . . . 281
9.7 याकूब बर्नूली की कैटेनरी चुनौती के जून 1691 के *acta eruditis* समाधान . . . 283
9.8 बर्नूली की चुनौती, (Bernoulli, Jakob, 1690a) . . . 289
9.9 याकूब बर्नूली की इलास्टिका . . . 290
9.10 इलास्टिका सिद्धांत के शिल्पी: बासेल के गणितीय मनीषी (विकिपीडिया) . . . 291
9.11 याकूब बर्नूली का Curvatura Laminae Elasticae... (Bernoulli, Jakob, 1694) 291
9.12 बर्नूली के समाधान पर हाइगेन्स की 1694 की आपत्ति। . . . 297
9.13 योहान बर्नूली की ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती (Bernoulli, Johann, 1696) . . . 302
9.14 ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती का योहान बर्नूली का 1697 का समाधान (Bernoulli, Johann, 1697a) . . . 303
9.15 ऑयलर को डेनियल बर्नूली का पत्र, (Bernoulli, Daniel, 1845) . . . 306
9.16 विचरण-कलन पर ऑयलर का 1744 का ग्रंथ (Euler, 1744b) . . . 310
9.17 ऑयलर की प्रत्यक्ष विधि का “मुक्त पिंड आरेख” . . . 313
9.18 भार प्राचल c^2/a^2 के पदों में ऑयलर की इलास्टिका “प्रजातियाँ” . . . 320
9.19 विचरणात्मक और अवकल संकारक . . . 326
9.20 *Acta Eruditorum* में 1724 की अज्ञात चुनौती (Anonymous, 1724), जिस पर रहस्यमय रूप से “LBC” हस्ताक्षर थे . . . 329
9.21 डेनियल बर्नूली और लियोनार्ड ऑयलर के अभूतपूर्व 1728 के प्रकाशन (Euler, 1728)। . . . 330
9.22 स्व-भार और लगाए गए भार के प्रभाव दर्शाता बर्नूली का धरन-विश्लेषण . . . 331
9.23 Euler, 1732 *Solutio problematis de invenienda curva* . . . 332
9.24 अक्षीय-अस्थायित्व परिघटनाओं पर केंद्रित आरंभिक संपीडन अध्ययन। . . . 340
9.25 व्याकुंचन पर ऑयलर का मूलभूत शोध-पत्र (Euler, 1759) . . . 341
9.26 निर्णायक व्याकुंचन भार का Euler, 1759 का कथन . . . 342
9.27 ऑयलर का “महान-एकीकरण” शोध-पत्र, (Euler, 1771) . . . 344
9.28 किसी रेखा की सामान्य साम्यावस्था के लिए ऑयलर का आरेख (Euler, 1771)। . . . 345

10.1 कॉशी का चतुष्फलक तर्क। पिंड से एक अत्यल्प चतुष्फलक काटा जाता है, जिसके तीन फलक निर्देशांक अक्षों के अभिलंब और एक आनत फलक का एकक अभिलंब $\mathbf{n}$ है। चतुष्फलक का आकार शून्य की ओर सिकुडते समय उसकी साम्यावस्था से संबंध $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ प्राप्त होता है। . . . 365
10.2 पृष्ठ बल . . . 366
10.3 कॉशी: चतुष्फलक से प्रतिबल तक . . . 366

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11.1 मैनी का 1915 का प्रवणता-विक्षेप विधि का सूत्रीकरण (Maney, 1915) 407
11.2 रैखिक निकायों के समाधान के लिए साइडेल की 1873 की क्रमिक सन्निकटन विधि (Seidel, 1873)। गणितीय रूप से ठोस होते हुए भी इसमें अभियंताओं द्वारा अपेक्षित भौतिक व्याख्या का अभाव था। 408
11.3 हार्डी क्रॉस के रूपांतरणकारी शोधपत्र 409
11.4 पवन भार विश्लेषण के लिए गोल्डबर्ग का 1934 का प्रवणता-विक्षेप अनुकूलन (Goldberg, 1934) 410
11.5 साउथवेल की शिथिलन विधि (Southwell, 1935) 411
11.6 न्यूटनीय भौतिकी (ऊपर) से क्षेत्र समीकरणों (मध्य) के माध्यम से लाग्रांजीय विचरणात्मक सिद्धांतों (नीचे) तक। 417

12.1 बाँधों पर Pearson का प्रायोगिक कार्य (Pearson et al., 1907) 425
12.2 बाँध-प्रतिबल समस्या के लिए Richardson का परिमित-अंतर विश्लेषण (Richardson, 1911) 426
12.3 1950s के वाणिज्यिक विमान 429
12.4 Delta wing समस्या और आरंभिक समाधान प्रयास 430
12.5 Levy, 1953 का विवरण 432
12.6 आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण (Turner et al., 1956) 433
12.7 बल और विस्थापन उपागमों की तुलना (Argyris and Kelsey, 1960; Przemieniecki, 1968) 435
12.8 Courant ने *trial funcrtions* प्रस्तुत किए (Courant, 1943) 437
12.9 परिमित तत्त्व विधि के गणितीय आधार 439
12.10 परिमित तत्त्व विधि का नामकरण करने वाला Clough का 1960 का शोधपत्र (Clough, 1960) 441
12.11 Norfork बाँध का परिमित तत्त्व विश्लेषण (Clough, 1962; Clough and Wilson, 1962) 442
12.12 प्रथम अरैखिक परिमित तत्त्व विश्लेषण (Wilson, 1960) 443
12.13 प्रथम गतिक परिमित तत्त्व विश्लेषण (Wilson and Clough, 1962) 444
12.14 परिमित तत्त्व विधि के आधुनिक संस्थापक 446
12.15 अनेक भौतिक अनुशासनों तक परिमित तत्त्व विधि का सामान्यीकरण: भिन्न नियंत्रक समीकरणों के बावजूद सभी समान बीजीय संरचना देते हैं 447

13.1 पारंपरिक चीनी अबेकस (suanpan) 454
13.2 लेखक के महाविद्यालयीन स्लाइड रूल 455
13.3 Leibniz का Stepped Reckoner 456
13.4 आरंभिक Casio इलेक्ट्रॉनिक गणक (लगभग 1970) 456
13.5 लेखक का प्रथम गणक 457
13.6 Babbage का Analytical Engine 458
13.7 Bush का Differential Analyzer 459
13.8 ENIAC कंप्यूटर 460
13.9 छिद्रित पत्र और बैच-प्रक्रमण कार्यप्रवाह 462
13.10 MathCad का उदाहरण 466

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

14.1 प्राचीनता में बल से संबद्ध देवता . . . 472
14.2 बल की अवधारणा के प्रमुख आरंभिक प्रभावक . . . 475
14.3 Empedocles (लगभग) . . . 475
14.4 उत्तोलक नियम का Archimedes प्रमाण . . . 480
14.5 Buridan, Oresme . . . 485
14.6 Leonardo, benedetti, galileo, kepler, descartes, leibniz, newton . . . 487
14.7 Pardies, 1710 द्वारा साम्य की अवधारणाएँ . . . 490
14.8 Simon Stevin (1548–1620) . . . 490
14.9 Stevin का प्रमुख प्रकाशन (Stevin, 1586) . . . 491
14.10 एक अथवा दो रज्जुओं द्वारा सँभाले गए पिंड का Stevin का निरूपण; (Stevin, 1586) और (Miller, 2017) . . . 491
14.11 Stevin का *clootcrans* प्रदर्शन। . . . 492
14.12 Galileo का आनत-तल अध्ययन (Galilei, 1594) . . . 496
14.13 Kepler की गणनाएँ (Kepler, 1855) . . . 499
14.14 René Descartes (1596–1650) . . . 500
14.15 Torricelli का अभिगृहीत . . . 507
14.16 बलों के समांतर चतुर्भुज पर Bernoulli (Bernoulli, Daniel, 1726) . . . 513
14.17 Johann Bernoulli के ज्यामितीय वेग, (Bernoulli, Johann, 1725) . . . 515
14.18 Varignon, 1725 द्वारा साम्य की अवधारणाएँ . . . 516
14.19 vis viva विवाद पर D'Alembert: ऐसा विवाद जिसे वे अनुपयोगी मानते हैं, किंतु संक्षेप में संबोधित करते हैं (d'Alembert, 1743) . . . 518
14.20 यांत्रिकी की एकमात्र नींव के रूप में गति पर D'Alembert (d'Alembert, 1743) . . . 518
14.21 बलों के समांतर चतुर्भुज पर D'Alembert (d'Alembert, 1743) . . . 519
14.22 बलों के समांतर चतुर्भुज पर D'Alembert की अंतिम टिप्पणियाँ (d'Alembert, 1773) 520
14.23 pulley blocks द्वारा आभासी वेगों के सिद्धांत का Lagrange का प्रमाण ((Salençon, 2018) के अनुसार) . . . 525
14.24 पिंडों के निकाय, geometric motions और संघट्ट-यांत्रिकी को स्पष्ट करते Carnot (Carnot, 1803) . . . 527

15.1 विट्रुवियस . . . 538
15.2 मेहराबी पुल के अभिकल्प के अनुभवजन्य नियमों का विकास ((Huerta, 2018) के आधार पर)। . . . 541
15.3 गैलीलियो ने विट्रुवियस को चुनौती दी (Galilei, 1632) . . . 542
15.4 पुनर्जागरणकालीन पुल-अभिकल्प: अल्बेर्ती के ज्यामितीय नियम और पल्लादियो के प्रलेखित उदाहरण (Huerta, 2018) . . . 550
15.5 पल्लादियो की *Four Books of Architecture* (Palladio, 1570) . . . 552
15.6 शार्ल-एदुआर जनेरे ले कोर्बुज़िए . . . 556
15.7 मानवमितीय समानुपात तंत्र: मध्ययुगीन ज्यामिति से पुनर्जागरणकालीन मानवतावाद होते हुए बीसवीं शताब्दी के आधुनिकतावाद तक . . . 559
15.8 *ad quadratum* अनुरेखण सहित पानागिया कूम्बेलिदिकी (कास्तोरिया, 10वीं शताब्दी) की योजना (Oikonomou, 2022) . . . 560

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15.9 *ad triangulum* अनुरेखण सहित नोत्र-दाम द पेरिस का अनुप्रस्थ काट (Oikonomou, 2022) . . . 561
15.10 पार्थेनन की योजना का विश्लेषण (Oikonomou, 2022) . . . 562
15.11 फ्लोरिना में ऑटोमन स्नानगृह (18वीं शताब्दी) Oikonomou, 2022 के आधार पर पुनःरेखित 565
15.12 ले कोर्बुज़िए का *ingénieur-architecte* चित्रचिह्न (Pierrefeu and Corbusier, 1942)। 567
15.13 द लोर्म के चित्रण (De l'Orme, 1561) . . . 570
15.14 Willis, 1910 के चित्रण . . . 571
15.15 मेहराबों में प्रणोद भार का अंतरण . . . 572
15.16 गुस्ताव एफिल: मीनार और पुल . . . 573
15.17 रॉबर्ट मायार . . . 577
15.18 पेरे का नोत्र दाम रैंसी (1923) . . . 578
15.19 तोरोहा, सार्सुएला हिप्पोड्रोम . . . 580
15.20 *L'Ingegnere* पियर लुइजी नेर्वी . . . 583
15.21 समस्थैतिक रेखाओं के उदाहरण . . . 585
15.22 नेर्वी और जीव-अनुकरणात्मक वास्तुकला . . . 586
15.23 नेर्वी: संरचनात्मक और सामग्री अभियंता . . . 589
15.24 नेर्वी की प्रतिष्ठित संरचनाएँ . . . 589
15.25 रिक्कार्दो मोरांदी . . . 590
15.26 मेन का सुन्नीबेर्ग पुल . . . 592
15.27 ख़ान के प्रतिष्ठित भवन . . . 596
15.28 सेंट पीटर के गुंबद में दरारों की पोलेनी की जाँच (Poleni, 1748) . . . 599
15.29 गाउदी की सग्रादा फमीलिया . . . 600
15.30 सारिनेन का गेटवे आर्च . . . 601
15.31 फ्राइ ओटो . . . 602
15.32 भौतिक प्रतिरूपों द्वारा रूप-निर्धारण के आधुनिक उदाहरण . . . 602
15.33 बासेन्तो नदी पर मुस्मेची का पुल . . . 604
15.34 पारस्परिक संरचनाएँ: उदाहरणात्मक संकल्पनाएँ . . . 605
15.35 पारस्परिक संरचनाओं के आरंभिक उदाहरण . . . 606
15.36 Wallis, 1695 द्वारा पारस्परिक संरचनाओं के विश्लेषण . . . 606
15.37 सेइवा प्रदर्शनी भवन (जापान) (Popovic, 1996) . . . 607
15.38 पारस्परिक ढाँचा प्रतिरूपक का प्राचलीकरण (Popovic, 1996) . . . 608
15.39 इष्टतम अभिकल्प (Michell, 1904) . . . 610
15.40 मिशेल कैंची . . . 611
15.41 संरचनात्मक सांस्थिति इष्टतमीकरण (Beghini et al., 2014) . . . 611
15.42 फेलिक्स कैंडेला के अतिपरवलयिक-परवलयज खोल . . . 617
15.43 फ्रैंक गेहरी का बिलबाओ गुगेनहाइम और रिचर्ड सेरा की मूर्ति . . . 618
15.44 कालात्रावा: अलामियो पुल की संरचनात्मक सुरुचि बनाम दृश्यतः बोझिल लियाँ सेंट-एक्ज़ूपेरी TGV स्टेशन। . . . 619
15.45 यामासाकी और रॉबर्टसन: सिएटल के आदिरूप से वैश्विक प्रभाव तक . . . 624

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15.46 बेकर और बुर्ज खलीफा: वास्तुशिल्पीय महत्त्वाकांक्षा की सेवा में संगणकीय परिष्कृति (Baker, Skidmore, et al., 2013) . . . 627
15.47 विर्लोज़ो और मियो वायाडक्ट: अभूतपूर्व पैमाने पर संरचनात्मक काव्यात्मकता (Virlogeux et al., 2005) . . . 628
15.48 बहु-विस्तृति केबल-आलंबित पुलों के वैकल्पिक संरचनात्मक तंत्र, जिन्हें विर्लोज़ो ने सौंदर्यपरक कारणों से अस्वीकार किया (Virlogeux et al., 2005) . . . 629
15.49 विशुद्ध कला के रूप में वास्तुकला: संरचनात्मक अभिव्यक्ति से मुक्त रूप . . . 631
15.50 प्रकार्य और सौंदर्य: कलम और पुल . . . 632
15.51 प्रामाणिक संरचनात्मक कला: विशुद्ध अभिव्यक्ति के रूप में संरचना . . . 632
15.52 उत्सव से आलोचना तक: संरचनात्मक सृजनशीलता पर विकसित होते दृष्टिकोण . . . 637

16.1 अध्याय की विषयगत संरचना . . . 641
16.2 भूकंपों के लिए उत्तरदायी विशाल कैटफिश को दर्शाने वाले *namazu-e* मुद्रणों के उदाहरण (Miyata and Takada, 1995) . . . 643
16.3 भूकंपीय आत्माओं को निरूपित करने वाली प्रशांत उत्तर-पश्चिम तट की आनुष्ठानिक वस्तुएँ। . . . 646
16.4 यान ल्यूकेन की *Israel at Mount Sinai* (1703)। यह उत्कीर्णन भूकंपीय देवप्राकट्य को संपूर्ण पर्यावरणीय उथल-पुथल के रूप में दिखाता है, जहाँ शिखरों का दाँतेदार, अस्थिर निरूपण दैवी उपस्थिति की अनुक्रिया में पृथ्वी के “तीव्र कंपन” का संकेत देता है। . . . 649
16.5 हिएरापोलिस, फ्रिजिया में प्रेरित फिलिप पर पथराव (यान ल्यूकेन, 1685)। . . . 650
16.6 वर्जिल सोलिस की जेरिको की लड़ाई (c. 1560) (कोज़ाक संग्रह)। . . . 651
16.7 एन्सेलाडस का मिथक . . . 654
16.8 यूनान के डेल्फी में एथेना प्रोनाया के पवित्र स्थान के भीतर 380 और 360 BC के बीच निर्मित वृत्ताकार मंदिर, डेल्फी का थोलोस। . . . 655
16.9 कोने में महादूत माइकल के चमत्कार को दर्शाता 18th-century का रूसी प्रतिमाचित्र। 657
16.10 हिंदू और बौद्ध प्रतिमाशास्त्र में स्थिरीकारी तथा रक्षक शक्तियों के रूप में वैश्विक सर्प। . . . 660
16.11 सूरा 99:1–8 (*Al-Zalzalah*) का सुलेखीय निरूपण . . . 661
16.12 केंद्र में *Ollin* लिपिचिह्न वाली *Piedra del Sol* (एज़्टेक सूर्य शिला)। . . . 664
16.13 काशिमा तीर्थ (इबाराकी प्रीफेक्चर), *Takemikazuchi-no-kami* का आसन और पूर्व-आधुनिक जापान में शिंतो के भूकंपीय रक्षा अनुष्ठान का प्रमुख स्थल। . . . 666
16.14 कैटफिश को वश में करते *Takemikazuchi-no-kami* को दर्शाता तावीज़ी *namazu-e* मुद्रण। . . . 667
16.15 पुनर्निर्माण से पहले और बाद में लिस्बन . . . 677
16.16 कंक्रीट में समाधिस्थ विनष्ट जिबेलिना . . . 684
16.17 जिबेलिना नुओवा . . . 685
16.18 कुएवा दे ला सेर्पिएंते का भित्तिचित्र, सिएरा दे सैन फ्रांसिस्को, बाजा कैलिफ़ोर्निया। 687
16.19 चुमाश चित्रित गुफा, सांता येनेज़ पर्वत, कैलिफ़ोर्निया के चित्रलेख। . . . 687
16.20 भूकंपीय विपत्ति के प्रति दो चित्रात्मक अनुक्रियाएँ . . . 689
16.21 अमेलियो संग्रह में चयनित योगदान (वारहोल, मैपलथॉर्प और कीफ़र) . . . 690

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

17.1 संरचनात्मक विश्लेषण: व्यापक परिप्रेक्ष्य . . . 825
17.2 संरचनात्मक तत्त्वों में बलों के प्रकार (1d) . . . 831
17.3 केबल तंत्रों के मूल पक्ष . . . 832
17.4 मेहराबों के मूल पक्ष . . . 833
17.5 ट्रसों के प्रकार . . . 833
17.6 स्तंभ और धरन के विन्यासों में विविधताएँ . . . 834
17.7 धरनों के विभिन्न प्रकार . . . 834
17.8 फ्रेमों के मूल रूप . . . 835
17.9 वायु-समर्थित संरचनाओं के उदाहरण . . . 836
17.10 कवचों के मूल रूप . . . 836
17.11 संरचनात्मक अभियांत्रिकी के पाठ्यक्रमों का अनुक्रम . . . 838

18.1 संयुक्त राज्य का हिम-मानचित्र . . . 841
18.2 वायुपत्रक और बेर्नूली समीकरण . . . 842
18.3 संयुक्त राज्य का पवन-मानचित्र . . . 843
18.4 संरचनाओं पर पवन भार का प्रभाव . . . 844
18.5 संयुक्त राज्य का भूकंपीय मानचित्र . . . 845
18.6 संरचनाओं पर मृदा और जलस्थैतिक भार . . . 847
18.7 प्रक्षेपित भार . . . 851
18.8 आघूर्णों को अधिकतम करने के लिए भार का स्थान . . . 852
18.9 R/C भवनों में भार-संचरण . . . 855
18.10 पट्टिकाओं में एकदिश और द्विदिश क्रियाएँ . . . 855
18.11 गॉथिक गिरजाघरों और छिछले मेहराबों में भार-संचरण तंत्र . . . 857
18.12 संरचनात्मक सदस्यों पर भार के लिए प्रभावी क्षेत्रफलों की संकल्पना . . . 858
18.13 संरचना का भार-जीवन, (Lin and Stotesbury, 1981) . . . 860

19.1 आधार परिसीमाओं के उदाहरण . . . 863
19.2 लियोनार्डो (Da Vinci, 1490) से काल्डर तक आघूर्णों का संतुलन . . . 865
19.3 आनत रोलर आधार की प्रतिक्रियाएँ . . . 866
19.4 स्थैतिक अनिर्धार्यता की कोटि . . . 867
19.5 समवर्ती आधार-प्रतिक्रियाएँ . . . 867
19.6 विभिन्न भारों के अधीन धरन के मुक्त-पिंड आरेख . . . 868

20.1 स्थैतिकतः अनिर्धार्य ट्रस . . . 889
20.2 बलों और लंबाइयों के बीच संबंध . . . 890
20.3 बलों का तीरों द्वारा निरूपण . . . 890
20.4 संधि/आव्यूह-विधि: संधि के मुक्त-पिंड आरेख . . . 899
20.5 जटिल स्थैतिकतः निर्धार्य ट्रस . . . 900

21.1 आंतरिक प्रतिबल . . . 907
21.2 ऋजुरेखीय और वक्र धरनों में आंतरिक बल . . . 908

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

21.3 आंतरिक बल . . . 910
21.4 अभिकल्प के लिए अपरूपण और आघूर्ण की चिह्न-परिपाटियाँ . . . 910
21.5 अभिकल्प चिह्न-परिपाटियाँ . . . 910
21.6 धरन के अतिसूक्ष्म खंड का मुक्त-पिंड आरेख . . . 911
21.7 भार, अपरूपण और आघूर्ण के परिवर्तन . . . 913

22.1 वक्रता और विकृतियाँ . . . 938
22.2 धरन की विपरीत वक्रताओं के लिए वक्रता-क्षेत्र विधि की चिह्न परिपाटी . . . 949
22.3 वक्रता-क्षेत्र विधियाँ . . . 950
22.4 आघूर्ण-क्षेत्र विधि द्वारा अधिकतम विक्षेप . . . 953
22.5 संयुग्मी धरन . . . 959

23.1 शुद्ध अपरूपण-विरूपण . . . 964
23.2 अपरूपण प्रतिबल के अधीन अतिसूक्ष्म अवयव . . . 965
23.3 अपरूपण प्रतिबल और गुणांक . . . 967
23.4 ऐंठन–घूर्णन संबंध . . . 970
23.5 वार्पन क्यों होता है . . . 972
23.6 असमान ऐंठन ((McGuire and Winter, 1968) से अनुकूलित) . . . 974
23.7 ऐंठन के अधीन I-धरन . . . 975

24.1 स्वेच्छ संरचना में आभासी और वास्तविक बल . . . 982
24.2 Maxwell-Betti पारस्परिक प्रमेय . . . 986

25.1 स्थैतिकतः अनिर्धार्य 3-केबल संरचना . . . 1012
25.2 आधारयुक्त कैंटिलीवर बीम . . . 1014
25.3 लचीलापन विधि के लिए व्याख्यात्मक समस्या . . . 1015
25.4 दो अज्ञातों वाली लचीलापन विधि का निरूपण . . . 1016
25.5 क्वीन-पोस्ट से प्रेरित संरचनाओं के उदाहरण . . . 1032
25.6 तीन आघूर्ण समीकरण की व्युत्पत्ति . . . 1037
25.7 तीन आघूर्ण समीकरण के भार पद . . . 1039

26.1 दृढता विधि की चिह्न परिपाटी . . . 1043
26.2 दृढता पदों के लिए आनमनी समस्या का सूत्रीकरण . . . 1045

27.1 ढाल-विक्षेप विधि का व्याख्यात्मक उदाहरण . . . 1053
27.2 आघूर्ण वितरण की प्रमुख संकल्पनाएँ . . . 1064

28.1 Müller-Breslau सिद्धांत . . . 1076

29.1 दृढ दंड की स्थिरता . . . 1088
29.2 प्रारंभिक अपूर्णता सहित दृढ दंड की स्थिरता . . . 1089
29.3 सरल आलंबित धरन-स्तंभ; अवकल खंड; अक्षीय बल p का प्रभाव . . . 1091
29.4 दो स्वतंत्रता-कोटि वाला गतिक निकाय . . . 1103

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

29.5 धरनों और ढाँचों की प्रभावी लंबाइयाँ 1105
29.6 बहु-खण्डीय, बहु-मंजिला ढाँचों में स्तंभों की प्रभावी लंबाइयाँ 1105
29.7 अर्ध-लचीले संयोजनों के लिए संरेखण आलेख (American Institute of Steel Construction, 2016) 1106
29.8 अप्रत्यास्थ कुंचन 1108
29.9 Euler कुंचन और SSRC स्तंभ वक्र 1108

30.1 केबल सिद्धांत का सत्यापन 1113
30.2 केबल ज्यामिति # 1 1116
30.3 केबल ज्यामिति # 2 1118
30.4 एकसमान क्षैतिज अनुप्रस्थ भार के अधीन आनत केबल की ज्यामिति 1124
30.5 केबल की दृढता 1125
30.6 कैटेनरी के वैकल्पिक संदर्भ निर्देशांक 1136
30.7 आनत जीवा वाली कैटेनरी, (Cella, 1999) 1138
30.8 कैटेनरी तथा परवलय पर आधारित हलों की तुलना 1143

31.1 वूस्वार क्या है 1145
31.2 de la Hire द्वारा मेहराबों का विश्लेषण 1147
31.3 बडी संख्याओं के वर्गमूल तथा घनमूल निकालने की de Belidor, B. F., 1757 की विधियाँ 1147
31.4 de La Hire के अनुसार मेहराबों के ऊर्ध्वाधर आलंब (*pied-droit*) के विमा-निर्धारण हेतु Belidor की सारणी; de Belidor, B. F., 1757 1148
31.5 मेहराबों का विश्लेषण (de Belidor, B. F., 1729) 1149
31.6 Belidor का विफलता निकष (Brandonisio and De Luca, 2020) 1150
31.7 मेहराबों का विश्लेषण (Couplet, 1729) 1151
31.8 Danyzy, 1732 के प्लास्टर मॉडल 1152
31.9 Coulomb, 1773 द्वारा घर्षणरहित वूस्वारों का विश्लेषण 1153
31.10 Moseley का न्यूनतम प्रतिरोध सिद्धांत (Moseley, 1869) 1154
31.11 Charles Mosca वूस्वार पुल (Turin), जिसका विश्लेषण (Castigliano, 1879) ने किया 1155
31.12 Winkler द्वारा मेहराबों का प्रत्यास्थ विश्लेषण (Winkler, 1880) 1156
31.13 वूस्वार मेहराबों की स्थिरता की जाँच हेतु Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 द्वारा प्रयुक्त प्रायोगिक उपकरण। 1156
31.14 वूस्वार की क्रमिक विफलता Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 1157
31.15 Pippard and Baker, 1943 द्वारा वूस्वारों का विश्लेषण 1158
31.16 मेहराब के खंडों के आर-पार बलों का प्रवाह 1162
31.17 मूलबिंदु पर बल-समुच्चय का निर्धारण 1165
31.18 वूस्वार में MATLAB®द्वारा उत्पन्न किलकों का क्रम 1167
31.19 पतन क्रियाविधियाँ; अंत्याधार प्रणोद (Nobile and Bartolomeo, 2014) 1170
31.20 उलटा फनिक्युलर बहुभुज तथा संगत प्रणोद रेखा और उत्केंद्रता 1171
31.21 तीन-किलक अर्धवृत्तीय मेहराब की विफलता विधा 1172

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

31.22 किलक-स्थानों का क्रम 1172

32.1 बीम की तुलना में मेहराब अथवा निलंबन प्रणाली में आघूर्ण-प्रतिरोधी बल, (Lin and Stotesbury, 1981) 1175
32.2 तीन-किलक मेहराब की स्थैतिकी 1176
32.3 दो-किलक मेहराब, आबद्ध-सिरा बीम से अनुरूपता (Lin and Stotesbury, 1981) . . . 1182
32.4 मेहराब-खंड का गुरुत्व-केंद्र 1191
32.5 सूक्ष्म मेहराब-खंड का साम्य 1193
32.6 एकसमान भार के लिए इष्टतम परवलयी मेहराब 1198
32.7 किलकरहित परवलयी मेहराब; मुक्त-पिंड आरेख 1204
32.8 आरंभिक अवतलन और तापमान-परिवर्तन का प्रभाव 1209
32.9 Louvre संग्रहालय (Paris) की सर्पिल सीढ़ी और Sagrada Familia गिरजाघर (Barcelona) 1216
32.10 आकाश में वक्र संरचना की ज्यामिति 1216
32.11 आकाश में वक्र संरचना का मुक्त-पिंड आरेख 1217

33.1 पट्टिका में विस्थापन और प्रतिबल 1223
33.2 आंतरिक परिणामक 1226
33.3 प्रतिबल-वितरण 1231
33.4 वृत्तीय पट्टिका के सूक्ष्म अवयव का साम्य 1235

34.1 अवकल कवच-अवयव, ज्यामिति, प्रतिबल और उनके परिणामक 1243
34.2 अवकल अवयव की शुद्धगतिकी 1244
34.3 अवकल कवच-अवयव का साम्य 1246
34.4 अवकल कवच अवयव, V_x प्रतिबल परिणामक 1250
34.5 अवकल कवच अवयव, प्रमुख वक्रताएँ 1251
34.6 अवकल कवच अवयव, प्रारंभिक एवं विरूपित अवस्था 1255
34.7 अवकल कवच अवयव, प्रारंभिक एवं विरूपित अवस्था; धनात्मक भुजाओं की लंबाई में वृद्धि से उत्पन्न अपरूपण विकृति 1257
34.8 अवकल कवच अवयव, प्रारंभिक एवं विरूपित अवस्था; घूर्णन 1258
34.9 अवकल अवयव का मध्य-पृष्ठ 1260
34.10 कवचों का वर्गीकरण 1270
34.11 वे कवच जिनमें झिल्ली धारणा (अधिकांशतः) वैध है 1271
34.12 अतिपरवलयज और गुंबद के अतिसूक्ष्म अवयवों के मुक्त-पिंड आरेख 1271
34.13 अतिसूक्ष्म वृत्तीय कवच अवयव का मुक्त-पिंड आरेख 1274
34.14 साधारणतः समर्थित पूर्ण वृत्तीय कवच में प्रतिबल परिणामक वितरण 1278
34.15 किनारी प्रभाव 1279
34.16 वृत्तीय कवच में लगाया गया संशोधक रेखा-भार 1280
34.17 ज्या श्रेणी का आलेख 1280
34.18 स्थैतिकतः अनिर्धार्य कवच और बीम के सादृश्य 1298
34.19 प्रत्यास्थ समर्थन पर टिके वृत्तीय कवच 1299

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35.1 आदर्शीकृत एकल-स्वतंत्रता-कोटि दोलक 1320
35.2 हार्मोनिक प्रणोदन के अधीन अवमंदित SDOF दोलक के संकल्पनात्मक गतिक प्रवर्धन वक्र 1328
35.3 त्वरण अनुक्रिया वर्णक्रम S_a, जो विभिन्न अवमंदन अनुपातों के लिए प्राकृतिक आवर्तकाल T_n का फलन है। 1338
35.4 सरलतः आलंबित धरन की प्रथम तीन विधा-आकृतियाँ 1341
35.5 सममित चक्रीय भारण के अधीन द्विरेखीय प्रत्यास्थ-सुघट्य शैथिल्य पाश। 1348

36.1 वास्तुकार–संरचनात्मक अभियंता की पुनरावर्ती अन्योन्यक्रियाएँ 1358
36.2 धरन में माँग और क्षमता 1359
36.3 सुरक्षा 1359
36.4 C और D के प्रायिकता वितरण फलन 1362
36.5 β के पदों में विफलता की प्रायिकता 1364
36.6 विदरित प्रबलित-कंक्रीट अनुभाग का सीमा-अवस्था विश्लेषण 1365
36.7 विह्टनी प्रतिबल खंड 1367
36.8 स्तंभ के मुक्त-पिंड और अन्योन्यक्रिया आरेख 1375
36.9 स्तंभ का मुक्त-पिंड, संतुलित अवस्था 1376

38.1 संगत कोना-घूर्णन 1402
38.2 सरल धरन का विक्षेप 1403
38.3 ऊर्ध्वाधर भार के अधीन दृढ स्तंभों वाले पोर्टल ढाँचे का विक्षेप 1403
38.4 ऊर्ध्वाधर भार के अधीन पोर्टल ढाँचे का विक्षेप 1404
38.5 पार्श्व भार के अधीन पोर्टल ढाँचे का उदाहरण 1404
38.6 विक्षेपित आकृति और आघूर्ण आरेख; पार्श्व भार वाला पोर्टल ढाँचा 1405
38.7 आधार-दृढताओं के पदों में धरन विक्षेप 1406
38.8 ऊर्ध्वाधर भार के अधीन ढाँचा; नति-परिवर्तन बिंदुओं के सन्निकट स्थान 1407
38.9 ऊर्ध्वाधर भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; गर्डर आघूर्ण 1408
38.10 ऊर्ध्वाधर भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; स्तंभ के अक्षीय बल 1409
38.11 ऊर्ध्वाधर भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण 1410
38.12 पार्श्व भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; स्तंभ अपरूपण 1411
38.13 पार्श्व भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; गर्डर आघूर्ण 1412
38.14 छोटे भवन में अपरूपण विरूपण, (Lin and Stotesbury, 1981) 1433
38.15 ऊँचे भवन में आनमनी विरूपण, (Lin and Stotesbury, 1981) 1434
38.16 दो तनु भित्तियों और लिंटलों से बनी भवन-संरचना में विक्षेप, (Lin and Stotesbury, 1981) 1435
38.17 एक बेंट का विरूपण (Lin and Stotesbury, 1981) 1436
38.18 दृढ ढाँचा उपतंत्र का अपरूपण और आनमनी विक्षेप, (Lin and Stotesbury, 1981) . 1437
38.19 असममित ऊर्ध्वाधर भार से पार्श्व-दोलन विक्षेप, (Lin and Stotesbury, 1981) . . 1437

40.1 समय-निर्भर विकृति; विसर्पण और संकुचन 1484
40.2 भवन के तापीय भार 1485

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

40.3 चिह्न-परिपाटी, अभिकल्प और विश्लेषण (चित्र 26.1) 1485
40.4 अवयव के आंतरिक बल और स्थानीय स्वतंत्रता कोटियाँ 1486
40.5 स्वतंत्र विस्थापन 1487
40.6 स्थानीय और वैश्विक निर्देशांक तंत्र/स्वतंत्रता कोटियाँ 1488
40.7 स्थैतिक और गतिकीय अनिर्धार्यता की कोटियाँ 1490
40.8 परिसीमा मान समस्या 1491

41.1 दृढता पद K_{ij} की परिभाषा 1493
41.2 विभिन्न प्रकार के अवयवों के दृढता गुणांक 1494
41.3 3D धरन-स्तंभ अवयव की स्वतंत्रता-कोटियाँ 1496
41.4 3D धरन-स्तंभ अवयव में पृथक दृढता पद 1498
41.5 आरोपित विकृतियों से उत्पन्न परजीवी अपरूपण विकृति 1500
41.6 वारिपंग अवरोध सहित मरोड अवयव के अंत्य बल और विस्थापन 1503

42.1 नम्यता और दृढता विधियों की तुलना के लिए धरन उदाहरण 1505
42.2 शुद्धगतिक अनिर्धार्यता की कोटि निर्धारित करने के लिए धरन उदाहरण 1506

43.1 स्थानीय ($\mathbf{k}^e$) और वैश्विक ($\mathbf{K}^e$) अवयव दृढता आव्यूह 1531
43.2 2D धरन-स्तंभ के लिए रूपांतरण आव्यूह 1532
43.3 स्वेच्छ 3D सदिश रूपांतरण 1534
43.4 Z (अथवा z) के सापेक्ष 2D फ्रेम अवयव का घूर्णन 1536
43.5 ग्रिड अवयव का घूर्णन 1537
43.6 व्लासोव धरन का रूपांतरण आव्यूह 1538
43.7 2D ट्रस का घूर्णन 1538
43.8 लघुकृत 3D घूर्णन 1540
43.9 ऊर्ध्वाधर सदस्यों के लिए 3D रूपांतरण की विशेष स्थिति 1541
43.10 जटिल 3D घूर्णन 1542

44.1 अनवरुद्ध और अवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियाँ 1548
44.2 संरचनात्मक विविक्तीकरण का उदाहरण 1549
44.3 [**ID**] आव्यूह निर्धारण का उदाहरण 1550
44.4 **LM** निर्धारणों के उदाहरण 1551
44.5 वैश्विक दृढता आव्यूह के समंजन की प्रक्रिया 1552

45.1 विस्थापनों का बलों में प्रतिचित्रण 1570
45.2 एकक विस्थापन वृत्त का बल दीर्घवृत्त में प्रतिचित्रण, (Gavin, 2012)। 1571
45.3 अभिलक्षणिक मान परीक्षण समस्या 1574
45.4 कुप्रतिबद्ध **K** उत्पन्न करने वाला सदस्य संयोजन 1575
45.5 K_1 K_2 के पदों में कुप्रतिबद्ध आव्यूह 1577
45.6 नोडीय क्रमांकन का महत्त्व 1581
45.7 संरचनात्मक दृढता आव्यूह की भंडारण आवश्यकताएँ 1582

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

46.1 ट्रस अवयव की शुद्धगतिकी 1594
46.2 स्थिर और स्थैतिकतः निर्धार्य अवयव 1598
46.3 दृढ विस्थापन वाली धरन 1610
46.4 दृढ विस्थापन वाली धरन का मुक्त-पिंड आरेख 1610
46.5 नम्य, दृढ और अर्ध-दृढ धरन 1612
46.6 अर्ध-दृढ धरन के विरूपण 1613
46.7 अर्ध-नम्य संयोजनों के लिए $\overline{K}_{22}$ गुणांक 1616
46.8 फ्रेम नियतांकों की हस्तपुस्तिका से उद्धरण (Portland Cement Association, 1947) 1617
46.9 परिवर्ती काट वाला धरन 1618
46.10 रैखिक रूप से परिवर्ती गहराई वाला काट; प्राचलिक अध्ययन 1620
46.11 परवलयिक रूप से परिवर्ती गहराई वाला काट; प्राचलिक अध्ययन 1620

47.1 विचरण और अवकल संकारक 1635
47.2 आवश्यक और प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंधों के उदाहरण 1640
47.3 कुल स्थितिज ऊर्जा विधि के लिए Tonti आरेख 1645
47.4 Hu-Washizu के लिए Tonti आरेख, (Červenka, 1994) 1658
47.5 Lagrange, Hamilton और D'Alembert के लिए Tonti आरेख 1659

48.1 कर्षण की परिभाषा 1664
48.2 विकृति और पूरक विकृति ऊर्जा घनत्व 1665
48.3 स्थितिज ऊर्जा 1666
48.4 U और W_i पर भार इतिहासों का प्रभाव 1667
48.5 आभासी और पूरक आभासी कार्य के सिद्धांतों के निदर्शी आरेख 1676
48.6 क्वांटम और चिरसम्मत यांत्रिकी में न्यूनीकरण 1687
48.7 विचरणात्मक विधियों का सारांश 1706
48.8 विचरणात्मक सिद्धांतों का द्वैत 1707

49.1 सरल रेखा के अनुदिश प्राकृतिक निर्देशांक निकाय 1712
49.2 त्रिभुज के लिए प्राकृतिक निर्देशांक निकाय 1714
49.3 त्रिभुज पर समाकलन 1715
49.4 अक्षीय परिमित अवयव 1717
49.5 स्थिर-विकृति त्रिभुज अवयव 1719
49.6 आयताकार द्विरेखीय अवयव 1720
49.7 4-आसंधीय चतुर्भुज अवयव के आकार फलन 1722
49.8 ठोस त्रिरेखीय आयताकार अवयव 1722
49.9 3-आसंधीय रेखीय त्रिकोणीय अवयव के आकार फलन 1725
49.10 तीन-आसंधीय द्विघाती छड अवयव 1725
49.11 आनमनी परिमित अवयव 1726
49.12 एकसमान धरन अवयव के आनमन के लिए आकार फलन 1728
49.13 चार-आसंधीय समप्राचलीय अवयव 1732
49.14 सेरेन्डिपिटी और लैग्रांजीय द्विघाती चतुर्भुज 1733
49.15 चतुर्भुज और त्रिभुज अवयवों के लिए पास्कल त्रिभुज 1733

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

49.16 सेरेनिडपिटी समप्राचलीय द्विघाती परिमित अवयव: वैश्विक और जनक अवयव 1734
49.17 8-आसंधीय चतुर्भुज अवयव के आकार फलन 1735
49.18 9-आसंधीय चतुर्भुज अवयव के आकार फलन 1738
49.19 समप्राचलीय अवयवों के लिए आसंधीय क्रमांकन 1738
49.20 6-आसंधीय द्विघाती त्रिकोणीय अवयव के आकार फलन 1740

50.1 पूर्णता और सुसंगतता 1748
50.2 h, p और r अभिसरण 1749
50.3 प्रतिबल का अंतरावयवीय सातत्य 1751
50.4 विकृति का अंतरावयवीय सातत्य 1751

51.1 कुछ अवयवों का द्विविमीय प्रतिचित्रण 1754
51.2 वास्तविक और जनक अवयव 1754
51.3 सम, अधि और अव-प्राचलीय अवयव 1755
51.4 वक्ररेखीय निर्देशांक निकाय में अवकल अवयव 1759
51.5 दो सदिशों का सदिश गुणनफल 1760
51.6 संभावित एकल जैकोबियन वाला अवयव 1761
51.7 न्यूटन–कोट्स संख्यात्मक समाकलन 1766
51.8 पृष्ठ पर गाउस–लेजांद्र समाकलन 1771
51.9 त्रिभुज पर संख्यात्मक समाकलन 1772
51.10 4-आसंधीय चतुर्भुज के गाउस बिंदुओं से बहिर्वेशन (Felippa, 1999) 1773
51.11 गुरुत्व भारण 1775
51.12 समप्राचलीय अवयवों में कर्षण भार 1776
51.13 सन्निहित समप्राचलीय अवयवों में कर्षण भार 1777
51.14 द्विरेखीय अवयव की स्वतंत्र विस्थापन विधाएँ 1780
51.15 अल्प-समाकलित द्विघाती अवयव में आवरग्लास विधाएँ 1780
51.16 आनमन के अधीन आयताकार द्विरेखीय अवयव; द्विरेखीय अवयव और सही ज्यामिति . 1781
51.17 q6 अवयव की असुसंगत विधाओं से संबद्ध विस्थापन 1782
51.18 ड्रिरलिंग स्वातंत्र्य-कोटियों द्वारा प्रेरित पार्श्व विस्थापन 1783

53.1 अक्षीय *बनाम* आनमनी दृढताएँ 1805
53.2 अक्षीय दृढता की उपेक्षा पर अबाधित विस्थापनों में कमी 1805
53.3 भूकंपीय भार हेतु भवन का प्रतिरूपण 1806
53.4 आसंधि का मुक्त-पिंड आरेख 1807
53.5 द्रव्यमान- और दृढता-समानुपाती अवमंदन 1813
53.6 अग्र ऑयलर बनाम पश्च ऑयलर विधियाँ 1818

54.1 ज्यामितीय अरैखिकता: बृहद् विक्षेप का उदाहरण (**B**), 29.2.3 1839
54.2 पदार्थगत अरैखिकता: तंतु (**D**) 1840
54.3 पदार्थगत अरैखिकता: अनुप्रस्थ काट (**D**) 1840
54.4 रैखिक *बनाम* अरैखिक विश्लेषण 1841

प्रारूप

54.5 संरचनात्मक विश्लेषण के प्रकार 1843
54.6 भार-विक्षेप वक्र और विभिन्न अनुक्रिया परास 1846
54.7 प्राचीन काल की अभिकल्प संहिताएँ 1848
54.8 *beton-reglement f ur Eisenbetonbau* 1849
54.9 आधुनिक अभिकल्प संहिताओं के उदाहरण 1850
54.10 निष्पादन स्तर 1852
54.11 विभिन्न अभिकल्प रूपरेखाओं की तुलना 1853

55.1 पराभव पृष्ठ: परिभाषा 1857
55.2 द्रवस्थैतिक दाब से स्वतंत्र प्रतिरूप 1857
55.3 दाब-निर्भर पराभव पृष्ठ 1859
55.4 द्रवस्थैतिक दाब पर निर्भर प्रतिरूप 1860
55.5 धातुओं का प्रतिबल-विकृति व्यवहार; Bauschinger प्रभाव 1861
55.6 कंक्रीट की सूक्ष्म दरारें 1862
55.7 रासायनिक आबंध 1862
55.8 तन्य और भंगुर आबंध 1863
55.9 विस्थापन-दोष 1864
55.10 प्रत्यास्थ-सुघट्य प्रतिबल-विकृति अनुक्रिया 1865
55.11 कठोरण प्रतिरूप 1866

56.1 $M - \Phi$ के निर्धारण के लिए विचारित स्वेच्छ अनुप्रस्थ परिच्छेद 1888
56.2 $M - \Phi$ को वैश्लेषिक रूप से निर्धारित करने की वृद्धिशील प्रक्रिया 1889
56.3 आघूर्ण–वक्रता और आघूर्ण–अक्षीय बल (अंतःक्रिया) आरेख 1895
56.4 अनुप्रस्थ परिच्छेद का परतों में विविक्तीकरण 1896
56.5 $M - \Phi$ को संख्यात्मक रूप से निर्धारित करने का वृद्धिशील उपागम 1898

57.1 पट्टिकाओं में पराभव रेखाएँ 1919
57.2 आयताकार पट्टिकाओं में पराभव रेखाओं का निर्धारण 1921
57.3 स्थैतिक निचली सीमा समाधान *बनाम* पुशओवर विश्लेषण 1925

59.1 न्यूटन विधि 1937
59.2 स्पष्ट समाकलन योजना 1944
59.3 न्यूटन विधि की व्याख्या (भार नियंत्रण के लिए) 1947
59.4 भार नियंत्रण के लिए न्यूटन–रैफसन विधि 1948
59.5 संशोधित न्यूटन–रैफसन विधि, आरंभिक स्पर्शरेखा 1950
59.6 वृद्धिशील छेदक, अर्ध-न्यूटन विधि 1951
59.7 न्यूटन विधि; भार बनाम विस्थापन नियंत्रण 1954
59.8 न्यूटन विधि; विस्थापन नियंत्रण (चित्र 59.3 से तुलना करें) 1955
59.9 न्यूटन–रैफसन विधि; विस्थापन नियंत्रण 1956

60.1 संरचनात्मक विश्लेषण के स्तर 1971
60.2 ज्यामितीय अरैखिकता के लिए स्पष्ट वृद्धिशील उपागम 1971

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

60.3 ज्यामितीय दृढता आव्यूह के बिना व्याकुंचन भार का निर्धारण 1977

61.1 2D ट्रस का निर्देश-तंत्र 1984
61.2 2D दृढता-आधारित विधि के आंतरिक बल तथा संगत विस्थापन 1988
61.3 दृढता-आधारित विधि के लिए अवस्था निर्धारण 1990
61.4 दृढता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण का प्रवाह-चित्र 1993
61.5 तंतु परिच्छेद—नियंत्रण परिच्छेदों का वितरण तथा परिच्छेद का तंतुओं में उपविभाजन . 1997
61.6 अरैखिक अनुप्रस्थ परिच्छेद प्रतिबल वितरण 1998
61.7 दृढ-पिंड विधाओं के बिना 2D ढाँचा अवयव 2000
61.8 परिच्छेद बल के लिए चिह्न परिपाटी 2000
61.9 2D नम्यता-आधारित विधि के आंतरिक बल तथा संगत विस्थापन 2003
61.10 दृढ-पिंड विधाओं सहित तथा रहित राशियों के बीच संबंध 2003
61.11 अवयव पुनरावृत्ति के बिना नम्यता-आधारित विधि का अवस्था निर्धारण 2005
61.12 अवस्था निर्धारण (Taucer, Spacone, and Filippou, 1991a) 2008
61.13 अवयव तथा परिच्छेद अवस्था निर्धारण 2009
61.14 अवयव पुनरावृत्ति के बिना नम्यता-आधारित अरैखिक विश्लेषण का प्रवाह-चित्र . . . 2021
61.15 अवयव पुनरावृत्ति सहित नम्यता-आधारित अरैखिक विश्लेषण का प्रवाह-चित्र 2022
61.16 दृढता-आधारित *बनाम* नम्यता-आधारित सूत्रीकरण की तुलना 2023
61.17 शून्य-लंबाई 2D अवयव 2025
61.18 अवयव अवस्था निर्धारण हेतु शून्य-लंबाई 2D अवयव का प्रवाह-चार्ट 2026
61.19 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव; संतुलन 2028
61.20 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव का निर्देश-तंत्र 2029
61.21 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव का प्रवाह-चार्ट 2031

62.1 संकेंद्रित और वितरित सुघट्यता प्रतिरूप 2034
62.2 शैथिल्य प्रतिरूप 2036
62.3 स्पर्शरेखीय मापांक की तुलना; सुघट्यता बनाम मेनेगोट्टो–पिंटो 2038
62.4 द्विरैखिक प्रतिरूप का निर्धारण 2039
62.5 उत्क्रम चक्रीय भार प्रतिरूपों की तुलना: सुघट्यता *बनाम* मेनेगोट्टो–पिंटो 2040
62.6 मेनेगोट्टो–पिंटो (Menegotto and Pinto, 1973) इस्पात प्रतिरूप 2041
62.7 फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित ज्यूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (1) 2043
62.8 फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित ज्यूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (2) 2044
62.9 फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित ज्यूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (3) 2045
62.10 फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित ज्यूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (4) 2046
62.11 कंक्रीट सामर्थ्य पर परिरोध का प्रभाव (Richart, Brandtzæg, and Brown, 1928) 2047
62.12 परिरोधित *बनाम* अपरिरोधित कंक्रीट संपीडन सामर्थ्य (Mander, Priestley, and Park, 1988) 2048
62.13 कंक्रीट परिरोध प्रदान करने में रकाबों की भूमिका 2048
62.14 संपीडन में कंक्रीट पदार्थ प्रतिरूप 2050
62.15 संपीडन में चक्रीय भारण के अधीन कंक्रीट पदार्थ प्रतिरूप 2052
62.16 तनन में चक्रीय भारण के अधीन कंक्रीट पदार्थ प्रतिरूप 2054

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.17 संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप का निर्धारण (1) 2056
62.18 संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप का निर्धारण (2) 2057
62.19 संपीडन, तनन तथा तनन एवं संपीडन द्वारा उत्पन्न दरारें 2059
62.20 स्थायी विकृति-विहीन विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का विकृति–प्रतिबल वक्र 2065
62.21 विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण (1) 2066
62.22 विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण (2) 2067
62.23 विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण (3) 2068
62.24 स्थायी विकृति सहित विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का विकृति–प्रतिबल वक्र 2072
62.25 फिसलन प्रतिरूप 2073
62.26 सरलीकृत बंध प्रतिरूप 2074
62.27 बंध–फिसलन वक्र 2075
62.28 उदासीन अक्ष का स्थान 2076
62.29 सुघट्य क्षेत्रों की पहचान 2078
62.30 अवयव के आनमनी विरूपण का विक्षेप 2079
62.31 प्रबलित कंक्रीट में प्रभावी जड़त्व आघूर्ण 2080
62.32 सुघट्य लंबाइयों का स्थान (Park and Paulay, 1991) 2082
62.33 संकेंद्रित सुघट्यता धारणा सहित प्रबलित-कंक्रीट ब्रैकट धरन का अग्र-विस्थापन . . 2083
62.34 संकेंद्रित सुघट्यता धारणा सहित इस्पात ब्रैकट धरन का अग्र-विस्थापन 2085
62.35 अपरूपण विफलता सहित संकेंद्रित सुघट्यता मॉडल 2089
62.36 सीमा-अवस्था अपरूपण विफलता 2089
62.37 अपरूपण स्प्रिंग की अनुक्रिया 2090
62.38 सीमा-अवस्था स्तंभ अनुक्रिया 2091
62.39 सीमा-अवस्था की पृथक अनुक्रियाएँ 2092
62.40 प्रतिनिधि शैथिल्य चक्र 2093
62.41 विकृति-मृदुकरण के कारण सामर्थ्य-हानि 2094
62.42 व्युत्क्रम चक्रीय सामर्थ्य ह्रास 2094
62.43 शैथिल्य मॉडल का आधार-वक्र 2096
62.44 आनमन के लिए आधार-वक्र (Ghannoum, 2020) 2097
62.45 शिखर-उन्मुख और संकुचन मॉडल 2098
62.46 शिखर-उन्मुख मॉडल का मूल चक्र 2098
62.47 भार-व्युत्क्रमण और लक्ष्य अवस्था का अद्यतन 2099
62.48 शिखर-उन्मुख मॉडल का अनुसरण करता बढ़ता चक्रीय भारण इतिहास 2099
62.49 संकुचन मॉडल का मूल चक्र 2100
62.50 विराम-बिंदु का निर्धारण 2101
62.51 प्रथम विराम-बिंदु का निर्धारण 2102
62.52 विराम-बिंदु का अद्यतन 2103
62.53 विराम-बिंदु के आगे पुनर्भारण 2104
62.54 संकुचन मॉडल का अनुसरण करता बढ़ता चक्रीय भारण इतिहास 2104
62.55 UCSD संरचनात्मक प्रयोगशाला के परिणाम (Ibarra, 2004) 2105
62.56 मूल सामर्थ्य-ह्रास विधा 2107
62.57 कैप-पश्चात सामर्थ्य-ह्रास विधा 2108

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.58 भारमोचन दृढता-ह्रास विधा 2110
62.59 भारमोचन व्यवधान 2111
62.60 त्वरित पुनर्भारण दृढता-ह्रास विधा 2111
62.61 आधार-वक्र (Ghorbani et al., 2022) 2113
62.62 घनीय स्प्लाइन-आधारित शैथिल्य मॉडल (Suselo, 2021) 2114

63.1 परिमित अवयव प्रक्रिया (Bathe, 1996 से प्रेरित) 2117
63.2 समान रूप से वितरित प्रतिरूप जटिलता 2118
63.3 अरैखिक विश्लेषण की तुलना में रैखिक विश्लेषण की सीमाएँ 2119
63.4 ढाँचों के अरैखिक विश्लेषण के लिए परिमित अवयव 2123
63.5 स्तंभ सिरा-संयोजन 2123
63.6 धरन अथवा स्तंभ अवयव 2124
63.7 स्तंभ–धरन संयोजन 2125
63.8 अनुप्रस्थ काट का स्तरों में प्रतिरूपण 2128
63.9 RC धरन–स्तंभ का आदर्शीकृत प्रास प्रतिरूप (Haselton et al., 2016) 2131
63.10 परिरोध के प्रकार (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) 2131
63.11 PEER संरचनात्मक निष्पादन आँकड़ा-संग्रह का आलेखीय उपयोक्ता अंतरापृष्ठ (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) 2132

64.1 MCS और LHS की तुलना 2150
64.2 $k = 2$ के लिए एक प्रक्षेपपथ का उदाहरण। 2160
64.3 भिन्न Morris प्रक्षेपपथों के अतिव्यापित अथवा निकट गुच्छित बिंदु। 2160
64.4 यादृच्छिक चर और उसका संचयी वितरण फलन (CDF)। 2161
64.5 यादृच्छिक चर x_i की आवर्ती अनुक्रिया। नियत चरण आकार आवर्ती परिवर्तनों का पता लगाने में विफल हो सकते हैं। 2162
64.6 परिमात्रक अधिसमष्टि में $k = 3$ RV के लिए प्रक्षेपपथ (a) और त्रिज्य-बिंदु (b) विधियों की तुलना। 2162
64.7 संशोधित त्रिज्य-बिंदु छँटाई प्रक्रिया में आरंभीकरण और आरंभीकरणोत्तर अवस्था . . 2167
64.8 संवेदनशीलता-क्रम निर्धारण का उदाहरण (Gakuhari, 2021) 2171
64.9 संवेदनशीलता विश्लेषण प्रत्याशी प्राचलों की पहचान करता है; प्राचल अभिनिर्धारण प्रेक्षणों द्वारा समर्थित मान निर्धारित करता है 2172

65.1 निकाय अभिनिर्धारण उपागम का सिद्धांत: प्रतिरूप–आँकड़ा विसंगति न्यूनतम करने हेतु प्राचलों का पुनरावृत्तीय परिष्कार। 2176
65.2 RANSAC के साथ रैखिक प्रतिगमन का निदर्शी उदाहरण 2179
65.3 कंक्रीट ह्रास पर लागू RANSAC: प्रकरण अध्ययन (Gakuhari, 2021) 2179
65.4 प्राचल अभिनिर्धारण प्रक्रिया का प्रवाह-आरेख 2193
65.5 एकल अवशेष फलन और पाँच चरों के लिए आलेखीय उपयोगकर्ता अंतरापृष्ठ। अधिक व्यापक उदाहरण के लिए Fig. 65.7 देखें। 2194
65.6 लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट अरैखिक न्यूनतम-वर्ग अनुकूलन की निवेश आँकड़ा फ़ाइल 2196

प्रारूप

65.7 लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट अरैखिक न्यूनतम-वर्ग अनुकूलन का डैशबोर्ड: 12 पूर्वानुमानित लक्ष्य और 8 चर। . . . 2199
65.8 स्थल अभिलक्षणन, प्रतिरूप विकास, अनिश्चितता, प्राचल अभिनिर्धारण, संरचनात्मक विश्लेषण और भंगुरता आकलन का एकीकरण . . . 2204

66.1 PBEE के चार घटक . . . 2209

67.1 (परिबद्ध) गुटेनबर्ग–रिक्टर पुनरावृत्ति नियम . . . 2213
67.2 भूकंपीय स्रोतों का वर्गीकरण . . . 2214
67.3 स्थल-से-स्रोत दूरियों का वर्गीकरण . . . 2217
67.4 GMPE का प्राचलीय अन्वेषण . . . 2218
67.5 नियतात्मक भूकंपीय संकट विश्लेषण . . . 2219
67.6 प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण . . . 2220
67.7 पॉइसन प्रायिकता प्रतिरूप . . . 2222
67.8 माध्य और भिन्नक भूकंपीय संकट-वक्रों का नमूना . . . 2222
67.9 अमेरिकी संकट-मानचित्रों के नमूने . . . 2225
67.10 University of Colorado Boulder के भूकंपीय वियोजन आलेखों के नमूने . . . 2226
67.11 विभिन्न प्रतिक्रिया-वर्णक्रमों की तुलना . . . 2226
67.12 IBPA, SBPA और TBPA के लिए भू-गति चयन और मापन की तुलना . . . 2228
67.13 नमूना ETEF . . . 2235
67.14 ETA40lc01 का CAV बनाम लक्ष्य . . . 2237
67.15 ETA20kd01 की शैथिल्य ऊर्जा बनाम लक्ष्य . . . 2238

68.1 संकट वक्र। बायाँ आलेख प्रत्यावर्तन अवधियों की अवधारणा दर्शाता है, जबकि दायाँ आलेख किसी विशिष्ट स्थल का संकट वक्र दिखाता है। . . . 2247
68.2 अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण पृष्ठ . . . 2249
68.3 प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA)। . . . 2250

69.1 क्षमता और माँग की प्रायिकतामूलक प्रकृति . . . 2256
69.2 क्षमता वक्र . . . 2259
69.3 पुशओवर विश्लेषण के लिए पार्श्व भार . . . 2260
69.4 सेतु का स्थान और चित्र . . . 2265
69.5 स्तंभ और सेतु-स्तंभ के आयाम . . . 2267
69.6 स्तंभ और शाफ़्ट अनुप्रस्थ परिच्छेद . . . 2268
69.7 परिसीमित और अपरिसीमित कंक्रीट के एकदिश भारण का प्रतिबल-विकृति संबंध (Mander, Priestley, and Park, 1988) . . . 2269
69.8 सेतु-स्तंभ की विक्षेपित आकृति और वक्रता आरेख; AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 से अनुकूलित . . . 2270
69.9 आघूर्ण-वक्रताएँ और सुघट्य आघूर्ण . . . 2271
69.10 अनुक्रिया वर्णक्रम विश्लेषण (C_S) . . . 2275
69.11 विस्थापन अनुक्रिया वर्णक्रम विश्लेषण . . . 2275

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

69.12 अनुमेय भूकंप-प्रतिरोधी अवयव (ERES) (AASHTO, Seismic, 2011) 2277
69.13 प्रबलन इस्पात प्रतिबल-विकृति प्रतिरूप 2279
69.14 आघूर्ण वक्रता ((AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1) से अनुकूलित) 2281
69.15 सेतु-स्तंभ की ऊँचाई में आघूर्ण वितरण 2282
69.16 सेतु-स्तंभ की विकर्षेपित आकृति और वक्रता आरेख; AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 से अनुकूलित 2283
69.17 RISA प्रतिरूप 2286
69.18 तीन आवश्यक स्तंभों का अन्योन्यक्रिया आरेख 2287
69.19 सुघट्य आघूर्ण 2288
69.20 Caltrans की शाफ्ट परिभाषा(CALTRANS, 2013) 2290
69.21 प्रथम सुघट्य कब्जा बनने के बाद संशोधित प्रत्यास्थ प्रतिरूप 2292
69.22 द्वितीय सुघट्य कब्जा बनने के बाद संशोधित प्रत्यास्थ प्रतिरूप 2293
69.23 4 सुघट्य कब्जों के निर्माण सहित पतन क्रियाविधि 2294
69.24 IDA विधि पर आधारित संकल्पनात्मक पतन-भंगुरता वक्र 2298
69.25 MSA विधि पर आधारित संकल्पनात्मक पतन-भंगुरता वक्र 2300
69.26 ETA-आधारित क्षमता फलन का जनन 2303
69.27 चार भिन्न रणनीतियों की प्रमुख विशेषताएँ (Hariri-Ardebili, Saouma, and Porter, 2016) 2306
69.28 भूकंपीय विश्लेषण की सापेक्ष जटिलताएँ 2306

70.1 एक DI और दो DVs के बीच संबंध (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) 2317
70.2 PBEE: व्यापक परिदृश्य 2319
70.3 भवनों के लिए अनुशंसित न्यूनतम भूकंपीय निष्पादन अभिकल्प उद्देश्य (Porter, 2003) 2321

72.1 PBEE की प्रथम पीढी का संकल्पनात्मक विवरण; (**Whittaker0303**) 2330
72.2 विविक्त निष्पादन स्तरों के चित्रण, (FEMA, 2012) 2331
72.3 PBEE के चार घटक 2334
72.4 भूकम्पीय भंगुरता, सुभेद्यता और संकट वक्रों की तुलना 2340
72.5 भंगुरता वक्र और क्षति प्रायिकता आव्यूह के बीच सम्बन्ध 2342
72.6 भूकम्पीय भंगुरता पृष्ठों के विभिन्न पक्ष 2343

B.1 संरचनाओं पर पवन भार का प्रभाव (Schueller, 1996) 2356
B.2 सामान्य पवन-बल प्रतिरोधी भवन संरचनाओं के लिए सन्निकट अभिकल्प पवन-दाब p 2358
B.3 भवन के कंपन 2359
B.4 संयुक्त राज्य के भूकंपीय क्षेत्र, (ICBO, 1994) 2360
B.5 ट्रक भार 2370
B.6 आघूर्णों को अधिकतम करने के लिए भार स्थान-निर्धारण 2374

D.1 वृत्ताकार मेहराब की ज्यामिति 2381
D.2 बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2383
D.3 θ के सापेक्ष β का संबंध 2385
D.4 बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2385

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.5 बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आंतरिक बलों के आलेख 2388
D.6 स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2389
D.7 स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2390
D.8 स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2392
D.9 समान रूप से वितरित भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2395
D.10 स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब बनाम बिंदु भारों की श्रेणी 2396
D.11 समान रूप से वितरित भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब बनाम बिंदु भारों की श्रेणी 2396
D.12 Sap 2000—स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का आघूर्ण आरेख 2396
D.13 Sap 2000—स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अक्षीय बल आरेख . 2396
D.14 Sap 2000—स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अपरूपण बल आरेख . 2397
D.15 स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब बनाम समान रूप से वितरित भार . . . 2397
D.16 विस्तार के 1/2 और 1/4 पर बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2397
D.17 बिंदु भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2399
D.18 अंत्याधार ‘b’ पर अतिरिक्त प्रणोद हटाने के बाद दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2400
D.19 लगाए गए आभासी बल सहित दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2402
D.20 बिंदु भार के अधीन मूल दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2405
D.21 दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब में विक्षेप की गणना हेतु मुक्त-पिंड आरेख 2408
D.22 बिंदु भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2409
D.23 स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2410
D.24 अंत्याधार B पर अतिरिक्त प्रणोद हटाने के बाद दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2411
D.25 स्व-भार के अधीन मूल दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2415
D.26 स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2417
D.27 समान रूप से वितरित भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2421
D.28 स्व-भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब की तुलना . . 2422
D.29 समान रूप से वितरित भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब की तुलना 2422
D.30 Sap 2000—स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का आघूर्ण आरेख 2422
D.31 Sap 2000—स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अक्षीय बल आरेख . . 2422
D.32 Sap 2000—स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अपरूपण बल आरेख . . 2423
D.33 स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब की तुलना 2423
D.34 विस्तार के 1/2 और 1/4 पर बिंदु भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2423
D.35 बिंदु भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब 2425
D.36 B पर आभासी आघूर्ण सहित कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब 2427
D.37 A पर आभासी आघूर्ण सहित कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब 2428
D.38 बिंदु भार के अधीन मूल कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2433
D.39 बिंदु भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2437
D.40 स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब 2438
D.41 कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब में आंतरिक बल 2443

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.42 स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2445
D.43 समान रूप से वितरित भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2450
D.44 स्व-भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब की तुलना . . 2451
D.45 समान रूप से वितरित भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब की तुलना 2451
D.46 Sap 2000—स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का आघूर्ण आरेख 2452
D.47 Sap 2000—स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का अक्षीय बल आरेख . . 2452
D.48 Sap 2000—स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का अपरूपण बल आरेख . 2452
D.49 स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब की तुलना 2452
D.50 विस्तार के 1/2 और 1/4 पर बिंदु भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब 2453

K.1 बटरवर्थ-निस्यंदित संकेतों के उदाहरण 2983
K.2 विभिन्न n के लिए बटरवर्थ निस्यंदकों की तुलना 2984

M.1 प्रायिकतामूलक विश्लेषण में समाविष्ट संकल्पनाओं का अंतर्संबंध (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) 3017
M.2 प्रतिदर्श समष्टि और परस्पर असंयुक्त घटनाओं की संकल्पना (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) 3018
M.3 तीन प्रयासों में 100 प्रतिदर्शों से प्राप्त आयतचित्रों की तुलना 3019
M.4 1,000 से 100,000 प्रतिदर्शों से प्राप्त आयतचित्रों की तुलना 3020
M.5 तीन सतत वितरण फलनों के उदाहरण 3020
M.6 PDF और CDF के बीच संबंध 3021
M.7 परिबद्ध PDF और CDF के बीच संबंध 3021
M.8 विश्वास अंतराल का चित्रण 3022
M.9 माध्य और माध्यिका का चित्रण 3023
M.10 मानक विचलन का चित्रण 3024
M.11 विषमता और शिखरता का चित्रण 3024
M.12 सहसंबंध गुणांकों का चित्रण 3025
M.13 विभिन्न प्रायिकता (और संचयी) वितरण फलनों की तुलना 3031
M.14 द्विचर प्रसामान्य वितरण 3032
M.15 द्विचर प्रसामान्य वितरण पर सहसंबंध ρ का प्रभाव 3032

N.1 विश्वसनीयता सूचकांक की परिभाषाएँ 3034
N.2 विश्वसनीयता सूचकांक β के पदों में विफलता-प्रायिकता 3036

O.1 सदिश रूपांतरण 3045
O.2 द्वितीय-कोटि प्रदिश की प्रमुख दिशाएँ 3047
O.3 अष्टफलकीय तल 3048
O.4 पृष्ठ बल 3049
O.5 कॉशी: चतुष्फलक से प्रतिबल 3050
O.6 प्रतिबल का ज्यामितीय निरूपण 3052
O.7 स्थिति और विस्थापन सदिश 3054

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

O.8 क्षेत्रफल dS से अभिवाह 3057
O.9 प्रतिबलों का संतुलन, कार्तीय निर्देशांक 3060
O.10 कमानियों पर हुक के व्याख्यान की पट्टिका 3062
O.11 परीक्षण नियंत्रण 3066
O.12 धातुओं और कंक्रीट के प्रतिबल-विकृति वक्र 3067
O.13 एकाक्षीय भारित कंक्रीट नमूनों में स्थानीयकरण का प्रायोगिक अभिलेखन 3068
O.14 हिलरबोर्ग का काल्पनिक दरार प्रतिरूप 3069
O.15 कंक्रीट विकृति-मृदुकरण प्रतिरूप 3070
O.16 टोंटी आरेख के घटक (Felippa, 2000) 3072
O.17 विरूपणीय पिंडों के यांत्रिकी का टोंटी आरेख 3073
O.18 प्रतिबलों के पदों में आंतरिक बल 3073

P.1 अनंत पट्टिका में दरार 3077
P.2 दरार विस्थापन की स्वतंत्र विधाएँ 3082
P.3 जल की गतिक क्रिया के कारण बाँध पर दाब (Westergaard, 1933) 3088
P.4 दाबों का सन्निकट वितरण (Westergaard, 1933) 3091
P.5 जल-पिंड जिसे बाँध के साथ गतिशील माना जा सकता है। (Westergaard, 1933) . . . 3094
P.6 प्रति इकाई क्षेत्रफल संकेंद्रित द्रव्यमान बनाम ऊँचाई 3095

Q.1 विश्वास-क्षेत्र कलनविधि 3099
Q.2 प्राचल-अभिज्ञान प्रक्रिया का प्रवाह-आरेख 3103
Q.3 क्षार-समुच्चय अभिक्रिया प्राचल-अभिज्ञान हेतु आलेखीय उपयोक्ता अंतरापृष्ठ (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) 3104

R.1 स्थिति सदिश $\mathbf{p}$ का अवकलन 3106
R.2 वक्र की वक्रता 3106
R.3 ठोस प्रदेश को पार करता सदिश क्षेत्र 3107
R.4 क्षेत्रफल dA से होकर अभिवाह 3108
R.5 अपसरण के मूल्यांकन हेतु अत्यल्प अवयव 3108
R.6 सदिश की प्रवणता 3113

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सारणी-सूची (I–IV)

3.1 मिस्र के दो प्रमुख गणितीय पपाइरसों के मुख्य आँकड़े . . . 29
3.2 सभ्यताओं की स्मारकीय वास्तुकला का तुलनात्मक वैषम्य . . . 32
3.3 तीन प्राचीन संस्कृतियों में मापन-प्रथा और ज्यामितीय केंद्र . . . 32
3.4 सभ्यताओं के प्रमुख संरचनात्मक नवाचारों की तुलनात्मक समयरेखा . . . 33
3.5 शास्त्रीय यूनानी दर्शन और विज्ञान की चयनित वर्गीकरण-पद्धतियाँ . . . 41

4.1 उल्लेखनीय गोथिक संरचनाएँ . . . 51
4.2 प्रमुख गोथिक गिरजाघरों के तुलनात्मक आयाम (Elizalde, 2025) . . . 52
4.3 प्रमुख कृतियों का कालानुक्रमिक सारांश . . . 83

5.1 वैज्ञानिक क्रांति का संकल्पनात्मक परिवर्तन . . . 95
5.2 प्रमुख कृतियों का कालानुक्रमिक सारांश . . . 98

6.1 लियोनार्दो दा विंची के कोडेक्स, (Vinci, 1938) . . . 118
6.2 गैलीलियो के संवादों और वार्ताओं के चार दिवस . . . 142
6.3 याकॉब और योहान बर्नूली के प्रमुख योगदान, जैसा उनकी *Opera Omnia* में प्रतिबिंबित है . . . 164
6.4 लियोनहार्ड ऑयलर की प्रमुख कृतियाँ . . . 171
6.5 आरंभिक आधुनिक वैज्ञानिकों द्वारा प्रयुक्त कूटलेखन-विधियों की तुलना . . . 195
6.6 वर्ण-विपर्यय, कूट और अन्य विधियाँ . . . 196
6.7 हुक के वर्ण-विपर्यय में उपलब्ध अक्षर . . . 197
6.8 बनाए जा सकने वाले सामान्य लैटिन शब्द . . . 197
6.9 उपलब्ध अक्षरों से संभव वैज्ञानिक पद . . . 198
6.10 अक्षर-प्रयोग का सत्यापन . . . 198
6.11 बर्नूली की इलासिटका शब्द-पहेली का विकूटन, (Alassi, 2020) . . . 198
6.12 न्यूटन के कूट का विश्लेषण . . . 199
6.13 पूर्ण अक्षर-आवृत्ति . . . 200
6.14 यांत्रिकी के विकास में प्रमुख बौद्धिक संघर्ष . . . 202
6.15 यूरोप और उसके बाहर की प्रमुख अभियांत्रिकी तथा तकनीकी संस्थाएँ (1740-1850) . . . 204
6.16 यांत्रिकी के प्रमुख योगदानकर्ताओं और उनके प्रभाव का सार . . . 206
6.17 संरचनात्मक यांत्रिकी के विकास में सीमाचिह्न प्रकाशन . . . 208
6.18 प्रमुख अभियांत्रिकी और तकनीकी संस्थाएँ (1740–1850) . . . 211
6.19 यांत्रिकी के विकास में प्रमुख बौद्धिक संघर्ष . . . 212
6.20 संरचनात्मक यांत्रिकी और ज्यामितीय विश्लेषण की पूर्ण ऐतिहासिक समयरेखा (1351–1879) 215

7.1 सामर्थ्य और आंतरिक प्रतिबल-वितरण के प्रमुख विकास . . . 244

8.1 बर्नूली के मूल और आधुनिक वक्रता-सूत्रों की तुलना . . . 258
8.2 वक्रता के विकास की प्रमुख उपलब्धियाँ . . . 260

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

8.3 वक्रता & इलास्टिका: प्रमुख घटनाएँ और पुस्तकें 263
8.4 ज्यामितीय अवधारणाओं से यांत्रिक अनुप्रयोगों तक 265

9.1 अवकलन & समाकलन के चिह्न 271
9.2 “Funicularia” परिवार के वक्रों की शब्दावली (Alassi, 2020 के अनुसार)। 276
9.3 कैटेनरी समाधान का कालानुक्रमिक विकास ((Alassi, 2020) पर आधारित) 277
9.4 इलास्टिका चुनौती की समयरेखा 290
9.5 समपरिमापी समस्याएँ बनाम विचरण-कलन 309
9.6 ऑयलर की नौ इलास्टिका प्रजातियाँ और उनके परिभाषी प्राचल 316
9.7 28 आकृतियों का 9 प्रजातियों में वितरण 317
9.8 ऑयलर की 28 आकृतियों का उनकी 9 इलास्टिका प्रजातियों से मानचित्रण 318
9.9 ऑयलर की इलास्टिका प्रजातियाँ: ज्यामितीय गुण और वक्र समीकरण 319
9.10 याकूब बर्नूली के अवकल कलन और प्रत्यास्थ समस्या संबंधी कार्य का प्रथम प्रकाशनों से मरणोपरांत पूर्णता तक कालानुक्रमिक विकास। 328
9.11 तुलनात्मक विश्लेषण: धरन सिद्धांत में बर्नूली 1728 बनाम ऑयलर 1732 के योगदान . 339
9.12 तीन महान चुनौतियों की एकीकृत कालानुक्रमिक समयरेखा: कैटेनरी, इलास्टिका और अज्ञात चुनौती 348
9.13 एकीकृत कालानुक्रमिक समयरेखा में संदर्भित प्रकाशन 350

10.1 प्रत्यास्थता के आणविक और संतति सिद्धांतों का अंतर, दो संतति सूत्रीकरणों सहित। . 357
10.4 यांत्रिक सिद्धांतों की तुलना: ऐतिहासिक और तकनीकी परिप्रेक्ष्य 389

11.1 संरचनात्मक विश्लेषण में योगदानकर्ता: एक कालानुक्रमिक सारांश 419

12.1 विभिन्न भौतिक समस्याओं का वर्गीकरण 448
12.2 संरचनात्मक विश्लेषण की अभिकलनीय विधियों के प्रमुख योगदानकर्ता 449

13.1 वैज्ञानिक और अभियांत्रिकी अभिकलन के प्रमुख मील के पत्थरों की समयरेखा 461

14.1 बल और आभासी सिद्धांतों का कालानुक्रमिक विकास। 530

15.1 विट्रुवियस, अल्बेर्ती और पल्लादियो के ग्रंथों की विषयवस्तु 545
15.2 पल्लादियो (1570) में पुलों के समानुपात, Huerta, 2018 के आधार पर 551
15.3 वास्तुकला और निर्माण में प्रयुक्त लंबाई तथा ढाल-मापन की ऐतिहासिक इकाइयाँ . . . 562
15.4 एकीकरण-पूर्व इतालवी राज्यों में *braccio* 564
15.5 रूप-निर्धारक 598
15.6 विट्रुवियस से बिलिंगटन तक वास्तुशिल्पीय सद्गुण 630
15.7 संरचनात्मक अभिकल्प दृष्टिकोणों का विकास 636

16.1 भूकंप और धार्मिक परंपराएँ: एक तुलनात्मक सारांश। 669
16.2 भूकंपों की धार्मिक व्याख्या में पुनरावर्ती अंतर-सांस्कृतिक अभिप्राय। ✓ = अभिप्राय प्रमाणित; × = अभिप्राय अनुपस्थित अथवा गौण। 671

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

18.1 तापीय प्रसार गुणांक 850

20.1 ट्रसों की स्थैतिक निर्धार्यता और स्थायित्व 888
20.2 ट्रसों के लिए प्रयोज्य संतुलन-समीकरण 888

22.1 संबंधों के दो समुच्चयों के बीच सादृश्य 959
22.2 संयुग्मी धरन के परिसीमा प्रतिबंध 959

25.1 बिंदु और एकसमान भारों के भार पद 1039

26.1 दृढता और लचीलापन विधियों की तुलना 1042
26.2 दृढता और लचीलापन विश्लेषणों की तुलना 1044
26.3 सरल भारों के लिए संधि समतुल्य बल 1047

29.1 स्तंभों के अनिवार्य और प्राकृतिक सीमा-प्रतिबंध 1093

33.1 प्रत्यास्थता और पट्टिका-बंकन के नियामक समीकरणों की तुलना (Pilkey and Wunderlich, 1994) 1240

34.1 पतले कवचों में समीकरणों और अज्ञातों का सारांश 1248
34.2 पतले कवचों के साम्य समीकरणों में अलग-अलग योगदान 1249
34.3 पतले कवचों के प्रमुख नियंत्रक समीकरणों का सारांश 1263
34.4 झिल्ली संरचनाओं की धारणाएँ और नियंत्रक समीकरण 1272
34.5 विभिन्न भारणों के अधीन झिल्ली प्रतिबल परिणामक वितरणों की तुलना 1276
34.6 समान भार के लिए झिल्ली और उथले कवच के हलों की तुलना 1290
34.7 कवच गुणांक (ϕ को शिखर से मापा गया है) 1296

36.1 विश्वसनीयता सूचकांक के लक्ष्य मान 1363

38.1 कूप उपतंत्र, अपरूपण भित्ति और ट्रसित अपरूपण भित्ति की तुलना 1432

40.1 स्थैतिक और गतिकीय अनिर्धार्यता की कोटियाँ 1490
40.2 आवश्यक और प्राकृतिक परिसीमा शर्तें 1491

43.1 रैखिक अवयवों के 3D रूपांतरण 1540

44.1 संरचनाओं का विविक्तीकरण 1548

45.1 कुप्रतिबद्ध आव्यूहों का प्रभाव 1577

46.1 स्थैतिकी आव्यूह के लिए आंतरिक अवयव बल की परिभाषा 1586
46.2 स्थैतिक निर्धार्यता और शुद्धगतिक अस्थिरता की शर्तें 1593

47.1 रैखिक प्रत्यास्थता में फलनक 1654
47.2 कुल स्थितिज ऊर्जा और Hu-Washizu सूत्रीकरणों की तुलना 1657

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

48.1 VW, CVW, PE और CPE के समीकरणों का सारांश 1674
48.2 आभासी कार्य और पूरक आभासी कार्य के सिद्धांतों के वैकल्पिक मार्ग 1675

49.1 बहुपदीय श्रेणी के पदों में आकार फलनों की व्याख्या (1d & 2d) 1710
49.2 विविध अवयव सूत्रीकरणों में बहुपदीय पद (1d & 2d) 1711
49.3 धरन अवयव के आकार फलनों के अभिलक्षण 1729
49.4 q8 अवयव के आकार फलन और प्राकृतिक अवकलज 1734
49.5 q9 अवयव के आसंधीय (प्राकृतिक) निर्देशांक 1735
49.6 परिवर्ती-आसंधि अवयवों के आकार फलन 1739
49.7 t6 अवयव के आकार फलन और अवकलज 1740

51.1 न्यूटन–कोट्स चतुर्थांश सूत्रों के भार 1767
51.2 $[-1,1]$ अंतराल पर गाउस–चतुर्थांश सूत्रों के समाकलन बिंदु और भार 1770
51.3 त्रिभुज पर संख्यात्मक समाकलन के निर्देशांक और भार 1772
51.4 द्विरेखीय चतुर्भुज आसंधियों के प्राकृतिक निर्देशांक 1773
51.5 चतुर्भुजीय अवयवों के लिए पूर्ण और अपचयित संख्यात्मक समाकलन 1779
51.6 द्विरेखीय और यथार्थ विस्थापन/विकृतियाँ 1781

53.1 विभिन्न विधियों के लिए स्थिरता दशाएँ 1820
53.2 विभिन्न वर्गों की संरचनाओं के प्रतिनिधि अवमंदन अनुपात 1834

54.1 संरचनात्मक विश्लेषण के स्तरों का सारणीकरण 1842
54.2 विश्लेषण के विभिन्न स्तरों का पारस्परिक सहसंबंध 1843

57.1 सीमांत भार विश्लेषण के शुद्धगतिक और स्थैतिक उपागमों की तुलना 1903
57.2 निचली सीमा विश्लेषण और पुशओवर विश्लेषण की तुलना 1927
57.3 संहत सुघट्यता और निचली सीमा विश्लेषण 1930

59.1 गणित की अर्ध-न्यूटन विधि और संरचनात्मक यांत्रिकी के अंतर्निहित विश्लेषण के बीच समानता 1946
59.2 न्यूटन–रैफसन विधि के रूपांतर 1949
59.3 अरैखिक विश्लेषण में भार-नियंत्रण कलनविधियों की तुलना 1953

61.1 बहुस्तरीय अवस्था निर्धारण 1989
61.2 नम्यता- तथा दृढता-आधारित अवयवों की तुलना 2020

62.1 परिरोधित बनाम अपरिरोधित कंक्रीट के प्रत्यास्थ और सामर्थ्य गुण 2051
62.2 स्पर्शरेखीय मापांक 2096

63.1 स्तंभ संयोजन 2124
63.2 संयोजन–अवयव संगतता 2124
63.3 प्रतिरूपण के “चुनें और जोड़ें” विकल्प 2128
63.4 ह्रास का परिमाणन 2130

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

63.5 सामग्री-गुण . . . 2132
63.6 अनुप्रस्थ काट का वर्गीकरण . . . 2132
63.7 विफलता-विधा कोड . . . 2133
63.8 स्तंभ ज्यामिति . . . 2133
63.9 परिरोध विवरण . . . 2134
63.10 परिरोध विवरण . . . 2134
63.11 आयताकार प्रबलित स्तंभों के परीक्षणों का सारांश (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) . . . 2135
63.12 30 प्रायोगिक परीक्षणों के अंशांकन अध्ययन के परिणाम (Haselton et al., 2008) . . . 2136

64.1 अनिश्चितता परिमाणन और अनिश्चितता विश्लेषण के लिए इस पुस्तक में अपनाई गई शब्दावली . . . 2144
64.2 Pearson सहसंबंध गुणांक के परिमाण के निदर्शी गुणात्मक वर्णक . . . 2146
64.3 MCS और LHS की तुलना . . . 2150
64.4 अनिश्चितता-प्रसारण और संवेदनशीलता विधियों की तुलना . . . 2166
64.5 संवेदनशीलता विश्लेषण और प्राचल अभिनिर्धारण की भिन्न किंतु पूरक भूमिकाएँ . . . 2172

65.1 `Log.xlsx` में प्रतिनिधि विन्यास प्रविष्टियाँ . . . 2196
65.2 प्राचल-अभिनिर्धारण कार्यक्रम के प्रमुख फलन . . . 2200
65.3 विस्तृत-पत्रक पाठक और समुच्चयन स्तर द्वारा प्रयुक्त निजी सहायक फलन . . . 2200
65.4 विन्यास संरचना `S` के प्रमुख क्षेत्र . . . 2201
65.5 `ParIdentification.m` में चयनित चालन-कालीन चर . . . 2201

67.1 Boore, Joyner, and Fumal, 1997 प्रतिरूप के अवधि-निर्भर गुणांक . . . 2216
67.2 स्थल वर्ग पर आधारित आकलित V_S . . . 2216

69.1 पुशओवर विश्लेषण और भूकंपीय विश्लेषण की तुलना . . . 2262
69.2 NJ पहुँच संरचनाओं का अभिकल्प अनुक्रिया वर्णक्रम . . . 2266
69.3 पुशओवर विश्लेषण के क्रमिक विश्लेषण . . . 2273
69.4 प्रबलन इस्पात छडों के प्रतिबल गुण (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1) . . . 2279
69.5 अक्षीय बलों के परास पर तीन भिन्न परिच्छेदों की आघूर्ण क्षमताएँ . . . 2287
69.6 विश्लेषण परिणाम; शून्य कब्जा . . . 2291
69.7 प्रथम कब्जा निर्माण की ओर ले जाने वाला अपरूपण समायोजन . . . 2292
69.8 विश्लेषण परिणाम; एक कब्जा . . . 2292
69.9 द्वितीय कब्जा निर्माण की ओर ले जाने वाला अपरूपण समायोजन . . . 2293
69.10 विश्लेषण परिणाम; दो कब्जे . . . 2294
69.11 तृतीय और चतुर्थ कब्जा निर्माण की ओर ले जाने वाला अपरूपण समायोजन . . . 2294
69.12 विफलता पर बलों, आघूर्णों और विस्थापनों का योग . . . 2295
69.13 भूकंपीय संरचनात्मक विश्लेषण विधियों की तुलना . . . 2305

70.1 ASCE 41-17 के अनुसार विभिन्न निष्पादन स्तरों हेतु अनुमत अंतर्मंजिला विस्थापन अनुपात (IDR) . . . 2322

70.2 क्षति सूचकांक देहलियाँ और संगत संरचनात्मक अवस्थाएँ . . . 2322
70.3 FEMA 356 के अनुसार माँग-क्षमता अनुपात (DCR) देहलियाँ . . . 2323

72.1 विभिन्न लक्षित भवन निष्पादन स्तरों के लिए संरचनात्मक और असंरचनात्मक घटकों की क्षति का परिसर (तालिका C1-2) (FEMA-356, 2000) . . . 2331
72.2 PBEE 1 और PBEE 2 की तुलना . . . 2336
72.3 सतत बनाम विविक्त भंगुरता निरूपणों की तुलना . . . 2343
72.4 निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) के ऐतिहासिक विकास के प्रमुख प्रलेख 2349

B.1 पदार्थों के इकाई भार . . . 2355
B.2 भवनों में औसत सकल स्थायी भार . . . 2356
B.3 भवन-पदार्थों के भार . . . 2362
B.4 न्यूनतम समान रूप से वितरित चल भार, (ICBO, 1994) . . . 2363
B.5 भूमि के ऊपर पवन वेग का परिवर्तन . . . 2363
B.6 पवन भार के लिए C_e गुणांक, (ICBO, 1994) . . . 2363
B.7 पवन-दाब गुणांक C_q, (ICBO, 1994) . . . 2364
B.8 पवन और भूकंप भार के महत्त्व गुणक, (ICBO, 1994) . . . 2364
B.9 सामान्य पवन-बल प्रतिरोधी भवन संरचनाओं के लिए सन्निकट अभिकल्प पवन-दाब p . 2365
B.10 विभिन्न भूकंपीय क्षेत्रों के लिए Z गुणक, UBC1994 . . . 2365
B.11 भूकंप भारण के लिए S स्थल गुणांक, (ICBO, 1994) . . . 2365
B.12 विभिन्न संरचनात्मक तंत्रों के लिए R_W की आंशिक सूची, (ICBO, 1994) . . . 2366

G.1 अलामिलो के नोडीय निर्देशांक (Pollalis, 1999) . . . 2498
G.2 अलामिलो के सदस्य-गुण (Pollalis, 1999) . . . 2499
G.3 अलामिलो के परिसीमा प्रतिबंध (Pollalis, 1999) . . . 2500
G.4 अलामिलो के भार-संयोजन (Pollalis, 1999) . . . 2501

L.1 रैखिक समीकरणों की समाधान विधियाँ . . . 2993
L.2 पूर्वानुबंधन: वाम और दक्षिण की तुलना . . . 3004
L.3 आव्यूह पूर्वानुबंधन और विचित्र मान अपघटन (SVD) की तुलना . . . 3006

N.1 इस्पात और कंक्रीट संरचनाओं के लिए चयनित मान . . . 3035
N.2 इस्पात और कंक्रीट संरचनाओं की विश्वसनीयता . . . 3036

O.1 संकेतन . . . 3040
O.2 विकृति निरूपण . . . 3053
O.3 संरचनात्मक विश्लेषण में सीमा प्रतिबंधों के उदाहरण . . . 3072

P.1 आवर्तकाल $T = \frac{4}{3}$ सेकंड के संगत संख्यात्मक परिणाम . . . 3089

R.1 गुणन तथा अवकलन संकारकों के बीच सादृश्य . . . 3105

सारणी सूची

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

लेखक-परिचय

Victor E. Saouma (विक्टर ई. साउमा) को अनुसंधान का 40 वर्षों से अधिक अनुभव है, जिसमें क्षार–सिलिका अभिक्रिया (Alkali Silica Reaction, ASR) और कंक्रीट के स्थायित्व पर व्यापक कार्य सम्मिलित है। उन्होंने संरचनात्मक विश्लेषण और यांत्रिकी में महत्त्वपूर्ण योगदान दिए हैं। उनके अनुसंधान से संबंधित दो पुस्तकों में Numerical Modeling of AAR और Aging, Shaking, and Cracking of Infrastructures: From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures सम्मिलित हैं; इनके अतिरिक्त उन्होंने अनेक तकनीकी प्रतिवेदन और समकक्ष-समीक्षित शोध-पत्र प्रकाशित किए हैं।

उन्होंने RILEM (International Meeting of Laboratories and Experts of Materials, Construction Systems, and Structures) के अंतर्गत एक अंतरराष्ट्रीय समिति की अध्यक्षता की, जिसका केंद्र ASR से प्रभावित संरचनाओं के निदान और पूर्वानुमान पर था। उन्होंने विश्व के अग्रणी शोधकर्ताओं के योगदानों से निर्मित एक व्यापक RILEM प्रतिवेदन का संपादन भी किया।

वे International Association of Fracture Mechanics for Concrete and Concrete Structures के पूर्व अध्यक्ष और फ़ेलो हैं। उन्होंने विशाल मेहराब बाँधों के अरैखिक गतिक विश्लेषण तथा भारी प्रबलित-कंक्रीट संरचनाओं से संबंधित प्रश्नों पर Tokyo Electric Power Company (TEPCO) को परामर्श दिया है, और EPRI के प्रतिवेदन *Structural Modeling of Nuclear Containment Structures* में योगदान किया है।

उनकी अनुसंधान-अभिरुचियों में सैद्धांतिक, संख्यात्मक और प्रायोगिक विभंग यांत्रिकी; कंक्रीट में क्लोराइड का विसरण; तथा बाँधों का अपकेंद्रित्र परीक्षण भी सम्मिलित हैं। उन्होंने रीयल-टाइम हाइब्रिड सिमुलेशन पर एक ग्रंथ का संपादन भी किया है, जो संरचनात्मक परीक्षण की एक महत्त्वपूर्ण प्रायोगिक तकनीक है। उनके कार्य को Nuclear Regulatory Commission, Oak Ridge National Laboratory, Bureau of Reclamation, Tokyo Electric Power Company और Swiss Federal Office of Energy से वित्तीय सहायता प्राप्त हुई है। उनके अंतरराष्ट्रीय सहयोग फ़्रांस, स्पेन, स्विट्ज़रलैंड, इटली और जापान तक विस्तृत हैं।

वर्ष 2019 से वे नाभिकीय सुरक्षा संबंधी विषयों पर C-10 Research and Education Foundation के लिए *pro bono* तकनीकी सलाहकार के रूप में कार्य कर रहे हैं। इसमें नाभिकीय प्रतिष्ठानों में कंक्रीट के क्षय के विषय में U.S. Nuclear Regulatory Commission के समक्ष विशेषज्ञ साक्षी के रूप में कार्य करना भी सम्मिलित है। इस कार्य ने तकनीकी विश्लेषण, नियामक निर्णय-निर्माण और सार्वजनिक सुरक्षा के अंतर्संबंध पर विशिष्ट अंतर्दृष्टियाँ प्रदान की हैं।

सिविल अभियांत्रिकी में प्रशिक्षित साउमा ने रैखिक और अरैखिक संरचनात्मक विश्लेषण तथा प्रबलित

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

एवं उन्नत प्रबलित-कंक्रीट अभिकल्प पढ़ाया है, जिससे वे अभियांत्रिकी की चुनौतियों पर एक व्यापक दृष्टिकोण प्रस्तुत करते हैं।

Victor E. Saouma की अन्य पुस्तकें

1. Saouma, V.E. and Hariri-Ardebili, M. (2020) Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Strutures, Springer-Nature.
2. Saouma, V.E. (Ed.) (2020) Diagnosis & Prognosis of AAR Affected Structures, Springer-Nature.
3. Saouma, V.E. (2013) Numerical Modeling of AAR, 320 pages, Taylor& Francis;
4. Saouma, V. E. and Sivaselvan, M. (Eds) (2008) Hybrid Simulation: Theory, Implementation and Applications

5. Saouma, V.E. Structural Analyis Lecture Notes (1764 pages)
6. Saouma, V. E. Fracture Mechanics (Unpublished, 1186 pages)

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

खण्ड I

यांत्रिकी एवं संरचनात्मक विश्लेषण की ऐतिहासिक नींव

अनुवाद प्रगति पर

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मैंने जिन पुस्तकों का अध्ययन किया है, उनमें से अधिकांश में संरचनात्मक विश्लेषण के इतिहास का कोई सारभूत विवेचन स्पष्ट रूप से अनुपस्थित है—अधिकांश पुस्तकें अधिक-से-अधिक केवल अत्यंत संक्षिप्त अवलोकन प्रस्तुत करती हैं।

इस विषय की व्यापक समझ चाहने वालों के लिए कुछ शास्त्रीय संदर्भ प्रामाणिक और विस्तृत विवेचन उपलब्ध कराते हैं। इस पूरे खंड में उनका उल्लेख किया गया है और आगे के अध्ययन के लिए उनकी अनुशंसा की गई है।

इतिहासकार न होकर—बल्कि संरचनात्मक विश्लेषण का प्राध्यापक होते हुए—मैंने इस पुस्तक में कुछ साहस और निर्भीकता के साथ विषय की ऐतिहासिक नींवों में प्रवेश करने का निर्णय लिया है।

मैं पूर्णतः स्वीकार करता हूँ कि पाठकों का केवल एक छोटा अंश ही इसे संपूर्ण रूप से पढ़ेगा। फिर भी मुझे आशा है कि अनेक पाठक अपनी रुचि के विषयों का चयनात्मक अन्वेषण उपयोगी पाएँगे और विशेष रूप से विद्यार्थी इस सामग्री को अधिक गहन अनुसंधान के प्रस्थान-बिंदु के रूप में उपयोग कर सकेंगे।

यदि कोई अनजानी त्रुटि अथवा चूक दिखाई दे, तो मैं आपकी उदार समझ की अपेक्षा करता हूँ।

लेखकत्व और कृत्रिम बुद्धिमत्ता के उपकरणों के उपयोग संबंधी स्पष्टीकरण

इस पुस्तक की मूल पांडुलिपि ChatGPT और इसी प्रकार के विशाल भाषा मॉडल के आगमन से पहले लिखी गई थी। इसकी संपूर्ण बौद्धिक सामग्री—जिसमें संरचना, तर्क, ऐतिहासिक विश्लेषण और तकनीकी विकास सम्मिलित हैं—मेरा अपना कार्य है।

बाद में मैंने लेखन को परिष्कृत करने, स्पष्टता बढ़ाने और कुछ प्रसंगों में अतिरिक्त संदर्भ सुझाने के लिए ChatGPT का उपयोग संपादकीय उपकरण के रूप में किया है। जहाँ स्पष्ट रूप से अन्यथा संकेत नहीं किया गया है, वहाँ कोई भी वैचारिक, विश्लेषणात्मक अथवा व्याख्यात्मक सामग्री ChatGPT द्वारा उत्पन्न नहीं की गई है।

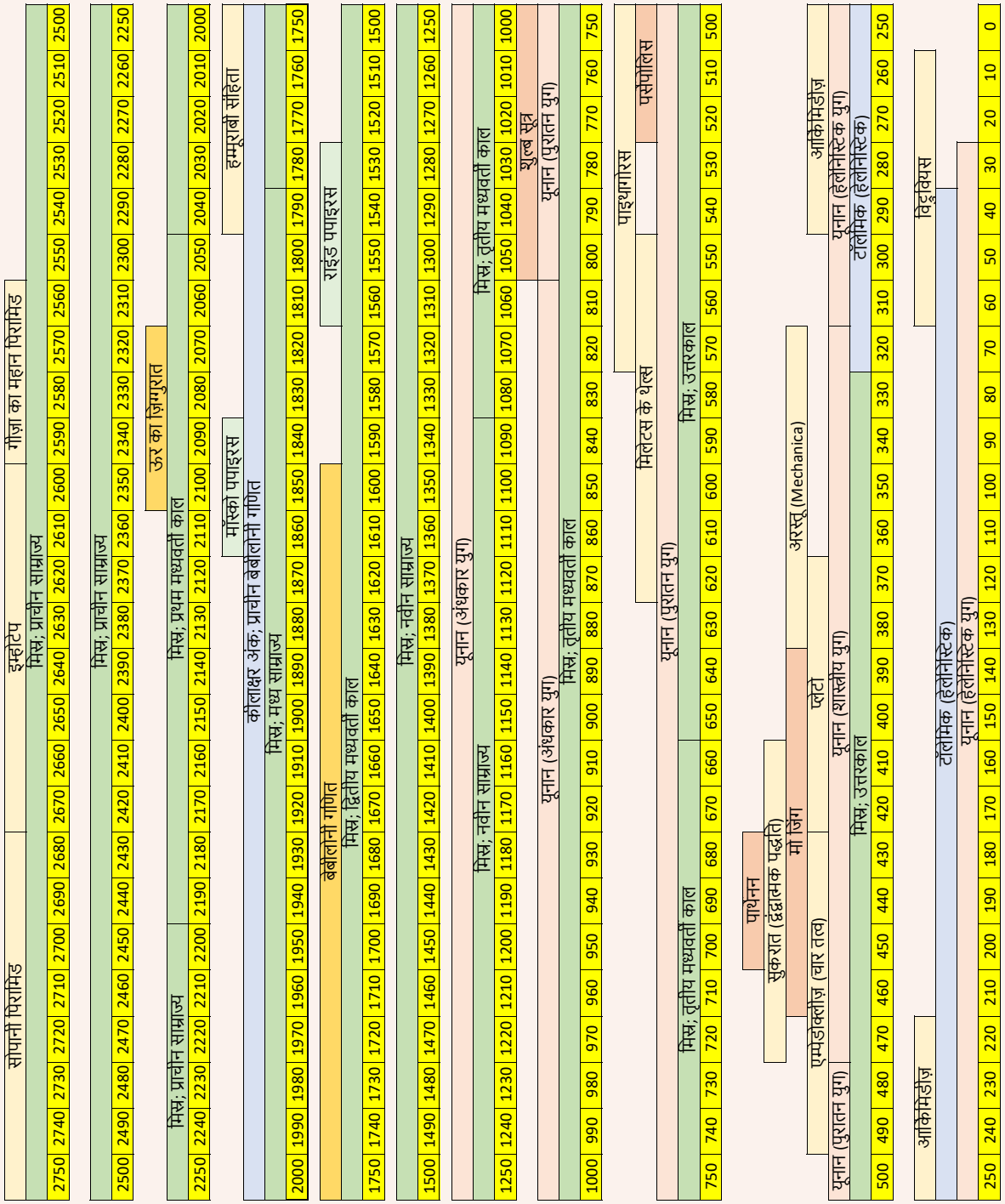
यदि किसी अंश का प्रारूप ChatGPT की पर्याप्त सहायता से तैयार किया गया हो और बाद में मेरे द्वारा उसकी समीक्षा तथा स्वीकृति दी गई हो, तो उसे स्पष्ट रूप से इस प्रकार चिह्नित किया जाएगा। अन्य सभी सारभूत योगदान पूर्णतः मेरे अपने हैं।

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कालरेखा; ईसा-पूर्व

टिप्पणी: तिथियाँ अनुमानित हैं; यह कालरेखा सर्वसमावेशी नहीं है, बल्कि सदियों के दौरान निर्माण, वास्तुकला, विज्ञान और अभियांत्रिकी का दृश्य अवलोकन प्रस्तुत करती है।



समीक्षा प्रति

कालरेखा; ईस्वी

टिप्पणी: दर्शाई गई सभी तिथियाँ अनुमानित हैं और यह कालरेखा किसी भी प्रकार से सर्वसमावेशी नहीं है। इसका उद्देश्य केवल सदियों के दौरान निर्माण, वास्तुकला, विज्ञान और अभियांत्रिकी के क्रमिक विकास का दृश्य निरूपण प्रस्तुत करना है।

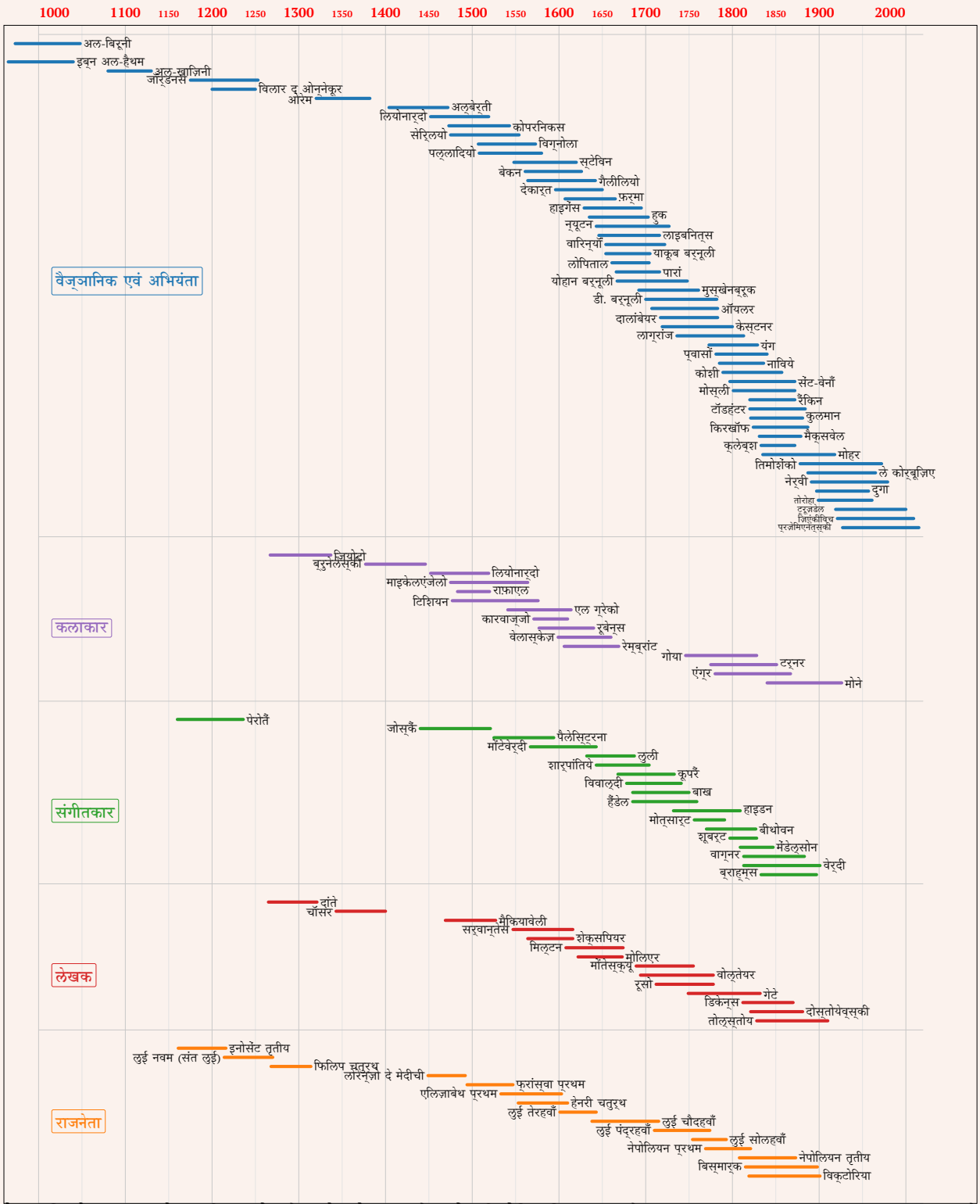
प्रारूप संस्करण

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



वैज्ञानिकों, कलाकारों, संगीतकारों, लेखकों और राजनेताओं की ऐतिहासिक कालरेखा, 1000–2020। Truesdell, 1968 से अनुकूलित और विस्तारित। पहली पंक्ति में सूचीबद्ध सभी वैज्ञानिकों पर इस अध्याय में चर्चा की गई है; शेष व्यक्तियों को व्यापक सांस्कृतिक और ऐतिहासिक संदर्भ प्रदान करने के लिए सम्मिलित किया गया है।

1 परिचय

सारांश

यह परिचयात्मक अध्याय संरचनात्मक विश्लेषण (structural analysis) की प्रायः उपेक्षित ऐतिहासिक नींवों पर विचार करता है और उनकी सतत प्रासंगिकता के पक्ष में तर्क प्रस्तुत करता है। यह पाठक को पहले ही सचेत करता है कि संरचनात्मक विश्लेषण के इतिहास पर केंद्रित यह प्रथम खंड कठोर कालानुक्रमिक आख्यान का अनुसरण नहीं करेगा, बल्कि एक विविधतापूर्ण, विषयगत संरचना अपनाएगा—जिसमें आगे के अध्यायों में अधिक विस्तार से विकसित व्यक्तिगत टिप्पणियाँ भी अंतर्गुंथित होंगी।

संदर्भ प्रदान करने के लिए यह अध्याय विषयगत और ऐतिहासिक—दोनों दृष्टियों से—समग्र परिदृश्य की रूपरेखा भी प्रस्तुत करता है और प्राचीन काल के अनुभववाद से आधुनिक संगणकीय यांत्रिकी (computational mechanics) के उद्भव तक के विकासक्रम का अनुसरण करता है।

अधिक गहन अध्ययन में रुचि रखने वाले पाठकों के लिए संदर्भों का एक सुविचारित चयन सम्मिलित किया गया है। इस प्रकार यह एक व्यक्तिगत यात्रा भी है और संरचनात्मक विश्लेषण को केवल तकनीकी क्षेत्र न मानकर सदियों के बौद्धिक विकास से निर्मित अनुशासन के रूप में देखने का आमंत्रण भी।

1.1 संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहास की प्रासंगिकता 7
1.2 दृष्टिकोण और अभिप्राय 8
1.3 समग्र परिदृश्य 8
1.3.1 विषयगत दृष्टि से 8
1.3.2 ऐतिहासिक दृष्टि से 9
1.4 विद्वत्तापूर्ण संदर्भ 10

1.1 संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहास की प्रासंगिकता

यदि हम किसी अभियंता से उन समीकरणों की उत्पत्ति के बारे में पूछें जिनका वह नियमित रूप से उपयोग करता है, तो उत्तर संभवतः निराशाजनक होगा:

> यदि हम किसी अभियंता से उन समीकरणों की उत्पत्ति के बारे में पूछें जिनका वह निरंतर उपयोग करता है, तो उत्तर निराशाजनक होगा। वे अस्तित्व में हैं; इसके अतिरिक्त कुछ भी महत्त्वपूर्ण नहीं है। उनकी व्युत्पत्ति के विषय में जिज्ञासा क्यों हो? अभियंताओं को अपने विषय की पृष्ठभूमि में रुचि नहीं होती।
>
> (Benvenuto, 1991b, pg. 543)

परंतु शायद कुछ लोगों को इसमें रुचि होनी चाहिए। मेरी जानकारी के अनुसार, संरचनात्मक विश्लेषण की कोई भी "आधुनिक" पाठ्यपुस्तक बेनवेनुतो (Benvenuto) द्वारा उठाए गए प्रश्न पर विचार करने का प्रयास नहीं करती[1]। यह विशेष रूप से चिंताजनक है, क्योंकि बहुत कम व्यवसाय अपने बौद्धिक इतिहास को संरचनात्मक अभियांत्रिकी जितना पीछे तक खोज सकते हैं। उससे परिचित होना, संभवतः एक विनम्र अर्थ में, हमें कुछ अधिक "सभ्य" बना सकता है।

निम्नलिखित टिप्पणी इस बात को और पुष्ट करती है

[1]संभवतः इसका एकमात्र अपवाद संरचनात्मक विश्लेषण पर मेरी स्नातक-स्तरीय पाठ्यपुस्तक है, जिसमें ऐतिहासिक संदर्भ के लिए कुछ पृष्ठ अवश्य समर्पित किए गए थे (Kinney, 1957, pp. 1–19)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> यह अत्यंत महत्त्वपूर्ण है कि जो विद्यार्थी गहन गणितीय अंतर्दृष्टि प्राप्त करना चाहते हैं, वे आरंभ से ही मूल विकासक्रमों का प्रत्यक्ष अध्ययन करने की आदत डालें—कम-से-कम उन स्थितियों में जहाँ मूल विवेचन सीधे हैं और ऐसी भाषा में उपलब्ध हैं जो अत्यधिक कठिनाई उत्पन्न नहीं करती।
>
> (Miller, 1916)

यही भावना अभियांत्रिकी के विद्यार्थियों पर भी लागू होती है, और प्रस्तुत अध्याय उन्हीं विद्यार्थियों के लिए अभिप्रेत है।

आरंभ में मेरा उद्देश्य संरचनात्मक विश्लेषण के विकास का संक्षिप्त अवलोकन प्रस्तुत करना था। किंतु जब मैंने यह कार्य आरंभ किया, तो मैं इसमें क्रमशः अधिक तल्लीन होता गया—विशेषकर इसलिए कि अनेक अन्य लोगों की तरह मैं भी COVID-19 लॉकडाउन के दौरान घर तक सीमित था। इस प्रकार यह प्रथम अध्याय लगभग छह महीनों के रुक-रुक कर किए गए प्रयास का परिणाम है, जिसे शैक्षणिक उद्देश्य जितना ही जिज्ञासा और आनंद ने भी प्रेरित किया।

1.2 दृष्टिकोण और अभिप्राय

आगे प्रस्तुत सामग्री अंततः व्यवस्थित इतिहास की अपेक्षा व्यक्तिगत चिंतन अधिक है। यह न तो सर्वांगीण है, न विशेष रूप से कठोर अथवा विद्वत्तापूर्ण। इसके स्थान पर यह परस्पर शिथिल रूप से जुड़े विषयों का संग्रह है—कभी-कभी कोलाज के अधिक निकट—जिनमें कुछ का अध्ययन अन्य की तुलना में अधिक गहराई से किया गया है और जो मेसोपोटामिया से परिमित तत्त्व विधि (finite element method) तक का मार्ग रेखांकित करते हैं।

प्रस्तुति जानबूझकर विविधतापूर्ण, अरेखीय और कभी-कभी प्रत्यक्षतः अनियमित है। कुछ विषय असंगत अथवा अनुचित स्थान पर प्रतीत हो सकते हैं; अन्य विषय अपने समावेश या उन पर दिए गए बल के संबंध में असहमति को आमंत्रित कर सकते हैं। इन्हें एकसूत्र में बाँधने वाला तथ्य यह है कि प्रत्येक ने किसी न किसी समय मेरी जिज्ञासा जगाई और मुझे टिप्पणियाँ लिखने के लिए प्रेरित किया।

समय की सीमाओं के कारण मैंने कभी-कभी प्राथमिक और द्वितीयक स्रोतों से—पूर्ण अभिस्वीकृति के साथ—प्रत्यक्ष उद्धरण दिए हैं और चुने हुए विचारों को स्पष्ट करने में सहायता के लिए अनेक चित्र पुनः बनाए हैं।

अंततः, पादटिप्पणियों में मैंने कुछ व्यक्तिगत टिप्पणियों की भी स्वतंत्रता ली है। इनमें इस बात पर विचार किया गया है कि कुछ विषय समय के साथ किस प्रकार विकसित हुए—अथवा विकसित होने में विफल रहे—और ऐतिहासिक घटनाक्रमों को समकालीन दृष्टिकोणों के आलोक में देखा गया है।

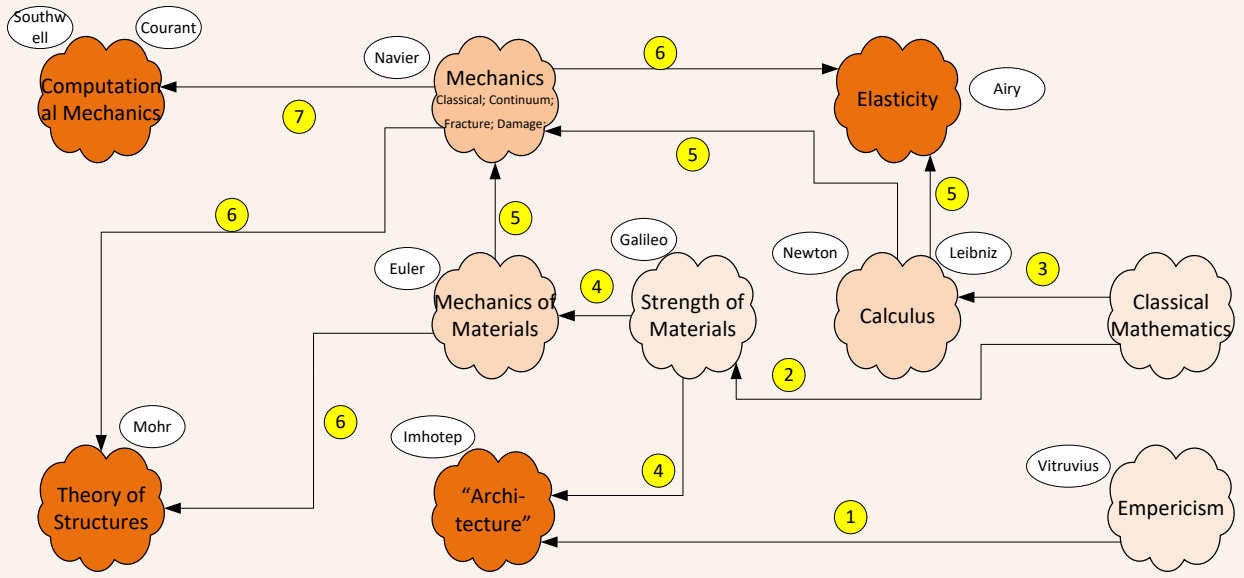
1.3 समग्र परिदृश्य

1.3.1 विषयगत दृष्टि से

चित्र 1.1 इस दीर्घ ऐतिहासिक यात्रा का मार्ग-मानचित्र प्रस्तुत करता है। विभिन्न अनुशासनों के बीच अंतर्संबंध (जो स्वयं भी असंदिग्ध रूप से परिभाषित नहीं हैं) कुछ सीमा तक मनमाने हैं। ध्यान दें कि मैंने वास्तुकला को भी सम्मिलित किया है, क्योंकि अनेक सदियों तक वास्तुकार वास्तव में संरचनाओं के आयाम निर्धारित करते रहे थे और अनेक दृष्टियों से उनका व्यवसाय संरचनात्मक विश्लेषण से घनिष्ठ रूप से अंतर्गुंथित है।

1. औपचारिक अभिकल्प विधियों के अस्तित्व में आने से बहुत पहले, सदियों तक संरचनाओं की परिकल्पना अनुभवजन्य व्यावहारिक नियमों के आधार पर की जाती थी—गोथिक गिरजाघरों को स्मरण करें। इन आरंभिक प्रथाओं को प्राचीन रोम में विट्रुवियस (Vitruvius) ने पहली बार संहिताबद्ध किया।
2. अंततः कलन-पूर्व गणित का उद्भव हुआ, जिसने सामग्री-सामर्थ्य (strength of materials) की आधारभूमि तैयार की। यह सावधानी से अभिकल्पित प्रयोगों के प्रेक्षणों पर आधारित अर्ध-अनुभवजन्य विषय था।

प्रारूप समीक्षा



चित्र 1.1: संरचनात्मक अभियांत्रिकी का मार्ग-मानचित्र

3. इसके शीघ्र बाद 17वीं शताब्दी के उत्तरार्ध में न्यूटन (Newton) और लाइबनिट्स (Leibniz) द्वारा स्वतंत्र रूप से कलन का औपचारिक विकास हुआ। इसने गति और परिवर्तन का वर्णन करने के लिए एक शक्तिशाली गणितीय भाषा प्रदान की।
4. अर्ध-अनुभवजन्य सामग्री-सामर्थ्य अधिक कठोर सामग्री यांत्रिकी (mechanics of materials) के रूप में परिपक्व हुआ; साथ ही पहली बार वास्तुकला को व्यावहारिक अनुमानी नियमों से पृथक किया गया।
5. सामग्री यांत्रिकी आगे विकसित होकर सामान्य यांत्रिकी बनी। कलन और अवकल समीकरणों से समर्थित इस विकास ने मनमाने भारों और गतियों के अधीन पिंडों का अध्ययन संभव बनाया।
6. संरचना सिद्धांत का विकास यांत्रिकी और सामग्री यांत्रिकी की प्रगति से हुआ; उसी समय प्रत्यास्थता सिद्धांत का विकास यांत्रिकी और कलन से हुआ।
7. अंततः, इन विभिन्न शाखाओं से संगणकीय यांत्रिकी विकसित हुई, जिसमें विश्लेषणात्मक रूप से दुरूह समस्याओं को हल करने के लिए संख्यात्मक विधियों और यांत्रिकी का संयोजन किया गया।

1.3.2 ऐतिहासिक दृष्टि से

(Renn, Damerow, and McLaughlin, 2002 PDF) से आधार लेते हुए, यांत्रिकी के दीर्घकालीन इतिहास को (पुनः मनमाने ढंग से) कम-से-कम आठ कालखंडों में विभाजित किया जा सकता है[2]:

प्रभात: उस विस्तृत काल को सूचित करता है जिसमें मानव समाजों ने अनुभव और मौखिक संप्रेषण के माध्यम से व्यावहारिक यांत्रिक ज्ञान संचित किया, किंतु उसे लिखित रूप में अंकित नहीं किया और न ही औपचारिक सैद्धांतिक रूपरेखाएँ विकसित कीं। गणित और खगोल-विज्ञान जैसे अनुशासनों की उत्पत्ति बेबीलोनिया और मिस्र की प्राचीन नगरीय सभ्यताओं तक खोजी जा सकती है, किंतु आश्चर्यजनक रूप से यांत्रिकी के विषय में ऐसा नहीं है। यद्यपि प्रचुर प्रमाण इन सभ्यताओं की विराट निर्माण उपलब्धियों की पुष्टि करते हैं, फिर भी कोई उपलब्ध दस्तावेज उस यांत्रिक ज्ञान का प्रत्यक्ष वर्णन नहीं करता जो इन प्रयासों का आधार अवश्य रहा होगा।

[2] ध्यान दें कि मैंने भारत-चीन के योगदानों को छोड़ दिया है और अरब योगदानों को भी केवल परोक्ष रूप से संबोधित किया है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

गोधूलि: यूनानी-रोमन काल को समेटता है, जिसमें उत्तोलक के नियम का सूत्रीकरण और यांत्रिकी तथा प्राकृतिक दर्शन को समर्पित प्रथम लिखित ग्रंथों का उद्भव हुआ। यह युग विशेष रूप से अरस्तू (Aristotle), यूक्लिड (Euclid) और आर्किमिडीज़ (Archimedes) जैसी विभूतियों से संबद्ध है, जिनकी कृतियों ने बाद के बौद्धिक विकास को गहराई से प्रभावित किया। विशेषकर अरस्तूवादी भौतिकी ने सदियों तक प्रमुख वैचारिक रूपरेखा प्रदान की। रोमनों ने सैद्धांतिक यांत्रिकी में बहुत कम योगदान दिया, किंतु व्यावहारिक अभियंताओं के रूप में वे उत्कृष्ट थे। विट्रुवियस के लेखन का वैज्ञानिक विस्तार सीमित था, फिर भी वास्तुशिल्प सिद्धांत और व्यवहार पर उसका स्थायी प्रभाव पड़ा।

इतना अंधकारमय नहीं मध्ययुग: अरब विद्वानों के महत्त्वपूर्ण योगदानों को रेखांकित करता है, जिन्होंने ऐसे समय में यूनानी यांत्रिक ग्रंथों को संरक्षित, अनूदित और विस्तारित किया जब यह ज्ञान लैटिन पश्चिम में बड़े पैमाने पर लुप्त हो चुका था। रिक्त काल होने से बहुत दूर, इस अवधि में यांत्रिक विचारों का परिष्कार, वेधशालाओं और संस्थानों की स्थापना तथा जल-घड़ियों और स्वचालित यंत्रों जैसे उपकरणों का विकास हुआ। उनके कार्य ने शास्त्रीय प्राचीनता और यूरोपीय पुनर्जागरण के बीच एक अनिवार्य सेतु निर्मित किया।

सूर्योदय, पुनर्जागरण: पश्चिमी यूरोप में वैज्ञानिक और संरचनात्मक अन्वेषण के पुनर्जागरण को चिह्नित करता है। इस काल को संरचनात्मक अभिकल्प के दो शास्त्रीय प्रकरण-अध्ययनों और वास्तुशिल्प एवं अभियांत्रिकी चिंतन को गहराई से आकार देने वाले चार मौलिक ग्रंथों की संक्षिप्त समीक्षा के माध्यम से स्पष्ट किया जाएगा।

वैज्ञानिक पद्धति: पश्चिम में अरस्तूवादी सिद्धांत के सदियों लंबे अनुसरण के बाद फ्रांसिस बेकन (Francis Bacon) ने प्रेक्षण और प्रयोग के समर्थन द्वारा अनुभवजन्य विज्ञान की नींव रखी और एक निर्णायक परिवर्तन आरंभ किया। प्रायोगिक यांत्रिकी पर उनके प्रभाव को बढ़ा-चढ़ाकर नहीं कहा जा सकता, और उनकी विरासत गैलीलियो गैलिली (Galileo Galilei) जैसे आरंभिक साधकों में मूर्त होती है, जिन्होंने भौतिक समस्याओं पर व्यवस्थित प्रयोग लागू किए।

संस्थापक पुरुष: आइज़क न्यूटन (Isaac Newton) और रॉबर्ट हुक (Robert Hooke) के योगदान आधुनिक यांत्रिकी के विकास के लिए इतने आधारभूत थे कि वे एक पृथक श्रेणी के अधिकारी हैं। उनके कार्य ने शास्त्रीय यांत्रिकी को परिभाषित करने वाले गणितीय नियम और अनुभवजन्य आधार स्थापित किए।

उद्भव: विश्लेषणात्मक यांत्रिकी: गणित और यांत्रिकी के कठोर एकीकरण से अभिलक्षित है, विशेषतः फ्रांसीसी और स्विस विद्वानों के कार्य में। इस काल में द'अलाम्बेयर (d'Alembert), लाग्रांज (Lagrange) और ऑयलर (Euler) के सिद्धांतों जैसे सिद्धांतों का सूत्रीकरण हुआ, जिन्होंने यांत्रिक तंत्रों के लिए एकीकृत विश्लेषणात्मक रूपरेखा प्रदान की।

संरचनात्मक विश्लेषण का उद्भव: इस चरण तक आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण के लिए आवश्यक सभी मूलभूत अवधारणाएँ स्थापित हो चुकी थीं। शेष कार्य कुछ प्रमुख व्यक्तियों द्वारा उन कार्यविधियों का व्यवस्थित विकास करना था जो संरचनात्मक विश्लेषण को आज ज्ञात अनुशासन के रूप में औपचारिक स्वरूप देतीं।

यद्यपि यह यांत्रिकी और संरचनात्मक अभियांत्रिकी के ऐतिहासिक विकास का एक तार्किक परिसीमन है, फिर भी यह इस खंड की अध्याय-संरचना से सहज रूप से मेल नहीं खाता, क्योंकि वह ऐतिहासिक क्रम और विषयगत संगठन के संयोजन द्वारा निर्देशित है।

1.4 विद्वत्तापूर्ण संदर्भ

कुछ ही पाठक संभवतः इन पुस्तकों की दुर्जेय और भयप्रद गहराइयों में उतरने का साहस करेंगे; अनेक अन्य ऐसे अधिक सीधे दृष्टिकोण को पसंद करेंगे जो सैद्धांतिक चर्चाओं के समानांतर चले।

- टॉडहंटर और (जिनके द्वारा कार्य पूर्ण किया गया) पियर्सन (1893), *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials* (Todhunter and Pearson, 1893 PDF)। संभवतः गैलीलियो से आरंभ होने वाला सबसे व्यापक और प्रामाणिक विवेचन। दोनों गणितज्ञ थे। एक विराट कृति। मुख्यतः प्रत्यास्थता में रुचि रखने वालों के लिए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- टिमोशेंको की (1953) *History of Strength of Materials* (Timoshenko, 1953)। अंततः संरचनात्मक विश्लेषण में मुख्य रुचि रखने वालों के लिए।
- ट्रूज़्डेल की (1968) *Essays in the History of Mechanics*, (Truesdell, 1968)। यह पिछली पुस्तकों की तरह ऐतिहासिक, विहंगम प्रस्तुति नहीं, बल्कि उन विशिष्ट विषयों पर केंद्रित आठ निबंध हैं जिन्होंने ट्रूज़्डेल की रुचि जगाई (वे प्रत्यास्थता को अनुप्रयुक्त गणित मानते थे)।
- ट्रूज़्डेल की *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies*, ऑयलर की संपूर्ण कृतियों के खंड X और XI की 432 पृष्ठों की भूमिका, (Truesdell, 1960)।
- Dugas, 1988, *History of Mechanics*। प्राचीन काल से 20वीं शताब्दी के आरंभ तक यांत्रिक चिंतन के विकास का अनुसरण करने वाला व्यापक और विद्वत्तापूर्ण विवरण, जिसमें वैचारिक और गणितीय—दोनों प्रकार के विकास पर विस्तार से ध्यान दिया गया है।
- बेनवेनुतो (1991), *An Introduction to the History of Structural Mechanics* (Benvenuto, 1991a) और (Benvenuto, 1991b)। दो खंडों की अत्यंत संक्षिप्त पुस्तक। गोथिक मेहराबों और गुंबदों का व्यापक विवेचन।
- हेमन (1998), *Structural analysis; A historical approach* (Heyman, 1998a)।
- ह्यूरूटा, संपादक (2005), *Essays in the history of the theory of structures: In honour of Jacques Heyman*।
- कुररर (2008), *The History of the Theory of Structures (Kurrer, 2008)। यांत्रिकी की अपेक्षा संरचनात्मक विश्लेषण पर बल देने वाली एक उत्कृष्ट और अत्यंत पठनीय पुस्तक।*

इस खंड की तैयारी में ऐतिहासिक दस्तावेजों का व्यापक अध्ययन सम्मिलित था। इनमें से अनेक इतने पुराने हैं कि HathiTrust Digital Library के माध्यम से डिजिटल रूप में निःशुल्क उपलब्ध हैं, अथवा मेरे संस्थान द्वारा प्रदान की जाने वाली अंतर-पुस्तकालय ऋण सेवाओं से प्राप्त किए जा सकते हैं।

इन आवश्यक कृतियों के अतिरिक्त, मुझे संरचनात्मक यांत्रिकी का ऐसा कोई अन्य ऐतिहासिक विवेचन नहीं मिला जो इस सूची में सम्मिलित किए जाने योग्य पर्याप्त व्यापक अथवा अंतर्दृष्टिपूर्ण हो। यह अभाव स्वयं उल्लेखनीय है: मेसोपोटामिया के ज़िगुरातों से लेकर आज के महानगरों की अतिऊँची मीनारों तक मानव सभ्यता के निर्मित परिवेश को आकार देने वाले अनुशासन—संरचनात्मक अभियांत्रिकी—का इतिहास इतिहासकारों द्वारा आश्चर्यजनक रूप से उपेक्षित रहा है।

तकनीकी प्रशिक्षण प्राप्त पाठक टिमोशेंको की ओर आकृष्ट होता है; गणितीय अभिरुचि वाला ट्रूज़्डेल की ओर; और वास्तुशिल्प में जिज्ञासु बेनवेनुतो तथा हेमन की ओर। फिर भी ये सभी कृतियाँ, अपनी उत्कृष्टता के बावजूद, उस विद्यार्थी अथवा कार्यरत अभियंता को संबोधित नहीं करतीं जो सर्वांगीण विद्वत्ता नहीं, बल्कि एक सुलभ आख्यान चाहता है—यह कथा कि हमारे दैनिक उपकरण किस प्रकार अस्तित्व में आए, और ऐसी शैली में कही गई कथा जो भयभीत करने के स्थान पर विषय को आलोकित करे।

प्रस्तुत खंड इस रिक्ति को भरने का एक संकोची प्रयास है; इसका उद्देश्य संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहास को अभियंताओं की नई पीढ़ी के समक्ष मूर्त रूप में लाना है, जो अन्यथा उन बौद्धिक संघर्षों, निष्फल आरंभों, अंतर्दृष्टि की कौंधों और ज्ञान के धैर्यपूर्ण संचय के विषय में बहुत कम जान सकती है जिन्होंने उनके व्यवसाय को संभव बनाया। यह मौलिक ऐतिहासिक शोध की कृति नहीं है; मैं अभियंता हूँ, इतिहासकार नहीं, और मैंने ऊपर उद्धृत स्रोतों पर व्यापक रूप से आश्रय लिया है। किंतु मैंने उनके विवरणों को ऐसे आख्यान में बुनने का प्रयास किया है जो अभियंताओं से अभियंताओं की भाषा में बात करे—ऐतिहासिक विकास को हमारे द्वारा हल किए जाने वाले समीकरणों, हमारे द्वारा चलाए जाने वाले सॉफ़्टवेयर और हमारे द्वारा अभिकल्पित संरचनाओं से जोड़े।

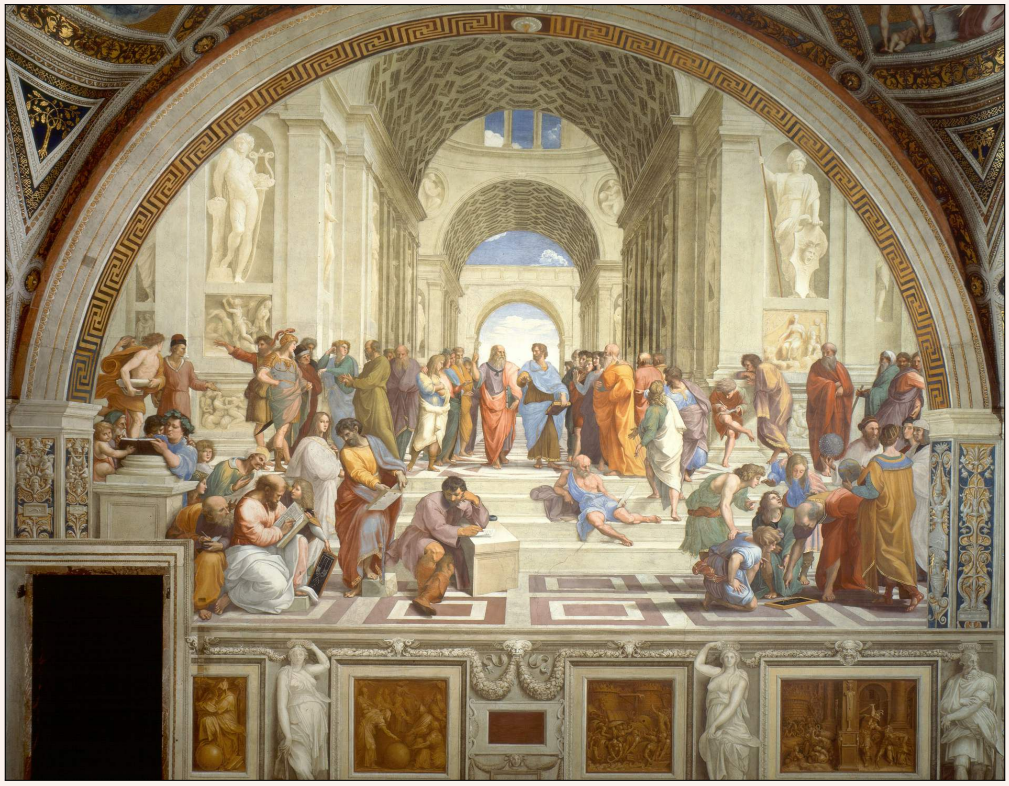
यदि ये पृष्ठ किसी युवा अभियंता में उन महापुरुषों के प्रति सम्मान जगाएँ जिनके कंधों पर हम सभी खड़े हैं—यदि वे एक भी पाठक को गैलीलियो की *Discorsi* खोजने, ऑयलर के गणित के साहस पर विस्मित होने, अथवा किसी परिमित तत्त्व जाल में कुलमन की आलेखीय स्थैतिकी की दूरस्थ प्रतिध्वनि पहचानने के लिए प्रेरित करें—तो लेखक अपने परिश्रम को सार्थक मानेगा।

इस खंड की तैयारी में ऐतिहासिक दस्तावेजों का व्यापक अध्ययन सम्मिलित था। इनमें से अनेक इतने पुराने हैं कि HathiTrust

प्रारूप समीक्षा

Digital Library के माध्यम से डिजिटल रूप में निःशुल्क उपलब्ध हैं, अथवा मेरे संस्थान द्वारा प्रदान की जाने वाली अंतर-पुस्तकालय ऋण सेवाओं से प्राप्त किए जा सकते हैं।

अंततः, संपूर्ण ग्रंथ I (इतिहास) में मैंने सभी संदर्भों के लिए जानबूझकर प्राथमिक स्रोतों पर निर्भरता रखी है—इनमें से अनेक को पाठक उद्धरण के बाद दिखाई देने वाले लाल चिह्न पर क्लिक करके डाउनलोड कर सकता है—और पूर्ण समझ के लिए जहाँ वे वास्तव में आवश्यक थे, केवल वहीं द्वितीयक स्रोतों का उपयोग किया है। ध्यान दें कि जहाँ भी संभव हुआ है, सभी दस्तावेजों को OCR द्वारा संसाधित किया गया है और उनकी फाइलों का आकार संपीडित किया गया है।



राफेल, द स्कूल ऑफ एथेंस (1509-1511)[a]

प्राचीन दार्शनिकों और गणितज्ञों का वह समागम, जिनके विचारों ने वह नींव निर्मित की जिस पर बाद का समस्त संरचनात्मक ज्ञान खडा हुआ। प्रमुख व्यक्तियों की पहचान के लिए §3.2.3 देखें।

[a]इस ग्रंथ का प्रत्येक अध्याय एक कलाकृति के साथ समाप्त होता है, जिसका चयन पूर्ववर्ती सामग्री से उसकी—यद्यपि कभी-कभी स्वीकारतः क्षीण—विषयगत अनुगूँज के कारण किया गया है। पाठक से अनुरोध है कि वह इन चयनों को उदार दृष्टि से देखे; प्रस्तुत संबंधों को कभी-कभी कुछ कल्पनाशील लचीलेपन की आवश्यकता हो सकती है।

समीक्षा प्रति

2 संरचनाओं से पहले: संख्याएँ और अक्षर

सारांश

यह अध्याय उन दो समानांतर आधारों का अनुसरण करता है जिन पर विज्ञान, अभियांत्रिकी और वास्तुकला का निर्माण हुआ: संख्या-पद्धतियों का विकास और लेखन का आविष्कार। प्रथम भाग में यह देखा गया है कि सुमेरी, बेबीलोनी, मिस्री, यूनानी, इस्लामी और यूरोपीय प्राचीन सभ्यताओं ने गणित को संभव बनाने वाले संख्यात्मक साधन किस प्रकार विकसित किए—मेसोपोटामिया की द्वादशाधारी (duodecimal) और षष्ट्याधारी (sexagesimal) पद्धतियों से लेकर भारत की स्थान-मानीय दशमलव पद्धति और डिजिटल युग के द्विआधारी अंकगणित तक। यह आख्यान कोण-मापन, समय-मापन, अपरिमेय संख्याओं और स्वर्ण अनुपात जैसी अवधारणाओं के विकास का अनुसरण करता है। द्वितीय भाग लेखन की समानांतर कथा की ओर मुड़ता है: आरंभिक मिट्टी के गणना-चिह्नों और गणना-छड़ियों से, सुमेर की कीलाक्षर लिपि तथा मिस्र की चित्रलिपि से होते हुए, फोनीशियनों के निर्णायक योगदान—वर्णमाला के आविष्कार—और यूनान तथा रोम के माध्यम से आधुनिक विश्व तक उसके प्रसार की कथा। संख्याएँ और अक्षर मिलकर वे दो साधन हैं जिनके बिना न वैज्ञानिक तर्क संभव होता, न मानव ज्ञान का संचित अभिलेख।

2.1 संख्याएँ 13
2.1.1 षष्ट्याधारी और द्वादशाधारी पद्धतियाँ 13
2.1.2 कोण 15
2.1.3 समय 15
2.1.4 दशमलव पद्धति और हिंदू-अरबी अंक 16
2.1.5 π का इतिहास 16
2.1.6 अपरिमेय संख्याएँ और स्वर्ण अनुपात 17
2.2 अक्षर: लेखन-पद्धतियों का इतिहास . . . 18
2.2.1 आरंभिक अभिलेख: गणना-चिह्न, गणना-छड़ियाँ और मिट्टी 18
2.2.2 कीलाक्षर: विश्व की प्रथम लेखन-पद्धति 19
2.2.3 मिस्री चित्रलिपि और चित्रात्मक परंपरा 19
2.2.4 फोनीशियन और वर्णमाला का आविष्कार 21

2.1 संख्याएँ

2.1.1 षष्ट्याधारी और द्वादशाधारी पद्धतियाँ

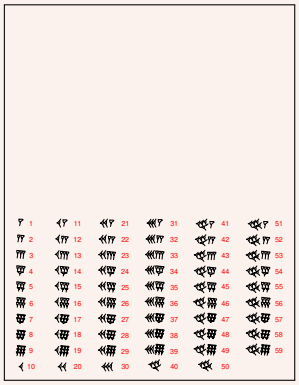
कांस्य युग के कुछ ही समय बाद, प्राचीन मिस्र के साथ अभिलिखित आरंभिक सभ्यताओं में से एक सुमेर, फरात और दजला नदियों से घिरे मेसोपोटामिया क्षेत्र में उभरा। लगभग 5500 से 4000 BC के बीच यहाँ स्थायी बस्तियाँ स्थापित हुईं (Mieroop, 2024)। अंततः सुमेर का स्थान बेबीलोनी साम्राज्य (लगभग 1895–539 BC) ने लिया, जिसने सुमेरी संस्कृति के अनेक पक्षों को ग्रहण किया और आगे विकसित किया। सुमेरियों के सबसे चिरस्थायी योगदानों में सबसे पुरानी ज्ञात लेखन-पद्धति—कीलाक्षर लिपि—का विकास था, जिसमें मिट्टी की पट्टिकाओं पर दबाए गए पच्चराकार चिह्न प्रयुक्त होते थे।

आधुनिक अध्ययनों में ऐसी पट्टिकाओं की पहचान प्रायः उस संग्रह के नाम से की जाती है जिसमें वे रखी गई हैं। उदाहरणार्थ, प्लिम्पटन 322 कोलंबिया विश्वविद्यालय के प्लिम्पटन संग्रह का भाग है, जबकि येल बेबीलोनियन कलेक्शन 7289 येल बेबीलोनियन कलेक्शन में संरक्षित है (Robson, 2001)। पकी हुई मिट्टी के उल्लेखनीय संरक्षण-गुणों के कारण आज सुमेरी और बेबीलोनी गणित के विषय में प्राचीन मिस्र के गणित की तुलना में कहीं अधिक जानकारी उपलब्ध है; मिस्री गणित का अधिकांश भाग अधिक नाशवान पैपाइरस पर अंकित था।

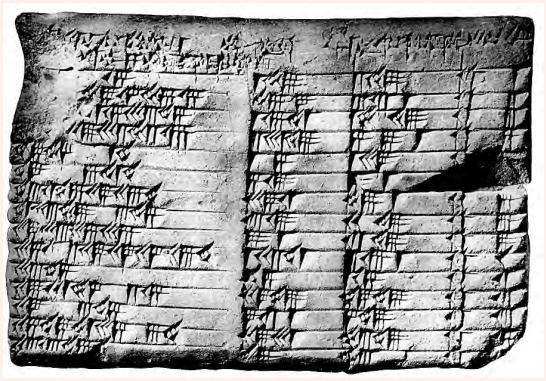
सुमेरियों और बेबीलोनियों ने द्वादशाधारी (आधार 12) तथा षष्ट्याधारी (आधार 60) संख्या-पद्धतियों का उपयोग किया, जैसा चित्र 2.1a में दर्शाया गया है। उनका पंचांग वर्ष 360 दिनों का था, जो संभवतः खगोलीय और ज्यामितीय तर्क को प्रतिबिंबित करता था। आरंभ में उनके पास शून्य का कोई चिह्न नहीं था, यद्यपि बाद में उन्होंने रिक्त स्थान सूचित करने वाला एक चिह्न

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विकसित किया—जो आधुनिक गणितीय अर्थ में वास्तविक शून्य नहीं था। अपने अंकगणितीय नियमों वाली संख्या के रूप में शून्य की अवधारणा को 628 CE में भारतीय गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त ने औपचारिक रूप दिया; वहाँ से यह इस्लामी जगत और अंततः मध्यकालीन यूरोप पहुँची (Kaplan, 2000)।



(a) बेबीलोनी कीलाक्षर अंक



(b) प्लिम्पटन 322, कोलंबिया विश्वविद्यालय

चित्र 2.1: बेबीलोनी गणित

यह रोचक है कि सुमेरी आज की सामान्य पद्धति की तरह दस उँगलियों पर नहीं गिनते थे। इसके स्थान पर वे एक हाथ की चार उँगलियों की बारह अस्थियों (प्रत्येक उँगली की तीन अस्थियाँ) का उपयोग करते और अँगूठे से क्रमशः प्रत्येक अस्थि को छूते थे। इससे वे एक हाथ पर 12 तक गिन सकते थे। दूसरे हाथ से आवृत्तियों की संख्या रखते हुए वे कुल 60 तक—पाँच उँगलियों में बारह-बारह इकाइयाँ—गिन सकते थे (Maor, 2001)।

60 का चयन मनमाना नहीं था। इसे आज *श्रेष्ठ उच्च भाज्य संख्या* (superior highly composite number) कहा जाता है, अर्थात इसके भाजक किसी भी छोटी धनात्मक पूर्ण संख्या से अधिक हैं: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 और 60। महत्त्वपूर्ण रूप से, यह प्रथम तीन अभाज्य संख्याओं (2, 3 और 5) से विभाज्य है, जिससे भिन्नों का निरूपण बहुत सरल हो जाता है। इसके विपरीत, भिन्न-संकेतन के बिना दशमलव पद्धति केवल 2 और 5 से सरल विभाजन की सुविधा देती है। व्यापारिक संदर्भ में ऐसी विभाज्यता ने संभवतः वाणिज्य और लेखांकन के व्यावहारिक अंकगणित को सुगम बनाया (Neugebauer, 1969; Menninger, 2013)।

ऐतिहासिक रूप से द्वादशाधारी पद्धति बेबीलोनियों और बाद में यूनानियों के बीच उपयोग में बनी रही, जिसका एक कारण 2, 3 और 4 से उसकी सुविधाजनक विभाज्यता थी। खगोलीय प्रेक्षणों—विशेषतः एक वर्ष में लगभग बारह चंद्र चक्र होने—से भी उसका स्थायित्व सुदृढ हुआ (Maor, 2001)।

सबसे प्रसिद्ध कीलाक्षर पुरावशेषों में प्लिम्पटन 322 (चित्र 2.1b), जिसका समय लगभग 1800 BCE माना जाता है, यह संकेत देती है कि बेबीलोनी विद्वान पाइथागोरस के समय से बहुत पहले समकोण त्रिभुजों के गुणों से परिचित थे। पट्टिका में पूर्णांकों के पंद्रह समुच्चय (a, b, c) हैं जो संबंध $a^2 + b^2 = c^2$ को संतुष्ट करते हैं—इन्हें अब पाइथागोरीय त्रिक कहा जाता है। कभी कुछ विद्वानों ने इन्हें अमूर्त अभ्यासों का समुच्चय मानकर उपेक्षित किया था, किंतु आधुनिक व्याख्याएँ बताती हैं कि यह पट्टिका संख्यात्मक संबंधों की परिष्कृत समझ को प्रतिबिंबित करती है (Robson, 2001)।

एक अन्य उल्लेखनीय पुरावशेष, येल बेबीलोनियन कलेक्शन (YBC) 7289, में आश्चर्यजनक रूप से सटीक षष्ट्याधारी सन्निकटन $\sqrt{2}$ का है—जो लगभग छह दशमलव स्थानों (1.414214) तक सही है (Robson, 2002)।

वैज्ञानिक दृष्टि से बेबीलोनी गणित और खगोल-विज्ञान में अपने योगदानों के लिए सर्वाधिक प्रसिद्ध हैं। इसके विपरीत उनकी अभियांत्रिकी उपलब्धियाँ—सिंचाई जैसे क्षेत्रों में उल्लेखनीय होते हुए भी—यूनानियों या रोमनों जैसी बाद की सभ्यताओं की तुलना में अपेक्षाकृत सीमित थीं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2.1.2 कोण

बेबीलोनी रात्रि-आकाश के उत्सुक प्रेक्षक भी थे और खगोलीय स्थितियों का आलेखन करने के लिए उन्होंने निर्देश-तंत्र का एक आरंभिक रूप विकसित किया। लगभग पाँचवीं शताब्दी BCE में उन्होंने खगोलीय प्रयोजनों के लिए राशि-चक्र को निर्देशांक पद्धति के रूप में प्रस्तुत किया। यह पद्धति उनके षष्ट्याधारी आधार का स्वाभाविक विस्तार थी और संभवतः उनके ज्यामितीय प्रेक्षणों से प्रभावित थी—जैसे यह तथ्य कि नियमित षट्भुज का परिमाप उसके परिवृत्त की त्रिज्या का छह गुना होता है। 360-अंश के वृत्त का विकास संभवतः उनके पंचांग (360 दिन), ज्यामितीय विचारों और खगोलीय प्रेक्षणों सहित अनेक प्रभावों से हुआ, यद्यपि उसकी यथार्थ उत्पत्ति आज भी विद्वत्तापूर्ण विवाद का विषय है (Toomer, 1998)।

मिस्री ढाल निर्धारित कर सकते थे—संभवतः ग्रोमा जैसे उपकरणों की सहायता से—परंतु गणितीय अर्थ में कोण की अमूर्त अवधारणा उनसे अज्ञात प्रतीत होती है। कोण-मापन के औपचारिकीकरण से यूनानी अधिक स्पष्ट रूप से संबद्ध हैं। मिलेटस के थेल्स (c. 624–c. 545 BCE) को यह सिद्ध करने का श्रेय दिया जाता है कि किसी त्रिभुज के कोणों का योग 180 अंश होता है। उल्लेखनीय है कि उन्होंने पौराणिक व्याख्याओं से हटकर यह प्रस्ताव भी रखा कि पृथ्वी जल पर तैरती है और भूकंप तरंग-सदृश गति से उत्पन्न होते हैं—यद्यपि उनका तर्क आधुनिक प्लेट विवर्तनिकी की समझ पर आधारित न होकर दार्शनिक था (Boyer and Merzbach, 2011)।

कोणीय मापन से संबंधित एक प्रमुख प्रगति सामोस के अरिस्टार्कस (c. 310–c. 230 BCE) ने की, जिन्होंने सूर्य के कोणीय व्यास का अनुमान लगभग दो अंश लगाया। उन्हें सौरमंडल का सूर्यकेंद्रीय प्रतिरूप प्रस्तावित करने वाला प्रथम व्यक्ति भी माना जाता है (Evans, 1998)।

हिप्पार्कस (c. 190–120 BCE), जिन्हें प्रायः त्रिकोणमिति का जनक माना जाता है, को वृत्त को 360 अंशों में विभाजित करने का श्रेय दिया जाता है। लगभग दो शताब्दियों बाद रोमन मिस्र में कार्यरत टॉलेमी (c. 100–c. 170 CE) ने प्रत्येक अंश को 60 समान भागों में और प्रत्येक भाग को आगे 60 छोटे भागों में विभाजित करके इस पद्धति का विस्तार किया। मध्यकालीन लैटिन में उनकी यूनानी कृतियों का अनुवाद होने पर इन उपविभागों को *partes minutiae primae* (प्रथम छोटे भाग) और *partes minutiae secundae* (द्वितीय छोटे भाग) कहा गया—आधुनिक *minutes* और *seconds* शब्दों की व्युत्पत्तिगत उत्पत्ति यही है (Neugebauer, 2012)।

2.1.3 समय

जिस प्रकार बेबीलोनी द्वादशाधारी और षष्ट्याधारी संख्या-पद्धतियों का उपयोग करते थे, उसी प्रकार प्राचीन मिस्रियों ने भी द्वादशाधारी रूपरेखा अपनाई। जैसा पहले कहा गया, 12 एक श्रेष्ठ उच्च भाज्य संख्या है और भिन्नात्मक विभाजन में व्यावहारिक लाभ देती है। फलतः जब दिन को छोटी इकाइयों में विभाजित करने का समय आया, तो मिस्रियों ने स्वाभाविक रूप से उसे बारह-बारह “घंटों” के दो समूहों में बाँटा—एक दिन के प्रकाश के लिए और दूसरा रात्रि के लिए। किंतु इन आरंभिक घंटों की अवधि निश्चित नहीं थी; दिन और रात की सापेक्ष अवधि के अनुसार वे ऋतुओं के साथ बदलते थे (Clagett, 1995)।

हिप्पार्कस (ऊपर देखें) ने दिन को 24 समान घंटों में विभाजित करने का प्रस्ताव देकर व्यवस्था स्थापित की। विषुवों में दिन के प्रकाश और अंधकार के समान विभाजन पर आधारित यह पद्धति विषुवतीय घंटों के नाम से जानी गई (Evans, 1998)।

षष्ट्याधारी पद्धति द्वारा घंटे का छोटी इकाइयों में उपविभाजन आरंभिक इस्लामी स्वर्ण युग तक नहीं हुआ। लगभग 1000 CE में बहुविद् अल-बिरूनी ने बेबीलोनी विधियों का उपयोग करके घंटे को 60 मिनट और फिर प्रत्येक मिनट को 60 सेकंड में विभाजित किया (Kennedy, 1971)। बाद में मध्यकालीन पेरिस में लगभग 1235 CE में सैक्रोबोस्को के जॉन ने यह पद्धति अपनाई—अल-बिरूनी के दो शताब्दियों से अधिक समय बाद (Grant, 1977)।

इस प्रकार समय की आधुनिक अवधारणा दो प्राचीन संख्यात्मक परंपराओं का संश्लेषण है: मिस्री द्वादशाधारी संरचना और बेबीलोनी षष्ट्याधारी पद्धति।

पुरुष पुरातन समकृषिकास

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2.1.4 दशमलव पद्धति और हिंदू-अरबी अंक

उँगलियों पर गिनना संख्या-पद्धतियों की संभवतः सबसे सहज उत्पत्ति है और दस अंकों पर आधारित दशमलव पद्धति वास्तव में यूनानियों, मिस्रियों और रोमनों सहित अनेक प्राचीन सभ्यताओं द्वारा प्रयुक्त थी। इनमें विशेष रूप से रोमन प्रशासन और अभियांत्रिकी के प्रति अपने व्यावहारिक दृष्टिकोण के लिए जाने जाते थे।

किंतु निर्णायक चरण केवल दस के आधार पर गिनना नहीं था, बल्कि ऐसी *स्थान-मानीय* संकेतन-पद्धति विकसित करना था जिसमें अंक का मान संख्या के भीतर उसके स्थान पर निर्भर हो—और जिसमें शून्य केवल रिक्त स्थान का सूचक न होकर स्वयं एक संख्या के रूप में कार्य करे। यह निर्णायक उपलब्धि भारत में प्राप्त हुई। 628 CE में लिखने वाले गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त शून्य और ऋणात्मक संख्याओं के अंकगणितीय नियम सूत्रबद्ध करने वाले प्रथम व्यक्ति थे (Kaplan, 2000)। परिणामी स्थान-मानीय दशमलव पद्धति अल-ख़्वारिज़्मी की कृति के माध्यम से इस्लामी जगत पहुँची। उनके ग्रंथ *Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala* (c. 825 CE) ने न केवल हिंदू-अरबी अंकों को लोकप्रिय बनाया, बल्कि *algebra* शब्द को भी जन्म दिया। पीसा के लियोनार्डो—जो फिबोनाची के नाम से अधिक प्रसिद्ध हैं—ने अपनी *Liber Abaci* (1202 CE) के माध्यम से इस पद्धति को मध्यकालीन यूरोप में प्रस्तुत किया। उसमें उन्होंने व्यापारिक अंकगणित के लिए रोमन अंकों की तुलना में हिंदू-अरबी अंकन की व्यावहारिक श्रेष्ठता प्रदर्शित की (Devlin, 2011)।

फ्रांसीसी क्रांति तक दशमलव पद्धति के विषय में जोड़ने को बहुत कम है; उस समय क्रांतिकारी उत्साह समय के मापन तक फैल गया। जीवन के सभी पक्षों पर तार्किक व्यवस्था लागू करने के प्रयास में फ्रांसीसी क्रांतिकारियों ने दशमलव-आधारित समय-मापन पद्धति प्रस्तुत की: 10 घंटों का एक दिन, प्रत्येक घंटे में 100 मिनट और प्रत्येक मिनट में 100 सेकंड। 1793 (गणतांत्रिक पंचांग का वर्ष II) में घोषित और 1794 से अनिवार्य यह पद्धति—गणितीय रूप से सुरुचिपूर्ण होते हुए भी—अव्यावहारिक सिद्ध हुई और शीघ्र ही त्याग दी गई (Richards, 1998)।

फ्रांसीसी गणतांत्रिक पंचांग की स्थापना के साथ सुधार और आगे बढ़ा। इसमें वर्ष को दस-दस दिनों वाले तीन सप्ताहों के बारह महीनों (*décades*) में बाँटा गया। 365 अथवा 366 दिनों का वर्ष पूर्ण करने के लिए वर्ष के अंत में पाँच या छह अतिरिक्त अवकाश—*jours complémentaires*—जोड़े गए (Gleick, 2016)।

यद्यपि दशमलव समय-मापन स्थायी नहीं रहा, उस काल का एक अन्य नवाचार—मेट्रिक पद्धति—स्थायी सिद्ध हुआ। अंततः वह *Système international d'unités* (SI), में विकसित हुई, जिसे अब अंतरराष्ट्रीय भार एवं माप ब्यूरो द्वारा अनुरक्षित किया जाता है और विज्ञान तथा अभियांत्रिकी में व्यापक रूप से अपनाया गया है।

द्विआधारी पद्धति (आधार 2) की गणितीय जड़ें सत्रहवीं शताब्दी के लाइबनिट्स तक खोजी जा सकती हैं। वे स्वयं प्राचीन चीनी *I Ching* से आंशिक रूप से प्रेरित थे; इसकी खंडित और अखंड रेखाओं की षट्-रेखीय पद्धति में लाइबनिट्स ने द्विआधारी तर्क का मूर्त रूप पहचाना (Davis, 2018)। आज द्विआधारी पद्धति डिजिटल युग का आधार है। संरचनात्मक अभियंता प्रायः अवचेतन रूप से प्रतिदिन उस पर निर्भर रहते हैं—चाहे दस्तावेज तैयार कर रहे हों, विश्लेषण कर रहे हों अथवा कंप्यूटर पर अनुरूपण चला रहे हों।

2.1.5 π का इतिहास

अभियांत्रिकी में सर्वत्र उपस्थित गणितीय नियतांकों में, π—वृत्त की परिधि और उसके व्यास का अनुपात—संभवतः सबसे सार्वभौमिक रूप से पाया जाता है। इसका दशमलव प्रसार,

$$\pi = 3.14159265358979\ldots,$$

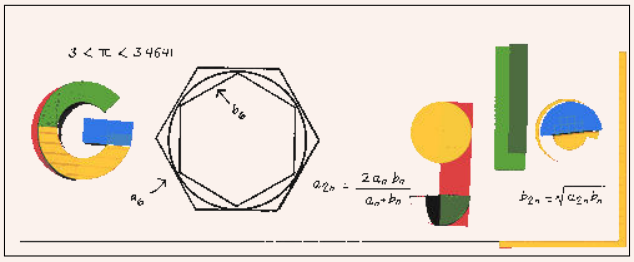
अपरिमेय (इसे दो पूर्णांकों के अनुपात के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता) और बीजातीत (यह परिमेय गुणांकों वाले किसी बहुपद समीकरण को संतुष्ट नहीं करता)—दोनों है। ये गुण उन्नीसवीं शताब्दी तक औपचारिक रूप से स्थापित नहीं हुए थे।

π के सन्निकटन की व्यावहारिक आवश्यकता प्राचीन है। बेबीलोनियों ने $3\frac{1}{8} = 3.125$ मान का उपयोग किया, जबकि रिंड पैपाइरस (c. 1650 BCE) से $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3.1605$ के मिस्री सन्निकटन का संकेत मिलता है। इसका प्रथम कठोर गणितीय निरूपण

आर्किमिडीज़ (c. 287–212 BCE) ने किया। उन्होंने वृत्त के भीतर और बाहर नियमित बहुभुज बनाकर π की सीमाएँ निर्धारित कीं (चित्र 2.2)। 96-भुजीय बहुभुजों का उपयोग करके उन्होंने स्थापित किया:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

जो अपने समय के लिए उल्लेखनीय रूप से परिशुद्ध परिणाम था। यह बहुभुजीय विधि लगभग दो सहस्राब्दियों तक प्रमुख संगणकीय दृष्टिकोण बनी रही।



चित्र 2.2: Google का Doodle, π दिवस (3/14/26) पर; आर्किमिडीज़ को श्रद्धांजलि

भारतीय गणितीय परंपरा से महत्त्वपूर्ण प्रगतियाँ हुईं। आर्यभट (476–550 AD) ने $\pi \approx 3.1416$ दिया और बाद में केरल संप्रदाय के माधव (c. 1340–1425) ने वह श्रेणी व्युत्पन्न की जिसे अब लाइबनिट्स–ग्रेगरी श्रेणी कहा जाता है:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

इस प्रकार उन्होंने यूरोपीय गणितज्ञों को बाद में दिए गए परिणामों का दो शताब्दी पहले ही पूर्वानुमान कर लिया था। सत्रहवीं शताब्दी में कलन के विकास ने पूर्णतः नए मार्ग खोले: न्यूटन ने द्विपद श्रेणी प्रसार का उपयोग करके π की गणना सोलह दशमलव स्थानों तक की और टिप्पणी की कि इस गणना पर इतना समय लगाने का उन्हें “गर्व नहीं” था।

π चिह्न स्वयं वेल्श गणितज्ञ विलियम जोन्स ने 1706 में प्रस्तुत किया और 1737 से ऑयलर ने उसे लोकप्रिय बनाया—वही ऑयलर जिनकी सर्वसमिका $e^{i\pi} + 1 = 0$ §2.1.6 में दी गई है। π के अपरिमेय होने का प्रमाण लैम्बर्ट ने 1768 में दिया और लिंडेमान ने 1882 में इसकी बीजातीतता स्थापित की। इससे *वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर वर्ग की रचना* का प्राचीन प्रश्न अंततः सुलझ गया—अर्थात केवल परकार और सीधी पटरी से किसी दिए गए वृत्त के समान क्षेत्रफल वाले वर्ग की रचना असंभव है।

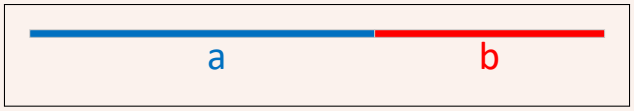
2.1.6 अपरिमेय संख्याएँ और स्वर्ण अनुपात

अभियंताओं के जीवन में अपरिमेय संख्याएँ सर्वत्र उपस्थित हैं—विशेष रूप से π और e जैसे नियतांकों के माध्यम से। ये दोनों बीजातीत संख्याएँ उस समीकरण में प्रसिद्ध रूप से परस्पर जुड़ी हैं जिसे प्रायः गणित का सबसे सुंदर समीकरण कहा गया है: ऑयलर की सर्वसमिका,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

सुरुचिपूर्ण होते हुए भी इस सर्वसमिका के संरचनात्मक विश्लेषण में प्रत्यक्ष अनुप्रयोग बहुत कम हैं—ऑयलर के कुंचन भारों के सूत्र का उल्लेखनीय अपवाद छोड़कर। वास्तुशिल्प अभिकल्प के संदर्भ में (यद्यपि यांत्रिकी में नहीं) तथाकथित *स्वर्ण अनुपात* अधिक प्रासंगिक है।

यूक्लिड (c. 330 BCE) ने *The Elements*, के ग्रंथ VI में किसी रेखा के चरम और मध्यम अनुपात में विभाजन को इस प्रकार परिभाषित किया: किसी रेखा को चरम और मध्यम अनुपात में विभाजित तब कहा जाता है जब संपूर्ण रेखा का बड़े खंड



चित्र 2.3: यूक्लिड की *चरम और मध्यम अनुपात* की परिभाषा

से वही अनुपात हो जो बड़े खंड का छोटे खंड से है।[1] इसे चित्र 2.3 में दर्शाया गया है और बीजगणितीय रूप से इस प्रकार व्यक्त किया गया है:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{a+b}{a} &= \tfrac{a}{b}, \\ x &= \tfrac{a}{b} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \overset{\text{def}}{=} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1.6180339887\ldots \\ 0.6180339887\ldots \end{cases}$$

यहाँ ϕ स्वर्ण अनुपात को दर्शाता है, जिसका नाम फिडियस (§3.2.3) के नाम पर रखा गया है, यद्यपि स्वयं फिडियस ने इसका गणितीय रूप में उपयोग नहीं किया था। यह स्वर्ण अनुपात की शास्त्रीय परिभाषा है, यद्यपि इसके अनेक अन्य ज्यामितीय निरूपण भी हैं। उल्लेखनीय रूप से ϕ फिबोनाची अनुक्रम के क्रमागत पदों के सीमांत अनुपात के रूप में भी प्रकट होता है: $\phi = \lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$—यह पुनरावर्ती पूर्णांक अनुक्रम और ज्यामिति में निहित अपरिमेय नियतांक के बीच एक अप्रत्याशित सेतु है।

ऐसी अटकलें लगाई गई हैं कि प्राचीन मिस्रियों ने पिरामिडों के अभिकल्प में स्वर्ण अनुपात को समाविष्ट किया था; किंतु इन दावों पर व्यापक विवाद है, क्योंकि इस बात का कोई विश्वसनीय प्रमाण नहीं कि उनके पास अपरिमेय संख्याओं को परिभाषित करने या उनकी गणना करने के लिए आवश्यक गणितीय साधन थे। पुनर्जागरण काल में ही वास्तुकारों ने भवनों के रूप और अनुभूत सामंजस्य को बढ़ाने के लिए स्पष्ट रूप से स्वर्ण अनुपात का उपयोग आरंभ किया (Livio, 2008)।

2.2 अक्षर: लेखन-पद्धतियों का इतिहास

संख्याएँ पृथक रूप से अस्तित्व में नहीं रहतीं—उन्हें अभिव्यक्ति के माध्यम की आवश्यकता होती है। मानव ने ज्ञान को किस प्रकार अभिलिखित, संप्रेषित और हस्तांतरित किया, इसका इतिहास गणित और अभियांत्रिकी के इतिहास से अविभाज्य है। लेखन और अंकन साथ-साथ विकसित हुए; अतः ऊपर वर्णित संख्या-पद्धतियों के साथ लिखित भाषा की उत्पत्ति का अनुसरण करना भी सार्थक है।

2.2.1 आरंभिक अभिलेख: गणना-चिह्न, गणना-छड़ियाँ और मिट्टी

औपचारिक लेखन के उद्भव से बहुत पहले मानव समुदायों ने मात्राएँ अभिलिखित करने की आरंभिक पद्धतियाँ विकसित कर ली थीं। इस प्रकार के सबसे पुराने पुरावशेषों में *गणना-छड़ियाँ* (tally sticks) हैं—गणना अंकित करने के लिए खाँचों वाली अस्थियाँ अथवा लकड़ी। दक्षिणी अफ्रीका की लेबोम्बो अस्थि (c. 43,000 BCE) संभवतः सबसे पुराना ज्ञात गणितीय पुरावशेष है। लोकतांत्रिक गणराज्य कांगो में प्राप्त और लगभग 20,000 BCE की मानी जाने वाली इशांगो अस्थि पर प्रतिरूपों में व्यवस्थित खाँचों की शृंखला है, जिसे कुछ विद्वान आरंभिक अंकगणितीय तर्क का प्रमाण मानते हैं (Marshack, 1972)।

लेखन से भी पहले मेसोपोटामियाई समाजों ने लेन-देन का लेखा रखने के लिए मिट्टी के छोटे *गणना-चिह्नों* का उपयोग किया, जो अनाज, तेल अथवा पशुधन जैसी वस्तुओं का प्रतिनिधित्व करते थे। लगभग 3500 BCE तक इन चिह्नों को मिट्टी के खोखले आवरणों में बंद किया जाने लगा और भीतर की सामग्री सूचित करने के लिए बाहर उनकी छाप दबाई जाती थी, जैसा

[1] दो सहस्राब्दियों से अधिक समय तक यूक्लिड की *Elements* गणितीय तर्क का आदर्श रही। मूल परिभाषाओं और अभिधारणाओं से आरंभ करके यूक्लिड ने एक कठोर निगमनात्मक पद्धति विकसित की, जिसमें प्रत्येक प्रतिज्ञप्ति अपने पूर्ववर्ती प्रतिज्ञप्तियों से तार्किक रूप से निष्पन्न होती थी।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चित्र 2.4 में दर्शाया गया है। इन छापों से सपाट मिट्टी की सतहों पर सीधे चिह्न अंकित करने तक केवल एक छोटा वैचारिक चरण था; उसी चरण के साथ लेखन का जन्म हुआ (Schmandt-Besserat, 1992)।



चित्र 2.4: मेसोपोटामियाई मिट्टी के गणना-चिह्न: लेखन के पूर्वगामी (c. 3500 BCE)

2.2.2 कीलाक्षर: विश्व की प्रथम लेखन-पद्धति

विश्व की सबसे पुरानी ज्ञात लेखन-पद्धति—कीलाक्षर (cuneiform)—लगभग 3200 BCE में सुमेर में उभरी। इसका नाम लैटिन *cuneus* (पच्चर) से निकला है, जो नरम मिट्टी में सरकंडे की लेखनी दबाने से बने चिह्नों के विशिष्ट आकार को दर्शाता है। आरंभ में चित्रात्मक कीलाक्षर शीघ्र ही अधिक अमूर्त अक्षरांशीय पद्धति में विकसित हुई, जो वस्तुओं और लेखों के साथ-साथ साहित्य, विधि और विज्ञान को भी निरूपित कर सकती थी; इसका विकास चित्र 2.5 में दर्शाया गया है।

उपलब्ध साहित्य की सबसे प्राचीन कृतियों में से एक, *Epic of Gilgamesh*, कीलाक्षर पट्टिकाओं पर संरक्षित रही; खगोलीय अभिलेख, गणितीय प्रश्न-समुच्चय और हम्मुराबी की विधि-संहिता (c. 1754 BCE) भी इसी प्रकार संरक्षित रहे। मिट्टी असाधारण रूप से टिकाऊ माध्यम सिद्ध हुई: चाहे जानबूझकर पकाई गई हों अथवा प्राचीन नगरों को नष्ट करने वाली अग्नि में, पट्टिकाएँ सहस्राब्दियों तक सुरक्षित रही हैं। ठीक इसी कारण बेबीलोनी और सुमेरी गणित आज मिस्री गणित की तुलना में बेहतर प्रलेखित है, क्योंकि मिस्र में प्रमुख माध्यम कहीं अधिक नाशवान पैपाइरस था (Kramer, 1963)।

समय के साथ अक्कादी, असीरियाई, हित्ती और फ़ारसी सहित निकट पूर्व की अनेक संस्कृतियों ने कीलाक्षर को अपनाया। किंतु प्रथम सहस्राब्दी BCE तक अधिक लचीली लेखन-पद्धतियाँ—सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण रूप से वर्णमाला—उसे क्रमशः विस्थापित कर रही थीं। अंतिम ज्ञात कीलाक्षर पट्टिका लगभग 75 CE की है; तब तक यह लिपि जीवित परंपरा के रूप में सदियों से लुप्त हो चुकी थी।

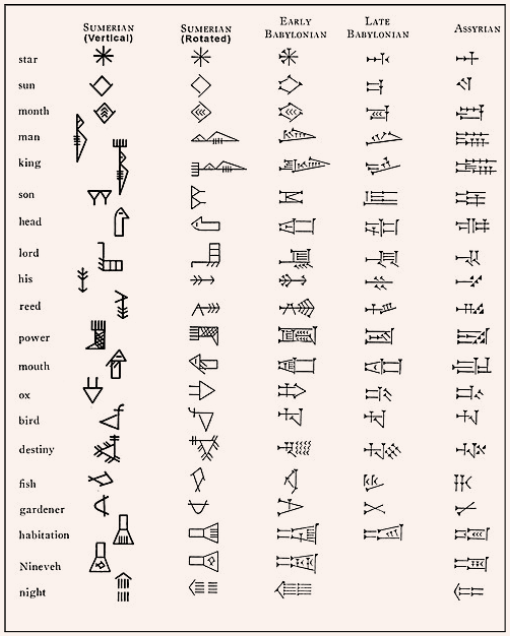
2.2.3 मिस्री चित्रलिपि और चित्रात्मक परंपरा

मेसोपोटामिया से स्वतंत्र रूप से—यद्यपि संभवतः कुछ परोक्ष प्रेरणा के साथ—प्राचीन मिस्र ने लगभग 3100 BCE में अपनी लेखन-पद्धति विकसित की। मिस्री चित्रलिपि (यूनानी *hieros*, पवित्र, और *glyphein*, उत्कीर्ण करना) एक परिष्कृत मिश्रित पद्धति थी। उसमें शब्दचित्र चिह्न (जहाँ कोई चिह्न शब्द अथवा अवधारणा का प्रतिनिधित्व करता है), ध्वन्यात्मक चिह्न (जहाँ चिह्न ध्वनियों का प्रतिनिधित्व करते हैं) और निर्धारक (अर्थगत वर्ग सूचित करने वाले अनुच्चरित चिह्न) संयुक्त थे, जैसा चित्र 2.6 में दर्शाया गया है। इसके परिणामस्वरूप असाधारण अभिव्यक्ति-विस्तार और दृश्य सौंदर्य संभव हुआ, जिसका प्रमाण पूरे मिस्र के मंदिरों, समाधियों और स्मारकों को अलंकृत करने वाले अभिलेख हैं।

चित्रलिपि[2] का उपयोग पत्थर पर भव्य अभिलेखों के लिए किया जाता था, जबकि उसके दो प्रवाही व्युत्पन्न—हाइरेटिक और

[2]मिस्री चित्रलिपि और चीनी अक्षरों के बीच एक शिक्षाप्रद समानता है: दोनों मिश्रित पद्धतियाँ हैं, जिनमें शब्दचित्र चिह्न (जहाँ कोई चिह्न शब्द अथवा रूपिम का प्रतिनिधित्व करता है), ध्वन्यात्मक घटक (जहाँ तत्त्व ध्वनि सूचित करते हैं)

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 2.5: चित्रात्मक चिह्नों (c. 3200 BCE) से अमूर्त अक्षरांशीय चिह्नों (c. 2000 BCE) तक कीलाक्षर का विकास



चित्र 2.6: मिस्री चित्रलिपि

बाद में डेमोटिक[3]—का उपयोग पैपाइरस पर दैनिक लेखन के लिए होता था। गणितीय ज्ञान इन्हीं प्रवाही लिपियों में हस्तांतरित

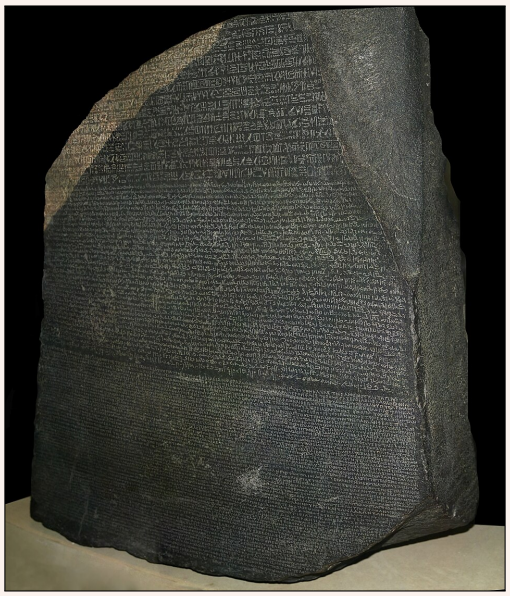
और मिस्री निर्धारकों के अनुरूप अर्थगत वर्गीकारक संयुक्त हैं। चीनी में अधिकांश अक्षर *ध्वनि-अर्थ यौगिक* होते हैं। इनमें अर्थ का संकेत देने वाला अर्थगत मूलांश और उच्चारण सुझाने वाला ध्वन्यात्मक घटक होता है—यह संरचनात्मक तर्क मिस्री शब्दचित्र, ध्वनिचित्र और निर्धारक के संयोजन से उल्लेखनीय रूप से मिलता-जुलता है। दोनों पद्धतियाँ पूर्णतः स्वतंत्र रूप से विकसित हुईं, फिर भी जटिल बोली जाने वाली भाषा को लेखन में निरूपित करने की समस्या के समान संगठनात्मक समाधान पर पहुँचीं। इस संरचनात्मक अभिसरण को कभी-कभी इस प्रमाण के रूप में उद्धृत किया जाता है कि मिश्रित शब्दचित्र-ध्वन्यात्मक पद्धतियाँ लेखन के विकास में स्वाभाविक मध्यवर्ती चरण हैं (Daniels and Bright, 1996)।

[3]डेमोटिक (यूनानी *dēmotikós*, “जनता का”) एक प्रवाही लिपि थी जो लगभग 7वीं शताब्दी BCE में मिस्र में आरंभिक हाइरेटिक लिपि के सरलीकरण के रूप में उभरी; हाइरेटिक स्वयं चित्रलिपि का प्रवाही व्युत्पन्न थी। जहाँ हाइरेटिक का उपयोग

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हुआ; रिंड गणितीय पैपाइरस (c. 1650 BCE) और मॉस्को गणितीय पैपाइरस (c. 1850 BCE) मिस्री अंकगणित और ज्यामिति की हमारी समझ के प्रमुख स्रोतों में हैं (Clagett, 1999)।

पश्चिमी जगत के लिए लंबे समय तक रहस्य रही चित्रलिपि का पाठोद्धार जाँ-फ़्राँस्वा शाँपोलियों ने 1822 में किया। उन्होंने चित्रलिपिक, डेमोटिक और यूनानी में अंकित त्रिभाषी रोसेटा शिला (चित्र 2.7) को कुंजी के रूप में उपयोग किया (Parkinson, 1999)। चित्रलिपिक परंपरा की चित्रात्मक समृद्धि इसके बाद आने वाली वर्णमाला की अमूर्त दक्षता के सर्वथा विपरीत है।



चित्र 2.7: रोसेटा शिला (196 BCE), जिस पर वही राजाज्ञा ऊपर से नीचे क्रमशः चित्रलिपिक, डेमोटिक और यूनानी में अंकित है, प्राचीन मिस्री लिपि के पाठोद्धार की कुंजी बनी

2.2.4 फोनीशियन और वर्णमाला का आविष्कार

लिखित संचार के इतिहास के सभी नवाचारों में कोई भी वर्णमाला के आविष्कार से अधिक परिणामकारी सिद्ध नहीं हुआ—यह ऐसी पद्धति है जिसमें चिह्नों के छोटे समुच्चय का प्रत्येक चिह्न एक व्यंजन ध्वनि का प्रतिनिधित्व करता है और उन्हें जोड़कर किसी भी भाषा का कोई भी शब्द लिखा जा सकता है। इस आविष्कार का श्रेय फोनीशियनों[4] को दिया जाता है। यह सामी समुद्री सभ्यता वर्तमान लेबनान, उत्तरी इज़राइल और तटीय सीरिया के भूभाग में पूर्वी भूमध्यसागरीय तट के साथ लगभग 1500 से 300 BCE तक फली-फूली (Sader, 2019)।

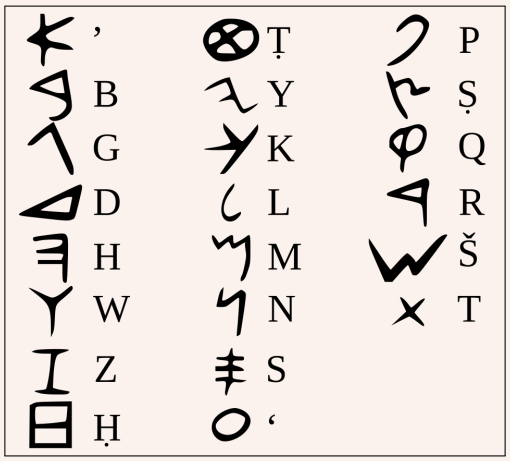
लगभग 1050 BCE में सुव्यवस्थित हुई फोनीशियन वर्णमाला में 22 व्यंजन अक्षर थे (जिससे वह एक *अबजद* बनी—ऐसी लेखन-पद्धति जो केवल व्यंजनों को अंकित करती है और स्वर पाठक के अनुमान पर छोड़ देती है), जैसा चित्र 2.8 में दिखाया गया है। प्रत्येक अक्षर का नाम उसी ध्वनि से आरंभ होने वाला एक सामी शब्द भी था: *aleph* (बैल), *beth* (घर), *gimel*

मुख्यतः पुरोहित और लिपिक धार्मिक तथा प्रशासनिक पाठों के लिए करते थे, वहीं डेमोटिक साक्षर मिस्रियों की दैनिक लेखन-पद्धति बन गई और विधिक अनुबंधों, पत्रों, साहित्यिक पाठों तथा व्यापारिक अभिलेखों जैसे कहीं व्यापक प्रयोजनों में प्रयुक्त हुई। यह लगभग एक सहस्राब्दी तक उपयोग में रही। सिकंदर महान द्वारा मिस्र-विजय (332 BCE) के बाद यूनानी और बाद में संशोधित यूनानी वर्णमाला में लिखी गई मिस्री भाषा की अंतिम अवस्था कॉप्टिक ने क्रमशः उसका स्थान लिया। रोसेटा शिला (196 BCE) डेमोटिक में अंकित सबसे प्रसिद्ध दस्तावेजों में से एक है; उस पर चित्रलिपिक और यूनानी संस्करण भी साथ हैं।

[4]मेरे पूर्वज!

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(ऊँट), इत्यादि। यह आद्यध्वनिक सिद्धांत—किसी शब्द की आरंभिक ध्वनि को चिह्न के नाम और मान के रूप में उपयोग करना—स्मृति-सहायक और सुरुचिपूर्ण दोनों था। चिह्न स्वयं पूर्ववर्ती प्रोटो-सिनाइटिक लिपि से निकले थे, जो संभवतः मिस्री चित्रलिपि से प्रेरित थी, किंतु सामी भाषा की ध्वनियाँ निरूपित करने के लिए अनुकूलित की गई थी (Naveh, 1987)।



चित्र 2.8: फोनीशियन वर्णमाला (c. 1050 BCE): 22 व्यंजन चिह्न, उनके नाम और उनसे विकसित यूनानी तथा लैटिन अक्षर

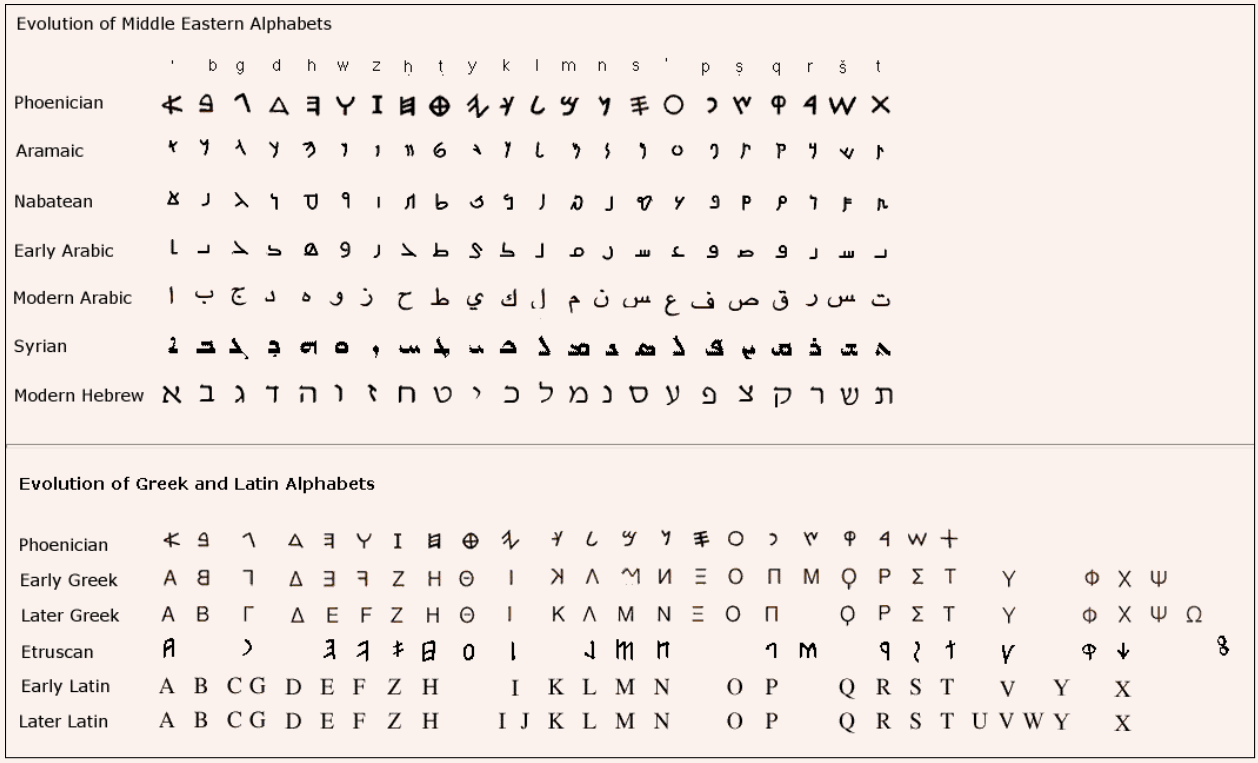
फोनीशियन पद्धति की प्रतिभा उसकी मौलिक मितव्ययिता में थी: जहाँ कीलाक्षर के लिए सैकड़ों और मिस्री चित्रलिपि के लिए सहस्रों चिह्नों की आवश्यकता थी, वहीं फोनीशियन वर्णमाला ने भाषा के लिखित निरूपण को केवल 22 चिह्नों तक सीमित कर दिया। इस सरलता ने साक्षरता को पूर्ववर्ती पद्धतियों में निपुण संकीर्ण लिपिक वर्गों से बहुत आगे तक सुलभ बनाया। यह संयोग नहीं था कि प्राचीन विश्व के अग्रणी व्यापारी फोनीशियनों—जिनके व्यापारिक संजाल लेवांत से उत्तरी अफ्रीका, स्पेन और ब्रिटिश द्वीपों तक फैले थे—ने इस साधन को परिष्कृत और प्रसारित किया। उनके लिए लेखन सर्वोपरि रूप से वाणिज्य, पत्राचार और अभिलेख-रक्षण का व्यावहारिक साधन था।

फोनीशियन वर्णमाला के प्रसार ने प्राचीन विश्व को रूपांतरित कर दिया। यूनानियों ने लगभग नौवीं अथवा आठवीं शताब्दी BCE में इसे अपनाया और अनेक फोनीशियन व्यंजन चिह्नों को स्वरों के निरूपण के लिए पुनर्नियोजित करने का निर्णायक नवाचार किया—इससे पहली वास्तविक वर्णमाला बनी जिसमें व्यंजन और स्वर दोनों व्यवस्थित रूप से लिखे जाते थे। इस यूनानी वर्णमाला को आगे एट्रस्कनों ने और उनसे रोमनों ने अपनाया; इस प्रकार लैटिन वर्णमाला का जन्म हुआ, जो आज पश्चिमी जगत की अधिकांश लेखन-पद्धतियों का आधार है। इसी समय समान फोनीशियन आदिरूप से पृथक विकासात्मक शाखाओं द्वारा हिब्रू, अरबी और अंततः दक्षिण तथा दक्षिण-पूर्व एशिया की ब्राह्मी लिपियाँ विकसित हुईं, जैसा चित्र 2.9 के वंश-वृक्ष में संक्षेपित है (Daniels and Bright, 1996)।

इस प्रसार के सांस्कृतिक परिणामों को बढ़ा-चढ़ाकर कहना कठिन है। वर्णमालात्मक लेखन की सापेक्ष सरलता ने पूरे भूमध्यसागरीय जगत में साहित्य, दर्शन, विधि-संहिताओं और वैज्ञानिक ग्रंथों के विस्तार को संभव बनाया। होमर, प्लेटो, यूक्लिड और आर्किमिडीज़ की कृतियाँ—जो सभी फोनीशियन की प्रत्यक्ष वंशज यूनानी वर्णमाला में लिखी गई थीं—पश्चिमी विज्ञान और अभियांत्रिकी की बौद्धिक आधारशिला हैं। इस अर्थ में मिट्टी पर 22 चिह्न दबाने और मिट्टी के पात्रों के टुकड़ों पर उन्हें खरोंचने वाले फोनीशियन व्यापारी अनजाने में उसी गणितीय और यांत्रिक परंपरा के योगदानकर्ता थे जिसका इतिहास यह पुस्तक प्रस्तुत करना चाहती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के ग्रंथ के संदर्भ में यह उल्लेख उपयुक्त है कि *engineer* शब्द स्वयं लैटिन और प्राचीन फ्रांसीसी से होते हुए अंततः लैटिन *ingenium*—जन्मजात बुद्धि, चतुराई—तक पहुँचता है; यह ऐसी अवधारणा है जिसे लेखन के प्रसार ने अभिव्यक्त भी किया और संवर्धित भी। संख्याएँ और अक्षर, अभिलेख और गणनाएँ अलग धाराएँ नहीं हैं: वे एक ही नदी की सहायक नदियाँ हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 2.9: वर्णमालाओं की वंशावली: फोनीशियन (c. 1050 BCE) से यूनानी, लैटिन, अरबी, हिब्रू और ब्राह्मी लिपि-परिवारों तक



अल्ब्रेख्ट ड्यूरर की मेलेंकोलिया I (1514)

विचारमग्न आकृति को घेरे हुए जादुई वर्ग, ज्यामितीय ठोस और मापन उपकरण मानवता के गणितीय जागरण को मूर्त रूप देते हैं।

प्रारूप प्रकाशन

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3 प्राचीन सभ्यताएँ

सारांश

संरचनात्मक विश्लेषण (structural analysis) और यांत्रिकी के क्षेत्र प्राचीन सभ्यताओं द्वारा की गई बौद्धिक एवं व्यावहारिक प्रगति के अत्यंत ऋणी हैं। इनमें मेसोपोटामिया, मेसोअमेरिका, फ़ारस, चीन, भारत, जापान, रोम, मिस्र और अरब-इस्लामी संसार का विशेष स्थान है; इन्होंने उन अनेक सिद्धांतों और तकनीकों की आधारशिला रखी जिन्होंने सैद्धांतिक तथा अनुप्रयुक्त यांत्रिकी, दोनों को प्रभावित किया। इनके योगदानों में वैज्ञानिक अन्वेषण, अभियांत्रिक प्रतिभा और व्यावहारिक प्रयोगशीलता का ऐसा समन्वय दिखाई देता है जिसकी प्रतिध्वनि युगों तक सुनाई देती है।

संरचनात्मक विश्लेषण और यांत्रिकी के क्षेत्र प्राचीन सभ्यताओं द्वारा की गई बौद्धिक एवं व्यावहारिक प्रगति के अत्यंत ऋणी हैं। इनमें मेसोपोटामिया, मेसोअमेरिका, फ़ारस, चीन, भारत और जापान का विशेष स्थान है; इन्होंने उन अनेक सिद्धांतों और तकनीकों की आधारशिला रखी जिन्होंने सैद्धांतिक तथा अनुप्रयुक्त यांत्रिकी, दोनों को प्रभावित किया। इनके योगदानों में वैज्ञानिक अन्वेषण, अभियांत्रिक प्रतिभा और व्यावहारिक प्रयोगशीलता का ऐसा समन्वय दिखाई देता है जिसकी प्रतिध्वनि युगों तक सुनाई देती है।

3.1 प्रारंभिक सभ्यताएँ और स्मारकीय उद्गम 25
3.1.1 मेसोपोटामिया: ज़िग्गुरात और मृदा-संरचनाएँ; c. 3100-500 BCE . . 25
3.1.2 मेसोअमेरिका: माया और ऐज़्टेक पिरामिड; c. 400 BCE-1521 CE 26
3.1.3 मिस्र; c.~2700-1000 BCE . . . 28
3.1.4 मेसोपोटामियाई, मेसोअमेरिकी और मिस्री परंपराओं की तुलना . . . 31
3.2 शास्त्रीय पुराकाल: ज्यामिति, सिद्धांत और साम्राज्य 34
3.2.1 फ़ारस: साम्राज्यिक मंच, सेतु और क़नात 34
3.2.2 अरब-इस्लामी योगदान: संरचनात्मक अभियांत्रिकी में नवाचार . 36
3.2.3 स्थैतिकी और संरचनात्मक यांत्रिकी में यूनानी योगदान 37
3.2.4 रोम: कंक्रीट, मेहराब और अवसंरचना 41
3.3 भारत, चीन और जापान की गणितीय तथा संरचनात्मक परंपराएँ 45
3.3.1 चीन: भूकंप-विज्ञान, सेतु और यांत्रिक नवाचार 45
3.3.2 भारत: गणित, पदार्थ और स्मारकीय वास्तुकला 46
3.3.3 जापान: भूकंपीय प्रत्यास्थता और अनुकूलनीय संरचनाएँ 46
3.3.4 संश्लेषण और वैश्विक प्रभाव . 47

3.1 प्रारंभिक सभ्यताएँ और स्मारकीय उद्गम

3.1.1 मेसोपोटामिया: ज़िग्गुरात और मृदा-संरचनाएँ; c. 3100-500 BCE

मेसोपोटामिया को प्रायः “सभ्यता का उद्गम-स्थल” माना जाता है; इसने संरचनात्मक यांत्रिकी और नागरिक अवसंरचना के क्षेत्रों की मूलभूत नींव रखी। प्रमुख मेसोपोटामियाई नगर-केंद्रों में निर्मित विशाल सोपानी मंच—ज़िग्गुरात—गुरुत्व-प्रधान भार-व्यवस्थाओं के अधीन पुंज-चिनाई निर्माण के आरंभिक उदाहरण हैं। उदाहरणार्थ, ऊर का महान ज़िग्गुरात (लगभग 2100~BCE), चित्र 3.1a, धूप में सुखाई गई कच्ची ईंटों के अंतर्भाग से बनाया गया था, जिसे अधिक टिकाऊपन और मौसम-प्रतिरोध के लिए पकाई गई ईंटों से आवृत किया गया था (Oppenheim, 1977)। सोपानी ज्यामिति ने अनेक स्तरों में प्रतिबल (stress) का प्रभावी वितरण किया, आधार पर ऊर्ध्वाधर संपीडन-प्रतिबल के संचय को घटाया और समग्र स्थिरता बढ़ाई। बंधक पदार्थ के रूप में बिटुमेन के प्रयोग ने चिनाई-आव्यूह में तन्यता और संसंजन बढ़ाया, जिससे अपरूपण-विफलता तथा पर्यावरणीय क्षरण के प्रति उसका प्रतिरोध बेहतर हुआ। उल्लेखनीय है कि मेसोपोटामियावासियों ने 4000 BCE से ही भूमिगत जल-निकास प्रणालियों और समाधि-मेहराबों में आदिम मेहराब-रूपों का उपयोग किया था, यद्यपि ये वास्तविक कीलाकार खंडों वाले मेहराब नहीं, बल्कि टोडेदार मेहराब थे।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यद्यपि मिस्री पिरामिडों और मेसोपोटामियाई ज़िग्गुरातों में सतही ज्यामितीय समानता है, तथापि प्रत्यक्ष प्रभाव का कोई निर्णायक प्रमाण नहीं है। फिर भी ज़िग्गुरात के विशिष्ट रूप ने लगभग निश्चित रूप से बाइबिल की बाबेल मीनार की कथा को प्रेरित किया—विशेषतः बेबीलोन के गगनचुंबी एतेमेनांकी के माध्यम से (George, 1993)।

इसके साथ-साथ मेसोपोटामियाई अभियंताओं ने कृषि और नगरीय प्रत्यास्थता को सहारा देने के लिए द्रवचालित अभियांत्रिकी के मूल सिद्धांत विकसित किए। उन्होंने बाढ़ का जोखिम घटाने और मौसमी जल-प्रवाह को दिशा देने के लिए नियंत्रित मुक्त-वाहिका सिंचाई-जाल तथा अभिकल्पित अनुप्रस्थ परिच्छेदों वाले मिट्टी के तटबंध बनाए। गणितीय रूप से औपचारिक न होने पर भी इन प्रणालियों में द्रवचालित प्रवणता और प्रवाह-सातत्य की अवधारणाएँ अंतर्निहित थीं। प्रचुर मात्रा में उपलब्ध भू-पदार्थ, मृत्तिका, केवल संरचनात्मक तत्त्व ही नहीं थी; उससे साँचे और आद्ययूपी घटक भी बनाए जाते थे—जो वास्तु-निर्माण में प्रतिरूपों के आरंभिक उपयोग का संकेत है। समष्टि में ये नवाचार संसाधन-सीमित परिवेश के भीतर संरचनात्मक व्यवहार, पदार्थ-निष्पादन और जलीय गतिकी की व्यावहारिक समझ दर्शाते हैं।

मृत्तिका यद्यपि मेसोपोटामियाई ज़िग्गुरातों की कच्ची ईंटें और कीलाक्षर पट्टिकाओं की मृत्तिका, दोनों फ़रात–दजला के बाढ़-मैदान की एक ही जलोढ़ गाद से निकाली जाती थीं, फिर भी भिन्न अभियांत्रिक आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए कच्चे पदार्थ का प्रसंस्करण अलग-अलग ढंग से होता था। तनन-प्रतिरोध बढ़ाने के लिए वास्तु-ईंटों में मोटी गाद और पुआल का मिश्रण मिलाया जाता था और अधिकांशतः उन्हें धूप में सुखाया जाता था; चुनी हुई बाहरी परतों को भट्ठी में पकाकर मौसम से सुरक्षा के लिए बिटुमेन से सील किया जाता था।

इसके विपरीत, लिपिक मृत्तिका को जल-प्रक्षालित करते थे (चित्र 3.1b); पुआल और मोटे कण हटाकर वे ऐसा महीन सुघट्य लेप बनाते थे जिस पर लेखनी की सुस्पष्ट छाप अंकित हो सके। अधिकांश पट्टिकाएँ केवल वायु में सुखाई जाती थीं और बाद की अग्निकांडों में ही संयोगवश निम्न ताप पर पकती थीं। इस प्रकार एक ही भूवैज्ञानिक संसाधन से दो अभियांत्रिक "विधियाँ" प्राप्त हुईं—एक संपीडन-प्रधान चिनाई के लिए और दूसरी अभिलेखीय लेखा-रक्षण के लिए अनुकूलित (Oates, 1990; Moorey, 1999)।



(a) ज़िग्गुरात (b) पट्टिका

चित्र 3.1: मेसोपोटामिया में मृत्तिका

3.1.2 मेसोअमेरिका: माया और ऐज़्टेक पिरामिड; c. 400 BCE-1521 CE

यद्यपि मेसोअमेरिकी मंदिर-पिरामिड पुरानी दुनिया के ज़िग्गुरातों और मिस्री पिरामिडों से एक सहस्राब्दी से भी अधिक बाद के हैं, यहाँ उनकी चर्चा उन पुराने स्मारकों के साथ की गई है, क्योंकि वे विशाल सोपानी वास्तुकला के स्वतंत्र किंतु अभिसारी उद्भव का प्रतिनिधित्व करते हैं—और इस प्रकार स्मारकीयता की विश्वव्यापी परंपरा को एक समानांतर आधार प्रदान करते हैं। पुरानी दुनिया की सभ्यताओं से संपर्क के बिना हुआ यह स्वतंत्र विकास दर्शाता है कि कुछ संरचनात्मक समाधान सार्वभौमिक अभियांत्रिक सीमाओं से स्वाभाविक रूप से उत्पन्न होते हैं।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

माया, ऐज़्टेक और उनके पूर्ववर्ती समुदायों सहित मेसोअमेरिका की सभ्यताओं ने संरचनात्मक अभियांत्रिकी और स्मारकीय वास्तुकला में उल्लेखनीय योगदान दिए। तीव्र ढाल वाली सीढ़ियों, सोपानी मंचों और खगोलीय घटनाओं के अनुरूप अभिविन्यास से पहचाने जाने वाले उनके विशिष्ट पिरामिड धार्मिक, राजनीतिक और ब्रह्मांड-विज्ञान संबंधी केंद्र थे। ये संरचनाएँ केवल प्रभाव उत्पन्न करने के लिए नहीं बनाई गई थीं; वे सावधानीपूर्वक नियोजन, पदार्थ-चयन और पर्यावरणीय अनुकूलन का परिणाम थीं।

तीकाल और पालेन्के (250-900 CE), चित्र 3.2a, तथा चिचेन इत्सा जैसे माया पिरामिड उच्च स्तर की अभियांत्रिक परिष्कृति प्रदर्शित करते हैं। निर्माताओं ने ऐसे सोपानी रूप अपनाए जिनसे भार-वितरण बेहतर और पार्श्व प्रणोद घटा; फलतः स्थिरता से समझौता किए बिना अधिक ऊँचाई संभव हुई। स्थानीय रूप से उत्खनित चूना-पत्थर के साथ चूना-आधारित गारे के प्रयोग से अत्यधिक आर्द्र परिस्थितियों में भी दीर्घकालीन संसंजन संभव हुआ। भीतर के भराव-अंतर्भाग—जो प्रायः मलबे और गारे से बनते थे—पुंज और दृढता प्रदान करने के लिए संहत किए जाते थे (Coe, 2005; Sharer and Traxler, 2006)। इन पिरामिडों के शिखरों पर प्रायः मंदिर बने होते थे, जो उनके आनुष्ठानिक महत्त्व को इंगित करते और पवित्र स्थल के ऊर्ध्वाधर चिह्न का कार्य करते थे। उनकी ज्यामिति में बहुधा पंचांग और खगोल-विज्ञान का ज्ञान निहित था; अभिविन्यास अयनांतों, विषुवों और शुक्र के चक्रों की ओर संकेत करते थे।

तेनोच्तित्लान के तेम्प्लो मायोर (1325-1487 CE), चित्र 3.2b, जैसे ऐज़्टेक पिरामिडों ने पुरानी परंपराओं को आगे बढ़ाया और अधिक विस्तृत किया। ज्वालामुखीय बेसाल्ट, तेज़ोंत्ले (सरंध्र लाल लावा-शिला) और चूने के गारे से निर्मित इन पिरामिडों में स्वभार वितरित करने और ढाल-अपरदन रोकने के लिए चौड़े चबूतरे तथा सोपानी मंच होते थे। अनेक संरचनाओं में पूर्ववर्ती तेओतिहुआकान शैली से मिलती-जुलती *talud-tablero* नामक निर्माण तकनीक प्रयुक्त हुई; इसमें ढलुआँ दीवार (talud) के ऊपर आयताकार पट्ट (tablero) लगाया जाता था, जो संरचनात्मक अखंडता बढ़ाने के साथ समृद्ध प्रतीकात्मक और अलंकरणात्मक संभावनाएँ देता था (Smith, 1996)। वंशगत निरंतरता और ब्रह्मांडीय नवीकरण दर्शाने के लिए इन संरचनाओं में प्रायः क्रमिक निर्माण-चरण सम्मिलित होते थे—पुराने पिरामिडों के ऊपर नए पिरामिड बनाए जाते थे।



(a) माया: तीकाल-पालेन्के



(b) ऐज़्टेक: तेनोच्तित्लान

चित्र 3.2: माया और ऐज़्टेक पिरामिड

मेसोअमेरिकी नगरीय अभिकल्प में पर्यावरणीय विचार केंद्रीय थे। माया और ऐज़्टेक, दोनों ने उन्नत जल-निकास तथा वर्षाजल-प्रबंधन प्रणालियाँ विकसित कीं। झील-तलों पर बसे तेनोच्तित्लान जैसे नगरों में अभियंताओं ने कृत्रिम द्वीप (चिनाम्पा), ऊँचे सेतुमार्ग और भीतर पत्थर की वाहिकाओं वाले तटबंध बनाए। माया निम्नभूमि में पत्थर से पंक्तिबद्ध नहरों, भूमिगत जलाशयों (*chultuns*) और अपवाह-प्रबंधन वाहिकाओं ने अत्यधिक मौसमी वर्षा के बावजूद नगरीय प्रत्यास्थता बनाए रखने में सहायता की (Sharer and Traxler, 2006)।

इस प्रकार मेसोअमेरिका के पिरामिड औपचारिक वैज्ञानिक सिद्धांत के प्रतिपादन से बहुत पहले ही संरचनात्मक यांत्रिकी, पदार्थ अभियांत्रिकी, जल-विज्ञान और खगोल-विज्ञान के एकीकरण के उदाहरण प्रस्तुत करते हैं। ये उपलब्धियाँ निर्माण की ऐसी अनुभवजन्य परंपरा प्रमाणित करती हैं जो अपने संदर्भ के प्रति अनुक्रियाशील और संकल्पना में महत्त्वाकांक्षी, दोनों थी।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

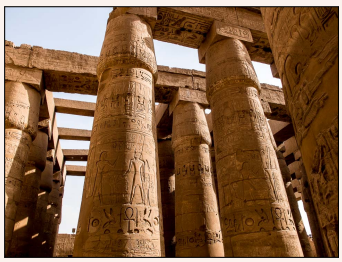
3.1.3 मिस्र; c.~2700-1000 BCE

स्मारकीय पाषाण वास्तुकला का जन्म मिस्र की वास्तु-परंपरा इम्होतेप से आरंभ होती है, जो तृतीय राजवंश (c. 2660 BCE) में फ़राओ जोसर का वज़ीर था और अभिलिखित इतिहास का प्रथम नाम-ज्ञात वास्तुकार, अभियंता तथा चिकित्सक व्यापक रूप से माना जाता है (Lehner, 1997)। उसने सक्कारा के सोपानी पिरामिड की संकल्पना की और उसके निर्माण का पर्यवेक्षण किया, तथा परंपरागत *mastaba*[1] को स्तरित पाषाण स्मारक में रूपांतरित किया। यह बड़े पैमाने पर उत्खनित पत्थर के उपयोग का पहला ज्ञात उदाहरण था। इस नवाचार ने श्रम-संगठन, निर्माण-रसद और ज्यामितीय नियोजन के मूल सिद्धांत प्रस्तुत किए और बाद के पिरामिड-अभिकल्प के लिए तकनीकी तथा प्रतीकात्मक आधार स्थापित किया।

इम्होतेप द्वारा आरंभ की गई वास्तु-परंपरा तीन पीढ़ियों बाद फ़राओ स्नेफेरू (r. c. 2613-2589 BCE) के अधीन चरम पर पहुँची। उसने प्रयोगात्मक पिरामिडों की एक शृंखला बनवाई जिसने सोपानी रूपों से चिकनी पार्श्व-सतह वाली ज्यामिति की ओर संक्रमण को आगे बढ़ाया। मेदूम में स्नेफेरू ने संभवतः एक सोपानी पिरामिड पूरा कराया, जिसका बाहरी आवरण बाद में ढह गया या अपरदित हो गया, यद्यपि उसकी मूल संरचना अक्षुण्ण है; इस अनुभव ने महत्त्वपूर्ण संरचनात्मक अनुकूलनों को प्रेरित किया। दहशूर का उसका वक्र पिरामिड निर्माण के बीच ढाल में परिवर्तन दिखाता है—विफलता घटाने के लिए किया गया समायोजन—जिसके बाद मिस्र का पहला वास्तविक चिकनी पार्श्व-सतह वाला पिरामिड, लाल पिरामिड, सफलतापूर्वक बनाया गया।

ज्यामिति और निर्माण-विधियों के इन परिष्कारों ने उसके पुत्र और उत्तराधिकारी खूफ़ू को गीज़ा का महान पिरामिड अद्वितीय परिशुद्धता, पैमाने और संरचनात्मक महत्त्वाकांक्षा के साथ साकार करने में प्रत्यक्ष रूप से समर्थ बनाया। उसकी मूल चिकनी सतह बारीकी से तराशे गए तूरा चूना-पत्थर के आवरण-खंडों से बनी थी, जिनमें से अधिकांश अब अपरदन या पुनःप्रयोग के कारण लुप्त हो चुके हैं। पिरामिड के आधार का विचलन 20 mm से कम है, वह भी 230 meters के विस्तार में, और उसकी भुजाएँ वास्तविक उत्तर से एक degree के अंश भर के भीतर संरेखित हैं—उस युग के उपकरणों को देखते हुए ज्यामितीय नियंत्रण की उल्लेखनीय उपलब्धियाँ। लगभग 2560 BCE में निर्मित इस पूर्ण संरचना में चूना-पत्थर के लगभग 2.3 million खंड हैं, जिनमें से प्रत्येक का भार कई tons है (Lehner, 1997)।

आधुनिक सिद्धांतों के अनुसार खंडों को गीली रेत पर घिसटपट्टियों से खींचा गया होगा (जिससे घर्षण 50% तक घटता था) और इसके साथ सीधे, टेढ़े-मेढ़े अथवा सर्पिल रैंपों की प्रणालियाँ प्रयुक्त हुई होंगी; फिर भी सटीक विधि विवादित है। इसकी ढलुआँ भुजाएँ और संरेखित आधार भार-वितरण को इष्टतम बनाते हैं, अपरूपण को प्रभावी रूप से घटाते हैं और विशाल पुंज के अधीन दीर्घकालीन संरचनात्मक स्थिरता संभव करते हैं। समग्रतः ये विकास मिस्री संरचनात्मक चिंतन का अनुभवजन्य आरंभ से स्मारकीय निपुणता तक सुसंगत क्रम-विकास दर्शाते हैं।



(a) लक्सर का कर्नाक मंदिर (~2000-300 BCE)



(b) सक्कारा का सोपानी पिरामिड (~2667-2648 BCE)



(c) गीज़ा का महान पिरामिड (खूफ़ू / चीओप्स, ~2580-2560 BCE)

चित्र 3.3: मिस्री मंदिर और पिरामिड

[1] *mastaba* आयताकार, सपाट छत वाली और भीतर की ओर ढलती पार्श्व-दीवारों वाली समाधि है, जिसका उपयोग मिस्र की आरंभिक अंत्येष्टि प्रथाओं में होता था। सामान्यतः कच्ची ईंट या पत्थर से बने मस्तबा पिरामिड-रूप के अग्रदूत थे; उनमें भूमिगत समाधि-कक्ष तथा धरातल के ऊपर अर्पण-कक्ष होते थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मंदिर, पदार्थ और अवसंरचना कर्नाक मंदिर परिसर, चित्र~3.3a, जैसे मिस्री मंदिर विशाल पाषाण तत्त्वों से बने स्तंभ-और-सरदल निर्माण में निपुणता प्रदर्शित करते हैं। बलुआ-पत्थर और ग्रेनाइट से तराशे, बहुत कम अंतर पर स्थित स्तंभों द्वारा धारित हाइपोस्टाइल कक्ष संपीडन बलों तथा छत-विस्तार की सीमाओं पर परिष्कृत नियंत्रण दर्शाते हैं (Arnold, 2003)। ये स्थान केवल आनुष्ठानिक प्रयोजनों की पूर्ति नहीं करते थे, बल्कि पत्थर के प्रतीकात्मक वन का दृश्य प्रस्तुत कर धार्मिक और राजनीतिक सत्ता को सुदृढ करते थे।

पदार्थ-संबंधी विशेषज्ञता मिस्री अभियांत्रिकी के केंद्र में थी। चूना-पत्थर, बलुआ-पत्थर और ग्रेनाइट का उत्खनन व आकार-निर्माण किया जाता और उन्हें घिसटपट्टियों, बजरों तथा रैंपों से बहुत दूर तक पहुँचाया जाता था। प्रायः 300 tons से अधिक भार वाले एकाश्म स्तंभों को सफलतापूर्वक खड़ा करना यांत्रिक लाभ और भार-नियंत्रण—विशेषकर उत्थापन और स्थापन क्रियाओं—की मिस्री समझ को प्रमाणित करता है।

मिस्री समाज को बनाए रखने में द्रवचालित अभियांत्रिकी ने भी महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाई। नील की वार्षिक बाढ़ का प्रबंधन नहरों, धारण-कुंडों और तटबंधों के जाल से किया जाता था, जिससे स्थिर कृषि-अर्थव्यवस्था को सहारा मिलता था। ये परियोजनाएँ तरल गतिकी के व्यावहारिक ज्ञान और आरंभिक विशाल अवसंरचना-नियोजन को प्रतिबिंबित करती हैं (Butzer, 1976)।

ज्यामिति और सेकेड मिस्री व्यावहारिक गणित के हमारे ज्ञान के दो प्रमुख स्रोत *राइंड गणितीय पपाइरस* और *मॉस्को गणितीय पपाइरस* हैं। मध्य साम्राज्य और द्वितीय मध्यवर्ती काल में प्रतिलिखित इन पांडुलिपियों में अंकगणित, ज्यामिति, मात्रक-रूपांतरण और वास्तु-मापन से संबंधित प्रश्न-संग्रह अभिलिखित हैं। सारणी~3.1 प्रत्येक दस्तावेज़ की तिथि, राजवंशीय संदर्भ और वर्तमान संग्रहालय का सार देती है और Robins and Shute, 1987 तथा Gillings, 2019 के विस्तृत अध्ययनों का अनुसरण करती है। दोनों मिलकर उन अनुभवजन्य विधियों को प्रकट करते हैं जो मिस्र के मध्य साम्राज्य में पिरामिड-निर्माण, भू-सर्वेक्षण और आयतन-गणना का आधार थीं।

तालिका 3.1: मिस्र के दो प्रमुख गणितीय पपाइरसों के मुख्य आँकड़े

पपाइरस	विद्यमान प्रति की तिथि	मूल विषय-वस्तु की संभावित तिथि	राजवंश / काल	वर्तमान संग्रहालय
राइंड गणितीय पपाइरस (RMP)	c. 1650 BCE (लिपिक आहमेस)	मध्य साम्राज्य की स्रोत-सामग्री, c. 1850–1800 BCE[2]	उत्तर 13th–आरंभिक 15th राजवंश (द्वितीय मध्यवर्ती काल)	ब्रिटिश संग्रहालय, EA 10057–10058
मॉस्को गणितीय पपाइरस (MMP)	c. 1850 BCE	लगभग प्रति के समकालीन	द्वादश राजवंश, मध्य साम्राज्य	पुश्किन राजकीय संग्रहालय, inv. 4676

राइंड प्रति में संभवतः वे प्रश्न सुरक्षित हैं जिन्हें दो शताब्दी पहले मध्य साम्राज्य के दौरान पहली बार संकलित किया गया था।

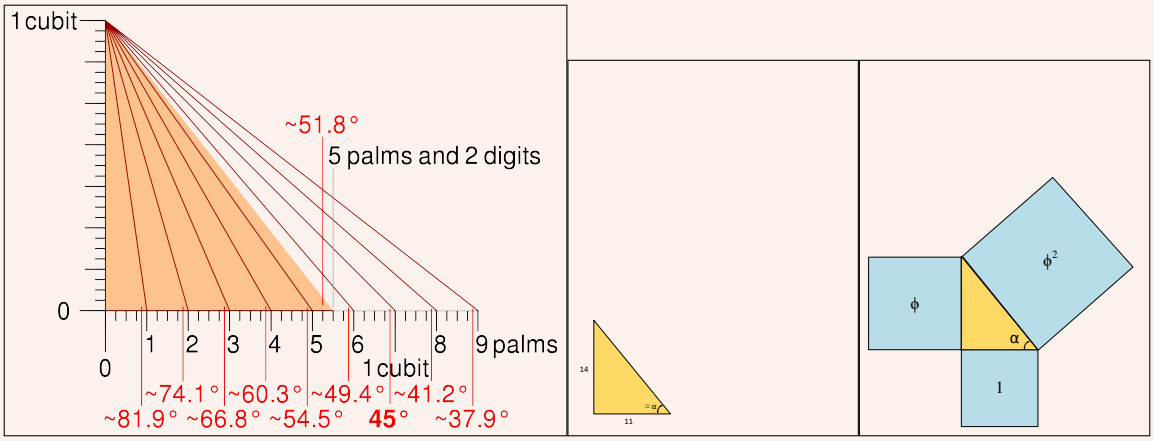
मिस्रियों ने *cubit* पर आधारित मापन-पद्धति विकसित की। यह लंबाई का प्राचीन मात्रक था, जिसे कोहनी से मध्यमा की नोक तक की दूरी के रूप में परिभाषित किया गया था। विभिन्न संस्कृतियों में इसका मान बदलता था और सामान्यतः 44 से 52 cm (लगभग 17 से 20 inches) के बीच रहता था। प्राचीन मिस्र का तथाकथित "राजकीय क्यूबिट" लगभग 52.4 cm था और वास्तुकला, निर्माण तथा सर्वेक्षण में व्यापक रूप से प्रयुक्त होता था। को 7 हथेलियों में और प्रत्येक हथेली को 4 अंगुलों में बाँटा जाता था, जिससे प्रति क्यूबिट 28 मात्रक मिलते थे (चित्र,3.4a)। तुलना में मानक हिब्रू क्यूबिट लगभग 45 cm था, जबकि मेसोपोटामियाई (सुमेरी) क्यूबिट कुछ लंबा, लगभग 49 से 50 cm, माना जाता है।

seked पिरामिड के फलक की ढाल व्यक्त करने की मिस्री विधि थी। यह एक क्यूबिट ऊर्ध्वाधर उत्थान के लिए क्षैतिज विस्तार मापता था। चूँकि एक क्यूबिट सात हथेलियों के बराबर था, अतः सेकेड को प्रति क्यूबिट उत्थान के लिए विस्तार की

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) मिस्री राजकीय क्यूबिट (कडी)



(b) सेकेड की परिभाषा (कडी)

(c) पिरामिडों में प्रयुक्त 14:11 त्रिभुज

(d) केप्लर त्रिभुज का सन्निकटन

चित्र 3.4: मिस्री ज्यामिति और पिरामिडों के अनुपात

हथेलियों (और अंगुलों) में व्यक्त किया जाता था। पिरामिड का उन्नयन कोण ϕ दिए जाने पर सेकेड गणितीय रूप से इस प्रकार परिभाषित है:

$$s = 7 \cot \phi$$

ध्यान दें कि सेकेड की व्याख्या कोटैंजेंट फलन—प्रति मात्रक उत्थान क्षैतिज विस्तार—के परिमेय सन्निकटन के रूप में की जा सकती है, जो आधुनिक त्रिकोणमितीय चिंतन के समानांतर है। मिस्रियों ने कोणों अथवा त्रिकोणमितीय फलनों की यूनानी अर्थ में संकल्पना की थी, इसका कोई प्रमाण नहीं है; फिर भी उनके सेकेड में कोटैंजेंट-जैसा ज्यामितीय संबंध निहित है। इसके विपरीत, गणितीय विधा के रूप में औपचारिक त्रिकोणमिति का विकास 2nd century BCE में यूनानी खगोलशास्त्री और गणितज्ञ *हिप्पार्कस* ने किया, जिसे प्रायः त्रिकोणमिति का जनक माना जाता है।

गीज़ा के महान पिरामिड के लिए सेकेड 5.5 (5 हथेलियाँ और 2 अंगुल) अभिलिखित था, जिससे मिलता है:

$$\phi = \cot^{-1}\left(\frac{5.5}{7}\right) \approx 51.84^\circ$$

यह 14:11 के उत्थान-से-विस्तार अनुपात के अनुरूप है, जैसा चित्र~3.4c में दर्शाया गया है, और पिरामिड की पुनर्निर्मित ज्यामिति से मेल खाता है (Bartlett, 2014)।

कुछ विद्वानों ने अनुमान लगाया है कि पिरामिड के अनुपातों द्वारा *सुवर्ण अनुपात* को केप्लर त्रिभुज की ज्यामिति के माध्यम से व्यक्त करना अभिप्रेत था (चित्र~3.4d)। उस स्थिति में संबंध होगा:

$$\frac{14}{11} = 1.2727\ldots \quad \text{vs.} \quad \sqrt{\phi} = 1.2720\ldots \tag{3.1}$$

सापेक्ष अंतर 0.06% से कम है, किंतु Markowsky, 1992 की चेतावनी के अनुसार भौतिक आयामों में किसी गणितीय नियतांक

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

की उपस्थिति अनिवार्यतः साभिप्राय अभिकल्प को सिद्ध नहीं करती—विशेषकर अपरिमेय संख्याओं के लिए स्पष्ट मिस्री संकल्पनात्मक ढाँचे के अभाव को देखते हुए।

3.1.4 मेसोपोटामियाई, मेसोअमेरिकी और मिस्री परंपराओं की तुलना

मंदिर दृश्य समानताओं के बावजूद मेसोपोटामिया, मिस्र और मेसोअमेरिका की स्मारकीय संरचनाएँ—क्रमशः ज़िग्गुरात, पिरामिड और मंदिर-पिरामिड—भिन्न सांस्कृतिक, संरचनात्मक और कार्यात्मक ढाँचों से उत्पन्न हुईं, चित्र 3.2।

ऊर के महान ज़िग्गुरात जैसे **मेसोपोटामियाई ज़िग्गुरात** मुख्यतः धूप में सुखाई और भट्ठी में पकाई गई कच्ची ईंटों के विशाल स्तरित मंच थे; बिटुमेन जलरोधी पदार्थ के रूप में प्रयुक्त होता था। ये संरचनाएँ पूर्णतः ठोस थीं और उन मंदिरों के ऊँचे आधार का कार्य करती थीं जो देवताओं के लोक की ओर भौतिक आरोहण का प्रतीक थे। ज़िग्गुरात सार्वजनिक स्थान नहीं, केवल पुरोहितों के लिए सुलभ पवित्र परिसर था। संरचनात्मक रूप से ज़िग्गुरात संपीडन-प्रतिबलों को घटाने और गुरुत्व-भारों के अधीन टिकाऊपन बढ़ाने के लिए भारवाही पुंज तथा क्रमिक संकुचन पर निर्भर थे।

गीज़ा के महान पिरामिड में चरितार्थ **मिस्री पिरामिड** ऐसी स्मारकीय समाधियाँ थीं जिन्हें फ़राओ के शरीर को रखने और परलोक-यात्रा सुगम बनाने के लिए अभिकल्पित किया गया था। मुख्यतः चूना-पत्थर और ग्रेनाइट से निर्मित ये पिरामिड उत्कृष्ट ज्यामितीय परिशुद्धता और आंतरिक कक्ष-विन्यास प्रदर्शित करते थे। उनका केंद्र अंतर्मुखी था: अंत्येष्टि-कार्य, शवपेटिका की रक्षा तथा सौर और तारकीय चक्रों से ब्रह्मांडीय संरेखण। पूर्ण होने के बाद इन पिरामिडों में प्रवेश या अनुष्ठान नहीं होता था। उनकी अभियांत्रिक उत्कृष्टता परिशुद्ध चिनाई, आनत तलों द्वारा भार-मोचन और सुदृढ आंतरिक रिक्ति-प्रबंधन में निहित थी।

चिचेन इत्सा और तेनोच्तित्लान जैसे **मेसोअमेरिकी मंदिर-पिरामिडों** में आनुष्ठानिक, खगोलीय और राजनीतिक कार्य संयुक्त थे। ये संरचनाएँ प्रायः चरणों में बनती थीं और पुराने अंतर्भागों पर नई परतें जोड़ी जाती थीं। पत्थर, चूने के गारे और मलबा-भराव से निर्मित ये पिरामिड शिखर-मंदिरों को सहारा देते थे, जिनका उपयोग अनुष्ठानों, सार्वजनिक प्रदर्शनों और आकाशीय प्रेक्षण के लिए होता था। मिस्री पिरामिडों के विपरीत ये समाधियाँ नहीं थे; ज़िग्गुरातों के विपरीत ये सुलभ और सहभागितापूर्ण थे। उनके सोपानी रूप, चौड़ी सीढ़ियाँ तथा सौर और शुक्र-चक्रों से संरेखण उन्हें नगर के सामाजिक-राजनीतिक जीवन में गहराई से स्थापित करते थे।

संक्षेप में, तीनों परंपराओं ने सोपानी या पिरामिडीय रूप बनाए, किंतु उनके प्रयोजन भिन्न थे: - *ज़िग्गुरात* ने देवत्व को ऊँचा उठाया। - *मिस्री पिरामिड* ने मृतक को प्रतिष्ठित किया। - *मेसोअमेरिकी मंदिर-पिरामिड* ने जीवित समाज को मंच दिया।

ये संरचनाएँ प्रत्येक सभ्यता के विश्व-दृष्टिकोण, तकनीकी सामर्थ्य और भौतिक परिवेश को प्रतिबिंबित करती हैं।

मापन-पद्धतियाँ और ज्यामितीय ज्ञान बाद के शास्त्रीय स्मारकों के संरचनात्मक तर्क का विश्लेषण करने से पहले यह तुलना उपयोगी है कि तीन महान आरंभिक सभ्यताओं—मिस्री, मेसोपोटामियाई और मेसोअमेरिकी—ने स्थान को कैसे मापा और ज्यामिति को किस प्रकार संहिताबद्ध किया। सारणी 3.3 में (i) उनके अपनाए मूल मात्रक, (ii) उन मात्रकों के उपविभाजन की विधि, (iii) निर्माण को निर्देशित करने वाले ज्यामितीय विचार और (iv) हम तक पहुँचे गणितीय अभिलेख अथवा नियतांक प्रमुखता से दिखाए गए हैं। संकेतन और प्रयोजन में स्पष्ट अंतर के बावजूद प्रत्येक परंपरा ने अनुभवजन्य प्रेक्षण को सुदृढ वास्तु-नियमों में रूपांतरित किया।

प्रारूप समीक्षा

तालिका 3.2: सभ्यताओं की स्मारकीय वास्तुकला का तुलनात्मक वैषम्य

विशेषता	ज़िग्गुरात (मेसोपोटामिया)	पिरामिड (मिस्र)	मंदिर-पिरामिड (मेसोअमेरिका)
प्रमुख पदार्थ	कच्ची ईंट, बिटुमेन	चूना-पत्थर, ग्रेनाइट	पत्थर, चूने का गारा, मलबा-अंतर्भाग
कार्य	देवताओं के मंदिर का आधार	राजकीय समाधि	आनुष्ठानिक, राजनीतिक और खगोलीय मंच
आंतरिक भाग	ठोस पुंज; कोई कक्ष नहीं	आंतरिक मार्ग, समाधि-कक्ष	आंतरिक कक्ष और पुनर्निर्मित अंतर्भाग संभव
प्रवेश	केवल पुरोहितों तक सीमित	कोई नहीं (अंत्येष्टि के बाद)	सार्वजनिक अनुष्ठान, शिखर-मंदिर तक प्रवेश
ब्रह्मांड-दृष्टि	स्वर्ग और पृथ्वी के बीच संबंध	तारों और सूर्य से संरेखण; परलोक-यात्रा	पंचांग-चक्र, अयनांत, शुक्र का अनुशीलन
संरचनात्मक तर्क	गुरुत्व-भारों के लिए सोपानी पुंज	आनत तल, रिक्तियों के लिए टोडा-निर्माण	सोपानी चबूतरे, अपरदन-नियंत्रण के लिए चौड़े मंच
प्रतीकवाद	विश्व-अक्ष; दैवी निवास	फ़राओ की शाश्वत शक्ति	पवित्र राजसत्ता और ब्रह्मांडीय व्यवस्था का मंच

तालिका 3.3: तीन प्राचीन संस्कृतियों में मापन-प्रथा और ज्यामितीय केंद्र

सभ्यता	प्रमुख मात्रक	उपविभाजन / संख्या-पद्धति	ज्यामितीय केंद्र
मिस्री	क्यूबिट (कोहनी से अंगुली की नोक तक)	1 क्यूबिट 7 हथेलियाँ 28 अंगुल	सेकेड (प्रति क्यूबिट उत्थान कृषैतिज विस्तार); पिरामिड कोण
मेसोपोटामियाई	क्यूबिट जैसा माप (क्षेत्रानुसार भिन्न)	~30 अंगुल प्रति क्यूबिट; आधार 60 के षष्ट्यंश भिन्न	क्षेत्रफल/आयतन सन्निकटन; समकोण त्रिभुज-सूचियाँ (Plimpton 322)
मेसोअमेरिकी	Tlacxitl (बित्ता); माया *tun* (360 दिन का वर्ष)	हथेलियाँ, अंगुल; आधार 20 की विंशतिआधारी संख्याएँ	सोपानी पिरामिड सममिति; खगोलीय संरेखण

सभ्यता	गणितीय अभिलेख	ज्ञात नियतांक अथवा अनुपात
मिस्री	राइंड और मॉस्को गणितीय पपाइरस	सेकेड (कोटैंजेंट); $\sqrt{2}$ और π के सन्निकटन
मेसोपोटामियाई	कीलाक्षर पट्टिकाएँ (Plimpton 322, YBC 7289)	पाइथागोरीय त्रिक; $\sqrt{2}$; षष्ट्यंश भिन्न
मेसोअमेरिकी	पंचांग-आधारित अनुपात; प्रेक्षणात्मक खगोल-विज्ञान	सौर/शुक्र चक्र; मॉड्यूलर सममिति-अनुपात

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 3.4: सभ्यताओं के प्रमुख संरचनात्मक नवाचारों की तुलनात्मक समयरेखा

नवाचार	सभ्यता	अनुमानित तिथि	उदाहरण/टिप्पणी
पदार्थ-संबंधी नवाचार			
पकी ईंट	मेसोपोटामिया	c. 3500 BCE	उरुक काल की संरचनाएँ
विशाल पाषाण-चिनाई	मिस्र	c. 2660 BCE	जोसर का सोपानी पिरामिड
द्रवचालित कंक्रीट	रोम	c. 300 BCE	पॉज़ोलाना सहित Opus caementicium
ढलवाँ लोहा	चीन	c. 4th century BCE	कृषि-उपकरण, बाद में संरचनात्मक उपयोग
99% शुद्ध पिटवाँ लोहा	भारत	c. 400 CE	दिल्ली का लौह स्तंभ
संरचनात्मक प्रणालियाँ			
टोडेदार मेहराब	मेसोपोटामिया	c. 4000 BCE	भूमिगत जल-निकास, समाधियाँ
वास्तविक कीलाकार-खंड मेहराब	एट्रस्कन/रोमन	c. 700-500 BCE	रोमनों द्वारा परिष्कृत
गुंबद-निर्माण	रोम	c. 126 CE	पैंथियन (अप्रबलित कंक्रीट)
कोष्ठक प्रणालियाँ (dougong)	चीन	c. 500 BCE	भूकंप-प्रतिरोधी काष्ठ
नम्य जोड (kanawa-tsugi)	जापान	c. 600 CE	होर्यू-जी मंदिर
अभियांत्रिक उपलब्धियाँ			
सिंचाई प्रणालियाँ	मेसोपोटामिया	c. 3000 BCE	नहर-जाल
पिरामिड-निर्माण	मिस्र	c. 2560 BCE	गीज़ा का महान पिरामिड
दूजियांग्येन सिंचाई	चीन	256 BCE	आज भी कार्यरत
रोमन सडकें	रोम	c. 312 BCE	विया अप्पिया
महान दीवार (कूटी मिट्टी)	चीन	c. 220 BCE	छिन राजवंश का एकीकरण

प्रारूप संस्करण

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3.2 शास्त्रीय पुराकाल: ज्यामिति, सिद्धांत और साम्राज्य

3.2.1 फ़ारस: साम्राज्यिक मंच, सेतु और क़नात

संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहास में फ़ारस का अद्वितीय स्थान है; वह उत्तराधिकारी भी था और नवप्रवर्तक भी। मेसोपोटामियाई निर्माण-परंपराएँ ग्रहण करने के बाद फ़ारसी अभियंता उनसे बहुत आगे बढ़े और ऐसे नवाचार किए जिन्होंने यूनानी तथा रोमन अभियांत्रिक प्रथाओं, दोनों को प्रभावित किया। यूनानी-फ़ारसी युद्धों (499-449 BCE) से आरंभ होकर सिकंदर की विजयों और परवर्ती हेलेनिस्टिक काल तक विस्तृत गहन सांस्कृतिक आदान-प्रदान ने तकनीकी ज्ञान का द्विदिश प्रवाह उत्पन्न किया, जिससे दोनों परंपराएँ समृद्ध हुईं।

फ़ारस को *शास्त्रीय पुराकाल* खंड में इसलिए रखा गया है कि आख़ेमेनिड साम्राज्य (c. 550–330 BCE) शास्त्रीय यूनान के समकालीन था और साम्राज्यिक रोम से ठीक पहले फला-फूला। तकनीकी और कलात्मक दृष्टि से फ़ारसी अभियंताओं ने मेसोपोटामियाई कच्ची-ईंट परंपराएँ विरासत में पाईं, किंतु वे उनसे बहुत आगे बढ़े; उन्होंने पर्सेपोलिस जैसे पाषाण-स्तंभों वाले स्मारकीय राजप्रासाद परिसर, परिष्कृत सेतु और विस्तृत जल-प्रबंधन प्रणालियाँ बनाईं। इन फ़ारसी नवाचारों ने यूनानी और रोमन संरचनात्मक प्रथाओं को प्रभावित किया और उनकी बराबरी की। इसके अतिरिक्त, यूनानी-फ़ारसी युद्धों से आरंभ और बाद के हेलेनिस्टिक आदान-प्रदान तक विस्तृत सांस्कृतिक अंतःक्रियाओं ने फ़ारसी तथा भूमध्यसागरीय अभियांत्रिक परंपराओं को एक साझा शास्त्रीय आख्यान में बाँधा और फ़ारस को पूर्व की पृथक वास्तु-विकास यात्राओं से स्पष्टतः अलग किया।

आख़ेमेनिड साम्राज्यिक वास्तुकला फ़ारसी अभियांत्रिकी आख़ेमेनिड काल में अपने चरम पर पहुँची, जिसका उदाहरण पर्सेपोलिस का स्मारकीय राजप्रासाद परिसर है। लगभग 450 by 300 meters के विशाल पाषाण-मंच पर, आसपास के मैदान से 15 meters ऊँचा निर्मित पर्सेपोलिस विस्तृत रूप से उत्कीर्ण पाषाण-स्तंभों से युक्त था, जो भारी छत-भारों को सुदृढ़ नींवों पर प्रभावी ढंग से वितरित करते थे। केवल अपादाना कक्ष में ही चूना-पत्थर के seventy-two एकाश्म स्तंभ थे; प्रत्येक लगभग 20 meters ऊँचा और विशिष्ट द्विमुखी वृषभ-शीर्ष से युक्त था।

परिशुद्ध चिनाई और जटिल कलात्मक विवरण संरचनात्मक स्थिरता तथा प्रतीकात्मक अभिव्यक्ति के साभिप्राय संलयन को दर्शाते हैं और साम्राज्यिक शक्ति की भव्यता को पुष्ट करते हैं। लोहे के डॉवेल और ढली सीसे की ऐंठनियाँ स्तंभ-खंडों को परस्पर बाँधती थीं, जबकि देवदार और सरो की धरनें 25–30 meters तक फैलकर पुराकाल की सबसे चौड़ी बाधारहित छतों में से एक बनाती थीं—एक ऐसी उपलब्धि जिसका अनुकरण बाद के यूनानी हाइपोस्टाइल कक्षों ने करना चाहा।

फ़ारसी अभियंताओं ने दीर्घ-विस्तार सेतु-निर्माण में भी निपुणता प्राप्त की: बॉस्फोरस पर दारायवहु का[3] पंटून सेतु और हेल्लेस्पॉन्ट पर ज़र्क्सीस का[4] सेतु उत्प्लावकता, लंगरण और लयबद्ध भारण की परिष्कृत समझ दर्शाते थे और पूरी सेनाओं, घोड़ों तथा घेराबंदी-यानों को खुले जल के पार जाने में सक्षम बनाते थे।

[3]बॉस्फोरस पर दारायवहु का पंटून सेतु (c. 513 BCE) सामोस द्वीप के अभियंता मैंड्रोक्लीज़ ने बनाया था, ताकि दारायवहु I की सेना सीथियनों के विरुद्ध अभियान के लिए यूरोप जा सके। हेरोडोटस ने सेतु का विस्तृत वर्णन किया और लिखा कि दारायवहु ने असीरियाई तथा यूनानी अभिलेखों वाले स्मारक-स्तंभ खड़े किए, जिन पर उसकी सेना के सभी राष्ट्र सूचीबद्ध थे। मैंड्रोक्लीज़ ने मिले पर्याप्त पारिश्रमिक से सेतु पार करती सेना का चित्र बनवाया और उसे एक सूक्ति सहित सामोस के हेरा मंदिर को समर्पित किया, चित्र 3.5। ऐतिहासिक रूप से महत्त्वपूर्ण और सुप्रलेखित होने पर भी यह सेतु किसी विशिष्ट व्यक्तिवाचक नाम के स्थान पर केवल अपने वर्णनात्मक नाम से जाना जाता प्रतीत होता है (Herodotus, 1921 PDF)।

[4]हेल्लेस्पॉन्ट पर ज़र्क्सीस के पंटून सेतु (480 BCE) वास्तव में यूनान पर द्वितीय फ़ारसी आक्रमण के दौरान निर्मित दो समानांतर सेतु थे। एबिडोस से सेस्टोस के निकट तक बने ये सेतु लगभग सात स्टेडिया (c. 1,300 meters) लंबे थे। उत्तर-पूर्वी सेतु में 360 जहाज़ (पेंटेकॉन्टर और ट्राइरीम) तथा दक्षिण-पश्चिमी सेतु में 314 जहाज़ प्रयुक्त हुए; सबको बाँधकर तख़्तों से ढका गया था। प्रसिद्ध कथानुसार सेतुओं का पहला समूह तूफ़ान से नष्ट हो गया, जिस पर ज़र्क्सीस ने प्रतीकात्मक दंड के रूप में हेल्लेस्पॉन्ट पर 300 कोड़े लगवाए, तप्त लोहे और बेड़ियाँ जल में फिंकवाईं तथा उत्तरदायी अभियंताओं को मृत्युदंड दिया। पुनर्निर्मित सेतुओं ने ज़र्क्सीस की विशाल सेना को सात दिन और रात निरंतर चलने वाली पारगमन-क्रिया में सफलतापूर्वक पार कराया। दारायवहु के पूर्ववर्ती सेतु की तरह ये भी किसी विशिष्ट व्यक्तिवाचक नाम के बजाय अपने वर्णनात्मक नामों से जाने जाते थे (Herodotus, 1921 PDF)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

87. Having viewed the Pontus, Darius sailed back to the bridge, of which Mandrocles of Samos was the chief builder; and when he had viewed the Bosporus also, he set up by it two pillars of white stone, engraving on the one in Assyrian and on the other in Greek characters the names of all the nations that were in his army; in which were all the nations subject to him. The full tale of these, over and above the fleet, was seven hundred thousand men, reckoning therewith horsemen, and the number of ships that mustered was six hundred. These pillars were afterwards carried by the Byzantines into their city and there used to build the altar of Orthosian [1]

[1] A deity worshipped especially at Sparta; the meaning of the epithet is uncertain.

Artemis, save for one column covered with Assyrian writing that was left beside the temple of Dionysus at Byzantium. Now if my reckoning be true, the place where king Darius bridged the Bosporus was midway between Byzantium and the temple at the entrance of the sea.

88. After this, Darius, being well content with his bridge of boats, made to Mandrocles the Samian a gift of ten of every kind;[1] wherefrom Mandrocles took the firstfruits and therewith had a picture made showing the whole bridge of the Bosporus, and Darius sitting aloft on his throne and his army crossing; this he set up in the temple of Here, with this inscription:

"This Picture Mandrocles to Here gives,
Whereby for ever his Achievement lives;
A Bridge of Boats o'er *Bosp'rus'* fishful Flood
He built; Darius saw, and judg'd it good;
Thus for himself won Mandrocles a Crown,
And for his isle of *Samos* high Renown."

34. Beginning then from Abydos they whose business it was made bridges across to that headland, the Phoenicians one of flaxen cables, and the Egyptians the second, which was of papyrus. From Abydos to the opposite shore it is a distance of seven furlongs.[2] But no sooner had the strait been bridged than a great storm swept down and brake and scattered all that work.

35. When Xerxes heard of that, he was very angry, and gave command that the Hellespont be scourged with three hundred lashes, and a pair of

[1] The modern width at the narrowest part is nearly half as much again; perhaps this can be explained by the washing away of the coasts, due to a current which strikes them near Sestos and rebounds on Abydos.

fetters be thrown into the sea; nay, I have heard ere now that he sent branders with the rest to brand the Hellespont. This is certain, that he charged them while they scourged to utter words outlandish and presumptuous: "Thou bitter water," they should say, "our master thus punishes thee, because thou didst him wrong albeit he had done thee none. Yea, Xerxes the king will pass over thee, whether thou wilt or no; it is but just that no man offers thee sacrifice, for thou art a turbid and a briny river." Thus he commanded that the sea should be punished, and that they who had been overseers of the bridging of the Hellespont should be beheaded.

चित्र 3.5: फ़ारसियों द्वारा बॉस्फोरस पार करने पर हेरोडोटस, (Herodotus, 1921 PDF)

सासानी सेतु और द्रवचालित संरचनाएँ (224–651 CE) आख़ेमेनिडों के बाद सासानी राजवंश में फ़ारसी संरचनात्मक अभियांत्रिकी और विकसित हुई, जैसा परिष्कृत सेतु-निर्माण प्रथाओं से सुपष्ट है। प्रमुख उदाहरणों में देज़फूल और शूश्तर के सेतु हैं; दोनों शापुर~I के शासनकाल में रोमन सम्राट वेलेरियन पर उसकी विजय के बाद लगभग 260~CE में बनवाए गए।

देज़ नदी पर बने देज़फूल सेतु के निर्माण में लगभग 70,000 रोमन युद्धबंदियों का श्रम प्रयुक्त हुआ। कारून नदी पार करने वाला शूश्तर सेतु (*Band-e Kaisar*) एक साथ सेतु और बाँध, दोनों का कार्य करता था। दोनों संरचनाओं में सावधानी से अभिकल्पित ईंट-पत्थर के मेहराब थे, जो गुरुत्व-भारों को नींवों तक प्रभावी ढंग से पहुँचाते थे; परिवहन और कृषेत्रीय जल-प्रबंधन के दोहरे प्रयोजन के लिए उनमें वीयर तथा जल-वाहिकाओं जैसे द्रवचालित घटक भी समेकित थे (Huff, 2005)।

ये सेतु द्रवचालित बलों की उन्नत समझ दर्शाते थे। उनके सोपानी चिनाई-विपथन वीयरों और आरंभिक पाषाण बाँधों में प्रक्षालन-सुरक्षा तथा प्रवाह-नियंत्रण के वे सिद्धांत निहित थे जिन्होंने बाद में इस्लामी और यूरोपीय द्रवचालित अभियांत्रिकी को प्रभावित किया।

क़नात: भूमिगत द्रवचालन और संरचनात्मक नवाचार (1st millennium BCE onward) द्रवचालित अभियांत्रिकी में फ़ारसी निपुणता का उदाहरण *q*anat प्रणाली है—एक परिष्कृत भूमिगत सिंचाई-जाल, जो शुष्क परिवेश में कृषि बनाए रखने के लिए भूजल को बहुत दूर तक पहुँचाता था, चित्र 3.6a। *q*anats के अभिकल्प में ढाल, द्रवचालित प्रवणता और भूजल गतिकी की परिशुद्ध गणनाएँ आवश्यक थीं, जो तरल-प्रवाह की उन्नत अनुभवजन्य समझ दर्शाती हैं।

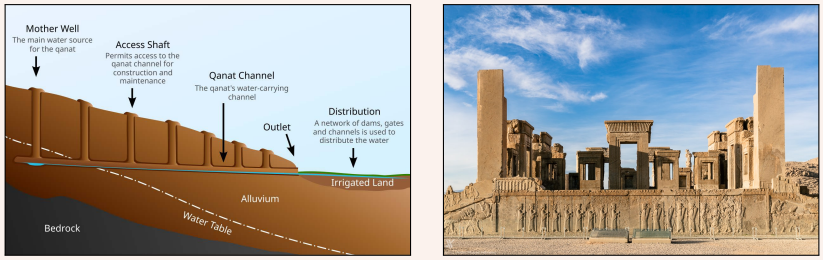
*q*anat निर्माण के लिए आवश्यक संरचनात्मक नवाचार भी समान रूप से महत्त्वपूर्ण थे:

- **ऊर्ध्वाधर प्रवेश-कूप**: नियमित अंतर पर स्थित और ढहने से बचाने के लिए पत्थर अथवा पकी ईंट के अस्तर से प्रबलित
- **मेहराबी दीर्घाएँ**: अस्थिर मृदा में उत्खनन को स्थिर करने के लिए ईंट अथवा पत्थर से बनी बैरल-वॉल्ट सुरंगें

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **उन्नत पदार्थ**: भूवैज्ञानिक और भूकंपीय प्रतिबलों के विरुद्ध प्रतिरोध बढ़ाने के लिए पकी ईंट, चूने के गारे और पाषाण-चिनाई का सावधानीपूर्वक चयन

संपूर्ण साम्राज्य में फैले ये *q*anat जाल—ऊर्ध्वाधर कूपों से संवातित, मंद ढाल वाली kilometer-long भूमिगत दीर्घाएँ—परिशुद्ध भू-तकनीकी सर्वेक्षण, भूजल-नियंत्रण और दीर्घकालीन अनुरक्षण-नियोजन की माँग करते थे। इनमें से अनेक आज भी उपयोग में हैं और मानवता की सर्वाधिक चिरस्थायी द्रवचालित उपलब्धियों में गिने जाते हैं (Wulff, 1968)।



(a) क़नात (b) पर्सेपोलिस

चित्र 3.6: फ़ारस

3.2.2 अरब-इस्लामी योगदान: संरचनात्मक अभियांत्रिकी में नवाचार

7th century से अरब-इस्लामी अभियंताओं ने संरचनात्मक नवाचारों का क्रमबद्ध विकास किया, जिन्होंने विश्वव्यापी वास्तु-प्रथा पर गहरा प्रभाव डाला। उनके योगदानों में परिष्कृत मेहराब-रूप, उन्नत गुंबद-निर्माण, परिष्कृत गणितीय आधार और नगरीय पैमाने के नियोजन-सिद्धांत सम्मिलित थे।

मेहराबों और वॉल्टों में वास्तु-परिष्कार अरब-इस्लामी अभियंताओं ने नालाकार, नुकीले और बहुखंडी मेहराब सहित मेहराब-रूपों का विस्तृत भंडार विकसित किया। विशेषतः नुकीला मेहराब पार्श्व प्रणोद घटाकर हल्की और ऊँची दीवारें संभव करता था; इस प्रकार वह रोमन अर्धवृत्ताकार मेहराब की अपेक्षा महत्त्वपूर्ण संरचनात्मक प्रगति था। बाद में यह नवाचार गॉथिक वास्तुकला के लिए निर्णायक सिद्ध हुआ (अध्याय 4)।

मस्जिदों, मदरसों और राजप्रासादों में मेहराबों के व्यापक उपयोग ने न केवल संरचनात्मक लाभ दिए, बल्कि खुले और प्रकाशमान आंतरिक स्थल भी संभव किए, जो इस्लामी वास्तुकला की पहचान बने। इसके अतिरिक्त मुक़र्नस जैसी वॉल्ट प्रणालियाँ—त्रिविमीय ज्यामितीय मधुकोषीय कोशिकाएँ—गुंबदों और इवानों में अलंकरणात्मक तथा संरचनात्मक रूप से भार-वितरक, दोनों प्रकार की विशेषताओं के रूप में उभरीं।

गुंबद-निर्माण में संरचनात्मक नवाचार इस्लामी अभियंताओं ने नवीन संरचनात्मक तकनीकों द्वारा गुंबद-निर्माण को परिपूर्ण किया। पेंडेंटिव और स्क्विंच के उपयोग से वृत्ताकार गुंबदों को वर्गाकार अथवा आयताकार आधारों पर धारण करना संभव हुआ और एक मूलभूत ज्यामितीय तथा संरचनात्मक चुनौती हल हुई। डोम ऑफ़ द रॉक (691 CE) और बाद में इस्तांबुल के विशाल गुंबदों ने संपीडन-वलयों, पार्श्व प्रणोद-वितरण और अनेक संरचनात्मक प्रणालियों के एकीकरण की परिष्कृत समझ प्रदर्शित की।

फ़ारस को *शास्त्रीय पुराकाल* में इसलिए रखा गया है कि आख़ेमेनिड साम्राज्य (c. 550–330 BCE) कालक्रम में शास्त्रीय यूनान के साथ व्याप्त था और साम्राज्यिक रोम से तुरंत पहले आया। यद्यपि फ़ारसी निर्माता मेसोपोटामियाई कच्ची-ईंट परंपराओं के उत्तराधिकारी थे, उन्होंने शीघ्र ही विशाल स्तर के कटे पत्थर और काष्ठ-निर्माण को परिपूर्ण कर लिया। उदाहरणार्थ, पर्सेपोलिस में अपादाना कक्ष पाषाण चबूतरे पर खड़ा था और उसमें चूना-पत्थर के बहत्तर एकाश्म स्तंभ थे; प्रत्येक लगभग 20 m ऊँचा और द्विमुखी वृषभ-शीर्ष से युक्त था। लोहे के डॉवेल और ढली सीसे की ऐंठनियाँ स्तंभ-खंडों को बाँधती थीं, जबकि देवदार और सरो की धरनें 25–30 m तक फैलकर पुराकाल की सबसे चौड़ी बाधारहित छतों में से एक बनाती थीं—एक ऐसी उपलब्धि जिसका अनुकरण बाद के यूनानी हाइपोस्टाइल कक्षों ने करना चाहा (Curatola and Scarcia, 2003)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

फ़ारसी अभियंताओं ने दीर्घ-विस्तार सेतु-निर्माण में भी निपुणता पाई: बॉस्फोरस पर दारायवहु का पंटून सेतु और हेल्लेस्पॉन्ट पर ज़र्क्सीस का अधिक प्रसिद्ध सेतु उत्प्लावकता, लंगरण और लयबद्ध भारण की परिष्कृत समझ दर्शाते थे तथा पूरी सेनाओं, घोड़ों और घेराबंदी-यानों को खुले जल के पार जाने में सक्षम बनाते थे।

साम्राज्य-व्यापी *qanāt networks* भी समान रूप से उन्नत थे—ऊर्ध्वाधर कूपों से संवातित, मंद ढाल वाली kilometer long भूमिगत दीर्घाएँ–जिनके लिए परिशुद्ध भू-तकनीकी सर्वेक्षण, भूजल-नियंत्रण और दीर्घकालीन अनुरक्षण-नियोजन आवश्यक था; अनेक आज भी उपयोग में हैं (Behnia, 2021)। पसारगाद में सोपानी चिनाई-विपथन वीयर और कारून नदी के आरंभिक पाषाण बाँध जैसे द्रवचालित निर्माण द्रवगतिक भारों तथा प्रक्षालन-सुरक्षा पर फ़ारसी अधिकार को और स्पष्ट करते हैं।

स्तंभ-और-धरन, सेतु और भूमिगत जलसेतु के इन नवाचारों ने समकालीन यूनानी और बाद की रोमन संरचनात्मक प्रथा की न केवल बराबरी की, बल्कि उसे प्रत्यक्ष रूप से प्रभावित भी किया। यूनानी-फ़ारसी युद्धों के गहन सांस्कृतिक संपर्क और उसके बाद शताब्दियों तक हुए हेलेनिस्टिक आदान-प्रदान ने फ़ारसी उपलब्धियों को व्यापक शास्त्रीय अभियांत्रिक परंपरा में पिरोया और उन्हें अधिक पूर्व में भारत, चीन तथा जापान में विकसित होती पृथक वास्तु-विकास यात्राओं से अलग स्थान दिया।

पदार्थ-रणनीतियाँ और मॉड्यूलरता: कोर्दोबा की महान मस्जिद *कोर्दोबा की महान मस्जिद* (निर्माणारंभ 784~CE), चित्र 3.7a, अपनी क्रांतिकारी द्विस्तरीय मेहराब-प्रणाली द्वारा संरचनात्मक प्रतिभा का उदाहरण प्रस्तुत करती है। पतले स्तंभों पर टिके इन एक-दूसरे के ऊपर स्थित मेहराबों ने अपर्याप्त स्तंभ-ऊँचाई की समस्या हल की और साथ ही विशिष्ट वास्तु-भाषा उत्पन्न की। पत्थर और ईंट के कीलाकार खंडों के वैकल्पिक उपयोग ने संरचनात्मक प्रत्यास्थता तथा पार्श्व दृढता बढाने के साथ मॉड्यूलर सौंदर्य और रचनात्मक लय भी प्रस्तुत की।

इस रणनीति ने विस्तृत प्रार्थना-कक्षों में संरचनात्मक अखंडता बनाए रखते हुए स्थानिक नम्यता बढाई और सहज विस्तार संभव किया—मस्जिद का संरचनात्मक तर्क सुरक्षित रखते हुए उसे कई बार विस्तृत किया गया (Fletcher, 2004)।

संरचनात्मक प्रथा के आधार के रूप में गणित संरचनात्मक अभियांत्रिकी में इस्लामी योगदानों के आधार में गणित के युगांतरकारी विकास थे। अल-ख़्वारिज़्मी (9th century) जैसे विद्वानों ने बीजगणितीय विधियों को औपचारिक रूप दिया, जिससे संरचनात्मक संबंधों का प्रतीकात्मक परिचालन और परिशुद्ध वास्तु-गणना संभव हुई। उमर ख़य्याम (11th century), चित्र 3.7b, ने घन समीकरणों के प्रति अपने ज्यामितीय दृष्टिकोणों से स्थानिक नियोजन और वॉल्ट-ज्यामिति की गणनाओं को प्रभावित किया।

इन गणितीय प्रगतियों ने अधिक यथार्थ प्रतिबल-अनुमान, वॉल्ट-वक्रता नियंत्रण और अभिन्यास-परिशुद्धता को सहारा दिया तथा अमूर्त गणितीय तर्क को व्यावहारिक अभियांत्रिक अनुप्रयोगों से जोड़ा। इस्लामी गणितज्ञों द्वारा त्रिकोणमिति के विकास ने मेहराब-रूपरेखाओं, गुंबद-ज्यामितियों और संरचनात्मक बलों की गणना के लिए आवश्यक उपकरण दिए (Hogendijk, 1994)।

नगरीय पैमाने का संरचनात्मक नियोजन अलग-अलग स्मारकों से आगे बढकर इस्लामी अभियंताओं ने नगरीय पैमाने के संरचनात्मक संगठन में योगदान दिया। *बग़दाद* और *इस्फ़हान* जैसे नगरों में अक्षीय नियोजन, स्मारकीय द्वार तथा सुव्यवस्थित बाज़ार और आवास-खंड थे। इन नगरों की मेहराबी दीर्घाओं के भार-पथ, मॉड्यूलर स्तंभ-जाल और जल-वितरण प्रणालियाँ वास्तु-परिष्कृति के साथ वितरित भारण, पार्श्व स्थिरता तथा पदार्थ-दक्षता की अनुभवजन्य समझ भी दर्शाती हैं (Hill, 2019)।

आच्छादित बाज़ारों, आवासीय परिसरों और सार्वजनिक स्नानागारों सहित नगरीय अवसंरचना के साथ संरचनात्मक प्रणालियों के एकीकरण ने इस्लामी अभियंताओं को समग्र पर्यावरणीय अभिकल्प का अग्रदूत बनाया।

3.2.3 स्थैतिकी और संरचनात्मक यांत्रिकी में यूनानी योगदान

सरल मशीनों का यूनानी युक्तिसंगतीकरण प्राचीन यूनानियों ने संरचनात्मक यांत्रिकी में मूलभूत योगदान दिए, विशेषतः सरल मशीनों के तर्कसंगत विश्लेषण द्वारा। उत्तोलक, घिरनी और आनत तल जैसे उपकरण पूर्ववर्ती सभ्यताओं द्वारा शताब्दियों से प्रयुक्त हो रहे थे, किंतु उनके व्यवहार को समझने के लिए सैद्धांतिक ढाँचे सर्वप्रथम यूनानियों ने दिए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) कोर्दोबा (b) उमर ख़य्याम

चित्र 3.7: अरब-इस्लामी संसार



(a) एथेंस का विद्यालय (राफ़ेल) (b) पार्थेनॉन

चित्र 3.8: यूनान

इन उपकरणों में *उत्तोलक* सबसे प्रारंभिक सरल मशीन है। यद्यपि मेसोपोटामियावासी और मिस्री इसका उपयोग निर्माण में करते थे, इसके यांत्रिक सिद्धांतों की व्याख्या करने वाला क्रमबद्ध सिद्धांत सर्वप्रथम यूनानियों ने विकसित किया।

पेरिपैटेटिक संप्रदाय और टैरेंटम का आर्किटास उत्तोलक की सबसे आरंभिक सैद्धांतिक चर्चा पेरिपैटेटिक ग्रंथ *Mechanical Problems*, में मिलती है, जिसका श्रेय अरस्तू के लाइसीयम को दिया जाता है।

कभी इसे प्रामाणिक रूप से अरस्तू-रचित माना जाता था, किंतु अब *Mechanical Problems* को आरंभिक यांत्रिक चिंतन का संकलन समझा जाता है, जो संभवतः टैरेंटम के आर्किटास (c. 428–350 BCE) जैसे विचारकों से प्रभावित था। आर्किटास यूनानी नगर टैरेंटम (दक्षिणी इटली का आधुनिक तारांतो) का पाइथागोरीय दार्शनिक, गणितज्ञ और राजनेता था। उसे प्रायः *गणितीय यांत्रिकी* के संस्थापकों में गिना जाता है, क्योंकि भौतिक समस्याओं पर मात्रात्मक और ज्यामितीय तर्क लागू करने वालों में वह अग्रणी था। ग्रंथ के प्रश्न-3 में उससे संबद्ध तर्क आघूर्ण-भुजाओं के संतुलन की अवधारणा प्रस्तुत करता और आद्य-ऊर्जा तर्क का सहारा लेता है—अर्थात आलंब से अधिक दूरी पर लगाए जाने पर छोटे बल बड़े भारों को चला सकते हैं; इस प्रकार वह यांत्रिक लाभ की आधुनिक अवधारणा का पूर्वाभास देता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> ऐसा क्यों है कि छोटे बल उत्तोलक के माध्यम से बड़े भारों को चला सकते हैं, जैसा ग्रंथ के आरंभ में कहा गया था, जबकि स्वाभाविक रूप से उत्तोलक का भार भी जुड़ता है?
>
> ... किंतु चूँकि समान भार के आवेग में केंद्र से अधिक त्रिज्या अधिक तीव्रता से चलती है, और उत्तोलक में तीन तत्त्व हैं—आलंब, अर्थात डोरी अथवा केंद्र, और दो भार, एक जो गति उत्पन्न करता है तथा दूसरा जिसे चलाया जाता है—अतः चलाए गए भार का उसे चलाने वाले भार से अनुपात, केंद्र से उनकी दूरियों के अनुपात का व्युत्क्रम है। इसलिए आलंब से दूरी जितनी अधिक होगी, वह उतनी ही सरलता से चलेगा।
>
> Peripatetic School, circa 4th century BCE, No. 3

बल और दूरी के गुणनफल पर आधारित यह गतिज तर्क आघूर्ण तथा कार्य-ऊर्जा संरक्षण की आधुनिक अवधारणाओं का पूर्वाभास देता है और संभवतः आर्किमिडीज़ के बाद के ज्यामितीय निरूपण की अपेक्षा उत्तोलक-नियम का अधिक सहज औचित्य प्रस्तुत करता है।

आर्किमिडीज़ और स्थैतिकी की नींव आर्किमिडीज़ (c. 287–212 BCE), ने अपने ग्रंथ *On the Equilibrium of Planes*, (Archimedes, -250 📄) में उत्तोलक के नियम को औपचारिक रूप दिया और शास्त्रीय स्थैतिकी की नींव रखी। उसकी छठी प्रतिज्ञप्ति वह कथन प्रस्तुत करती है जिसे यांत्रिकी का पहला समीकरण माना जा सकता है:

> परिमाण उन दूरियों पर संतुलन में होते हैं जो उनके भारों के व्युत्क्रमानुपाती होती हैं।
>
> Archimedes, -250 📄, Proposition 6 Book I

अरस्तू की अधिक भौतिक रूप से आधारित पद्धति के विपरीत आर्किमिडीज़ ने यांत्रिकी को अभिधारणाओं और गणितीय प्रमाणों पर निर्मित स्वयंपूर्ण तर्कसंगत विज्ञान के रूप में ग्रहण किया। यद्यपि आर्किमिडीज़ का विवेचन ज्यामितीय था और उसमें बल की स्पष्ट अवधारणा नहीं थी (अध्याय 14 देखें), फिर भी उसने संरचनात्मक विश्लेषण का गणितीय आधार स्थापित किया।

यूनानी वास्तुकला और संरचनात्मक प्रथा यूनानी वास्तु-विकास निर्माण की उल्लेखनीय उपलब्धियों तक विस्तृत हुआ; इनमें सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण था *स्तंभ-सरदल निर्माण* का व्यापक प्रयोग— स्तंभ-और-सरदल सिद्धांत पर आधारित प्रणाली, जिसमें क्षैतिज धरनें (सरदल) ऊर्ध्वाधर स्तंभों पर टिकती हैं। वास्तविक मेहराब-निर्माण के अभाव में यूनानी मंदिरों की विशिष्ट इस विधि ने उनका संरचनात्मक और सौंदर्यात्मक दृष्टिकोण निर्धारित किया।

एथेंस का एक्रोपोलिस, विशेषतः पार्थेनॉन, चित्र 3.8b, इस दृष्टिकोण का सर्वाधिक प्रतिष्ठित मूर्त रूप है, जिसमें परिष्कृत अनुपात स्मारकीय पैमाने से संयुक्त हैं। इसका निर्माण फ़िडियस[5] के कलात्मक निर्देशन में हुआ; उसने मूर्तिकला-तत्त्वों और अभिकल्प-सामंजस्य, दोनों का पर्यवेक्षण किया। यह यूनानी अभियांत्रिकी, वास्तुकला और कला के संश्लेषण का उदाहरण है। भवन के सूक्ष्म परिष्कार—जिनमें एंटेसिस (स्तंभ का उभार) और भीतर की ओर हल्का झुकाव सम्मिलित हैं—दृश्य-बोध तथा संरचनात्मक इष्टतमीकरण की परिष्कृत समझ दर्शाते हैं।

यूनानियों ने क्रेन और संयुक्त घिरनी जैसे यांत्रिक उपकरण भी विकसित किए, जो मंदिर-निर्माण के दौरान बल-वितरण, उत्थापन-यांत्रिकी और भारी निर्माण-पदार्थों के संचालन की व्यावहारिक समझ दर्शाते हैं, (§refsect:mechanica देखें)।

यूनानी अभियांत्रिकी में मेहराब का अभाव स्थैतिकी और तर्कसंगत यांत्रिकी में प्रगति के बावजूद यूनानियों ने मेहराब का संरचनात्मक उपयोग विकसित नहीं किया, जो बाद में रोमन अभियांत्रिकी की पहचान बना। यूनानी वास्तुकला लगभग पूर्णतः स्तंभ-और-सरदल निर्माण पर निर्भर थी, जिससे आच्छादित स्थलों का विस्तार और पैमाना सीमित रहा। भारों को कुशलतापूर्वक पहुँचाने और चौड़े द्वारों को पाटने की क्षमता वाला मेहराब यूनानी संरचनात्मक भंडार में लगभग अनुपस्थित

[5] स्वर्ण अनुपात (§2.1.6) प्रायः यूनानी अक्षर ϕ (फ़ाई) से निरूपित होता है, परंपरागत रूप से फ़िडियस के सम्मान में। फ़िडियस पार्थेनॉन के अभिकल्प और अलंकरण से संबद्ध है, जहाँ बाद के विद्वानों ने स्वर्ण अनुपात का *सन्निकटन* करने वाले अनुपात पहचाने हैं। यद्यपि फ़िडियस द्वारा इस नियतांक के सचेत उपयोग का कोई प्रत्यक्ष प्रमाण नहीं है, प्रतीकात्मक नामकरण शास्त्रीय कला और वास्तुकला में सामंजस्यपूर्ण अनुपात के आचार्य के रूप में उसकी विरासत दर्शाता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

था। रोमन अभियंताओं ने इस सीमा को निर्णायक रूप से पार किया और मेहराब को स्मारकीय वास्तुकला का मूल तत्त्व बना दिया।

एथेंस का विद्यालय (राफ़ेल) यद्यपि वेटिकन में आरंभिक 16th century में चित्रित राफ़ेल का *एथेंस का विद्यालय*, चित्र-3.8a, प्राचीन यूनान की बौद्धिक विरासत का पुनर्जागरणकालीन दर्शन प्रस्तुत करता है। पोप के आवासीय कक्षों के एक भाग के रूप में बनवाया गया यह भित्तिचित्र यूनानी मंदिरों की स्मृति जगाने वाले आदर्शीकृत वास्तु-परिवेश में प्रतिष्ठित यूनानी विचारकों को एकत्र कर शास्त्रीय दर्शन और विज्ञान को श्रद्धांजलि देता है। इसकी रचना अमूर्त चिंतन और अनुभवजन्य अन्वेषण के संगम का प्रतीक है—वे आधार जिन पर बाद में संरचनात्मक विश्लेषण की विधा निर्मित हुई।

केंद्र में प्लेटो और अरस्तू हैं, जो दृश्य को प्रतीकात्मक रूप से आदर्शवाद (बाएँ) और अनुभववाद (दाएँ) में विभाजित करते हैं। उनके चारों ओर राफ़ेल ने तर्कशास्त्र, ज्यामिति, खगोल-विज्ञान और तत्त्वमीमांसा के प्रतिनिधि व्यक्तित्व व्यवस्थित किए हैं—इन विधाओं ने न केवल प्राचीन वास्तुकला, बल्कि यांत्रिकी और संरचनात्मक सिद्धांत के संकल्पनात्मक ढाँचे को भी आकार दिया।

केंद्रीय व्यक्तित्व:

प्लेटो: मध्य-बाएँ, ऊपर संकेत करते हुए, हाथ में *Timaeus*। प्रतिरूप लियोनार्दो दा विंची।

अरस्तू: मध्य-दाएँ, हाथ से क्षैतिज संकेत करते हुए, हाथ में *Ethics*।

बायाँ पक्ष (आदर्शवाद, दर्शन, अमूर्त चिंतन):

सुकरात: अन्य लोगों के साथ वाद-विवाद में संलग्न; विशिष्ट मुखाकृति और आलंकारिक मुद्रा से पहचान योग्य।

पाइथागोरस: विद्यार्थियों से घिरा, पुस्तक में लिखता हुआ; सांगीतिक और गणितीय रहस्यवाद से संबद्ध।

हेराक्लाइटस: अग्रभूमि में अकेला बैठा, चिंतन में लीन; बाद में जोड़ा गया और प्रतिरूप माइकेलएंजेलो।

पार्मेनिदीस: संभवतः पाइथागोरस के निकट का व्यक्तित्व, तत्त्वमीमांसात्मक तर्क का प्रतिनिधि।

प्लोटिनस अथवा एपिक्यूरस: संभवतः अंतर्मुखी दार्शनिक संप्रदायों के प्रतिनिधि के रूप में उपस्थित।

हाइपेशिया (विवादित): दुर्लभ सुंदरी-आकृति, जिसकी व्याख्या कभी-कभी नवप्लेटोवादी दार्शनिक के रूप में की जाती है।

दायाँ पक्ष (अनुभववाद, विज्ञान, गणित):

यूक्लिड (अथवा आर्किमिडीज़): परकार से ज्यामितीय प्रमेय प्रदर्शित करते हुए; प्रतिरूप वास्तुकार ब्रामांते।

टॉलेमी: हाथ में पृथ्वी का गोलक, भूगोल और खगोल-विज्ञान का प्रतिनिधि।

ज़रथुस्त्र: हाथ में खगोलीय गोलक, ब्रह्मांड-विज्ञान अथवा ज्योतिष का प्रतिनिधि।

राफ़ेल (आत्मचित्र): सुदूर दाएँ किनारे पर, दर्शक की ओर सीधे देखता हुआ।

डायोजनीज़: मध्य अग्रभूमि में सीढ़ियों पर लेटा हुआ, निंदकवाद और भौतिकवाद के प्रति तिरस्कार का प्रतिनिधि।

कुछ आकृतियों की पहचान अनुमानाधारित है, विशेषकर उनकी जिन्हें राफ़ेल ने नामांकित नहीं किया। अनेक पहचानों का आधार शैलीगत संकेत, मुद्राएँ और ऐतिहासिक संदर्भ हैं।

ध्यान दें कि प्लेटो के समय से मध्ययुग तक *quadrivium* चार विषयों अथवा कलाओं—अंकगणित, ज्यामिति, संगीत और खगोल-विज्ञान—का समूह था, जो व्याकरण, तर्कशास्त्र और वक्तृता से बने *trivium* के प्रारंभिक अध्ययन के बाद पाठ्यक्रम का दूसरा चरण बनता था। *trivium* और *quadrivium* मिलकर सात उदार कलाएँ बनाते और पश्चिमी समाज में उदार कला शिक्षा का आधार थे; *studia humanitatis* और उसकी बाद की शाखाओं ने, 14th century में Petrarch से आरंभ होकर, धीरे-धीरे पाठ्यक्रम-संरचना के रूप में उनका स्थान लिया। सात शास्त्रीय कलाएँ *thinking skills* मानी जाती थीं और चिकित्सा तथा वास्तुकला जैसी व्यावहारिक कलाओं से अलग थीं (Wagner, 1983)।

शास्त्रीय यूनानी चिंतन में वर्गीकरण-पद्धतियाँ यूनानी दार्शनिक घटनाओं को नियमित रूप से सुव्यवस्थित योजनाओं में संगठित करते थे—वे प्रकृति, नीतिशास्त्र, मनोविज्ञान और तर्कशास्त्र में संरचना खोजते थे। ये वर्गीकरण-पद्धतियाँ आधुनिक जैविक वर्गीकरण नहीं, बल्कि अन्वेषणात्मक पाड के रूप में काम करती थीं; वे तात्त्विक संघटन, कारणात्मक

विश्लेषण, वर्गीय तर्क और आत्मा, शरीर-द्रव तथा भावों के प्रकारों के माध्यम से जिज्ञासा को ढाँचा देती थीं। नीचे की सारणी विभिन्न संप्रदायों और कालों के प्रतिनिधि उदाहरण संकलित करती है, सारणी 3.5।

तालिका 3.5: शास्त्रीय यूनानी दर्शन और विज्ञान की चयनित वर्गीकरण-पद्धतियाँ

विचारक / संप्रदाय	वर्गीकरण-पद्धतियाँ
एम्पेडोक्लीज़	चार तत्त्व (मूल): पृथ्वी, जल, वायु, अग्नि।
प्लेटो	त्रिभागी आत्मा: विवेक (logistikon), उत्साह (thumoeidés), कामना (epithumetikon)। *Timaeus*: सम बहुफलक और तत्त्व—चतुष्फलक (अग्नि), अष्टफलक (वायु), विंशतिफलक (जल), घन (पृथ्वी), द्वादशफलक (ब्रह्मांड/समग्र)।
अरस्तू	**तत्त्वमीमांसा:** दस वर्ग—द्रव्य, परिमाण, गुण, संबंध, स्थान, समय, स्थिति, दशा, क्रिया, भाव। **प्राकृतिक दर्शन:** चार कारण—भौतिक, रूपात्मक, निमित्त, अंतिम। **तत्त्व:** प्राथमिक गुणों के संयोजन—अग्नि (उष्ण+शुष्क), वायु (उष्ण+आर्द्र), जल (शीत+आर्द्र), पृथ्वी (शीत+शुष्क); खगोलीय गोलकों के लिए पाँचवाँ तत्त्व ईथर। **जीवविज्ञान:** कार्यानुसार आत्माएँ—पोषक (पादप), संवेदनशील (पशु), विवेकी (मानव)। पशु-भेद—रक्तयुक्त/रक्तहीन, जरायुज/अंडज, स्थलीय/जलीय। **वक्तृता:** तीन प्रकार—विचारात्मक, न्यायिक, प्रदर्शनात्मक।
पाइथागोरीय	दस विपरीत युग्मों की सारणी: सीमित/असीमित, विषम/सम, एक/अनेक, दायाँ/बायाँ, पुरुष/स्त्री, विराम/गति, सरल/वक्र, प्रकाश/अंधकार, शुभ/अशुभ, वर्ग/आयत (अरस्तू की *Metaphysics* से पुनर्निर्मित)।
हिप्पोक्रेटीय / गैलेनीय	चार शरीर-द्रव: रक्त, कफ, पीला पित्त, काला पित्त। चार प्रकृतियाँ: रक्तप्रधान, कफप्रधान, पित्तप्रधान, विषादप्रधान।
स्टोइक	चार वर्ग: आधारद्रव्य (hupokeimenon), गुणयुक्त (poion), अवस्थायुक्त (pōs echon), सापेक्ष अवस्थायुक्त (pros ti pōs echon)। चार आवेग (pathē): कामना, भय, सुख, संताप; इनके अनुरूप विवेकपूर्ण शुभ भाव (eupatheia)।
थियोफ्रास्टस	*Historia Plantarum* में व्यवस्थित पादप-वर्गीकरण: आकारिकी (वृक्ष, झाड़ियाँ, उपझाड़ियाँ, शाक), आवास, वृद्धि-प्रतिरूप और जनन-विधि के अनुसार।

3.2.4 रोम: कंक्रीट, मेहराब और अवसंरचना

रोमन साम्राज्य ने संरचनात्मक यांत्रिकी और अभियांत्रिकी में युगांतरकारी योगदान दिए, जो आधुनिक प्रथा के आधार बने हुए हैं। उनकी अभियांत्रिक प्रतिभा में मेहराबों का विकास और अनुप्रयोग, क्रांतिकारी कंक्रीट तकनीक तथा व्यापक द्रवचालित प्रणालियाँ सम्मिलित थीं; साथ ही उन्होंने क्रमबद्ध निर्माण-विधियों की विरासत छोड़ी।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मेहराबों और वॉल्ट-निर्माण में निपुणता मेहराब पर रोमन निपुणता ने पहले से कहीं बड़ी और अधिक स्थिर संरचनाएँ संभव बनाकर निर्माण में क्रांति कर दी। सेतुओं, जलसेतुओं और कोलोसियम जैसे स्मारकीय भवनों में मेहराबों का उनका क्रमबद्ध उपयोग भार-संचरण और संपीडन-सामर्थ्य के इष्टतमीकरण की व्यावहारिक समझ दर्शाता है (Vitruvius, 1960 [PDF])।

मूल मेहराब-अवधारणा को विस्तृत करते हुए रोमनों ने बैरल और ग्रोइन वॉल्ट विकसित किए, जिनसे कम अंतर पर आधार दिए बिना विस्तृत और निर्बाध आंतरिक स्थल संभव हुए। दो बैरल वॉल्टों के प्रतिच्छेदन से बना ग्रोइन वॉल्ट भारों को अलग-अलग बिंदुओं तक कुशलतापूर्वक पहुँचाता था; इससे रोमन कराकल्ला के स्नानागारों जैसे विशाल आंतरिक स्थल बना सके।

रोमन कंक्रीट में नवाचार संभवतः सर्वाधिक रूपांतरणकारी रोमन नवाचार कंक्रीट (italicindexhopus caementicium का विकास था। ज्वालामुखीय राख (पॉज़ोलाना), चूने और मलबा-गिट्टी को मिलाकर बने इस पदार्थ में उल्लेखनीय गुण थे: यह जल के भीतर जमता, पर्यावरणीय क्षरण का प्रतिरोध करता और जटिल रूपों में ढाला जा सकता था।

रोमन कंक्रीट की अनुकूलनीयता ने साहसिक वास्तु-प्रयोग संभव किए, जिसका उदाहरण पैंथियन है; उसका विशाल अप्रबलित कंक्रीट गुंबद पदार्थ-व्यवहार और प्रतिबल-वितरण की परिष्कृत समझ दर्शाता है (MacDonald, 1982)। 43 meters व्यास और ऊँचाई वाला पैंथियन का अर्धगोलाकार गुंबद आज भी संसार का सबसे बड़ा अप्रबलित कंक्रीट गुंबद है। इसके निर्माण में क्रमित गिट्टी प्रयुक्त हुई—आधार पर भारी ट्रैवर्टीन से शिखर के निकट हल्के प्यूमिस तक का संक्रमण—जो प्रतिबल-इष्टतमीकरण के सिद्धांतों की सहज समझ दर्शाता है।

द्रवचालित अभियांत्रिकी और अवसंरचना द्रवचालित अभियांत्रिकी में रोमन उत्कृष्टता का उदाहरण पों दु गार जैसी जलसेतु प्रणालियाँ हैं। ये संरचनाएँ सतत प्रवाह बनाए रखने के लिए परिशुद्धता से गणित प्रवणताओं द्वारा जल को बहुत दूर तक पहुँचाती थीं (Hodge, 1992)। जलसेतुओं के बहुस्तरीय मेहराब-निर्माण ने पदार्थ की आवश्यकता घटाते हुए संरचनात्मक स्थिरता और दृश्य प्रभाव बढ़ाया।

स्पेन के अल्कांतारा सेतु जैसे रोमन सेतु कार्यक्षमता को संरचनात्मक दक्षता और सौंदर्यात्मक आकर्षण से सामंजस्य देने की उनकी क्षमता दर्शाते हैं। इन सेतुओं में प्रायः खंडीय मेहराब होते थे, जो संरचनात्मक क्षमता बनाए रखते हुए मृत भार घटाते थे।

नगरीय निर्माण और क्रमबद्ध भवन-निर्माण नगरीय नियोजन को रोमन अभियांत्रिक नवाचार से अत्यधिक लाभ हुआ। बहुमंज़िली *insulae* (आवास-खंडों) में भारवाही वितरण और अग्नि-सुरक्षा पर सावधानीपूर्वक ध्यान आवश्यक था। कंक्रीट और मॉड्यूलर निर्माण तकनीकों के क्रमबद्ध उपयोग ने अभूतपूर्व पैमाने पर तीव्र नगरीय विस्तार संभव किया। रोमन अभियंताओं ने मानकीकृत निर्माण-विधियाँ विकसित कीं, जिनमें सम्मिलित थीं:

- मॉड्यूलर ईंट और कंक्रीट प्रणालियाँ
- मानकीकृत स्तंभ-क्रम और अनुपात
- नींव-अभिकल्प के क्रमबद्ध दृष्टिकोण
- एकीकृत अवसंरचना-नियोजन (मल-नालियाँ, जलापूर्ति, सड़कें)

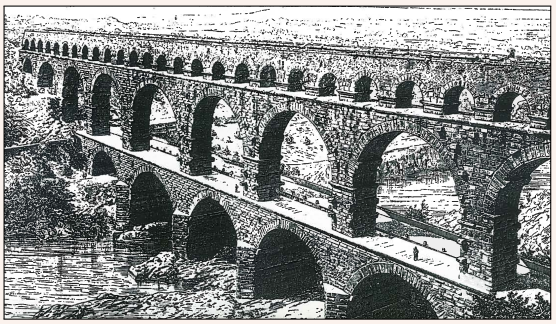
विरासत और सीमाएँ रोमन अभियांत्रिक उपलब्धियाँ व्यावहारिक और क्रमबद्ध थीं। उन्होंने एट्रस्कनों से मिले मेहराब-निर्माण को परिष्कृत किया—किंतु सामान्यतः अर्धवृत्ताकार रूप अपनाए, जिनसे आधार पर पर्याप्त पार्श्व प्रणोद उत्पन्न होता था। यही सीमा बाद में नुकीले मेहराब के गॉथिक नवाचार की प्रेरणा बनी।

सर्वाधिक प्रतीकात्मक रोमन संरचनाएँ—पों दु गार और पैंथियन—उनकी संरचनात्मक उपलब्धियों के शिखर का प्रतिनिधित्व करती हैं। पैंथियन की आनुपातिक पूर्णता (ऊँचाई और व्यास दोनों 43 m के बराबर) और मोटी कंक्रीट दीवारों से पार्श्वतः धारित उसकी *गोलीय ज्यामिति* त्रिविमीय संरचनात्मक चिंतन में रोमन निपुणता दर्शाती है, जिसकी बराबरी पुनर्जागरण तक नहीं हुई।

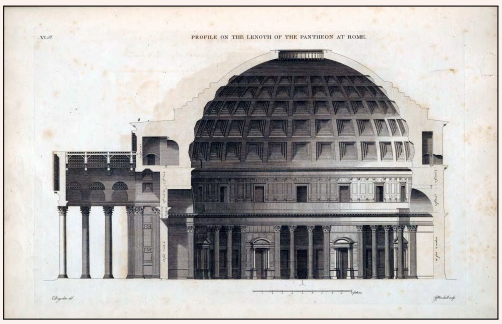
3.2.4.1 वित्रुवियस: प्रथम संरचनात्मक सिद्धांतकार

यूनानी और रोमन अभियंताओं ने संरचनात्मक यांत्रिकी की भौतिक नींव रखी, किंतु वास्तु और अभियांत्रिक ज्ञान को सुसंगत सैद्धांतिक ढाँचे में संहिताबद्ध करने का पहला प्रयास वित्रुवियस ने किया, (उसकी पुस्तक के अधिक विवरण के लिए §6.3.1)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) पों दु गार



(b) पैंथियन

चित्र 3.9: प्रतीकात्मक रोमन निर्माण

उसका ग्रंथ *De Architectura* (वास्तुकला पर दस पुस्तकें) सबसे पुराना विद्यमान दस्तावेज़ है जो संरचनात्मक रूप और कार्य, अनुपात, पदार्थ, द्रवचालन, ध्वनिकी और नगरीय नियोजन का क्रमबद्ध विवेचन करता है।

पूर्ववर्ती (अब लुप्त) यूनानी स्रोतों पर आधारित और रोमन प्रथा से समृद्ध वित्रुवियस ने ऐसा अभिकल्प-दर्शन प्रतिपादित किया जिसमें अनुभवजन्य ज्ञान सैद्धांतिक चिंतन से संयुक्त था। इस प्रकार उसने अपने रोमन संदर्भ का अतिक्रमण किया और पश्चिमी इतिहास का पहला ऐसा व्यक्तित्व बना जिसने भवन-अभिकल्प को उन शब्दों में निरूपित किया जो आधुनिक अभियांत्रिक सिद्धांतों का पूर्वाभास देते हैं।

परंपरा से सिद्धांत तक वित्रुवियस से पहले बेबीलोन, मिस्र, यूनान और रोम के निर्माता व्यावहारिक नियमों तथा संचित अनुभव पर निर्भर थे—यह शिल्प-परंपराओं से पीढ़ी-दर-पीढ़ी प्राप्त व्यावहारिक बुद्धि थी। वित्रुवियस का कार्य ऐसे अव्यक्त ज्ञान से क्रमबद्ध, शिक्षणीय सिद्धांतों की ओर निर्णायक संक्रमण का प्रतिनिधित्व करता है।

वित्रुवियसी त्रय वित्रुवियस ने प्रसिद्ध रूप से कहा कि उत्तम वास्तुकला में *firmitas* (सामर्थ्य), *utilitas* (कार्यात्मकता) और *venustas* (सौंदर्य) सन्निहित होने चाहिए। इस त्रय ने पुनर्जागरण और उसके आगे तक वास्तु-चिंतन को प्रभावित किया तथा यह सिद्धांत स्थापित किया कि संरचनात्मक निष्पादन, कार्यात्मक दक्षता और सौंदर्यात्मक उपलब्धि सफल अभिकल्प के अविभाज्य पक्ष हैं।

आनुपातिक प्रणालियाँ और नियम वित्रुवियस के कार्य की सर्वाधिक प्रमुख विशेषताओं में उसके आनुपातिक नियम और अभिकल्प के क्रमबद्ध दृष्टिकोण हैं। ये नियम प्रभावी थे क्योंकि वे अनुभवजन्य रूप से प्रमाणित और मापनीय थे—यह दृष्टिकोण आधुनिक सामग्री-सामर्थ्य सिद्धांत से पहले का था, किंतु पत्थर और काष्ठ संरचनाओं के लिए कार्यात्मक रूप से पर्याप्त था।

उनमें से एक कहता है:

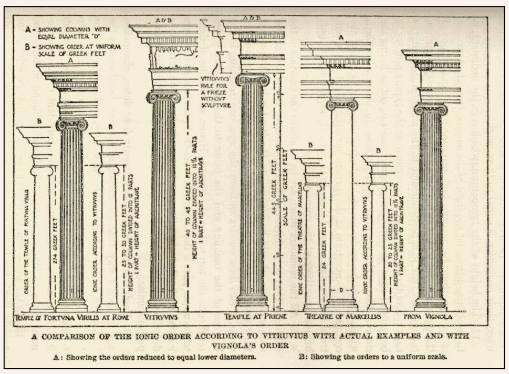
> यदि चौड़ाई forty feet से अधिक होनी है, तो भीतर और अंताओं के बीच स्थित स्तंभों के सामने स्तंभ रखे जाएँ। [...] इस प्रकार अतिरिक्त नालियाँ स्तंभ-दंड के आकार में हुई कमी की आनुपातिक पूर्ति कर देंगी, जिससे वह दिखाई नहीं देगी, और इस भिन्न विधि से स्तंभ समान मोटाई के दिखाई देंगे।
>
> Vitruvius, 1960, p. 4.4.2

ऐसे नियम प्रभावी थे क्योंकि वे अनुभवजन्य रूप से प्रमाणित और मापनीय थे—यह दृष्टिकोण आधुनिक सामग्री-सामर्थ्य से पहले का था, किंतु पत्थर और काष्ठ संरचनाओं के लिए कार्यात्मक रूप से पर्याप्त था (Heyman, 2003)।

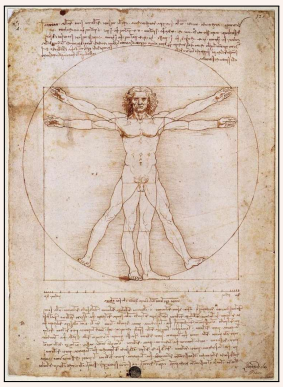
वित्रुवियस की अनुपात-बोध ने बाद के अनेक विकास प्रेरित किए, जिनमें सम्मिलित हैं:

- लियोन बतिस्ता अल्बेर्ती का *definitor*, मापानुसार मापों को यांत्रिक रूप से स्थानांतरित करने वाला उपकरण

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) वास्तुकला की दस पुस्तकें



(b) वित्रुवियसी मानव (लियोनार्दो)

चित्र 3.10: वित्रुवियसी आनुपातिकता के नियम

- लियोनार्दो दा विंची का प्रसिद्ध *वित्रुवियसी मानव* चित्र
- आंद्रेआ पल्लादियो द्वारा शास्त्रीय क्रमों का व्यवस्थापन
- ले कोर्बुज़िए की मानवमितीय प्रणाली *Modulor*

इस विषय को §15.2.3 में आगे विकसित किया गया है।

पुनर्जागरण वास्तुकला पर प्रभाव पुनर्जागरण के वास्तुकारों को वित्रुवियस में शास्त्रीय प्रामाणिकता और क्रमबद्ध पद्धति की कुंजी मिली। वित्रुवियस से प्रेरित पुनर्जागरण के अनेक वास्तुकारों में (Palladio, 1570) (1508–1580) वित्रुवियसी सिद्धांतों के प्रति विशेष रूप से समर्पित था। उसने सममिति, अनुपात और कार्यात्मकता पर बल को अपने अभिकल्पों में अनुकूलित किया तथा उन्हें *I Quattro Libri dell'Architettura* (1570) में संहिताबद्ध किया। उसकी वास्तुकला और सैद्धांतिक लेखन में वित्रुवियसी आदर्शों की प्रतिध्वनि थी, विशेषतः यह विचार कि भवन को मानव-शरीर और प्रकृति के सामंजस्यपूर्ण अनुपात प्रतिबिंबित करने चाहिए, (Wassell, 2008)। पल्लादियो के शब्दों में:

> सौंदर्य सुरुचिपूर्ण आकार और समग्र के उसके भागों से तथा भागों के परस्पर और समग्र से संबंध से उत्पन्न होगा, क्योंकि भवनों को पूर्ण और स्पष्ट रूप से परिभाषित शरीरों जैसा दिखाई देना चाहिए, जिनका एक अंग दूसरे से मेल खाता हो और अपेक्षित प्रयोजन के लिए सभी अंग आवश्यक हों।
>
> Palladio, 1570, Book I, Chapter I

सीमाएँ और विरासत वित्रुवियस भी अपने युग की उपज था और उसके सभी प्रेक्षण आधुनिक मानकों पर खरे नहीं उतरते। फिर भी अनुभवजन्य प्रेक्षण और सैद्धांतिक चिंतन पर आधारित अभिकल्प-सिद्धांतों का व्यवस्थापन उसका मूलभूत योगदान था; इसने ऐसी कार्यपद्धति स्थापित की जो समकालीन संरचनात्मक अभियांत्रिक प्रथा के लिए आज भी प्रासंगिक है।

पुनर्जागरण से पूजित *De Architectura* ने न केवल शास्त्रीय वास्तुकला को प्रभावित किया, बल्कि ऐसी संकल्पनात्मक नींव भी रखी जिसकी प्रतिध्वनि संरचनात्मक चिंतन की शताब्दियों में सुनाई देती है; इसने वित्रुवियस को प्राचीन प्रथा के अभिलेखक और संरचनात्मक सिद्धांत पर स्थायी प्रभाव, दोनों के रूप में स्थापित किया।

उसके सभी प्रेक्षण आधुनिक मानकों से स्वीकार्य नहीं हैं:

> इसके अतिरिक्त, विरल वायुमंडल के कारण दक्षिणी राष्ट्र, उष्णता से प्राप्त अपनी तीक्ष्ण बुद्धि के साथ, योजनाएँ बनाने में अत्यंत स्वतंत्र और तीव्र होते हैं, जबकि उत्तरी राष्ट्रों [...] की बुद्धि सुस्त होती है।
>
> Vitruvius, 1960, Chapter I, Book VI

वित्रुवियस की केंद्रीयता इस पुस्तक के लिए वित्रुवियस का महत्त्व इतना मूलभूत है कि उसके जीवन, लेखन और प्रभाव का परीक्षण तीन अलग अध्यायों में किया गया है: वर्तमान अध्याय, §6.3.1, और §15.2.1।

3.3 भारत, चीन और जापान की गणितीय तथा संरचनात्मक परंपराएँ

संरचनात्मक यांत्रिकी का प्रामाणिक इतिहास प्रायः यूनानी-रोमन और बाद के यूरोपीय योगदानों पर बल देता है, किंतु एशिया की प्राचीन सभ्यताओं ने वास्तुकला, पदार्थों और यांत्रिक तर्क की गहन स्वतंत्र परंपराएँ विकसित कीं। भारत, चीन और जापान में अनुभवजन्य प्रेक्षण, गणितीय नवाचार और वास्तु-अभिव्यक्ति के संश्लेषण से अभियांत्रिकी में स्थायी उपलब्धियाँ हुईं, जो पश्चिमी विकासों के समानांतर भी थीं और उनसे अभिसारी भी। ये योगदान सिंचाई, भूकंप-सहनीय निर्माण और नगरीय अवसंरचना जैसी व्यावहारिक आवश्यकताओं में निहित थे, किंतु उन्होंने गहरे दार्शनिक और सौंदर्यात्मक आदर्श भी प्रतिबिंबित किए। आगे प्रत्येक सभ्यता के कुछ सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण योगदानों का अध्ययन हाशिये की जिज्ञासाओं के रूप में नहीं, बल्कि संरचनात्मक रूप और कार्य को समझने की समानांतर तथा प्रायः अभिसारी यात्राओं के रूप में किया गया है।

3.3.1 चीन: भूकंप-विज्ञान, सेतु और यांत्रिक नवाचार

झांग हेंग और आरंभिक भूकंप-विज्ञान चीनी अभियांत्रिकी के इतिहास में सर्वाधिक उल्लेखनीय व्यक्तित्वों में झांग हेंग है, जो पूर्वी हान राजवंश (78–139 CE) का खगोलशास्त्री, गणितज्ञ और यांत्रिक अभियंता था। झांग हेंग ने पहला ज्ञात भूकंपलेखी बनाया, चित्र 3.11a; यह दूरस्थ भूकंपों का पता लगाकर उनकी दिशा बता सकता था (Needham, 1959)। इस कांस्य उपकरण में गोलियाँ पकड़े ड्रैगन थे, जिनकी गोलियाँ नीचे स्थित मेंढकों के मुख में गिरती थीं। यह गतिशील यांत्रिकी और कंपन की असाधारण समझ दर्शाता था तथा विश्व के अन्य भागों में ऐसे विकासों से एक सहस्राब्दी से भी अधिक पुराना था।

मोहवादी यांत्रिक परंपरा मोज़ी (470–391 BCE) और उसके अनुयायियों से संबद्ध मोहवादी संहिता यांत्रिक सिद्धांत में चीनी योगदान की आधारशिला है। यह प्राचीन ग्रंथ उत्तोलकों, संतुलन और तनन के उपयोग सहित यांत्रिकी के सिद्धांतों का क्रमबद्ध विवेचन करता है (Graham, 1978)। इसने यूनानी यांत्रिक अन्वेषणों के समानांतर अवधारणाएँ विकसित कीं, किंतु व्यावहारिक उपयोगिता और सामाजिक लाभ पर बल देने वाले स्वतंत्र दार्शनिक ढाँचे से।

क्रांतिकारी सेतु-निर्माण चीनी सेतु-निर्माण संरचनात्मक यांत्रिकी में उनके योगदान का उदाहरण है। सुई राजवंश में 605 CE में निर्मित अंजी सेतु अभियांत्रिकी की उत्कृष्ट कृति है, जो 1,400 years से अधिक समय से विद्यमान है (Brownbridge, 1986)। अपने नवीन खुले स्पैंड्रलों वाला यह खंडीय मेहराब-सेतु भार और पदार्थ की आवश्यकता दोनों घटाते हुए बाढ़-अतिप्रवाह की क्षमता देता था—यह द्रवचालित बलों और संरचनात्मक इष्टतमीकरण की परिष्कृत समझ दर्शाता है। चीनी अभियंताओं ने निलंबन-सेतु तकनीक का भी सूत्रपात किया। उन्होंने बाँस और लोहे की शृंखलाओं के निलंबन-सेतु बनाए, जो पाषाण मेहराब-निर्माण से असंभव दूरियाँ पाटते थे और बाद में आधुनिक केबल-आधारित तथा निलंबन प्रणालियों में विकसित सिद्धांतों का पूर्वाभास देते थे।

शृंखला-पंप और जलचक्र जैसी जल-चालित मशीनों का चीनी उपयोग यांत्रिक सिद्धांतों की उनकी समझ को और स्पष्ट करता है।

प्रारूप प्रकाशन

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3.3.2 भारत: गणित, पदार्थ और स्मारकीय वास्तुकला

वास्तु-विज्ञान: वास्तु शास्त्र प्राचीन ग्रंथ *Vaastu Shastra* निर्माण के लिए विस्तृत निर्देश देता है, जिनमें अभि-विन्यास, पदार्थ-गुण और भार-वितरण जैसे पक्ष सम्मिलित हैं (Shukla, 1993)। भवन के इस क्रमबद्ध दृष्टिकोण ने संरचनात्मक, पर्यावरणीय और आध्यात्मिक विचारों को एकीकृत किया तथा वास्तु-अभिकल्प का ऐसा व्यापक ढाँचा बनाया जिसने संपूर्ण भारतीय उपमहाद्वीप में निर्माण को प्रभावित किया।

गणितीय आधार गणितज्ञ और खगोलशास्त्री आर्यभट (476–550 CE) ने त्रिकोणमिति और ज्यामितीय गणना के अपने विकासों द्वारा संरचनात्मक यांत्रिकी में योगदान दिया। π की उसकी यथार्थ गणना और कोणीय मापन के क्रमबद्ध दृष्टिकोण ने वास्तु-अभिन्यास तथा संरचनात्मक विश्लेषण के लिए आवश्यक उपकरण दिए (Bag, 2003)।

दिल्ली का लौह स्तंभ प्राचीन भारतीय अभियांत्रिकी के सर्वाधिक प्रतिष्ठित उदाहरणों में लगभग 375–415 CE में स्थापित दिल्ली का लौह स्तंभ है (Balasubramaniam, 2000), चित्र 3.11b। 7 meters से अधिक ऊँचे और लगभग 6 tons भार वाले इस पिटवाँ लौह-स्तंभ ने अपनी विशिष्ट धातुकर्मीय संरचना तथा रक्षात्मक ऑक्साइड परत के कारण 1,600 years से अधिक समय तक संक्षारण का प्रतिरोध किया है। यह स्तंभ पदार्थ-विज्ञान और धातुकर्म की ऐसी उन्नत समझ दर्शाता है जिसकी बराबरी आधुनिक युग तक अन्यत्र नहीं हुई।

द्रवचालित और वास्तु उपलब्धियाँ बावडियाँ, जैसे गुजरात की *रानी की वाव*, और खजुराहो तथा हम्पी के मंदिर-परिसर भारत की वास्तु-प्रतिभा को प्रमुखता से दिखाते हैं (Michell, 1989; Hardy, 2007)। ये संरचनाएँ पाषाण-उत्कीर्णन, जटिल ज्यामितियों में भार-वितरण तथा विस्तृत अलंकरण-योजनाओं के साथ संरचनात्मक प्रणालियों के एकीकरण में निपुणता दर्शाती हैं।

द्रवचालित अभियांत्रिकी और कृषि प्रणालियाँ द्रवचालित अभियांत्रिकी में भारत की प्रगति नहरों, जलाशयों और परिष्कृत जल-प्रबंधन प्रणालियों के अभिकल्प में स्पष्ट है, जिन्होंने विशाल नगरीय जनसंख्या और विस्तृत कृषि-क्षेत्रों को सहारा दिया।

3.3.3 जापान: भूकंपीय प्रत्यास्थता और अनुकूलनीय संरचनाएँ

काष्ठ वास्तुकला और भूकंपीय नवाचार पगोडों और मंदिरों में दृष्टिगोचर पारंपरिक जापानी काष्ठ वास्तुकला बारंबार भूकंपीय गतिविधि के प्रत्युत्तर में विकसित अद्वितीय संरचनात्मक अनुकूलनीयता दर्शाती है। *shinbashira*, अर्थात केंद्रीय स्तंभ, परस्पर जकड़े काष्ठ-जोडों और नम्य संयोजनों के साथ मिलकर संरचनाओं को कठोर प्रतिरोध के बजाय नियंत्रित गति द्वारा भूकंपीय ऊर्जा क्षय करने देता है, चित्र 3.11c, (Sugimoto, 2008)।

भूकंपीय अभिकल्प का यह दृष्टिकोण—नम्यता, ऊर्जा-क्षय और पदार्थ-तन्यता पर बल देते हुए—आधुनिक भूकंप अभियांत्रिकी के सिद्धांतों का शताब्दियों पहले पूर्वाभास देता है। पंचमंज़िले पगोडे एक सहस्राब्दी से अधिक समय तक बडे भूकंपों में सुरक्षित रहे हैं, जो इन पारंपरिक तकनीकों की प्रभावशीलता दर्शाता है।

दुर्ग वास्तुकला और किलेबंदी 16th और 17th centuries में बने हिमेजी दुर्ग जैसे जापानी दुर्ग किलेबंदी अभियांत्रिकी और भार वितरण की उन्नत तकनीकें दर्शाते हैं (Turnbull, 2003)। इन संरचनाओं में जटिल पाषाण नींव-प्रणालियाँ, परिष्कृत काष्ठ ढाँचे और बहुस्तरीय रक्षात्मक व्यवस्थाएँ प्रयुक्त हैं, जो संरचनात्मक दक्षता को सैन्य कार्यात्मकता से एकीकृत करती हैं।

पदार्थ-नवाचार और निर्माण तकनीकें काष्ठ और पत्थर जैसे प्राकृतिक पदार्थों पर जापान की निर्भरता ने विशिष्ट संरचनात्मक नवाचारों को आकार दिया, विशेषतः स्तर-निर्माण, कोष्ठक प्रणालियों (*tokyō*) और ऐसे नम्य जोडों के उपयोग में जो भूकंपीय बलों तथा आर्द्रता-परिवर्तन से होने वाली पदार्थ-गति, दोनों को समायोजित करते हैं। परिष्कृत काष्ठ-संयोजन तकनीकों का विकास—जिनमें कील अथवा धातु-बँधक के बिना जटिल परस्पर जकड़ने वाले जोड सम्मिलित हैं—पदार्थ-गुणों, भार-संचरण और संरचनात्मक सातत्य की उन्नत समझ दर्शाता है।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3.3.4 संश्लेषण और वैश्विक प्रभाव

संरचनात्मक अभियांत्रिकी की इन एशियाई परंपराओं ने निर्माण, पदार्थ-विज्ञान और पर्यावरणीय अनुकूलन की मूलभूत समस्याओं के परिष्कृत समाधान विकसित किए। मानव-निर्माण और प्राकृतिक बलों के सामंजस्य पर उनका बल, सौंदर्यात्मक तथा संरचनात्मक विचारों का एकीकरण और संधारणीय भवन-प्रथाओं का विकास ऐसे महत्त्वपूर्ण दृष्टिकोण देते हैं जो संरचनात्मक अभियांत्रिकी के अधिक परिचित पश्चिमी विकास-आख्यान के पूरक हैं और उसे समृद्ध करते हैं।

भारत, चीन और जापान में विकसित गणितीय नवाचारों, पदार्थ-प्रौद्योगिकियों और संरचनात्मक प्रणालियों ने अभियांत्रिक विज्ञान के वैश्विक विकास को आवश्यक ज्ञान दिया। ये सिद्ध करते हैं कि संरचनात्मक यांत्रिकी की नींव किसी एक सांस्कृतिक परंपरा की उपज नहीं, बल्कि वास्तव में विश्वव्यापी मानवीय उपलब्धि है।

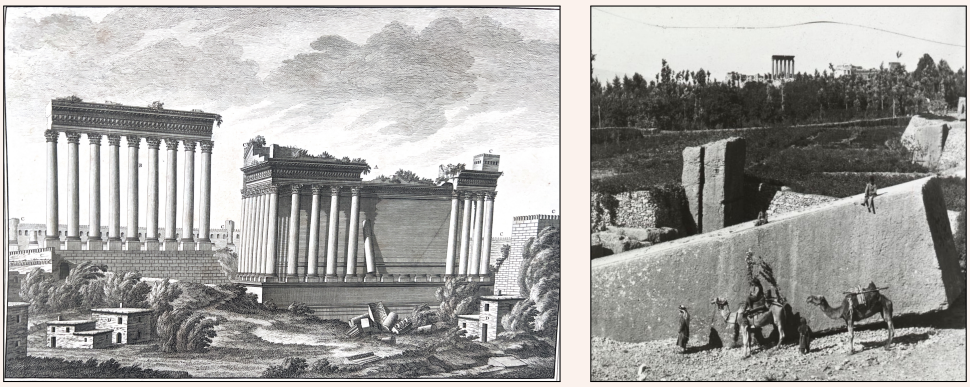


(a) चीन, प्रथम भूकंपलेखी (b) भारत: लौह स्तंभ (c) जापान

चित्र 3.11: भारत, चीन, जापान

प्रारूप प्रकाशन

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



बालबेक का बाकस मंदिर और गर्भवती सूत्री का पत्थर, लेबनान

बालबेक के विशाल पत्थर—अब तक उत्खनित सबसे बड़े पत्थरों में से—प्राचीन अभियांत्रिक महत्त्वाकांक्षा के प्रमाण हैं, जिसकी सरल व्याख्या आज भी कठिन है।

समीक्षाधीन प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4 गोथिक गिरजाघर

सारांश

गोथिक गिरजाघर आध्यात्मिक उत्कंठा और संरचनात्मक प्रतिभा, दोनों के चिरस्थायी स्मारक हैं। यह अध्याय उनके साहसिक रूपों के पीछे निहित अभियांत्रिक तर्क का अन्वेषण करता है, और विशेष ध्यान देता है कि ज्यामिति, भार-पथ नियंत्रण और पदार्थ-व्यवहार किस प्रकार स्थिरता सुनिश्चित करने के लिए एकात्म होते हैं। रोमनेस्क उद्गम से गोथिक वास्तुकला के विकास का अनुसरण और उडते प्रत्यालंबों, पसलीदार कोष्ठकों तथा प्रणोद-रेखाओं सहित प्रमुख संरचनात्मक लक्षणों का वर्णन करने के बाद, अध्याय चार प्रतीकात्मक भवनों का गहन विश्लेषण प्रस्तुत करता है। प्रत्येक अध्ययन दर्शाता है कि समकालीन ज्ञान की सीमाओं की किस प्रकार परीक्षा हुई और कभी-कभी उनका उल्लंघन हुआ; इस प्रकार अभिकल्पीय प्रत्यास्थता, अनुभवजन्य तर्क और अतिक्रमण के परिणामों से संबंधित चिरस्थायी शिक्षाएँ मिलती हैं।

4.1 परिचय 49
4.2 रोमनेस्क पुंज से गोथिक कंकाल तक . . . 50
4.3 गोथिक गिरजाघर: इतिहास और संरचनात्मक तर्क 50
4.3.1 ऐतिहासिक मील के पत्थर 50
4.3.2 आवश्यक शब्दावली और संरचनात्मक तत्त्व 52
4.3.3 गोथिक संरचनात्मक क्रांति . . . 53
4.3.4 संरचनात्मक लक्षण 56
4.4 चार गिरजाघरों की कथा 61
4.4.1 बोवे गिरजाघर: संरचनात्मक सीमाओं का एक प्रतीकात्मक अध्ययन 61
4.4.2 मिलान का दुओमो: ज्यामिति, राजनीति और संरचनात्मक विवाद . . 69
4.4.3 सेंट पीटर बेसिलिका: संकट से वैज्ञानिक विश्लेषण तक 74
4.4.4 सांता मारिया देल फियोरे: ब्रुनेलेस्की की अभियांत्रिक अंतर्दृष्टि की विजय 78
4.5 सारांश-सारणी 83

4.1 परिचय

12th से 16th century तक यूरोपीय गिरजाघरों ने अभूतपूर्व वास्तुकलात्मक ऊँचाइयाँ प्राप्त कीं–केवल भौतिक परिमाण में ही नहीं, बल्कि संरचनात्मक साहस और प्रतीकात्मक महत्त्वाकांक्षा में भी। ये स्मारक पूजा-स्थलों से बहुत अधिक थे; वे मध्यकालीन अभियांत्रिकी के चरमोत्कर्ष को मूर्त करते थे, जहाँ धार्मिक उत्साह ने प्राविधिक नवाचार को उसकी अनुभवजन्य सीमाओं तक पहुँचाया।

कलन अथवा आधुनिक पदार्थों के बिना निर्मित और प्रायः शताब्दियों में बदलती योजनाओं के साथ बने गोथिक गिरजाघर एक व्यवस्थित विधा के रूप में अभियांत्रिकी की हमारी समझ को चुनौती देते हैं। फिर भी उनके निर्माताओं ने ज्यामितीय स्पष्टता, अनुभवजन्य परीक्षण और बल-पथों की सहज समझ के माध्यम से अद्भुत संरचनात्मक परिष्कृतता प्राप्त की, जिसकी पूर्ण सराहना आधुनिक विश्लेषण ने भी हाल ही में आरंभ की है।

यह अध्याय उन संरचनात्मक सिद्धांतों पर केंद्रित है जिनसे इन गिरजाघरों का निर्माण संभव हुआ, और विशेष जोर इस पर है कि पदार्थ-सामर्थ्य की अपेक्षा ज्यामितीय स्पष्टता द्वारा स्थिरता किस प्रकार प्राप्त की गई। नोकीले मेहराबों, पसलीदार कोष्ठकों और उडते प्रत्यालंबों के माध्यम से गोथिक निर्माताओं ने ऐसे ऊँचे और प्रकाशपूर्ण आंतरिक स्थान बनाए जो आज भी स्थायी हैं। तथापि, सभी प्रयोग सफल नहीं हुए: कुछ गिरजाघरों में आकांक्षा और ध्वंस के बीच की सीमा लाँघ दी गई–कभी-कभी नाटकीय रूप से।

गोथिक संरचनात्मक यांत्रिकी की प्रमुख अवधारणाओं और उनके निर्माण को संभव बनाने वाले ऐतिहासिक नवाचारों की समीक्षा के बाद, अध्याय चार निर्णायक अध्ययनों की ओर उन्मुख होता है। ये गिरजाघर–बोवे, मिलान, रोम का सेंट पीटर और फ्लोरेंस का सांता मारिया देल फ़िओरे–न केवल वास्तुकलात्मक मील के पत्थर हैं, बल्कि ऐसे प्रसंग भी हैं जहाँ संरचनात्मक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ज्ञान को चुनौती मिली, उसका परिष्कार हुआ अथवा वह अपर्याप्त सिद्ध हुआ। समष्टि में वे अतीत के अभियांत्रिक निर्णयों का न्यायवैज्ञानिक दृश्य और आस्था, रूप तथा बल के अंतर्संबंध की गहन समझ प्रदान करते हैं।

4.2 रोमनेस्क पुंज से गोथिक कंकाल तक

रोमनेस्क से गोथिक वास्तुकला में रूपांतरण इतिहास की सर्वाधिक गहन संरचनात्मक क्रांतियों में से एक था। जहाँ रोमनेस्क गिरजाघर छोटी खिड़कियों वाली विशाल दीवारों पर निर्भर थे, वहाँ गोथिक निर्माताओं ने एक संरचनात्मक कंकाल विकसित किया जिसने दीवार को उसके भारवाही कार्य से मुक्त कर दिया। इस नवाचार ने विशाल काँचयुक्त सतहों और गोथिक गिरजाघरों को परिभाषित करने वाली आकाशोन्मुख ऊँचाइयों को संभव बनाया।

निर्णायक उपलब्धि यह पहचानना था कि भारों को पसलियों, मेहराबों और प्रत्यालंबों के ढाँचे के माध्यम से प्रवाहित किया जा सकता है, जिससे दीवारें प्रकाश के परदे बनने के लिए स्वतंत्र हो गईं। बड़े चिनाई-पुंज रोमनेस्क निर्माणों की पहचान थे और रोमनेस्क गिरजाघरों की परिधीय दीवारों में केवल छोटी खिड़कियाँ खोली जाती थीं। इसके विपरीत, चिनाई-पुंजों से स्वतंत्र संरचनात्मक कंकाल का निर्माण प्रथम नवाचार था। इस प्रकार दीवारों में बड़े खुले भाग बनाए जा सकते थे, जिनसे अंततः गोथिक गिरजाघरों की विशिष्ट रंगीन काँच और गुलाब-खिड़कियाँ विकसित हुईं (Como, 2013)।

इस संरचनात्मक रूपांतरण को ध्यान में रखते हुए, अब हम उन विशिष्ट नवाचारों का परीक्षण कर सकते हैं जिनसे गोथिक निर्माता अभूतपूर्व ऊँचाई और खुलापन प्राप्त कर सके।

4.3 गोथिक गिरजाघर: इतिहास और संरचनात्मक तर्क

गोथिक वास्तुकला अपनी गगनचुंबी ऊँचाइयों, प्रकाशपूर्ण आंतरिक स्थानों और संरचनात्मक प्रतिभा के लिए प्रसिद्ध है। 12th और 13th centuries में विकसित इस वास्तुकला ने निर्मित परिवेश में एक रूपांतरण का संकेत दिया, जहाँ अभियांत्रिकी और आध्यात्मिक उत्कंठा एकाकार हो गईं। गोथिक निर्माताओं ने मेहराबों, पसलीदार कोष्ठकों और उड़ते प्रत्यालंबों का प्रयोग करके ऐसे भवन बनाए जो शताब्दियों बाद आज भी खड़े हैं। जैसा कि Ochsendorf, 2002 ने लिखा है, "इन भवनों की सुरक्षा संरचना की *ज्यामिति* से आती है, पदार्थ की *सामर्थ्य से नहीं*। "कभी कहा गया था कि पाँच मिनट तक खड़ी रहने वाली संरचना पाँच शताब्दियों तक स्थायी रहेगी (Heyman, 1966), यद्यपि इस प्रकार का आशावाद दीर्घकालीन पदार्थ-क्षय की उपेक्षा करता है।

इस सिद्धांत को—कि गोथिक स्थिरता पुंज के स्थान पर रूप से उत्पन्न होती है—एजेन विओले-ले-द्यूक ने अपनी *वास्तुकला* पर *व्याख्यान* में विशेष स्पष्टता से प्रतिपादित किया (Viollet-le-Duc, 1875)। विओले-ले-द्यूक ने यह समझने के लिए एक सैद्धांतिक ढाँचा विकसित किया कि गोथिक निर्माताओं ने संरचना और रूप के संबंध को किस प्रकार सहज रूप से समझा; उसने ऐसे सिद्धांत स्थापित किए जिनकी बाद में आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण ने पुष्टि की। (विश्वकोशकार और पुनरुद्धारक के रूप में उसकी पूरक भूमिका के लिए §15.4.1 देखें।)

यद्यपि यह अध्याय गोथिक गिरजाघरों पर केंद्रित है, तथापि इसमें सेंट पीटर बेसिलिका, मिलान के दुओमो, बोवे गिरजाघर और फ्लोरेंस के सांता मारिया देल फ़िओरे जैसी उल्लेखनीय संक्रमणकालीन संरचनाओं का भी संदर्भ दिया जाएगा।

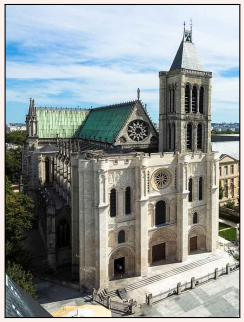
4.3.1 ऐतिहासिक मील के पत्थर

रोमनेस्क मूल से उदित गोथिक वास्तुकला 12th और 13th centuries में अपने चरम पर पहुँची। इस शैली में निर्मित प्रथम संरचना सेंट देनी का बेसिलिका गिरजाघर है, चित्र 4.1a, जो फ्रांस के सेंट देनी में 1144 में पूरा हुआ। चित्र 4.1b में दिखाया गया शार्त्र गिरजाघर गोथिक और रोमनेस्क तत्त्वों का समन्वय करता है और इसका निर्माण गोथिक अभिकल्प के उत्कर्षकाल में हुआ। सांता मारिया देल फ़िओरे गिरजाघर, चित्र 4.1c, अपने विशाल गुंबद और 1887 में पूर्ण नव-गोथिक मुखाग्र के लिए प्रसिद्ध है। लंदन का वेस्टमिंस्टर एबी, चित्र 4.1d, जिसका अधिकांश भाग 13th century में पुनर्निर्मित हुआ, एक अन्य

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रमुख उदाहरण है। एमिआँ गिरजाघर, चित्र 4.1e, सबसे ऊँचा है और 139 feet की ऊँचाई तक पहुँचता है। चयनित संरचनाओं का सार सारणी 4.1 में दिया गया है।



(a) सेंट देनी



(b) शार्त्र



(c) सांता मारिया देल फ़िओरे



(d) वेस्टमिंस्टर एबी



(e) एमिआँ

चित्र 4.1: प्रतीकात्मक गिरजाघर

सारणी 4.1 और 4.2 में अनेक सर्वाधिक उल्लेखनीय गोथिक गिरजाघर सूचीबद्ध हैं और चयनित उदाहरणों के प्रमुख आयाम दिए गए हैं–यह जानकारी बोवे की बाद की चर्चा में संदर्भित होगी।

तालिका 4.1: उल्लेखनीय गोथिक संरचनाएँ

गिरजाघर	स्थान	शताब्दी	उल्लेखनीय लक्षण
सेंट देनी का बेसिलिका गिरजाघर	फ्रांस	12th	प्रथम गोथिक संरचना
शार्त्र गिरजाघर	फ्रांस	12th	1194 की अग्नि के बाद पुनर्निर्मित
नोत्र-दाम दे पारी	फ्रांस	13th	उडते प्रत्यालंबों का प्रारंभिक प्रयोग
सांता मारिया देल फ़िओरे	इटली	13th	उल्लेखनीय गुंबद, नव-गोथिक मुखाग्र
क्लेरमों-फ़ेराँ गिरजाघर	फ्रांस	12th	काले लावा-पत्थर से निर्मित
वेस्टमिंस्टर एबी	इंग्लैंड	13th	ब्रिटिश राज्याभिषेकों का स्थल
एमिआँ गिरजाघर	फ्रांस	13th	सर्वाधिक ऊँचा गोथिक गिरजाघर

प्रारूप प्रतिकृति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 4.2: प्रमुख गोथिक गिरजाघरों के तुलनात्मक आयाम (Elizalde, 2025)

गिरजाघर	कोष्ठक ऊँचाई (m)	मुख्य कक्ष चौड़ाई (m)	कुल चौड़ाई पार्श्व मार्गों सहित (m)	निर्माण तिथियाँ
नोत्र-दाम दे पारी (FR)	33.0	13.0	24.8	1163–1250
शार्त्र गिरजाघर (FR)	36.0	16.4	30.0	1194–1250
रेंस गिरजाघर (FR)	38.0	14.65	30.0	1211–1275
एमिआँ गिरजाघर (FR)	42.3	11.6	32.0	1220–1288
बोवे गिरजाघर (FR)	47.5	15.3	45.6	1225–अपूर्ण
कोलोन गिरजाघर (DE)	43.0	14.0	45.0	1248–1880
पाल्मा गिरजाघर (ES)	44.0	19.0	55.0	1229–1601
मिलान दुओमो (IT)	45.0	16.5	57.0	1386–1965

4.3.2 आवश्यक शब्दावली और संरचनात्मक तत्त्व

गोथिक संरचनात्मक यांत्रिकी को समझने के लिए कई प्रमुख अवधारणाओं से परिचित होना आवश्यक है। इनमें सबसे मूलभूत है *प्रणोद-रेखा* (line of thrust)–वह पथ जिसके अनुदिश संपीडन बल मेहराब अथवा कोष्ठक में प्रवाहित होते हैं। जब यह रेखा पूर्णतः चिनाई की सीमाओं के भीतर रहती है, तो संरचना स्थिर रहती है (§31.5.2)

आगे बढने से पहले, हमें कुछ शब्दों से परिचित हो लेना चाहिए, चित्र 4.2d; कोष्ठकों के प्रकार चित्र 4.2e में दिखाए गए हैं।

ज्यामितीय तत्त्व

प्रणोद-रेखा मेहराब के भीतर बलों का पथ दर्शाती है; यदि प्रणोद-रेखा संरचना की भौतिक सीमाओं के भीतर समाहित है, तो वह स्थिर है।

अंतःपृष्ठ (intrados) मेहराब अथवा प्रत्यालंब का भीतरी वक्र।

बहिःपृष्ठ (extrados) मेहराब अथवा प्रत्यालंब का बाहरी वक्र।

कीलक खंड (voussoir) मेहराब अथवा प्रत्यालंब का व्यक्तिगत पत्थर (Chapter 31)।

बल और साम्य की अवधारणाएँ

सक्रिय प्रणोद-रेखा मेहराब की ज्यामिति द्वारा अनुमत सर्वाधिक क्षैतिज बल से संबद्ध।

निष्क्रिय प्रणोद-रेखा अपने स्वभार के अधीन संरचना की प्रणोद-रेखा को दर्शाती है।

संरचनात्मक तत्त्व

उडता प्रत्यालंब (flying buttress) मेहराब से आने वाले पार्श्व भारों का प्रतिरोध करने वाला नत मेहराब, चित्र 18.11c।

शिखरक (pinnacle) दीवारों के शीर्ष पर स्थित वास्तु-तत्त्व जो संपीडन प्रतिबल बढाता है।

चतुर्भागी पसलीदार कोष्ठक दो विकर्ण पसलियों द्वारा चार भागों में विभाजित पसलीदार कोष्ठक, चित्र 4.2a।

षड्भागी पसलीदार कोष्ठक दो विकर्ण पसलियों और तीन अनुप्रस्थ पसलियों द्वारा छह खंडों में विभाजित पसलीदार कोष्ठक, चित्र 4.2b

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

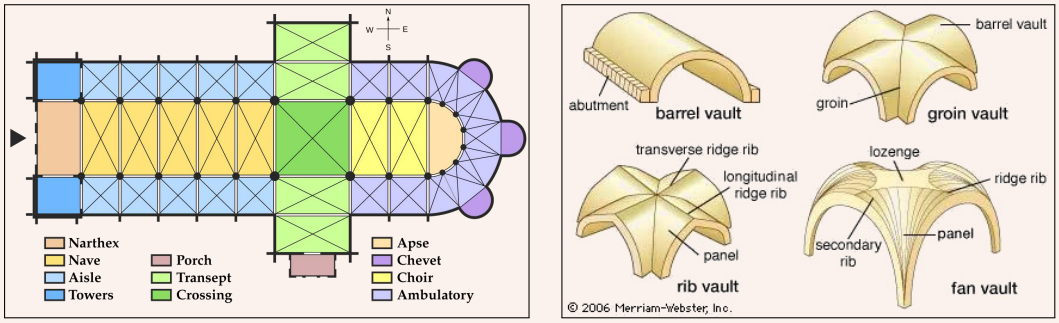
वास्तुकलात्मक लक्षण

शेवे (chevet) गिरजाघर का पूर्वी छोर।

त्रिमंजिला (triforium) दीवार की मोटाई के भीतर एक संकीर्ण मार्ग, चित्र 4.2c।



(a) चतुर्भागी (b) षड्भागी (c) त्रिमंजिला



(d) आरेखात्मक (e) कोष्ठक के प्रकार

चित्र 4.2: गिरजाघर के संरचनात्मक तत्त्व

4.3.3 गोथिक संरचनात्मक क्रांति

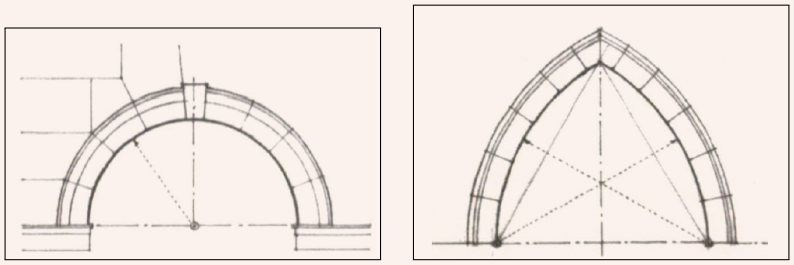
Bony, 1983 गोथिक वास्तुकला की तीन प्रमुख विशेषताएँ बताते हैं: (1) पसलीदार कोष्ठक, (2) संरचना भर में नोकीले मेहराब, और (3) ऊर्ध्वता पर सुविचारित बल। ये लक्षण वह खुलापन और हलकापन उत्पन्न करते हैं जो गोथिक शैली को विशिष्ट बनाते हैं। वे रोमनेस्क प्रभाव की भी चर्चा करते हैं, विशेषतः पसलीदार कोष्ठकों के प्रयोग में। रोमनेस्क और गोथिक वास्तुकला के बीच निर्णायक भिन्नता भार-अंतरण के मूलभूत दृष्टिकोण और मेहराब के क्रांतिकारी आकार में निहित है, जैसा चित्र 4.3 में दिखाया गया है।

नोकीले मेहराब का लाभ

नोकीला मेहराब रोमनेस्क रूपों से केवल सौंदर्यात्मक विचलन नहीं था–उसने संरचनात्मक व्यवहार को मूलतः बदल दिया। बलों को अधिक ऊर्ध्वाधर केंद्रित करके नोकीले मेहराब अर्धवृत्ताकार मेहराबों की तुलना में पार्श्व प्रणोद को लगभग 20-30% घटा देते हैं, जिससे हलके प्रत्यालंब-तंत्रों के साथ अधिक ऊँचा निर्माण संभव होता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मेहराब-रूपरेखाओं की तुलना करने पर रोमन और गोथिक दृष्टिकोणों का मूलभूत अंतर स्पष्ट होता है (चित्र 4.3)। चित्र 4.3a का रोमन अर्धवृत्ताकार मेहराब अपने आधार पर सर्वाधिक पार्श्व प्रणोद उत्पन्न करता है, अतः उसकी पूरी ऊँचाई में विशाल प्रत्यालंबन आवश्यक होता है। चित्र 4.3b का गोथिक नोकीला मेहराब बलों को अधिक ऊर्ध्वाधर केंद्रित करता है, जिससे प्रत्यालंबन की आवश्यकताएँ घटती हैं और गोथिक हलकापन की विशिष्टता संभव होती है।

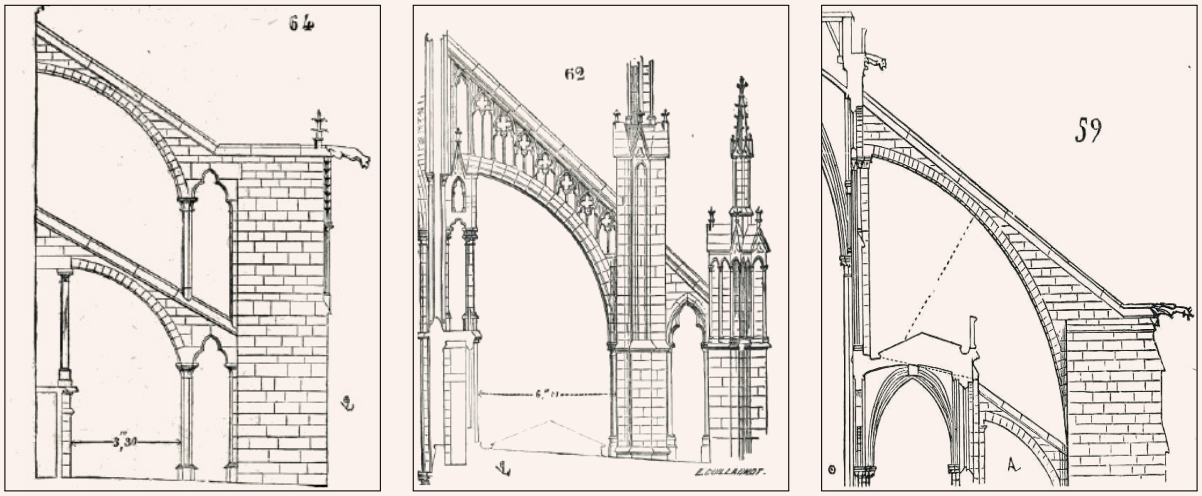


(a) रोमन मेहराब (b) गोथिक मेहराब

चित्र 4.3: रोमन और गोथिक मेहराब-रूपरेखाओं की तुलना (Ching, 2011)

उड़ते प्रत्यालंब: बाह्य भार-अंतरण

गोथिक वास्तुकला की एक पहचान *उड़ते प्रत्यालंबों* (flying buttresses) का प्रयोग है। संभवतः सर्वाधिक प्रतीकात्मक गोथिक नवाचार, उड़ते प्रत्यालंब संरचनात्मक तंत्र को भवन के बाहर ले जाते हैं। ऊँचे कोष्ठकों के प्रणोद को भवन-आवरण के बाहर अंतरित करके वे आंतरिक खुलापन को बनाए रखते हुए स्थिरता सुनिश्चित करते हैं। ये बाह्य अवलंब ऊँचे कोष्ठकों और मेहराबों के पार्श्व प्रणोद का प्रतिरोध करते हैं, जिससे अधिक ऊँची और पतली दीवारों का निर्माण संभव होता है। बारहवीं शताब्दी से उड़ते प्रत्यालंबों ने वास्तुकारों को संपीड़न द्वारा स्थिरता बनाए रखते हुए अभूतपूर्व संरचनात्मक ऊँचाई प्राप्त करने दी है। गोथिक गिरजाघरों में व्यापक प्रयोग के बावजूद, आधुनिक संगणनात्मक विश्लेषण उपकरणों से उनके संरचनात्मक व्यवहार का विस्तृत अध्ययन हाल ही में हुआ है (Ochsendorf, 2002; Kim, 2016)।

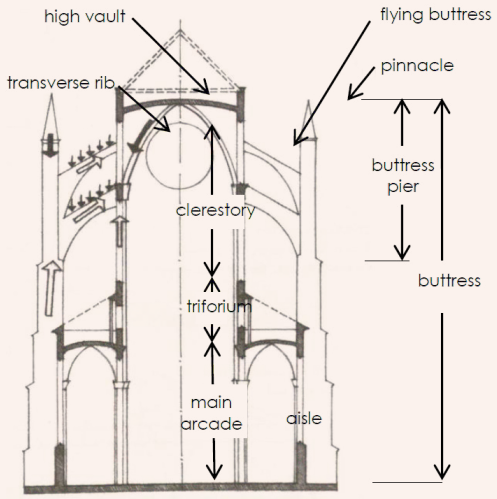


(a) क्लेरमों-फ़ेराँ (b) एमिआँ (c) नोत्र-दाम दे पारी

चित्र 4.4: गोथिक गिरजाघरों में उड़ते प्रत्यालंबों के उदाहरण (Kim, 2016)

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चित्र 4.5 एक सामान्य गोथिक गिरजाघर का अनुप्रस्थ-काट प्रदान करता है। अलंकारिक शिखरक से युक्त प्रत्यालंब, उडते प्रत्यालंब को स्थिर करता है, जो भीतरी मेहराबों के पार्श्व प्रणोद को बाहर अंतरित करता है। यह विन्यास खुलापन और प्रकाशपूर्णता बनाए रखते हुए आंतरिक संरचना को प्रमुखतः संपीडन बलों पर निर्भर रहने देता है।



चित्र 4.5: गोथिक गिरजाघर का अनुप्रस्थ-काट (Ching, 2011)

पसलीदार कोष्ठक: बलों का पथ-निर्देशन

गोथिक पसलीदार कोष्ठक त्रिविमीय ढाँचों के रूप में कार्य करते हैं, और भारों को पूर्वनिर्धारित पथों के अनुदिश स्तंभों और प्रत्यालंबों तक पहुँचाते हैं। इस तंत्र ने रोमनेस्क बैरल कोष्ठकों के सतत भारण को सांद्रित भारों से प्रतिस्थापित किया, जिससे बड़े खुले भाग संभव हुए और दीवारों का पुंज घटा।

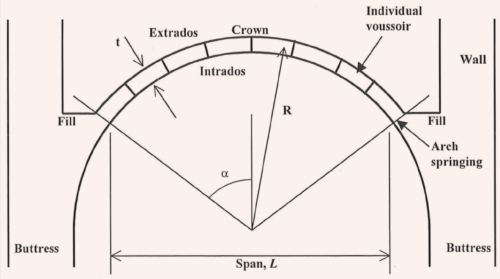
गोथिक संरचनाएँ अपनी अत्यधिक ऊँचाई और हवादार वास्तुकला के लिए जानी जाती हैं। गोथिक संरचनाओं के मुख्य वास्तुकलात्मक तत्त्व नोकीले मेहराब, पसलीदार क्रॉस कोष्ठक, उडते प्रत्यालंब और पतले स्तंभ हैं; इनमें से कुछ का प्रयोग रोमनेस्क और उससे भी पहले रोमन वास्तुकला में हो चुका था। इन सभी तत्त्वों का सामंजस्यपूर्ण और एकीकृत समग्र बनाने के लिए युगपत अनुप्रयोग की उपलब्धि पहली बार Île de France के फ्रांसीसी वास्तुकारों ने प्राप्त की, जिन्होंने गिरजाघर की अवधारणा को पुनर्परिभाषित किया।

नोकीला मेहराब रोमनेस्क रूप से केवल सौंदर्यात्मक विचलन ही नहीं, बल्कि संरचनात्मक रूप से लाभप्रद भी है–यह क्षैतिज प्रणोद घटाता है और भार को अधिक दक्षता से वितरित करता है।

इन तंत्रों के पीछे की यांत्रिकी की पूर्ण सराहना के लिए मेहराब के मूलभूत घटकों का परीक्षण उपयोगी है। चित्र 4.6 एक सामान्य मेहराब की ज्यामिति दर्शाता है, जिसमें *voussoirs* कहलाने वाले व्यक्तिगत पत्थर और अंदरूनी तथा बाहरी वक्र–*intrados* और *extrados*–सम्मिलित हैं। प्रत्येक छोर के प्रत्यालंब निष्क्रिय अवलंबों के रूप में कार्य करते हैं और मेहराब की वक्रता से उत्पन्न बाहरी प्रणोद का प्रतिरोध करते हैं।

गोथिक वास्तुकला का लालित्य उसकी संरचनात्मक आवश्यकता और कलात्मक अभिव्यक्ति के संश्लेषण में निहित है–जहाँ पदार्थ-सामर्थ्य नहीं, बल्कि ज्यामिति स्थिरता को नियंत्रित करती है।

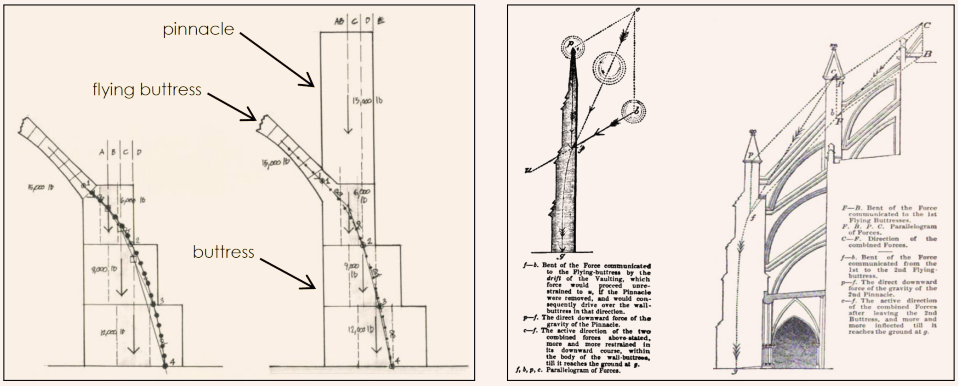
समीक्षा प्रति



चित्र 4.6: सामान्य मेहराब (Ochsendorf, 2002)

4.3.4 संरचनात्मक लक्षण

गोथिक अभियांत्रिकी का एक परिभाषक पक्ष उसके संरचनात्मक तत्त्वों के माध्यम से भार-पथ के सावधानीपूर्वक नियंत्रण में निहित है। इसका एक विस्मयकारी उदाहरण शिखरक है। केवल अलंकार होने से बहुत दूर, शिखरक प्रत्यालंब-तंत्र पर एक महत्त्वपूर्ण ऊर्ध्वाधर भार जोड़ता है और पार्श्व प्रणोद का प्रतिरोध करने की उसकी क्षमता बढ़ाता है। यह प्रभाव चित्र 4.7 में दर्शाया गया है।



(a) प्रणोद-रेखा को प्रभावित करता शिखरक (Kim, 2016)

(b) बल-अंतरण (Bartholomew, 1840)

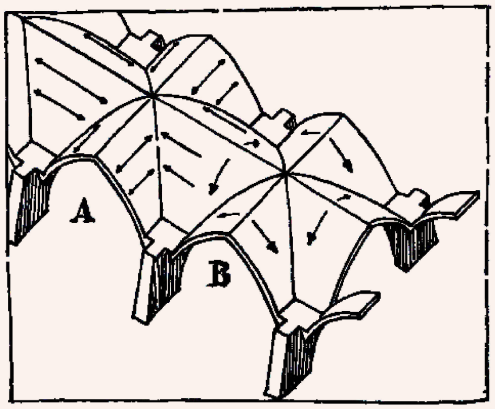
चित्र 4.7: उड़ते प्रत्यालंबों के माध्यम से बल-अंतरण

गोथिक वास्तुकला का एक अन्य प्रमुख तत्त्व पसलीदार कोष्ठक है, जिसने रोमनेस्क भवनों के अधिक भारी बैरल कोष्ठकों का स्थान लिया। जैसा चित्र 4.8 में दिखाया गया है, गोथिक कोष्ठक भारों को पसलियों के अनुदिश स्तंभों और अधिष्ठंभों तक पहुँचाते हैं, जिससे दीवारों का पुंज घटता है और बड़ी खिड़कियाँ तथा अधिक खुले आंतरिक स्थान संभव होते हैं।

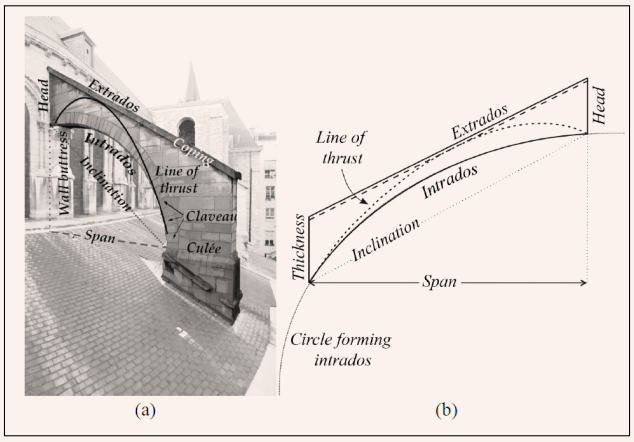
उड़ते प्रत्यालंब की स्वयं की ज्यामिति संरचनात्मक व्यवहार में निर्णायक भूमिका निभाती है। चित्र 4.9 में देखे गए वास्तविक और आदर्शीकृत, दोनों प्रकार के प्रत्यालंब नति-कोण, विस्तार और अंतःपृष्ठ तथा बहिःपृष्ठ की मोटाई-रूपरेखाओं जैसे प्राचलों से परिभाषित होते हैं। ये प्राचल निर्धारित करते हैं कि प्रत्यालंब ऊँचे कोष्ठकों के बल को कितनी दक्षता से भूमि में प्रवाहित करता है।

गोथिक संरचनाओं के विश्लेषण में एक केंद्रीय अवधारणा *प्रणोद-रेखा* है–वह पथ जिसका अनुसरण संपीडन बल मेहराब अथवा प्रत्यालंब में करते हैं। यदि यह रेखा संरचना की भौतिक सीमाओं के भीतर पूर्णतः रहती है तो स्थिरता सुनिश्चित है (§31.5.2)। चित्र 4.10 प्रणोद की *न्यूनतम* और *अधिकतम* रेखाओं द्वारा परिभाषित आवरण दर्शाता है–ये क्रमशः बाहरी सरकन अथवा भीतरी संदलन के कारण ध्वंस से पहले की सीमाओं को निरूपित करती हैं।

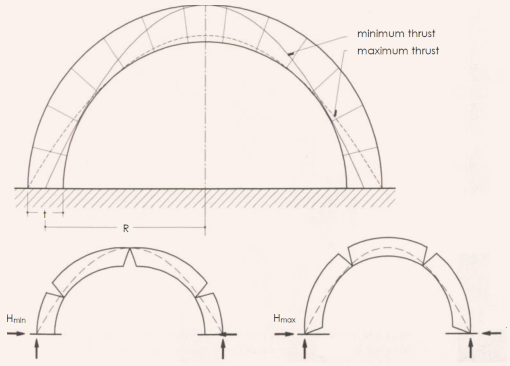
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 4.8: कोष्ठक का व्यवहार (Hassan Fangary, 2010)



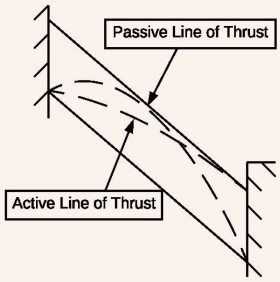
चित्र 4.9: उडते प्रत्यालंब की ज्यामिति (Nikolinakou, Tallon, and Ochsendorf, 2005)



चित्र 4.10: प्रणोद की न्यूनतम और अधिकतम रेखाएँ (Kim, 2016)

ये सीमाएँ प्रणोद की *निष्क्रिय* और *सक्रिय* रेखाओं के नाम से भी जानी जाती हैं। निष्क्रिय रेखा संरचना के स्वभार के अनुरूप है, जबकि सक्रिय रेखा अस्थिरता उत्पन्न होने से पहले प्रतिरोध किए जा सकने वाले अधिकतम कृषैतिज प्रणोद को दर्शाती है। चित्र 4.11 एक सामान्य उडते प्रत्यालंब-तंत्र के भीतर ये दोनों प्रणोद-रेखाएँ दर्शाता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 4.11: प्रणोद की सक्रिय और निष्क्रिय रेखाएँ ((Heyman, 1966) पर आधारित)

4.3.4.1 उल्लेखनीय संरचनात्मक सहनशीलता

इन परिष्कृत भार-अंतरण तंत्रों ने गोथिक संरचनाओं की उल्लेखनीय दीर्घायु में योगदान दिया; उनमें से अनेक न्यूनतम हस्तक्षेप के साथ शताब्दियों तक स्थायी रही हैं। ये गिरजाघर आधुनिक अभियांत्रिक उपकरणों के बिना, लंबे समय में और प्रायः बदलती वास्तुकलात्मक योजनाओं के अधीन बनाए गए। आश्चर्यजनक रूप से, विनाशकारी विफलताएँ बहुत कम हुई हैं। अनेक गोथिक चिनाई संरचनाएँ बड़े भूकंपों और युद्धों में टिकी रही हैं–कभी-कभी उन्होंने पड़ोस के आधुनिक भवनों से भी बेहतर निष्पादन किया है (Heyman, 1997)।

जैसा कि Ochsendorf, 2002 देखते हैं, उनकी सामर्थ्य पदार्थों से नहीं, बल्कि ज्यामिति से आती है। Heyman, 1966 के अनुसार, जो गोथिक संरचना खड़ी है वह संभवतः शताब्दियों तक खड़ी रहेगी–यह कथन "सुरक्षित प्रमेय" पर आधारित है:

> यदि ऐसी प्रणोद-रेखा खोजी जा सके जो बाह्य भारों के साथ साम्य में हो और चिनाई के भीतर पूर्णतः स्थित हो, तो संरचना सुरक्षित है।

इस सिद्धांत का Chapter 31 में अधिक गहराई से अन्वेषण किया जाएगा, जो कीलक-खंड मेहराबों के सिद्धांत और साम्य के आलेखी विश्लेषण पर केंद्रित है।

किंतु यह ध्यान देना चाहिए कि यह प्रतिरूप अपरिवर्तनीय पदार्थ-गुणों की धारणा करता है। यह अपक्षय, पदार्थ-वृद्धता अथवा विभेदी धँसाव के कारण दीर्घकालीन अवक्रमण को समाविष्ट नहीं करता–ये सभी आज ऐतिहासिक संरचनाओं की सुरक्षा को प्रभावित कर सकते हैं।

4.3.4.2 संरचनात्मक विश्लेषण का विकास

प्रारंभिक अनुभवजन्य समझ (1840s-1860s) गोथिक संरचनात्मक तत्त्वों के व्यवहार की व्यवस्थित जाँच 19th century के मध्य में आरंभ हुई। Willis, 1842 ने सर्वप्रथम यह सुझाया कि पसलीदार कोष्ठक निर्णायक भारवाही घटक थे; बाद के प्रेक्षणों द्वारा चुनौती मिलने तक यह दृष्टिकोण व्यापक रूप से स्वीकृत रहा। Alexander, Mark, and Abel, 1977 ने इस दृष्टिकोण की आलोचना की कि वह "व्यापक संरचनात्मक समझ की अपेक्षा दृश्य प्रभावों पर अधिक आधारित" था।

1860s में एजेन विओले-ले-द्यूक ने *élasticité* की अवधारणा प्रस्तुत की और सुझाया कि चिनाई भारों और धँसावों की एक परास को समायोजित कर सकती है (Alexander, Mark, and Abel, 1977)। उसका कोष्ठक-प्रतिरूप संरचना को व्यक्तिगत मेहराबों की एक प्रणाली मानता था।

20th century के आरंभ में विक्टर साबूरे ने बाद में इन विचारों को चुनौती दी। देखी गई दरारों के आधार पर उसने प्रस्तावित किया कि पसलियाँ संरचनात्मक रूप से निर्णायक घटकों के समान व्यवहार नहीं करतीं (Huerta, 2009)। पॉल अब्राहम ने इस कार्य को आगे बढ़ाया और पदार्थ-सामर्थ्य अथवा मोर्टार की गुणवत्ता की अपेक्षा कृषैतिज प्रणोद और कोष्ठक की ज्यामितीय रूपरेखा को प्रमुख माना (Alexander, Mark, and Abel, 1977)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हेमान क्रांति (1960s) जैक हेमान ने सुघट्य सीमा-सिद्धांत (plastic limit theory) प्रस्तुत करके चिनाई-विश्लेषण को रूपांतरित कर दिया। उसकी तीन मूलभूत धारणाओं ने इस क्षेत्र में क्रांति कर दी:

जैक हेमान ने 1960s से चिनाई संरचनाओं के अध्ययन में क्रांति की और सुघट्य सीमा-विश्लेषण की अवधारणा प्रस्तुत की (Heyman, 1966)। उसने प्रस्तावित किया कि चिनाई संरचनाएँ सुरक्षित हैं यदि ऐसी प्रणोद-रेखा खोजी जा सके जो:

1. पूर्णतः संरचना के भीतर स्थित हो,
2. बाह्य भारों के साथ साम्य में हो, और
3. तनाव उत्पन्न न करे।

यह विश्लेषण तीन धारणाओं पर आधारित है:

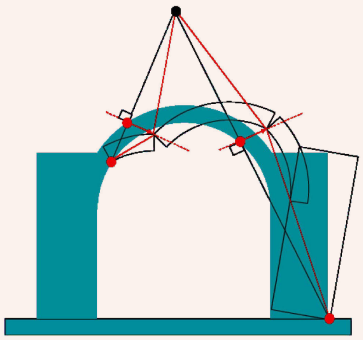
- चिनाई की तन्य सामर्थ्य नगण्य है।
- संपीडन सामर्थ्य असीमित है (स्वभार के अधीन)।
- उच्च घर्षण के कारण कोई सर्पण-विफलता नहीं होती।

ये धारणाएँ सीमा-विश्लेषण के निम्न और ऊपरी सीमा प्रमेयों के अनुप्रयोग को संभव बनाती हैं। पहला एक ग्राह्य प्रतिबल-क्षेत्र मिलने पर स्थिरता की गारंटी देता है, जबकि दूसरा ध्वंस की पहचान तब करता है जब ऐसा कोई साम्य संरचना के भीतर समाहित नहीं किया जा सकता। विफलता सामान्यतः पर्याप्त संख्या में कब्ज़ों वाले एक यंत्रावली के निर्माण से चिह्नित होती है–सामान्यतः मेहराब अथवा प्रत्यालंब में चार–और इसका परिणाम अस्थिरता होता है।

आधुनिक संगणनात्मक दृष्टिकोण समकालीन विश्लेषण अनेक विधियों का प्रयोग करता है; प्रत्येक विशिष्ट अंतर्दृष्टि प्रदान करती है, किंतु अनम्य और विषमांगी चिनाई के लिए सीमाओं का भी सामना करती है:

आलेखी और शुद्धगतिक विधियाँ आलेखी प्रणोद-रेखा विश्लेषण इस बात का आकलन करता है कि संरचनात्मक बल मेहराबों और कोष्ठकों के ज्यामितीय आवरण के भीतर रहते हैं अथवा नहीं; यह प्रायः 2D सन्निकटन के लिए कोष्ठक के “खंडों ” का प्रयोग करता है (Hassan Fangary, 2010 PDF)। प्रभावी होने पर भी यह समयसाध्य है और जटिल ज्यामितियों के लिए अव्यावहारिक है।

दूसरी ओर, शुद्धगतिक विश्लेषण ध्वंस-यंत्रावलियों को दृढ खंडों के समुच्चय के रूप में प्रतिरूपित करता है। यह बाह्य बलों द्वारा किए गए कार्य का मूल्यांकन करके विफलता-भारों की ऊपरी सीमा का आकलन करता है। ऐसे विश्लेषण से प्राप्त एक सामान्य विफलता-यंत्रावली चित्र 4.12 में दिखाई गई है।



चित्र 4.12: मेहराब संरचना और विफलता-यंत्रावली का शुद्धगतिक निर्धारण (Hassan Fangary, 2010 PDF)

ससीम घर्षण और आधुनिक संगणनात्मक दृष्टिकोण D’Ayala and Tomasoni, 2008 ने ससीम घर्षण को समाविष्ट करते हुए 3D निम्न-सीमा सीमा-अवस्था विश्लेषण प्रस्तावित किया। यह विभिन्न भारण-परिस्थितियों के लिए प्रतिबल-क्षेत्र,

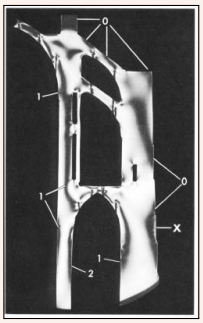
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दरार-रूपरेखाएँ और क्षैतिज प्रणोद मान उत्पन्न करता है। अधिक यथार्थ होने पर भी इसके लिए महत्त्वपूर्ण संगणनात्मक संसाधन और विशेषज्ञ निविष्टि आवश्यक है (Hassan Fangary, 2010)।

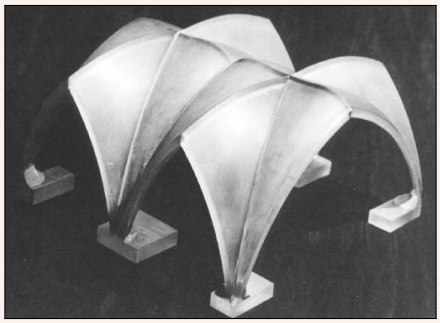
परिमित तत्त्व प्रतिरूपण (FEM): रॉबर्ट मार्क द्वारा प्रस्तुत FEM का अंतर्निहित सीमाओं के बावजूद गोथिक कोष्ठकों और प्रत्यालंबों के प्रतिरूपण में प्रयोग किया गया है। सातत्य, समदैशिकता और प्रत्यास्थता की धारणाएँ चिनाई पर कठोरता से लागू नहीं होतीं। Barrallo, Sanchez-Beitia, and Onati, 2005 और Viola, Panzacchi, and Tornabene, 2004 के हाल के प्रतिरूपों में कोष्ठक, अधिष्ठंभ और प्रत्यालंब समाविष्ट हैं। उपयोगी होने पर भी FEM परिणाम आदर्शीकृत धारणाओं पर अत्यधिक निर्भर हैं।

विविक्त तत्त्व प्रतिरूपण (DEM): DeJong, 2009 ने चिनाई पर DEM लागू किया और प्रत्येक पत्थर को एक दृढ खंड माना जो पृथक्करण अथवा सर्पण में सक्षम है; इससे असातत्यपूर्ण व्यवहार का अधिक समुचित निरूपण होता है।

प्रकाश-प्रत्यास्थ विश्लेषण: Mark and Prentke, 1968 ने झालर-प्रतिरूपों के माध्यम से प्रतिबल को दृश्य बनाने के लिए मापानुपाती एपॉक्सी प्रतिरूपों के प्रयोग का अग्रणी कार्य किया। Mark, Abel, and O'Neill, 1973 के बाद के कार्य ने इसे 3D कोष्ठकों तक विस्तृत किया (चित्र 4.13)।



(a) झालर-प्रतिरूप (Mark and Prentke, 1968)



(b) कोष्ठक-प्रतिरूप (Mark, Abel, and O'Neill, 1973)

चित्र 4.13: गोथिक कोष्ठकों का प्रकाश-प्रत्यास्थ विश्लेषण

ध्वंस-विश्लेषण और दृढ-पिंड यांत्रिकी अपने डॉक्टरेट शोध-प्रबंध में Ochsendorf, 2002 ने ज्यामिति-परिवर्तन को ध्वंस का प्रमुख कारण माना–उदाहरणार्थ, कोष्ठक का झुकना, बढता प्रणोद अथवा विस्तार में परिवर्तन। उसने सामान्य विफलता-यंत्रावलियों की पहचान की: मेहराबों में पाँच कब्ज़ों का निर्माण, प्रत्यालंबों में उलटना और भूकंपी भारों के अधीन चार-कब्ज़ा विफलता। ओक्सेनदोर्फ ने ऐतिहासिक चिनाई के लिए प्रत्यास्थ और परिमित तत्त्व विधियों की सीमाओं पर भी बल दिया और यथार्थ मूल्यांकन के लिए दृढ-पिंड यांत्रिकी को प्राथमिकता दी।

उडते प्रत्यालंबों का विश्लेषण उडते प्रत्यालंबों का गहन विश्लेषण हाल ही में हुआ है। Nikolinakou, Tallon, and Ochsendorf, 2005 ने उनके व्यवहार को निरूपित करने के लिए आदर्शीकृत ज्यामितीय प्रतिरूप प्रस्तावित किए और दिखाया कि विफलता संदलन, सर्पण अथवा स्थानीय अस्थिरता द्वारा हो सकती है–विशेषतः छोटे अथवा अत्यधिक नत प्रत्यालंबों में।

Nikolinakou and Tallon, 2006 ने वक्रता, नति और मोटाई के प्रभावों की और जाँच की। तथापि, प्रत्यक्ष तुलना के लिए उपलब्ध गोथिक संरचनाओं की कम संख्या से ये अध्ययन सीमित थे।

सबसे हाल में Kim, 2016 ने तीन प्रमुख गिरजाघरों–नोत्र-दाम दे पारी, एमिआँ और सेंट-एतिएन–के उडते प्रत्यालंबों का परिमित तत्त्व अध्ययन किया। उसने ज्यामितीय लक्षणों को प्रतिबल-सांद्रणों और संरचनात्मक भेद्यता के साथ सहसंबंधित किया।

संश्लेषण की ओर विश्लेषण की प्रत्येक विधि–आलेखी, शुद्धगतिक, प्रकाश-प्रत्यास्थ, FEM, DEM–विशिष्ट अंतर्दृष्टि प्रदान करती है, किंतु सीमाओं का भी सामना करती है, विशेषतः अनम्य और विषमांगी चिनाई के लिए। व्यवहार में सुरक्षा

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

का निर्धारण, विफलता-प्रकारों की पहचान और परिरक्षण रणनीतियों को सूचित करने के लिए अनेक दृष्टिकोण आवश्यक हो सकते हैं।

विश्लेषण की प्रत्येक विधि–आलेखी, शुद्धगतिक, प्रकाश-प्रत्यास्थ, FEM, DEM–विशिष्ट अंतर्दृष्टि प्रदान करती है, किंतु सीमाओं का भी सामना करती है, विशेषतः अनम्य और विषमांगी चिनाई के लिए। व्यवहार में सुरक्षा का निर्धारण, विफलता-प्रकारों की पहचान और परिरक्षण रणनीतियों को सूचित करने के लिए अनेक दृष्टिकोण आवश्यक हो सकते हैं।

दरार सदैव विफलता का संकेत नहीं है; किंतु विस्थापनों, ऊपरी स्तर के ध्वंस, भूकंपी गतिविधि अथवा कोष्ठक-विकृति के साथ मिलकर वह अस्थिरता का संकेत दे सकती है (Hassan Fangary, 2010 PDF)।

प्रणोद-रेखाओं और कीलक-खंड यांत्रिकी पर आगे की चर्चा Chapter 31 में प्रस्तुत की जाएगी।

गोथिक संरचनात्मक सिद्धांतों और विश्लेषण-विधियों की यह नींव स्थापित हो जाने पर, अब हम गिरजाघरों के चार अध्ययनों का परीक्षण करते हैं, जहाँ इन सैद्धांतिक अवधारणाओं की वास्तविक निर्माण में परीक्षा हुई–कभी सफलतापूर्वक और कभी विनाशकारी ढंग से।

4.4 चार गिरजाघरों की कथा

यह अनुभाग उन चार गिरजाघरों का परीक्षण करता है जिनका संरचनात्मक इतिहास वास्तुकलात्मक महत्त्वाकांक्षा और अभियांत्रिक यथार्थ के जटिल संबंध को उजागर करता है। प्रत्येक अध्याय दिखाता है कि साहसिक नवाचार, परंपरा-पालन अथवा संकट के प्रति प्रतिक्रिया में निहित अभिकल्प-निर्णयों ने इन स्मारकीय भवनों की नियति कैसे गढ़ी। बोवे के नाटकीय ध्वंसों से मिलान के ज्यामितीय विवादों तक, और सेंट पीटर की विश्लेषणात्मक उपलब्धियों से फ्लोरेंस में ब्रुनेलेस्की के मौन पारंगतता तक, ये गिरजाघर संरचनात्मक विश्लेषण, अभिकल्पीय प्रत्यास्थता और अनुभवजन्य अभ्यास तथा सैद्धांतिक समझ के बदलते संवाद की अमूल्य शिक्षाएँ देते हैं।

4.4.1 बोवे गिरजाघर: संरचनात्मक सीमाओं का एक प्रतीकात्मक अध्ययन

बोवे गिरजाघर संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहास की संभवतः सर्वाधिक शिक्षाप्रद विफलता है। उसका महत्त्वाकांक्षी अभिकल्प और दो नाटकीय ध्वंस गोथिक निर्माण की अनुभवजन्य सीमाओं की दुर्लभ प्रलेखित अंतर्दृष्टि प्रदान करते हैं। आधुनिक अभियंताओं के लिए यह एक अद्वितीय न्यायवैज्ञानिक अध्ययन है, जहाँ संरचनात्मक निर्णयों का विश्लेषण ऐतिहासिक प्रलेखन और समकालीन सीमा-विश्लेषण, दोनों द्वारा किया जा सकता है।

बोवे गिरजाघर संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहास के सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण अध्ययनों में से एक है। उसका महत्त्वाकांक्षी अभिकल्प और नाटकीय ध्वंस गोथिक निर्माण की सीमाओं की दुर्लभ अंतर्दृष्टि प्रदान करते हैं। अभियंताओं के लिए यह इस बात का मूल्यवान उदाहरण है कि अच्छे और बुरे, दोनों प्रकार के संरचनात्मक निर्णय किसी भवन की नियति को कैसे रूप दे सकते हैं। उसका इतिहास अत्यधिक प्रलेखित होने और उसके कुछ भागों के विफल तथा अन्य भागों के प्रबलित होने के कारण, बोवे न्यायवैज्ञानिक अभियांत्रिकी और समय के साथ संरचनात्मक स्थिरता के अध्ययन का प्रमुख संदर्भ बन गया है।

धार्मिक महत्त्वाकांक्षा और प्रतिस्पर्धी गिरजाघर-निर्माण

यद्यपि बोवे में पारी अथवा रेंस जैसे नगरों की राजनीतिक और आर्थिक प्रमुखता नहीं थी, तथापि एक शक्तिशाली धर्मप्रांत की पीठ होने के कारण उसके पास पर्याप्त धार्मिक अधिकार था। मध्यकालीन ईसाई संसार के प्रतिस्पर्धी परिदृश्य में धर्माध्यक्ष प्रायः लौकिक राजकुमारों की स्वायत्तता और संसाधनों के साथ कार्य करते थे, और वास्तुकला को आध्यात्मिक वक्तव्य और संस्थागत दावे, दोनों के रूप में नियोजित करते थे।

यद्यपि बोवे में पारी अथवा रेंस जैसे नगरों का राजनीतिक और आर्थिक कद नहीं था, तथापि एक शक्तिशाली धर्मप्रांत की पीठ होने के कारण उसके पास पर्याप्त धार्मिक अधिकार था। मध्यकालीन गिरजाघर के प्रतिस्पर्धी परिदृश्य में धर्माध्यक्ष प्रायः लौकिक राजकुमारों की स्वायत्तता और महत्त्वाकांक्षा से कार्य करते थे। ऐसा ही एक व्यक्ति नांतेई का धर्माध्यक्ष

प्रारूप प्रकाशन

माइलो था, जिसने 1220s में गिरजाघर का निर्माण आरंभ कराया। चतुर्थ धर्मयुद्ध का दिग्गज और उच्च पादरीवर्ग का सुसंबद्ध सदस्य माइलो, वास्तुकला के माध्यम से बोवे की आध्यात्मिक और संस्थागत प्रतिष्ठा स्थापित करना चाहता था। उसकी दृष्टि केवल भक्तिपरक नहीं, बल्कि प्रतीकात्मक थी: परिमाण और ऊँचाई में इतना साहसी गिरजाघर खड़ा करना कि वह बोवे के साधारण नगरीय विस्तार के बावजूद उसे ईसाई आकांक्षा के प्रकाश-स्तंभ के रूप में घोषित करे।

अंतराल: बोवे की खगोलीय घड़ी

यद्यपि बोवे गिरजाघर अपनी साहसिक 13th-century चिनाई के लिए प्रसिद्ध है, तथापि उसकी सर्वाधिक असाधारण अभियांत्रिक उपलब्धियों में से एक 19th century की है। ऑगस्ट-ल्यूसिएँ वेरिते द्वारा 1865 और 1868 के बीच निर्मित खगोलीय घड़ी परिशुद्ध यांत्रिक अभियांत्रिकी की एक उत्कृष्ट कृति है, जो स्वयं गिरजाघर की संरचनात्मक महत्त्वाकांक्षा की बराबरी करती है।

यद्यपि बोवे गिरजाघर[1] अपनी साहसिक 13th-century चिनाई के लिए प्रसिद्ध है, तथापि उसकी सर्वाधिक असाधारण अभियांत्रिक उपलब्धियों में से एक 19th century की है। फ़्रांसीसी घड़ीसाज़ ऑगस्ट-ल्यूसिएँ वेरिते द्वारा 1865 और 1868 के बीच निर्मित गिरजाघर की खगोलीय घड़ी असाधारण जटिलता वाली यांत्रिक प्रणाली है, चित्र 4.14। बारह मीटर से अधिक ऊँची और 90,000 से अधिक अंतर्ग्रथित घटकों से युक्त यह परिशुद्ध अभियांत्रिकी की एक उत्कृष्ट कृति है। बावन डायल खगोलीय परिघटनाओं–ग्रहीय स्थितियों, सूर्य और चंद्र ग्रहणों तथा ज्वारीय चक्रों–के साथ अनेक नगरों के नागरिक समय पर सतत आउटपुट देते हैं। केंद्रीकृत मोटर और सहायक गियरों द्वारा चालित स्वचालित अनुक्रमों की एक शृंखला पूर्णतः समकालिक प्रदर्शन करती है, जिसके लिए अत्यंत सूक्ष्म शुद्धगतिक नियोजन आवश्यक था। गोथिक वास्तुकला में नवीकृत रुचि के काल में बनी यह घड़ी इस बात का उदाहरण है कि 19th-century अभियंताओं ने यांत्रिक और खगोलीय ज्ञान को एकीकृत प्रणालियों में कैसे रूपांतरित किया। मात्र अलंकारिक पश्चविचार न होकर यह दिखाती है कि यांत्रिक अभिकल्प किस प्रकार गोथिक संरचना के तर्क और महत्त्वाकांक्षा का अनुकरण कर सकता है–परतदार, इष्टतमीकृत और रूप के माध्यम से सूचना अभिव्यक्त करने के लिए गहराई से प्रतिबद्ध।



चित्र 4.14: बोवे की खगोलीय घड़ी

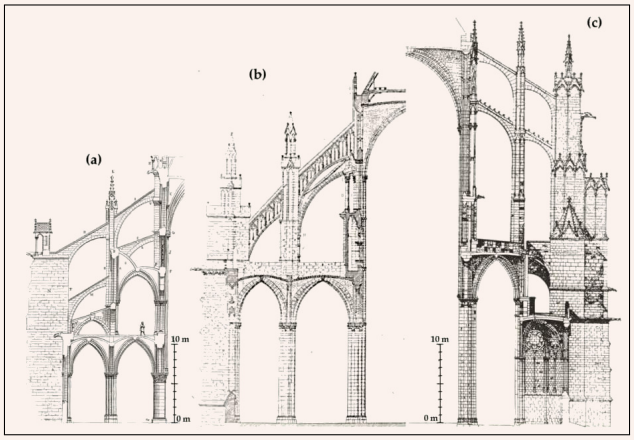
संरचनात्मक अपवादिता के मिथक पर प्रश्न

एक सामान्य भ्रांति बोवे को संरचनात्मक रूप से असाधारण–अनुपातों में इतना महत्त्वाकांक्षी कि ध्वंस अनिवार्य था–के रूप में चित्रित करती है। यह नाटकीय कथा सावधान आयामी विश्लेषण से प्रकट अधिक सूक्ष्म संरचनात्मक यथार्थ को ढक देती है।

[1]बोवे-तिये विमानपत्तन (BVA) अब मुख्यतः पारी की किफ़ायती उड़ानों के लिए एक कम-लागत प्रवेशद्वार के रूप में कार्य करता है। बहुत कम यात्री जानते हैं कि रनवे के पार ही गोथिक यूरोप का एक सर्वाधिक महत्त्वाकांक्षी गिरजाघर खड़ा है–उससे भी कम लोग उसे देखने की छोटी यात्रा करते हैं, जैसा कि एक बार आपके इस लेखक ने किया था।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

एक वैध प्रश्न उठता है: क्या बोवे गिरजाघर संरचनात्मक रूप से इतना असाधारण था कि उसके अनुपात मात्र उसके आंशिक ध्वंस की व्याख्या कर सकें? उत्तर संभवतः नहीं है। गिरजाघर के विशाल आयामों के बारे में बार-बार किए गए दावों के बावजूद, वे वास्तव में तेरहवीं शताब्दी के प्रथमार्ध में बने अन्य प्रमुख गोथिक गिरजाघरों से महत्त्वपूर्ण रूप से बड़े नहीं हैं, सारणी 4.2 और चित्र 4.15। जैसा कि Branner, 1997 ने लिखा है, बोवे के गायक-मंडली के मुख्य अधिष्ठंभों के बीच की केंद्ररेखा दूरी 15.0 meters है–बूर्ज, शार्त्र, एमिआँ और कोलोन के लगभग ठीक बराबर और रेंस से केवल थोड़ी अधिक। गायक-मंडली की कुल चौड़ाई, लगभग 42 meters, बूर्ज के तुलनीय और वास्तव में अन्य सभी से कम है, जिससे पार्श्व मार्ग अपेक्षाकृत साधारण रहते हैं। एकमात्र वास्तव में असाधारण आयाम कोष्ठक की ऊँचाई है, जो 48 meters तक पहुँचती है–काल के अन्य सभी गोथिक गिरजाघरों से ऊँची, यद्यपि कोलोन 46 meters के साथ निकट आता है। अनुदैर्घ्य दिशा में बोवे के गायक-मंडली के तीन मूल खंड लगभग 8 से 9 meters तक थे, जो एमिआँ के सबसे चौड़े खंड से थोड़े छोटे और रेंस तथा कोलोन के लगभग समान थे।



चित्र 4.15: निम्न के अनुप्रस्थ-काट (मुख्य कक्ष की ऊँचाई और प्रत्यालंबन-तंत्र) का तुलनात्मक विश्लेषण: (a) नोत्र-दाम गिरजाघर, पारी; (b) एमिआँ गिरजाघर; और (c) बोवे गिरजाघर (Viollet-le-Duc, 1854 PDF के अनुप्रस्थ अध्ययनों पर आधारित लेखक का चित्र।

1284 का ध्वंस: एक संरचनात्मक अन्वेषण-कथा

शुक्रवार, 29 November 1284 को ठीक रात आठ बजे बोवे गिरजाघर की गायक-मंडली के ऊपरी कोष्ठक विनाशकारी रूप से ढह गए। घटना अचानक और विध्वंसकारी थी: विशाल कोष्ठक गिरे, कई रंगीन-काँच खिड़कियाँ टूट गईं और बाहरी अधिष्ठंभ खंडित हो गए। कभी गोथिक आकांक्षा के शिखर के रूप में परिकल्पित गायक-मंडली अनुपयोगी हो गई और चालीस वर्षों तक धार्मिक अनुष्ठान बंद रहे। पवित्र अवशेष, विशेषतः संत जस्ट, जेरमर और एव्रोस्ट के *châsses*, कथित रूप से अक्षत रहे।

बाह्य प्रेरकों–भूकंपी गतिविधि, असाधारण पवन अथवा सैन्य कार्रवाई–की अनुपस्थिति ने इस ध्वंस को विशेष रूप से मूल्यवान अध्ययन बनाया है। विफलता सामान्य भारण-परिस्थितियों में हुई, जिससे गोथिक चिनाई निर्माण की अंतर्निहित संरचनात्मक सीमाओं की दुर्लभ अंतर्दृष्टि मिलती है।

भूकंपी गतिविधि अथवा असाधारण पवन-भार जैसे बाह्य कारणों की अनुपस्थिति ने दीर्घकाल से इतिहासकारों को उलझन में रखा है। यद्यपि कुछ प्रारंभिक टिप्पणीकारों ने विफलता को अपनी सीमा से परे गई गोथिक महत्त्वाकांक्षा के उदाहरण के रूप में रोमांटिक बनाया, हेमान का संरचनात्मक विश्लेषण ऐसे दावों को निर्णायक रूप से खारिज करता है। उसका सीमा-विश्लेषण दिखाता है कि निर्मित गिरजाघर साम्य में था और एक दशक से अधिक समय तक वैसा ही रहा। वह दीर्घायु प्रारंभिक स्थिर विन्यास का प्रायोगिक प्रमाण है Heyman, 1967 PDF।

प्रारूप समीक्षा

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हेमान का क्रांतिकारी विश्लेषण

जैक हेमान का 1967 बोवे अध्ययन संरचनात्मक पुरातत्त्व में एक निर्णायक मोड है। ऐतिहासिक विफलता पर सुघट्य सीमा-विश्लेषण लागू करके उसने दिखाया कि आधुनिक अभियांत्रिक सिद्धांत मध्यकालीन निर्माण-अभ्यास पर कैसे प्रकाश डाल सकता है और गोथिक संरचनात्मक व्यवहार के बारे में दीर्घकालीन धारणाओं को कैसे चुनौती दे सकता है।

हेमान का तर्क है कि ध्वंस का कारण समग्र ज्यामिति अथवा संरचना की अत्यधिक ऊँचाई नहीं हो सकती। बल्कि, संभवतः यह किसी स्थानीय किंतु निर्णायक निर्माण-दोष–शायद निर्माण के दौरान प्रविष्ट कोई अनुक्रम अथवा विवरण–से उत्पन्न हुआ जो समकालीन जाँच से बच गया। उसका विश्लेषण दिखाता है कि केवल छोटे ज्यामितीय विस्थापन अथवा दीर्घकालीन मोर्टार संकुचन विफलता आरंभ करने के लिए पर्याप्त नहीं होते।[2] अनेक सिद्धांतों के बावजूद सटीक यंत्रावली अनिश्चित है, जो गोथिक निर्माण में रूप, पदार्थ और निष्पादन के जटिल अंतर्संबंध को दर्शाता है।

तत्कालीन परिणामों में क्षतिग्रस्त संरचना को स्थिर करने के लिए आपातकालीन उपाय किए गए, जिनमें गायक-मंडली के मेहराबदार मार्गों में पूरक स्तंभों का समावेश था, जैसा कि Wolfe and Mark, 1976 और Murray, 1989, दोनों ने लिखा है। यह घटना गोथिक वास्तुकला की सर्वाधिक परिणामी संरचनात्मक विफलताओं में से एक रही है–आधुनिक संरचनात्मक यांत्रिकी के माध्यम से अब उपलब्ध प्राविधिक अंतर्दृष्टि के स्तर से उसका महत्त्व और बढ गया है।

न्यायवैज्ञानिक अभियांत्रिकी: उंगेविटर का बल-विश्लेषण

1284 का ध्वंस मुख्यतः ऊँचे कोष्ठकों के प्रणोद के अधीन मुख्य अधिष्ठंभों की अत्यधिक पार्श्व विकृति का परिणाम था। आधुनिक विश्लेषण प्रकट करता है कि दृश्यतः पर्याप्त व्यक्तिगत तत्त्व भी उस समय विफल हो सकते हैं जब उनकी पारस्परिक क्रिया निर्णायक अस्थिरता उत्पन्न करती है।

1284 में गायक-मंडली का ध्वंस मुख्यतः ऊँचे कोष्ठक के प्रणोद के अधीन अधिष्ठंभों की अत्यधिक पार्श्व विकृति का परिणाम था। जैसा हेमान बल देता है, विफलता पदार्थ के संदलन अथवा तन्य विफलता के कारण नहीं हुई, बल्कि इसलिए कि अधिष्ठंभ पार्श्वतः उस बिंदु तक विक्षेपित हुए जहाँ प्रणोद-रेखा चिनाई रूपरेखा से बाहर निकल गई।

हेमान उंगेविटर के विश्लेषण, चित्र 4.16a, को पुनः प्रस्तुत करता है, जो एक सामान्य अनुप्रस्थ-काट पर कार्य करने वाले मुख्य बलों का परीक्षण करता है। मुख्य अधिष्ठंभ के लिए उंगेविटर ऊँचे कोष्ठक के प्रणोद $H_1 = 3.24$ tonnes और उसकी ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया V_1, तथा पार्श्व मार्ग के कोष्ठक का प्रणोद H_2 और ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया V_2 पहचानता है। अधिष्ठंभ द्वारा वहन की गई दीवारों और अन्य तत्त्वों के उत्केंद्री भारों को समाविष्ट करने पर उंगेविटर प्रश्न करता है: प्रत्यालंब के आवश्यक प्रणोद B का परिमाण क्या है, जिससे कुल प्रणोद-रेखा अधिष्ठंभ-आधार के मध्य-बिंदु से ठीक गुजरे?

इस मध्य-बिंदु के सापेक्ष बलों के आघूर्ण लेने पर B का मान सीधे प्राप्त होता है:

$$B = 3.02 \text{ tonnes (given } H_1 = 3.24 \text{ tonnes)} \tag{4.1}$$

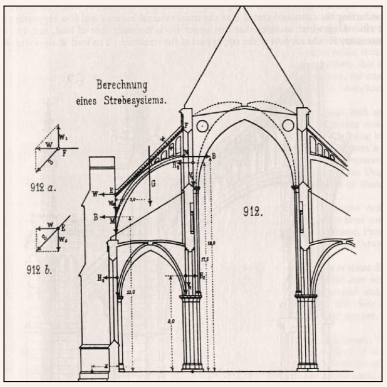
यह मान चिनाई के भीतर समाहित प्रणोद-रेखा के साथ साम्य के लिए आवश्यक न्यूनतम प्रत्यालंब प्रणोद निर्धारित करता है (चित्र 4.16a)।

हेमान आगे लिखता है कि लियों बेनूविल ने भी अपने 1891 के विश्लेषण में विफलता को कोष्ठक-प्रणोदों के अधीन पार्श्व विक्षेपण के कारण सही रूप से माना था; यह निष्कर्ष आलेखी और यांत्रिक विश्लेषण के पूर्णतः अनुरूप है।

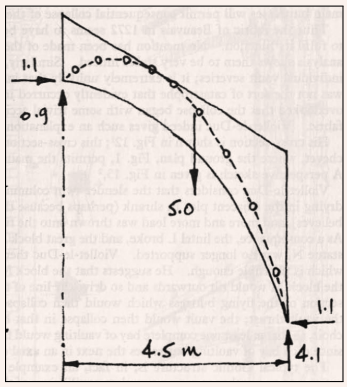
प्रणोद-रेखा पर स्वयं विचार करने पर समस्या और स्पष्ट हो जाती है। जैसा चित्र 4.16b में दिखाया गया है, प्रणोद-रेखा मध्य-ऊँचाई पर अधिष्ठंभ की अंतःपृष्ठ सीमा के अत्यंत निकट से गुजरती है, जो साम्य की अस्थिर प्रकृति की पुष्टि करता है। संरचना किसी भी सूक्ष्म अपूर्णता – जिसमें धँसाव, मोर्टार का संकुचन अथवा निर्माण की सूक्ष्म अशुद्धियाँ सम्मिलित हैं – के प्रति अत्यधिक संवेदनशील थी, जो प्रणोद-रेखा को चिनाई से बाहर ले जाकर अस्थिरता उत्पन्न कर देती।

[2]वास्तव में, आधुनिक संरचनात्मक विफलताओं में भी मूल कारण प्रायः समग्र अभिकल्प की कमी नहीं, बल्कि स्थानीय विवरणों–जैसे दुर्बल संधियाँ, छिपे पदार्थ-दोष अथवा उपेक्षित सीमा-परिस्थितियाँ (Benouville, 1891)–की उपेक्षा होती है। इसका सुपरिचित उदाहरण पश्चिमी वर्जीनिया में 1967 में सिल्वर ब्रिज का ध्वंस है, जो एकल आईबार के अपहचाने भंग से हुआ था, (Administration, 1969)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) गायक-मंडली के एक सामान्य अनुप्रस्थ-काट पर कार्य करता बल-तंत्र, जिसमें मुख्य कोष्ठक प्रणोद (H_1, H_2), ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाएँ (V_1, V_2) और साम्य के लिए आवश्यक प्रत्यालंब प्रणोद (B) दिखाए गए हैं, (Heyman, 1967)



(b) अधिष्ठंभ-खंड के भीतर प्रणोद-रेखा, जो मध्य-ऊँचाई पर अंतःपृष्ठ सीमा से निकटता दिखाती है और अस्थिरता-यंत्रावली की पुष्टि करती है, (Heyman, 1967)

चित्र 4.16: 1284 की विफलता का ध्वंसोत्तर विश्लेषण

1284 के बाद पुनर्निर्माण: अनुप्रयुक्त अभियांत्रिक शिक्षाएँ

1284 के ध्वंस के बाद का पुनर्निर्माण इतिहास के सर्वाधिक व्यापक संरचनात्मक पुनरोद्धारों में से एक है। केवल विफल तत्त्वों का पुनर्निर्माण करने के स्थान पर गिरजाघर अध्याय ने अस्थिरता के मूल कारणों का निराकरण करने वाले व्यवस्थित परिवर्तन लागू किए।

ध्वंस के उत्तर में 1284 के बाद किए गए पुनर्निर्माण ने संरचना को महत्त्वपूर्ण रूप से संशोधित किया। मध्यवर्ती अवलंब जोड़कर गायक-मंडली में अधिष्ठंभों की संख्या दोगुनी की गई, चित्र 4.17b, और खंड-अंतराल आधा कर दिया गया। अधिष्ठंभों की चिनाई मोटी की गई और प्रणोद का परिमाण घटाने के लिए कोष्ठकों की उद्गम-ऊँचाई घटाई गई।

क्षैतिज प्रणोद का अधिक प्रभावी प्रतिरोध करने के लिए उड़ते प्रत्यालंबों को भी अधिक तीव्र नति के साथ पुनर्अभिकल्पित किया गया, चित्र 4.17c।

1337 तक अधिकांशतः पूरा हुआ परिणामी पुनर्निर्माण ने गायक-मंडली की दृढ़ता बहुत बढ़ा दी। फिर भी हेमान लिखता है कि इस प्रकरण के बावजूद गोथिक निर्माण में प्रणोद के नाजुक संतुलन से संबंधित शिक्षाएँ 16th-century में केंद्रीय मीनार जोड़ने के प्रयास के समय भुला दी गई प्रतीत होती हैं; वह प्रयास भी अंततः विफल हुआ।

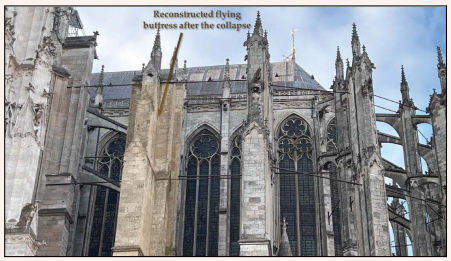
यह ध्यान देना चाहिए कि शतवर्षीय युद्ध[3] के दौरान निर्माण लगभग पूरी तरह रुक गया था, विशेषतः आर्थिक दबाव, संसाधनों की कमी और उत्तरी फ्रांस के उस क्षेत्र में बार-बार हुए आक्रमणों के कारण, जहाँ बोवे स्थित है।

[3]1337 और 1453 के बीच हुआ यह इंग्लैंड और फ्रांस के राज्यों के बीच संघर्ष और उत्तर मध्ययुग में फ्रांस का गृहयुद्ध था।

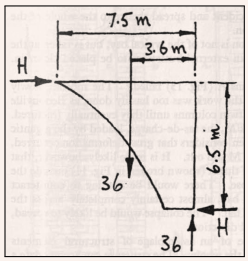
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) 1284 के ध्वंस के बाद बोवे गिरजाघर की गायक-मंडली की ध्वंस-पूर्व अवस्था (बाएँ पुनर्निर्माण) और ध्वंसोत्तर अवस्था (दाएँ) की तुलना, जिसमें अधिष्ठंभों को दोगुना करने से प्राप्त प्रबलन प्रमुखता से दिखाया गया है (Elizalde, 2025)



(b) 1284 के ध्वंस के बाद पुनर्निर्मित और ऊँचा किया गया उडता प्रत्यालंब दिखाता बोवे गिरजाघर की गायक-मंडली के बाह्य भाग का सामान्य दृश्य (Elizalde, 2025)



(c) *tas-de-charge* और मध्यवर्ती अधिष्ठंभ के बीच निचले उडते प्रत्यालंब का बल-आरेख, (Heyman, 1967)

चित्र 4.17: 1284 के ध्वंस के बाद बोवे का पुनर्निर्माण

1573 का ध्वंस: ऊर्ध्व महत्त्वाकांक्षा का भौतिक यथार्थ से सामना

1573 में केंद्रीय मीनार का ध्वंस संरचनात्मक विफलता की भिन्न श्रेणी है–जो निर्माण-दोषों से नहीं, बल्कि अत्यधिक ऊँचाई और अपर्याप्त पार्श्व अवलंब की मूलभूत असंगति से प्रेरित थी। यह विफलता अनुभवजन्य संरचनात्मक अभिकल्प की सीमाओं की निर्णायक अंतर्दृष्टि देती है।

30 April 1573–आरोहण दिवस–को बोवे गिरजाघर की केंद्रीय मीनार विनाशकारी रूप से ढह गई। प्रत्यक्षदर्शी वृत्तांत बताते हैं कि दिन के अनुष्ठान के बाद पादरीवर्ग और मंडली के गिरजाघर से बाहर निकलने के केवल कुछ क्षणों बाद, चौराहे की विशाल मीनार धमाके के साथ गिर गई। विफलता अचानक और हिंसक थी: चौराहे के दो दक्षिणी अधिष्ठंभ पहले टूटे, जिससे एक शृंखलाबद्ध प्रतिक्रिया आरंभ हुई जिसने लालटेन मीनार और समीपवर्ती कोष्ठकों को नष्ट कर दिया। उल्लेखनीय रूप से, केवल मामूली चोटें दर्ज हुईं Branner, 1962।

ध्वंस ने गिरजाघर की अद्वितीय ऊर्ध्वता की आकांक्षाओं का अंतिम अंत चिह्नित किया। 1569 में पूर्ण लालटेन मीनार अपने ध्वंस से पहले केवल चार वर्ष खडी रही; यह गोथिक संरचनात्मक तंत्र को उसकी अनुभवजन्य रूप से प्रमाणित सीमाओं से परे ले जाने की अस्थिरता को रेखांकित करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण: अनुपस्थित मुख्य कक्ष की समस्या

1573 की विफलता गोथिक अभिकल्प के एक मूलभूत सिद्धांत को उजागर करती है: ये संरचनाएँ व्यवस्थित भार-वितरण और पारस्परिक कड़ाई से स्थिरता प्राप्त करती हैं। निर्णायक घटक हटा देने पर समग्र तंत्र प्रगतिशील ध्वंस के प्रति भेद्य हो जाता है।

लालटेन मीनार की विफलता का मुख्य कारण मीनार द्वारा अधिरोपित अत्यधिक ऊर्ध्वाधर भार के अधीन चौराहे के अधिष्ठंभों की ज्यामितीय अस्थिरता माना गया है। जैसा कि Branner, 1997 और Wolfe and Mark, 1976 बल देते हैं, अधिष्ठंभ मूलतः कभी ऐसे भार के लिए अभिकल्पित नहीं थे। नियोजित संरचना के अभिन्न घटक, मुख्य कक्ष की अनुपस्थिति का अर्थ था कि पश्चिमी अधिष्ठंभों में निर्णायक पार्श्व संयम का अभाव था।

Wolfe and Mark, 1976 आगे रेखांकित करता है कि ध्वंस से पहले दक्षिणी अधिष्ठंभों में प्रगतिशील दरार देखी गई थी। यह बताता है कि विफलता का मूल अचानक नहीं था, बल्कि वह धारित भार के अधीन अधिष्ठंभों के विकृत होने के साथ क्रमशः विकसित हुआ और अंततः उस बिंदु पर पहुँचा जहाँ उत्केंद्रताएँ और विस्थापन ज्यामितीय स्थिरता की सीमाओं से बढ़ गए।

Branner, 1962 नई मीनार और गिरजाघर के पूर्व-विद्यमान गोथिक ताने-बाने के बीच अपर्याप्त संरचनात्मक एकीकरण की ओर भी इंगित करता है। पुराने और नए घटकों के बीच चिनाई-अंतरापृष्ठों में भारों को प्रभावी रूप से वितरित करने के लिए आवश्यक सातत्य नहीं था।

नींव की समस्याओं को एक योगदायी कारक प्रस्तावित किया गया है। Elizalde, 2025 सुझाता है कि विभेदी धँसाव, विशेषतः दक्षिणी अधिष्ठंभों के नीचे, ने विद्यमान अस्थिरताओं को बढ़ाया होगा। किंतु Murray, 1989 सहित अधिकांश विद्वान ज्यामितीय अस्थिरता के प्रमुख प्रश्न की तुलना में धँसाव को द्वितीयक कारक मानते हैं।

सार रूप में, लालटेन मीनार का ध्वंस उच्च संपीडन भारों के अधीन पतले अधिष्ठंभों में संचयी ज्यामितीय अस्थिरता से प्रेरित संरचनात्मक विफलता का एक शास्त्रीय उदाहरण था, जिसमें पर्याप्त पार्श्व कड़ाई का अभाव था। यह स्वयं गोथिक अभिकल्प-सिद्धांतों की विफलता नहीं, बल्कि उन्हें पूर्व अनुभव से परीक्षित सुरक्षित आवरण से परे विस्तृत करने की विफलता थी।

> यदि 1571 में अनुशंसित कड़ाई-उपाय अपनाए गए होते, तो संभवतः ध्वंस टाला जा सकता था।
>
> Wolfe and Mark, 1976

1573 के बाद: महत्त्वाकांक्षा से व्यावहारिकता तक

1573 के ध्वंस के बाद गिरजाघर-निर्माण के दर्शन में रूपांतरण हुआ—अभूतपूर्व ऊँचाई की खोज के स्थान पर संरचनात्मक व्यावहारिकता को स्वीकार किया गया। यह बदलाव जोखिम-निर्धारण और अनुभवजन्य सीमाओं की ओर अभियांत्रिक संस्कृति के व्यापक विकास को दर्शाता है।

1573 के विनाशकारी ध्वंस के बाद गिरजाघर अध्याय ने ऊर्ध्व सर्वोच्चता की आकांक्षा स्थायी रूप से त्याग दी। ध्वंस ने स्पष्ट कर दिया था कि किसी नवीकृत ऊर्ध्व विस्तार के संरचनात्मक जोखिम किसी भी प्रतीकात्मक अथवा सौंदर्यात्मक लाभ से बहुत अधिक हैं।

तत्काल प्रतिक्रिया में मलबा हटाना और स्थिरीकरण उपाय लागू करना सम्मिलित था। Murray, 1989 के अनुसार कारीगरों को ध्वंस के कुछ दिनों के भीतर क्षति का निर्धारण और लक्षित मरम्मत प्रस्तावित करने के लिए बुलाया गया। उनकी सिफ़ारिशों में गंभीर रूप से क्षतिग्रस्त उत्तर-पूर्वी चौराहा-अधिष्ठंभ, समीपवर्ती गायक-मंडली अधिष्ठंभ (D5/6) और C6 के पार्श्व मार्ग अधिष्ठंभ का पुनर्निर्माण सम्मिलित था। कई क्षतिग्रस्त उड़ते प्रत्यालंब भी बदले गए।

जैसा Wolfe and Mark, 1976 लिखता है, अस्थिर चिनाई की ऊपरी परतें आगे की विफलताओं को रोकने के लिए सावधानीपूर्वक विघटित की गईं। दुर्बल कोष्ठकों के आर-पार लोहे की बंधन-छड़ें लगाई गईं और प्रमुख उद्गम-बिंदुओं पर

समीक्षा प्रति

चिनाई-सिलाई की गई। इन हस्तक्षेपों ने पूर्व वास्तुकलात्मक महत्त्वाकांक्षाओं के पुनरुत्थान की अपेक्षा संरचनात्मक अखंडता को प्राथमिकता दी।

1605 तक गिरजाघर अध्याय ने मुख्य कक्ष बनाने अथवा मीनार का पुनर्निर्माण करने का विचार आधिकारिक रूप से त्याग दिया। यह निर्णय दार्शनिक मोड था–गोथिक आकांक्षा की खोज से व्यावहारिक संरचनात्मक सीमाओं की स्वीकृति तक।

आज बोवे गिरजाघर असाधारण उपलब्धि और सावधानीपूर्द स्मारक, दोनों के रूप में खडा है। उसकी गगनचुंबी गायक-मंडली और कटा हुआ अनुपूरस्थ भाग मध्यकालीन अभियांत्रिकी की विफलता नहीं, बल्कि अनुभवजन्य निर्माण-विधियों को प्रमाणित सीमाओं से परे ले जाने के अंतर्निहित जोखिम का प्रतिनिधित्व करते हैं।

बोवे से अभियांत्रिक शिक्षाएँ

बोवे गिरजाघर का संरचनात्मक इतिहास समकालीन अभियांत्रिक अभ्यास के लिए चिरस्थायी अंतर्दृष्टि प्रदान करता है। उसके दो ध्वंसों से तीन मूलभूत शिक्षाएँ मिलती हैं:

स्थानीय विवरण समग्र विफलता आरंभ कर सकते हैं: 1284 का ध्वंस दिखाता है कि दृश्यतः साधारण निर्माण-दोष अथवा पदार्थ-भिन्नताएँ अपनी स्थिरता-सीमाओं के निकट कार्यरत तंत्रों में विनाशकारी विफलता उत्पन्न कर सकती हैं। आधुनिक गुणवत्ता-नियंत्रण और निरीक्षण प्रोटोकॉल इस भेद्यता का निराकरण करते हैं।

तंत्र-एकीकरण निर्णायक है: 1573 की मीनार-विफलता सम्पूर्ण भार-पथ और अवलंब-आवश्यकताओं पर विचार किए बिना संरचनात्मक तंत्र में तत्त्व जोडने के खतरों को दर्शाती है। गोथिक गिरजाघर व्यवस्थित एकीकरण से स्थिरता प्राप्त करते हैं–प्रमुख घटकों को हटाना अथवा बदलना समग्र संरचना से समझौता कर सकता है।

अनुभवजन्य सीमाएँ होती हैं: दोनों विफलताएँ तब हुईं जब निर्माताओं ने गोथिक निर्माण-अभ्यास के प्रमाणित आवरण को पार किया। यद्यपि नवाचार प्रगति को प्रेरित करता है, अनुभवजन्य रूप से मान्य सीमाओं से परे जाने के लिए सावधान विश्लेषण और परीक्षण आवश्यक है–जो संसाधन मध्यकालीन निर्माताओं के लिए अनुपलब्ध किंतु आधुनिक अभियांत्रिकी के लिए अनिवार्य हैं।

1573 में बोवे गिरजाघर की केंद्रीय मीनार का ध्वंस चिनाई वास्तुकला में ऊर्ध्व महत्त्वाकांक्षा की संरचनात्मक सीमाओं का दृढ प्रमाण है। संक्षिप्त समय के लिए यूरोप की सबसे ऊँची संरचना रही लालटेन मीनार ने ऊँचाई में अपने गोथिक पूर्ववर्तियों को पार किया, किंतु संरचनात्मक विवेक में नहीं।

विफलता दुर्बल शिल्पकौशल अथवा ज्ञान की कमी से नहीं, बल्कि इस बात के निर्णायक भ्रांत आकलन से हुई कि पर्याप्त पार्श्व कडाई विहीन पतले अधिष्ठंभ धारित संपीडन भारों के प्रति किस प्रकार प्रतिक्रिया करते हैं। जैसा कि Wolfe and Mark, 1976 और Branner, 1997 बल देते हैं, समस्या तात्कालिक अतिभारण नहीं, बल्कि प्रगतिशील ज्यामितीय अस्थिरता थी। मूल अभिकल्प के अभिन्न घटक, मुख्य कक्ष की अनुपस्थिति ने पश्चिमी अधिष्ठंभों को पार्श्व बहाव के विरुद्ध खतरनाक रूप से अनवलंबित छोड दिया।

मीनार के खडे रहने के चार वर्षों में छोटी प्रारंभिक अपूर्णताएँ मापनीय विस्थापनों में संचयित हो गईं। मीनार के विशाल भार से उत्पन्न उत्केंद्री प्रणोदों के अधीन अधिष्ठंभ क्रमशः विकृत हुए। अंततः विस्थापन उस निर्णायक सीमा पर पहुँच गए जहाँ संरचना साम्य बनाए नहीं रख सकी, और विनाशकारी ध्वंस आरंभ हुआ।

संरचनात्मक अभियंताओं और इतिहासकारों के लिए बोवे ज्यामितीय संभाव्यता और संरचनात्मक स्थिरता की सीमा का एक असाधारण अध्ययन है। यह रेखांकित करता है कि केवल तनुता विफलता का निकष नहीं है–किंतु अपर्याप्त कडाई, उत्केंद्री भार-पथों और दुर्बल पदार्थ-सातत्य के साथ तनुता नाममात्र स्थिर भारों के अधीन भी प्रगतिशील ध्वंस उत्पन्न कर सकती है।

आधुनिक परिरक्षणकर्ताओं के लिए बोवे एक शक्तिशाली शिक्षा देता है: गोथिक अभिकल्प का संरचनात्मक साहस सीमाओं के भीतर कार्य करता है, और जब रूप अपने काल की अनुभवजन्य सीमाओं से आगे निकल जाता है तो वे सीमाएँ खतरनाक रूप से पार हो सकती हैं।

आज अपनी गगनचुंबी गायक-मंडली और कटे हुए अनुपूरस्थ भाग के साथ गिरजाघर केवल महत्त्वाकांक्षा के स्मारक के रूप में नहीं, बल्कि आकांक्षा और यांत्रिकी के अपरिवर्तनीय नियमों के नाजुक संतुलन के चिरस्थायी स्मारक के रूप में खडा है।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4.4.2 मिलान का दुओमो: ज्यामिति, राजनीति और संरचनात्मक विवाद

मिलान के गिरजाघर का निर्माण वास्तुकलात्मक निर्णय-प्रक्रिया के इतिहास के सर्वाधिक रोचक प्रसंगों में से एक है, जहाँ सैद्धांतिक ज्यामिति, व्यावहारिक अनुभव और राजनीतिक प्राधिकार तीखी प्राविधिक बहसों में एकत्र हुए। विनाशकारी रूप से विफल बोवे के विपरीत, मिलान की कथा दिखाती है कि प्रतिस्पर्धी अभियांत्रिक दर्शनों के बीच जटिल बातचीत स्मारकीय वास्तुकला को कैसे रूप दे सकती है।

गोथिक परंपरा का इतालवी नवाचार से मिलन

रोमनेस्क काल के बाद गोथिक वास्तुकला बारहवीं शताब्दी के उत्तरार्ध से सोलहवीं शताब्दी (पुनर्जागरण के उदय) तक यूरोप में फली-फूली। नोकीली वास्तुकला के नाम से भी जानी गई यह शैली अधिक ऊँचाई और बहुत अधिक प्रकाश से चिह्नित थी, जिसे कोष्ठकों और प्रत्यालंबों में प्राविधिक सुधारों ने संभव बनाया।

पंद्रहवीं शताब्दी से पहले वास्तुकलात्मक ज्ञान मुख्यतः व्यावहारिक शिष्यता और कड़ाई से रक्षित व्यावसायिक रहस्यों के माध्यम से प्रसारित होता था। मिलान गिरजाघर परियोजना ने इसे बदल दिया और वास्तुकला के इतिहास की कुछ सर्वप्रथम प्रलेखित प्राविधिक बहसें उत्पन्न कीं।

गोथिक गिरजाघर अव्यवस्थित रूप से नहीं बनाए गए थे। निर्माण-तकनीकें विद्यमान थीं, और विशेषतः ज्यामिति और stonemasonry ने निर्णायक भूमिका निभाई (Shelby, 1972)। विशेषज्ञता प्रायः मौखिक रूप से राजमिस्त्रियों की एक पीढ़ी से अगली पीढ़ी तक, अधिकतर पिता से पुत्र तक, प्रसारित होती थी। सौभाग्य से दो प्रमुख अपवाद बचे हुए हैं: विलार दे ऑनकूर की तेरहवीं शताब्दी की रेखाचित्र-पुस्तिका और पंद्रहवीं तथा प्रारंभिक सोलहवीं शताब्दियों में जर्मन प्रधान राजमिस्त्रियों द्वारा लिखी गई कई पुस्तिकाएँ। इन प्रलेखों से हम मध्यकालीन राजमिस्त्रियों द्वारा प्रयुक्त ज्यामिति का पर्याप्त विस्तृत चित्र प्राप्त कर सकते हैं।

विलार दे ऑनकूर: दैवी विज्ञान के रूप में ज्यामिति

तेरहवीं शताब्दी में फ़्रांसीसी पत्थर-राजमिस्त्री विलार दे ऑनकूर ने पूरे यूरोप में व्यापक यात्रा की और अपनी प्रसिद्ध रेखाचित्र-पुस्तिका संकलित की, जो गोथिक राजमिस्त्रियों द्वारा प्रयुक्त निर्माण-नियमों और अनुपाती नियमों की मूल्यवान अंतर्दृष्टि देती है (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858)। अपने टिप्पणों में विलार ज्यामिति का व्यापक संदर्भ देता है (*मैंने कहा कि समस्त विज्ञान केवल ज्यामिति के विज्ञान से जीवित है, इस पर आश्चर्य न करो*) और यहाँ तक अनुमान लगाता है कि यूक्लिड ने मिस्र में रहते हुए अब्राहम से ज्यामिति सीखी थी। उसका कार्य न केवल निर्माण-विवरणों का दृश्य प्रलेखन, बल्कि गोथिक निर्माण-अभ्यासों के बौद्धिक और सैद्धांतिक आधार की झलक भी प्रदान करता है। यद्यपि टिप्पण व्यवस्थित नहीं हैं, वे ज्यामितीय सिद्धांतों और अनुपात से शासित अभिकल्प की सुसंगत दृष्टि दर्शाते हैं।

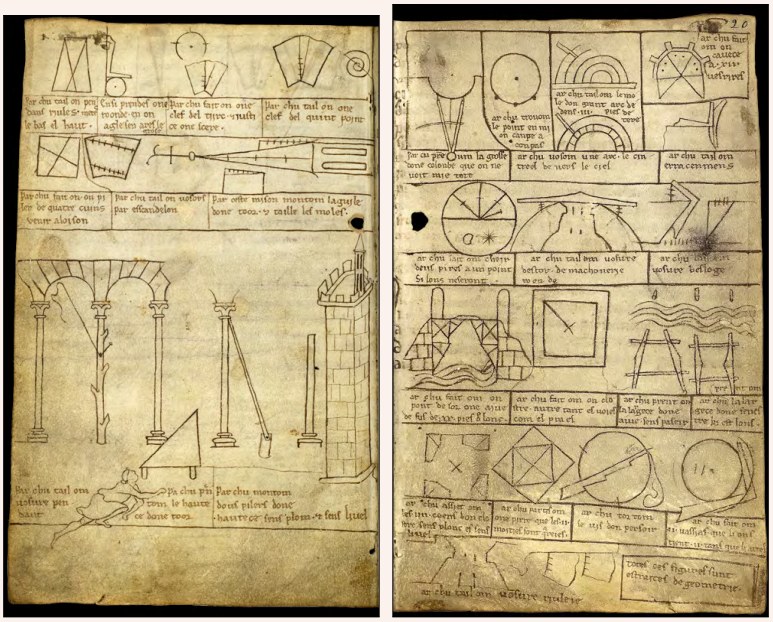
उत्तर गोथिक काल में जर्मन प्रधान राजमिस्त्रियों ने कई छोटी पुस्तकें लिखीं। इनमें मुद्रित होने वाली सर्वप्रथम मैथियस रोरित्सर की *Geometria deutsch*, थी, जो 1486 में प्रकाशित हुई। यह विशेष रूप से ज्यामिति को समर्पित ग्रंथ है। बारह पृष्ठों की पुस्तिका में अंकित आकृतियाँ और नौ समस्याओं के संक्षिप्त स्पष्टीकरण हैं: समकोण, पंचभुज, सप्तभुज और अष्टभुज कैसे बनाएँ; वृत्त की लंबाई और केंद्र कैसे खोजें; समान क्षेत्रफल वाले वर्ग और त्रिभुज कैसे बनाएँ; पेडिमेंट के लिए साँचे और शिखरक कैसे निर्धारित करें; और पेडिमेंट की योजना कैसे बनाएँ।

मिलान का गिरजाघर: फ़ाब्रिका और संस्थागत नवाचार

Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano के अधीन 1386 में आरंभ मिलान के गिरजाघर का निर्माण वास्तुकलात्मक संगठन में एक निर्णायक मोड़ था। मध्यकालीन निर्माण की विशिष्ट अनौपचारिक आचार्य–शिष्य प्रणाली के विपरीत, फ़ाब्रिका ने प्राविधिक परामर्श का एक संस्थागत ढाँचा बनाया, जिसने पूरे यूरोप की विशेषज्ञता को एकत्र किया।

समकालीन वृत्तांतों में बार-बार बल दिया गया दुओमो का एक विस्मयकारी पक्ष यह है कि उसकी देखभाल और मरम्मत आकस्मिक नहीं, बल्कि सतत है। उसके इतिहास के प्रायः किसी भी क्षण गिरजाघर का कोई न कोई भाग मचान के अधीन रहा है, जहाँ पत्थर-कटाई करने वाले अपक्षयित संगमरमर बदलते, जालीदार पत्थरकारी की मरम्मत करते अथवा मूर्तिकलात्मक

प्रारूप प्रतिकृति



चित्र 4.18: विलार दे ऑनकूर के *carnet* से ज्यामितीय रेखाचित्र, जो नियम और अनुपातन-प्रणालियाँ दर्शाते हैं (De Honnecourt, 2006)

तत्त्वों का नवीकरण करते हैं। मिलान के नागरिकों के लिए सदैव मरम्मत की यह अवस्था विफलता अथवा क्षय का संकेत नहीं, बल्कि स्वयं भवन की सामान्य अवस्था है: दुओमो को एक ऐसी संरचना माना जाता है जिसे स्थायी रखने के लिए निरंतर देखभाल आवश्यक है। इस अर्थ में निर्माण, परिरक्षण और मरम्मत अविभाज्य हैं, और चौदहवीं शताब्दी के उत्तरार्ध से आज तक फैली एकल, अबाध प्रक्रिया बनाते हैं (Povoledo, 2023)।

पंद्रहवीं शताब्दी से पहले वास्तुकला से संबंधित बहुत कम लेख थे। किंतु 1386 में *Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano* के संरक्षण में आरंभ मिलान गिरजाघर के निर्माण से यह बदल गया; यह संगठन आज भी विद्यमान है। यह परियोजना इतालवी और यूरोपीय वास्तुकला के इतिहास के सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण प्रसंगों में से एक थी—पहला, स्वयं भवन की विशिष्टता के कारण, जो इटली में कभी निर्मित सबसे बड़ा गोथिक गिरजाघर है; दूसरा, पूरे यूरोप के प्राधिकृत वास्तुकारों के योगदान के कारण, जिन्हें समय-समय पर प्रस्ताव देने के लिए आमंत्रित किया गया; और तीसरा, एक शताब्दी से अधिक समय में संरचनात्मक विकल्पों, क्षेत्रीय निर्माण-अभ्यासों और सामुदायिक प्राधिकार के विपरीत ड्यूक के प्राधिकार के दावे को लेकर आरंभ बहसों और चर्चाओं के कारण। इस परियोजना के प्रलेखन का Ackerman, 1949 ने प्रसिद्ध वर्णन किया।

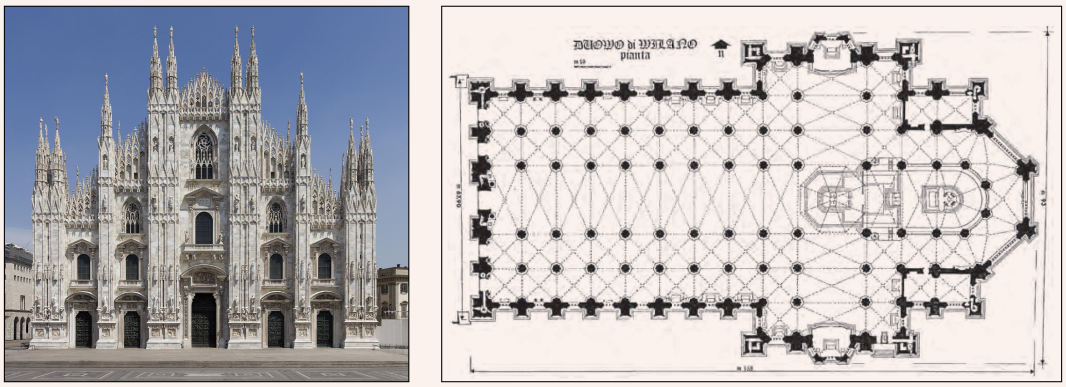
दुओमो की एक विशिष्टता *Candoglia* संगमरमर का प्रयोग है, जिसे मैजोरे झील से निकालकर नाविग्ली नहर-तंत्र के माध्यम से मिलान लाया गया, जिससे गिरजाघर को उसका विशिष्ट हलका रंग मिला (चित्र 4.19a)। संगमरमर मिलान के ड्यूक जियान गालेआत्सो विस्कोंती द्वारा दिया गया, जिसने फ़ाब्ब्रिका को खदानों तक निःशुल्क पहुँच दी और इस प्रकार ड्यूकीय संरक्षण तथा नागरिक और धार्मिक प्राधिकार के संघ को प्रतीकात्मक बनाया।

महान ऊँचाई-विवाद: ज्यामिति बनाम व्यावहारिकता

मिलान की ऊँचाई को लेकर हुई बहसें सैद्धांतिक ज्यामिति और व्यावहारिक निर्माण-अनुभव के बीच सर्वप्रथम प्रलेखित संघर्षों में से एक हैं। विवाद प्रकट करता है कि विभिन्न क्षेत्रीय परंपराओं ने वास्तुकलात्मक अनुपात के मूलभूत प्रश्न को किस प्रकार देखा।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रारंभिक बहसें भवन की ऊँचाई पर केंद्रित थीं। 1386 में बनी भू-योजना ने पार्श्व मार्गों के लिए 16 गुना 16 *braccia*[4] वर्गाकार जालक और मुख्य कक्ष के लिए 16 गुना 32 *braccia* आयतों का प्रयोग किया (चित्र 4.19b)।



(a) कांदोलिया का संगमरमर (b) भू-योजना

चित्र 4.19: मिलान का दुओमो

मूलभूत समस्या यह थी कि नींव पूरी होने के बाद भी संरचना की ऊँचाई अनिर्धारित रही–यह स्थिति आधुनिक निर्माण-अभ्यास में अकल्पनीय, किंतु मध्यकालीन भवन-विकास की विशिष्टता थी।

समस्या यह थी कि नींव पूरी होने के बाद भी संरचना की ऊँचाई अनिर्धारित रही। चूँकि यह मिलान था—दक्षिण इटली का कोई नगर नहीं—अतः परिणामी संरचना वास्तव में किसी सुसंगत ऊर्ध्व योजना के बिना बनाई गई। 1391 में आर्कबिशप ने "भित्तिस्तंभों की लंबाई, गिरजाघर और खिडकियों की ऊँचाई" पर निर्णय लेने के लिए सम्मेलन बुलाया। प्रमुख प्रश्नों में यह सम्मिलित था कि दोनों ओर के पार्श्व मार्गों की ऊँचाई समान हो अथवा भिन्न, और भू-योजना के 16 गुना 16 *braccia* जालक से आंशिक रूप से नियंत्रित ऊँचाई आयताकार अथवा त्रिभुजाकार विन्यास के अनुसार उठे (अर्थात्, वर्गों अथवा समबाहु त्रिभुजों पर आधारित: *ad quadratum* अथवा *ad triangulum*)।

इस प्रारंभिक योजना को बाद में फ़्रांसीसी रेयोनां शैली और जर्मन उच्च गोथिक अभ्यासों से प्रभावित वास्तुकारों के योगदान ने चुनौती दी, जो विशेषतः कोलोन गिरजाघर में दिखाई देते हैं; वह कुछ प्रस्तावों का संदर्भ-बिंदु था।

पवित्र ज्यामिति और वास्तुकलात्मक परिपूर्णता

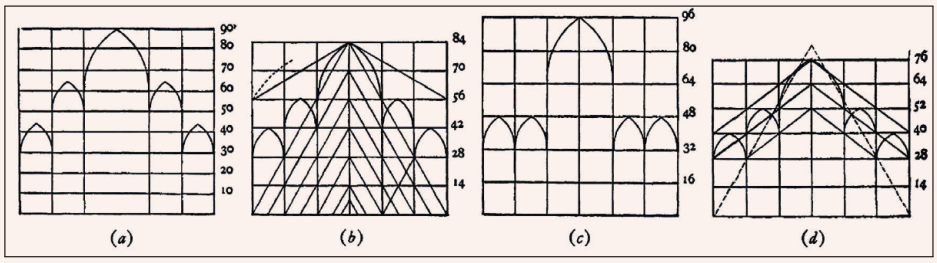
जैसा Sebregondi and Schofield, 2016 ने लिखा, वर्ग और समबाहु त्रिभुज का विट्रुवियस से विलार दे ऑनकूर तक के वास्तुकलात्मक लेखों में प्रायः आह्वान किया गया। प्लेटो के समय से पवित्र माने गए ये उस "ज्यामितीय अभिजात (élite) वर्ग" के थे जिसने दैवी व्यवस्था और वास्तुकलात्मक अभिकल्प को जोडने वाली परंपरा को जन्म दिया। गिरजाघर–उच्चतम कल्याण और परम सौंदर्य से पहचाना गया ईश्वर का घर–बनाने की इच्छा के कारण भवन को गणितीय परिपूर्णता मूर्त करनी थी। इसने आदर्श ज्यामिति और निर्माण-यथार्थ के बीच तनाव उत्पन्न किया। अतः भवन को परिपूर्ण होना था: एक *Gesamtkunstwerk*[5], जिसका प्रत्येक तत्त्व संसार की अव्यवस्था के विपरीत दैवी सामंजस्य प्रतिबिंबित करे।

चित्र 4.20a चार प्रस्तावित अभिकल्प दर्शाता है।

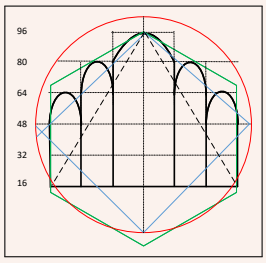
[4] *Braccia* (एकवचन: *braccio*) इटली में प्रयुक्त पूर्व-मीट्रिक लंबाई-इकाई थी जो क्षेत्रानुसार बदलती थी। फ्लोरेंस में एक *braccio* लगभग 58.4 cm (लगभग 23 inches) था। पुनर्जागरण और प्रारंभिक आधुनिक काल में इसका प्रयोग वास्तुकलात्मक और अभियांत्रिक मापनों में सामान्यतः होता था।

[5] समग्रता में कलाकृति।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) क्रमिक प्रस्तावित योजनाएँ (Ackerman, 1949)



(b) स्टोरनालोको की योजना का पुनर्निर्माण (Sebregondi and Schofield, 2016)

चित्र 4.20: क्रमिक अभिकल्पों की अनुपातन-योजनाएँ

प्रतिस्पर्धी प्रस्तावों का विकास

बहसों से चार भिन्न दृष्टिकोण उदित हुए, जिनमें से प्रत्येक भिन्न दार्शनिक और व्यावहारिक प्राथमिकताएँ प्रतिबिंबित करता था:

दी विचेंजो, 1390: योजना और नींव के विदेशी प्रभाव से पहले निर्धारित होने पर, टिप्पणियों का पहला समुच्चय–एक प्राथमिक स्रोत–और अनुप्रस्थ-काट तथा ऊँचाई का प्रारंभिक मार्गदर्शन अभिलिखित किया।

स्टोरनालोको, 1391: ज्यामितीय परिपूर्णता और व्यावहारिक निर्माण के बीच एक प्रतिभाशाली समझौता प्रस्तावित किया। उसने इस मूलभूत समस्या का समाधान किया कि समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई ($\sqrt{3}$) अपरिमेय थी और इसलिए मध्यकालीन उपकरणों से परिशुद्ध मापन असंभव था।

स्टोरनालोको, 1391: ज्यामितीय रूप से शुद्ध समबाहु त्रिभुज-योजना से छोटा किंतु महत्त्वपूर्ण विचलन प्रस्तावित किया, जिसे Panofsky, 1945 ने स्पष्ट किया। स्टोरनालोको ने समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई ($\sqrt{3}$) की अपरिमेयता का समाधान किया, जिसने साधारण मापदंड के प्रयोग को रोका। 96 *braccia* के आधार के लिए त्रिभुज $96\sqrt{3}/2 \approx 83.13$ *braccia* की ऊँचाई देता। स्टोरनालोको ने पूर्णांकित 84 *braccia* प्रस्तावित किया, जो सुविधापूर्वक 14 *braccia* के छह खंडों में विभाज्य था। इस समझौते ने छह समान कृषैतिज विभाजनों का प्रयोग करके निर्माण संभव बनाया।

चित्र 4.20b एक प्रतिभाशाली पुनर्निर्माण है: ANCpBq वृत्त में अंतर्लिखित नियमित षट्भुज है; AA पार्श्व मार्ग की ऊँचाई और भावी प्रत्यालंब की नति है; ABC समबाहु त्रिभुज (मुख्य कक्ष की ऊँचाई) है; AOpr एक अंतर्लिखित वर्ग है, जिसका विकर्ण rO इम्पोस्ट की ऊँचाई परिभाषित करता है; AD/6 और BC/6 “figure quadrangulares” परिभाषित करते हैं; और 16/14, BC/AD है।

पारलर, 1392: कोलोन के हाइनरिख पारलर ने कोलोन गिरजाघर से प्रतीकित जर्मन उच्च गोथिक परंपरा से प्रेरित होकर, त्रिभुजीय ज्यामिति को पूरी तरह त्यागने और 96 *braccia* की आंतरिक ऊँचाई वाला वर्गाकार-अनुप्रस्थ-काट अभिकल्प अपनाने का प्रस्ताव दिया।

पारलर, 1392: संभवतः कोलोन गिरजाघर से प्रेरित 96 *braccia* की आंतरिक ऊँचाई वाला वर्गाकार-अनुप्रस्थ-काट अभिकल्प प्रस्तावित किया।

मिलानी समझौता: स्थानीय राजमिस्त्रियों ने दोहरी ज्यामितीय प्रणालियों वाला संकर समाधान विकसित किया: 28 *braccia* तक समबाहु त्रिभुज, जिसके ऊपर 3-4-5 पाइथागोरीय त्रिभुज रखकर कुल 76 *braccia* की ऊँचाई प्राप्त की गई। इस व्यावहारिक दृष्टिकोण ने ज्यामितीय आदर्शों और निर्माणात्मक बाधाओं, दोनों को संतुष्ट किया।

प्रारूप समीक्षा

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समझौता: मिलानी राजमिस्त्रियों ने दो त्रिभुज-तंत्रों का प्रयोग करते हुए नई, निम्न ऊँचाई-योजना विकसित की: 28 *braccia* तक समबाहु त्रिभुज, और 3-4-5 पाइथागोरीय त्रिभुज से कुल 76 *braccia* की ऊँचाई। जैसा Ackerman, 1949 ने लिखा, अनेक *ad triangulum* प्रस्तावों का सह-अस्तित्व स्रोतों की व्याख्या को जटिल बनाता है।

जाँ मिन्यो का हस्तक्षेप: विज्ञान बनाम कला

पारी के फ़्रांसीसी प्रधान निर्माता जाँ मिन्यो ने मिलान के दुओमो के निर्माण में निर्णायक किंतु विवादास्पद भूमिका निभाई, (Ackerman, 1949)। 1390's में *विशेषज्ञ परामर्शदाता* के रूप में आमंत्रित मिन्यो ने इतालवी राजमिस्त्रियों द्वारा विकसित संरचनात्मक प्रस्तावों की समीक्षा की और उनकी पर्याप्तता पर कठोर आपत्तियाँ व्यक्त कीं। उसने प्रसिद्ध रूप से 54 संरचनात्मक दोष पहचाने और चेतावनी दी कि गिरजाघर *in pericolo di ruina* (ध्वंस के खतरे में) था; दोष अपर्याप्त प्रत्यालंबन से लेकर असमानुपाती अधिष्ठंभ-आधारों (à la Vitruvius) तक थे। मिन्यो ने स्टोरनालोको द्वारा प्रस्तावित पहले की अधिक ज्यामितीय रूप से कठोर 84-*braccia* ऊँचाई पर लौटने की वकालत की।

उसकी आलोचनाओं ने तीखी बहस को जन्म दिया, जो निर्माण-ज्ञान के दो मूलतः भिन्न दृष्टिकोणों के आसपास स्फटिकीकृत हुई। स्थानीय परंपरा और व्यावहारिक अनुभव पर आधारित मिलानी राजमिस्त्रियों ने *scientia est unum et ars est aliud* (विज्ञान एक वस्तु है, कला दूसरी) का दावा किया और कहा कि उनका अनुभवजन्य ज्ञान अमूर्त सिद्धांत से अधिक महत्त्वपूर्ण था[6]।

मिन्यो का प्रसिद्ध प्रत्युत्तर—*ars sine scientia nihil est* (विज्ञान के बिना कला कुछ नहीं)—व्यावहारिक निर्माण के साथ सैद्धांतिक सिद्धांतों के एकीकरण का घोष बन गया। इस बहस ने आधुनिक अभियांत्रिक शिक्षा की पूर्वछाया प्रस्तुत की, जो वैज्ञानिक समझ को व्यावहारिक अनुप्रयोग के साथ संयोजित करना चाहती है।

यह ध्यान देना चाहिए कि मिन्यो के दावे ने पुनर्जागरण के बाद के विचारकों के समान तर्कों की पूर्वछाया प्रस्तुत की। लगभग एक शताब्दी बाद लिखते हुए लियोनार्दो दा विंची ने *Nessuna umana investigazione si può dimandare vera scienza s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni* (किसी मानवीय अन्वेषण को सत्य विज्ञान नहीं कहा जा सकता यदि उसे गणितीय रूप से प्रदर्शित न किया जा सके) घोषित किया। लियोनार्दो ने इस बिंदु पर आगे बल दिया: "जो लोग विज्ञान के बिना अभ्यास के प्रति उत्कट हैं, वे उस नाविक के समान हैं जो पतवार अथवा दिक्सूचक के बिना जहाज पर चढता है और कभी निश्चित नहीं हो सकता कि वह किधर जा रहा है।" ये कथन गणितीय कठोरता के साथ अनुभवजन्य प्रेक्षण को एकीकृत करने की ओर एक व्यापक पुनर्जागरण आंदोलन दर्शाते थे–एक दार्शनिक बदलाव जो अंततः अभियांत्रिक अभ्यास और वैज्ञानिक कार्यप्रणाली, दोनों को रूपांतरित करेगा। अतः मिलान में आरंभ बहस उन सिद्धांतों की प्रारंभिक अभिव्यक्ति थी जो वैज्ञानिक क्रांति के लिए मूलभूत बनेंगे (§5.3)

उसके द्वारा उत्पन्न तनावों के बावजूद मिन्यो के हस्तक्षेप ने दुओमो के विकासशील अभिकल्प के भीतर अनिराकृत संरचनात्मक और ज्यामितीय अनिश्चितताओं को प्रकाश में लाया। उसकी आलोचना ने अनुभवजन्य अभ्यास और सैद्धांतिक तर्क के नाजुक संतुलन को रेखांकित किया–एक द्वंद्वात्मकता जो पुनर्जागरण और उसके बाद भी वास्तुकलात्मक चिंतन और अभियांत्रिक विमर्श को रूप देती रहेगी।

समाधान और विरासत

मिलान की बहसों ने अंततः प्रतिस्पर्धी माँगों को संतुलित करने वाला कार्यशील संश्लेषण उत्पन्न किया। अंतिम अभिकल्प ने अनेक प्रस्तावों के तत्त्व समाविष्ट किए और एक ऐसी संरचना बनाई जो ज्यामितीय आदर्शों और व्यावहारिक बाधाओं,

[6]सैद्धांतिक ज्ञान और व्यावहारिक अनुभव का यह तनाव अभियांत्रिकी और वास्तुकला की सर्वाधिक चिरस्थायी बहसों में से एक है। पूरे इतिहास में समान संघर्ष दिखाई दिए हैं: 1st century BCE में विट्रुवियस ने अनुभवी शिल्पकारों की प्रधानता स्वीकार करते हुए व्यवस्थित सिद्धांतों की वकालत की; 19th-century अभियंताओं ने बहस की कि लोहे के पुलों के अभिकल्प को गणितीय विश्लेषण निर्देशित करे अथवा अनुभवजन्य परीक्षण; और समकालीन अभ्यास संगणनात्मक प्रतिरूपण और क्षेत्रीय अनुभव के संबंध से आज भी जूझता है। अतः 1390s की मिलान बहसों ने एक एपिस्टमोलॉजिकल प्रश्न की पूर्वछाया प्रस्तुत की जो आज भी अभियांत्रिक शिक्षा और व्यावसायिक अभ्यास का केंद्र है: विश्वसनीय अभिकल्प-परिणाम प्राप्त करने के लिए सैद्धांतिक समझ और व्यावहारिक ज्ञान को कैसे एकीकृत किया जाए?

दोनों को संतुष्ट करती थी। अधिक महत्त्वपूर्ण रूप से, प्राविधिक परामर्श और बहस की प्रलेखित प्रक्रिया ने व्यवस्थित वास्तुकलात्मक निर्णय-प्रक्रिया के लिए पूर्वदृष्टांत स्थापित किए।

विभिन्न संशोधनों और अनुकूलनों के साथ कई शताब्दियों में दुओमो की पूर्णता सुविचारित संरचनात्मक तंत्रों की प्रत्यास्थता प्रदर्शित करती है। अनुभवजन्य सीमाओं से परे धकेले जाने पर विनाशकारी रूप से विफल बोवे के विपरीत, मिलान ने लचीलापन बनाए रखकर और चल रहे निर्माण-अनुभव की शिक्षाओं को समाविष्ट करके सफलता पाई।

4.4.3 सेंट पीटर बेसिलिका: संकट से वैज्ञानिक विश्लेषण तक

18th century में सेंट पीटर बेसिलिका का संरचनात्मक संकट वास्तुकलात्मक अभियांत्रिकी में एक निर्णायक मोड़ था। पहली बार किसी प्रमुख संरचनात्मक समस्या का समाधान अनुभवजन्य संशोधन से नहीं, बल्कि व्यवस्थित वैज्ञानिक विश्लेषण से किया गया। जियोवानी पोलेनी की जाँच ने अभियांत्रिक कार्यप्रणाली के नए मानक स्थापित किए और प्रदर्शित किया कि सैद्धांतिक यांत्रिकी व्यावहारिक निर्माण-समस्याओं को कैसे स्पष्ट कर सकती है।

माइकलएंजेलो का महत्त्वाकांक्षी अभिकल्प

सेंट पीटर बेसिलिका का गुंबद—जिसका अभिकल्प मुख्यतः माइकलएंजेलो ने किया और जो 1590 में पूर्ण हुआ—पुनर्जागरणकालीन संरचनात्मक महत्त्वाकांक्षा की पराकाष्ठा था। फ्लोरेंस में ब्रुनेलेस्की के गुंबद (चित्र 4.4.4) से प्रेरणा लेकर, किंतु ऊँचाई और विस्तृति दोनों में उससे आगे जाकर, इसने ऐसी अभियांत्रिक चुनौतियाँ उत्पन्न कीं जिन्होंने चिनाई-निर्माण की सीमाओं की परीक्षा ली।

प्रारंभिक चेतावनी-संकेत और संस्थागत प्रतिक्रिया

प्रारंभिक 17th century तक गुंबद की संरचना में चिंताजनक दरारें दिखाई देने लगी थीं। मध्यकालीन निर्माताओं के विपरीत, जो ऐसी समस्याओं का समाधान क्रमिक प्रबलन से कर सकते थे, 18th-century रोम ने इस संकट का सामना अभूतपूर्व वैज्ञानिक कठोरता से किया।

रोम स्थित सेंट पीटर बेसिलिका का गुंबद 1630 से ही क्षति और दरार के संकेत दिखा रहा था। 1742 तक उसका ह्रास इतना चिंताजनक हो गया कि पोप बेनेडिक्ट XIV ने औपचारिक अध्ययन का आदेश दिया। अंततः उन्होंने तीन गणितज्ञों—फादर रुजिएरो जुसेप्पे बोस्कोविच, थॉमस ले स्योर और फ़्राँस्वा जाकिए—को संरचना का मूल्यांकन सौंपा (Benvenuto, 1991b, pg. 352)। उनके विश्लेषण ने गुंबद के जटिल निर्माण—जिसमें आधार, प्रत्यालंब, ड्रम, दोहरा आवरण और शिखर-दीप सम्मिलित थे—को यांत्रिक विश्लेषण के अनुकूल एक सरलीकृत स्थैतिक योजना में घटा दिया (आधुनिक शब्दावली में, परिमित तत्त्व दृष्टिकोण)। उन्होंने ड्रम और प्रत्यालंबों में धँसाव देखा; प्रत्येक नितंब अपने ऊपरी सिरे पर अवतलन और निचले सिरे पर खुलाव प्रदर्शित कर रहा था (López, 2006, pg. 1958)। ,

पोलेनी की नियुक्ति: विशेषज्ञता और स्वतंत्रता

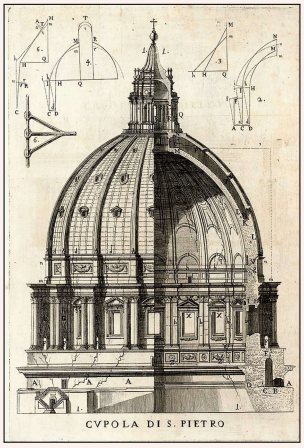
जेसुइट विद्वानों के निष्कर्ष से असंतुष्ट पोप बेनेडिक्ट XIV ने उनके निष्कर्षों का स्वतंत्र सत्यापन करने के लिए जियोवानी पोलेनी को नियुक्त किया। पोलेनी की नियुक्ति न केवल गणितज्ञ और यांत्रिकीविद् के रूप में उनकी बढ़ती प्रतिष्ठा, बल्कि वेटिकन की इस मान्यता को भी दर्शाती थी कि समस्या के लिए वैज्ञानिक कठोरता और व्यावहारिक अंतर्दृष्टि दोनों आवश्यक थे। पादुआ विश्वविद्यालय में प्राध्यापक और जलीय तथा यांत्रिक कार्यों के परामर्शदाता के रूप में पोलेनी सिद्धांत और अनुभवजन्य अन्वेषण को जोड़ने की क्षमता पहले ही प्रदर्शित कर चुके थे।

पोलेनी की योग्यताएँ सैद्धांतिक गणित तक सीमित नहीं थीं। उन्होंने यांत्रिक गणना-यंत्रों का अभिकल्प किया था और जलीय अध्ययनों के लिए परिष्कृत उपकरण विकसित किए थे। यांत्रिक परिघटनाओं को परिमाणित करने और अमूर्त सिद्धांतों को व्यावहारिक समाधानों में रूपांतरित करने की उनकी क्षमता अपने समकालीनों में अद्वितीय थी।

प्रारूप समीक्षा

कार्यप्रणालीगत नवाचार: खंडीय विश्लेषण

पोलेनी ने देखा कि गुंबद की दरारों ने उसे पहले ही अर्धगोलीय फाँकों (संतरे की फाँकों) जैसे खंडों में विभाजित कर दिया था, चित्र 4.21।



चित्र 4.21: सेंट पीटर के गुंबद में दरारों का पोलेनी द्वारा किया गया प्रेक्षण (Poleni, 1748)

विश्लेषण के लिए उन्होंने गुंबद को काल्पनिक रूप से ऐसी 50 फाँकों में विभाजित किया (Heyman and Poleni, 1988)। तत्पश्चात उन्होंने शीर्ष पर एक-दूसरे के विरुद्ध झुकी दो आसन्न फाँकों से बने द्विविमीय मेहराब की स्थिरता का मूल्यांकन किया। गुंबद के अनुप्रस्थ-काट के रेखाचित्र से पोलेनी ने प्रत्येक फाँक को 16 खंडों में बाँटकर और शिखर-दीप के भार को सम्मिलित करके उसका भार निकाला, चित्र 4.22a।

क्रांतिकारी शृंखला-प्रतिरूप प्रयोग

पोलेनी का सर्वाधिक प्रतिभाशाली नवाचार अपने विश्लेषणात्मक परिकलनों के सत्यापन हेतु *भौतिक प्रतिरूपों* का प्रयोग था। उनके लटकती शृंखला के प्रयोगों ने सैद्धांतिक परिणामों की सहज पुष्टि की और साथ ही संरचनात्मक तंत्रों में तनाव तथा संपीडन के मूलभूत संबंध को प्रदर्शित किया।

तत्पश्चात उन्होंने दो भौतिक शृंखला-प्रतिरूप बनाए: एक में पूरण कैटिनरी निरूपित करने वाले एकसमान गोले थे, और दूसरा ऐसी सोलह “छोटी सीसे की गोलियों से बना था जिनके भार चित्र 4.22a के स्तंभ IV में संख्यात्मक रूप से व्यक्त भारों के अनुरूप थे। फिर उन्होंने वास्तविक वक्रों की दोनों प्रणोद-रेखाओं से तुलना की और निष्कर्ष निकाला कि कैटिनरी से अंतर पर्याप्त अधिक, किंतु सीसे की गोलियों वाली शृंखलाओं से अत्यल्प था (इसका वक्र कोष्ठक के भीतर है) (Benvenuto, 1991b, pg. 382)। अतः पोलेनी ने—सही रूप से—निष्कर्ष निकाला कि काल्पनिक रूप से खंडित गुंबद स्थिर था और *a fortiori*, मूल गुंबद भी, चाहे दरारयुक्त हो अथवा न हो, स्थिर था।

संपीडनात्मक प्रणोद-रेखाओं के अनुकरण हेतु लटकती शृंखलाओं के प्रयोग ने एक शताब्दी पहले रॉबर्ट हुक द्वारा प्रस्तुत विचारों को प्रतिध्वनित किया (*Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum* अथवा “जैसे लचीली रेखा लटकती है, वैसे ही उलटने पर दृढ मेहराब खड़ा रहेगा”)। पोलेनी के दृष्टिकोण ने इस सिद्धांत की भौतिक पुष्टि की और कुलमान तथा रैंकिन जैसे 19th-century अभियंताओं की आलेखीय विधियों की पूर्वछाया प्रस्तुत की।

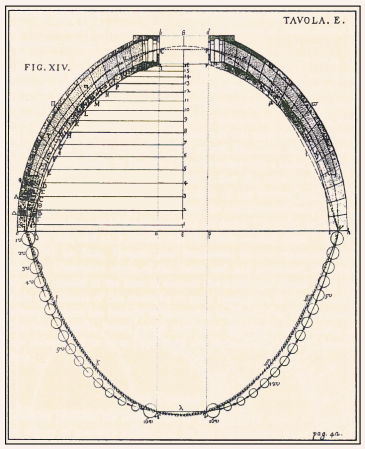
व्यापक क्षति-मूल्यांकन

उस चरण पर पोलेनी ने गुंबद की सामग्रियों—पत्थर, ईंट और मसाले—की “प्रकृति” और “दुर्घटनाओं” पर विचार करना आरंभ किया। उन्होंने शीत, ऊष्मा, आर्द्रता और शुष्कन के प्रभाव का अध्ययन किया। उन्होंने घर्षण, “शिल्पकारों के कार्य” के कारण निर्माण-दोषों और विद्युत् तथा भूकंप जैसी बाहरी क्षति के प्रभाव पर भी विचार किया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

COLONNA I.	COLONNA II.	COLONNA III.	COLONNA IV.
NVMERI DE' CVNEI.	LVNGHEZZE DE' RAGGI.	PESI DE' CVNEI.	PROPORZIONE DE' PESI IN NVMERI MINORI.
A. 1.	200.	88976.	89.
B. 2.	198.	88086.	88.
C. 3.	195.	86752.	87.
D. 4.	191.	84972.	85.
E. 5.	184.	81858.	82.
F. 6.	177.	78743.	79.
G. 7.	168.	74740.	75.
H. 8.	159.	70735.	71.
K. 9.	148.	65842.	66.
L. 10.	135.	60039.	60.
M. 11.	122.	54275.	54.
N. 12.	108.	48047.	48.
P. 13.	92.	40929.	41.
Q. 14.	76.	33811.	34.
R. 15.	60.	26693.	27.
S. 16.	41.	18240.	18.
	2254.	1002758.	1004
S. 16.	43.	18240. Cæ- lum 81629.	81
		99869.	100.

(a) आँकड़ों और प्रयोगात्मक परिणामों को सारांशित करने वाली सारणी



(b) लटकती शृंखला के प्रतिरूप

चित्र 4.22: पोलेनी की लटकती शृंखला की उपमा (Poleni, 1748)

निदान और उपचार-दर्शन

पोलेनी की अंतिम अनुशंसाओं ने ऐसे संरक्षण-दर्शन को मूर्त किया जो वास्तुकलात्मक परिरक्षण में मानक बनने वाला था: न्यूनतम हस्तक्षेप, मूल अभिकल्प-अभिप्राय का सम्मान और संरचनात्मक व्यवहार का व्यवस्थित अनुश्रवण[7]।

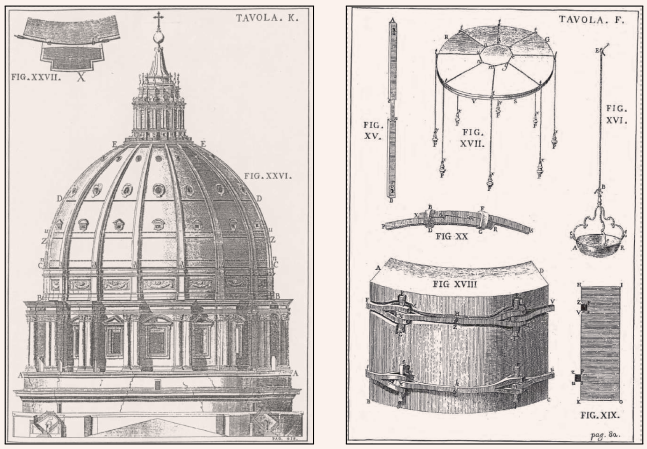
सारांशतः, पोलेनी ने गुंबद में दिखाई देने वाली क्षति को संरचनात्मक अस्थिरता के स्थान पर दोषपूर्ण निर्माण-सामग्रियों और निर्माण-विधियों के लिए उत्तरदायी माना। उन्होंने गुंबद को यथासंभव उसकी मूल अवस्था के निकट पुनर्स्थापित करने की अनुशंसा की। इसमें दरारों—विशेषतः मुख्य मेहराबों की—को काँसे की पच्चरों, विशेष रूप से काटे गए पत्थरों और महीन पलस्तर से भरना सम्मिलित था।

अंतिम अनुशंसा गुंबद को छह नए लोहे के वलयों से प्रबलित करने की थी। यद्यपि गुंबद के तत्काल ढहने का संकट नहीं था, पोलेनी ने उसे आगे की क्षति के विरुद्ध प्रबलित करना विवेकपूर्ण समझा। बेलनाकार संरचना को सहारा देने के लिए ड्रम के चारों ओर लोहे के वलय लगाए जाने थे (चित्र 4.23a)। गुंबद के चारों ओर भी दो नए वलय जोड़े जाने थे और पुराने वलयों का निरीक्षण तथा अनुश्रवण किया जाना था।

गुंबद को लोहे के वलयों से प्रबलित करने का पोलेनी का प्रस्ताव फ्लोरेंस में सांता मारिया देल फियोरे के गुंबद में ब्रुनेलेस्की द्वारा प्रयुक्त अंतःस्थापित शृंखलाओं को प्रतिध्वनित करता था। किंतु चिनाई के भीतर शृंखलाएँ छिपाने वाले ब्रुनेलेस्की के विपरीत, पोलेनी के वलय बाहर से दिखाई देते और उनका अनुश्रवण होता था—यह निर्णय संरचनात्मक पारदर्शिता और सक्रिय अनुरक्षण के विकसित होते दर्शन को दर्शाता था।

[7]इन संरक्षण-सिद्धांतों का बाद में यूजीन वायोले-ल-द्यूक (1814-1879) ने प्रसिद्ध रूप से उल्लंघन किया, जिसकी 19th-century “पुनर्स्थापनाओं” ने ऐतिहासिक प्रामाणिकता के ऊपर शैलीगत पूर्णता को प्राथमिकता दी। सबसे उल्लेखनीय रूप से वायोले-ल-द्यूक ने पेरिस के नोत्र-दाम में एक केंद्रीय शिखर जोड़ दिया जो मूल मध्यकालीन अभिकल्प में कभी विद्यमान नहीं था; उसने इस परिवर्धन को उस कार्य की पूर्णता कहकर उचित ठहराया जो उसके मत में मूल निर्माताओं ने अभिप्रेत किया था। उसके “पुनर्स्थापन” के दर्शन में वास्तविक ऐतिहासिक ताने-बाने को परिरक्षित करने के स्थान पर गोथिक वास्तुकला का आदर्शीकृत रूप बनाना सम्मिलित था। इस दृष्टिकोण ने दृश्यतः प्रभावशाली परिणाम उत्पन्न किए, किंतु पोलेनी के न्यूनतम हस्तक्षेप और मूल अभिकल्प-अभिप्राय के सम्मान के सिद्धांतों का मूलतः खंडन किया। पोलेनी के वैज्ञानिक रूढ़िवाद और वायोले-ल-द्यूक के स्वच्छंदतावादी हस्तक्षेपवाद का विरोधाभास परिरक्षण-दर्शन के विकास को दर्शाता है; आधुनिक व्यवहार सामान्यतः पोलेनी के अधिक संयमित दृष्टिकोण का समर्थन करता है।

पुराने पेपर्स समीक्षा



(a) 6 नए वलयों का स्थान

(b) गुंबद को घेरने वाली लोहे की शृंखलाओं पर प्रयोग

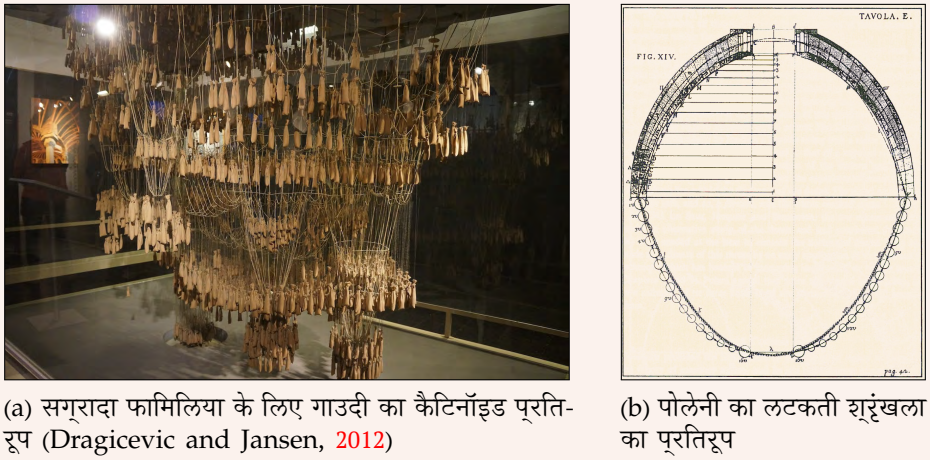
चित्र 4.23: गुंबद का प्रबलन (Poleni, 1748)

प्रयोगात्मक सत्यापन और गुणवत्ता-नियंत्रण

अपने जिज्ञासु स्वभाव के अनुरूप पोलेनी ने पहले विभिन्न कार्यशालाओं से ली गई लोहे की छडों का परीक्षण किया था (चित्र 4.23b), ताकि सुनिश्चित हो सके कि वे गुंबद द्वारा आरोपित परिधीय तनावों का प्रतिरोध कर सकती हैं। यह प्रयोगात्मक कठोरता अनुशंसाओं को परिमाणात्मक प्रमाण पर आधारित करने की उनकी व्यापक प्रतिबद्धता दर्शाती थी।

अभियांत्रिक व्यवहार पर स्थायी प्रभाव

साम्यावस्था की शर्तों और आलेखीय स्थैतिकी का उपयोग करने वाले पोलेनी के विश्लेषणात्मक ढाँचे ने सीमा-विश्लेषण की आधुनिक तकनीकों का पूर्वाभास कराया। भारित शृंखलाओं जैसे भौतिक अनुरूपों पर उनकी निर्भरता ने चिनाई-संरचनाओं के सिद्धांत में भावी प्रगति की नींव रखी, विशेषतः सग्रादा फामिलिया के अभिकल्प में गाउदी §15.5.1.2 के कार्य की।



(a) सग्रादा फामिलिया के लिए गाउदी का कैटिनॉइड प्रतिरूप (Dragicevic and Jansen, 2012)

(b) पोलेनी का लटकती शृंखला का प्रतिरूप

चित्र 4.24: गाउदी का सग्रादा फामिलिया

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मूल निर्माण को परिरक्षित रखते हुए पृथक्, उत्क्रमणीय प्रबलन जोड़ने पर पोलेनी के आग्रह ने ऐसे सिद्धांत स्थापित किए जो आज भी वास्तुकलात्मक संरक्षण के केंद्र में हैं। उनके दृष्टिकोण ने ऐतिहासिक अखंडता के सम्मान को संरचनात्मक आवश्यकता की मान्यता के साथ संतुलित किया—एक ऐसा दर्शन जो आज भी धरोहर-परिरक्षण का मार्गदर्शन करता है।

आज पोलेनी का अध्ययन संरचनात्मक अभियांत्रिकी की शिक्षा में एक आधारभूत प्रकरण है, जो सैद्धांतिक विश्लेषण, प्रयोगात्मक सत्यापन और व्यावहारिक अनुप्रयोग के एकीकरण को प्रदर्शित करता है। उनका कार्य मध्यकालीन निर्माण की अनुभवजन्य परंपराओं और आधुनिक अभियांत्रिकी की वैज्ञानिक विधियों के बीच सेतु का प्रतिनिधित्व करता है।

4.4.4 सांता मारिया देल फियोरे: ब्रुनेलेस्की की अभियांत्रिक अंतर्दृष्टि की विजय

सांता मारिया देल फियोरे के लिए ब्रुनेलेस्की का गुंबद संभवतः आधुनिक युग से पहले संरचनात्मक अभियांत्रिकी में किसी व्यक्ति की महानतम उपलब्धि है। अस्थायी केंद्रण के बिना निर्मित और पूर्णतः ज्यामितीय नियंत्रण तथा सामग्री-नवाचार पर निर्भर इस गुंबद ने प्रदर्शित किया कि अनुभवजन्य प्रतिभा उपलब्ध प्रौद्योगिकी की प्रकट सीमाओं से कैसे आगे बढ़ सकती है। अन्य तीन प्रकरण-अध्ययनों के विपरीत फ्लोरेंस विफलता से नहीं, नवाचार से सफल होता है।

असंभव चुनौती

जब फ्लोरेंस गिरजाघर के प्राधिकारियों ने 1418 में अष्टभुजी क्रॉसिंग पर गुंबद बनाने का अपना अभिप्राय घोषित किया, तब अधिकांश विशेषज्ञों ने इस कार्य को असंभव माना। विस्तृति किसी भी विद्यमान गुंबद से अधिक थी और अष्टभुजी ज्यामिति ने अभूतपूर्व प्राविधिक चुनौतियाँ उत्पन्न कीं। जहाँ अन्य लोगों को केवल असंभवता दिखाई दी, वहाँ ब्रुनेलेस्की की सफलता उनकी उपलब्धि को और भी उल्लेखनीय बनाती है।

प्रतीकात्मक और धर्मवैज्ञानिक आयाम

गुंबद की संकल्पना से केवल कुछ दशक पहले पूर्ण हुई दांते की *डिवाइन कॉमेडी* ने संभवतः उसके अभिकल्प-दर्शन को प्रभावित किया। कवि ने स्वर्ग को संकेंद्रित गोलों के रूप में देखा (*di giro in giro* से स्वर्ग का वर्णन, जिसकी कल्पना नौ संकेंद्रित वृत्तों की शृंखला के रूप में की गई है[8] (King, 2010 PDF)।

अदृश्य नवाचार: हेरिंगबोन बंध

ब्रुनेलेस्की के सर्वाधिक प्रतिभाशाली नवाचारों में से एक हाल के पुरातात्त्विक अन्वेषण तक छिपा रहा। उनकी ईंट-बिछाने की विन्यास-पद्धति की खोज ने निर्माण के दौरान गुंबद द्वारा संरचनात्मक स्थिरता प्राप्त करने की हमारी समझ को बदल दिया।

चूँकि भीतरी गुंबद की अंदरूनी सतह पर पलस्तर और चित्रकारी है तथा बाहरी गुंबद की बाहरी सतह खपरैलों से ढकी है, इसलिए ईंटों के विन्यास को देख पाना कठिन रहा है। अंततः 2013 में समीपवर्ती भवन के पुनर्रचना-कार्य के दौरान गुंबद का मापानुपाती प्रतिरूप मिलने पर यह स्पष्ट हुआ।

यह पुष्टि हुई कि ब्रुनेलेस्की ने सरिपल रूपरेखा के साथ हेरिंगबोन (*spina di pesce*) नामक ईंट-विन्यास का प्रयोग किया था, चित्र 4.25a। ध्यान देना चाहिए कि यह विन्यास पूर्णतः नया नहीं था; रोमन पहले इसका प्रयोग कर चुके थे। अनुमान लगाया गया है कि रोमन भूकंप का प्रतिरोध करने के लिए *opus spicatum* नामक इस विन्यास का प्रयोग करते थे, किंतु केवल सजावटी प्रयोजनों के लिए। यह व्यवस्था मसाले के तल की दुर्बलता को अवरुद्ध करती, दीवार के बड़े भागों को अलग होने अथवा कतरकर भूमि पर गिरने से रोकती और सतत कर्तन-तलों को समाप्त करती—इस प्रकार दरारों के प्रसार को रोकती।

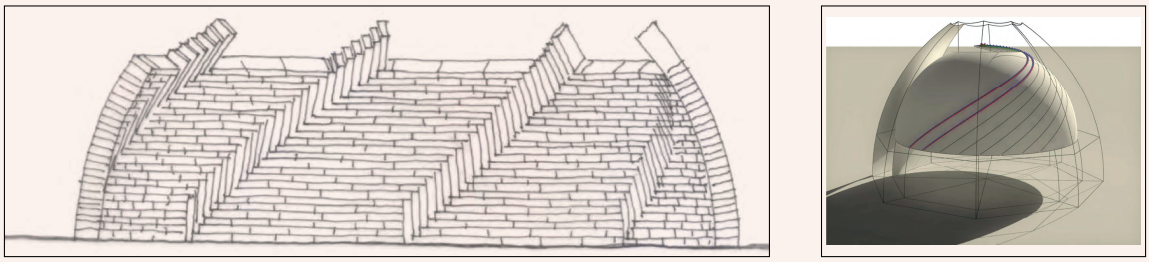
ब्रुनेलेस्की की प्रणाली में लगभग प्रत्येक तीन फुट पर खड़ी ईंटें क्षैतिज रद्दों को बाधित करती हैं और प्रत्येक नई परत को लगभग पाँच ईंट लंबाई के छोटे भागों में बाँटती हैं। निर्माण के समय छोटे भाग खड़ी ईंटों द्वारा नीचे की अनेक पूर्ण परतों से जुड़े रहते थे। अर्थात् पाँच ईंटों की प्रत्येक पंक्ति दोनों ओर की ऊर्ध्वाधर ईंटों से अपने स्थान पर बद्ध थी। ये पुस्तक-अवरोधों

[8] वास्तव में दांते नरक के चित्रण के लिए संकेंद्रित वृत्तों और स्वर्ग के लिए संकेंद्रित गोलों का उल्लेख करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समीक्षा प्रति

की भाँति कार्य करतीं और नई परत को नीचे की पूर्ण, स्वावलंबी परतों से जोड़तीं। दुर्बल ऊर्ध्वाधर कर्तन-तल रोकने के लिए ऊर्ध्वाधर *spina di pesce* तत्त्वों को विस्थापित किया गया, चित्र 4.25a; फलतः प्रभावी रूप से लॉक्सोड्रोम[9] वक्र[10] प्राप्त हुआ (Pizzigoni, 2015), चित्र 4.25b।



(a) ईंटों का *Spina Pesce* विन्यास (Corazzi, 2012)

(b) लॉक्सोड्रोम वक्र (गोलीय कुंडलिनी) (Pizzigoni, 2015)

चित्र 4.25: *Spina pesce* और लॉक्सोड्रोम ईंट-विन्यास

अस्थायी आधारों के बिना ज्यामितीय नियंत्रण

अगली बड़ी चुनौती गुंबद को उठाना थी: निर्माण के दौरान आठ पृथक् दीवारों की वक्रता कैसे नियंत्रित की जाए? इनमें से किसी एक पसली में मात्र कई इंच का विचलन—जबकि प्रत्येक की लंबाई 40 मीटर से अधिक थी—का अर्थ था कि संयोजन नहीं हो पाएगा। निस्संदेह, राजमिस्त्रियों के दलों के पास कुछ मूल मापन-यंत्र थे; किंतु उनमें से अधिकांश में एक हजार वर्ष से कोई महत्त्वपूर्ण परिवर्तन नहीं हुआ था और वे इस गुंबद की चुनौती के अनुरूप नहीं थे।

अधिकांश गोथिक गिरजाघरों की भाँति पुनर्जागरणकालीन गिरजाघरों में गुंबद का अनुपात *quinto acuto* नियम के अनुसार था। अर्थात् गुंबद दो वृत्तीय चापों से बना है, जिनमें प्रत्येक की त्रिज्या विस्तृति के चार-पाँचवें भाग के बराबर है, चित्र 4.26b। यह अर्धवृत्तीय गुंबद की अपेक्षा न केवल संरचनात्मक रूप से अधिक दक्ष था—क्योंकि पार्श्व प्रणोद बहुत कम होता है—बल्कि *Vesica Piscis*[11], अर्थात् मत्स्याशय, का आकार भी ग्रहण करता था—मछली नाज़रेथ के यीशु का प्रतीक थी।

यह आज भी व्यापक अनुमान का विषय है और अनेक सिद्धांत प्रस्तावित किए गए हैं। उनमें से अनेक की समीक्षा करने पर मुझे Jones, Sereni, and Ricci, 2010 द्वारा समर्थित कार्यप्रणाली सर्वाधिक विश्वसनीय लगी।

रज्जु-विधि: व्यावहारिक नवाचार द्वारा ज्यामितीय परिशुद्धता

वक्रता-नियंत्रण की समस्या का ब्रुनेलेस्की का समाधान व्यावहारिक ज्यामिति के इतिहास के सर्वाधिक सुरुचिपूर्ण उदाहरणों में से एक है। उनकी रज्जु-विधि ने अमूर्त गणितीय सिद्धांतों को व्यावहारिक निर्माण-तकनीक में रूपांतरित किया।

मंच के निर्माण के बाद, चित्र 4.26c, प्रधान और गौण पसलियों के स्थान निर्धारित किए जाते हैं, चित्र 4.26d। तत्पश्चात अष्टभुज की प्रत्येक भुजा के लिए, चित्र 4.26e, रज्जुओं के दो समुच्चय (*corda blanda*) बिछाए गए:

[9]लॉक्सोड्रोम (जिसे रम्ब रेखा भी कहते हैं) गोले पर ऐसा वक्र है जो सभी याम्योत्तरों को नियत कोण पर काटता है। नौवहन में यह नियत दिक्सूचक दिक्मान के पथ को निरूपित करता है; मर्केटर प्रक्षेप पर यह सीधी रेखा के रूप में दिखाई देता है। ब्रुनेलेस्की के गुंबद में इस सरिपल विन्यास ने ऐसे सतत ऊर्ध्वाधर दुर्बलता-तलों का निर्माण रोका जो संरचनात्मक अखंडता को संकट में डाल सकते थे, और सीधे ऊर्ध्वाधर संरेखणों की अपेक्षा भार को अधिक प्रभावी ढंग से वितरित किया।

[10]किसी पृष्ठ पर वह रेखा जो सभी याम्योत्तरों को एक नियत कोण (किंतु समकोण नहीं) पर काटती है; यह गोलीय पृष्ठ पर दो बिंदुओं के बीच न्यूनतम दूरी के अनुरूप है।

[11]समान त्रिज्या वाले दो वृत्तों के प्रतिच्छेदन से बनी ज्यामितीय रचना, जिनका प्रतिच्छेदन इस प्रकार होता है कि प्रत्येक वृत्त का केंद्र दूसरे की परिधि पर स्थित हो।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्थिर रज्जु *quinto acuto* केंद्रों से पूर्वनिर्धारित लंबाई की रज्जुएँ बढ़ाकर संदर्भ-बिंदु स्थापित करती थी। ये रज्जुएँ कोने के कोणों को समद्विभाजित करतीं और नीचे की विकर्ण शृंखलाओं से संरेखित होतीं, जिससे समस्त अष्टभुजी संरचना में ज्यामितीय संगति सुनिश्चित होती।

स्थिर रज्जु

1. प्रत्येक चरम (A और E) के अनुरूप *quinto acuto* का स्थान निर्धारित करें।
2. मेहराब की त्रिज्या के बराबर लंबाई की (स्थिर) रज्जु इस प्रकार बढ़ाएँ कि वह ऊर्ध्वाधर अक्ष को प्रतिच्छेद करे।
3. रज्जु को कोने के कोण को समद्विभाजित करना चाहिए (क्योंकि केवल समद्विभाजक ही नीचे स्थित तदनुरूप कोने के विकर्ण से गुजरने वाले ऊर्ध्वाधर अरीय तल के साथ संरेखित होता है) और उसे नीचे की विकर्ण शृंखला के ठीक ऊपर तथा उसके साथ संरेखित होना चाहिए।
4. समद्विभाजन सुनिश्चित करने के लिए (E^1 और A^1 से) कोने के विकर्ण तक साहुल गिराएँ।
5. रज्जु का सिरा भीतरी गुंबद की अंतर्वक्र सतह (A^1 और E^1) के अनुरूप है।
6. बाहरी गुंबद की बहिर्वक्र सतह (A^4 और E^4) चिह्नित करने के लिए इसे आगे बढ़ाएँ।

चल रज्जु मंच पर ऐसा वक्र खींचें जिसका प्रत्येक बिंदु सामने निर्मित किए जाने वाले गुंबद-खंड (अर्थात् दो आसन्न कोनों के बीच) के तदनुरूप बिंदु से भी 36 मीटर दूर हो। वक्र के किसी बिंदु को गुंबद-खंड से जोड़ने वाली रेखा को तदनुरूप केंद्रीय ऊर्ध्वाधर अक्ष को प्रतिच्छेद करना चाहिए। अतः $B\text{-}B^1$ की लंबाई 36 m.13 है। यह नवनिर्धारित वक्र अवतल है; यह वृत्त के चाप जैसा दिखता है, किंतु वास्तव में कॉन्कॉइड का चाप है[12]।

इस चाप का प्रयोग ईंटों की स्थिति और सामने निर्मित किए जा रहे गुंबद-खंड की वक्रता निर्धारित करने के लिए किया जा सकता है।

अनसुलझे रहस्य और जारी अनुसंधान

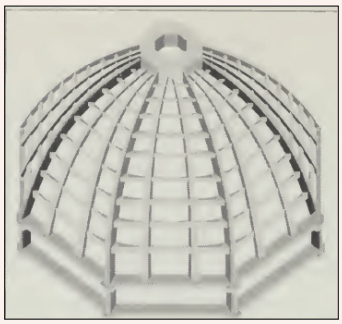
व्यापक विद्वत्तापूर्ण अन्वेषण के बाद भी ब्रुनेलेस्की की विधि के अनेक पक्ष रहस्यमय बने हुए हैं। तीन-रज्जु वाले *gualandrino* तंत्र का यथार्थ प्रयोजन और गुंबद के केंद्रीय अक्ष को चिह्नित करने की परिशुद्ध तकनीकें शोधकर्ताओं के लिए अब भी पहेली हैं।

यह पुनर्निर्माण Jones, Sereni, and Ricci, 2010 के अध्ययन पर आधारित है, जिन्होंने अपने सिद्धांतों का समर्थन और परिष्कार करने के लिए गुंबद का 1/5 मापानुपाती प्रतिरूप बनाया। फिर भी अनेक महत्त्वपूर्ण प्रश्न अनसुलझे हैं। प्रायः उल्लिखित दुर्बोध तीन-रज्जु वाले *gualandrino* का ठीक प्रयोजन क्या था? क्या वह राजमिस्त्रियों के लिए सुरक्षा-यंत्र था? अथवा वह संरेखण की तीन दिशाएँ बताकर दीवार के बंध को नियंत्रित करने वाला ज्यामितीय उपकरण था? एक अन्य अनसुलझा प्रश्न यह है कि ब्रुनेलेस्की ने गुंबद के अक्ष को ठीक-ठीक कैसे चिह्नित किया।

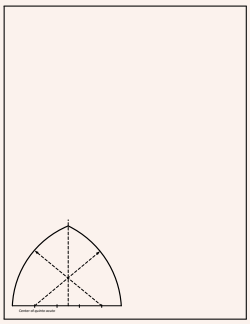
[12]कॉन्कॉइड किसी नियत बिंदु, दिए गए वक्र और नियत दूरी से निर्मित वक्र है। विशेषतः इसमें वे सभी बिंदु होते हैं जो किसी नियत बिंदु से गुजरने वाली रेखाओं के अनुदिश मापने पर दिए गए वक्र से नियत दूरी पर हों। प्राचीन यूनानी गणितज्ञ निकोमिडीज़ (c. 280-210 BCE) द्वारा आविष्कृत कॉन्कॉइड का मूल प्रयोग कोण-त्रिभाजन जैसी शास्त्रीय ज्यामितीय समस्याओं के समाधान के लिए हुआ था। ब्रुनेलेस्की की निर्माण-विधि में मंच पर कॉन्कॉइड वक्र ने यह सुनिश्चित किया कि निर्माणाधीन गुंबद-खंडों से नियत दूरी बनाए रखकर राजमिस्त्री पत्थरों की परिशुद्ध त्रिविमीय स्थिति बनाए रख सकें। इस प्रकरण में कॉन्कॉइड नियत बिंदु O (स्थिर रज्जुओं के साथ ऊर्ध्वाधर अक्ष का प्रतिच्छेदन), एक अन्य वक्र (मंच पर) और लंबाई d (यहाँ 36 m के बराबर) से व्युत्पन्न वक्र है।

समीक्षा प्रति

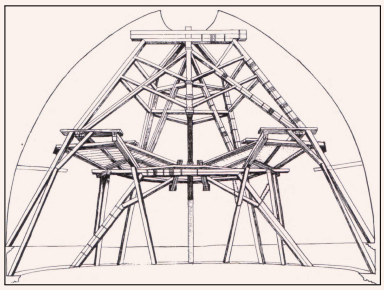
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



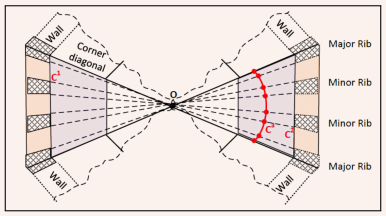
(a) नौ कृषैतिज वलय (King, 2010 PDF)



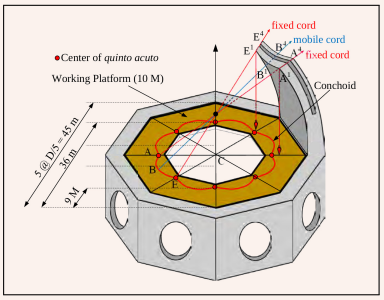
(b) *Quinto acuto*



(c) मचान (Nelli and Ceccherelli, 1753 PDF)



(d) ऊपरी दृश्य ((Jones, Sereni, and Ricci, 2010 PDF) से अनुकूलित)



(e) स्थिर और चल रज्जुएँ ((Jones, Sereni, and Ricci, 2010 PDF) से वाई. गाकुहारी द्वारा अनुकूलित)

चित्र 4.26: सांता मारिया देल फियोरे के गुंबद का निर्माण

यांत्रिक नवाचार: क्रांतिकारी उत्तोलक

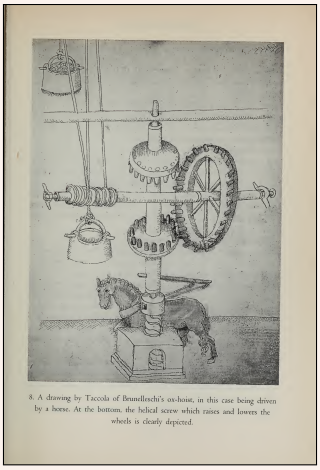
किसी केंद्रण-संरचना के बिना कार्य करने का निर्णय लेने के बाद भी ब्रुनेलेस्की को एक अन्य महत्त्वपूर्ण समस्या का सामना करना पड़ा: निर्माण-स्थल तक सामग्री कैसे पहुँचाई जाए और उसे आवश्यक परिशुद्धता से कैसे स्थापित किया जाए। इसके लिए अभूतपूर्व यांत्रिक जटिलता वाले विशेष यंत्रों का अभिकल्प आवश्यक था।

ब्रुनेलेस्की ने बैलों से चलने वाला उत्तोलक बनाया। इसमें लकड़ी का चौखटा था, जिससे अनेक कृषैतिज और ऊर्ध्वाधर धुरियाँ जुड़ी थीं जो विभिन्न आकारों के दाँतेदार पहियों द्वारा एक-दूसरे को घुमाती थीं। मशीन, चित्र 4.27, को ऊर्ध्वाधर धुरी घुमाने वाले दंड से जोते गए एक अथवा दो बैल चलाते थे। इस धुरी पर दो दाँतेदार पहिए थे, एक ऊपर और दूसरा नीचे; इनमें से कोई भी कृषैतिज अक्ष पर स्थित कहीं बड़े पहिए से जुड़ सकता था। घूर्णक का एक ही पहिया एक समय में जुड़ सकता था—एक को भार उठाने और दूसरे को उतारने के लिए बनाया गया था। गियर-परिवर्तन कुंडलित चूड़ी वाले बड़े पेंच से किया जाता था। किसी भी दिशा में घुमाने पर वह घूर्णक को कई इंच ऊपर अथवा नीचे करता और इस प्रकार उसकी एक अथवा दूसरी छोटी दाँतेदार चकरी को तीन रज्जु-ढोलों में सबसे बड़े ढोल से जुड़े पहिए के दाँतों से मिला देता था (King, 2010 PDF)।

संरचनात्मक दूरदर्शिता: अंतःस्थापित प्रबलन

सेंट पीटर के गुंबद के विपरीत, जिसे बाद में बाहरी लोहे के वलयों से प्रबलित करना पड़ा, ब्रुनेलेस्की ने आरंभ से ही अपनी चिनाई में कृषैतिज शृंखलाएँ अंतःस्थापित कीं। परिधीय तनाव के प्रति यह निवारक दृष्टिकोण उल्लेखनीय संरचनात्मक अंतर्दृष्टि

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 4.27: ब्रुनेलेस्की का बैल-चालित उत्तोलक (King, 2010)

प्रदर्शित करता है और संभवतः समझाता है कि फ्लोरेंस के गुंबद को कभी बड़े संरचनात्मक हस्तक्षेप की आवश्यकता क्यों नहीं पड़ी।

युक्तिसंगत नवाचार की विरासत

अंततः ब्रुनेलेस्की को सर्वत्र पुनर्जागरणकालीन रैखिक परिप्रेक्ष्य के "आविष्कारक" के रूप में मान्यता प्राप्त है और अनेक लोग उन्हें *युक्तिसंगत वास्तुकला* का प्रथम महान प्रतिपादक मानते हैं। केंद्रण के बिना संकल्पित और निष्पादित उनका गुंबद न केवल अभियांत्रिकी का चमत्कार, बल्कि ज्यामिति, प्रतीकवाद और नवाचार का संश्लेषण भी है। सेंट पीटर के गुंबद के विपरीत, जिसे बाद में लोहे के वलयों से प्रबलित करना पड़ा, ब्रुनेलेस्की ने आरंभ से ही परिधीय तनाव का प्रतिरोध करने के लिए गुंबद की चिनाई में क्षैतिज शृंखलाएँ अंतःस्थापित कीं—यह निवारक रणनीति संभवतः फ्लोरेंस को रोम में बाद में दिखाई दी दरारों के भाग्य से बचा गई।

संश्लेषण: संरचनात्मक महत्त्वाकांक्षा से चार शिक्षाएँ

इन चार महान वास्तुकलात्मक परियोजनाओं के परस्पर-विरोधी परिणाम संरचनात्मक अभियांत्रिकी के ऐसे मूलभूत सिद्धांतों पर प्रकाश डालते हैं जो आज भी प्रासंगिक हैं:

बोवे: विफलता-क्रियाविधियों की पर्याप्त समझ के बिना अनुभवजन्य सीमाओं को लाँघने के विनाशकारी परिणाम प्रदर्शित करता है। दोनों ध्वंस तब हुए जब निर्माताओं ने सिद्ध संरचनात्मक सीमाओं से आगे बढ़ने का प्रयास किया।

मिलान दर्शाता है कि संस्थागत ढाँचे और व्यवस्थित परामर्श जटिल प्राविधिक निर्णयों को कैसे दिशा दे सकते हैं। सिद्धांत और व्यवहार की बहसों ने प्रमाण-आधारित अभिकल्प के ऐसे पूर्वदृष्टांत स्थापित किए जो व्यावसायिक व्यवहार को आज भी प्रभावित करते हैं।

सेंट पीटर: संरचनात्मक मूल्यांकन में वैज्ञानिक कार्यप्रणाली के उद्भव को चिह्नित करता है। पोलेनी के विश्लेषणात्मक दृष्टिकोण ने व्यवस्थित अन्वेषण, प्रयोगात्मक सत्यापन और संरक्षण-दर्शन के ऐसे मानक स्थापित किए जो धरोहर-अभियांत्रिकी के केंद्र में बने हुए हैं।

फ्लोरेंस: उदाहरण प्रस्तुत करता है कि नवाचारी चिंतन प्रकट प्राविधिक सीमाओं से कैसे आगे बढ़ सकता है। ब्रुनेलेस्की के ज्यामितीय नियंत्रण, सामग्री-नवाचार और यांत्रिक प्रतिभा के संश्लेषण ने वह प्राप्त किया जिसे पारंपरिक दृष्टिकोण असंभव मानते थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ये प्रकरण-अध्ययन सामूहिक रूप से प्रकट करते हैं कि सफल संरचनात्मक अभियांत्रिकी के लिए केवल प्राविधिक क्षमता ही नहीं, बल्कि संस्थागत विवेक, कार्यप्रणालीगत कठोरता और नवाचारी दृष्टि भी आवश्यक हैं। अनुभवजन्य ज्ञान और सैद्धांतिक समझ का संवाद—जिसे सर्वप्रथम मिलान की बहसों में अभिव्यक्त किया गया—आज भी जटिल अभियांत्रिक चुनौतियों के प्रति हमारे दृष्टिकोण को आकार देता है।

4.5 सारांश-सारणी

सारणी 4.3 इस अध्याय में वर्णित प्रमुख कृतियों, संरचनाओं और विश्लेषणों का कालानुक्रमिक सारांश है।

तालिका 4.3: प्रमुख कृतियों का कालानुक्रमिक सारांश

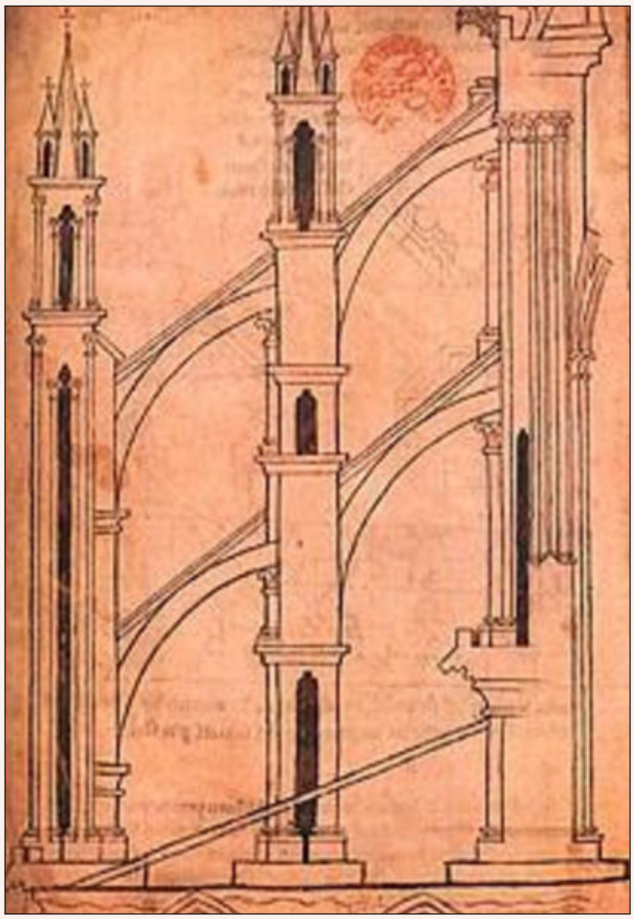
वर्ष	लेखक / निर्माता	पुस्तक-शीर्षक / संरचनाविषयवस्तु	का सारांश
1144	ऐबट सुजे	सेंट डेनी का बेसिलिका गिरजाघर (Como, 2013)	प्रथम गोथिक संरचना; पसलीदार कोष्ठक, नोकीले मेहराब, रंगीन काँच; रोमनेस्क पिंड से गोथिक कंकाल में संक्रमण का चिह्न।
1194 – 1250	शार्त्र के प्रधान राजमिस्त्री	शार्त्र गिरजाघर (Como, 2013)	अग्निकांड के बाद पुनर्निर्मित; रोमनेस्क/गोथिक सम्मिश्रण; प्रारंभिक उडते प्रत्यालंब; व्यापक काँच-सज्जा कार्यक्रम।
1220 – 1288	अमियाँ के प्रधान राजमिस्त्री	अमियाँ गिरजाघर (Elizalde, 2025 PDF)	सबसे ऊँचा पूर्ण गोथिक गिरजाघर (कोष्ठक 42.3 m); परिष्कृत प्रत्यालंबन; उच्च गोथिक का आदर्श।
1225 – अपूर्ण	विविध	बोवे गिरजाघर (Elizalde, 2025 PDF)	48 m वृंदगृह; 1284 और 1573 में ध्वंस; गोथिक तनुता की सीमाओं का न्यायवैज्ञानिक प्रकरण; बाद के विश्लेषण स्थानीय दोषों और बंधन पर बल देते हैं।
1284	—	बोवे का 1284 ध्वंस (Heyman, 1967 PDF)	सामान्य भारों में वृंदगृह-कोष्ठक की विफलता; सीमा-विश्लेषण प्रारंभिक साम्यावस्था दर्शाता है; पुनर्निर्माण में स्तंभक दुहरे और उडते प्रत्यालंब अधिक तीव्र किए गए।
1386 – 1965	विविध	मिलान गिरजाघर (दुओमो) (Ackerman, 1949 PDF)	सबसे बडा इतालवी गोथिक गिरजाघर; फ़ाब्रिका शासन; ऊँचाई की बहसें (*ad quadratum/ad triangulum*); जाँ मिन्यो की आलोचना।
1391	स्टोरनालोको	ऊँचाई-योजना (84 braccia) (Sebregondi and Schofield, 2016 PDF)	मापन-सुगमता के लिए समबाहु-त्रिभुज की ऊँचाई को परिमेय बनाया; संकर मिलानी समाधान को प्रभावित किया।
1392	हाइनरिख पारलर	कोलोन-शैली का प्रस्ताव (96 braccia) (Ackerman, 1949 PDF)	जर्मन उच्च गोथिक पूर्वदृष्टांत के अनुसार वर्गाकार-अनुप्रस्थ-काट वाली ऊँचाई।
c. 1225 – 1250	विलार दे ऑनकूर	रेखाचित्र-पुस्तिका (*Carnet*) (De Honnecourt, 2006)	राजमिस्त्रियों के लिए अनुपात/ज्यामिति के नियम; व्यवहार को निर्देशित करती पवित्र ज्यामिति।
1486	मैथियस रोरित्सर	*Geometria deutsch* (Shelby, 1972 PDF)	व्यावहारिक गोथिक ज्यामिति की समस्याएँ; बहुभुजों, पेडिमेंट और शिखरकों का अभिन्यास।

प्रारूप प्रति समीक्षार्थ

वर्ष	लेखक / निर्माता	पुस्तक-शीर्षक / संरचनाविषयवस्तु का सारांश	
1590	माइकलएंजेलो (अभिकल्प)	सेंट पीटर का गुंबद (López, 2006)	दोहरा-आवरण गुंबद; बाद की दरारें 18th-c. संरचनात्मक अन्वेषणों को प्रेरित करती हैं।
1742 – 1748	जियोवानी पोलेनी	सेंट पीटर के गुंबद पर प्रतिवेदन (Poleni, 1748)	खंडीय भार-विश्लेषण; लटकती शृंखला के प्रयोग; लोहे के वलयों की अनुशंसा।
1418 – 1436	फिलिप्पो ब्रुनेलेस्की	सांता मारिया देल फियोरे का गुंबद (King, 2010)	केंद्रण के बिना निर्मित; हेरिंगबोन बंध, रज्जु-ज्यामिति, बैल-चालित उत्तोलक और अंतःस्थापित शृंखलाएँ।
c. 1750	बोस्कोविच, ले स्योर, जाकिए	सेंट पीटर का मूल्यांकन (Benvenuto, 1991b)	विकृतियों का प्रारंभिक यांत्रिक निर्वचन; पोलेनी के संश्लेषण का अग्रदूत।
1842	रॉबर्ट विलिस	*On the Construction of the Vaults of the Middle Ages* (Willis, 1842)	पसली को प्राथमिक मानने वाला दृष्टिकोण; बाद में प्रेक्षण/विश्लेषण द्वारा संतुलित।
1854	वायोले-ल-द्यूक	*Dictionnaire raisonne* (Viollet-le-Duc, 1854)	मेहराबों के रूप में कोष्ठक; चिनाई की “प्रत्यास्थता” की धारणा; प्रभावशाली 19th-c. दृष्टि।
1891	लेओं बेनूविल	बोवे का विश्लेषण (Benouville, 1891)	प्रणोद के अधीन स्तंभकों के पार्श्व विक्षेप को विफलता के प्रेरक के रूप में चिह्नित करता है।
1966	जैक्स हेमन	*The Stone Skeleton* (Heyman, 1966)	चिनाई के लिए सुघट्य सीमा-विश्लेषण; तीन मान्यताएँ; प्रणोद-रेखा सुरक्षा-मानदंड।
1967	जैक्स हेमन	बोवे अध्ययन (Heyman, 1967)	प्रारंभिक स्थिरता की पुष्टि; संभावित स्थानीय दोष/निर्माण-अनुक्रम की समस्या।
1973	रॉबर्ट मार्क	प्रकाश-प्रत्यास्थ कोष्ठक अध्ययन (Mark, Abel, and O’Neill, 1973)	एपॉक्सी प्रतिरूप 3D प्रणोद-पथ और तनाव-संकेंद्रण दृश्य करते हैं।
2002	जॉन ऑक्सेनडॉर्फ	PhD: *Collapse of Masonry Structures* (Ochsendorf, 2002)	विफलता के कारण के रूप में ज्यामिति-परिवर्तन; दृढ-खंड शुद्धगतिकी; गोथिक क्रियाविधियाँ।
2005	निकोलिनाकू एवं अन्य	उडते प्रत्यालंब की ज्यामिति (Nikolinakou, Tallon, and Ochsendorf, 2005)	आदर्शीकृत ज्यामिति; संदलन/सर्पण/अस्थिरता विधाएँ; प्राचलों के प्रभाव।
2016	किम एवं अन्य	उडते प्रत्यालंबों का FE (Kim, 2016)	नोत्र-दाम, अमियाँ, सेंट-एतिएन; ज्यामिति-तनाव सहसंबंध और सुभेद्यताएँ।

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



विलार दे ऑनकूर, उड़ते प्रत्यालंबों का रेखाचित्र (c.1230)

प्रारंभिक आलेखीय स्थैतिकी—बलों को बाह्य रूप देकर भूमि तक पहुँचाया गया।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5 वैज्ञानिक तर्क का उदय

सारांश

यह अध्याय वैज्ञानिक तर्क के उद्भव को इस्लामी स्वर्ण युग में उसकी आरंभिक अभिव्यक्तियों से लेकर वैज्ञानिक क्रांति में उसके स्फटिकीकरण और प्रबोधन युग में उसके संस्थागत सुदृढीकरण तक अनुगमित करता है। इसका आरंभ बगदाद के Bayt al-Hikma (ज्ञान-गृह) से होता है, जहाँ विद्वानों ने प्राचीन काल की वैज्ञानिक विरासत को परिरक्षित और विस्तृत किया। इसके बाद आख्यान प्रारंभिक आधुनिक यूरोप की ओर बढता है और रेखांकित करता है कि अरस्तू तथा धर्मवैज्ञानिक सिद्धांत के प्राधिकार को अनुभवजन्य प्रेक्षण, गणितीय प्रतिरूपण और व्यवस्थित प्रयोग ने कैसे प्रतिस्थापित किया। गैलीलियो, न्यूटन, केप्लर और हार्वे जैसे प्रमुख व्यक्तियों ने नई कार्यप्रणालियाँ प्रदर्शित कीं, जबकि Accademia dei Lincei और Accademia del Cimento जैसी संस्थाओं ने सहयोगात्मक वैज्ञानिक अन्वेषण का मार्ग प्रशस्त किया। लंदन की Royal Society of London और पेरिस की Académie des Sciences जैसी स्थायी वैज्ञानिक संस्थाओं की स्थापना ने इस रूपांतरण को सुदृढ किया। अध्याय प्रकट करता है कि इस काल ने वैज्ञानिक प्रगति के लिए परिशुद्ध प्रेक्षण से अनुभवजन्य प्रतिरूप-पहचान होते हुए मूलभूत सैद्धांतिक समझ तक का सार्वभौमिक प्रारूप स्थापित किया—जिसका उदाहरण ब्राहे के खगोलीय आँकडों से केप्लर के नियमों और फिर न्यूटन के संश्लेषण तक की प्रगति है। प्रबोधन ने इस परिवर्तन को विस्तृत किया और वैज्ञानिक मानसिकता को प्राविधिक शिक्षा तथा व्यावहारिक अभियांत्रिक अनुप्रयोगों तक पहुँचाया। इस बौद्धिक रूपांतरण ने न केवल प्रकृति संबंधी मानवता की समझ में क्रांति की, बल्कि आधुनिक अभियांत्रिकी, यांत्रिकी और संरचनाओं के औपचारिक विश्लेषण के लिए कार्यप्रणालीगत तथा संस्थागत आधार भी निर्मित किया।

5.1 परिचय 86
5.2 इस्लामी जगत: बैत अल-हिक्मा 87
5.3 वैज्ञानिक क्रांति 89
5.3.1 नई विधि के आधार 89
5.3.2 क्रांतिकारी खोजें और नई विधियाँ 90
5.3.3 प्रारंभिक वैज्ञानिक संस्थाएँ . . 93
5.3.4 संश्लेषण और संस्थानीकरण . . 94
5.4 प्रबोधन: एक सांस्कृतिक सेतु 96
5.4.1 वैज्ञानिक चिंतन का प्रसार . . 97
5.4.2 प्राविधिक शिक्षा का उदय: सैन्य अभियांत्रिकी विद्यालय 97
5.4.3 प्राकृतिक दर्शन से अनुप्रयुक्त विज्ञान तक 97
5.5 निष्कर्ष 98

5.1 परिचय

वैज्ञानिक तर्क का उद्भव मानव बौद्धिक इतिहास की सर्वाधिक रूपांतरणकारी घटनाओं में से एक है। यह अध्याय परीक्षण करता है कि नौवीं और अठारहवीं शताब्दियों के बीच मानवता प्राधिकार, परंपरा और अटकलबाज़ी पर आधारित विश्वदृष्टि से प्रेक्षण, प्रयोग और गणितीय औपचारिकीकरण पर आधारित दृष्टि की ओर क्रमशः कैसे बढी।

कथा इस्लामी स्वर्ण युग से आरंभ होती है, जहाँ *Bayt al-Hikma* जैसे केंद्रों ने प्राचीन काल की बौद्धिक विरासत को परिरक्षित और विस्तृत किया। इन प्रयासों ने यूरोप में बाद में हुए बौद्धिक जागरण के बीज बोए। वैज्ञानिक क्रांति ने अरस्तूवादी और धर्मवैज्ञानिक सिद्धांतों की पकड तोडकर उन्हें अनुभवजन्य विधियों तथा परिमाणात्मक तर्क से प्रतिस्थापित किया। गैलीलियो, देकार्त, बेकन और न्यूटन जैसे प्रमुख व्यक्तियों ने केवल नए सिद्धांत प्रस्तावित नहीं किए—उन्होंने ज्ञान की रचना की रीति को ही मूलतः बदल दिया।

वैज्ञानिक संस्थाओं की स्थापना भी समान रूप से रूपांतरणकारी थी। *Accademia dei Lincei* और *Accademia del Cimento* जैसी प्रारंभिक अकादमियों ने प्रेक्षण तथा प्रयोग पर आधारित सहयोगात्मक अन्वेषण का मार्ग प्रशस्त किया। *Royal Society of London* और *Académie des Sciences* की स्थापना ने उनकी विरासत को दृढ किया; इन संस्थाओं ने वैज्ञानिक अन्वेषण को संस्थागत रूप दिया और उसकी उन्नति के लिए स्थायी ढाँचा प्रदान किया।

प्रबोधन ने इस रूपांतरण को विस्तार दिया और वैज्ञानिक मानसिकता को प्राकृतिक दर्शन से आगे समाज, शिक्षा और

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रौद्योगिकी तक पहुँचाया। इस परिवर्तन ने वह बौद्धिक ढाँचा स्थापित किया जिससे अंततः आधुनिक अभियांत्रिकी, यांत्रिकी और संरचनाओं का औपचारिक विश्लेषण उत्पन्न हुआ। यह अध्याय तर्क के उसी आरोहण का अनुगमन करता है।

5.2 इस्लामी जगत: बैत अल-हिक्मा

Bayt al-Hikma (ज्ञान-गृह) बगदाद में *अब्बासी ख़िलाफ़त* के समय स्थापित बौद्धिक और सांस्कृतिक केंद्र था, मुख्यतः ख़लीफ़ा *हारून अल-रशीद* (786–809 CE) के शासन में और उनके उत्तराधिकारी *अल-मामून* (813–833 CE) के अधीन उत्कर्ष पर। इसका उद्भव नौवीं शताब्दी में हुआ—रोम की *Accademia dei Lincei* से बहुत पहले, जिसे प्रायः विज्ञान की प्रथम आधुनिक अकादमी माना जाता है।

इसने पुस्तकालय, अनुवाद-संस्थान और अनुसंधान-केंद्र के रूप में कार्य किया तथा इस्लामी स्वर्ण युग का प्रतीक और ज्ञान के परिरक्षण, संवर्धन तथा प्रसार का केंद्र-बिंदु बना।



(a) याह्या इब्न वासिती के चित्रण वाली पांडुलिपि (*Bibliotheque Nationale de France*)



(b) The Book of Ingenious Devices, Encyclopædia Britannica

चित्र 5.1: बैत अल-हिक्मा

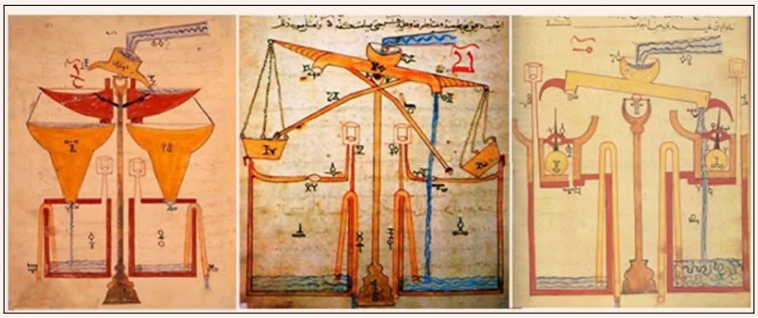
बगदाद का बौद्धिक अधिकेंद्र के रूप में उद्भव आकस्मिक नहीं था। एशिया, अफ़्रीका और यूरोप को जोड़ने वाले प्रमुख व्यापारिक मार्गों के संगम पर रणनीतिक रूप से स्थित यह नगर न केवल वाणिज्यिक केंद्र, बल्कि विचारों का संगम भी बना। अब्बासी शासकों ने, विशेषतः अल-मामून ने, ज्ञान को शासन के प्रमुख स्तंभ के रूप में सक्रिय रूप से प्रोत्साहित किया और वैज्ञानिक अन्वेषण को राज्य-शिल्प से जोड़ा।

मूलतः पुस्तकों और पांडुलिपियों के भंडार के रूप में स्थापित *Bayt al-Hikma* शीघ्र ही जीवंत केंद्र बन गया, जिसने विविध पृष्ठभूमियों के विद्वानों—मुसलमानों, ईसाइयों, यहूदियों और ज़रथुष्ट्रियों—को समान रूप से आकर्षित किया। सहयोगपूर्वक कार्य करते हुए इन विद्वानों ने यूनानी, सिरियाई, फ़ारसी, संस्कृत और अन्य भाषाओं के वैज्ञानिक, दार्शनिक तथा चिकित्सकीय ग्रंथों का अरबी में अनुवाद किया और प्राचीन सभ्यताओं के ज्ञान को इस्लामी जगत के लिए सुलभ बनाया।

Bayt al-Hikma द्वारा अग्रसर अनुवाद-आंदोलन ने अरस्तू, प्लेटो और हिप्पोक्रेटीज़ जैसे प्रमुख यूनानी चिंतकों की कृतियों तथा यूक्लिड और टॉलेमी के गणितीय एवं खगोलीय योगदानों के परिरक्षण और प्रसारण में निर्णायक भूमिका निभाई। फिर भी यह संस्था केवल अनुवाद-ब्यूरो से कहीं अधिक थी; यह मौलिक वैज्ञानिक प्रगति की भट्ठी थी। *अल-ख़्वारिज़्मी* जैसे गणितज्ञों ने बीजगणित की नींव रखी, जबकि चिकित्सा, खगोल-विज्ञान और प्रकाशिकी में उल्लेखनीय प्रगति हुई।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बनू मूसा बंधुओं—बगदाद के एक खगोलविद् के पुत्रों—ने कुछ सर्वप्रथम क्रमादेशनीय मशीनों का अभिकल्प किया, जिनमें उनकी *Book of Ingenious Devices* में वर्णित परिष्कृत स्वचालित नियंत्रण-यंत्र और यांत्रिक नवाचार सम्मिलित थे, (Banū Mūsā ibn Shākir, 0850)। *Bayt al-Hikma* में निर्मित वैज्ञानिक ग्रंथ बाद में लैटिन में अनूदित होकर यूरोप पहुँचे और उन विकासों के बीज बने जिनकी परिणति पुनर्जागरण में हुई, चित्र 5.2।



चित्र 5.2: तीन सतत बाँसुरियाँ: बाईं ओर झुकती बाल्टियाँ, मध्य में तुला और दाईं ओर उत्प्लवक। तोपकापी पांडुलिपि, 1206

शास्त्रीय अर्थ में विद्वत्ता से आगे *Bayt al-Hikma* ने आलोचनात्मक अन्वेषण और अनुभवजन्य जाँच की संस्कृति को पोषित किया। वहाँ वाद-विवाद होते और दर्शन तथा धर्मविज्ञान से लेकर गणित और प्राकृतिक विज्ञान तक के क्षेत्रों के विद्वानों में अंतर्विषयी संवाद को प्रोत्साहित किया जाता था। यह बौद्धिक उदारता इस्लामी स्वर्ण युग के व्यापक लोकाचार को प्रतिबिंबित करती थी, जहाँ ज्ञान की खोज को सांस्कृतिक, नृजातीय और धार्मिक सीमाओं से परे सार्वभौमिक प्रयास माना जाता था।

अल-मामून के संरक्षण में संस्था अपने चरम पर पहुँची। अल-मामून ने न केवल प्रमुख यूनानी कृतियों के अनुवादों का आदेश दिया—प्रायः राजकीय संरक्षण में—बल्कि अनुभवजन्य वैज्ञानिक परियोजनाएँ भी आरंभ कीं। इनमें पृथ्वी की परिधि का उल्लेखनीय रूप से परिशुद्ध मापन था, जिसे सिंजार के मैदानों और कूफ़ा के निकट याम्योत्तर चापों को मापने भेजे गए खगोलविदों के दलों ने संपन्न किया।

जब यूरोप का बड़ा भाग प्रारंभिक मध्यकाल के बौद्धिक स्थगन—तथाकथित “अंधकार युग”—से जूझ रहा था, तब *Bayt al-Hikma* जैसे केंद्र अध्ययन, परिरक्षण और नवाचार के प्रकाश-स्तंभ थे। ज्ञान-उत्पादन का यह असममित वितरण सदियों तक बना रहा, जब तक मध्यकालीन यूरोप में इनमें से अनेक ग्रंथों की पुनःखोज ने वैज्ञानिक अन्वेषण को फिर प्रज्वलित नहीं किया।

Bayt al-Hikma का पतन अब्बासी ख़िलाफ़त के क्षय के साथ हुआ और राजनीतिक अस्थिरता तथा आर्थिक कठिनाई ने इसे तीव्र किया। 1258CE में मंगोलों द्वारा बगदाद की लूट ने विनाशकारी आघात किया तथा पुस्तकालय की अधिकांश सामग्री नष्ट अथवा बिखर गई।

विनाश के बाद भी *Bayt al-Hikma* की विरासत बनी रही। उसने प्राचीन ज्ञान को परिरक्षित करने और बाद की सभ्यताओं, विशेषतः यूरोप, तक पहुँचाने में निर्णायक भूमिका निभाई, जहाँ उसने पुनर्जागरण की नींव रखने में सहायता की। *Bayt al-Hikma* बौद्धिक जिज्ञासा और सांस्कृतिक संश्लेषण का स्थायी प्रतीक है तथा मानव इतिहास के सर्वाधिक गतिशील कालों में से एक का प्रतिनिधित्व करता है।

मध्य पूर्व में वैज्ञानिक उपलब्धि बाद में क्षीण हुई और इस्लामी स्वर्ण युग में प्राप्त ऊँचाइयों तक फिर कभी पूर्णतः नहीं लौट सकी। 1901 से विज्ञानों में दिए गए सभी नोबेल पुरस्कारों में से केवल दो इस क्षेत्र के प्राप्तकर्ताओं को मिले हैं (The Economist, 2025)।

पुरुष प्रधान समाज

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5.3 वैज्ञानिक क्रांति

5.3.1 नई विधि के आधार

5.3.1.1 प्राकृतिक दर्शन का अंत

वैज्ञानिक क्रांति तक अरस्तू (और कुछ कम सीमा तक बाइबिल) की पकड़ इतनी कठोर थी कि उसने भौतिकी की प्रगति को अवरुद्ध किया। गैलीलियो के जन्म के समय आधुनिक अर्थ में *विज्ञान* जैसी कोई वस्तु नहीं थी—केवल *प्राकृतिक दर्शन*[1] गैलीलियो की मृत्यु तक आधुनिक विज्ञान का आधार दृढता से स्थापित हो चुका था।

यह उल्लेखनीय है कि इस रूपांतरण के बीज उत्तर मध्यकाल में पहले से उपस्थित थे। फ़्रांसीसी चिंतक निकोल ओरेम (c. 1320–1382) ने गैलीलियो से बहुत पहले अरस्तूवादी भौतिकी के प्रमुख पक्षों को चुनौती दी। उसने परिवर्तनशील राशियों को निरूपित करने के लिए आलेखीय विधियाँ विकसित कीं—मूलतः समय के साथ चरों का आलेखन करने की संकल्पना का आविष्कार—और माध्य चाल प्रमेय सूत्रबद्ध किया, जो बाद में गैलीलियो से संबद्ध हुआ। ओरेम ने पृथ्वी के अपने अक्ष पर घूमने की संभावना पर भी विचार किया और तर्क दिया कि ऐसी गति आकाश के घूर्णन से अविभेद्य है, यद्यपि अंततः उसने धर्मवैज्ञानिक आधार पर सूर्यकेंद्रीयता को अस्वीकार कर दिया। उसका कार्य भौतिकी के गणितीकरण और विरासत में मिले प्राधिकारों पर प्रश्न उठाने की दिशा में उल्लेखनीय प्रारंभिक चरण था तथा उस बौद्धिक आधार का निर्माण करता था जिसे वैज्ञानिक क्रांति बाद में पूर्णतः मूर्त करने वाली थी।

5.3.1.2 गणित और प्रबोधन की भूमिका

प्रबोधन ने सर्वप्रथम इस अरस्तूवादी पकड़ को ढीला किया और प्राकृतिक दार्शनिकों को प्रेक्षण तथा प्रयोग के माध्यम से संसार से जुड़ने दिया। शीघ्र ही गणितज्ञों ने जटिल भौतिक परिघटनाओं को उनके मूल तत्त्वों तक घटाने के लिए आवश्यक औपचारिक साधन प्रदान किए, जिससे भौतिकविद् अपना ध्यान नई समस्याओं की ओर मोड़ सके (Truesdell, 1968 PDF)।

5.3.1.3 फ़्रांसिस बेकन और अनुभववाद का जन्म

यह विचार दृढता से स्थापित हुआ कि प्रयोग खोज का विश्वसनीय साधन है। इसका बहुत श्रेय अंग्रेज़ अधिवक्ता फ़्रांसिस बेकन (1561–1626) के लेखन को है, (Bacon, 2000) जिन्होंने व्यवस्थित प्रेक्षण और प्रयोग पर आधारित मूलतः नए दृष्टिकोण का समर्थन किया। बेकन ने केवल तर्कशास्त्र, धर्मवैज्ञानिक अटकलबाज़ी अथवा अनियंत्रित गणित पर आधारित कार्यप्रणालियों को अस्वीकार किया:

> प्राकृतिक दर्शन अभी शुद्ध रूप में उपलब्ध नहीं है, बल्कि संक्रमित और दूषित है: अरस्तू के संप्रदाय में तर्कशास्त्र द्वारा; प्लेटो के संप्रदाय में प्राकृतिक धर्मविज्ञान द्वारा; और प्लेटो के दूसरे संप्रदाय में, प्रोक्लस तथा अन्य के द्वारा, गणित से, जिसे प्राकृतिक दर्शन को सीमित करना चाहिए, न कि उसे उत्पन्न अथवा आरंभ करना। किंतु शुद्ध और अमिश्रित प्राकृतिक दर्शन से बेहतर वस्तुओं की आशा की जानी चाहिए
>
> Bacon, 2000 *Novum Organum*
>
> ।

बेकन अपर्याप्त प्रमाण के साथ पूर्वकल्पित आधारों से तर्क करने के प्रति संशयशील थे:

[1] न्यूटन की *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* का अनुवाद *Mathematical Principles of Natural Philosophy* है, जो प्रकृति के व्यवस्थित अध्ययन के अर्थ में “प्राकृतिक दर्शन” के तत्कालीन प्रयोग को प्रतिबिंबित करता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> ...दर्शन की विषय-वस्तु तैयार करते समय मनुष्य या तो कुछ उदाहरणों से बहुत अधिक निष्कर्ष निकालते हैं, अथवा बहुत से उदाहरणों से बहुत कम; इसलिए दोनों ही स्थितियों में दर्शन अनुभव और प्राकृतिक इतिहास के अत्यंत संकीर्ण आधार पर स्थापित होता है और अत्यंत अपर्याप्त प्रमाण के आधार पर सिद्धांत घोषित करता है
>
> Bacon, 2000 *Novum Organum*

धर्मविज्ञान के प्राधिकार को अस्वीकार करके बेकन ने एक निर्णायक science and religion (separation) आरंभ किया। यह वाक्यांश knowledge is power. उनकी इस धारणा को व्यक्त करता है कि विज्ञान को मानवता की सेवा करनी चाहिए। यह लोकाचार इंग्लैंड के उभरते औद्योगिक वर्गों के साथ प्रतिध्वनित हुआ।

5.3.1.4 तर्कवाद: देकार्त का निगमनात्मक दृष्टिकोण

जहाँ बॉयल और हुक ने बेकनवादी अनुभववाद को आगे बढ़ाया, वहीं देकार्त ने तार्किक निगमन का समर्थन किया। देकार्त का तर्क था कि ऐंद्रिय ज्ञान अविश्वसनीय है और सत्य तार्किक तर्कणा से उत्पन्न होता है। अपनी कार्यप्रणालीगत भिन्नताओं के बावजूद देकार्त और बेकन दोनों सहमत थे कि विज्ञान सार्वभौमिक, सत्यापनीय और धर्मविज्ञान से पृथक् होना चाहिए।

5.3.1.5 विश्वविद्यालयों का रूपांतरण

वैज्ञानिक क्रांति के साथ यूरोपीय विश्वविद्यालयों का शास्त्रीय अध्ययन-केंद्रों से अनुभवजन्य अन्वेषण अपनाने वाली संस्थाओं में क्रमिक किंतु मूलभूत रूपांतरण हुआ। मध्यकालीन विश्वविद्यालयों पर शास्त्रीय पद्धति का प्रभुत्व था—तार्किक युक्ति के माध्यम से अरस्तूवादी दर्शन को ईसाई सिद्धांत से समन्वित करने पर आधारित व्यवस्थित धर्मवैज्ञानिक और दार्शनिक अन्वेषण।

नई वैज्ञानिक विधि ने पाठ्य प्राधिकार के ऊपर प्रेक्षण और प्रयोग को प्राथमिकता देकर इस दृष्टिकोण को चुनौती दी। विश्वविद्यालयों ने धीरे-धीरे गणित, खगोल-विज्ञान और प्राकृतिक दर्शन की पीठें स्थापित करनी आरंभ कीं, जिनमें अनुभवजन्य अनुसंधान पर बल था। पादुआ विश्वविद्यालय, जहाँ गैलीलियो पढ़ाते थे, प्रत्यक्ष शरीररचनात्मक प्रेक्षण पर अपने चिकित्सा विद्यालय के बल और नए खगोलीय विचारों के प्रति उदारता के लिए विशेष रूप से प्रसिद्ध हुआ।

यह रूपांतरण न तो एकसमान था और न तत्काल। अनेक विश्वविद्यालय 18th century तक पारंपरिक अध्ययन के दुर्ग बने रहे। किंतु विश्वविद्यालयी पाठ्यक्रम में प्रयोगात्मक कार्यप्रणाली की क्रमिक स्वीकृति ने नए विज्ञान को संस्थागत वैधता प्रदान की और अनुभवजन्य दृष्टि वाले विद्वानों की क्रमिक पीढ़ियों को प्रशिक्षित करने में सहायता की। medieval scholasticism से प्रारंभिक modern empiricism तक विश्वविद्यालय का विकास वैज्ञानिक ज्ञान के सतत विकास का निर्णायक संस्थागत आधार है।

5.3.2 क्रांतिकारी खोजें और नई विधियाँ

5.3.2.1 प्रेक्षणात्मक खगोल-विज्ञान: टाइको ब्राहे

टाइको ब्राहे (1546–1601) ने सैद्धांतिक नवाचार से नहीं, बल्कि अभूतपूर्व प्रेक्षणात्मक परिशुद्धता से खगोल-विज्ञान में क्रांति की। हवेन द्वीप पर अपनी उरानीबोर्ग वेधशाला से कार्य करते हुए ब्राहे ने दूरबीन-पूर्व इतिहास के सर्वाधिक परिशुद्ध खगोलीय आँकड़े संकलित किए। अनेक दशकों में ग्रहों, विशेषतः मंगल, की स्थितियों के उनके सूक्ष्म प्रेक्षणों ने लगभग 2 चाप-मिनट की परिशुद्धता प्राप्त की—नग्न-नेत्र प्रेक्षणों के लिए उल्लेखनीय उपलब्धि।

ब्राहे के मिश्रित ब्रह्मांड-विज्ञानीय प्रतिरूप, टाइकोनिक तंत्र, ने पृथ्वी को केंद्र में रखा, जिसमें सूर्य और चंद्रमा पृथ्वी की परिक्रमा करते थे जबकि अन्य ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते थे। यद्यपि अंततः यह प्रतिरूप अशुद्ध था, फिर भी उसने टॉलेमी के भूकेंद्रवाद और कोपर्निकस के सूर्यकेंद्रवाद के बीच निर्णायक मध्यवर्ती चरण का प्रतिनिधित्व किया। अधिक

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

महत्त्वपूर्ण रूप से परिशुद्ध मापन और व्यवस्थित आँकड़ा-संग्रह पर ब्राहे के बल ने अनुभवजन्य खगोल-विज्ञान के लिए नए मानक स्थापित किए। index[p1]geocentrism

1572 के अधिनवतारे (अब टाइको के अधिनवतारे के नाम से ज्ञात) के उनके प्रेक्षणों ने खगोलीय अपरिवर्तनशीलता के अरस्तूवादी सिद्धांत को चुनौती दी और प्रदर्शित किया कि आकाश वास्तव में बदल सकता है। स्वीकृत ज्ञान को मिली इस अनुभवजन्य चुनौती ने उभरती वैज्ञानिक विधि में प्राधिकार के ऊपर प्रेक्षण की निर्भरता का उदाहरण प्रस्तुत किया।

5.3.2.2 गणितीय खगोल-विज्ञान: योहानेस केप्लर

योहानेस केप्लर (1571–1630) ने ब्राहे के प्रेक्षणात्मक आँकड़ों को ऐसे गणितीय नियमों में रूपांतरित किया जिन्होंने ग्रहों की गति संबंधी हमारी समझ में क्रांति की। ब्राहे के सहायक के रूप में सेवा करने के बाद उनके आँकड़े प्राप्त कर केप्लर ने प्रेक्षणों को वृत्तीय कक्षाओं—प्राचीन काल से कल्पित "पूर्ण" खगोलीय गति—से समन्वित करने के प्रयास में वर्षों लगाए।

उनकी निर्णायक उपलब्धि यह अनुभूति थी कि ग्रहों की कक्षाएँ वृत्तीय नहीं, दीर्घवृत्तीय हैं। 1609 और 1619 के बीच सूत्रबद्ध केप्लर के ग्रह-गति के तीन नियमों ने ग्रहों के व्यवहार का प्रथम परिशुद्ध गणितीय वर्णन दिया:

1. **दीर्घवृत्तों का नियम**: ग्रह दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में चलते हैं, जिनके एक नाभि पर सूर्य होता है
2. **समान क्षेत्रफलों का नियम**: ग्रह को सूर्य से जोड़ने वाली रेखा समान समय में समान क्षेत्रफल प्रसर्पित करती है
3. **आवर्ती नियम**: ग्रह के परिक्रमण-काल का वर्ग उसकी अर्ध-दीर्घ-अक्ष के घन के समानुपाती होता है

इन नियमों ने गहन संकल्पनात्मक परिवर्तन का प्रतिनिधित्व किया: अनुभवजन्य आँकड़ों से व्युत्पन्न गणितीय संबंध प्राकृतिक परिघटनाओं का अभूतपूर्व परिशुद्धता से वर्णन कर सकते थे। केप्लर के कार्य ने प्रदर्शित किया कि गणितीय सौंदर्य पूर्वकल्पित ज्यामितीय परिपूर्णता में नहीं, बल्कि प्राकृतिक नियमों की सुरुचिपूर्ण सरलता में निहित था। उनकी उपलब्धियों ने वह आधार प्रदान किया जिस पर न्यूटन बाद में सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण का सिद्धांत निर्मित करने वाले थे।

5.3.2.3 प्रेक्षण से सिद्धांत तक: वैज्ञानिक प्रगति का प्रारूप

यह प्रगति आधुनिक प्रयोगात्मक यांत्रिकी के उल्लेखनीय रूप से अनुरूप है। पहले हम परिशुद्ध प्रेक्षणात्मक आँकड़े एकत्र करते हैं (ब्राहे); फिर उन आँकड़ों में अनुभवजन्य संबंध और गणितीय प्रतिरूप पहचानते हैं (केप्लर); और अंततः उन अनुभवजन्य संबंधों की व्याख्या तथा पूर्वानुमान करने वाला मूलभूत सैद्धांतिक ढाँचा विकसित करते हैं (न्यूटन)। वास्तव में केप्लर के तीन नियमों को न्यूटन के सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण के नियम और गति के नियमों से गणितीय रूप से व्युत्पन्न किया जा सकता है, जो दर्शाता है कि अनुभवजन्य खोजें प्रायः अधिक गहरे अंतर्निहित सिद्धांत प्रकट करती हैं।

यह प्रतिरूप—प्रेक्षण, अनुभवजन्य सहसंबंध, सैद्धांतिक समझ—यांत्रिकी और अभियांत्रिकी के समस्त इतिहास में दोहराया जाता है। स्प्रिंग-विरूपण पर हुक के सावधान प्रेक्षणों ने बल और विस्थापन को जोड़ने वाला उनका अनुभवजन्य नियम उत्पन्न किया, जिसे बाद में सातत्यक यांत्रिकी और प्रत्यास्थता-सिद्धांत में सैद्धांतिक आधार मिला। संरचनात्मक अभियांत्रिकी में निर्माण-अनुभव और विफलता-प्रेक्षणों से व्युत्पन्न सदियों पुराने अनुभवजन्य अभिकल्प-नियम अंततः साम्यावस्था, सुसंगतता और सामग्री-व्यवहार के मूल सिद्धांतों पर आधारित युक्तिसंगत संरचनात्मक विश्लेषण से प्रतिस्थापित हुए। इसी प्रकार घर्षण और मृदा-दाब पर कूलॉम के व्यवस्थित प्रयोगों ने ऐसे अनुभवजन्य संबंध दिए जिन्हें बाद में मृदा-यांत्रिकी और सुघट्यता-सिद्धांत के सिद्धांतों से सैद्धांतिक आधार प्राप्त हुआ।

तरल यांत्रिकी में भी यही प्रगति दिखाई देती है: तरल-प्रवाह पर टॉरिचेली के प्रयोग, दाब और वेग के संबंधों पर बर्नूली के अनुभवजन्य प्रेक्षण तथा अनेक अन्य प्रयोगात्मक सहसंबंध अंततः नाविय-स्टोक्स समीकरणों के सैद्धांतिक ढाँचे में एकीकृत हुए। आधुनिक संगणनात्मक यांत्रिकी भी इसी प्रगति का अनुसरण करती है—प्रयोगात्मक सत्यापन अनुभवजन्य प्रतिरूपों का मार्गदर्शन करता है और सैद्धांतिक समझ गहरी होने पर अधिक मूलभूत दृष्टिकोण उन्हें क्रमशः प्रतिस्थापित करते हैं।

परिमित तत्त्व विधि स्वयं इस प्रक्रिया की परिणति है: संगणनात्मक रूप से कार्यान्वित परिष्कृत सैद्धांतिक ढाँचे, जिन्हें फिर भी प्रयोगात्मक मान्यकरण, सत्यापन और अनुभवजन्य अंशांकन की आवश्यकता होती है।

समीक्षा प्रति

5.3.2.4 शरीररचनात्मक क्रांति: आंद्रेयास वेसालियस

आंद्रेयास वेसालियस (1514–1564) ने मानव शरीररचना के अनुभवजन्य अध्ययन का मार्ग प्रशस्त किया और प्राधिकार पर आधारित पंद्रह शताब्दियों के चिकित्सकीय ज्ञान को चुनौती दी। उनकी उत्कृष्ट कृति *De Humani Corporis Fabrica* (मानव शरीर की संरचना पर, 1543) (Vesalius, 1998–2009) प्राचीन ग्रंथों, विशेषतः गैलेन के ग्रंथों, पर निर्भरता के स्थान पर व्यवस्थित मानव-विच्छेदन पर आधारित थी।

वेसालियस ने गैलेनिक[2] शरीररचना में अनेक त्रुटियाँ खोजीं—जबड़ा दो के स्थान पर एक अस्थि से बना है, यकृत में पाँच के स्थान पर दो पालियाँ हैं और हृदय का पट छिद्रित नहीं है। ये सुधार छोटे प्रतीत हो सकते हैं, किंतु उन्होंने मूलभूत कार्यप्रणालीगत क्रांति का प्रतिनिधित्व किया: पाठ्य प्राधिकार पर प्रत्यक्ष प्रेक्षण की विजय।

उनके दृष्टिकोण ने यह सिद्धांत स्थापित किया कि प्राकृतिक परिघटनाओं को समझने के लिए शास्त्रीय प्राधिकारियों के प्रति समर्पण नहीं, प्रत्यक्ष जाँच आवश्यक है। कलात्मक प्रवीणता को वैज्ञानिक परिशुद्धता से जोड़ने वाले *De Humani Corporis Fabrica* के विस्तृत शरीररचनात्मक चित्रों ने वैज्ञानिक संप्रेषण के नए मानक स्थापित किए और यूरोपीय चिकित्सा में अनुभवजन्य कार्यप्रणाली के प्रसार में सहायता की।

5.3.2.5 परिसंचरण-तंत्र: विलियम हार्वे

विलियम हार्वे (1578–1657) ने *Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus* (1628) में प्रकाशित रक्त-परिसंचरण की अपनी खोज द्वारा नई वैज्ञानिक विधि का उदाहरण प्रस्तुत किया (Harvey, 1628)। हार्वे का कार्य जैविक परिघटनाओं पर परिमाणात्मक तर्क के सफल अनुप्रयोग का प्रतिनिधित्व करता था।

सावधान प्रेक्षण और मापन द्वारा हार्वे ने परिकलित किया कि हृदय प्रति घंटे लगभग 540 पाउंड रक्त पंप करता है—प्रचलित गैलेनिक सिद्धांत के अनुसार शरीर जितना उत्पन्न अथवा उपभोग कर सकता था उससे कहीं अधिक। शिराओं और धमनियों में एकदिश वाल्वों के प्रेक्षणों के साथ इस परिमाणात्मक तर्क ने हार्वे को निष्कर्ष तक पहुँचाया कि रक्त *निरंतर उत्पन्न और उपभुक्त होने के स्थान पर परिसंचरित होता होगा*।

शरीररचनात्मक प्रेक्षण, परिमाणात्मक विश्लेषण और प्रयोगात्मक सत्यापन को जोड़ने वाली हार्वे की कार्यप्रणाली अनुभवजन्य जैविक अनुसंधान का प्रतिरूप बनी। उनके कार्य ने प्रदर्शित किया कि खगोल-विज्ञान और भौतिकी में विकसित नई वैज्ञानिक विधियाँ जीवन-विज्ञानों में भी समान रूप से क्रांतिकारी अंतर्दृष्टियाँ दे सकती हैं।

5.3.2.6 गैलीलियो: प्रकृति की गणितीय भाषा

गैलीलियो के जीवन-वृत्त के लिए §6.6.2 देखें।

गैलीलियो ने एक और कार्यप्रणालीगत नवाचार प्रस्तुत किया। अंतिम कारणों की खोज के स्थान पर उन्होंने प्रेक्षणीय परिघटनाओं के गणितीय वर्णन पर ध्यान केंद्रित किया। अभियंताओं की पाठ्यपुस्तक *Le Meccaniche* (Galilei, 1594 PDF) में उन्होंने प्रदर्शित किया कि मशीनें परिमाणात्मक नियमों का पालन करती हैं, और इस प्रकार अपने बाद के कथन की पूर्वछाया प्रस्तुत की कि:

> दर्शन [प्रकृति] इस विशाल पुस्तक में लिखा है जो हमारी आँखों के सामने निरंतर खुली है (मेरा आशय ब्रह्मांड से है), किंतु इसे तब तक नहीं समझा जा सकता जब तक पहले उस भाषा को न समझा जाए और उन चिह्नों को न पहचाना

[2]गैलेनिक सिद्धांत से क्लॉडियस गैलेन (c. 129–216 CE) की चिकित्सकीय शिक्षाएँ अभिप्रेत हैं, जिनका यूरोपीय चिकित्सा पर 1,400 से अधिक वर्षों तक प्रभुत्व रहा। गैलेनिक सिद्धांत के अनुसार रक्त भोजन से यकृत द्वारा निरंतर उत्पन्न होता और शरीर के ऊतक उसे उपभोग करते थे; वह परिसंचरण करने के स्थान पर ज्वार की भाँति आगे-पीछे चलता था। इस सिद्धांत ने शिरापरक और धमनी-रक्त की पृथक् प्रणालियाँ भी मानीं और हृदय को पंप के स्थान पर रक्त गरम करने वाली भट्ठी समझा।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> जाए जिनमें यह लिखी है। यह गणितीय भाषा में लिखी है... इस माध्यम के ज्ञान के बिना इसका एक भी शब्द समझना असंभव है।
>
> Galilei, 1623 *Il Saggiatore*

गैलीलियो के दूरबीनी प्रेक्षणों ने अपरिवर्तनशील ब्रह्मांड में अरस्तूवादी विश्वास को ध्वस्त कर दिया। सूर्यकेंद्रीयता के उनके समर्थन ने 1633 में उनके कुख्यात मुकदमे और गृहबंदी को जन्म दिया, फिर भी उनकी विरासत ने परिकल्पना-निगमनात्मक विधि स्थापित की: परिकल्पना सूत्रबद्ध करो, उसके परिणाम निगमनित करो और प्रयोग द्वारा उनका सत्यापन करो।

5.3.3 प्रारंभिक वैज्ञानिक संस्थाएँ

5.3.3.1 इटली: लिंचेई

वैज्ञानिक क्रांति के साथ कम संबद्ध किया जाने वाला एक पक्ष इतालवी समूह का प्रारंभिक योगदान है। यद्यपि उन्होंने देकार्त और बेकन की भाँति वैज्ञानिक क्रांति के दार्शनिक आधारों को अभिव्यक्त नहीं किया, फिर भी वे उसे पूर्णतः अपनाने और व्यवहार में उतारने वाले प्रथम लोग थे।

1603 में विद्वानों के एक समूह ने *Accademia dei Lincei* (लिंक्सों की अकादमी) की स्थापना की, जिसे प्रथम आधुनिक वैज्ञानिक अकादमी माना जाता है। उसके नाम में दोहरा संकेत था—तीक्ष्ण-दृष्टि वाले आर्गोनॉट लिंसीयस और अपनी पैनी दृष्टि के लिए प्रसिद्ध लिंक्स की ओर।(Freedberg, 2003)

जब भी प्रामाणिक ज्ञान प्रेक्षण और अनुभवजन्य प्रमाण से टकराता, लिंचेई के सदस्य उसे जानबूझकर अस्वीकार करते थे। दृश्य और अनुभवजन्य परीक्षण के प्रति उनकी प्रतिबद्धता ने उन्हें आधुनिक वैज्ञानिक विधि के अग्रभाग में रखा—उसी समय जब इंग्लैंड में फ़्रांसिस बेकन स्वतंत्र रूप से अपना अनुभवजन्य दर्शन सूत्रबद्ध कर रहे थे।(Freedberg, 2003) स्वीकृत प्राधिकार को उनकी चुनौती ने अनिवार्यतः उन्हें कैथोलिक चर्च की रूढ़िवादी शक्तियों से संघर्ष में ला दिया।

इस संघर्ष का मूर्त उदाहरण लिंचेई के सबसे प्रसिद्ध सदस्य गैलीलियो गैलिली का जीवन है। जब गैलीलियो ने अपनी दूरबीन आकाश की ओर की, तब चर्च द्वारा सैद्धांतिक सत्य के रूप में अपनाया अरस्तूवादी ब्रह्मांड-विज्ञान ढहने लगा। पृथ्वी ने ब्रह्मांड के केंद्र में अपना विशेष स्थान खो दिया और सूर्यकेंद्रीय प्रतिरूप ने उसका स्थान लिया। गैलीलियो के सर्वाधिक उत्पादक वर्षों में लिंचेई अकादमी का समर्थन निर्णायक था। उन्हें पोप अर्बन VIII और उनके भतीजे कार्डिनल फ़्रांसेस्को बार्बेरिनी—जो स्वयं लिंचेई के सदस्य थे—का संरक्षण भी मिला। किंतु बार्बेरिनी परिवार का अंततः समर्थन वापस लेना विनाशकारी सिद्ध हुआ: पोप अर्बन VIII ने ही अंततः गैलीलियो को धर्माधिकरण के समक्ष बुलाया।

Accademia dei Lincei वास्तव में वैज्ञानिक क्रांति की प्रारंभिक, यद्यपि प्रायः कम आँकी गई, योगदानकर्ता थी। वह आज भी इटली की राष्ट्रीय अकादमी के रूप में विद्यमान है और इतालवी तथा अंतरराष्ट्रीय वैज्ञानिकों के संवाद का जीवंत केंद्र है।

5.3.3.2 इटली: *Cimento*

Accademia del Cimento (प्रयोग की अकादमी) 1657 में ग्रैंड ड्यूक फ़र्डिनेंड II दे मेदीची और प्रिंस लियोपोल्ड दे मेदीची के संरक्षण में फ़्लोरेंस में स्थापित अग्रणी वैज्ञानिक संस्था थी। वह यूरोप की उन सर्वप्रथम संस्थाओं में थी जो सुपष्टतः प्रयोगात्मक विज्ञान को समर्पित थीं और अटकलबाज़ी-आधारित प्राकृतिक दर्शन से व्यवस्थित अनुभवजन्य जाँच की ओर निर्णायक परिवर्तन का प्रतीक है। उसका ध्येय-वाक्य *Provando e riprovando* (“परीक्षण और पुनःपरीक्षण”) प्रयोग के प्रति उसकी कठोर प्रतिबद्धता और प्राधिकार अथवा विशुद्ध सैद्धांतिक तर्क पर निर्भरता के अस्वीकार का सार व्यक्त करता है।

अकादमी में गैलीलियो के शिष्य विंचेंज़ो विवियानी; प्रयोगात्मक जीवविज्ञान के अग्रदूत फ़्रांसेस्को रेडी; वायुदाबमापी के आविष्कारक एवांजेलिस्ता टॉरिचेली; जैवयांत्रिकी के प्रारंभिक शोधकर्ता जियोवानी अल्फ़ोंसो बोरेली; और कार्लो रिनाल्दिनी जैसे अनेक उल्लेखनीय विद्वान सम्मिलित थे। इन सदस्यों ने वायु-दाब, निर्वात के गुणों, तापीय प्रसार और तरल यांत्रिकी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पर व्यापक जाँच की। उन्होंने तापमापी, आर्द्रतामापी और वायुदाबमापी जैसे उपकरणों को केवल प्रदर्शन के साधनों के रूप में नहीं, बल्कि व्यवस्थित प्रयोग के परिशुद्ध यंत्रों के रूप में परिष्कृत और विकसित किया।

उनके प्रयोगों में द्रवों के क्वथनांक पर वायु-दाब के प्रभाव के अध्ययन, वायु की संपीड्यता की जाँच और ऊष्मा-संचरण के प्रेक्षण सम्मिलित थे। उन्होंने प्राकृतिक परिघटनाओं को ऐसे परिमाणित करने का प्रयास किया जो अटकलबाज़ी-आधारित तर्क से निर्णायक रूप से आगे बढता था।

जहाँ *Accademia dei Lincei* ने प्रेक्षणात्मक विज्ञान को व्यापक दार्शनिक महत्त्वाकांक्षाओं से जोडा, वहीं *Cimento* ने आधुनिक विज्ञान को परिभाषित करने वाली अनुभवजन्य और उपकरण-चालित विधियों की ओर अधिक संकेंद्रित ध्यान का प्रतिनिधित्व किया।

यद्यपि *Accademia del Cimento* लगभग एक दशक बाद, करीब 1667 में, भंग हो गई, वैज्ञानिक समुदाय पर उसका प्रभाव पर्याप्त था। अनुभवजन्य कठोरता के उसके लोकाचार ने वैज्ञानिक विधि को अन्वेषण के मानक दृष्टिकोण के रूप में सुदृढ करने में सहायता की। अकादमी के प्रयोगात्मक कार्य का सार 1667 के प्रकाशन *Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento* (प्राकृतिक प्रयोगों पर निबंध) में दिया गया, (Accademia del Cimento, 1667) जो प्रयोगात्मक विज्ञान के इतिहास का आधारभूत ग्रंथ बना।

गैलीलियो की कार्यप्रणालियों से अत्यधिक प्रभावित अकादमी के सदस्य स्वयं को उनकी विरासत का संरक्षक मानते थे और बल देते थे कि तत्त्वमीमांसा नहीं, प्रेक्षण तथा प्रयोग वैज्ञानिक ज्ञान की आधारशिला होने चाहिए।

अपने अल्प जीवन के बावजूद *Accademia del Cimento* ने बाद की वैज्ञानिक संस्थाओं की स्थापना के लिए निर्णायक आधार बनाया, जिनमें लंदन की *Royal Society of London* और फ्रांस की *Académie des Sciences* सम्मिलित थीं। इन संस्थाओं ने चिमेंटो द्वारा प्रवर्तित प्रयोगात्मक सिद्धांतों को औपचारिक रूप दिया और उनका विस्तार किया, जिससे वैज्ञानिक विधि आधुनिक विज्ञान के केंद्र में स्थापित हुई।

5.3.4 संश्लेषण और संस्थानीकरण

5.3.4.1 न्यूटन: विधियों का संश्लेषण

न्यूटन के जीवन-वृत्त के लिए §6.6.7 देखें।

गैलीलियो की मृत्यु के वर्ष जन्मे आइज़क न्यूटन (1642–1727) ने इस कार्यप्रणाली का संश्लेषण किया। उनकी *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*
index[p1]Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica@*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687 PDF) ने भौतिक नियम पर लागू गणितीय निगमन को मूर्त किया, जबकि उनकी *Opticks* (Newton, 1704) ने प्रयोगात्मक सत्यापन का उदाहरण प्रस्तुत किया। न्यूटन का द्विविध दृष्टिकोण आधुनिक वैज्ञानिक व्यवहार की आधारशिला बना हुआ है। सारणी 5.1 वैज्ञानिक क्रांति द्वारा लाए गए संकल्पनात्मक परिवर्तन का सार प्रस्तुत करती है।

5.3.4.2 रॉयल सोसाइटी और *Académie des Sciences*

1640s के मध्य तक बेकन के विचार व्यापक रूप से फैल चुके थे और उनकी परिणति 1660 में प्राकृतिक ज्ञान की उन्नति के लिए लंदन की रॉयल सोसाइटी की स्थापना में हुई, जिसका ध्येय-वाक्य *Nullius in verba* ("किसी के कथन को प्रमाण मत मानो") था। लॉर्ड ब्राउंकर उसके प्रथम अध्यक्ष बने; रॉबर्ट बॉयल (1627–1691) प्रभावशाली प्रारंभिक सदस्य और बाद में अध्यक्ष रहे। गैलीलियो और देकार्त से प्रेरित बॉयल समर्पित प्रयोगवादी और गैसों के अध्ययन के अग्रदूत थे। उन्होंने प्रसिद्ध रूप से प्रदर्शित किया कि निर्वात में पंख और सीसे का ढेला समान दर से गिरते हैं—और इस प्रकार गैलीलियो के वैचारिक प्रयोगों को सत्यापित किया।

बॉयल ने रॉबर्ट हुक[3] (1635–1703) को प्रयोगों का अधीक्षक नियुक्त किया। प्रतिभाशाली बहुज्ञ और उपकरण-निर्माता हुक ने अनुभवजन्य भावना को मूर्त किया। उनकी *Micrographia*, (Hooke, 1665) का आरंभ इस प्रकार होता है:

[3] हुक के जीवन-वृत्त के लिए §6.6.6 देखें।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> सत्य यह है कि प्रकृति के विज्ञान को बहुत लंबे समय तक केवल मस्तिष्क और कल्पना का कार्य बना दिया गया है। अब समय आ गया है कि वह भौतिक और प्रत्यक्ष वस्तुओं के प्रेक्षणों की सरलता और सुदृढता की ओर लौटे।
>
> Hooke, 1665 *Micrographia: or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses with Observations and Inquiries Thereupon*

1676 में हुक ने प्रत्यास्थता का रैखिक नियम—*हुक का नियम*—प्रकाशित किया, जो प्रदर्शित करता है कि छोटे विरूपणों के लिए विकृति प्रतिबल के समानुपाती होती है। प्रत्यास्थता की यह आधारभूत संकल्पना आज भी निर्णायक है और ऐसे संघटक संबंध आज भी प्रयोग द्वारा निर्धारित किए जाते हैं।

1666 में पेरिस में *Académie des Sciences* की स्थापना ने रॉयल सोसाइटी के साथ विज्ञान के स्थायी संस्थानीकरण को चिह्नित किया। इन अकादमियों ने वैज्ञानिक क्रांति के लोकाचार—अनुभवजन्य प्रेक्षण, प्रयोग और गणितीय विश्लेषण पर निर्भरता—को औपचारिक रूप दिया।

रॉयल सोसाइटी के *Nullius in verba* ("किसी के कथन को प्रमाण मत मानो") जैसे ध्येय-वाक्यों के साथ इन संस्थाओं ने प्राधिकार-आधारित ज्ञान के अस्वीकार को मूर्त किया। उन्होंने सहयोगात्मक अन्वेषण, सहकर्मी समीक्षा और वैज्ञानिक परिणामों के सार्वजनिक प्रसार के लिए स्थायी ढाँचा प्रदान किया।

महत्त्वपूर्ण रूप से ये अकादमियाँ केवल प्राकृतिक दर्शन के मंच नहीं थीं; वे शीघ्र ही व्यावहारिक क्षेत्रों—खगोल-विज्ञान, नौवहन, अभियांत्रिकी, सामग्री-विज्ञान और अनुप्रयुक्त यांत्रिकी—में विस्तृत हुईं। उन्होंने विद्वानों के एकाकी कार्य को आधुनिक विज्ञान के सामूहिक उद्यम में बदलने में सहायता की।

5.3.4.3 आधुनिक विज्ञान में प्रयोग और सिद्धांत

यह द्वैत अभियांत्रिकी तक विस्तृत होता है। मुस्खेनब्रूक जैसे प्रयोगवादी और ऑयलर जैसे सिद्धांतकार अन्वेषण की समानांतर विधाओं—भौतिक संसार में भौतिक प्रयोग और प्रतिरूपों के अमूर्त संसार में गणितीय "प्रयोग"—का उदाहरण प्रस्तुत करते हैं, (Goss, 2009)। गणितीय प्रतिरूप संकेत दे सकते हैं कि कौन-से भौतिक प्रयोग करने योग्य हैं, जबकि भौतिक परिणाम गणितीय मान्यताओं को परिष्कृत अथवा चुनौती दे सकते हैं। जब यह अंतःक्रिया परिपक्व हुई—जिसका उदाहरण बाउशिंगर द्वारा इलास्टिका की स्वीकृति है—तो वह आधुनिक विज्ञान की परिभाषित विशेषता बन गई।

तालिका 5.1: वैज्ञानिक क्रांति का संकल्पनात्मक परिवर्तन

पुराना प्रतिमान	नया प्रतिमान
प्राधिकार से ज्ञान (अरस्तू, धर्म-ग्रंथ)	प्रेक्षण, प्रयोग और तर्क से ज्ञान
गुणात्मक वर्णन	परिमाणात्मक, गणितीय नियम
अंतिम कारण (क्यों)	निमित्त कारण (कैसे)
भूकेंद्रीय ब्रह्मांड-विज्ञान	सूर्यकेंद्रीय ब्रह्मांड-विज्ञान
स्थिर, अपरिवर्तनशील ब्रह्मांड	सार्वत्रिक नियमों द्वारा शासित गतिशील ब्रह्मांड
सिद्धांतों से निगमनात्मक	अनुभवजन्य परीक्षण सहित परिकल्पना-निगमनात्मक

इस रूपांतरण ने औपचारिक वैज्ञानिक संस्थाओं के उद्भव के लिए बौद्धिक आधार निर्मित किया, जिन्होंने प्राकृतिक संसार को समझने की केंद्रीय अन्वेषण-विधि के रूप में वैज्ञानिक पद्धति को संस्थागत किया।

समीक्षा प्रति

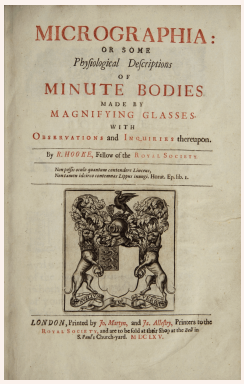
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



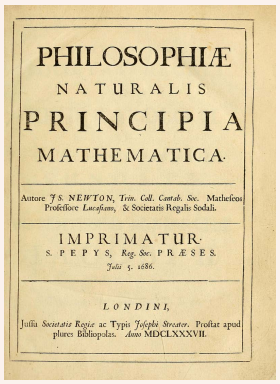
(a) बेकन (1561-1626)



(b) गैलीलियो (1564-1642)



(c) हुक (1635-1703)



(d) न्यूटन (1643-1727)

चित्र 5.3: वैज्ञानिक क्रांति की आधारभूत कृतियाँ: गैलीलियो, न्यूटन, बेकन और हुक



(a) Academia dei Lincei (1603)



(b) Academia del Cimento (1657)



(c) Royal Society (1660)



(d) Académie des Sciences (1666)

चित्र 5.4: विज्ञान का संस्थानीकरण

5.4 प्रबोधन: एक सांस्कृतिक सेतु

18th century तक पिछली शताब्दी में निर्मित वैज्ञानिक मानसिकता गणित और भौतिकी से बहुत आगे दर्शन, शासन, शिक्षा और यूरोप के व्यापक बौद्धिक जीवन तक विस्तृत हो चुकी थी। यह आंदोलन—प्रबोधन—इस विश्वास से चिह्नित था कि मानव तर्क, अनुभवजन्य प्रेक्षण और आलोचनात्मक चिंतन को न केवल प्राकृतिक परिघटनाओं, बल्कि मानव समाज पर भी सार्वभौमिक रूप से लागू किया जा सकता है[4]।

[4]इस युग के वैज्ञानिक विकास महत्त्वपूर्ण राजनीतिक और धार्मिक उथल-पुथल की पृष्ठभूमि में हुए—जिनमें तीस वर्षीय युद्ध, डच विद्रोह और धर्मसुधार के व्यापक संघर्ष सम्मिलित थे। बौद्धिक प्रवासन ने, विशेषतः डच गणराज्य और स्विट्ज़रलैंड जैसे सहिष्णु केंद्रों की ओर, विचारों के प्रसार में सहायता की। मुद्रण उद्योग के विस्तार ने, विशेषतः नीदरलैंड में, उन वैज्ञानिक कृतियों के प्रसार को संभव किया जिन्हें अन्यत्र प्रायः निषिद्ध किया जाता था—इनमें गैलीलियो की *Two New Sciences* भी थी, जिसे एल्ज़ेविर ने लीडन में प्रकाशित किया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5.4.1 वैज्ञानिक चिंतन का प्रसार

प्रबोधन ने प्राधिकार—चाहे धर्मवैज्ञानिक, अभिजात अथवा शास्त्रीय—की दुहाई के अस्वीकार को दृढ किया और उसके स्थान पर व्यवस्थित तर्क तथा प्रमाण को स्थापित किया। वॉल्तेयर, दिदरो, मॉन्तेस्क्यू और कोंदोर्से जैसे चिंतकों ने समाज-सुधार के साधन के रूप में ज्ञान के प्रसार का समर्थन किया। *Encyclopédie* जैसी व्यापक कृति की रचना केवल बौद्धिक अभ्यास नहीं, बल्कि ज्ञान का लोकतंत्रीकरण करने वाला सांस्कृतिक अभियान था, (Diderot and d'Alembert, 1751)।

वॉल्तेयर द्वारा न्यूटन के विचारों को लोकप्रिय बनाने से वैज्ञानिक तर्क व्यापक शिक्षित जनता तक पहुँचा, जबकि दिदरो और दालांबेर की *Encyclopédie* ने मानव ज्ञान को युक्तिसंगत सिद्धांतों के अनुसार व्यवस्थित किया। इस विशाल उपक्रम ने प्रबोधन का यह विश्वास प्रदर्शित किया कि मानव अनुभव के सभी क्षेत्र—प्राकृतिक परिघटनाओं से सामाजिक संस्थाओं तक—व्यवस्थित अन्वेषण और तार्किक विश्लेषण द्वारा समझे जा सकते हैं।

प्रेक्षण, परिकल्पना-निर्माण और अनुभवजन्य परीक्षण पर वैज्ञानिक विधि का बल सामाजिक तथा राजनीतिक सुधार का प्रतिरूप बना। प्रबोधन के चिंतकों ने इन सिद्धांतों को शासन, विधि, अर्थशास्त्र और शिक्षा की जाँच में लागू किया तथा तर्क दिया कि सामाजिक प्रगति उन्हीं युक्तिसंगत विधियों से प्राप्त की जा सकती है जिन्होंने प्राकृतिक दर्शन में क्रांति की थी।

5.4.2 प्राविधिक शिक्षा का उदय: सैन्य अभियांत्रिकी विद्यालय

प्रबोधन में प्राविधिक शिक्षा का व्यवस्थित संस्थानीकरण हुआ, विशेषतः सैन्य अभियांत्रिकी विद्यालयों की स्थापना द्वारा, जिन्होंने सिविल अभियांत्रिकी और अनुप्रयुक्त विज्ञान के विकास को गहराई से प्रभावित किया। सैन्य आवश्यकता और युक्तिसंगत वैज्ञानिक शिक्षा के प्रबोधन-आदर्शों से प्रेरित फ्रांस ने इस रूपांतरण का नेतृत्व किया।

1748 में स्थापित *École Royale du Génie de Mézières* आधुनिक अर्थ में संसार का प्रथम अभियांत्रिकी विद्यालय बना। क्लोद-अंत्वान कूप्ले और बाद में जाँ-रोदोल्फ पेरोने के निर्देशन में विद्यालय ने सैद्धांतिक गणित को व्यावहारिक अभियांत्रिक अनुप्रयोगों से जोडने वाला कठोर पाठ्यक्रम स्थापित किया। विद्यार्थियों ने कलन, यांत्रिकी, द्रवचालन और दुर्ग-अभिकल्प का अध्ययन किया—और इस प्रकार अभूतपूर्व ढंग से वैज्ञानिक सिद्धांतों को अभियांत्रिक व्यवहार से एकीकृत किया।

इस प्रतिरूप को 1747 में जाँ-रोदोल्फ पेरोने के निर्देशन में स्थापित *École Royale des Ponts et Chaussées* में आगे विकसित किया गया। विद्यालय ने सेतु और सडक-निर्माण में सिविल अभियंताओं को प्रशिक्षित किया तथा अवसंरचना-विकास में वैज्ञानिक विधियाँ लागू कीं। उसके स्नातक फ्रांस की परिवहन-अवसंरचना की रीढ बने और वैज्ञानिक अभियांत्रिक विधियों को पूरे यूरोप तथा उसके उपनिवेशों में ले गए।

इन विद्यालयों का पाठ्यक्रम क्रांतिकारी संश्लेषण का प्रतिनिधित्व करता था: वैज्ञानिक क्रांति से प्राप्त गणितीय कठोरता को व्यावहारिक अभियांत्रिक आवश्यकताओं से जोडा गया। विद्यार्थियों ने सर्वेक्षण, निर्माण-तकनीक और परियोजना-प्रबंधन के साथ अवकल कलन, यांत्रिकी और सामग्री-विज्ञान सीखा। सिद्धांत और व्यवहार के इस एकीकरण ने आधुनिक अभियांत्रिकी शिक्षा का प्रारूप स्थापित किया।

इन फ़्रांसीसी अभियांत्रिकी विद्यालयों ने बाद में पूरे यूरोप और अमेरिका में समान संस्थाओं की स्थापना को प्रभावित किया, जिनमें वेस्ट पॉइंट स्थित U.S. मिलिटरी अकादमी (1802) और विविध जर्मन प्राविधिक संस्थान सम्मिलित थे। व्यावहारिक अनुप्रयोग के साथ संयुक्त गणितीय कठोरता पर बल व्यावसायिक अभियांत्रिकी शिक्षा की पहचान बना और उसने इसे पारंपरिक शिल्प-शिष्यता से पृथक् किया।

5.4.3 प्राकृतिक दर्शन से अनुप्रयुक्त विज्ञान तक

प्रबोधन के रूपांतरण ने वैज्ञानिक मानसिकता को उन व्यावहारिक क्षेत्रों तक विस्तृत किया जो औद्योगिक क्रांति को प्रत्यक्षतः संभव बनाने वाले थे। अनुप्रयुक्त विज्ञान को समर्पित औपचारिक संस्थाएँ बढीं: पूरे यूरोप में सैन्य और सिविल अभियांत्रिकी विद्यालय, प्राविधिक अकादमियाँ तथा वैज्ञानिक संस्थाएँ फली-फूलीं। जो गणितीय कठोरता कभी शुद्ध ज्यामिति अथवा खगोलीय यांत्रिकी तक सीमित थी, वह सामग्री-सामर्थ्य, निर्माण और मशीनरी की व्यावहारिक समस्याओं को समझने का साधन बनती गई।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस काल में उस विषय का उद्भव हुआ जिसे आज हम अभियांत्रिकी-विज्ञान के रूप में पहचानते हैं। सेतु-अभिकल्प से दूरचालित तंत्रों तक व्यावहारिक समस्याओं पर गणितीय विश्लेषण का व्यवस्थित अनुप्रयोग पारंपरिक शिल्प-आधारित दृष्टिकोणों से मूलभूत विचलन था। वैज्ञानिक क्रांति से व्युत्पन्न सैद्धांतिक सिद्धांत अब निर्माण, विनिर्माण और अवसंरचना की वास्तविक समस्याओं को हल करने के लिए लागू किए जा रहे थे।

इस काल में यांत्रिकी अब ज्यामितिज्ञों का सीमांत प्रयत्न नहीं रही, बल्कि सैद्धांतिक अन्वेषण और औद्योगिक अनुप्रयोग दोनों से निकटता से जुडा केंद्रीय अनुशासन बन गई। संरचनात्मक व्यवहार, सामग्री-गुणों और मशीन-निष्पादन के विश्लेषण हेतु गणितीय साधनों के विकास ने आज के अभियांत्रिकी व्यवसाय के लिए आवश्यक आधार निर्मित किया।

प्रबोधन की मानसिकता—युक्तिसंगत विश्लेषण में विश्वास, प्रगति के प्रति प्रतिबद्धता और यह धारणा कि प्रकृति को गणित तथा प्रयोग द्वारा समझा जा सकता है—ने वह बौद्धिक ढाँचा स्थापित किया जिसने 19th century के तीव्र विकासों को संभव किया: औद्योगिक क्रांति, आधुनिक अभियांत्रिकी और प्रत्यास्थता, सामग्री-सामर्थ्य तथा संरचनात्मक विश्लेषण के औपचारिक सिद्धांत। मानव तर्क द्वारा जीवन की भौतिक स्थितियों में व्यवस्थित सुधार किए जा सकने का विश्वास आधुनिक प्रौद्योगिकीय सभ्यता की प्रेरक शक्ति बना।

5.5 निष्कर्ष

सारांशतः वैज्ञानिक तर्क का उदय लगभग एक सहस्राब्दी में फैले निर्णायक बौद्धिक रूपांतरण का प्रतिनिधित्व करता है। बैत अल-हिक्मा जैसे इस्लामी केंद्रों में प्राचीन ज्ञान के परिरक्षण और उन्नति से आरंभ होकर, वैज्ञानिक क्रांति की कार्यप्रणालीगत उपलब्धियों से गुजरते हुए और प्रबोधन के संस्थागत सुदृढीकरण में परिणत इस रूपांतरण ने अन्वेषण को धर्मवैज्ञानिक प्राधिकार तथा अटकलबाज़ी-आधारित दर्शन की बाधाओं से मुक्त किया।

नए दृष्टिकोण—व्यवस्थित प्रेक्षण, गणितीय औपचारिकीकरण और अनुभवजन्य मान्यकरण—ने वैज्ञानिक प्रगति का सार्वभौमिक प्रारूप स्थापित किया: परिशुद्ध आँकडा-संग्रह से अनुभवजन्य प्रतिरूप-पहचान और फिर मूलभूत सैद्धांतिक समझ तक। ब्राहे के प्रेक्षणों से केप्लर के नियमों और फिर न्यूटन के संश्लेषण तक की प्रगति में उदाहरणित यह कार्यप्रणाली बाद के समस्त वैज्ञानिक और अभियांत्रिक विकास का आधार बनी।

उतनी ही महत्त्वपूर्ण वह संस्थागत क्रांति थी जिसने वैज्ञानिक अन्वेषण को सहयोगात्मक, संचयी उद्यम बनाया। वैज्ञानिक अकादमियों और अभियांत्रिकी विद्यालयों की स्थापना ने प्राकृतिक दर्शन की एकाकी खोज को आधुनिक विज्ञान के व्यवस्थित अनुशासन में रूपांतरित किया, जबकि प्रबोधन के प्राविधिक शिक्षा-कार्यक्रमों ने आज तक बने हुए व्यावसायिक अभियांत्रिकी शिक्षा के प्रारूप को स्थापित किया।

कठोर कार्यप्रणाली को संस्थागत समर्थन से जोडने वाले इस बौद्धिक ढाँचे ने आधुनिक अभियांत्रिकी, संरचनाओं के औपचारिक विश्लेषण और उसके बाद आए परिमाणात्मक यांत्रिकी-विज्ञान के विकास की भूमिका बनाई। अब हम इसी विकास की ओर बढते हैं।

अंत में, सारणी 5.2 इस अध्याय में उद्धृत सभी पुस्तकों को सूचीबद्ध करती है।

तालिका 5.2: प्रमुख कृतियों का कालानुक्रमिक सारांश

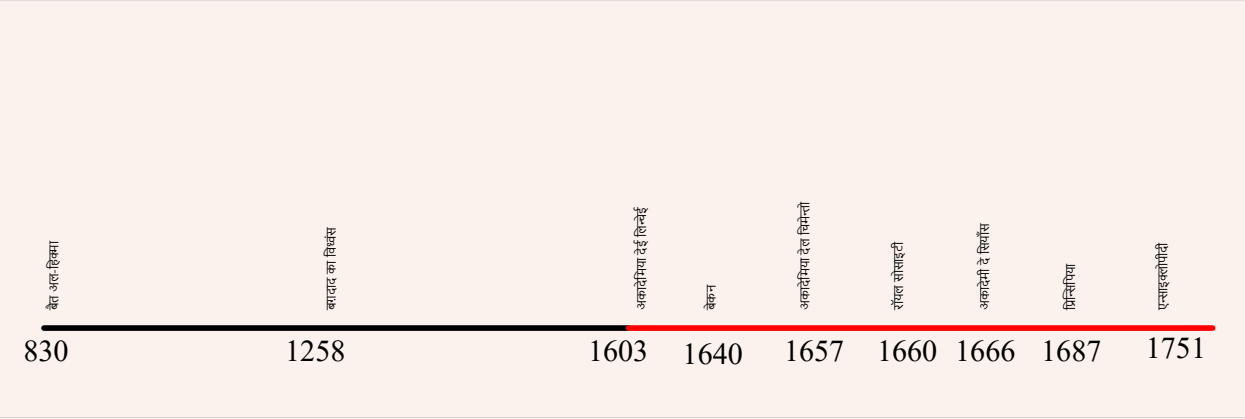
वर्ष	लेखक	पुस्तक का शीर्षक	विषयवस्तु का सारांश
c. 850	बनू मूसा बंधु	*Book of Ingenious Devices* (Banū Mūsā ibn Shākir, 0850)	बगदाद के ज्ञान-गृह की प्रारंभिक क्रमादेशनीय मशीनें और स्वचालित नियंत्रण-यंत्र; व्यावहारिक अभियांत्रिकी के साथ यांत्रिकी का संयोजन।
1543	आंद्रेयास वेसालियस	*De Humani Corporis Fabrica* (Vesalius, 1998–2009)	प्रत्यक्ष मानव-विच्छेदन पर आधारित शरीररचनात्मक क्रांति; दीर्घकालीन गैलेनिक त्रुटियों का सुधार; भव्य वैज्ञानिक चित्रों ने नए मानक स्थापित किए।

समीक्षा प्रति

वर्ष	लेखक	पुस्तक का शीर्षक	विषयवस्तु का सारांश
c. 1593	गैलीलियो गैलिली	*Le Meccaniche* (Galilei, 1594)	मशीनों द्वारा परिमाणात्मक नियमों के पालन को दर्शाने वाला अभियांत्रिक ग्रंथ; गणितीय रूप में यांत्रिकी की प्रारंभिक अभिव्यक्ति।
1620	फ़्रांसिस बेकन	*Novum Organum* (Bacon, 2000)	अनुभवजन्य विधि का आधारभूत आह्वान; प्राधिकार अथवा विशुद्ध तर्क के ऊपर व्यवस्थित प्रेक्षण और प्रयोग।
1623	गैलीलियो गैलिली	*Il Saggiatore* (Galilei, 1623)	घोषित करता है कि प्रकृति की “पुस्तक” गणित में लिखी है; भौतिक यथार्थ को समझने के पथ के रूप में मापन का समर्थन।
1628	विलियम हार्वे	*Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus* (Harvey, 1628)	रक्त-परिसंचरण की खोज; परिमाणात्मक मापन गैलेनिक सिद्धांत का खंडन करते हैं; शरीररचना, प्रेक्षण और तर्क का एकीकरण।
1665	रॉबर्ट हुक	*Micrographia* (Hooke, 1665)	सूक्ष्मदर्शिकी की सीमाचिह्न कृति; विस्तृत उत्कीर्णन; अटकलबाज़ी के ऊपर अनुभवजन्य प्रेक्षण पर बल; सामग्री-व्यवहार संबंधी अंतर्दृष्टियाँ।
1667	Accademia del Cimento	*Saggi di naturali esperienze fatte nell’Accademia del Cimento* (Accademia del Cimento, 1667)	कठोर प्रयोगात्मक जाँचों का सार; वायु-दाब, निर्वात और तापीय परिघटनाएँ; “परीक्षण और पुनःपरीक्षण” के लोकाचार का संहिताकरण।
1687	आइज़क न्यूटन	*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687)	यांत्रिकी और सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण का गणितीय संश्लेषण; केप्लर के नियमों को गति के भौतिक सिद्धांत से जोड़ता है।
1704	आइज़क न्यूटन	*Opticks* (Newton, 1704)	प्रकाशिकी में प्रयोगात्मक विधि का उदाहरण; प्रकाश के गुणों, रंगों और विवर्तन का अध्ययन।
1751 – 1772	दिदरो & दालांबेर	*Encyclopédie* (Diderot and d’Alembert, 1751)	युक्तिसंगत सिद्धांतों द्वारा मानव ज्ञान का व्यापक संगठन; प्रबोधन के वैज्ञानिक और सामाजिक चिंतन का माध्यम।

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 5.5: वैज्ञानिक तर्क के उदय की समयरेखा



कारवाज्जो, संत थॉमस का अविश्वास (1601-1602)

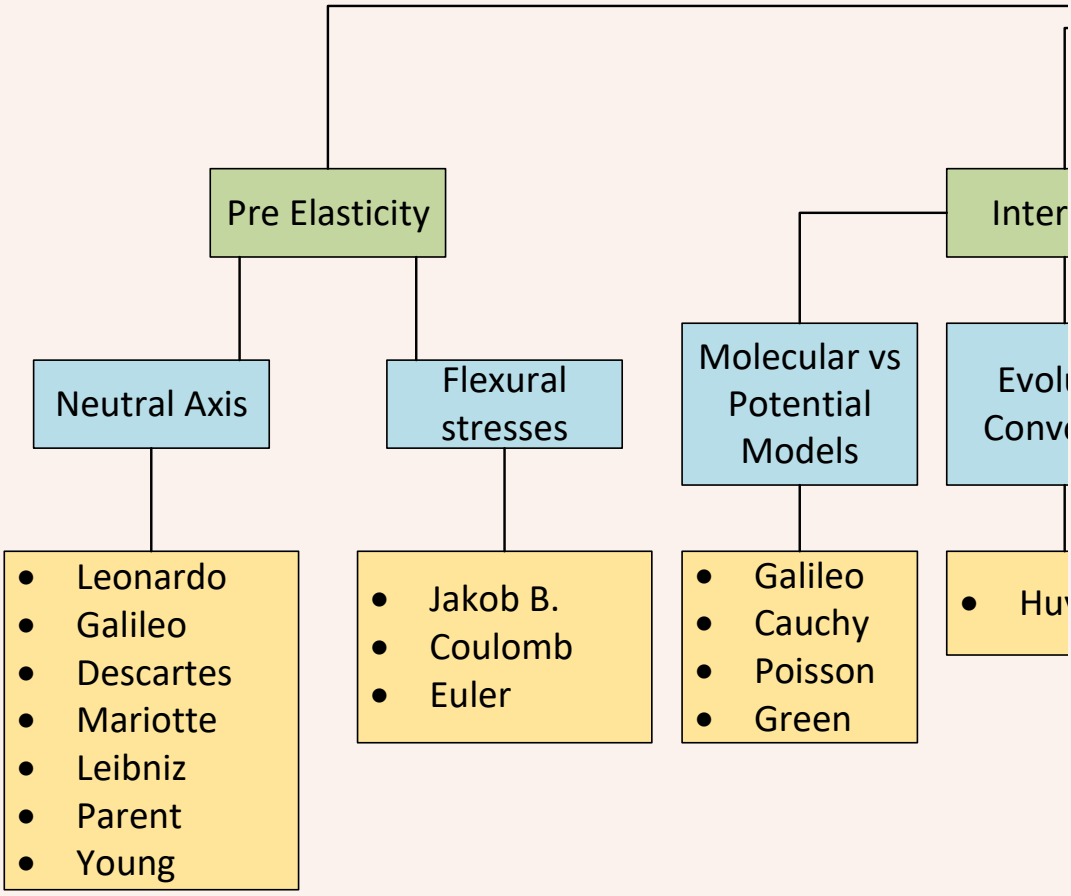
थॉमस अनुभवजन्य आग्रह के साथ घाव की जाँच करते हैं—प्रयोगात्मक विज्ञान का आधारभूत संकेत: प्रत्यक्ष प्रमाण के बिना विश्वास करने से इनकार।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंतराल I: प्राकृतिक दर्शन से विश्लेषणात्मक यांत्रिकी तक

संरचनात्मक विश्लेषण के संकल्पनात्मक आधार।



Leonardo (1452-1519)	Bacon (1561-1626)	G (15
Mariotte (1620-1684)	Hooke (1635-1703)	N (16
Jacob B. (1654-1705)	Parent (1666-1716)	Joh (16
Euler (1707-1783)	Coulomb (1736-1806)	N (17
St Venant (1797-1886)		

पुस्तक प्रकाशित

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पिछले अध्यायों ने *वैज्ञानिक क्रांति* (अध्याय 5.3) का परीक्षण करके और आधुनिक यांत्रिकी को रूप देने वाले प्रमुख व्यक्तियों तथा कृतियों को प्रस्तुत करके (अध्याय 6) इस क्षेत्र के बौद्धिक आधार स्थापित किए। इस विषयगत और संश्लेषणात्मक परिप्रेक्ष्य को कार्यप्रणाली के रूप में अपनाया गया: यह प्राविधिक विकासों के विशुद्ध कालानुक्रमिक पुनर्निर्माण के स्थान पर संकल्पनात्मक सातत्य और बौद्धिक संरचना को अग्रभूमि में रखता है; कालानुक्रमिक पुनर्निर्माण को आगामी अध्यायों के लिए रखा गया है।

इस मोड पर रुककर इस प्रारंभिक काल में उभरे अनेक संकल्पनात्मक सूत्रों—ज्यामिति, साम्यावस्था, वक्रता और स्थिरता—को समेकित करना उपयोगी है; ये प्रायः सापेक्ष पृथकता में विकसित हुए, किंतु क्रमशः एकीकृत विश्लेषणात्मक दृष्टिकोण की ओर अभिसरित हुए। अब प्रमुख व्यक्तियों, उनकी महत्त्वपूर्ण कृतियों और उनके कार्यकालीन बौद्धिक परिवेश का परिचय देने के बाद हम स्वयं प्राविधिक विकासों की ओर बढ़ते हैं। अगले छह अध्यायों में प्रारंभिक यांत्रिकी से संरचनात्मक विश्लेषण के औपचारिकीकरण तक के ऐतिहासिक विकास का अनुगमन किया गया है, जिसमें मूलभूत संकल्पनाओं—आंतरिक बल, विरूपण और स्थिरता—का क्रमिक स्पष्टीकरण तथा अंततः अभियांत्रिक व्यवहार में प्रयुक्त आधुनिक विश्लेषणात्मक विधियों में उनका संश्लेषण प्रस्तुत है।

मसौदा पाठ्यपुस्तक

6 महान विभूतियाँ

सारांश

यह अध्याय आधुनिक यांत्रिकी की आधारशिला रखने वाली प्रमुख विभूतियों का परिचय और उनकी कृतियों का विवरण, दोनों प्रस्तुत करता है—ऐसे अग्रदूतों का महान मंडल जिनके जीवन और कार्य ने संरचनात्मक अभियांत्रिकी को अनुभवजन्य शिल्प से गणितीय विज्ञान में रूपांतरित किया। प्राचीन काल से $19^{\text{वीं}}$ शताब्दी तक विस्तृत यह अध्याय चीन में मो-त्से की उत्तोलकों संबंधी प्रारंभिक अंतर्दृष्टियों से लेकर आर्किमिडीज़ की आधारभूत स्थैतिकी, गैलीलियो के मापानुपात-नियमों, न्यूटन की गतिकी, बर्नूली परिवार, ऑयलर और लाग्रांज के परिवर्तनात्मक ढाँचों तथा अंततः कॉशी, ग्रीन और सेंट-वेनां की कठोर सातत्यक यांत्रिकी तक के अग्रणी चिंतकों का परिचय देता है। लियोनार्दो दा विंची को अपवादस्वरूप सम्मिलित किया गया है—यद्यपि वे $15^{\text{वीं}}$ शताब्दी में सक्रिय थे—क्योंकि यांत्रिकी, शरीररचना, उडान और तरल-गति संबंधी उनकी टिप्पण-पुस्तिकाएँ अनुभवजन्य प्रेक्षण की ऐसी गहराई और तंत्र-स्तरीय समझ प्रदर्शित करती हैं जिसने बाद के वैज्ञानिकों की विश्लेषणात्मक चिंतन-पद्धति का पूर्वाभास दिया।

यह अध्याय केवल व्यक्तिगत उपलब्धियों का नहीं, बल्कि एक पूरे अनुशासन के विकास का अनुगमन करता है—और दिखाता है कि संरचनात्मक यांत्रिकी गणित, प्राकृतिक दर्शन और व्यावहारिक अभियांत्रिकी के संगम से कैसे उभरी। आख्यान प्रकट करता है कि व्यक्तिगत संबंधों, संस्थागत प्रतिद्वंद्विताओं और सांस्कृतिक आदान-प्रदान ने यांत्रिक विज्ञान के विकास को वैयक्तिक प्रतिभा जितना ही आकार दिया। जीवन-वृत्तों के साथ इसमें उन सीमाचिह्न ग्रंथों का सर्वेक्षण भी है जिन्होंने इन प्रगतियों को संहिताबद्ध किया: वे महान पुस्तकें जिन्होंने अभियंताओं की पीढ़ियों को प्रशिक्षित किया और संरचनाओं के विश्लेषण की हमारी रीति को रूपांतरित किया।

इस सर्वेक्षण का प्रयोजन उनके विचारों के पूर्ण प्राविधिक विकास में गहराई से उतरना नहीं है—वह आगामी अध्यायों में किया जाएगा—बल्कि उनके योगदानों, प्रतिद्वंद्विताओं और बौद्धिक वंशावलियों को संदर्भित करना है। लक्ष्य भौतिक अंतर्दृष्टि और ज्यामिति से यांत्रिक व्यवहार की औपचारिक, समीकरण-आधारित समझ तक के संक्रमण का अनुगमन करना है। अंतिम सार-सारणियाँ प्रत्येक योगदानकर्ता की विरासत, क्षेत्र को आकार देने वाले सीमाचिह्न प्रकाशनों, व्यावसायिकों को प्रशिक्षित करने वाली संस्थाओं और खोज को तीव्र करने वाली प्रतिद्वंद्विताओं का सार प्रस्तुत करती हैं—और इस प्रकार विश्लेषण में निहित अनुशासन के रूप में संरचनात्मक यांत्रिकी के उद्भव का सुसंगत आख्यान देती हैं।

6.1 परिचय 104
6.2 दर्शन, ज्यामिति और प्रारंभिक स्थैतिकी 105
6.2.1 मो-त्से (c. 470–391 BCE) . . . 105
6.2.2 अरस्तू (384–322 BCE) 106
6.2.3 यूक्लिड (c. 300 BCE) 107
6.2.4 आर्किमिडीज़ (c. 287–212 BCE) 108
6.2.5 पर्गा के अपोलोनियस (c. 262–190 BCE) 109
6.3 अभियांत्रिकी, मशीनें और ज्ञान का प्रसारण 110
6.3.1 मार्कस विट्रुवियस पोलियो, c. 80–70 BCE – 15 BCE के बाद 110
6.3.2 अलेक्ज़ेंड्रिया के हीरो (fl. c. 62 CE) 110
6.3.3 इब्न अल-हैथम (c. 965–1040 CE) 111
6.3.4 अबू रेहान अल-बिरूनी (973–1048) 112
6.3.5 अल-ख़ाज़िनी (fl. 1115–1130 CE) 113
6.3.6 विलार दे ऑनकूर (fl. c. 1225–1250) 113
6.4 वास्तुकला, अनुपात और मानवतावादी रूप . 114
6.4.1 लिओन बतिस्ता अल्बर्ती (1404–1472) 114
6.4.2 लियोनार्दो दा विंची (1452–1519) 115
6.4.3 आंद्रेआ पल्लादियो (1508–1580) 125
6.4.4 सेबास्तियानो सेर्लियो (1475–1554) 125
6.4.5 जियाकोमो बारोत्सी दा विग्नोला (1507–1573) 126
6.4.6 ह्यूबर्ट गोतिए (1660–1737) . . 127
6.5 गणितीय व्यवस्था से यांत्रिकी तक . . . 134
6.5.1 फ़्रांसिस बेकन (1561–1626) . . 134
6.5.2 निकोलस कोपर्निकस (1473–1543) 135
6.6 आद्य-स्थैतिकी से वैज्ञानिक क्रांति तक 136
6.6.1 साइमन स्टेविन (1548–1620) . . 136
6.6.2 गैलीलियो गैलिली (1564–1642) . 137
6.6.3 रेने देकार्त (1596–1650) 143
6.6.4 क्रिस्टियान हाइगेन्स (1623–1695) 144
6.6.5 ब्लेज़ पास्कल (1623–1662) . . 146
6.6.6 रॉबर्ट हुक (1635–1703) 146
6.6.7 आइज़क न्यूटन (1642–1727) . . 153

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.6.8 गॉटफ़्रीड लाइबनित्स (1646–1716) 158
6.6.9 बर्नूली परिवार (1654–1782) . . 160
6.6.10 लियोनहार्ड ऑयलर (1707–1783) 166
6.7 विश्लेषणात्मक यांत्रिकी से सातत्यक और संरचनात्मक सिद्धांत तक 171
6.7.1 शार्ल-ऑगुस्ताँ द कूलॉम (1736–1806) 172
6.7.2 Siméon Denis Poisson (1781–1840) 173
6.7.3 क्लोद लुई मारी ऑंरी नाविए (1785–1836) 175
6.7.4 ज्याँ ल रों द'आलाँबेर (1717–1783) 180
6.7.5 जोज़ेफ-लुई लाग्राँज (1736–1813) 181
6.7.6 कोशी (ओगुस्तैं-लुई 1789–1857) 181
6.7.7 जॉर्ज ग्रीन (1793–1841) . . . 182
6.7.8 Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886) 183
6.8 एक विषय के रूप में संरचनात्मक अभियांत्रिकी का उदय 184
6.8.1 कार्ल कुलमान (1821-1881) . . 184
6.8.2 विलियम जॉन मैक्कोर्न रैंकिन (1820-1872) 185
6.8.3 क्रिश्चियन ओटो मोहर (1835–1918) 187
6.8.4 हेनरी मोज़ली (1801–1872) . . . 188
6.8.5 जेम्स क्लर्क मैक्सवेल (1831–1879) 188
6.9 यांत्रिकी के प्रमुख इतिहास 190
6.9.1 आइज़क टॉडहंटर (1820–1884) . 190
6.9.2 स्टीफन प्रोकोफिएविच तिमोशेंको (1878–1972) 190
6.9.3 रेने ड्यूगा (1897–1957) 191
6.9.4 क्लिफर्ड ऐम्ब्रोज़ ट्रूज़डेल तृतीय (1919–2000) 192
6.10 उल्लेखनीय महिलाएँ 193
6.11 विश्लेषण और संदर्भ 194
6.11.1 प्रतिस्पर्धा, गोपनीयता और वैज्ञानिक प्रगति 194
6.11.2 आधुनिक अभियांत्रिकी विज्ञान की ओर संक्रमण 203
6.11.3 अभियांत्रिकी-शिक्षा में फ्रांसीसी क्रांति 203
6.12 निष्कर्ष: प्राकृतिक दर्शन से अभियांत्रिकी विज्ञान तक 204
6.12.1 सार-सारणियाँ 205

6.1 परिचय

Truesdell, 1968 ने उन मूलभूत प्रयोगों की पहचान का अस्तित्वगत प्रश्न उठाया जिन पर *"शास्त्रीय"* यांत्रिकी स्थापित हुई थी और टिप्पणी की, *"मैं कभी किसी को खोज नहीं पाया।"* वास्तव में आधुनिक यांत्रिकी 17th से 19th centuries तक क्रमशः ऐसे ढंग से विकसित हुई जो सरल कालानुक्रम अथवा किसी एक उद्गम को अस्वीकार करता है। यह क्रमिक विकास पृथकता में नहीं, बल्कि बौद्धिक आदान-प्रदान, संस्थागत विकास और सांस्कृतिक रूपांतरण के जटिल जाल के माध्यम से हुआ, जिसने भौतिक संसार संबंधी मानव-समझ को मूलतः बदल दिया।

यह अध्याय सर्वाधिक निर्णायक योगदानकर्ताओं—उन *"महान व्यक्तियों"* जिन्होंने विश्लेषणात्मक यांत्रिकी और गणित को आकार दिया—के जीवन और बौद्धिक संबंधों का परिचय देने का प्रयास करता है; साथ ही उनकी खोजों को संभव बनाने वाले संस्थागत तथा सांस्कृतिक संदर्भों और उन सीमाचिह्न प्रकाशनों का परीक्षण करता है जिनके माध्यम से उनके विचार प्रसारित हुए। हम केवल यह नहीं देखते कि उन्होंने क्या खोजा, बल्कि यह भी कि उनकी व्यक्तिगत परिस्थितियों, प्रतिद्वंद्विताओं और सहयोगों ने यांत्रिकी को प्राकृतिक दर्शन से गणितीय विज्ञान में रूपांतरित करने को कैसे प्रेरित किया। इन जीवन-वृत्तों के साथ हम संरचनात्मक ज्ञान को संहिताबद्ध करने वाली महान पुस्तकों का सर्वेक्षण करते हैं: वे ग्रंथ, पाठ्यपुस्तकें और संकलित कृतियाँ जिन्होंने व्यावसायिकों की पीढ़ियों को प्रशिक्षित किया और आधुनिक विश्लेषण के आधार स्थापित किए।

इस अध्याय का मार्गदर्शन दो प्रश्न करते हैं: *वे कौन लोग हैं जिन्होंने संरचनाओं के विषय में हमारी चिंतन-पद्धति बदल दी?* और *वे कौन-सी पुस्तकें हैं जिन्होंने उन परिवर्तनों को संहिताबद्ध किया?* किंतु हम अधिक गहरे प्रश्न भी पूछते हैं: यूरोपीय अकादमियों और विश्वविद्यालयों के उभरते संजाल ने तीव्र वैज्ञानिक प्रगति की परिस्थितियाँ कैसे निर्मित कीं? व्यक्तिगत प्रतिद्वंद्विताओं और सहयोगों ने खोज को कैसे तीव्र किया? सैद्धांतिक उपलब्धियों को प्रेरित करने में व्यावहारिक अभियांत्रिक चुनौतियों की क्या भूमिका थी? और गैलीलियो की *Discorsi* से नाविएर की *Leçons* तक प्रमुख ग्रंथों के प्रकाशन ने अव्यक्त ज्ञान को औपचारिक विज्ञान में कैसे रूपांतरित किया? यह सर्वांगीण सूची नहीं, बल्कि संरचनात्मक विश्लेषण की बौद्धिक वंशावली में स्मरणीय व्यक्तियों को पहचानने का चयनात्मक और व्याख्यात्मक प्रयास है।

scientific!progress को प्रायः विचारों और सिद्धांतों के माध्यम से बताया जाता है, फिर भी प्रत्येक समीकरण के पीछे एक व्यक्ति होता है—जिज्ञासा, महत्त्वाकांक्षा, दृढता और कभी-कभी संघर्ष अथवा विपत्ति से प्रेरित। ये व्यक्ति ज्ञान के निष्क्रिय संवाहक नहीं, बल्कि उन क्रांतियों के सक्रिय कारक थे जिन्हें प्रज्वलित करने में उन्होंने सहायता की। अधिक महत्त्वपूर्ण रूप से वे राष्ट्रीय सीमाओं और संस्थागत संबद्धताओं से परे संप्रेषण, प्रतिस्पर्धा और सहयोग के संजालों में अंतःस्थापित थे। उनके विचार इसलिए स्थायी हुए क्योंकि वे लिखे गए—उन पुस्तकों, संस्मरणों और ग्रंथों में जो पूरे यूरोप और उसके बाहर प्रसारित हुए।

कुछ अपने समय में सम्मानित हुए; कुछ मान्यता के लिए संघर्ष करते रहे। कुछ ने अकादमियों के आराम में काम किया; अन्य ने एकांत अथवा संदेह के अधीन। ऑयलर जैसे कुछ व्यक्ति विभिन्न यूरोपीय राजदरबारों और अकादमियों के बीच स्वतंत्रता से जाते रहे, जबकि गैलीलियो जैसे अन्य लोगों ने संस्थागत उत्पीडन सहा। कुछ ने अपने मार्गदर्शकों के कार्य को व्यवस्थित रूप से आगे बढाया, जबकि न्यूटन जैसे अन्य लोगों ने अपनी खोजों की ईर्ष्यापूर्वक रक्षा की और प्राथमिकता के कटु विवादों में उलझे। उनकी व्यक्तिगत कथाएँ हमें स्मरण कराती हैं कि विज्ञान निर्वैयक्तिक एल्गोरिदम नहीं, बल्कि कल्पना, प्रत्यास्थता और अदम्य दृढता से प्रेरित मानवीय उद्यम है।

उनके जीवन और प्रकाशनों का पुनरवलोकन करके हम न केवल उनके योगदानों को स्पष्ट करते हैं, बल्कि संरचनात्मक विज्ञान के विकास को आकार देने वाली सांस्कृतिक तथा बौद्धिक शक्तियों की अधिक गहरी सराहना भी प्राप्त करते हैं। गणितीय अनुशासन के रूप में यांत्रिकी के उद्भव के लिए केवल वैयक्तिक प्रतिभा ही नहीं, नई संस्थाओं (जैसे रॉयल सोसाइटी और *Académie des Sciences*), विद्वत्तापूर्ण संप्रेषण के नए रूपों (पत्राचार-संजालों और शोध-पत्रिकाओं के प्रकाशनों के माध्यम से) तथा सैद्धांतिक ज्ञान और व्यावहारिक अनुप्रयोग के नए संबंधों का विकास भी आवश्यक था। इस अध्याय को *प्रमुख व्यक्तियों का परिचय और उनकी कृतियों का विवरण*, दोनों समझना चाहिए—यांत्रिकी के संस्थापक व्यक्तियों और उन ग्रंथों का मार्गदर्शक जिनके माध्यम से उनके विचारों ने स्थायित्व प्राप्त किया। *प्रत्येक से संबद्ध विशिष्ट प्राविधिक विकासों और सैद्धांतिक प्रगतियों का विस्तृत परीक्षण बाद के अध्यायों में किया जाएगा।*

यद्यपि यह अध्याय जीवनीपरक और ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्य अपनाता है, इसका प्रयोजन प्राविधिक ग्रंथ बनना नहीं है। इन व्यक्तियों द्वारा प्रस्तुत विश्लेषणात्मक सूत्रणों, व्युत्पत्तियों और गणितीय संरचनाओं का परीक्षण आगामी अध्यायों में होगा, जहाँ उनके विचारों का अधिक संक्षिप्त किंतु गणितीय रूप से कठोर ढंग से पुनरवलोकन किया जाएगा। अतः प्रस्तुत चर्चा मानवतावादी और बौद्धिक भूमिका—अनुशासन को आकार देने वाले व्यक्तित्वों, परिस्थितियों और प्रकाशनों को प्रकाशित करने वाला संदर्भात्मक ढाँचा—के रूप में कार्य करती है, जिसके बाद उनके सैद्धांतिक योगदानों का औपचारिक निरूपण आएगा।

नीचे परिचित कराए गए व्यक्तियों ने तीव्रता से विकसित होते संस्थागत परिदृश्य में कार्य किया, जिसका इस अध्याय के अंतिम भागों में विस्तार से परीक्षण किया गया है।

6.2 दर्शन, ज्यामिति और प्रारंभिक स्थैतिकी

यह अनुभाग उन व्यक्तियों को समूहित करता है जिनके लिए यांत्रिकी स्वतंत्र विज्ञान के स्थान पर *प्राकृतिक दर्शन* और *ज्यामिति* के भीतर उभरी। बल, साम्यावस्था और स्थिरता के प्रश्नों का समाधान तार्किक अनिवार्यता, अनुपात और ज्यामितीय रचना द्वारा किया गया; स्थैतिकी को भौतिक कारणता के स्थान पर क्रमबद्ध रूप के परिणाम के रूप में समझा गया। एकीकृत विषय यांत्रिक विचारों का दार्शनिक तर्क और ज्यामितीय अमूर्तन के विस्तार के रूप में निरूपण है।

6.2.1 मो-त्से (c. 470–391 BCE)

मो-त्से (मो दी के नाम से भी ज्ञात) का जन्म लगभग 470 BCE में वर्तमान तंगझोउ, शानदोंग प्रांत, चीन में हुआ—संयोग से उसी क्षेत्र में जहाँ कन्फ़्यूशियस रहते थे, जिनकी मृत्यु मो-त्से के जन्म से कुछ ही वर्ष पहले हुई थी। अपने युग के उन अनेक दार्शनिकों के विपरीत जो अभिजात परिवारों से आए थे, ऐतिहासिक प्रमाण संकेत देते हैं कि मो-त्से श्रमिक वर्ग से उठे थे। संभवतः उन्हें बढई अथवा शिल्पकार के रूप में प्रशिक्षित किया गया था और इस व्यावहारिक पृष्ठभूमि ने उनके दार्शनिक दृष्टिकोण को गहराई से आकार दिया; इसने उनके चिंतन को अमूर्त अटकलबाज़ी के स्थान पर अनुभवजन्य प्रेक्षण और उपयोगितावादी सरोकारों में स्थापित किया।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मो-त्से ने मोहवादी विचार-संप्रदाय स्थापित किया, जो युद्धरत राज्यों के काल (c. 475–221 BCE) में सर्वाधिक प्रमुख संगठित संप्रदायों में से एक बना और प्रभाव में कन्फ़्यूशियसवाद का प्रतिद्वंद्वी था। उनके अनुयायी—अधिकांशतः तकनीशियन और शिल्पकार—एक अनुशासित संगठन में व्यवस्थित थे, जो दार्शनिक और प्राविधिक दोनों प्रकार के लेखों का अध्ययन करता था। मोहवादी सैन्य अभियंताओं के रूप में प्रसिद्ध हुए और दुर्गों तथा घेराबंदी-रोधी तंत्रों का अभिकल्प करते थे; संभवतः इसी ने यांत्रिकी में उनके सैद्धांतिक हितों को प्रेरित किया।

मो जिंग *Mo Jing* (Mozi, 2013), मो-त्से के अनुयायियों को आरोपित ग्रंथों का संकलन, स्थैतिकी में आश्चर्यजनक रूप से उन्नत अंतर्दृष्टियाँ प्रस्तुत करता है, जिनमें उत्तोलकों, गुरुत्व-केंद्रों और यांत्रिक लाभ का व्यवहार सम्मिलित है। ग्रंथ उल्लेखनीय परिशुद्धता से साम्यावस्था के सिद्धांत अभिव्यक्त करता है: यह आलंब की स्थिति और भारों के वितरण में भेद करता है तथा पहचानता है कि संतुलित धरन के लिए भार और दूरी का गुणनफल दोनों ओर समान होना चाहिए—आर्किमिडीज़ द्वारा उसके औपचारिकीकरण से सदियों पहले उत्तोलक के नियम का अंतर्निहित कथन।

बाद के मोहवादी लेखों (c. 300–200 BCE) में प्रकाशिकी, ज्यामिति, यांत्रिकी और यहाँ तक कि खगोल-विज्ञान के चिह्नों की जाँच है। उनका ज्ञानमीमांसात्मक दृष्टिकोण इस विश्वास पर आधारित प्रतीत होता है कि वस्तुनिष्ठ सत्य विद्यमान है और परीक्षण, अध्ययन तथा व्यवस्थित तर्क द्वारा बोधगम्य बनाया जा सकता है—ऐसे सिद्धांत जो वैज्ञानिक क्रांति तक पाश्चात्य विज्ञान में केंद्रीय नहीं बने।

यद्यपि मोहवादी परंपरा ने पाश्चात्य यांत्रिकी के विकास को प्रत्यक्षतः प्रभावित नहीं किया—221 BCE में चीन के छिन एकीकरण और उसके बाद पुस्तकों को जलाए जाने के पश्चात संप्रदाय का क्षय हुआ—फिर भी यह इस बात का उल्लेखनीय प्रमाण है कि मूलभूत संरचनात्मक सिद्धांत विविध संस्कृतियों में स्वतंत्र रूप से खोजे गए थे; यह भूमध्यसागरीय संसार के बाहर यांत्रिक तर्क के सर्वप्रथम व्यवस्थित निरूपणों में से एक बना हुआ है।

6.2.2 अरस्तू (384–322 BCE)

अरस्तू का जन्म कालिसडिकी प्रायद्वीप के यूनानी उपनिवेशी नगर स्तागिरा में हुआ। उनके पिता निकोमेकस मैसेडोन के राजा अमिंतास III के निजी चिकित्सक थे—एक संबंध जो बाद में परिणामकारी सिद्ध हुआ। किशोरावस्था में अनाथ अरस्तू को सत्रह वर्ष की आयु में एथेंस भेजा गया और उन्होंने प्लेटो की अकादमी में प्रवेश लिया, जहाँ वे 347 BCE में प्लेटो की मृत्यु तक बीस वर्ष रहे। अकादमी के नेतृत्व के लिए उपेक्षित होने पर—संभवतः विदेशी जन्म अथवा उभरते दार्शनिक मतभेदों के कारण—उन्होंने एथेंस छोड़ा और एशिया माइनर तथा लेसबोस में अनेक वर्ष बिताकर वे जैविक जाँचें कीं जो बाद में उनके प्राणिविज्ञानीय लेखन को सूचित करने वाली थीं।

343 BCE में मैसेडोन के फ़िलिप II ने अरस्तू को अपने तब तेरह वर्षीय पुत्र सिकंदर की शिक्षा के लिए बुलाया। इस शिक्षा की यथार्थ विषयवस्तु अज्ञात है, यद्यपि बाद की किंवदंतियों ने उसे पर्याप्त अलंकृत किया। जब सिकंदर ने सत्ता संभालकर अपने अभियान आरंभ किए, तब अरस्तू एथेंस लौटे और 335 BCE में अपना विद्यालय, लाइसीयम, स्थापित किया। उन्होंने वहाँ बारह वर्ष पढ़ाया और कहा जाता है कि स्तंभयुक्त पथों पर चलते हुए व्याख्यान देते थे—इसी से उनके अनुयायियों का नाम परिपाटेटिक पड़ा। 323 BCE में सिकंदर की मृत्यु पर मैसेडोन-विरोधी भावना ने राजकीय संबंध वाले प्रत्येक व्यक्ति के लिए एथेंस को असुरक्षित बना दिया। अरस्तू कैल्सिस चले गए और कहा जाता है कि उन्होंने टिप्पणी की कि वे एथेंस को दर्शन के विरुद्ध दूसरी बार पाप नहीं करने देंगे। अगले वर्ष वहीं उनकी मृत्यु हुई।

***Mechanica* और परिपाटेटिक परंपरा** प्रायः अरस्तू को आरोपित, किंतु संभवतः परिपाटेटिक संप्रदाय के किसी बाद के सदस्य द्वारा रचित,[1] *Mechanica* (Aristotle, 2000) सरल मशीनों और उनके संचालन को शासित करने वाले सिद्धांतों का आधारभूत ग्रंथ है। लगभग 3rd century BCE में लिखा गया यह ग्रंथ उत्तोलकों, घिरनियों, पच्चरों और बलों के संतुलन का अन्वेषण करता है तथा मशीनों द्वारा मानवीय प्रयास के प्रवर्धन का गुणात्मक विवरण प्रस्तुत करता है।

ग्रंथ एक केंद्रीय प्रश्न के इर्द-गिर्द संगठित है: यांत्रिक युक्तियों के माध्यम से छोटे बल बड़े भारों को क्यों चला देते हैं? प्रस्तुत उत्तर—कि वृत्तीय गति में विपरीत प्रवृत्तियों को जोड़ने वाली विशेष जनन-शक्ति होती है—आधुनिक मानकों से

[1] *peripatetic* शब्द यूनानी peripathtik'os से व्युत्पन्न है, जिसका अर्थ "इधर-उधर चलने को प्रवृत्त" है। यह एथेंस के लाइसीयम के आवृत पथ (per'ipatos) में विद्यार्थियों के साथ टहलते हुए पढ़ाने की अरस्तू की आदत को संदर्भित करता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दार्शनिक रूप से सरल है, फिर भी वह विविध यांत्रिक परिघटनाओं को एक व्याख्यात्मक सिद्धांत में एकीकृत करने का वास्तविक प्रयास है।

उत्तोलक, गति और प्रारंभिक संयोजन-सिद्धांत *Mechanica* तुलाओं और चप्पुओं के व्यवहार से लेकर सरौते तथा शल्य-संदंश की यांत्रिकी तक की पैंतीस समस्याओं का समाधान करती है। उत्तोलक का उसका निरूपण विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण है: वह पहचानता है कि उत्तोलक की प्रभावशीलता आलंब से दूरियों के अनुपात पर निर्भर है और इस प्रकार उत्तोलक के उस नियम का पूर्वाभास देता है जिसे आर्किमिडीज़ बाद में कठोरता से सिद्ध करने वाले थे। कृति वेगों के समांतर चतुर्भुज और गतियों के संयोजन पर भी चर्चा करती है—ऐसी संकल्पनाएँ जो युक्तिसंगत यांत्रिकी के लिए मूलभूत बनने वाली थीं।

प्रसारण और दीर्घकालिक प्रभाव बाद के लेखकों पर उसका प्रभाव असंदिग्ध है। आर्किमिडीज़ ने *Mechanica* में सर्वप्रथम संकेतित अनेक विचारों को आगे बढ़ाया, विशेषतः गुरुत्व-केंद्र की संकल्पना को परिष्कृत किया और स्थैतिकी के कठोर गणितीय सिद्धांत विकसित किए। रोमन और हेलेनिस्टिक काल में अलेक्ज़ेंड्रिया के हीरो और पाप्पस जैसे लेखकों ने व्यावहारिक यंत्रों तथा सैद्धांतिक विचारों, दोनों को सम्मिलित कर यांत्रिक तंत्रों को आगे विकसित किया। इस्लामी स्वर्ण युग में ग्रंथ का अरबी और बाद में लैटिन में अनुवाद हुआ, जिससे मध्यकालीन तथा पुनर्जागरणकालीन यूरोप तक उसका प्रसारण सुनिश्चित हुआ। गैलीलियो जैसे विद्वानों ने गति और उत्तोलकों के अपने विश्लेषण में प्राचीन यूनानी यांत्रिक चिंतन की विरासत को स्वीकार किया।

इस प्रकार *Mechanica* प्रारंभिक दार्शनिक अन्वेषण को आधुनिक यांत्रिक विज्ञान से जोड़ने वाली दीर्घ वंशावली के मूल में स्थित है। गति का अरस्तू का व्यापक सिद्धांत—विशेषतः प्राकृतिक और आरोपित गति में उनका भेद—प्रारंभिक सत्रहवीं शताब्दी तक पाश्चात्य प्राकृतिक दर्शन पर प्रभावी रहा।

6.2.3 यूक्लिड (c. 300 BCE)

यूक्लिड के जीवन के विषय में लगभग कुछ भी ज्ञात नहीं है। उन्होंने टॉलेमी I सोटर (323–283 BCE) के शासनकाल में अलेक्ज़ेंड्रिया में कार्य किया, और यही एक तथ्य विश्वसनीय जीवनीपरक जानकारी की संपूर्णता है। बाद के लेखकों ने स्वतंत्र रूप से अलंकरण किया: आठ शताब्दियों बाद लिखने वाले प्रोक्लस बताते हैं कि यूक्लिड प्लेटो के विद्यार्थियों से युवा, किंतु आर्किमिडीज़ से वृद्ध थे और उन्होंने अलेक्ज़ेंड्रिया में गणितीय विद्यालय स्थापित किया। प्रसिद्ध प्रसंग—जिसमें टॉलेमी ज्यामिति का संक्षिप्त मार्ग पूछते हैं और यूक्लिड उत्तर देते हैं कि इस विषय तक कोई राजमार्ग नहीं है—संभवतः अप्रामाणिक है; लगभग समान कथा मेनैक्मस और सिकंदर के विषय में कही जाती है।

यूक्लिड का जन्मस्थान और शिक्षा भी अनिश्चित हैं। कुछ मध्यकालीन अरबी स्रोत दावा करते हैं कि उनका जन्म टायर में हुआ; अन्य उन्हें पहले के दार्शनिक मेगारा के यूक्लिड से भ्रमित करते हैं, और यह त्रुटि पुनर्जागरणकालीन प्रतिमा-विज्ञान में चलती रही। उनकी गणितीय वंशावली को देखते हुए यह संभव प्रतीत होता है कि उन्होंने एथेंस की प्लेटो अकादमी में अध्ययन किया हो, किंतु इसे स्थापित नहीं किया जा सकता। उनका व्यक्तित्व और चरित्र हमारे लिए पूर्णतः लुप्त है। जो बचा है वह स्वयं कृति है।

***Elements* और अभिगृहीतीय विधि** यूक्लिड की *Elements* (Euclid and Heath, 1956) संभवतः इतिहास की सर्वाधिक प्रभावशाली पाठ्यपुस्तक है, जिसने न केवल ज्यामिति, बल्कि निगमनात्मक तर्क की भी नींव रखी। तेरह पुस्तकों से बनी यह कृति कठोर अभिगृहीतीय ढाँचे में समतलीय ज्यामिति (पुस्तकें I–VI), संख्या-सिद्धांत (पुस्तकें VII–IX) और ठोस ज्यामिति (पुस्तकें XI–XIII) को व्यवस्थित रूप से संगठित करती है। परिभाषाओं, अभिधारणाओं और सामान्य धारणाओं से आरंभ कर, यूक्लिड प्रदर्शित करते हैं कि स्वयंसिद्ध सिद्धांतों से तार्किक प्रगति द्वारा ज्ञान की पूरी संरचना कैसे निर्मित की जा सकती है।

Elements की तार्किक संरचना—परिभाषाओं के बाद अभिधारणाएँ, सामान्य धारणाएँ, प्रतिज्ञप्तियाँ और प्रमाण—समस्त विज्ञानों में कठोर तर्क का प्रामाणिक प्रतिरूप बनी। यह संरचना केवल शिक्षणात्मक नहीं है; वह ऐसे कार्यप्रणालीगत दृष्टिकोण को मूर्त करती है जिसमें निश्चितता प्राधिकार अथवा अनुभवजन्य संचय से नहीं, क्रमबद्ध निगमन से उत्पन्न होती है।

समीक्षा प्रति

यांत्रिकी, वास्तुकला और अभियांत्रिक तर्क पर प्रभाव *Elements* का प्रभाव गणित से आगे जाता है। दो सहस्राब्दियों से अधिक समय तक उसने तार्किक चिंतन के मानक परिचय का कार्य किया और दार्शनिकों, वैज्ञानिकों तथा अभियंताओं ने समान रूप से उसका अध्ययन किया। संरचनात्मक यांत्रिकी पर उसका प्रभाव प्रत्यक्ष और परोक्ष दोनों है: प्रत्यक्षतः यूक्लिडीय ज्यामिति संरचनात्मक रूप के लिए आवश्यक स्थानिक संबंधों, अनुपातों और आकृतियों के गुणों के विश्लेषण के साधन देती है; परोक्षतः अभिगृहीतीय विधि ने अभियंताओं को समस्याएँ स्पष्टतः सूत्रबद्ध करने, व्यवस्थित रूप से आगे बढने और परिणामों को निश्चितता से स्थापित करने का प्रशिक्षण दिया।

अल्बर्ती और पल्लादियो जैसे पुनर्जागरणकालीन वास्तुकारों ने अपने भवनों में सामंजस्यपूर्ण संबंध स्थापित करने के लिए यूक्लिडीय अनुपातों का प्रयोग किया। न्यूटन ने अपनी *Principia* के निरूपण को स्पष्टतः यूक्लिडीय पूर्ववृष्टांत पर आधारित किया। बीसवीं शताब्दी तक *Elements* बाइबिल के बाद दूसरी सर्वाधिक मुद्रित पुस्तक थी और उसके एक हजार से अधिक संस्करण थे। अतः उसकी विरासत केवल ज्यामितीय ज्ञान का निकाय नहीं, बल्कि चिंतन की पद्धति—अभिगृहीतों द्वारा संरचना, तार्किक प्रगति द्वारा स्पष्टता और प्रमाण द्वारा निश्चितता—है, जो अभियांत्रिक व्यवहार की आधारशिला बनी हुई है।

6.2.4 आर्किमिडीज़ (c. 287–212 BCE)

आर्किमिडीज़ का जन्म सिसिली के प्रमुख यूनानी नगर सिराक्यूज़ में हुआ, और कुछ वृत्तांतों के अनुसार उनका संबंध उसके शासक राजा हीरोन II से था। उनके पिता फ़िडियास खगोलविद् थे, जिनके विषय में अन्यथा कुछ ज्ञात नहीं। किसी समय आर्किमिडीज़ अलेक्ज़ेंड्रिया गए, जहाँ उन्होंने यूक्लिड के उत्तराधिकारियों से अध्ययन किया और स्थायी बौद्धिक मैत्रियाँ स्थापित कीं। उनके अनेक ग्रंथ अलेक्ज़ेंड्रिया के गणितज्ञों को संबोधित हैं, जिनमें सामोस के कोनोन, पेलूसियम के डोसिथियस और महान पुस्तकालय के प्रमुख बहुज्ञ एराटोस्थनीज़ सम्मिलित थे। आर्किमिडीज़ सिराक्यूज़ लौटे और राजकीय संरक्षण का लाभ लेते हुए ज्यामिति, यांत्रिकी तथा द्रवस्थैतिकी की समस्याओं पर काम करते हुए अपना कार्यजीवन वहीं बिताया।

प्राचीन स्रोत आर्किमिडीज़ को तन्मय चिंतक के आदर्यरूप में चित्रित करते हैं—गणितीय मनन में इतने लीन कि भोजन की उपेक्षा करते और उन्हें स्नानागार तक खींचकर ले जाना पडता, जहाँ वे अपनी त्वचा पर लगे तेल में भी आरेख बनाते रहते। उत्प्लावकता का सिद्धांत खोजने पर स्नान से “यूरेका!” पुकारते हुए बाहर कूदने की प्रसिद्ध कथा—कथिततः हीरोन के लिए बने मुकुट में स्वर्ण की पूरी मात्रा होने की जाँच करते समय—दो शताब्दियों बाद लिखने वाले विट्रुवियस में पहली बार मिलती है। कथा शब्दशः सत्य हो अथवा नहीं, वह आर्किमिडीज़ की विधि के एक अनिवार्य पक्ष को पकडती है: भौतिक अंतर्दृष्टि और गणितीय प्रदर्शन की अंतःक्रिया।

मृत्यु, स्मृति और स्वयं चुनी विरासत उनकी मृत्यु किंवदंती बन गई। 212 BCE में दीर्घ घेराबंदी के बाद—जिसे प्लूटार्क के अनुसार आर्किमिडीज़ द्वारा अभिकल्पित युद्ध-मशीनों ने विलंबित किया—मार्सेलस के अधीन रोमन सेना ने सिराक्यूज़ पर अधिकार किया तो एक सैनिक ने एक वृद्ध व्यक्ति को बालू में ज्यामितीय आकृतियाँ बनाते पाया। कहा जाता है कि आर्किमिडीज़ ने कहा, “मेरे वृत्तों को बाधित मत करो,” और वहीं उनकी हत्या कर दी गई। प्रसिद्ध गणितज्ञ से मिलने की आशा रखने वाले मार्सेलस दुखी हुए और सम्मानपूर्ण अंत्येष्टि की व्यवस्था की। डेढ शताब्दी बाद सिराक्यूज़ आए सिसरो ने कब्र को वनस्पतियों से ढका और उपेक्षित पाया; उसकी पहचान केवल उत्कीर्ण गोले और बेलन से हुई जिन्हें आर्किमिडीज़ ने रखने का अनुरोध किया था—इन आकृतियों के आयतनों को जोडने वाले उस प्रमेय का स्मारक जिसे वे अपनी सर्वोत्तम उपलब्धि मानते थे।

युक्तिसंगत यांत्रिकी के आधार सिराक्यूज़ के आर्किमिडीज़ (Archimedes and Heath, 1897) युक्तिसंगत यांत्रिकी के संस्थापक हैं, जिन्होंने स्थैतिकी और द्रवस्थैतिकी को गणितीय विज्ञानों के रूप में स्थापित किया। उनकी उपलब्ध कृतियाँ—जिनमें *On the Equilibrium of Planes*, *On Floating Bodies*, *On the Sphere and Cylinder* और *Method of Mechanical Theorems* सम्मिलित हैं—गणितीय कठोरता को भौतिक अंतर्दृष्टि से ऐसे ढंग से जोडती हैं जिसकी बराबरी वैज्ञानिक क्रांति तक नहीं हुई।

On the Equilibrium of Planes में आर्किमिडीज़ उत्तोलक के नियम को प्रथम सिद्धांतों से सिद्ध करते और गुरुत्व-केंद्र की संकल्पना विकसित करते हैं; वे त्रिभुजों, समांतर चतुर्भुजों और परवलयिक खंडों सहित विविध समतलीय आकृतियों के लिए उसका स्थान निर्धारित करने की विधि प्रदर्शित करते हैं। ये परिणाम संरचनात्मक तंत्रों में बल और आघूर्ण के आधुनिक विश्लेषण का आधार बनते हैं। अभिगृहीत बताने, परिणामों को गणितीय रूप से व्युत्पन्न करने और उन्हें भौतिक विन्यासों पर लागू करने की उनकी विधि ने सैद्धांतिक यांत्रिकी का प्रतिमान स्थापित किया।

समीक्षा प्रति

द्रवस्थैतिकी, स्थिरता और यांत्रिक विधि *On Floating Bodies* उत्प्लावकता के विज्ञान का आरंभ करती है और सिद्ध करती है कि तरल में निमज्जित पिंड पर विस्थापित तरल के भार के बराबर ऊर्ध्वमुखी बल लगता है। जहाज़ के ढाँचे से निमज्जित नींव तक, तरलों से अंतःक्रिया करने वाले संरचनात्मक तंत्रों को समझने के लिए यह कृति अनिवार्य है। आर्किमिडीज़ ने उत्प्लवित पिंडों की स्थिरता का भी अन्वेषण किया और वे शर्तें निर्धारित कीं जिनमें विस्थापित होने पर वे साम्यावस्था में लौटते हैं—यह स्थिरता-विश्लेषण में प्रारंभिक और उल्लेखनीय रूप से परिष्कृत योगदान था।

प्रसिद्ध पेलिम्प्सेस्ट में 1906 में पुनःखोजे जाने तक लुप्त *Method* प्रकट करती है कि कठोरता से प्रमाणित करने से पहले गणितीय परिणाम खोजने के लिए आर्किमिडीज़ ने यांत्रिक तर्क का प्रयोग कैसे किया। खोज और प्रदर्शन का यह स्पष्ट पृथक्करण निगमनात्मक ढाँचे में भौतिक अंतर्दृष्टि की सृजनात्मक भूमिका को प्रकाशित करता है। यह कार्यप्रणालीगत प्रतिरूप—गणितीय प्रमाण का मार्गदर्शन करती भौतिक अंतर्दृष्टि—संरचनात्मक अभियांत्रिक व्यवहार का आधार बना।

6.2.5 पर्गा के अपोलोनियस (c. 262–190 BCE)

अपोलोनियस का जन्म एशिया माइनर के दक्षिणी तट पर पाम्फिलिया के यूनानी नगर पर्गा में हुआ। युवावस्था में वे अलेक्ज़ेंड्रिया गए, जहाँ उन्होंने यूक्लिड के उत्तराधिकारियों के साथ अध्ययन किया और म्यूज़ियोन की गणितीय परंपराएँ आत्मसात कीं। प्राचीन स्रोत संकेत देते हैं कि उन्होंने पर्गामम में भी समय बिताया, जिसका पुस्तकालय अलेक्ज़ेंड्रिया का प्रतिद्वंद्वी था और जिसके अत्तालिद राजा विद्वानों को सक्रिय संरक्षण देते थे। इन विरल तथ्यों से आगे उनके जीवन के विषय में लगभग कुछ ज्ञात नहीं—कोई प्रसंग शेष नहीं, कोई व्यक्तित्व नहीं उभरता और उनकी तिथियाँ भी उनके द्वारा उद्धृत तथा बाद में उन्हें उद्धृत करने वाले गणितज्ञों से परोक्षतः अनुमानित हैं।

हमारे पास उपलब्ध जीवनीपरक अंतर्दृष्टि लगभग पूर्णतः उनकी उत्कृष्ट कृति *Conics* की आठ पुस्तकों के आरंभिक पत्रों से आती है। ये समर्पण-पत्र हेलेनिस्टिक विद्वत्ता के पत्राचार-संजालों में अंतःस्थापित गणितज्ञ को प्रकट करते हैं: अपोलोनियस पर्गामम के यूडेमस को संबोधित करते, टिप्पणी के लिए प्रारूप भेजते, रचना में विलंब के लिए क्षमा माँगते और नौक्रेटीज़ नामक आगंतुक के लिए अलेक्ज़ेंड्रिया में शीघ्रता से तैयार किए गए पहले संस्करण का उल्लेख करते हैं। वे संस्करणों के बीच पर्याप्त संशोधन का वर्णन करते और सावधान तार्किक क्रम पर बल देते हैं, जिससे निरूपण के प्रति अत्यंत सजग व्यवस्थित कार्यकर्ता का संकेत मिलता है। वे अपोलोनियस नामक एक पुत्र का भी उल्लेख करते हैं, जिसे यूडेमस की मृत्यु के बाद की पुस्तकें समर्पित की गईं।

***Conics* और वक्र रूपों की ज्यामिति** अपोलोनियस प्राचीन काल में “महान ज्यामितिज्ञ” के रूप में जाने जाते थे—ऐसी उपाधि जिसने असाधारण गणितज्ञों के युग में भी उन्हें विशिष्ट किया। उनकी *Conics* (Perga, 1896) शास्त्रीय प्राचीन काल में शंकु-परिच्छेदों का सर्वाधिक परिष्कृत निरूपण है; उसने पहले की सभी कृतियों को पीछे छोड़ा और लगभग दो सहस्राब्दियों तक निर्णायक बनी रही। आठ पुस्तकों में (जिनमें से सात उपलब्ध हैं) अपोलोनियस दीर्घवृत्त, परवलय और अतिपरवलय—शंकु को समतल द्वारा काटने से बने वक्रों—का व्यवस्थित अन्वेषण करते हैं। उन्होंने आज भी प्रयुक्त अधिकांश शब्दावली प्रस्तुत की और इन वक्रों के नाम संदर्भ-रचना के सापेक्ष “न्यूनता,” “समानता” और “अधिकता” के ज्यामितीय संबंधों से व्युत्पन्न किए।

Conics की उपलब्धि केवल गुणों की सूची बनाने में नहीं, बल्कि वक्र रूपों का एकीकृत ज्यामितीय सिद्धांत स्थापित करने में है। अपोलोनियस ने एकल निगमनात्मक ढाँचे में व्यासों, स्पर्शरेखाओं, अभिलंबों और अनंतस्पर्शियों को जोड़ने की विधियाँ विकसित कीं; मेनैक्मस के पहले के परिणामों का विस्तार और व्यवस्थापन करते हुए उन्होंने पूर्णतः नई प्रतिज्ञप्तियाँ भी प्रस्तुत कीं।

यांत्रिकी, वास्तुकला और संरचनात्मक रूप तक प्रसारण यद्यपि *Conics* की संकल्पना शुद्ध ज्यामिति की कृति के रूप में हुई थी, उसकी अंतर्दृष्टियाँ संरचनात्मक रूप की बाद की गणितीय समझ के लिए आधारभूत सिद्ध हुईं। अपोलोनियस द्वारा विस्तार से अध्ययन किया गया परवलयिक वक्र एकसमान क्षैतिज भार के अधीन लचीली रेखा की ज्यामिति को शासित करता है और बाद में स्वभार वहन करने वाले मेहराबों के विश्लेषण में केंद्रीय बना। दीर्घवृत्त अनेक गुंबद-निर्माणों की ज्यामिति का आधार है, जबकि संबंधित शांकव रूप वॉल्टों और अन्य वक्र चिनाई-तंत्रों में दिखाई देते हैं।

चिनाई-संरचनाओं में प्रणोद-रेखाएँ और बल-पथ उन वक्रों का अनुसरण करते हैं जिनके ज्यामितीय गुणों को अपोलोनियस ने उनका यांत्रिक महत्त्व समझे जाने से सदियों पहले अभिलक्षित किया था। पुनर्जागरणकालीन वास्तुकारों, प्रारंभिक आधुनिक

समीक्षा प्रति

सिद्धांतकारों और बाद के संरचनात्मक अभियंताओं ने वक्र रूपों तथा उनके भार-वितरण के विश्लेषण में अपोलोनियस की ज्यामिति का अंतर्निहित तथा स्पष्ट रूप से प्रयोग किया।

6.3 अभियांत्रिकी, मशीनें और ज्ञान का प्रसारण

यह अनुभाग *मशीनों* से उनके संबंध तथा यांत्रिक ज्ञान की व्यावहारिक अभिव्यक्ति और प्रसार द्वारा एकीकृत योगदानकर्ताओं को एकत्र करता है। उनके कार्य ने वर्णन, वर्गीकरण और चित्रण के साथ ग्रंथों तथा आरेखों द्वारा तकनीकों के प्रसारण पर बल दिया। सामान्य सूत्र अभियांत्रिक ज्ञान का ऐसी *संहिता*बद्ध, शिक्षणीय और पुनरुत्पाद्य वस्तु के रूप में उद्भव है।

6.3.1 मार्कस विट्रुवियस पोलियो, c. 80–70 BCE – 15 BCE के बाद

विट्रुवियस के जीवन के विषय में निश्चित रूप से बहुत कम ज्ञात है और हमारे पास उपलब्ध जानकारी लगभग पूर्णतः उनके ग्रंथ में बिखरी आत्मकथात्मक टिप्पणियों से आती है। उन्होंने जूलियस सीज़र के अधीन सैन्य अभियंता के रूप में सेवा की और बैलिस्टा तथा स्कॉर्पियोनेस सहित प्रक्षेपास्त्र-मशीनों के निर्माण और अनुरक्षण के लिए उत्तरदायी थे। घेराबंदी-उपकरण के इस अनुभव ने उन्हें तनाव, मरोड़ और प्रक्षेप्य गति की यांत्रिकी का प्रत्यक्ष ज्ञान दिया—ऐसी व्यावहारिक समझ जिसने उनकी बाद की सैद्धांतिक चर्चाओं को सूचित किया। सीज़र की हत्या के बाद विट्रुवियस ने ऑगस्टस के अधीन शाही सेवा जारी रखी, यद्यपि उनकी भूमिका घटती प्रतीत होती है। वे फ़ानुम फ़ोर्तुने (आधुनिक फ़ानो) में बेसिलिका के निर्माण का पर्यवेक्षण करने का उल्लेख करते हैं—एकमात्र भवन जिसे वे अपना अभिकल्प बताते हैं। ग्रंथ की रचना तक विट्रुवियस वृद्ध हो चुके थे और ऑगस्टस की बहन ऑक्टेविया के हस्तक्षेप से प्राप्त पेंशन पर जीवनयापन कर रहे थे। वे स्मारकों के स्थान पर विद्वत्ता द्वारा अपनी विरासत स्थापित करने के इच्छुक व्यक्ति की चिंता के साथ लिखते हैं, और ऑगस्टस को समर्पण में विनय का असंदिग्ध स्वर है। विट्रुवियस का महत्त्व उनके भवनों में नहीं है—जिनमें से कोई शेष नहीं—बल्कि प्राचीन काल के एकमात्र पूर्ण वास्तुकलात्मक ग्रंथ De architectura में है।

De Architectura विट्रुवियस की *De Architectura* (वास्तुकला पर दस पुस्तकें) (Vitruvius and Morgan, 1914), लगभग 25 BCE में लिखी गई, शास्त्रीय प्राचीन काल से बचा एकमात्र पूर्ण वास्तुकलात्मक ग्रंथ है। यह रोमन निर्माण-व्यवहार के लगभग प्रत्येक पक्ष को समेटता है: नगर-नियोजन, निर्माण-सामग्री, मंदिर-निर्माण, सार्वजनिक और घरेलू वास्तुकला, जलापूर्ति, धूपघड़ियाँ तथा मशीनरी।

सर्वाधिक प्रसिद्ध रूप से विट्रुवियस ने उत्तम वास्तुकला के तीन मूलभूत गुण बताए: *firmitas* (संरचनात्मक सुदृढता), *utilitas* (उपयोगिता) और *venustas* (सौंदर्य)—ऐसे सिद्धांत जो वास्तुकलात्मक और संरचनात्मक चिंतन के लिए आज भी आधारभूत हैं। निर्माण-विधियों, सामग्री-गुणों और अनुपाती तंत्रों के उनके वर्णनों ने पुनर्जागरणकालीन वास्तुकारों को शास्त्रीय व्यवहार की प्रमुख झलक दी। अल्बर्ती, पल्लादियो और उनके उत्तराधिकारियों ने विट्रुवियस से व्यापक प्रेरणा ली और उनका प्रभाव बो-आर्ट शिक्षा के विकास द्वारा बीसवीं शताब्दी तक बना रहा।

विट्रुवियस की केंद्रीयता इस पुस्तक के लिए विट्रुवियस का महत्त्व इतना आधारभूत है कि उनके जीवन, लेखन और प्रभाव का तीन अलग अध्यायों में परीक्षण किया गया है: प्रस्तुत अध्याय, §3.2.4.1, और §15.2.1।

6.3.2 अलेक्ज़ेंड्रिया के हीरो (fl. c. 62 CE)

हीरो के जीवन की तिथियाँ लंबे समय तक भ्रम का विषय थीं और अनुमान तीन शताब्दियों में फैले थे। प्रश्न तब सुलझा जब ओटो नॉयगेबॉयर ने देखा कि हीरो की *Dioptra* चंद्रग्रहण के एकसाथ प्रेक्षण द्वारा रोम और अलेक्ज़ेंड्रिया के बीच दूरी निर्धारित करने की विधि बताती है—और दिया गया उदाहरण March 13, 62 CE के ग्रहण के अनुरूप है। इससे हीरो प्रथम शताब्दी में, नीरो, सेनेका और प्लिनी द एल्डर के समकालीन के रूप में निश्चित होते हैं। इस कालानुक्रमिक आधार से आगे उनके जीवन का लगभग कुछ भी पुनर्निर्मित नहीं किया जा सकता। उनका नाम यूनानी मूल का संकेत देता है, किंतु इस काल का अलेक्ज़ेंड्रिया पूर्णतः विश्वनागरिक था और वे मिस्री अथवा मिश्रित वंश के हो सकते थे।

समीक्षा प्रति

हीरो म्यूज़ियोन से संबद्ध थे, यद्यपि उस संस्था के औपचारिक सदस्य के रूप में अथवा स्वतंत्र शिक्षक के रूप में—यह अस्पष्ट है। उनके लेख एक व्यावहारिक शिक्षक का संकेत देते हैं, जो सैद्धांतिक सुरुचि की अपेक्षा विद्यार्थियों और व्यावसायिकों को उपयोगी ज्ञान देने से अधिक सरोकार रखते थे। उन्होंने शिल्पकारों और अभियंताओं के लिए सुलभ प्राविधिक यूनानी में रचना की, और उनकी कृतियों में युक्तियों के निर्माण के विस्तृत निर्देश हैं—आर्किमिडीज़ अथवा अपोलोनियस की कठोर गणितीय शैली से स्पष्ट विरोध।

कृतियों की व्यापकता और यांत्रिक शिक्षण प्राचीन स्रोत हीरो को अनेक ग्रंथों का श्रेय देते हैं, जिनमें से कई यूनानी अथवा अरबी अनुवाद में उपलब्ध हैं। उनका विस्तार उल्लेखनीय था। *Pneumatica* वायु, जल और वाष्प से चलने वाली युक्तियों की सूची देती है, जिनमें ऐओलिपाइल (आद्य प्रतिक्रिया टर्बाइन) और स्वचालित मंदिर-द्वार सम्मिलित हैं। *Automata* स्वचालित नाट्य-मशीनों का वर्णन करती है। *Dioptra* सर्वेक्षण-यंत्रों का निरूपण करती है, जबकि *Catoptrica* दर्पणों और परावर्तन पर विचार करती है। प्राचीन काल और उसके बाद हीरो की प्रतिष्ठा मुख्यतः इन प्रतिभाशाली तंत्रों पर आधारित रही, जिनके कारण उन्हें गंभीर गणितज्ञ की अपेक्षा खिलौनों तथा नाट्य-चमत्कारों का निर्माता कहकर कुछ उपेक्षापूर्ण रूप से अभिलक्षित किया गया।

यांत्रिकी, सरल मशीनें और अभियांत्रिक व्यवहार अलेक्ज़ेंड्रिया के हीरो ने (Alexandria, 1851) सरल मशीनों, द्रवचालित तंत्रों और वायवीय युक्तियों के व्यवस्थित निरूपण द्वारा यांत्रिक सिद्धांतों के व्यावहारिक अनुप्रयोग को आगे बढाया। प्रथम शताब्दी CE में रोमन अलेक्ज़ेंड्रिया में सक्रिय हीरो आर्किमिडीज़ की गणितीय यांत्रिकी और अनुप्रयुक्त अभियांत्रिकी के बीच निर्णायक स्थान रखते हैं।

मुख्यतः अरबी अनुवाद में परिरक्षित उनकी *Mechanica* ने पाँच सरल मशीनों—उत्तोलक, घिरनी, पच्चर, पेंच तथा पहिया और धुरी—के विस्तृत विश्लेषण द्वारा आर्किमिडीज़ की स्थैतिकी को परिष्कृत किया। हीरो ने प्रदर्शित किया कि इन तत्त्वों को संयुक्त मशीनों में कैसे जोडा जा सकता है और यांत्रिक लाभ के परिकलन की प्रक्रियाएँ दीं। उन्होंने सीमित बल से भारी भार चलाने, प्रेस के अभिकल्प और उत्तोलन-युक्तियों के निर्माण जैसी व्यावहारिक समस्याओं का समाधान किया—ये निर्माण और संरचनात्मक व्यवहार से प्रत्यक्षतः प्रासंगिक समस्याएँ थीं।

वायविकी, स्वचालित यंत्र और प्रसारण *Pneumatica* ने दाब के अधीन वायु और जल के यांत्रिक व्यवहार का अन्वेषण किया और साइफ़न, फव्वारे, ऐओलिपाइल तथा गिरते जल अथवा गरम वायु से चलने वाले स्वचालित यंत्रों सहित एक सौ से अधिक युक्तियों का वर्णन किया। यद्यपि इनमें से अनेक युक्तियाँ धार्मिक अनुष्ठानों अथवा मनोरंजन के प्रयोजन से थीं, अंतर्निहित सिद्धांत—दाब-संचरण, वायु की प्रत्यास्थता और तापीय ऊर्जा का यांत्रिक गति में रूपांतरण—बाद की अभियांत्रिकी की केंद्रीय संकल्पनाओं का पूर्वाभास देते थे।

हीरो ने सर्वेक्षण (*Dioptra*), प्रकाषेपास्त्र-विज्ञान (*Belopoeica*) और क्षेत्रमिति (*Metrica*) पर भी लिखा और इस प्रकार प्राचीन प्राविधिक ज्ञान का विस्तार प्रदर्शित किया। उनकी कृतियाँ बाइज़ेंटाइन तथा इस्लामी विद्वानों द्वारा जियोवानी बतिस्ता देला पोर्ता और साइमन स्टेविन जैसे पुनर्जागरणकालीन अभियंताओं तक पहुँचीं तथा यांत्रिक तंत्रों के युक्तिसंगत अभिकल्प के पूर्वदृष्टांत स्थापित किए।

6.3.3 इब्न अल-हैथम (c. 965–1040 CE)

अबू अली अल-हसन इब्न अल-हसन इब्न अल-हैथम का जन्म बसरा में हुआ, जो उस समय दक्षिणी इराक के बूयिद प्रदेशों में वाणिज्य और विद्या का प्रमुख केंद्र था। उन्होंने धर्मविज्ञान, गणित और प्राकृतिक दर्शन की व्यापक शिक्षा प्राप्त की तथा कुछ समय अपने नगर में प्रशासनिक पद संभाला। एक आत्मकथात्मक अनुच्छेद में वे धार्मिक संप्रदायों के परस्पर-विरोधी दावों से बढते मोहभंग का वर्णन करते हैं—प्रत्येक संप्रदाय सत्य पर अपने अनन्य अधिकार के प्रति आश्वस्त था—और निश्चित ज्ञान के मार्ग के रूप में अरस्तू के लेखन की ओर मुडने का उल्लेख करते हैं। इस बौद्धिक परिवर्तन ने प्रदर्शन और अनुभवजन्य परीक्षण पर आधारित व्यवस्थित अन्वेषण के प्रति उनकी स्थायी प्रतिबद्धता को आकार दिया।

मिस्र, नील परियोजना और उत्पादक एकांत इब्न अल-हैथम की महत्त्वाकांक्षा उन्हें फ़ातिमी ख़लीफ़ा अल-हाकिम के शासनकाल में मिस्र ले गई। कहा जाता है कि उन्होंने नील की वार्षिक बाढ को नियंत्रित कर सकने का दावा किया था, किंतु नदी का सर्वेक्षण करने और अस्वान के निकट प्राचीन द्रवचालित कार्यों के अवशेषों का परीक्षण करने पर उन्होंने अनुभव किया कि परियोजना उनके साधनों से परे थी। ख़लीफ़ा की कुख्यात अनिश्चितता से भयभीत होकर उन्होंने पागलपन का अभिनय किया

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और 1021 में अल-हाकिम की मृत्यु तक गृहबंदी में रहे। इस आरोपित एकांत और अपनी मुक्ति के बाद के वर्षों में इब्न अल-हैथम ने असाधारण कृति-निकाय रचा। बाद के स्रोत उन्हें प्रकाशिकी और खगोल-विज्ञान से ज्यामिति तथा संख्या-सिद्धांत तक के विषयों पर दो सौ से अधिक ग्रंथों का श्रेय देते हैं।

प्रकाशिकी, यांत्रिकी और प्रयोगात्मक कार्यक्रम लैटिन पाश्चात्य जगत में अल्हाज़ेन के नाम से ज्ञात इब्न अल-हैथम (Haytham, 1989) अपनी *Kitab al-Manazir* (प्रकाशिकी की पुस्तक) के लिए सर्वाधिक प्रसिद्ध हैं, जिसने ज्यामितीय विश्लेषण से संयुक्त व्यवस्थित प्रयोग द्वारा दृष्टि और प्रकाश की समझ को रूपांतरित किया। दृष्टि के पहले के उत्सर्जन-सिद्धांतों को अस्वीकार कर उन्होंने प्रदर्शित किया कि वस्तुओं से परावर्तित प्रकाश के आँख में प्रवेश करने पर दृष्टि उत्पन्न होती है; उन्होंने छिद्रों, लेंसों और परावर्तक पृष्ठों वाले नियंत्रित प्रयोगों द्वारा इस दावे का समर्थन किया।

यद्यपि उनकी प्रतिष्ठा मुख्यतः प्रकाशिकी पर आधारित है, इब्न अल-हैथम ने संरचनात्मक विश्लेषण से प्रत्यक्षतः प्रासंगिक यांत्रिक समस्याओं का भी समाधान किया। उन्होंने भार के अधीन बल-संचरण और दृढ पिंडों के व्यवहार का परीक्षण किया तथा विश्लेषण किया कि संबद्ध तंत्रों में बल कैसे प्रसारित होते हैं। उनके लेख संघात और गति के अंतरण सहित संघात-यांत्रिकी का निरूपण करते हैं और उन्होंने नत तलों पर पिंडों तथा प्रक्षेप्यों की गति का अन्वेषण किया—ये विषय बाद में प्रारंभिक आधुनिक यांत्रिकी के केंद्र में आने वाले थे।

विधि, प्रसारण और संरचनात्मक महत्त्व इब्न अल-हैथम का सर्वाधिक स्थायी योगदान संभवतः कार्यप्रणालीगत है। उन्होंने आग्रह किया कि भौतिक सिद्धांत व्यवस्थित प्रेक्षण, नियंत्रित प्रयोग और गणितीय वर्णन पर आधारित हों तथा अनुभव से असमर्थित अटकलबाज़ी-आधारित तर्क को अस्वीकार किया जाए। इस अनुशासित दृष्टिकोण ने वैज्ञानिक विधि का ऐसा प्रारूप दिया जो बाद में भौतिकी और अभियांत्रिक विश्लेषण दोनों के लिए मूलभूत बना। गणितीय प्रतिरूपों के प्रेक्षणीय यथार्थ के अनुरूप होने पर उनका आग्रह संरचनात्मक यांत्रिकी के ज्ञानमीमांसात्मक आधार में निहित है।

उन्होंने अपने अंतिम दशक काहिरा में, अल-अज़हर मस्जिद के निकट रहते हुए और गणितीय पांडुलिपियों की प्रतिलिपियाँ बनाकर जीविका चलाते हुए बिताए। लगभग 1040 में वहीं उनकी मृत्यु हुई। उनकी कृतियाँ बारहवीं और तेरहवीं शताब्दियों में लैटिन में अनूदित हुईं और रोजर बेकन, विटेलो तथा अंततः केप्लर जैसे व्यक्तियों के माध्यम से प्रकाशिकी की परंपरा को आकार देते हुए यूरोपीय विज्ञान पर गहरा प्रभाव डाला।

6.3.4 अबू रेहान अल-बिरूनी (973–1048)

अबू रेहान अल-बिरूनी (973–1048) (Al-Bīrūnī, 1910) मध्यकालीन इस्लामी जगत के सर्वाधिक मौलिक वैज्ञानिक मस्तिष्कों में से एक थे और उन्होंने खगोल-विज्ञान, गणित, भूगोल तथा यांत्रिकी में महत्त्वपूर्ण योगदान किए। ख्वारज़्म (वर्तमान उज़्बेकिस्तान) में जन्मे अल-बिरूनी ने अपने कार्यजीवन का अधिकांश भाग ग़ज़ना के महमूद के राजदरबार में बिताया और भारत के अभियानों में सुल्तान के साथ गए; इन अभियानों से उनकी विश्वकोशीय *Kitab fi Tahqiq ma li-l-Hind* (भारत में विद्यमान वस्तुओं की पुस्तक) उत्पन्न हुई, जो तुलनात्मक सांस्कृतिक और वैज्ञानिक अध्ययन की अग्रणी कृति थी।

Kitab fi Tahqiq ma li-l-Hind यांत्रिकी में अल-बिरूनी के योगदान घनत्व-मापन और विशिष्ट भारों के उनके व्यवस्थित दृष्टिकोण पर केंद्रित हैं। उन्होंने धातुओं और रत्नों के विशिष्ट गुरुत्व निर्धारित करने के लिए परिशुद्ध यंत्रों का अभिकल्प तथा निर्माण किया और ऐसे परिणाम प्राप्त किए जो आधुनिक मानों से अनुकूल तुलना करते हैं। उनकी द्रवस्थैतिक विधियों ने प्रयोगात्मक त्रुटि के स्रोतों पर सावधान ध्यान देते हुए आर्किमिडीज़ के सिद्धांतों का विस्तार किया और बाद के संरचनात्मक विश्लेषण के लिए कार्यप्रणालीगत पूर्वदृष्टांत स्थापित किए। उन्होंने पहचाना कि तुलाओं की साम्यावस्था को शासित करने वाले वही गणितीय संबंध विविध परिस्थितियों में सामग्रियों के व्यवहार पर लागू होते हैं।

अल-बिरूनी की व्यापक वैज्ञानिक कार्यप्रणाली—व्यवस्थित प्रेक्षण, परिमाणात्मक मापन और अनुभवजन्य आँकड़ों से सिद्धांत के समन्वय पर उनका आग्रह—ने सामग्री-व्यवहार के उन दृष्टिकोणों के विकास को प्रभावित किया जो संरचनात्मक अभियांत्रिकी में अनिवार्य बने। पर्वतीय प्रेक्षणों द्वारा पृथ्वी की त्रिज्या निर्धारित करने की प्रतिभाशाली विधि सहित उनके भू-मापीय मापनों ने गणितीय सिद्धांत को सावधान मापन से जोड़ने की शक्ति प्रदर्शित की—एक ऐसा प्रतिमान जिसे संरचनात्मक अभियंता बाद में भवनों और सेतुओं के विश्लेषण पर लागू करने वाले थे।

प्रारूप समीक्षा

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.3.5 अल-ख़ाज़िनी (fl. 1115–1130 CE)

अब्द अल-रहमान अल-ख़ाज़िनी बाइज़ेंटाइन यूनानी मूल के दास थे, जिन्हें सेल्जुक साम्राज्य के मर्व (वर्तमान तुर्कमेनिस्तान) लाया गया था; वहाँ अल-ख़ाज़िन नामक राजकोष अधिकारी उनका स्वामी था, जिससे उनका नाम व्युत्पन्न हुआ। उनके स्वामी ने उनकी बौद्धिक प्रतिभा पहचानी और उन्हें गणित तथा प्राकृतिक दर्शन की असाधारण शिक्षा दी। दासता-मुक्ति के बाद अल-ख़ाज़िनी ने मर्व में रहना चुना और स्वयं को विद्वत्ता के लिए समर्पित किया; कहा जाता है कि वे तपस्वी जीवन जीते थे और इस आधार पर सुल्तान की पत्नी द्वारा दिए गए एक हजार दीनार के बडे उपहार को अस्वीकार कर दिया कि उनकी सीमित आवश्यकताएँ रोटी के कुछ टुकडों से पहले ही पूरी हो जाती थीं।

प्रारंभिक बारहवीं शताब्दी में मर्व इस्लामी जगत के महान नगरों में से एक और विद्या का केंद्र था, जिसने एक शताब्दी पहले अल-बिरूनी को जन्म दिया था तथा खगोल-विज्ञान और परिशुद्ध विज्ञानों की सक्रिय परंपराएँ बनाए रखीं। अल-ख़ाज़िनी ने इसी परिवेश में कार्य किया; सेल्जुक राजदरबार में खगोलविद् के रूप में सेवा करते हुए उन्होंने सुल्तान संजर को समर्पित खगोलीय सारणियाँ (*zij*) तैयार कीं और उमर ख़य्याम के पहले के कार्य को परिष्कृत किया।

***Kitab Mizan al-Hikma* और भार-विज्ञान** अल-ख़ाज़िनी की प्रमुख वैज्ञानिक उपलब्धि लगभग 1121–1122 में पूर्ण *Kitab Mizan al-Hikma* (प्रज्ञा की तुला की पुस्तक) है। यह उल्लेखनीय ग्रंथ यांत्रिकी के सर्वाधिक परिष्कृत मध्यकालीन निरूपणों में से एक है और असाधारण विश्लेषणात्मक गहराई से साम्यावस्था, तुलाओं तथा द्रवस्थैतिकी का अन्वेषण करता है। सेल्जुक संरक्षण में कार्य करते हुए अल-ख़ाज़िनी ने यूनानी यांत्रिक ज्ञान—विशेषतः आर्किमिडीज़, यूक्लिड और मेनेलाउस की कृतियों—को मौलिक जाँच तथा परिष्कृत प्रयोगात्मक व्यवहार से संश्लेषित किया।

ग्रंथ दंड-तुला और तुला पर व्यापक ध्यान देता है, जिसमें गुरुत्व-केंद्रों और साम्यावस्था के लिए आवश्यक परिशुद्ध शर्तों का विस्तृत विश्लेषण सम्मिलित है। अल-ख़ाज़िनी ने पदार्थों के विशिष्ट गुरुत्व निर्धारित करने की व्यवस्थित प्रक्रियाएँ विकसित कीं और धातुओं, बहुमूल्य पत्थरों तथा तरलों सहित लगभग पचास सामग्रियों की सारणियाँ संकलित कीं। इन मापनों की परिशुद्धता लगभग पाँच शताब्दियों तक पार नहीं की गई।

द्रवस्थैतिकी, प्रयोगात्मक परिशुद्धता और विधि अल-ख़ाज़िनी ने उत्प्लावकता के आर्किमिडीज़ के सिद्धांतों का विस्तार करते हुए परीक्षण किया कि किसी पिंड का आभासी भार परिवेशी माध्यम के घनत्व के साथ कैसे बदलता है। उन्होंने पहचाना कि पिंड का भार इस पर निर्भर करता है कि उसे वायु, जल अथवा किसी अन्य तरल में मापा गया है—यह अंतर्दृष्टि निमज्जित अथवा आंशिक रूप से निमज्जित तंत्रों के विश्लेषण से प्रत्यक्षतः प्रासंगिक है। द्रवस्थैतिक तुलाओं के उनके वर्णन घनत्व के सूक्ष्म अंतरों का पता लगाने में सक्षम यंत्र प्रकट करते हैं और प्रारंभिक आधुनिक प्रयोगात्मक विज्ञान की परिशुद्ध तुलाओं का पूर्वाभास देते हैं।

यद्यपि आधुनिक अर्थ में संरचनात्मक तत्त्वों से संबद्ध नहीं, *Mizan al-Hikma* भौतिक प्रथम सिद्धांतों, सावधान प्रयोग और परिमाणात्मक मापन पर आधारित यांत्रिक तर्क के पूर्व-आधुनिक दृष्टिकोण का उदाहरण प्रस्तुत करती है। इस संदर्भ में अल-ख़ाज़िनी आर्किमिडीज़ की द्रवस्थैतिकी और प्रारंभिक आधुनिक यांत्रिकी की बाद की प्रयोगात्मक परंपराओं के बीच निर्णायक कडी हैं।

प्रारंभिक बारहवीं शताब्दी के बाद अल-ख़ाज़िनी ऐतिहासिक अभिलेख से लुप्त हो जाते हैं। उनकी मृत्यु की तिथि अथवा परिस्थितियाँ ज्ञात नहीं हैं।

6.3.6 विलार दे ऑनकूर (fl. c. 1225–1250)

विलार के नाम वाली और अब फ़्रांस के राष्ट्रीय पुस्तकालय में परिरक्षित रेखाचित्र-पुस्तिका से अनुमानित जानकारी से परे उनके जीवन के विषय में कुछ ज्ञात नहीं। पांडुलिपि का एक अभिलेख उन्हें उत्तरी फ़्रांस में कंब्रे के निकट पिकार्डी के एक गाँव ऑनकूर का निवासी बताता है। स्वयं रेखाचित्र भ्रमणशील कार्यजीवन का संकेत देते हैं। इनमें लाओं, रेंस, शार्त्र और मो के गिरजाघरों तथा वॉसेल के सिस्टरसियन चर्च के रेखाचित्र हैं, जो तेरहवीं शताब्दी के फ़्रांस के निर्माण-स्थलों में व्यापक यात्रा दर्शाते हैं। एक पृष्ठ हंगरी की पच्चीकारी-योजना दिखाता है, जिससे संकेत मिलता है कि विलार की यात्राएँ उनके अपने क्षेत्र से बहुत आगे तक गईं।

विलार प्रधान राजमिस्त्री, वास्तुकार, संघ-लिपिक अथवा केवल शिक्षित प्रेक्षक थे—यह विद्वत्तापूर्ण विवाद का विषय

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बना हुआ है। रेखाचित्रों की असमान पुराविधिक परिष्कृति ने कुछ इतिहासकारों को उनकी व्यावसायिक स्थिति पर प्रश्न उठाने के लिए प्रेरित किया है, जबकि अन्य उनके हितों के विस्तार और ज्यामितीय चिंतन की सुसंगतता पर बल देते हैं।

विषयवस्तु, आरोपण और लेखकीयता की समस्या रेखाचित्र-पुस्तिका में वास्तुकलात्मक योजनाएँ और ऊँचाइयाँ; उडते प्रत्यालंबों तथा जालीदार पत्थरकारी सहित गोथिक निर्माण के विवरण; जल-चालित आरी और सतत-गति मशीन जैसी यांत्रिक युक्तियाँ; पत्थर काटने की ज्यामितीय योजनाएँ; तथा अमूर्त ज्यामितीय ढाँचों में घटाई गई मानव और पशु आकृतियाँ सम्मिलित हैं। बाद के हाथों ने पांडुलिपि में सामग्री जोडी, जिससे अलग-अलग पृष्ठों का आरोपण जटिल हुआ और विलार के अपने कार्य को बाद के परिवर्धनों से अलग करना कठिन हो गया।

एक तथ्य संदेह से परे है: पांडुलिपि गोथिक निर्माताओं में प्रसारित व्यावहारिक ज्ञान की दुर्लभ झलक देती है—ऐसा ज्ञान जो मुख्यतः संघों और कार्यशालाओं में मौखिक रूप से प्रसारित होता और विरले ही लिखा जाता था। इस संदर्भ में यह रेखाचित्र-पुस्तिका असाधारण है: वह तर्क की उन विधाओं को परिरक्षित करती है जिनका अन्यथा कोई प्रलेखीय चिह्न न बचता।

ज्यामिति, अनुभवजन्य अभिकल्प और गोथिक संरचनात्मक व्यवहार विलार दे ऑनकूर की *Portfolio* (De Honnecourt, 1858) मध्यकालीन अनुभवजन्य अभिकल्प विधियों की दुर्लभ और अमूल्य अंतर्दृष्टि देती है। चर्मपत्र के तैंतीस पत्तों (MS Fr 19093) और लगभग 250 रेखाचित्रों से बनी यह पांडुलिपि गोथिक वास्तुकला के आधार में स्थित व्यावहारिक ज्यामिति और निर्माणात्मक कल्पना का प्रलेखन करती है।

अनुपात और अभिन्यास के लिए विलार की ज्यामितीय प्रक्रियाएँ विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण हैं। मध्यकालीन निर्माता *ad quadratum* और *ad triangulum* जैसी तकनीकों पर निर्भर थे तथा योजना, ऊँचाई और अनुप्रस्थ-काट को जोडने के लिए घूर्णित वर्गों, अंतर्लिखित बहुभुजों तथा अनुपाती रचनाओं का प्रयोग करते थे। ये विधियाँ संख्यात्मक परिकलन के बिना पत्थर काटने, वॉल्टों, शिखरकों और जालीदार पत्थरकारी के अभिन्यास तथा जटिल स्थानिक तंत्रों के समन्वय को शासित करती थीं।

औपचारिक यांत्रिकी से पहले संरचनात्मक अंतर्दृष्टि रेखाचित्र-पुस्तिका दर्शाती है कि विश्लेषणात्मक स्थैतिकी के उद्भव से बहुत पहले ज्यामिति, अनुपात और संचित अनुभव ने संरचनात्मक व्यवहार की समझ को कैसे निर्देशित किया। गोथिक निर्माताओं ने बल अथवा साम्यावस्था के औपचारिक सिद्धांतों के बिना असाधारण संरचनात्मक उपलब्धियाँ—विशाल स्थानों को आच्छादित करने वाले पतले पाषाण-वॉल्ट, प्रणोद को भूमि तक मोडने वाले प्रत्यालंबन-तंत्र और अभूतपूर्व ऊँचाई के मीनार—प्राप्त कीं। उनकी सफलता अनुभवजन्य नियमों, ज्यामितीय नियंत्रण और पहले सफल रही विधियों की सामूहिक स्मृति पर निर्भर थी।

विलार की रेखाचित्र-पुस्तिका शिल्प-ज्ञान और संरचनात्मक अंतर्दृष्टि के इस संलयन का प्रमाण है। वह संरचनात्मक विश्लेषण के इतिहास के ऐसे संक्रमण-क्षण को पकडती है जहाँ ज्यामिति ने अमूर्त गणित के स्थान पर निर्माण-व्यवहार में अंतःस्थापित क्रियात्मक साधन के रूप में कार्य किया।

6.4 वास्तुकला, अनुपात और मानवतावादी रूप

यह समूह ऐसी परंपरा को प्रतिबिंबित करता है जिसमें *संरचना*, *अनुपात* और वास्तुकलात्मक रूप अविभाज्य थे। यांत्रिक समझ परिकलन द्वारा व्यक्त होने के स्थान पर सामंजस्य के नियमों, शास्त्रीय पूर्ववृष्टांत और मानवतावादी आदर्शों में अंतर्निहित थी। औपचारिक संरचनात्मक विश्लेषण के अस्तित्व से बहुत पहले स्थिरता और भार-संचरण को रूप तथा अनुपात द्वारा समझा गया।

6.4.1 लिओन बतिस्ता अल्बर्ती (1404–1472)

अल्बर्ती[2] का जन्म जेनोआ में, राजनीतिक दुर्भाग्य के कारण निर्वासन में रह रहे समृद्ध फ़्लोरेंटाइन व्यापारी लोरेन्ज़ो अल्बर्ती के अवैध पुत्र के रूप में हुआ। उन्होंने असाधारण विस्तार की मानवतावादी शिक्षा प्राप्त की—पादुआ में शास्त्रीय विषय और बोलोन्या में धर्म-विधि का अध्ययन किया, जहाँ गणित तथा प्राकृतिक विज्ञान भी पढे। कहा जाता है कि अध्ययन के तनाव ने

[2] अल्बर्ती के योगदानों के विषय में अधिक जानकारी के लिए §15.2.2.1 देखें।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

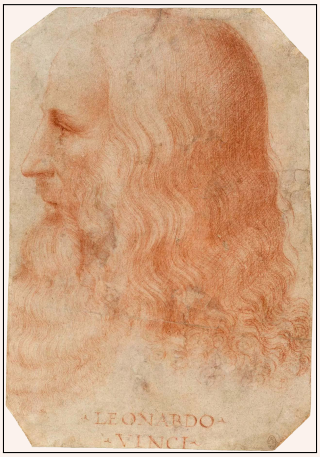
बीसवें दशक की प्रारंभिक आयु में उनके स्वास्थ्य को तोड़ दिया, जिसके बाद वे दृश्य कलाओं और वास्तुकला की ओर अधिक मुड़े। 1428 में अल्बर्ती परिवार पर प्रतिबंध हटाया गया और लिओन बतिस्ता ने पहली बार फ़्लोरेंस देखा—ब्रुनेलेस्की के उठते गुंबद से ऐसा साक्षात्कार जिसने उनके बाद के व्यवसाय को आकार दिया।

अल्बर्ती ने धर्मादेश लिया और रोम में पोपीय संक्षेपकार का पद प्राप्त किया; इस आरामदायक पद ने आय दी और विद्वत्ता के लिए समय छोड़ा। उन्होंने कभी विवाह नहीं किया, उन्नति के अवसरों के बावजूद सादगी से रहे और अपने युग के प्रमुख मानवतावादियों, कलाकारों तथा राजकुमारों में पत्राचारियों का व्यापक वृत्त बनाया। समकालीनों ने युवावस्था में उन्हें पुष्ट, कुशल घुड़सवार और व्यायामी तथा असाधारण स्मृति वाला बताया। वसारी लिखते हैं कि वे व्यवहार में शिष्ट और ज्ञान में उदार थे तथा चित्रकारों, मूर्तिकारों और वास्तुकारों को स्वतंत्रता से परामर्श देते थे।

उनके वास्तुकलात्मक कार्यादेश कम किंतु प्रभावशाली थे: रिमिनी का तेम्पियो मालातेस्तियानो, फ़्लोरेंस में सांता मारिया नोवेला का अग्रभाग और पलात्सो रुचेल्लाई तथा मांटुआ में सैन सेबास्तियानो और संत’आन्द्रेआ के चर्च। ब्रुनेलेस्की के विपरीत अल्बर्ती ने स्वयं निर्माण का पर्यवेक्षण नहीं किया, बल्कि ऐसे अभिकल्प दिए जिन्हें अन्य लोगों ने निष्पादित किया; इस प्रकार उन्होंने वास्तुकार की प्रधान निर्माता के स्थान पर बौद्धिक रचयिता की आधुनिक संकल्पना स्थापित की। चित्रकला और मूर्तिकला से कूटलेखन, नैतिक दर्शन तथा गृह-प्रबंधन तक के विषयों पर ग्रंथ रचने के बाद रोम में उनकी मृत्यु हुई।

6.4.2 लियोनार्दो दा विंची (1452–1519)

लियोनार्दो दा विंची, चित्र 6.1, का जन्म April 15, 1452 को फ़्लोरेंस गणराज्य के छोटे नगर विंची में हुआ। वे फ़्लोरेंटाइन नोटरी सेर पिएरो और कातेरीना नामक ग्रामीण महिला के अवैध पुत्र थे। अवैध *संतान* होने के कारण लियोनार्दो अपने पिता का नाम अथवा व्यावसायिक प्रतिष्ठा उत्तराधिकार में नहीं पा सकते थे; उनका संबोधन *da Vinci* केवल “विंची से” अर्थ रखता है और उपनाम के स्थान पर स्थान-सूचक है। मुख्यतः पैतृक संबंधियों द्वारा पाले गए लियोनार्दो को पढ़ने, लिखने और अंकगणित की प्राथमिक शिक्षा मिली, किंतु विद्वानों की भाषा लैटिन का बहुत कम औपचारिक शिक्षण मिला। मानवतावादी शिक्षा से यह बहिष्करण विरोधाभासी रूप से लाभकारी सिद्ध हुआ। शास्त्रीय रूढ़ियों और अरस्तूवादी भाष्यों से अनियंत्रित लियोनार्दो ने पाठ्य प्राधिकार के स्थान पर प्रत्यक्ष प्रेक्षण, रेखांकन और तुलना पर आधारित ज्ञान-दृष्टिकोण विकसित किया। लियोनार्दो सर्वतोमुखी प्रतिभा के पुनर्जागरणकालीन आदर्श के सर्वोच्च उदाहरण थे और उनकी टिप्पण-पुस्तिकाएँ संरचनात्मक यांत्रिकी के ऐसे अग्रणी अध्ययन प्रतिबिंबित करती हैं जिन्होंने अपने समय से सदियों आगे के विकासों का पूर्वाभास दिया। उनकी विशिष्ट दर्पण-लिपि में लिखे रेखाचित्रों और टिप्पणियों के हजारों पृष्ठों वाली ये पुस्तकें प्राकृतिक दर्शन तथा अभियांत्रिकी के लगभग प्रत्येक क्षेत्र की जाँच का प्रलेखन करती हैं।



चित्र 6.1: लियोनार्दो दा विंची

समीक्षा प्रति

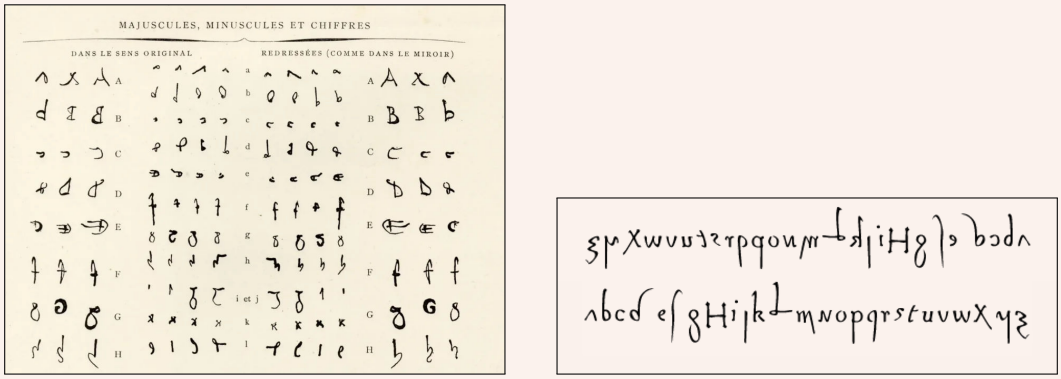
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कार्यशाला-प्रशिक्षण और कला तथा यांत्रिकी का संलयन लगभग चौदह वर्ष की आयु में लियोनार्दो को फ़्लोरेंस में उस काल के सर्वाधिक सिद्ध कलाकारों और अभियंताओं में से एक आंद्रेआ देल वेरोक्यो के यहाँ प्रशिक्षु बनाया गया। वहाँ उन्हें रेखांकन, चित्रकला, मूर्तिकला, धातुविज्ञान, प्रारूपण और यांत्रिक अभिकल्प का प्रशिक्षण मिला। वेरोक्यो की कार्यशाला पारंपरिक कलाकार के स्टूडियो की अपेक्षा ऐसे संकर परिवेश के रूप में कार्य करती थी जिसमें कलात्मक उत्पादन, अभियांत्रिक प्रयोग और सामग्री-व्यवहार निकटता से अंतर्गुंफित थे।

इस प्रारंभिक अनुभव ने लियोनार्दो की आजीवन अन्वेषण-विधि को आकार दिया: अत्यधिक दृश्य, आरेखीय और संश्लेषणात्मक। कार्यशाला ने वास्तव में आद्य-research laboratory के रूप में कार्य किया और लियोनार्दो में कलात्मक, यांत्रिक तथा प्राकृतिक समस्याओं को एक सामान्य जाँच-प्रक्रिया के रूपांतरों की तरह देखने की आदत डाली।

निजी जीवन और लेखन-अभ्यास व्यापक रूप से माना जाता है कि लियोनार्दो समलैंगिक थे। 1476 में उन पर और कई अन्य लोगों पर गुमनाम रूप से लौंडेबाज़ी का आरोप लगाया गया, जो उस समय फ़्लोरेंस में अपराध था। यद्यपि प्रमाण के अभाव में वे दोषमुक्त हुए, उन्होंने कभी विवाह नहीं किया और महिलाओं में रोमानी रुचि का कोई प्रलेखित संकेत नहीं दिया। उनकी टिप्पण-पुस्तिकाओं में कभी-कभी पुरुष-स्नेह का संकेत देने वाली परोक्ष टिप्पणियाँ हैं, किंतु अन्यथा व्यक्तिगत विषय बहुत कम अभिलिखित हैं।

बाएँ हाथ से और मुख्यतः कलम तथा स्याही से काम करने वाले लियोनार्दो ने दर्पण-लेखन की विशिष्ट आदत विकसित की—दाएँ से बाएँ उलटी लिपि में लिखना। इसे स्याही फैलने से रोकने, स्मृति-अनुशासन के रूप में अथवा गोपनीयता के साधन के रूप में अपनाया गया था—यह अनिश्चित है। विशिष्ट वर्तनी और संक्षेपों से संयुक्त इस अभ्यास ने उनकी टिप्पण-पुस्तिकाओं को पढ़ना कठिन बनाया और बाद में उनकी अस्पष्टता में योगदान दिया, चित्र 6.2। कुछ विद्वानों ने सुझाव दिया है कि यह दुर्बोधता ऐसे युग में अपारंपरिक विचारों को सुरक्षित रखने की इच्छा भी दर्शाती है जब बौद्धिक नवीनता संदेह उत्पन्न कर सकती थी।



(a) कूट-वाचन (b) वर्णमाला

चित्र 6.2: लियोनार्दो के दर्पण-लेखन की व्याख्या

मिलान: संरक्षण, प्रेक्षण और प्राकृतिक नियम लियोनार्दो के सर्वाधिक उत्पादक व्यावसायिक वर्ष लगभग 1482 से लुदोविको स्फ़ोर्त्सा के संरक्षण में मिलान में बीते। वहाँ उन्होंने *Last Supper* जैसी स्मारकीय कलाकृतियाँ रचीं और साथ ही राजदरबारी मनोरंजन, सैन्य दुर्गों तथा द्रवचालित तंत्रों के अभिकल्पक के रूप में सेवा की। इस काल की उनकी टिप्पण-पुस्तिकाएँ—जिन्हें बाद में *Codex Atlanticus* और *Codex Madrid* जैसे संग्रहों में संयोजित किया गया—जाँच का आश्चर्यजनक विस्तार प्रलेखित करती हैं: शरीररचना, यांत्रिकी, प्रकाशिकी, द्रवचालन, उड़ान और नगरीय रूप।

लियोनार्दो मानते थे कि प्रकृति खोजे जा सकने वाले नियमों का पालन करती है, किंतु बाद के वैज्ञानिकों के विपरीत उन्होंने इन नियमों को गणितीय निगमन द्वारा नहीं खोजा। इसके स्थान पर उन्होंने सूक्ष्म दृश्य प्रेक्षण, अनुरूपता और बार-बार रेखांकन द्वारा उनका अनुसरण किया। उनका कार्य प्राधिकार पर आधारित मध्यकालीन प्राकृतिक दर्शन और प्रारंभिक आधुनिक विज्ञान को अभिलक्षित करने वाले अनुभवजन्य अन्वेषण के बीच संक्रमण-क्षण को चिह्नित करता है।

> “गति समस्त जीवन का कारण है।”

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यह विश्वास उनकी टिप्पण-पुस्तिकाओं को प्राण देता है; उनमें घूमते गियर, बहता जल, नमित होती धरनें, जोड़दार संधियाँ और विच्छेदित पेशियाँ हैं—सभी ऐसी स्पष्टता से चित्रित जो कलात्मक अंतर्दृष्टि और यांत्रिक तर्क को मिला देती है।

अभियांत्रिक दृष्टि और संरचनात्मक अंतर्दृष्टि लियोनार्दो ने प्राविधिक परियोजनाओं की असाधारण व्यापकता की संकल्पना की: पेंच-चालित उड़ान-मशीनें, पैराशूट, कवचित वाहन, उत्तोलन-युक्तियाँ और घूमने वाले सेतु। इनमें से कुछ ही निर्मित हुए, किंतु उनका संकल्पनात्मक विस्तार उन्हें क्वात्रोचेंतो के पारंपरिक शिल्पकार की अपेक्षा कल्पनाशील अभियंता के अधिक निकट रखता है।

संरचनात्मक विश्लेषण से विशेष रूप से प्रासंगिक उनके सामग्री-सामर्थ्य, धरन-व्यवहार, मेहराब-क्रिया और रूप तथा भार के संबंध के अन्वेषण हैं। इन अध्ययनों में बाद की यांत्रिकी का गणितीय औपचारिकतावाद नहीं है, फिर भी वे उभरती जागरूकता प्रदर्शित करते हैं कि संरचनात्मक व्यवहार का अनुभवजन्य नियमों से नहीं, व्यवस्थित रूप से विश्लेषण किया जा सकता है। इस संदर्भ में लियोनार्दो गैलीलियो और सत्रहवीं शताब्दी में यांत्रिकी के गणितीकरण के निर्णायक अग्रदूत हैं।

सामग्री-सामर्थ्य और धरन-व्यवहार लियोनार्दो के संरचनात्मक अध्ययन अनुभवजन्य प्रेक्षण, प्रयोगात्मक परीक्षण और सैद्धांतिक अनुमान के संयोजन के लिए उल्लेखनीय हैं। उन्होंने सामग्री-सामर्थ्य का अन्वेषण किया और लोहे के तारों की तनन-क्षमता तथा काष्ठ-धरनों की विभंग-सामर्थ्य पर प्रयोग किए। उन्होंने धरन के आयामों और उसकी भार-वहन क्षमता के संबंध का अध्ययन किया तथा पहचाना कि नमन का प्रतिरोध चौड़ाई और गहराई के वर्ग, दोनों पर निर्भर करता है—ऐसी अंतर्दृष्टि जिसे एक शताब्दी से अधिक समय बाद गैलीलियो की *Two New Sciences* तक औपचारिक रूप नहीं मिला।

मेहराब, वॉल्ट और संरचनात्मक विफलता मेहराबों और वॉल्टों की उनकी जाँचें समान रूप से दूरदर्शी हैं। लियोनार्दो ने विश्लेषण किया कि मेहराब-संरचनाओं में भार कैसे वितरित होते हैं; पहचाना कि मेहराब “कभी नहीं टूटता यदि बाहरी चाप की जीवा भीतरी चाप को स्पर्श नहीं करती”; और मेहराब के रूप तथा प्रणोद के संबंध का अध्ययन किया। उन्होंने गुंबदों और दीवारों में दरारों के प्रतिरूपों का परीक्षण किया तथा चिनाई-संरचनाओं की विफलता की सहज समझ विकसित की। सैन्य दुर्गों, सेतुओं और मशीनों के उनके अभिकल्प संरचनात्मक सिद्धांतों की परिष्कृत समझ प्रदर्शित करते हैं।

जैवयांत्रिकी और संरचनात्मक अनुरूपता लियोनार्दो ने मानव शरीर की यांत्रिकी का भी अध्ययन किया और शरीर-रचनात्मक संरचनाओं तथा अभियांत्रिक तंत्रों—मेरुदंड स्तंभ के रूप में, भुजा उत्तोलक के रूप में और कंडरा केबलों के रूप में—की अनुरूपताएँ पहचानीं। इस जैवयांत्रिक परिप्रेक्ष्य ने संरचनात्मक क्रिया की उनकी समझ को समृद्ध किया। अपनी जाँचों में लियोनार्दो ने प्रेक्षण, प्रयोग और गणितीय अमूर्तन की एकता पहचानी तथा संरचनाओं के विज्ञान के लिए निर्णायक संकल्पनात्मक आधार निर्मित किया। यद्यपि उनकी टिप्पण-पुस्तिकाएँ 19th century तक अप्रकाशित रहीं, वे ऐसे मस्तिष्क का प्रलेखन करती हैं जो वैज्ञानिक क्रांति तक अतुलित परिष्कृति के स्तर पर संरचनात्मक समस्याओं से जुड़ा था।

कला, पूर्णता और चयनात्मक विरासत अपनी असाधारण प्रतिभा के बावजूद लियोनार्दो ने अपेक्षाकृत कम कृतियाँ पूर्ण कीं। वे प्रायः कार्यादेश अधूरे छोड़ देते थे—या तो पूर्णतावाद अथवा नई बौद्धिक समस्याओं के आकर्षण से प्रेरित। फिर भी उनकी पूर्ण कृतियाँ—जिनमें *Mona Lisa*, *Vitruvian Man* और *Last Supper* सम्मिलित हैं—स्थायी प्रतीक बनीं; वे केवल सौंदर्यात्मक नवाचार के लिए ही नहीं, बल्कि शरीररचना, अनुपात और स्थानिक संरचना के अपने एकीकरण के लिए भी उल्लेखनीय हैं।

फ्रांस में अंतिम वर्ष अपने अंतिम वर्षों में लियोनार्दो फ्रांस के राजा फ़्रांसिस I की सेवा में आए। 1516 में वे आम्बुवाज़ के निकट शातो द्यू क्लो ल्यूसे चले गए और “राजा के प्रधान चित्रकार, अभियंता और वास्तुकार” की मानद उपाधि प्राप्त की। 1519 में वहीं उनकी मृत्यु हुई और वे रेखाचित्रों तथा टिप्पणियों के हजारों पृष्ठ छोड़ गए। अनेक बिखर गए अथवा खो गए, किंतु अनेक सदियों बाद पुनः खोजे जाने के लिए बचे रहे।

उनकी मृत्यु ऐसे युग के अंत को चिह्नित करती है जिसमें एक व्यक्ति सार्वभौमिक ज्ञान का विश्वसनीय रूप से अनुसरण कर सकता था। उसके बाद वैज्ञानिक विशेषज्ञता के तीव्र विस्तार ने शीघ्र ही ऐसी व्यापकता को अप्राप्य बना दिया।

कोडेक्स, पृष्ठ और पांडुलिपि-विरासत *codex* (बहुवचन: *codices*) स्क्रॉल के विपरीत जिल्दबद्ध पांडुलिपि-खंड है। लियोनार्दो के कोडेक्सों में यांत्रिकी, ज्यामिति, चित्रकला, शरीररचना और अभियांत्रिकी तक फैले रेखाचित्र, टिप्पणियाँ तथा वर्णन हैं।

folio (बहुवचन: *folios*) पांडुलिपि के एक पत्ते को संदर्भित करता है। विषयवस्तु प्रायः अग्र और पृष्ठ, दोनों ओर होती है,

समीक्षा प्रति

यद्यपि केवल एक ओर संख्या दी जाती है। लियोनार्दो की अनेक पांडुलिपियाँ औपचारिक रूप से जिल्दबद्ध खंडों के स्थान पर ढीले एकत्रित पृष्ठों से बनी हैं।

सारणी 6.1 लियोनार्दो दा विंची को आरोपित प्रमुख उपलब्ध कोडेक्सों को उनके वर्तमान स्थान और विषयवस्तु सहित सूचीबद्ध करती है।

तालिका 6.1: लियोनार्दो दा विंची के कोडेक्स, (Vinci, 1938)

कोडेक्स	तिथि	स्थान	विषयवस्तु
		प्रमुख कोडेक्स	
Codex Atlanticus	c. 1478–1519	Biblioteca Ambrosiana, Milan	यांत्रिकी, ज्यामिति, उड़ान और सैन्य मशीनें।
Codex Arundel	c. 1480–1518	British Library, London	यांत्रिकी, प्रकाशिकी और ज्यामिति पर टिप्पणियाँ।
Codex Madrid I & II	c. 1490–1505	Biblioteca Nacional, Madrid	स्थैतिकी, यांत्रिकी, गियर और दुर्ग।
Codex Forster I–III	c. 1490–1505	Victoria and Albert Museum, London	द्रवचालन, भार और प्राकृतिक विज्ञान।
Codex Leicester (Hammer)	c. 1506–1510	निजी संग्रह	द्रवगतिकी, जीवाश्म, प्रकाश और खगोल-विज्ञान।
Codex Trivulzianus	c. 1487–1490	Trivulziana Library, Milan	शब्दावली-सूचियाँ और वास्तुकलात्मक अध्ययन।
Codex Ashburnham I & II	late 1400s	Institut de France, Paris	अन्य कोडेक्सों के खंड।
Codex on the Flight of Birds	c. 1505	Royal Library, Turin	पक्षियों की उड़ान और वायुगतिकी के अध्ययन।
Codex Urbinas	compiled c. 1570	Vatican Library	चित्रकला पर ग्रंथ (मरणोपरांत)।
		गौण और खंडित कोडेक्स	
Codex Windsor Collection	c. 1490–1510	Royal Collection, Windsor	शरीररचनात्मक और वैज्ञानिक रेखाचित्र।
Codex Vaticanus	c. 1480s–1490s	Vatican Library	गणितीय और वास्तुकलात्मक अध्ययन।
Codex Paris (A–E)	various	Institut de France, Paris	यांत्रिकी, प्रकाशिकी और ज्यामिति।
Codex C (Paris series)	c. 1500	Institut de France, Paris	स्थैतिकी और साम्यावस्था।
Codex R	c. 1503–1505	Institut de France, Paris	ज्यामिति, भार और शरीररचना।
Codex Sulbiate	late 1400s	अज्ञात / बिखरा हुआ	लघु वास्तुकलात्मक पांडुलिपि।

ये कोडेक्स सामूहिक रूप से लियोनार्दो दा विंची की वैज्ञानिक और अभियांत्रिक विरासत का केंद्रीय भाग हैं। कुछ अतिरिक्त गौण अथवा खंडित पांडुलिपियाँ विद्यमान हैं, किंतु यहाँ सूचीबद्ध पांडुलिपियाँ सर्वाधिक पूर्ण और व्यापक रूप से अध्ययित हैं। लियोनार्दो की टिप्पण-पुस्तिकाओं का सर्वाधिक व्यापक आधुनिक संकलन (Vinci, 1938) में दिया गया है।

लियोनार्दो के संरचनात्मक और वास्तुकलात्मक चिंतन का सचित्र सर्वेक्षण लियोनार्दो की प्रतिभा की व्यापकता को पकड़ने वाला एक उल्लेखनीय प्रकाशन (Istituto Geografico De Agostini, 1956) है। चूँकि लियोनार्दो ने कला और विज्ञान, दोनों की हमारी सामूहिक समझ को आकार देने में सहायता की—और इस पुस्तक के दो केंद्रीय विषयों (वास्तुकला और संरचनाएँ) पर सतत ध्यान दिया—मैं इस खंड का विशेष निरूपण करता हूँ: पहले निम्न सारांश द्वारा और फिर पाठक के लिए प्रासंगिक पृष्ठों को पुनरुत्पादित करके।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यह निर्णय मेरे सामान्य व्यवहार से अलग है। इस पुस्तक में मैंने केवल ऐसे चित्र सम्मिलित करने का ध्यान रखा है जिन्हें पाठ में व्यक्तिगत रूप से संदर्भित किया जा सके, और यह सुनिश्चित करने पर समान ध्यान दिया है कि उनका आकार पृष्ठ पर हावी न हो। किंतु लियोनार्दो दा विंची अलग हैं: यद्यपि उन्होंने हमें एक भी समीकरण नहीं दिया, उनके मस्तिष्क की पूर्ण मौलिकता चित्रण में विशेष निरूपण की अधिकारी है। इसी कारण जिज्ञासु पाठक के लिए मैं उनके रेखाचित्रों वाले पृष्ठों का पूरा अनुक्रम—पहले वास्तुकला पर, फिर संरचनाओं पर—(Istituto Geografico De Agostini, 1956) से पुनरुत्पादित करता हूँ। यद्यपि पृष्ठ में बैठाने के लिए आकार घटाया गया है, पाठ केवल आवर्धित करने पर सरलता से पढ़ा जा सकता है (अथवा पूर्ण स्रोत-प्रलेख डाउनलोड करने के लिए उद्धरण के पास PDF चिह्न पर क्लिक करके)।

संरचनात्मक अन्वेषक के रूप में लियोनार्दो (Istituto Geografico De Agostini, 1956) का “संरचनाओं का विज्ञान” भाग लियोनार्दो को उस विषय का प्रारंभिक, असामान्य रूप से आत्मचेतन अन्वेषक मानता है जिसे आज हम सामग्री-सामर्थ्य और संरचनात्मक व्यवहार कहते हैं; उनका दृष्टिकोण प्रयोग, अनुपाती तर्क और विफलता के सावधान परीक्षण पर आधारित था। यह भाग विकसित होते निर्माणात्मक रूपों को वैज्ञानिक और व्यावहारिक संकल्पनाओं के क्रमिक संचय से जोड़ते हुए आरंभ होता है और स्पष्टतः संरचनात्मक रूप के विशुद्ध शैलीगत के स्थान पर ऐतिहासिक-पराविधिक पठन को आमंत्रित करता है।

इस ढाँचे में लियोनार्दो की पांडुलिपि-टिप्पणियाँ सापेक्ष आयामों (ऊँचाई, मोटाई और अनुपात) के रूप में सामर्थ्य व्यक्त करने के प्रयासों तथा मशीनों और संरचनाओं द्वारा प्रतिरोध की जाने वाली माँगों से “मापनों और अनुपातों” को जोड़ने के प्रयत्नों के रूप में प्रस्तुत हैं। उदाहरणात्मक अनुच्छेद आलंबों और स्तंभों पर केंद्रित हैं: वे ऐसे नियम प्रस्तावित करते हैं (जो आधुनिक मानकों से कभी-कभी अपूर्ण हैं) जो क्षमता को ज्यामिति से जोड़ते हैं; इनमें अनुपाती प्रवृत्तियों को दृश्य बनाने के लिए वैचारिक प्रयोग और संख्यात्मक उदाहरण भी सम्मिलित हैं।

पुस्तक तत्त्वों को समूहित करने से संयुक्त क्रिया और दृढता/सामर्थ्य में वृद्धि के प्रति उनकी रुचि पर भी बल देती है; उदाहरणतः उनका कथन है कि एक साथ बाँधे सरकंडे अलग-अलग सरकंडों की तुलना में अनेक गुना भार वहन कर सकते हैं—दुर्बल सदस्यों को तंत्र में संयोजित करने के संरचनात्मक प्रभाव की प्रारंभिक अंतर्दृष्टि। धरनों और स्तंभों के साथ मेहराब आवर्ती संरचनात्मक वस्तु के रूप में दिखाई देते हैं (अध्ययन किए जाने वाले रूप और ऐसे स्थल, दोनों के रूप में जहाँ दरार और विभंग अंतर्निहित नियम प्रकट करते हैं); इससे यह व्यापक बिंदु पुष्ट होता है कि लियोनार्दो विफलता को केवल समस्या नहीं, सूचनाप्रद घटना मानते हैं।

अंततः संरचना-भाग तनन-परीक्षण के उपकरण की संकल्पना द्वारा लियोनार्दो की प्रयोगात्मक कल्पना को रेखांकित करता है: वे लोहे के तार पर नियंत्रित रूप से भार लगाने (भार के मापित परिवर्धनों का प्रयोग करते हुए), विविध लंबाइयों पर परीक्षण दोहराने और विफलता कहाँ/कैसे होती है यह लिखने की व्यवस्था प्रस्तावित करते हैं—जिसका स्पष्ट लक्ष्य पुनरावृत्त परीक्षणों से विविध सामग्रियों और विन्यासों में आलंब-सामर्थ्य का “नियम” सामान्यीकृत करना था।

वास्तुकार के रूप में लियोनार्दो (Istituto Geografico De Agostini, 1956) का वास्तुकला-भाग लियोनार्दो को मुख्यतः “आकस्मिक” वास्तुकलात्मक रुचि वाला चित्रकार मानने का विरोध करता है और तर्क देता है कि ऐसी विद्वत्ता प्रायः खंडित तथा एकांगी रही है, इसलिए उनके कार्य की एकता से चूकती है। इसके स्थान पर वह लियोनार्दो के वास्तुकलात्मक चिंतन को उनकी व्यापक अन्वेषण-अभ्यास से अविभाज्य मानता है: वे भवनों को मात्र शैलीगत अभ्यास नहीं, बल्कि प्रेक्षण, तुलना और शासक मानदंडों की खोज द्वारा समझी जाने वाली वस्तुओं के रूप में पढ़ते हैं।

पट्टिकाएँ और भाष्य रेखांकित करते हैं कि वे ठोस वास्तुकलात्मक तत्त्वों (चर्च की योजनाओं और आंतरिक भागों, अग्रभागों, गुंबदी योजनाओं, प्रासाद-मुखों और मीनारों) तथा अनुपात, स्थानिक संगठन और निर्मित पर्यावरण के नैतिक/युक्तिसंगत क्रम के अधिक सामान्य प्रश्नों के बीच कैसे चलते हैं। आवर्ती विषय वैध व्याख्यात्मक साधन के रूप में अनुरूपता पर लियोनार्दो की निर्भरता है: पाठ उल्लेख करता है कि मिलान गिरजाघर के *tiburio* (क्रॉसिंग-मीनार) के लिए विशिष्ट समाधान का समर्थन करते समय वे मानव की “भौतिक सुदृढता” के आधारभूत सिद्धांतों जैसे सिद्धांतों की दुहाई देते हैं; यह संकेत करता है कि संरचनात्मक शुद्धता और जैविक सुसंगति समानांतर नियमों से शासित हैं।

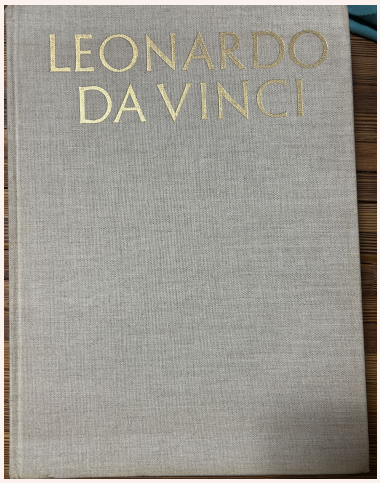
वास्तुकला-भाग यह भी आग्रह करता है कि केवल रेखाचित्र गिनना अथवा रूपांकनों की सूची बनाना वास्तविक व्याख्यात्मक प्रश्नों का उत्तर नहीं दे सकता; महत्त्व इस बात का है कि रेखाचित्र विकसित होती जाँच-पद्धति के भागों के रूप में कैसे कार्य करते हैं। वह इस पुराने विवाद का स्पष्ट निरूपण करता है—और उसे मुख्यतः अस्वीकार करता है—कि लियोनार्दो के वास्तुकलात्मक रेखाचित्र “केवल” संकल्पनात्मक थे: यद्यपि कुछ पत्रक प्रदर्शनात्मक “वास्तुकलात्मक संयोजनों” (स्थैतिकी

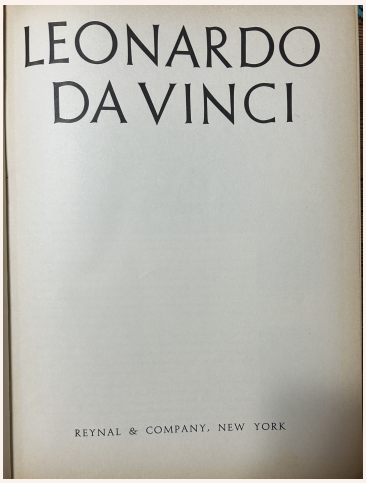
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

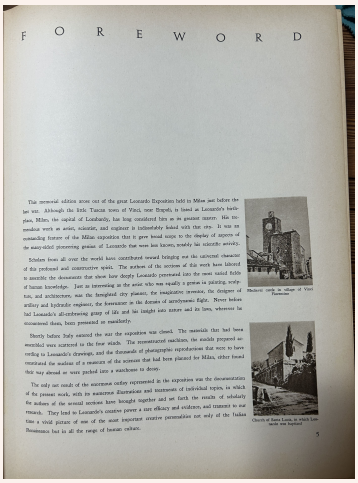
और सौंदर्यशास्त्र में परिणाम दर्शाते हुए) के रूप में पढ़े जा सकते हैं, भाष्य तर्क देता है कि मिलान गिरजाघर की सामग्री (तिबूरियो और गुंबद की समस्याओं) तथा अन्य प्रलेखित परियोजनाओं का सावधान अध्ययन इस गंभीर संदेह को हटाने के लिए पर्याप्त है कि लियोनार्दो वास्तुकलात्मक समस्याओं से प्राविधिक रूप से परिणामकारी ढंग से जुड़े थे।

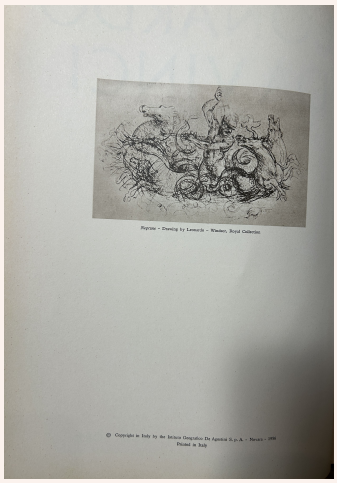
आख्यान आरोपण और “प्रभाव” की कथाओं के विषय में भी सावधान है, विशेषतः ब्रामांते के संदर्भ में: वह चेतावनी देता है कि सतही योजना-समानताओं से निकाले प्रत्यक्ष प्रभाव के निष्कर्ष प्रायः शीघ्रतापूर्ण हैं और आध्यात्मिक सहयोग के व्यापक दावों अथवा एक आचार्य की “श्रेष्ठता” को दूसरे के प्रभाव से समझाने के स्थान पर कालानुक्रमिक तथा संकल्पनात्मक विवेक की माँग करता है। इसके साथ लियोनार्दो का सूक्ष्म प्रलेखक का चित्र मिलता है: टिप्पणियाँ और उदाहरण मापनों, प्रेक्षणात्मक आँकड़ों के जानबूझकर संग्रह तथा अन्य विशेषज्ञों और पुस्तकों का सहारा लेने पर बल देते हैं; इससे संकेत मिलता है कि उनका वास्तुकलात्मक चिंतन अपने समय के लिए असामान्य रूप से अनुभवजन्य और सूचना-लोलुप कार्यप्रवाह पर आधारित था।

नगरीय आयाम भी दिखाई देता है—ऊँची सड़कों और संगठित नगरीय जिलों के साथ व्यवस्थित संचार तथा भवनों जैसी योजनाओं द्वारा—जो दर्शाता है कि यहाँ “वास्तुकला” भवन-प्रकारों से अवसंरचना और नगरीय रूप तक विस्तृत है। सामूहिक रूप से वास्तुकला और संरचना के भाग लियोनार्दो को कभी-कभी “भवनों के रेखाचित्र” बनाने वाले अभिकल्पक के रूप में नहीं, बल्कि ऐसे चिंतक के रूप में प्रस्तुत करते हैं जिनके लिए वास्तुकलात्मक रूप, संरचनात्मक आवश्यकता, मापन, अनुरूपता और प्रयोग एक सतत विधि के अंग हैं—और यहाँ चयनित पांडुलिपि-अंशों तथा पट्टिकाओं द्वारा पठनीय बनाए गए हैं जो अभियांत्रिक प्रश्नों (आलंब, धरन, गुंबद, मेहराब, नगरीय परिसंचरण) को वास्तुकलात्मक प्रश्नों से सतत संवाद में रखते हैं।





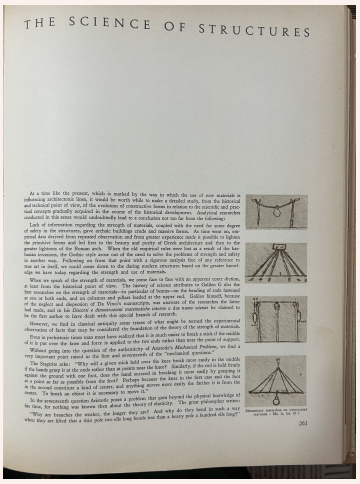


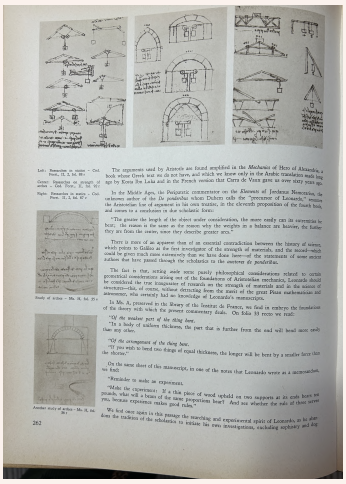


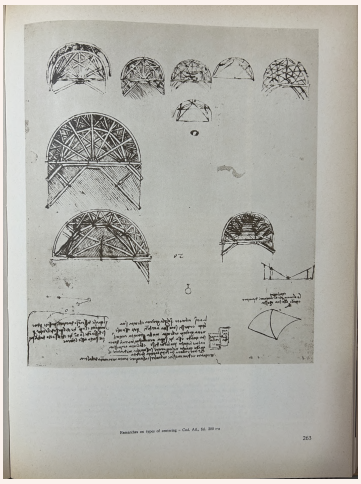
अप्रकाशित प्रति

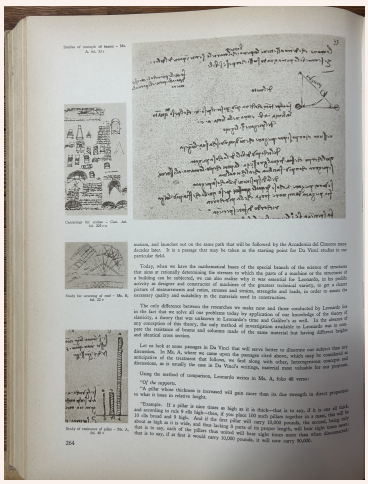
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

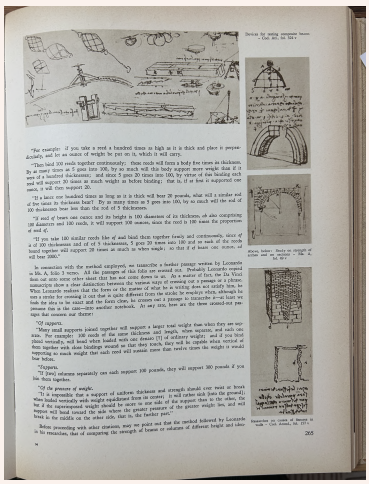
संरचनाओं का विज्ञान


THE SCIENCE OF STRUCTURES

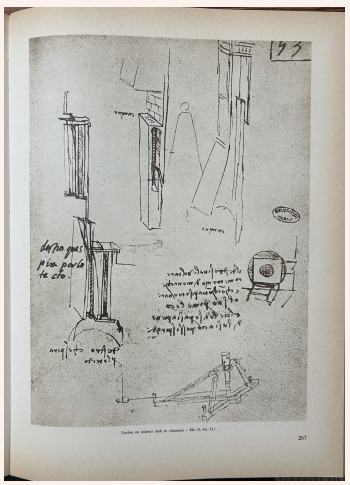


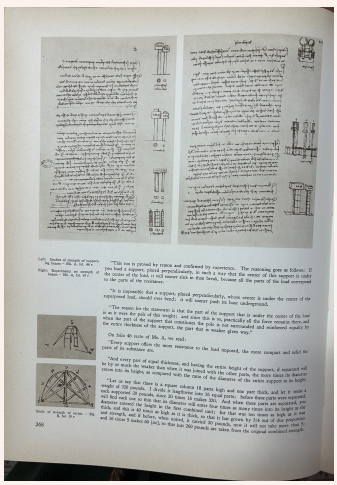


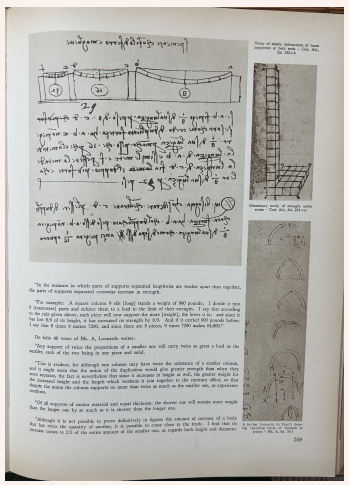






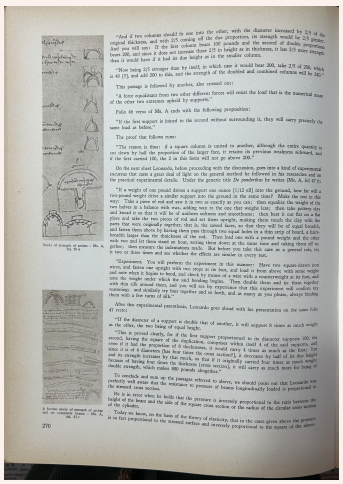


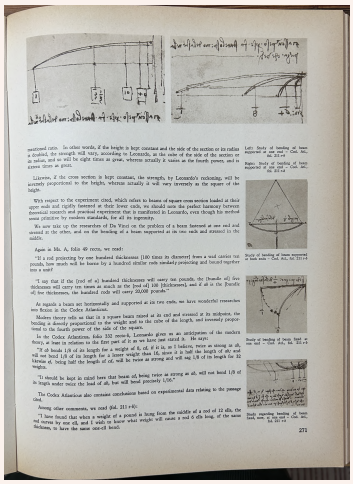


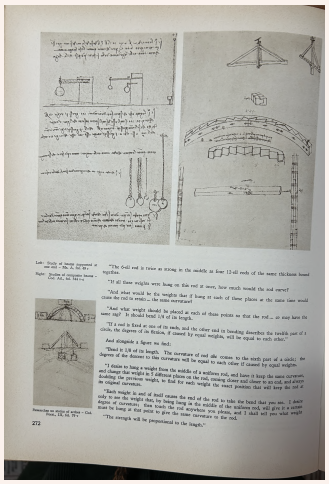


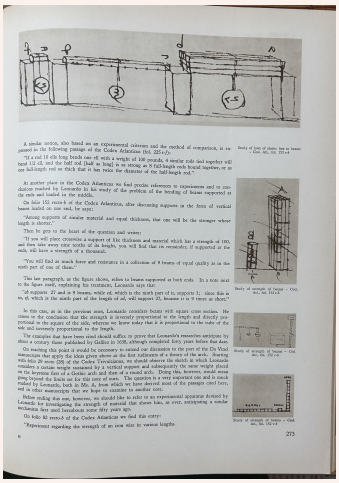
प्रारूप प्रतिकृति

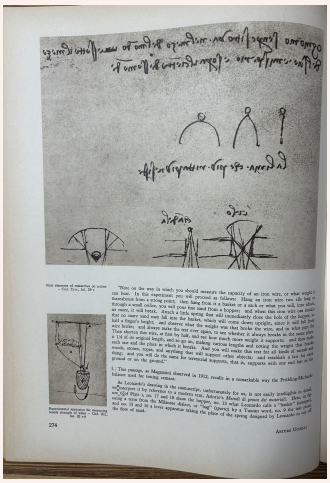
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

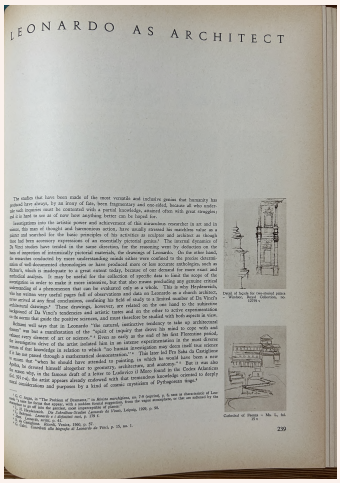




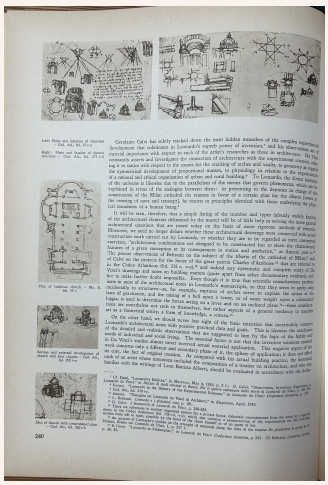


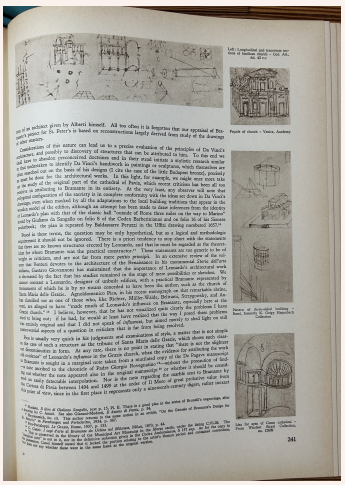


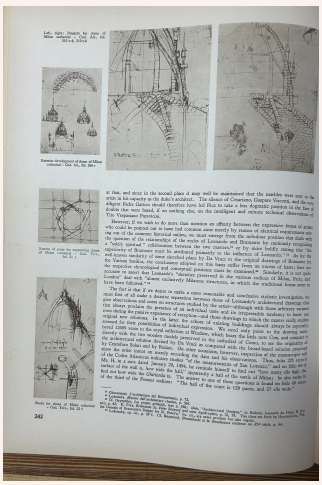




वास्तुकार

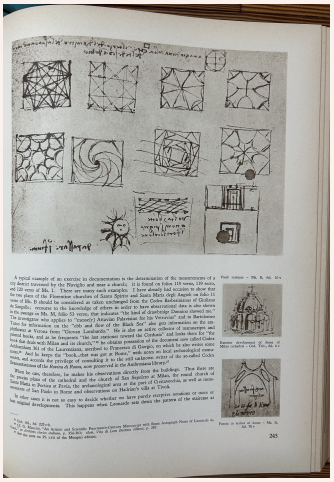


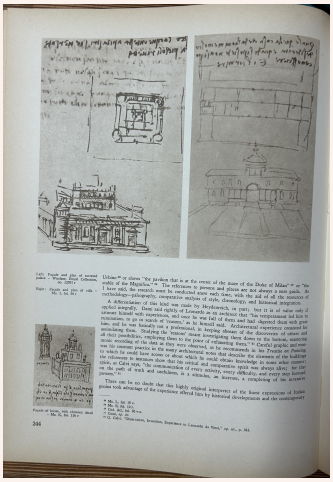




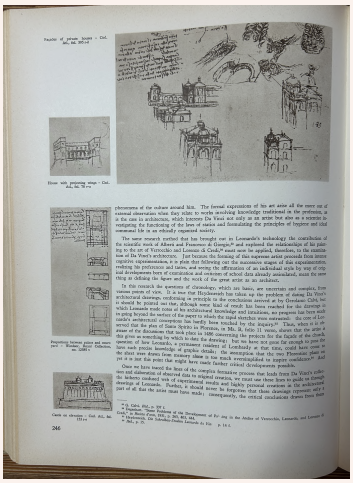
प्रारूप प्रकृतिमस

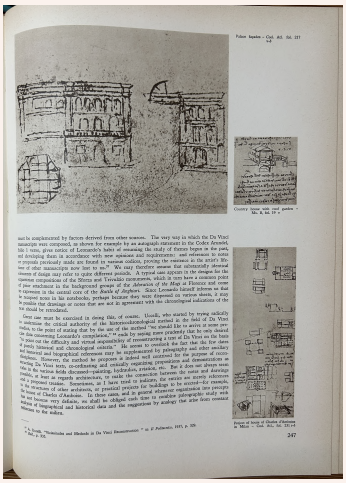
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

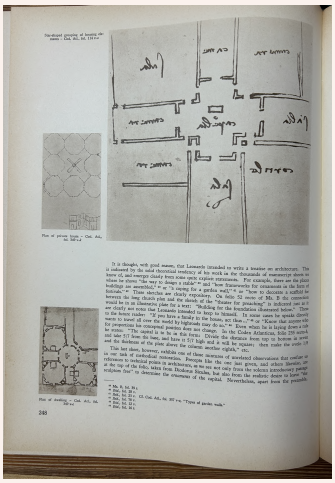


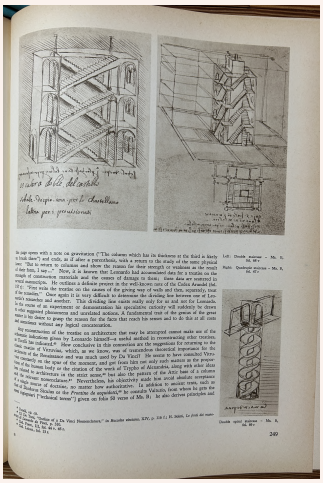


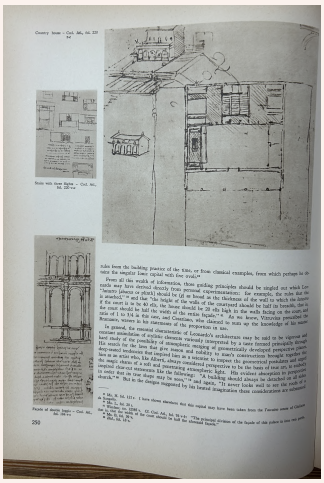


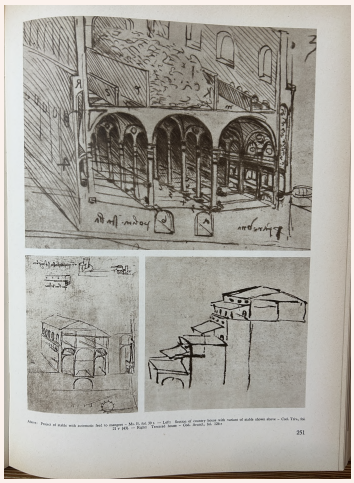




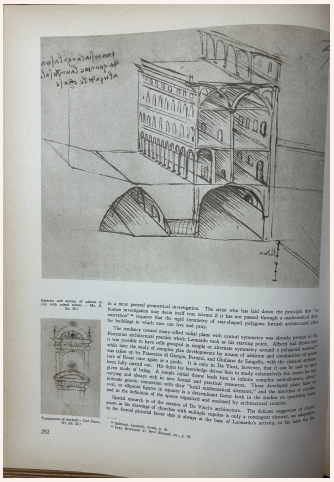


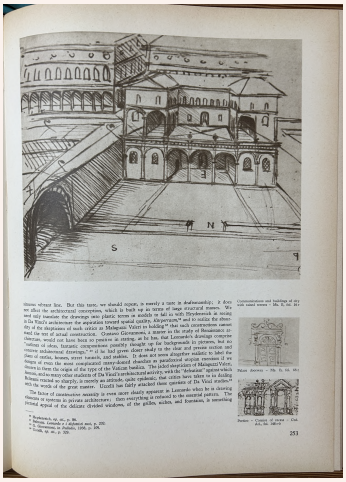


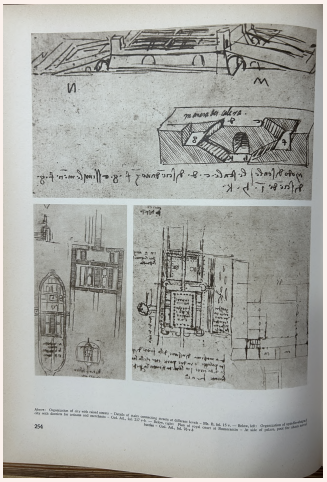


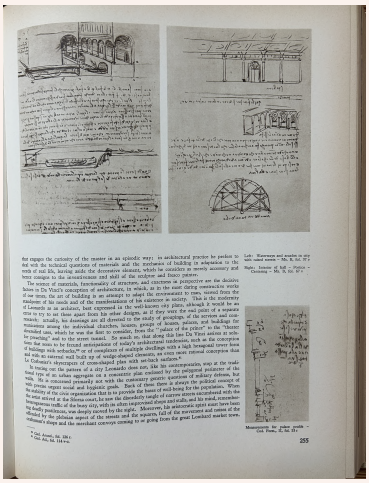


पुनर्वितरण निषिद्ध

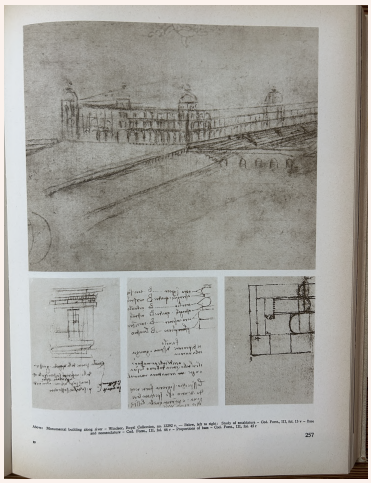




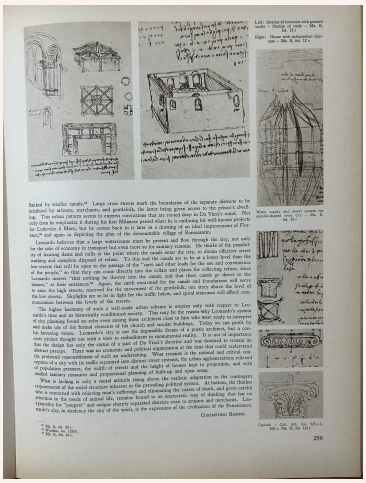


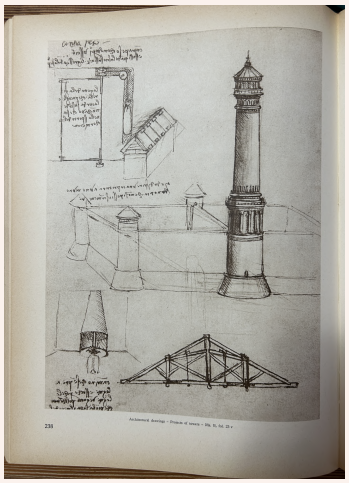












प्रारूप प्रतिकृति

6.4.3 आंद्रेआ पल्लादियो (1508–1580)

1508 में पादुआ में आंद्रेआ दी पिएत्रो देल्ला गोंदोला के रूप में जन्मे पल्लादियो[3] 1520s में विचेंज़ा चले गए और लगभग सोलह वर्ष की आयु में स्थानीय ईंट-निर्माताओं तथा पत्थर-राजमिस्त्रियों के संघ में पंजीकृत हुए (1524)। लगभग अगले दशक तक उन्होंने राजमिस्त्री और मूर्तिकार के रूप में कार्य किया; प्रलेख 1542 तक उन्हें *lapicida* (पत्थर-कटाई करने वाला) कहते हैं। अतः उनकी प्रारंभिक शिक्षा विद्वत्तापूर्ण नहीं, व्यावहारिक थी और सामग्री, निर्माण-तकनीकों तथा निर्माण-स्थलों के यथार्थ में निहित थी—ऐसा प्रारंभिक अनुभव जिसने उनके वास्तुकलात्मक दृष्टिकोण को स्थायी रूप से आकार दिया और उनके बाद के सैद्धांतिक कार्य को विशुद्ध सौंदर्यात्मक अनुमान के स्थान पर निर्माणात्मक तर्क में स्थापित किया।

निर्णायक मोड उत्तर 1530s में आया, जब मानवतावादी कवि और विद्वान जियान जॉर्जियो त्रिस्सीनो ने भवन-परियोजनाओं में उन्हें नियुक्त करते समय उनका कार्य देखा और उन्हें अपना संरक्षण दिया। त्रिस्सीनो ने उनकी प्रतिभा पहचानी, पल्लास एथेना के आधार पर उन्हें शास्त्रीय नाम “पल्लादियो” दिया और मानवतावादी विद्या से परिचित कराया। प्राचीन रोमन वास्तुकला और विट्रुवियस (जो उत्तर पंद्रहवीं शताब्दी से मुद्रित रूप में उपलब्ध थे) के अध्ययन में निमग्न त्रिस्सीनो ने पल्लादियो की शास्त्रीय शिक्षा को प्रोत्साहित किया और रोम की अध्ययन-यात्राओं में उनके साथ गए, जहाँ पल्लादियो ने प्राचीन स्मारकों का प्रत्यक्ष व्यवस्थित अध्ययन और मापन किया। रोमन वास्तुकला से इन साक्षात्कारों ने वह बौद्धिक ढाँचा दिया जिसने उन्हें शास्त्रीय रूप को समकालीन निर्माण-व्यवहार से संश्लेषित करने में सक्षम बनाया।

लगभग 1540 तक पल्लादियो वास्तुकलात्मक कार्यादेश प्राप्त करने लगे और उस भूमिका में सार्वजनिक रूप से उभरे जिसके लिए वे प्रसिद्ध हुए। मुख्यतः विचेंज़ा में स्थित वे उत्तर पुनर्जागरण के सर्वाधिक प्रभावशाली वास्तुकार बने और पूरे वेनेतो में विला, प्रासाद तथा चर्चों का अभिकल्प किया। उनका कार्य शिल्प, शास्त्रीय सिद्धांत और युक्तिसंगत अनुपात के संगम पर स्थित है।

आंद्रेआ पल्लादियो (1508–1580) (Palladio, 1570 PDF) पुनर्जागरण—और संभवतः समस्त पाश्चात्य वास्तुकला—के सर्वाधिक प्रभावशाली वास्तुकार बने। 1570 में वेनिस में प्रकाशित उनकी *I Quattro Libri dell’Architettura* (वास्तुकला की चार पुस्तकें) ने अब तक लिखे सर्वाधिक प्रभावशाली वास्तुकलात्मक ग्रंथ में शास्त्रीय वास्तुकलात्मक सिद्धांत को कठोर व्यावहारिक निर्देश से संश्लेषित किया। कृति ने सैद्धांतिक सिद्धांतों, प्राचीन रोमन भवनों के मापित रेखाचित्रों और पल्लादियो की अपनी कृतियों के विस्तृत निरूपणों को ऐसे व्यापक अभिकल्प-निर्देश में जोडा जिसने सदियों तक विश्वभर की वास्तुकला को आकार दिया।[4]

6.4.4 सेबास्तियानो सेरि्लयो (1475–1554)

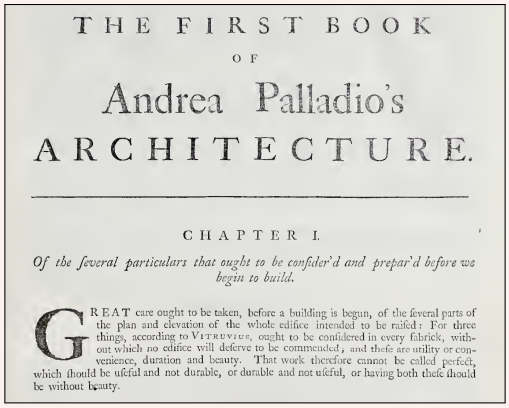
सेबास्तियानो सेरि्लयो का जन्म 1475 में बोलोन्या में हुआ और वास्तुकला की ओर मुडने से पहले उन्हें चित्रकार का प्रशिक्षण मिला। उन्होंने 1510s और 1520s में रोम में कार्य किया, जहाँ प्राचीन स्मारकों तथा ब्रामांते और पेरुत्सी के कार्यों की शिक्षाएँ आत्मसात कीं। 1527 में रोम की लूट के बाद वे वेनिस और फिर फ्रांस गए, जहाँ उन्होंने फ़्रांसिस I की सेवा की तथा फ़ोंतेनब्लो के शातो पर कार्य किया। लगभग 1554 में फ़ोंतेनब्लो में उनकी मृत्यु हुई।

Tutte l’opere d’architettura सेरि्लयो ने पाठ्य निरूपण के ऊपर दृश्य स्पष्टता को प्राथमिकता देकर वास्तुकलात्मक ज्ञान के प्रसारण में क्रांति की। उनकी *Tutte l’opere d’architettura* (वास्तुकला की संपूर्ण कृतियाँ) (Serlio, 1996), 1537 और 1575 के बीच खंडों में प्रकाशित, मुख्यतः चित्रों के इर्द-गिर्द अभिकल्पित प्रथम वास्तुकलात्मक ग्रंथ थी। जहाँ अल्बर्ती और विट्रुवियस ने सघन सैद्धांतिक गद्य लिखा था, वहाँ सेरि्लयो ने व्यावहारिक व्याख्याओं से युक्त सैकडों काष्ठ-मुद्रित चित्र दिए जो निर्माताओं, संरक्षकों और वास्तुकारों के लिए समान रूप से सुलभ थे।

[3]उनके योगदान के विषय में अधिक विवरण §15.2.2.2 में मिल सकता है।

[4]सजग पाठक ने देखा होगा कि प्रस्तुत कृति का शीर्षक पल्लादियो की उत्कृष्ट कृति को श्रद्धांजलि देता है। लेखक इस अनुकरण को अपराध-बोध से अधिक प्रशंसा के साथ स्वीकार करता है और आशा करता है कि वेनिस के आचार्य की स्पष्टता और व्यवस्थापन का कुछ अंश सहानुभूतिपूर्ण जादू से इन पृष्ठों में प्रवेश कर जाए। पल्लादियो ने वास्तुकला की कला को चार पुस्तकों में संगठित किया; हम संरचनाओं के विज्ञान के लिए यही प्रयास करते हैं। यह कृति *Quattro Libri* की पाँच-शताब्दी दीर्घायु का थोडा भी भाग पाएगी अथवा नहीं—इसका निर्णय, सौभाग्य से, भावी पीढ़ियों के लिए है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



THE FIRST BOOK
OF
Andrea Palladio's
ARCHITECTURE.

CHAPTER I.

Of the feveral particulars that ought to be conſider'd and prepar'd before we begin to build.

GREAT care ought to be taken, before a building is begun, of the feveral parts of the plan and elevation of the whole edifice intended to be raiſed: For three things, according to VITRUVIUS, ought to be conſidered in every fabrick, without which no edifice will deſerve to be commended; and theſe are utility or convenience, duration and beauty. That work therefore cannot be called perfect, which ſhould be uſeful and not durable, or durable and not uſeful, or having both theſe ſhould be without beauty.

चित्र 6.3: पल्लादियो (Palladio, 1570 PDF)

सेरि्लयो के दृष्टिकोण ने शास्त्रीय वास्तुकला का लोकतंत्रीकरण किया और प्राचीन तथा पुनर्जागरणकालीन अभिकल्प के सिद्धांत उन व्यावसायिकों के लिए पूरे यूरोप में उपलब्ध किए जिनकी इतालवी भवनों अथवा मानवतावादी शिक्षा तक पहुँच नहीं थी। शास्त्रीय क्रमों—टस्कन, डोरिक, आयोनिक, कोरिंथियन और कंपोज़िट—पर उनकी पुस्तकों ने अनुपाती संबंध, गढ़ाई-रूपरेखाएँ और संयोजन-विवरण दर्शाने वाले व्यवस्थित आरेखों द्वारा प्रत्येक क्रम प्रस्तुत किया।

ग्रंथ का डच, जर्मन, फ़्रांसीसी, स्पेनी और अंग्रेज़ी में अनुवाद हुआ और वह 16th century की सर्वाधिक व्यापक रूप से प्रसारित वास्तुकलात्मक पुस्तक बनी। अभिकल्प के ज्यामितीय नियम संप्रेषित करने के लिए सेरि्लयो के आरेखों के प्रयोग ने संरचनात्मक विश्लेषण में आलेखीय विधियों के महत्त्व का पूर्वाभास दिया।

6.4.5 जियाकोमो बारोत्सी दा विग्नोला (1507–1573)

जियाकोमो बारोत्सी दा विग्नोला (1507–1573) (Vignola, 1969) ने पाँच शास्त्रीय क्रमों को ऐसी परिशुद्ध मॉड्यूलर प्रणाली में संहिताबद्ध किया जो तीन शताब्दियों से अधिक समय तक वास्तुकलात्मक और अभियांत्रिक व्यवहार का मानक संदर्भ बनी। 1562 में प्रथम बार प्रकाशित उनकी *Regola delli cinque ordini d'architettura* (वास्तुकला के पाँच क्रमों का नियम) ने वह प्राप्त किया जो किसी पहले ग्रंथ ने नहीं किया था: शास्त्रीय अनुपातों का पूर्णतः व्यवस्थित, गणितीय रूप से परिशुद्ध और दृश्यतः स्पष्ट निरूपण, जिसे कोई भी सक्षम व्यावसायिक लागू कर सकता था।

विग्नोला का नवाचार कार्यप्रणालीगत था। उन्होंने स्तंभ के आधार की त्रिज्या के रूप में परिभाषित मॉड्यूल को वह मूल इकाई बनाया जिससे अन्य सभी आयाम व्युत्पन्न होते हैं। प्रत्येक क्रम का प्रत्येक तत्त्व—स्तंभ की ऊँचाई, शीर्षबंध के अनुपात, आधार और शीर्ष की रूपरेखाएँ, स्तंभांतर—इस मॉड्यूल के सरल भिन्न अथवा गुणज के रूप में व्यक्त है। प्रणाली शास्त्रीय अभिकल्प को अंकगणित में घटा देती है: वांछित स्तंभ-ऊँचाई देने पर अन्य सभी आयाम स्वतः मिल जाते हैं। इस युक्तिसंगतीकरण ने सेरि्लयो और यहाँ तक कि विट्रुवियस सहित पहले के निरूपणों की अस्पष्टताएँ तथा असंगतियाँ समाप्त कीं।

Regola delli cinque ordini d'architettura 1562 *Regola* अपनी मितव्ययिता के लिए उल्लेखनीय है। वह न्यूनतम पाठ वाली बत्तीस उत्कीर्ण पट्टिकाओं से लगभग पूर्णतः बनी है—केवल अनुपाती प्रणाली समझाने के लिए पर्याप्त। इस दृश्य प्रत्यक्षता ने उसे असाधारण रूप से व्यावहारिक बनाया: वास्तुकार और निर्माता एक दृष्टि में आवश्यक जानकारी निकाल सकते थे। पुस्तक के सैकड़ों संस्करण और अनुवाद हुए और वह 20th century तक निरंतर मुद्रित रही। वह वास्तुकला की सर्वोत्कृष्ट पाठ्यपुस्तक थी, जिसका प्रयोग पूरे यूरोप और अमेरिका की अकादमियों तथा कार्यशालाओं में हुआ।

आयाम-निर्धारण और अनुपातों के प्रति विग्नोला के व्यवस्थित दृष्टिकोण ने वास्तुकलात्मक शैली से कहीं अधिक को प्रभावित किया। जटिल सौंदर्यात्मक निर्णयों को परिशुद्ध संख्यात्मक संबंधों में घटाने ने उस तर्कवादी भावना का उदाहरण प्रस्तुत किया जो वैज्ञानिक क्रांति को अभिलक्षित करने वाली थी। मॉड्यूलर अनुपाती प्रणालियाँ उत्पन्न करने वाली मानसिक आदत—व्यवस्थित, परिमाणात्मक, नियम-आधारित—वही आदत है जो संरचनात्मक विश्लेषण उत्पन्न करती है। अतः विग्नोला

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

का ग्रंथ केवल शास्त्रीय अभिरुचि का संहिताकरण नहीं, बल्कि रूप और संरचना के उस युक्तिसंगत निरूपण की ओर चरण है जो आधुनिक अभियांत्रिकी को अभिलक्षित करता है।

6.4.6 ह्यूबर्ट गोतिए (1660–1737)

ह्यूबर्ट गोतिए का जन्म Nîmes में हुआ और उन्होंने लुई XIV के शासनकाल में सैन्य अभियंता के रूप में प्रशिक्षण लिया; यह फ़्रांसीसी राज्य की प्रशासनिक और आर्थिक शक्ति को सुदृढ करने के उद्देश्य से महत्त्वाकांक्षी अवसंरचना-विस्तार का युग था। उनके कार्यजीवन में सडकें, नहरें और सेतु सम्मिलित थे और वे *Inspecteur des Chemins, Ponts, Ports maritimes et Chaussées du Languedoc*—फ़्रांस के सबसे बडे प्रांतों में से एक लांगदॉक क्षेत्र के सडक, सेतु, समुद्री बंदरगाह और पथ निरीक्षक—बने।

1716 में गोतिए ने सेतु-निर्माण को पूर्णतः समर्पित प्रथम ग्रंथ अपना *Traité des ponts* (Gautier, 1765) (चौथा संस्करण) प्रकाशित किया। कृति का आरंभ एक उल्लेखनीय शिकायत से होता है, चित्र 6.4a:

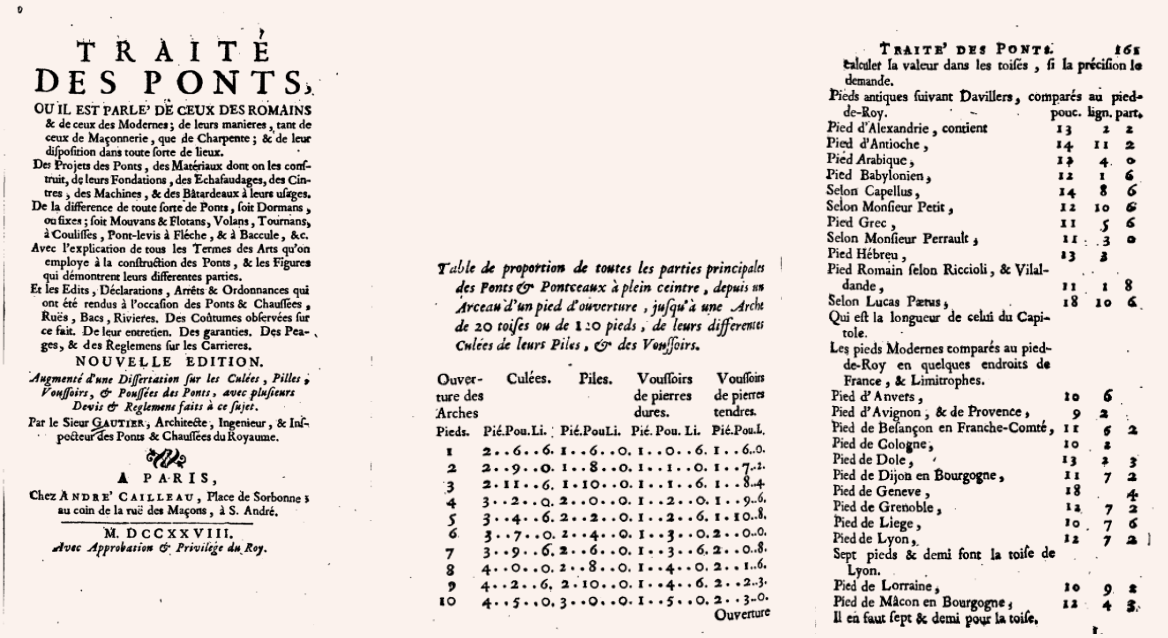
> Les Auteurs qui ont traité de l'Architecture, n'ont point donné de regies pour conftruire des Ponts. Ils n'ont point traité à fond cette matière ni donné aucun détail, ils n'en ont parlé qu'en paffant; ils ont fupofé qu'un Architecte qui n'ignore rien de ce qui concerne la Profession, devoir savoir tout ce qui regarde les Ponts. Quelques-uns, comme Scamozzi, Palladio, Serlio, &c ont donné des modèles des Ponts de Maçonnerie, ou de Charpente; Vitruve & Vignolle n'en ont rien dit. J'ai tiré de ceux qui en ont traité tout ce qui a pu convenir à mon sujet, & je rapporte tout ce qu'ils ont publié ou fait sur cette matière, lorsque j'ai cru que cela pouvait être de quelque usage au Public; mais partout où j'ai vu que je pouvais aller au-delà en augmentant, ou en diminuant, pour éclaircir davantage les choses, je l'ai fait en sorte qu'elles fussent plus aisées à pénétrer. J'ai joint à tout cela l'expérience que je puis avoir de tous ces ouvrages, depuis plusieurs années que je travaille, & que je rapporte, afin que ceux qui ne savent pas puissent en profiter, pour qui uniquement j'ai fait ce Traité.
>
> वास्तुकला का निरूपण करने वाले लेखकों ने सेतु-निर्माण के लिए कोई नियम नहीं दिए हैं। उन्होंने इस विषय का गहराई से निरूपण नहीं किया, न कोई विस्तृत चर्चा दी; वे केवल प्रसंगवश इसके विषय में बोले हैं। उन्होंने मान लिया कि वास्तुकार, जो व्यवसाय से संबंधित किसी वस्तु से अनभिज्ञ नहीं है, सेतुओं से संबंधित सब कुछ जानता होगा।
>
> स्कामोत्सी, पल्लादियो, सेर्लियो और अन्य जैसे कुछ लेखकों ने चिनाई अथवा काष्ठ के सेतुओं के प्रतिरूप दिए हैं; विट्रुवियस और विग्नोला ने उनके विषय में कुछ नहीं कहा। जिन लोगों ने विषय पर लिखा है उनसे मैंने अपने प्रयोजन के अनुकूल सभी वस्तुएँ ली हैं और जब भी मुझे लगा कि वह जनता के लिए उपयोगी हो सकती हैं, उनके द्वारा इस विषय पर प्रकाशित अथवा किए गए सभी कार्यों का उल्लेख करता हूँ।
>
> किंतु जहाँ भी मैंने देखा कि विषयों को अधिक पूर्णतः स्पष्ट करने के लिए परिवर्धन अथवा लोप द्वारा आगे बढ सकता हूँ, मैंने ऐसा किया ताकि उन्हें समझना अधिक सरल हो। इन सबके साथ मैंने इन कार्यों से अनेक वर्षों के व्यवहार में प्राप्त अपना अनुभव जोडा है और उसे यहाँ इसलिए लिखता हूँ कि जो नहीं जानते वे उसका लाभ उठा सकें; केवल उन्हीं के लिए मैंने यह ग्रंथ लिखा है।
>
> Gautier, 1765 *Traité des ponts*

वास्तव में विट्रुवियस ने सेतुओं के विषय में कुछ नहीं कहा; विग्नोला ने भी नहीं। पल्लादियो और स्कामोत्सी ने उदाहरण दिए, किंतु व्यवस्थित मार्गदर्शन नहीं। गोतिए ने प्रकाशित समस्त सामग्री को अपने दशकों के व्यावहारिक अनुभव से संवर्धित कर संकलित करके इस अभाव को स्पष्टतः दूर करने का प्रयत्न किया।

Traité des ponts अपने विस्तार में विश्वकोशीय है। वह प्रसिद्ध सेतुओं—डैन्यूब पर ट्राजन का सेतु, रोम के सेतु, पों द्यू गार—के ऐतिहासिक सर्वेक्षण से आरंभ होती है और फिर सेतु-प्रकारों, सामग्रियों, नींवों, जलरोधक घेरों, केंद्रण तथा मशीनरी

का व्यवस्थित निरूपण करती है। गोतिए काष्ठ और चिनाई के सेतुओं, स्थिर तथा चल सेतुओं (उठाऊ, तैरते और घूर्णी सेतु) की चर्चा करते हैं। वे मेहराबों की ज्यामिति, स्तंभकों और अंत्याधारों के आयाम-निर्धारण तथा नदियों में संरचनाओं की नींव बनाने की व्यावहारिक चुनौतियों का निरूपण करते हैं। पूरी कृति विश्लेषणात्मक के स्थान पर वर्णनात्मक रहती है; संरचनात्मक निष्पादन का समाधान परिकलन के स्थान पर रूप, अनुपात और संचित पूर्वदृष्टांत द्वारा किया गया है।

रूप और निर्माण के विषयों से आगे गोतिए अभियांत्रिकी की व्यावहारिक तथा प्रशासनिक अवसंरचना कहे जा सकने वाले विषय पर असाधारण ध्यान देते हैं। वे परिशुद्ध प्राविधिक नामावली स्थापित करते और page 161 पर लंबाई की इकाइयों (*pieds*) का विस्तृत सारणीयन प्रस्तुत करते हैं, जो बाबुली मापों से विविध यूरोपीय क्षेत्रों तथा फ़्रांसीसी नगरों में प्रयुक्त इकाइयों तक फैला है। इकाइयों की यह विविधता मानकीकरण से पहले अभियंताओं के सामने उपस्थित व्यावहारिक कठिनाइयों को सजीव रूप से दर्शाती है और समझाती है कि मीटर का बाद का आरंभ—फ़्रांसीसी क्रांति के समय प्रारंभ और नेपोलियन के अधीन सुदृढ—अभियांत्रिक व्यवहार के इतिहास के सर्वाधिक परिणामकारी सुधारों में से एक क्यों था।



TRAITÉ
DES PONTS,
OU IL EST PARLE' DE CEUX DES ROMAINS & de ceux des Modernes; de leurs manieres, tant de ceux de Maçonnerie, que de Charpente; & de leur disposition dans toute sorte de lieux.
Des Projets des Ponts, des Matériaux dont on les construit, de leurs Fondations, des Echafaudages, des Cintres, des Machines, & des Bâtardeaux à leurs usages.
De la difference de toute sorte de Ponts, soit Dormans, ou fixes; soit Mouvans & Flotans, Volans, Tournans, à Coulisses, Pont-levis à Fléche, & à Baccule, &c.
Avec l'explication de tous les Termes des Arts qu'on employe à la construction des Ponts, & les Figures qui démontrent leurs differentes parties.
Et les Edits, Déclarations, Arrêts & Ordonnances qui ont été rendus à l'occasion des Ponts & Chaussées, Ruës, Bacs, Rivieres. Des Coûtumes observées sur ce fait. De leur entretien. Des garanties. Des Peages, & des Reglemens sur les Carrieres.
NOUVELLE EDITION.
Augmenté d'une Dissertation sur les Culées, Pilles, Voussoirs, & Poussées des Ponts, avec plusieurs Devis & Reglemens faits à ce sujet.
Par le Sieur GAUTIER, Architecte, Ingenieur, & Inspecteur des Ponts & Chaussées du Royaume.
A PARIS,
Chez ANDRE' CAILLEAU, Place de Sorbonne, au coin de la ruë des Maçons, à S. André.
M. DCCXXVIII.
Avec Approbation & Privilége du Roy.

(a) आरंभिक पृष्ठ

Table de proportion de toutes les parties principales des Ponts & Ponteeaux à plein ceintre, depuis un Arceau d'un pied d'ouverture, jusqu'à une Arche de 20 toises ou de 120 pieds, de leurs differentes Culées de leurs Piles, & des Voussoirs.

Ouverture des Arches	Culées.	Piles.	Voussoirs de pierres dures.	Voussoirs de pierres tendres.
Pieds.	Pié.Pou.Li.	Pié.PouLi.	Pié. Pou. Li.	Pié.Pou.L.
1	2..6..6.	1..6..0.	1..0..6.	1..6..0.
2	2..9..0.	1..8..0.	1..1..0.	1..7..1.
3	2.11..6.	1.10..0.	1..1..6.	1..8..4
4	3..2..0.	2..0..0.	1..2..0.	1..9..6.
5	3..4..6.	2..2..0.	1..2..6.	1.10..8.
6	3..7..0.	2..4..0.	1..3..0.	2..0..0.
7	3..9..6.	2..6..0.	1..3..6.	2..0..8.
8	4..0..0.	2..8..0.	1..4..0.	2..1..6.
9	4..2..6.	2.10..0.	1..4..6.	2..2..3.
10	4..5..0.	3..0..0.	1..5..0.	2..3..0.

Ouverture

(b) फुट की विविध परिभाषाएँ

TRAITE' DES PONTS. 161
calculer la valeur dans les toises, si la précision le demande.

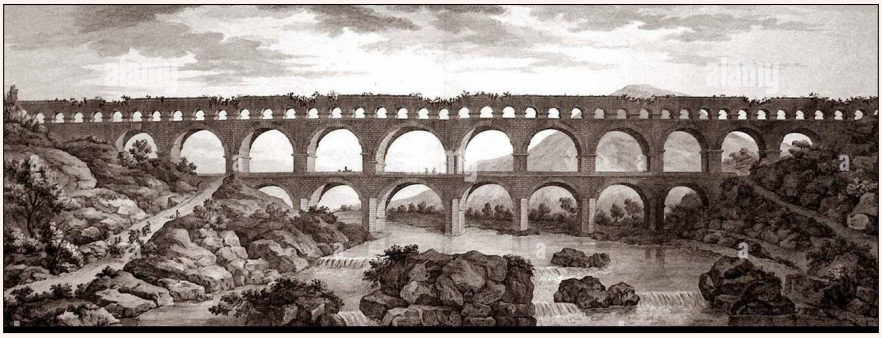
Pieds antiques suivant Davillers, comparés au pied-de-Roy.	pouc.	lign.	part.
Pied d'Alexandrie, contient	13	2	2
Pied d'Antioche,	14	11	2
Pied Arabique,	13	4	0
Pied Babylonien,	12	1	6
Selon Capellus,	14	8	6
Selon Monsieur Petit,	12	10	6
Pied Grec,	11	5	6
Selon Monsieur Perrault,	11	3	0
Pied Hébreu,	13	2	
Pied Romain selon Riccioli, & Vilalpande,	11	1	8
Selon Lucas Pætus,	18	10	6
Qui est la longueur de celui du Capitole.			
Les pieds Modernes comparés au pied-de-Roy en quelques endroits de France, & Limitrophes.			
Pied d'Anvers,	10	6	
Pied d'Avignon, & de Provence,	9	2	
Pied de Besançon en Franche-Comté,	11	6	2
Pied de Cologne,	10	2	
Pied de Dole,	13	2	3
Pied de Dijon en Bourgogne,	11	7	2
Pied de Geneve,	18		4
Pied de Grenoble,	12	7	2
Pied de Liege,	10	7	6
Pied de Lyon,	12	7	2
Sept pieds & demi font la toise de Lyon.			
Pied de Lorraine,	10	9	2
Pied de Mâcon en Bourgogne,	12	4	8
Il en faut sept & demi pour la toise.			

(c) सेतु का आयाम-निर्धारण

चित्र 6.4: *Traité des ponts* (Gautier, 1765)

गोतिए सार्वजनिक कार्यों को शासित करने वाले विनियमों और अध्यादेशों (p. 196), दोषपूर्ण निष्पादन के दंड (p. 214), अनुरक्षण-दायित्वों (p. 217) और निर्माताओं पर आरोपित दस-वर्षीय प्रत्ययाभूति (p. 225) का भी निरूपण करते हैं। वे सेतु-पारगमन के लिए लिए जाने वाले पथकर (p. 227), लागत-अनुमान प्रक्रियाएँ (pp. 231 and 273), उचित रूप से निष्पादित कार्य का प्रमाणन (p. 325), सार्वजनिक कार्यों की लेखांकन-विधियाँ (p. 328) और अधिकारियों द्वारा अभियांत्रिक प्रलेखों का औपचारिक अनुमोदन (p. 340) प्रस्तुत करते हैं। समीक्षक की आलोचना पर उनकी सुपष्ट प्रतिक्रिया (p. 409) विशेष रूप से उल्लेखनीय है—यह आज सहकर्मी समीक्षा कहे जाने वाले व्यवहार का प्रारंभिक उदाहरण है।

मेहराब की मोटाई के निर्णायक प्रश्न के लिए गोतिए ने पों द्यू गार को अपना प्रतिरूप बनाया (चित्र 6.5)। वहाँ मेहराबों की मोटाई 4 feet और विस्तृति 60 feet है, जो 1/15 का शास्त्रीय अनुपात देती है—दो शताब्दी पहले अल्बर्ती द्वारा दिया वही नियम, चित्र 15.4। किंतु गोतिए ने तुरंत समस्या पहचानी: यह नियम केवल बडे मेहराबों के लिए लागू होता है। 6 feet विस्तृति वाले छोटे मेहराब के लिए नियम 6 inches से कम मोटाई बताएगा, “जिसे वे उस सही मोटाई की तुलना में बहुत कम मानते हैं जो उनके अनुसार 1.5 feet है” (Huerta, 2018)। यहाँ गोतिए ने मूलभूत महत्त्व का प्रेक्षण किया—यह प्रथम सुपष्ट मान्यता थी कि सेतु-अभिकल्प अंतर्निहित रूप से *गैर-अनुपाती* है:



चित्र 6.5: पों द्यू गार

> Il est certain qu'un grand Pont qui porte une grande voiture, est bien moins chargé qu'un Ponceau qui porte la même voiture
>
> भारी गाड़ी वहन करने वाला बड़ा सेतु उसी गाड़ी को वहन करने वाले छोटे सेतु की तुलना में बहुत कम भारित होता है।
>
> Gautier, 1765 *Traité des ponts*

गोतिए के कथन को स्पष्टीकरण चाहिए: उनका आशय है कि यातायात-भार और सेतु के स्वभार का *अनुपात* बड़े सेतु के लिए छोटे सेतु की तुलना में बहुत कम होता है। अधिक भारी बड़ा सेतु अपने स्वभार से नियंत्रित होता है; गुजरती गाड़ी कुल भार का नगण्य अंश होती है। हल्का छोटा सेतु उसी गाड़ी को अनुपाततः बड़े विक्षोभ के रूप में अनुभव करता है। इसी कारण अनुपाती नियम ($t/s = \text{const.}$) छोटी विस्तृतियों के लिए विफल होते हैं: चल भार का निरपेक्ष परिमाण संरचना के साथ मापानुपाती नहीं होता, यद्यपि स्थायी भार होता है। यह प्रथम स्पष्ट मान्यता थी कि मेहराब-सेतु का अभिकल्प *गैर-अनुपाती* है।

इस अंतर्दृष्टि ने विट्रुवियस के समय से सभी अनुपाती नियमों की मूलभूत मान्यता का खंडन किया: कि संरचनात्मक स्थिरता केवल ज्यामिति पर निर्भर है, निरपेक्ष आकार से स्वतंत्र[5]

1717 में गोतिए ने *Dissertation sur l'épaisseur des culées des Ponts* प्रकाशित की, जिसमें उन्होंने अधिक व्यवस्थित निरूपण का प्रयास किया। उन्होंने कठोर और कोमल पत्थरों में भेद करते हुए विस्तृति के फलन के रूप में मेहराब-मोटाई की सारणी दी। 40 feet अथवा अधिक के मेहराबों के लिए उन्होंने अल्बर्ती का 1/15 नियम बनाए रखा। छोटे मेहराबों के लिए उन्होंने 1 foot को विस्तृति के 1/24 में जोड़ने का निर्देश दिया—यह गैर-अनुपाती संशोधन संकेंद्रित भारों के प्रति छोटी संरचनाओं की अधिक सुभेद्यता को स्वीकार करता था। *Traité des ponts* के चार संस्करण (1716, 1728, 1755, 1765) हुए और अठारहवीं शताब्दी में उसका व्यापक उद्धरण हुआ; Bélidor ने गोतिए की सारणियाँ अपनी प्रभावशाली *La science des ingénieurs* (De Belidor, 1729) में सम्मिलित कीं।

गोतिए ने मेहराबों अथवा प्रणोद का गणितीय सिद्धांत आगे नहीं बढ़ाया। उनकी अभियांत्रिकी अनुपात, पूर्वदृष्टांत और अनुभवी निर्माता के निर्णय पर निर्भर थी। फिर भी सेतुओं को व्यवस्थित अध्ययन के पृथक् विषय के रूप में अलग करके, अभियांत्रिकी को व्यापक विधिक और प्रशासनिक ढाँचे में अंतःस्थापित करके तथा अभिकल्प-समस्या के गैर-अनुपाती चरित्र को स्पष्टतः पहचानकर गोतिए ने वह बौद्धिक और संस्थागत आधार स्थापित किया जिस पर उनके उत्तराधिकारी निर्माण करने वाले थे।

इस संदर्भ में गोतिए जाँ-रोदोल्फ पेरोने से शिक्षाप्रद विरोध प्रस्तुत करते हैं। गोतिए का योगदान व्यवहार—शब्दावली,

[5]जैसा सर्वविदित है, इस दृष्टिकोण को बाद में गैलीलियो के प्रसिद्ध अस्थि-मापानुपात उदाहरण (p. 541) ने चुनौती दी। बहुत बाद में संरचनाओं में आकार-प्रभाव की संकल्पना को Bažant, 1976 ने औपचारिक रूप दिया और बाद में Saouma, Natekar, and Hansen, 2003 ने सुघट्यता तथा विभंग-यांत्रिकी के बीच अंतर को स्पष्टतः पाटने के लिए विस्तृत किया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विनियमन, वित्त, अनुरक्षण और अनुपात—के विश्वकोशीय संहिताकरण में है और प्रलेखित करता है कि सार्वजनिक कार्यों के रूप में सेतुओं की संकल्पना, निष्पादन और शासन कैसे होता था। एक पीढ़ी बाद पेरोने इस परंपरा की परिपक्वता का प्रतिनिधित्व करने वाले थे: अभियांत्रिकी शिक्षा, केंद्रीकृत पर्यवेक्षण और अभूतपूर्व तनुता वाले स्मारकीय पाषाण-मेहराब सेतुओं के निष्पादन का सुदृढ़ीकरण। शिल्पकारी ज्ञान से संगठित प्राविधिक अनुशासन—प्रधान निर्माता की अंतर्दृष्टि से अभियंता की विधि—का संक्रमण निर्णायक रूप से गोतिए के *Traité* से होकर गुजरता है।

इकाइयाँ

जब गोतिए ने *Traité des ponts* लिखी, तब फ़्रांस में तो क्या, पूरे यूरोप में कोई एकीकृत मापन-प्रणाली नहीं थी। लंबाई संयुक्त इकाइयों—*pied*, *pouce* और *ligne*—में व्यक्त होती थी, जिनके निरपेक्ष मान केवल देश से देश ही नहीं, प्रायः नगर से नगर भी बदलते थे, चित्र 6.4b। इस विषमता ने अभिकल्प, अनुमान और निर्माण के लिए गंभीर व्यावहारिक कठिनाइयाँ उत्पन्न कीं, विशेषतः दीर्घ काल में निष्पादित अथवा अनेक अधिकारक्षेत्रों वाली बड़ी सार्वजनिक परियोजनाओं में। गोतिए इस समस्या के प्रति अत्यंत सजग थे, जैसा प्राचीन मापों से विविध फ़्रांसीसी क्षेत्रों में अपनाए मापों तक प्रयुक्त विविध *pieds* के उनके विस्तृत सारणीयन से प्रमाणित है। इकाइयों पर उनका सावधान ध्यान प्रारंभिक अठारहवीं शताब्दी के अभियांत्रिक व्यवहार का यथार्थ दर्शाता है, जिसमें मानकीकृत मापन के अभाव में संगति सुनिश्चित करने के एकमात्र विश्वसनीय साधन अनुपाती नियम और संयुक्त माप थे। अंततः फ़्रांसीसी क्रांति के समय इस स्थिति का समाधान हुआ, जब 1795 में मीटरी प्रणाली प्रस्तुत की गई और प्रारंभिक उन्नीसवीं शताब्दी में नेपोलियन के अधीन पूरे फ़्रांस में उसे सुदृढ़ तथा लागू किया गया।

अर्धवृत्ताकार सेतुओं के लिए गोतिए की आनुपातिक सारणी (p. 368 की सारणी)

सारणी क्या है (क्षेत्र और आशय)। गोतिए ने इस सारणी को स्पष्टतः *Table de proportion de toutes les parties principales des Ponts & Ponceaux a plein ceintre* के रूप में प्रस्तुत किया है, अर्थात् *plein ceintre* (अर्धवृत्ताकार) मेहराबों वाले सेतुओं और छोटे पुलियों के प्रमुख भागों की आनुपातिक सारणी। निर्दिष्ट विस्तृति-परास एक फुट खुले भाग वाले छोटे मेहराब से आरंभ होकर 20 तुआज़ (120 फुट) के मेहराब तक जाता है। इसका उद्देश्य व्यावहारिक है: कोई खुला भाग दिए जाने पर, सारणी कार्य के अनुपात-निर्धारण के लिए आवश्यक प्रमुख चिनाई-विमाएँ एक दृष्टि में उपलब्ध कराती है, चित्र 6.4c।

सारणी का विन्यास (स्तंभ)। सारणी को फुट में व्यक्त बढ़ते हुए *Ouverture des Arches* (मेहराब के खुले भाग) के अनुसार व्यवस्थित किया गया है। प्रत्येक खुले भाग के लिए यह निम्नलिखित देती है:

- **Culees**: अंत्याधारों के लिए अनुशंसित विमा (फुट–इंच–लाइन में)।
- **Piles**: स्तंभाधारों के लिए अनुशंसित विमा (फुट–इंच–लाइन में)।
- **Voussoirs de pierres dures**: कठोर पत्थर के लिए अनुशंसित मेहराब-खंड (वलय) मोटाई।
- **Voussoirs de pierres tendres**: कोमल पत्थर के लिए अनुशंसित मेहराब-खंड (वलय) मोटाई।

इस प्रकार सारणी ज्यामिति-नियंत्रित अनुपात-निर्धारण (खुला भाग, स्तंभाधार, अंत्याधार) को मेहराब-खंड की विमा पर लागू पदार्थ-गुणवत्ता संशोधन (कठोर बनाम कोमल पत्थर) से पृथक् करती है।

प्रविष्टियों का अर्थ (प्रत्येक संख्या क्या नियंत्रित करती है)। गोतिए के प्रयोग में ये प्रविष्टियाँ अमूर्त अनुपात नहीं हैं; ये आरेखों, अनुमानों और स्थल-संबंधी निर्णयों में सीधे लागू की जाने वाली विमाएँ हैं:

- **खुला भाग** मेहराब की निर्बाध विस्तृति है।
- **स्तंभाधार** की विमा मेहराबों के बीच मध्यवर्ती आधारों की मोटाई नियंत्रित करती है; यह स्थिरता (द्रव्यमान) और जलीय अवरोध (नदी कितनी संकुचित होती है), दोनों को नियंत्रित करती है।
- **अंत्याधार** की विमा अंतिम आधारों को नियंत्रित करती है; वह सामान्यतः स्तंभाधार से बड़ी होती है क्योंकि उसे अनुक्रम के अंत में प्रणोद का प्रतिरोध करना और पहुँच-तटबंध तथा धारित मृदा के साथ अंतःक्रिया करना होता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **मेहराब-खंड** की विमा (कठोर/कोमल) मेहराब-वलय (मेहराब बनाने वाली चिनाई-पट्टी) की मोटाई है। सारणी में यह स्थानीय संपीडन माँग तथा पत्थर और जोड़ की गुणवत्ता का सर्वाधिक प्रत्यक्ष प्रतिनिधि है।

कठोर पत्थर बनाम कोमल पत्थर के स्तंभ (दो मेहराब-खंड मान क्यों)। एक प्रमुख विशेषता *pierres dures* और *pierres tendres* के बीच स्पष्ट विभाजन है। गोतिए यह स्वीकार करते हैं कि केवल एक ज्यामितीय अनुपात पर्याप्त नहीं है: समान खुले भाग के लिए पत्थर कोमल होने पर वलय-मोटाई अधिक होनी चाहिए (वह दुर्बल तथा संदलन, क्षति और अपूर्ण जोड़ों के प्रति अधिक संवेदनशील होता है)। अतः सारणी एक सरल, क्रियान्वयनीय पदार्थ-संशोधन का कार्य करती है: खुले भाग, स्तंभाधार और अंत्याधार का वही तर्क रखें, किंतु पत्थर की गुणवत्ता के अनुसार मेहराब-खंड की मोटाई चुनें।

किसी पंक्ति को कैसे पढ़ें (कार्यप्रवाह)। अभिप्रेत कार्यप्रवाह सीधा है:

1. *Ouverture des Arches* (फुट में) के अनुरूप पंक्ति चुनें।
2. *Culees* और *Piles* की अनुशंसित विमाएँ प्राप्त करने के लिए पंक्ति के आर-पार पढ़ें।
3. उपयुक्त पदार्थ-स्तंभ (कठोर अथवा कोमल पत्थर) से *Voussoirs* की मोटाई चुनें।
4. इन मानों को आरेखों और *devis* के आधारभूत अनुपातों के रूप में प्रयोग करें; फिर स्थल की बाधाओं (नींव की दशाएँ, बाढ़, नौवहन-निर्बाधता आदि) के अनुसार आवश्यक हो तो समायोजित करें।

संकल्पनात्मक रूप से सारणी क्या कर रही है (और क्या नहीं)। सारणी विश्लेषण-पूर्व अभिकल्प-तर्क को संहिताबद्ध करती है: स्थिरता का उपचार स्पष्ट प्रणोद-रेखा परिकलन के स्थान पर द्रव्यमान, अनुपात और पूर्वदृष्टांत के माध्यम से किया जाता है। फिर भी यह पृथक् उदाहरणों के संग्रह से अधिक है: यह एक व्यवस्थित आनुपातिक योजना है जो खुले भाग को प्रमुख प्रतिरोधी भागों (अंत्याधार, स्तंभाधार, वलय-मोटाई) से जोड़ती है और दोहरे मेहराब-खंड स्तंभों के माध्यम से स्पष्ट पदार्थ-गुणवत्ता संशोधन प्रस्तुत करती है।

विमीय इकाइयाँ (फुट–इंच–लाइन)। सभी प्रविष्टियाँ पारंपरिक फ़्रांसीसी प्रणाली *pied–pouce–ligne* में दी गई हैं। एक *pied* को 12 *pouces* में और एक *pouce* को 12 *lignes* में विभाजित किया जाता है। अतः सारणी में, उदाहरणार्थ, “4..6..9” लिखी प्रविष्टि को 4 pieds, 6 pouces, 9 lignes के रूप में पढ़ना चाहिए। यह परिपाटी मध्यवर्ती अंकगणित के बिना चिनाई-विमाएँ निर्धारित करने में सारणी के प्रत्यक्ष उपयोग की अनुमति देती है और उस काल की व्यावहारिक वास्तविकता भी दर्शाती है: अभियंता और ठेकेदार दशमलव इकाइयों के बजाय संयुक्त उपविभाजनों में कार्य करते थे।

6.4.6.1 जाँ-रोदोल्फ पेरोने

यदि गोतिए ने सेतु-अभियांत्रिकी के अनुशासन की स्थापना की, तो जाँ-रोदोल्फ पेरोने ने उसे परिपक्वता प्रदान की। पेरिस के निकट सुरेन में जन्मे पेरोने ने नगर के प्रमुख वास्तुकारों में से एक के लिए कार्य करते हुए अपना जीवन-वृत्त आरंभ किया और जीवन भर अभियांत्रिकी के साथ वास्तुकला में भी रुचि बनाए रखी। 1747 में उनतालीस वर्ष की आयु में वे नवस्थापित *École des Ponts et Chaussées* के प्रथम निदेशक नियुक्त हुए और सैंतालीस वर्ष बाद अपनी मृत्यु तक उस पद पर रहे। 1763 में वे *Corps des Ponts et Chaussées* के मुख्य अभियंता बने और 1765 में *Académie des Sciences* के लिए निर्वाचित हुए। उन्होंने शताब्दी के उत्तरार्ध के सबसे महत्त्वपूर्ण फ़्रांसीसी सार्वजनिक कार्यों का पर्यवेक्षण किया और व्यक्तिगत रूप से इक्कीस सेतु अभिकल्पित किए, जिनमें से तेरह निर्मित हुए।

पेरोने के सेतु अपने साहस और हल्केपन के लिए प्रसिद्ध थे (चित्र 6.6a)। पों द न्यूई (1774), पों द सैं-मैक्सांस (1772–86) और पों द ला कॉनकॉर्ड (1787–91) ने ऐसे तनुता-अनुपात प्राप्त किए जिन्होंने समकालीनों को चकित किया और दशकों तक अप्रतिम रहे। जहाँ अल्बर्ती ने 1/15 निर्धारित किया था और रोमन सेतु सामान्यतः 1/10 से 1/12 तक थे, वहीं पेरोने के मेहराब 1/24 अथवा उससे भी आगे पहुँचे। यह अविवेक नहीं, बल्कि व्यवस्थित प्रेक्षण से उत्पन्न आत्मविश्वास था।

1748 में, École के निदेशक के रूप में नियुक्ति के केवल एक वर्ष बाद, पेरोने ने “Mémoire sur l’épaisseur que doivent avoir les voussoirs à la clef, dans les différentes voûtes des Ponts”—सेतुओं के विभिन्न वॉल्टों में शीर्ष-पाषाण पर मेहराब-खंडों की अपेक्षित मोटाई पर संस्मरण—शीर्षक से एक अप्रकाशित संस्मरण लिखा। École des Ponts et Chaussées के पुस्तकालय में संरक्षित यह प्रलेख उन्नीसवीं शताब्दी से पूर्व किए गए सेतु-अनुपातों के सर्वाधिक व्यवस्थित अनुभवजन्य अध्ययन का प्रतिनिधित्व करता है (Huerta, 2018 PDF)।

समीक्षा प्रति

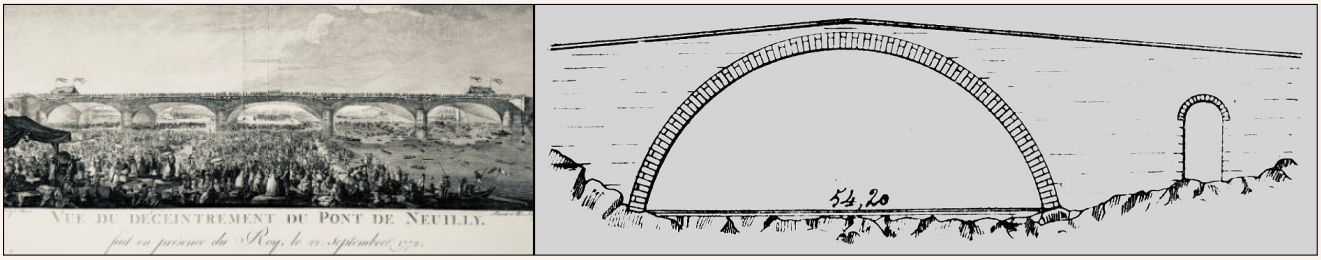
पेरोने की विधि मूलतः अनुभवजन्य थी। उन्होंने प्राचीन और समकालीन, अर्धवृत्ताकार और न्यूनोन्नत दो सौ से अधिक मेहराब-सेतुओं की विस्तृतियों और मेहराब-मोटाइयों को अभिलिखित करते हुए एक सारणी संकलित की। उनका उद्देश्य सर्वोत्तम विद्यमान उदाहरणों—जो दृढता को मितव्ययिता के साथ मिलाते थे—से ऐसा सामान्य नियम निकालना था जो भावी अभिकल्प का मार्गदर्शन कर सके। उन्होंने लिखा, “निर्माण के विषय में केवल परिकल्पना अनुभव पर प्रभुत्व नहीं पा सकती” (“en matière de construction, la spéculation seule ne peut prévaloir sur l’expérience”)।

इस व्यवस्थित अध्ययन से पेरोने ने अर्धवृत्ताकार मेहराबों के लिए एक सरल रैखिक सूत्र व्युत्पन्न किया। मोटाई t (फुट में) होनी चाहिए:

$$t = \frac{s}{24} + 1 - \frac{s}{144}$$

जहाँ s फुट में विस्तृति है। प्रथम पद विस्तृति का चौबीसवाँ भाग लेता है; दूसरा एक फुट “छोटे मेहराबों के पक्ष में, जिन्हें बड़े मेहराबों के समान भारों का आवागमन वहन करना होता है” जोड़ता है; तीसरा सर्वाधिक साहसिक विद्यमान सेतुओं के अनुपातों को समायोजित करने के लिए प्रति फुट विस्तृति पर एक लाइन (इंच का 1/12) घटाता है। यह व्यंजक लगभग $t = 1 + s/28.8$, अथवा मीटरी इकाइयों में $t = 0.325 + 0.035s$ मीटर तक सरल हो जाता है।

पेरोने के नियम का महत्त्व उसकी गणितीय परिष्कृति में नहीं—वह मात्र अनुभवजन्य आँकड़ों पर रैखिक समंजन है—बल्कि उसके परिणामों में है। बड़े सेतुओं के लिए पेरोने के सूत्र ने अल्बर्ती-गोतिए द्वारा दी गई मोटाइयों से लगभग आधी मोटाइयाँ निर्धारित कीं। 54.6 m विस्तृति और शीर्ष-पाषाण पर 2.1 m वास्तविक मोटाई वाला महान मध्ययुगीन विएय-ब्रिरऊद सेतु, चित्र 6.6b, पेरोने के नियम पर लगभग यथार्थतः बैठता था (पूर्वानुमान: 2.09 m), जबकि अल्बर्ती के 1/15 नियम ने 3.64 m निर्धारित किया होता। इस प्रकार नियम ने उन तनु अनुपातों को संहिताबद्ध और वैध बनाया जिन्हें साहसिक निर्माताओं ने अनुभवजन्य रूप से प्राप्त किया था तथा अपवादात्मक व्यवहार को मानक मार्गदर्शन में परिवर्तित कर दिया।



(a) पों द न्यूई (b) पों द ला विएय-ब्रिरऊद

चित्र 6.6: पेरोने के सेतु

पेरोने की 1788 की *Description des projets et de la construction des ponts* (Perronet, 1782) ने उनके जीवन-कार्य को संपूर्ण विस्तार से प्रस्तुत किया: पों द न्यूई, माँत, ऑर्लेआँ, नोजाँ-सुर-सेन और सैंत-मैक्सांस का अभिकल्प और निर्माण तथा प्रयुक्त मशीनरी, जलरोधक बाँध, केंद्रण और निर्माण-अनुक्रम। यह कृति प्राविधिक प्रलेखन का स्मारक है, जिसने ऐसे ज्ञान को संरक्षित किया जो अन्यथा निर्माण पूरा होते ही विलुप्त हो जाता। जैसा पेरोने ने अपनी भूमिका में कहा, सेतु-निर्माण की कला “उनके संपूर्ण निर्माण के बाद कोई चिह्न नहीं छोड़ती: इन विशाल द्रव्यमानों की नींव डालने और उन्हें उठाने में आई असंख्य कठिनाइयों को पार करने की कला अब न केवल अपने साधन प्रकट नहीं करती, बल्कि पत्थरों को काटने और बिछाने, काष्ठ-केंद्रण के संयोजन और वॉल्टों से केंद्रण हटाने की विधि ने निर्माता की ओर से ऐसे ध्यान और कौशल अपेक्षित किए हैं जो उस व्यवसाय के उन व्यक्तियों को भी अज्ञात हैं जिन्हें इस प्रकार के महान कार्यों का अनुसरण करने का अवसर नहीं मिला।”

प्रारूप पाठ्यसामग्री

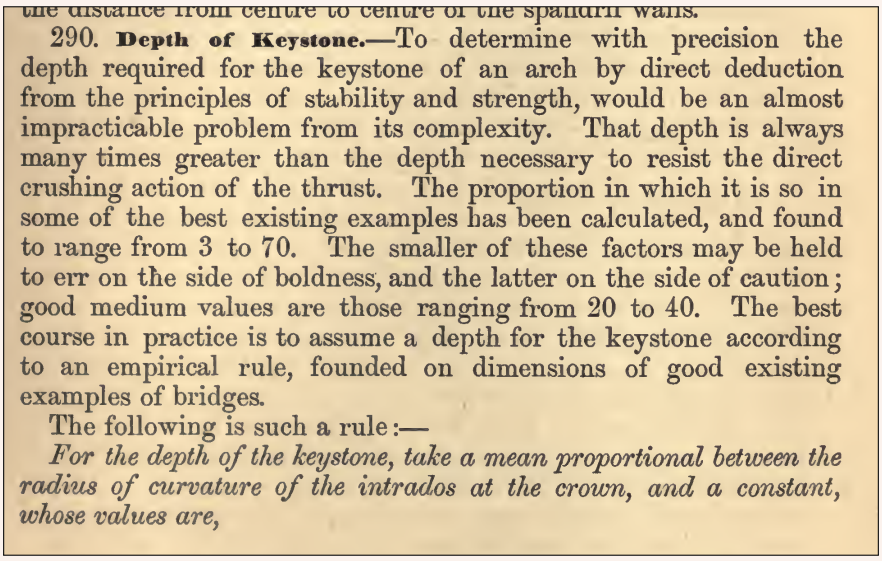
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.4.6.2 अनुपात से अनुभव की ओर संक्रमण

न तो गोतिए और न पेरोने ने आधुनिक अर्थ में विश्लेषणात्मक यांत्रिकी का उपयोग किया। ला ईर, कूप्ले और अन्य द्वारा विकसित मेहराब का सिद्धांत उन्हें ज्ञात था, किंतु उन्होंने उसे वास्तविक सेतु-अभिकल्प की जटिलता के लिए अपर्याप्त माना। एक शताब्दी बाद रैंकिन को उद्धृत करते हुए, चित्र 6.7:

> स्थिरता और सामर्थ्य के सिद्धांतों से प्रत्यक्ष निगमन द्वारा किसी मेहराब के शीर्ष-पाषाण के लिए अपेक्षित गहराई को यथार्थतः निर्धारित करना अपनी जटिलता के कारण लगभग अव्यावहारिक समस्या होगी
>
> Rankine, 1862 *A Manual of Civil Engineering*

सर्वोत्तम उपाय यही रहा कि “विद्यमान अच्छे सेतुओं की विमाओं पर आधारित अनुभवजन्य नियम के अनुसार शीर्ष-पाषाण की गहराई मान ली जाए।”



the distance from centre to centre of the spandril walls.

290. **Depth of Keystone.**—To determine with precision the depth required for the keystone of an arch by direct deduction from the principles of stability and strength, would be an almost impracticable problem from its complexity. That depth is always many times greater than the depth necessary to resist the direct crushing action of the thrust. The proportion in which it is so in some of the best existing examples has been calculated, and found to range from 3 to 70. The smaller of these factors may be held to err on the side of boldness, and the latter on the side of caution; good medium values are those ranging from 20 to 40. The best course in practice is to assume a depth for the keystone according to an empirical rule, founded on dimensions of good existing examples of bridges.

The following is such a rule:—

For the depth of the keystone, take a mean proportional between the radius of curvature of the intrados at the crown, and a constant, whose values are,

चित्र 6.7: शीर्ष-पाषाणों की विमाओं का Rankine, 1862 द्वारा आकलन

गोतिए और पेरोने ने सिद्धांत से अधिक सूक्ष्म उपलब्धि प्राप्त की: व्यवस्थित अनुभवजन्य ज्ञान का संस्थानीकरण। लगभग आधी शताब्दी तक पेरोने द्वारा निर्देशित École des Ponts et Chaussées के माध्यम से अभियांत्रिक व्यवहार का संचार शिल्प-संघीय शिक्षुता द्वारा नहीं, बल्कि संगठित शिक्षण, लिखित प्रलेखन और मानकीकृत विधियों द्वारा हुआ। प्रधान निर्माता से सिविल अभियंता—शिल्प से व्यवसाय—का संक्रमण उनकी पीढी में संपन्न हुआ।

इसके अतिरिक्त, उनके नियमों ने एक निर्णायक ज्ञानमीमांसात्मक परिवर्तन को मूर्त रूप दिया। अल्बर्ती और पाल्लादियो के आनुपातिक नियमों की मान्यता थी कि संरचनात्मक स्थिरता केवल ज्यामिति का विषय है: जो मेहराब एक मापनी पर खडा रहता है, वह किसी भी मापनी पर खडा रहेगा। गोतिए ने पहचाना कि यातायात-भार के अधीन सेतुओं के लिए यह मान्यता विफल होती है और पेरोने ने गैर-अनुपाती संशोधन को व्यवस्थित किया। यह अंतर्दृष्टि—कि निरपेक्ष आकार का महत्त्व है, कि समान अनुपात विभिन्न मापनियों पर भिन्न सुरक्षा-सीमाएँ देते हैं—अंततः विमीय विश्लेषण और संरचनात्मक समरूपता के आधुनिक सिद्धांत में अपनी सैद्धांतिक अभिव्यक्ति पाने वाली थी। किंतु इसकी व्यावहारिक पहचान पहले हुई—परिकल्पना से अधिक अनुभव पर विश्वास करने वाले अभियंता द्वारा दो सौ सेतुओं के धैर्यपूर्ण सारणीयन के माध्यम से।

गोतिए और पेरोने मिलकर ज्यामिति, अनुभव और व्यवस्थित शिक्षा पर आधारित विद्वत् अनुशासन के रूप में सिविल अभियांत्रिकी के उद्भव को चिह्नित करते हैं, यद्यपि यह अभी उन्नीसवीं शताब्दी में विकसित होने वाले औपचारिक विश्लेषणात्मक

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

साधनों से पूर्व था। वे अनुपात की मानवतावादी परंपरा—जिसे इस खंड ने विट्रुवियस से अल्बर्ती और पाल्लादियो तक अनुसरित किया है—और आगामी शताब्दी में संरचनात्मक अभियांत्रिकी का रूपांतरण करने वाली यांत्रिकी की वैज्ञानिक परंपरा के बीच संधि-बिंदु पर स्थित हैं।

6.5 गणितीय व्यवस्था से यांत्रिकी तक

यह खंड उन व्यक्तियों को एकत्र करता है जिन्होंने भौतिक परिघटनाओं के अध्ययन में उत्तरोत्तर अधिक *गणितीय व्यवस्था* प्रस्तुत की। गति और साम्य की समस्याओं पर ज्यामिति और आरंभिक विश्लेषणात्मक विधियाँ क्रमशः लागू हुईं और उन्होंने यांत्रिकी को गणितीय रूप से संगठित क्षेत्र में रूपांतरित किया। इन योगदानों को जोड़ने वाला सूत्र यांत्रिक तर्क का एक संरचित गणितीय उद्यम में रूपांतरण है।

6.5.1 फ़्रांसिस बेकन (1561–1626)

फ़्रांसिस बेकन का जन्म 1561 में एक प्रतिष्ठित अंग्रेज़ परिवार में हुआ—उनके पिता एलिज़ाबेथ प्रथम के अधीन महामुद्रा के संरक्षक थे। उन्होंने कैंब्रिज और ग्रेज़ इन में अध्ययन किया तथा विधि और राजनीति में ऐसा जीवन-वृत्त अपनाया जिसकी परिणति जेम्स प्रथम के अधीन लॉर्ड चांसलर के रूप में उनकी नियुक्ति में हुई। 1621 में रिश्वत स्वीकार करने का दोषी ठहराए जाने पर उनका राजनीतिक जीवन अपमानजनक रूप से समाप्त हुआ; इसके बाद 1626 में मृत्यु तक उन्होंने स्वयं को पूर्णतः दार्शनिक और वैज्ञानिक लेखन के लिए समर्पित कर दिया—कहा जाता है कि हिम में मुर्गे को जमाने का प्रयोग करते समय लगी ठंड से उनकी मृत्यु हुई।

नोवम ऑर्गेनम और अनुभवजन्य विधि बेकन की *Novum Organum* (नया उपकरण) (Bacon, 2000), जो 1620 में प्रकाशित हुई, ने अनुभवजन्य विधि और आगमनात्मक तर्क की दार्शनिक आधारशिला रखी, जो आधुनिक विज्ञान और अभियांत्रिकी के लिए मूलभूत बने। यह शीर्षक जानबूझकर अरस्तू के *Organon* से भिन्न रखा गया था और प्रकृति के अन्वेषण के लिए पांडित्यवादी तर्कशास्त्र को नई कार्यपद्धति से प्रतिस्थापित करने के बेकन के आशय का संकेत देता था।

मूर्तियों का सिद्धांत प्राप्त ज्ञान की बेकन द्वारा की गई आलोचना के केंद्र में उनका "मूर्तियों" का सिद्धांत था—वे व्यवस्थित पूर्वाग्रह जो मानवीय बोध को विकृत करते हैं। जाति की मूर्तियाँ स्वयं मानव-प्रकृति से उत्पन्न होती हैं (जहाँ कोई प्रतिरूप नहीं होता वहाँ भी उसे देखने की हमारी प्रवृत्ति); गुफा की मूर्तियाँ व्यक्तिगत स्वभाव और शिक्षा से; बाज़ार की मूर्तियाँ भाषा की अशुद्धता से; और रंगमंच की मूर्तियाँ प्राप्त दार्शनिक प्रणालियों और मताग्रहों से। संज्ञानात्मक त्रुटि के इस वर्गीकरण ने प्रायोगिक पूर्वाग्रह संबंधी आधुनिक चिंताओं का पूर्वाभास दिया और अभियांत्रिक निर्णय के लिए आज भी प्रासंगिक है, जहाँ अतिविश्वास, पुष्टिकरण पूर्वाग्रह और पूर्वदृष्टांत पर निर्भरता संरचनात्मक विफलताओं की ओर ले जा सकते हैं।

सालोमन का भवन और रॉयल सोसाइटी पांडित्यवादी वाद-विवाद के स्थान पर बेकन ने अनुभवजन्य अन्वेषण के संगठित कार्यक्रमों का समर्थन किया: परिघटनाओं का व्यवस्थित प्रेक्षण, कारणों को पृथक् करने के लिए नियंत्रित प्रयोग, परिणामों का सावधानीपूर्वक अभिलेखन और संचित साक्ष्यों से आगमनात्मक सामान्यीकरण। उनकी आदर्शलोक संबंधी कृति *New Atlantis* (1627) में "सालोमन का भवन" वर्णित था—प्रयोग, सहयोग और ज्ञान के व्यावहारिक अनुप्रयोग के माध्यम से प्रकृति के व्यवस्थित अन्वेषण को समर्पित राज्य-प्रायोजित संस्था। इस दृष्टि ने रॉयल सोसाइटी (1660) के संस्थापकों को सीधे प्रेरित किया, जो स्वयं को बेकन के कार्यक्रम को मूर्त रूप देने वाला मानते थे। पदार्थ-सामर्थ्य, वायु-दाब और यांत्रिक उपकरणों पर सोसाइटी के आरंभिक प्रयोगों ने वह संस्थागत ढाँचा स्थापित किया जिसके भीतर हुक, बॉयल और न्यूटन ने कार्य किया।

सीमाएँ और विरासत यह ध्यान देना चाहिए कि बेकन स्वयं प्रकृति के अन्वेषण के साधन के रूप में गणित के प्रति संशयशील थे—यह एक महत्त्वपूर्ण सीमा थी जो उन्हें गैलीलियो और देकार्त से अलग करती है। प्राकृतिक इतिहास और रसायन के लिए शक्तिशाली उनकी आगमनात्मक विधि यांत्रिकी के लिए कम उपयुक्त सिद्ध हुई, जहाँ उदाहरणों के शुद्ध गणन के बजाय सिद्धांतों से गणितीय निगमन अधिक फलदायी सिद्ध हुआ। फिर भी प्राधिकार के स्थान पर प्रयोग पर उनके आग्रह और संगठित अनुसंधान की उनकी दृष्टि ने उस संस्कृति को आकार दिया जिसके भीतर अंततः गणितीय भौतिकी फली-फूली।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संरचनात्मक अभियांत्रिकी के लिए बेकन का योगदान प्राविधिक के बजाय कार्यपद्धतिगत है। संरचित प्रयोग पर उनका बल उस वैज्ञानिक विधि का अभिन्न अंग बना जिसका प्रयोग अभियंता पदार्थ-व्यवहार का अभिलक्षण करने, विश्लेषणात्मक प्रतिरूपों का मान्यकरण करने और अभिकल्प प्रक्रियाएँ विकसित करने के लिए करते हैं। आधुनिक संरचनात्मक प्रयोगशाला संगठित अनुभवजन्य अन्वेषण की बेकन की दृष्टि की प्रत्यक्ष वंशज है।

6.5.2 निकोलस कोपर्निकस (1473–1543)

जीवन

निकोलस कोपर्निकस का जन्म 1473 में रॉयल प्रशा (उस समय पोलैंड राज्य का भाग) के तोरून में हुआ। दस वर्ष की आयु में अनाथ हुए कोपर्निकस का पालन-पोषण उनके मामा ने किया, जो बिशप थे और जिन्होंने उन्हें उत्कृष्ट शिक्षा प्रदान की। कोपर्निकस ने क्राकोव विश्वविद्यालय में और बाद में इटली में—बोलोन्या (विधि और खगोलशास्त्र), पादुआ (चिकित्सा) तथा फ़ेरारा (धर्मविधान-विधि)—अध्ययन किया। उन्होंने अपने वयस्क जीवन का अधिकांश भाग फ्राउएनबुर्ग महागिरजाघर में कैनन के रूप में बिताया, जहाँ उनके धर्म-संस्थागत कर्तव्यों ने खगोलीय प्रेक्षणों और गणितीय परिकलनों के लिए समय छोड़ा।

कोपर्निकस ने अनेक दशकों में अपना सूर्यकेंद्रीय सिद्धांत विकसित किया; लगभग 1514 में उन्होंने मित्रों के बीच एक संक्षिप्त पांडुलिपि (*Commentariolus*) प्रसारित की, किंतु पूर्ण प्रकाशन को जीवन के अंतिम समय तक स्थगित रखा। किंवदंती के अनुसार उन्होंने 1543 में मृत्युशय्या पर अपनी महान कृति की प्रथम मुद्रित प्रति प्राप्त की।

De Revolutionibus और यांत्रिकी के लिए उसका महत्त्व कोपर्निकस की *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (आकाशीय गोलकों के परिक्रमण पर) (Copernicus, 1995), जो 1543 में प्रकाशित हुई, ने प्रस्तावित किया कि पृथ्वी और ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हैं—यह परिकल्पना सामान्य बुद्धि और प्राचीन तथा मध्ययुगीन ब्रह्मांड-विज्ञान के संचित प्राधिकार, दोनों का खंडन करती थी। संरचनात्मक यांत्रिकी के लिए इसका महत्त्व स्वयं सूर्यकेंद्रीय प्रतिरूप में नहीं, बल्कि उसके द्वारा अपेक्षित ज्ञानमीमांसात्मक परिवर्तन में है: गणितीय प्रतिरूपण ऐसे सत्यों को प्रकट कर सकता था जो प्रत्यक्ष ऐंद्रिय प्रेक्षण का खंडन करते थे।

पृथ्वी को ही गतिमान होने की अनुमति देकर कोपर्निकस ने प्राकृतिक विराम और प्राकृतिक गति के बीच अरस्तूवादी भेद को अंतर्निहित रूप से चुनौती दी। गति अब ब्रह्मांड के केंद्र से बँधा निरपेक्ष गुण नहीं, बल्कि प्रेक्षक के निर्देश-तंत्र पर निर्भर सापेक्ष गुण थी। इस संकल्पनात्मक विच्छेद ने अरस्तूवादी शुद्धगतिकी की शताब्दियों पुरानी परंपरा को दुर्बल किया और जड़त्व, सापेक्ष गति तथा निर्देश-तंत्रों की बाद की पुनर्संकल्पनाओं का मार्ग खोला, जो चिरसम्मत यांत्रिकी के केंद्र में आने वाली थीं।

कोपर्निकस ने प्रदर्शित किया कि गणितीय रूप से सुसंगत और आंतरिक रूप से संगत प्रतिरूप दैनिक अनुभव पर आधारित प्रतिरूप की तुलना में वास्तविकता का अधिक यथार्थ वर्णन दे सकता है। इस अर्थ में गणितीय संगति को वर्णनात्मक सहायक से उठाकर भौतिक सत्य की कसौटी बना दिया गया। ऐंद्रिय साक्ष्य से अधिक गणितीय अमूर्तन पर विश्वास करने वाली इस बौद्धिक छलाँग ने यांत्रिकी को अनुभवजन्य शिल्प के बजाय सार्वभौमिक, नियम-आधारित विज्ञान मानने की आधारशिला रखी।

कोपर्निकसी क्रांति ने अंतर्निहित रूप से निर्देश-तंत्रों की समस्या भी प्रस्तुत की: पृथ्वी से देखी गई गतियाँ निरपेक्ष नहीं, बल्कि गतिमान मंच के सापेक्ष होती हैं। इस बोध ने बाद में जड़त्वीय निर्देश-तंत्र और आभासी (काल्पनिक) बल जैसी संकल्पनाएँ आवश्यक बनाईं; ये विचार गतिकी में और अंततः त्वरण, कंपन तथा भूकंपीय उत्तेजन से संबद्ध संरचनात्मक अभियांत्रिकी विश्लेषणों में आज भी अनिवार्य हैं।

तथापि, यह ध्यान देना चाहिए कि कोपर्निकस ने वृत्ताकार कक्षाएँ और अधिचक्र बनाए रखे तथा भौतिक कारणता से अधिक गणितीय सामंजस्य को प्राथमिकता दी। सूर्यकेंद्रीयता के पूर्ण यांत्रिक परिणाम केवल केप्लर द्वारा वृत्ताकार गति के परित्याग और न्यूटन द्वारा सार्वभौमिक गतिकी के सूत्रीकरण के साथ उभरने वाले थे।

कोपर्निकसी तंत्र में अंतर्निहित प्राकृतिक नियम की सार्वभौमिकता—जिसे डेढ़ शताब्दी बाद न्यूटन ने पूर्णतः मूर्त किया—संरचनात्मक अभियांत्रिकी के संपूर्ण उद्यम का आधार है: साम्य और गति के समान सिद्धांत लागू होते हैं, चाहे कोई रोमन मेहराब, गॉथिक वॉल्ट अथवा आधुनिक गगनचुंबी भवन का विश्लेषण करे।

समीक्षा प्रति

6.6 आद्य-स्थैतिकी से वैज्ञानिक क्रांति तक

यहाँ समूहित व्यक्तित्व विरासत में मिले सिद्धांतों से *प्रयोग* और *मापन* पर आधारित यांत्रिकी की ओर संक्रमण को चिह्नित करते हैं। बल, जड़त्व और साम्य जैसी संकल्पनाओं को प्रेक्षण और गणितीय संश्लेषण के माध्यम से पुनः सूत्रित किया गया। यह खंड उस निर्णायक परिवर्तन को अभिलिखित करता है जिसके द्वारा स्थैतिकी और गतिकी भौतिक रूप से आधारित विज्ञान बने।

6.6.1 साइमन स्टेविन (1548–1620)

साइमन स्टेविन का जन्म 1548 में स्पेनी नीदरलैंड (वर्तमान बेल्जियम) के ब्रूज में हुआ। उनकी औपचारिक शिक्षा के विषय में निश्चित रूप से बहुत कम ज्ञात है, किंतु उनका प्रारंभिक जीवन-वृत्त निश्चय ही व्यावहारिक था: अकादमिक जीवन में प्रवेश से पूर्व उन्होंने लिपिक, बहीखाता-लेखक और अभियंता के रूप में कार्य किया। अपने अनेक समकालीनों के विपरीत स्टेविन विश्वविद्यालय-प्रशिक्षित मानवतावादी परंपरा से नहीं आए थे। इसके बजाय उनका बौद्धिक विकास वाणिज्य, अभियांत्रिक कार्यों और अनुप्रयुक्त समस्या-समाधान के सीधे संपर्क से आकार लिया। इस पृष्ठभूमि ने उनके वैज्ञानिक दृष्टिकोण को गहराई से प्रभावित किया और उनकी यांत्रिकी को पांडित्यवादी अमूर्तन के बजाय ठोस भौतिक तर्क पर आधारित किया।

1580 के दशक के उत्तरार्ध में स्टेविन नासाउ के राजकुमार मॉरिस की सेवा में आए और सैन्य अभियंता, सलाहकार तथा शिक्षक बने। इस संबंध ने उन्हें गणित, दुर्ग-अभिकल्प, द्रवचालन और यांत्रिकी के संगम पर रखा तथा उनके वैज्ञानिक कार्य के लिए व्यावहारिक प्रेरणा और संस्थागत समर्थन, दोनों प्रदान किए।

साइमन स्टेविन (1548–1620) (Stevin, 1955–1966) ने स्थैतिकी को गुणात्मक वर्णन से कठोर गणितीय विश्लेषण में मूलतः रूपांतरित किया और ऐसे सिद्धांत स्थापित किए जो आज भी संरचनात्मक अभियांत्रिकी के केंद्र में हैं। डच भाषा में 1586 में प्रकाशित उनकी *De Beghinselen der Weeghconst* (तौलने की कला के सिद्धांत) आर्किमिडीज़ के बाद बल-साम्य का प्रथम व्यापक गणितीय उपचार थी और अनेक दृष्टियों से उसने प्राचीन आचार्य को पीछे छोड़ दिया।

आनत समतल स्टेविन का सर्वाधिक प्रसिद्ध योगदान आनत समतल के नियम का सुप्रसिद्ध *clootcrans* (गोलकों की माला) वैचारिक प्रयोग द्वारा उनका प्रदर्शन है। उन्होंने समान अंतराल पर स्थित गोलकों की एक शृंखला की कल्पना की जो त्रिकोणीय प्रिज़्म पर लिपटी थी: चूँकि शृंखला स्वतः नहीं चलती, प्रत्येक ओर के बल भुजाओं की लंबाइयों और फलतः कोणों के ज्या के समानुपाती होने चाहिए। इस सुरुचिपूर्ण प्रमाण—जिसे स्टेविन ने “Wonder en is gheen wonder” (जो अद्भुत प्रतीत होता है, वह अद्भुत नहीं है) ध्येय-वाक्य से स्मरणीय बनाया—ने गतिकी अथवा आभासी विस्थापनों का सहारा लिए बिना आनत पृष्ठों के अनुदिश बलों का वियोजन स्थापित किया।

बलों का संयोजन और साम्य इस आधार से स्टेविन ने बलों का समांतर चतुर्भुज विकसित किया और प्रदर्शित किया कि किसी बिंदु पर कार्यरत दो बलों को समांतर चतुर्भुज पूर्ण करके एक परिणामी बल में संयोजित किया जा सकता है। समस्त परवर्ती सदिश यांत्रिकी का आधार बने इस सिद्धांत ने संरचनाओं में बल-तंत्रों का व्यवस्थित विश्लेषण संभव किया। स्टेविन ने दिखाया कि बलों को घटकों में कैसे वियोजित किया जाए, अनेक बलों को परिणामी बलों में कैसे संयोजित किया जाए और अनेक बलों के अधीन पिंडों के लिए साम्य-दशाएँ कैसे निर्धारित की जाएँ—ये संरचनात्मक विश्लेषण की अनिवार्य संक्रियाएँ हैं।

आभासी कार्य और सामान्य साम्य स्टेविन ने आभासी कार्य के तुल्य सिद्धांत भी सूत्रित किए और पहचाना कि साम्य तब प्राप्त होता है जब छोटे आभासी विस्थापन कोई निवल कार्य उत्पन्न नहीं करते। यद्यपि इसे विश्लेषणात्मक यांत्रिकी की बाद की औपचारिक भाषा में व्यक्त नहीं किया गया था, इस अंतर्दृष्टि ने संरचनात्मक विश्लेषण की सर्वाधिक शक्तिशाली विधियों में से एक का पूर्वाभास दिया। आभासी कार्य के सिद्धांत को बाद में दालाँबेर, लाग्रांज और अन्य ने सामान्यीकृत किया तथा वह स्थैतिकतः अनिर्धार्य तंत्रों के विश्लेषण के लिए अपरिहार्य बन गया।

द्रवस्थैतिकी, संकेतन और अभियांत्रिक नीतिबोध स्थैतिकी से आगे स्टेविन ने द्रवस्थैतिकी में महत्त्वपूर्ण योगदान किए और प्रदर्शित किया कि किसी तरल में दाब केवल गहराई पर निर्भर करता है, धारक पात्र के आकार पर नहीं—यही द्रवस्थैतिक विरोधाभास है। वे दशमलव संकेतन के व्यवस्थित उपयोग के अग्रदूत और वैज्ञानिक कृतियाँ लैटिन के बजाय जनभाषा में लिखने के प्रबल समर्थक भी थे। डच में लिखने का उनका निर्णय इस विश्वास को दर्शाता था कि वैज्ञानिक ज्ञान अभियंताओं, शिल्पकारों और व्यवहारकर्ताओं के लिए सुलभ होना चाहिए, केवल विद्वत् अभिजन तक सीमित नहीं।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विज्ञान की यह व्यावहारिक और समतावादी संकल्पना—अभियांत्रिकी की सेवा में गणित—स्टेविन को पुनर्जागरणकालीन प्राकृतिक दर्शन और आधुनिक अभियांत्रिक विज्ञान के बीच संक्रमणशील व्यक्तित्व के रूप में चिह्नित करती है। उनके कार्य ने स्थैतिकी, संरचनात्मक विश्लेषण और अनुप्रयुक्त यांत्रिकी के बाद के विकास के लिए संकल्पनात्मक आधार तैयार किया।

6.6.2 गैलीलियो गैलिली (1564–1642)

उद्गम, शिक्षा और अन्वेषण की नई शैली गैलीलियो गैलिली का जन्म 1564 में पीसा के एक साधारण साधनों वाले परिवार में हुआ। उनके पिता विंचेंज़ो संशयशील और जिज्ञासु मन वाले संगीतज्ञ तथा सिद्धांतकार थे—ये गुण उनके पुत्र को विरासत में मिलने वाले थे। लैटिन, यूनानी और तर्कशास्त्र जैसे चिरसम्मत विषयों में शिक्षित (चित्र 6.9a) गैलीलियो प्राकृतिक दर्शन के आधुनिक विज्ञान में रूपांतरण के प्रमुख व्यक्तित्व बनने वाले थे। उनका जीवन यूरोप में गहन बौद्धिक उथल-पुथल के काल के साथ घटित हुआ, जब विज्ञान, धर्म और राजनीति के पारंपरिक प्राधिकारों ने अनुभवजन्य अन्वेषण और गणितीय तर्क के नए रूपों से अभूतपूर्व चुनौतियों का सामना किया।

उन्हें व्यापक रूप से उन प्रथम व्यक्तियों में माना जाता है जिन्होंने वह अपनाया जिसे आज हम *वैज्ञानिक विधि* कहते हैं—परिकल्पनाएँ सूत्रित करना, प्रयोग करना और अनुभवजन्य परिणामों की व्याख्या करना। यद्यपि "विज्ञान" शब्द ने अभी अपना आधुनिक अर्थ ग्रहण नहीं किया था, 1642 में गैलीलियो की मृत्यु तक पूरे यूरोप में अन्वेषण की नई विधि आकार ले रही थी। यह विधि पाठ्य प्राधिकार और तार्किक निगमन पर मध्ययुगीन निर्भरता से हटकर प्रत्यक्ष प्रेक्षण, गणितीय वर्णन और प्रायोगिक सत्यापन पर नए बल की ओर मूलभूत परिवर्तन थी।

गैलीलियो विज्ञान, दर्शन, अभियांत्रिकी और संस्थागत प्राधिकार के संगम पर स्थित हैं। उनके जीवन ने न केवल प्रायोगिक यांत्रिकी और आधुनिक भौतिकी के प्रभात को चिह्नित किया, बल्कि उभरते वैज्ञानिक तर्क और स्थापित मताधारित विश्वासों के बीच तनाव को भी मूर्त रूप दिया।

आगे हम उनके जीवन-वृत्त के क्रम का अन्वेषण करते हैं—उनके निर्माणकारी वर्षों और Tower of Pisa पर किए गए उनके प्रसिद्ध (यद्यपि संभवतः अप्रामाणिक) प्रयोगों से लेकर उन आकाशीय उद्घाटनों तक, जिन्होंने अरस्तूवादी ब्रह्मांड-विज्ञान को चुनौती दी और कैथोलिक चर्च को कुपित किया। गैलीलियो की *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano* (दो प्रमुख विश्व-तंत्रों—टॉलेमी और कोपर्निकस के तंत्रों—से संबंधित संवाद) और *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali* (यांत्रिकी और स्थानीय गतियों से संबंधित दो नए विज्ञानों पर वार्ताएँ और गणितीय प्रदर्शन) केवल वैज्ञानिक ग्रंथ नहीं हैं; वे प्रेक्षण और गणितीय अमूर्तन में निहित नई ज्ञानमीमांसा के बौद्धिक घोषणापत्र हैं।

इस खंड का अंतिम भाग संरचनात्मक अभियंताओं के लिए विशेष महत्त्व के विचार—मापानुपात—पर केंद्रित है। गैलीलियो ने सर्वप्रथम यह सिद्धांत प्रतिपादित किया कि प्रकृति समान रूप से मापानुपाती नहीं होती; उन्होंने पहचाना कि बड़ी संरचनाओं को छोटी संरचनाओं से मूलतः भिन्न यांत्रिक बाधाओं का सामना करना पड़ता है। यह अंतर्दृष्टि अंततः शताब्दियों बाद गौदी, इस्लर और मुस्मेची की अभिकल्प-प्रथाओं में प्रतिध्वनित हुई—जिन्होंने गैलीलियो की भाँति भौतिक प्रयोग और ज्यामितीय अंतर्दृष्टि के माध्यम से संरचनात्मक रूप खोजा।

इस प्रकार गैलीलियो की विरासत उनकी खोजों से बहुत आगे विस्तृत है; वह उनके द्वारा प्रवर्तित विधियों, उनके द्वारा सहन किए गए प्रतिरोध और उनके द्वारा उद्घाटित संरचनात्मक कल्पना में निहित है।

दो नए विज्ञान और परिमाणात्मक संरचनात्मक यांत्रिकी गैलीलियो गैलिली (1564–1642) (Galilei, 1638 PDF) को उचित ही परिमाणात्मक विज्ञान के रूप में संरचनात्मक यांत्रिकी का संस्थापक माना जाता है। उनकी *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali* (दो नए विज्ञानों से संबंधित वार्ताएँ और गणितीय प्रदर्शन), जो गैलीलियो की गृहबंदी के समय 1638 में लेडेन में प्रकाशित हुई, ने पहली बार पदार्थ-सामर्थ्य और संरचनाओं की यांत्रिकी के अध्ययन को गणितीय आधार पर स्थापित किया।

शीर्षक के "दो नए विज्ञान" गति का विज्ञान (शुद्धगतिकी और गतिकी) तथा पदार्थों और संरचनाओं के सामर्थ्य का विज्ञान हैं। दूसरा संवाद के प्रथम दो "दिनों" में आता है और अभियांत्रिकी के लिए सीधे प्रासंगिक समस्याओं पर विचार

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करता है: बड़ी संरचनाओं को छोटी संरचनाओं की तुलना में अनुपाततः अधिक पदार्थ क्यों चाहिए? किसी धरन का टूटने के प्रति प्रतिरोध उसकी विमाओं पर कैसे निर्भर करता है? किसी रस्सी, स्तंभ अथवा अस्थि का सामर्थ्य किससे निर्धारित होता है?

ब्रैकट धरन का गैलीलियो का विश्लेषण आनमन पर सभी परवर्ती कार्यों का आरंभ-बिंदु बना। उन्होंने दीवार से बाहर निकली और मुक्त सिरे पर भारित धरन का प्रतिरूप बनाया तथा पहचाना कि विफलता अंतःस्थापित परिच्छेद के निचले किनारे के परितः घूर्णन से होती है। उनका निष्कर्ष—कि भंजन भार धरन की चौड़ाई और उसकी गहराई के वर्ग के समानुपाती तथा उसकी लंबाई के व्युत्क्रमानुपाती है—गुणात्मक रूप से सही था, यद्यपि परिच्छेद में समान तनन प्रतिबल की उनकी मान्यता ने परिमाणात्मक त्रुटि उत्पन्न की। सही प्रतिबल-वितरण परवर्ती शताब्दियों में पारॉं, कूलॉम और नाविए के कार्य तक स्थापित नहीं होने वाला था।

गैलीलियो की संभवतः सर्वाधिक गहन अंतर्दृष्टि मापानुपात नियमों से संबंधित थी। उन्होंने प्रदर्शित किया कि ज्यामितीय समरूपता यांत्रिक समरूपता को अंतर्निहित नहीं करती: सभी विमाओं में समान रूप से बढ़ाई गई संरचना अनुपाततः दुर्बल होती जाती है, क्योंकि आयतन (और फलतः भार) रैखिक विमा के घन के साथ बढ़ता है, जबकि अनुप्रस्थ-काट क्षेत्रफल (और फलतः सामर्थ्य) केवल वर्ग के साथ बढ़ता है। यह “वर्ग-घन नियम” समझाता है कि बड़े पशुओं की अस्थियाँ छोटे पशुओं की तुलना में अनुपाततः अधिक मोटी क्यों होती हैं, विशाल कीट असंभव क्यों हैं और संरचनात्मक अभिकल्प मापनी-प्रभावों को ध्यान में रखे बिना छोटे प्रतिरूपों से बड़े भवनों तक सरल बहिर्वेशन क्यों नहीं कर सकता। इस बोध ने अनुभवजन्य आकार-निर्धारण नियमों से विश्लेषणात्मक संरचनात्मक अभिकल्प की ओर निर्णायक विच्छेद चिह्नित किया।

गणितीय विश्लेषण को प्रायोगिक प्रेक्षण से जोड़ने और सैद्धांतिक पूर्वानुमानों को भौतिक मापनों के विरुद्ध जाँचने वाली गैलीलियो की विधि ने संरचनात्मक यांत्रिकी का प्रतिमान स्थापित किया। उनके कार्य ने परंपरा और अनुभव द्वारा निर्देशित शिल्प से सार्वभौमिक सिद्धांतों पर आधारित अनुप्रयुक्त विज्ञान में भवन-निर्माण के रूपांतरण का आरंभ किया।

भौतिकी: पीसा की मीनार 1581 में चिकित्सा के अध्ययन के लिए आरंभ में पीसा विश्वविद्यालय में प्रवेश लेने वाले गैलीलियो ने शीघ्र ही गणित और दर्शन के पक्ष में वह मार्ग त्याग दिया। यद्यपि उन्होंने उपाधि के बिना विश्वविद्यालय छोड़ दिया, 1589 में वे पीसा में गणित के प्राध्यापक नियुक्त हुए; उस समय वे केवल 25 वर्ष के थे। यह नियुक्ति उस बढ़ती मान्यता को दर्शाती थी कि गणितीय ज्ञान का व्यावहारिक मूल्य था, जबकि अनेक पारंपरिक विद्वान अभी भी गणित को प्राकृतिक दर्शन के अधीन मानते थे।[6]

व्यापक रूप से दोहराई जाने वाली किंतु ऐतिहासिक रूप से अनिश्चित कथा के अनुसार गैलीलियो ने पीसा की झुकी मीनार से भिन्न द्रव्यमान वाली वस्तुएँ गिराकर प्रदर्शित किया कि वे समान दर से गिरती हैं। यह वृत्तांत गैलीलियो की मृत्यु के बहुत बाद लिखी गई विवियानी की 1654 की जीवनी *Racconto storico della vita di Galileo* से उत्पन्न होता है। प्रयोग वर्णित रूप में हुआ हो अथवा नहीं, यह अरस्तूवादी भौतिकी को गैलीलियो की चुनौती का सार ग्रहण करता है।

जैसा Moody, 1951 ने दिखाया है, मुक्त पतन प्रयोग, प्रतिरोध और निर्वात में गति पर गैलीलियो के विचार न केवल अरस्तू से, बल्कि एवेम्पेस जैसे मध्ययुगीन आलोचकों और बाद के भाष्यकारों से भी आकार लिए थे।

अपनी 1590 की कृति *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum* में गैलीलियो ने गति पर क्रांतिकारी विचार प्रस्तुत किए: (1) द्रव्यमान से निरपेक्ष वस्तुएँ समान दर से गिरती हैं; (2) वेग समय के साथ रैखिक रूप से बढ़ता है; और (3) तय की गई दूरी व्यतीत समय के वर्ग के समानुपाती होती है। इन अंतर्दृष्टियों ने गतिकी की आधारशिला रखी और प्रायोगिक यांत्रिकी के युग का सूत्रपात किया। इससे भी अधिक महत्त्वपूर्ण यह है कि उन्होंने प्रदर्शित किया कि गणितीय संबंध भौतिक परिघटनाओं का अभूतपूर्व यथार्थता से वर्णन कर सकते हैं और उस परिमाणात्मक उपागम का प्रतिरूप प्रदान किया जो आधुनिक भौतिकी को परिभाषित करने वाला था।

अरस्तूवादी रूढ़िवाद की गैलीलियो की खुली आलोचना और उनकी तीक्ष्ण वाद-विवाद शैली ने उनके शत्रु बनाए। 1592 में उनकी संविदा का नवीनीकरण नहीं हुआ।

खगोलशास्त्र: संवाद उसी वर्ष गैलीलियो ने पादुआ विश्वविद्यालय में अधिक प्रतिष्ठित पद प्राप्त किया, जहाँ वे 1610 तक रहे। वहाँ उनका समय अत्यंत उत्पादक रहा: उन्होंने भरे हुए व्याख्यान-कक्षों में पढ़ाया, अपने अभिकल्प के उपकरण बेचे

[6] आधुनिक काल में यह मान्यता अकादमिक क्षेत्र से बहुत आगे विस्तृत है: गणितज्ञों का वॉल स्ट्रीट प्रतिष्ठानों द्वारा नियुक्त किया जाना असामान्य नहीं है, जहाँ परिमाणात्मक विश्लेषण, प्रसंभाव्य प्रतिरूपण और इष्टतमीकरण में उनकी विशेषज्ञता जटिल वित्तीय समस्याओं पर लागू की जाती है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और गणित तथा अभियांत्रिकी में निजी परामर्श दिए। उन्होंने स्थैतिकी के सिद्धांतों पर विचार करने वाली *Della Scienza Meccanica* भी लिखी। इस कृति ने प्रदर्शित किया कि गणितीय विश्लेषण को व्यावहारिक यांत्रिक समस्याओं पर कैसे लागू किया जा सकता है और सैद्धांतिक ज्ञान तथा अभियांत्रिक अनुप्रयोग के बीच अंतराल को पाटा।

1609 में दूर देखने के लिए एक डच आविष्कार की जानकारी मिलने पर गैलीलियो ने अपनी telescope बनाई। उसकी क्षमताओं ने स्वयं उन्हें भी चकित किया। उससे उन्होंने चंद्रमा का गर्तयुक्त पृष्ठ, शुक्र की कलाएँ, आकाशगंगा में असंख्य तारे और—सबसे विस्मयकारी—बृहस्पति की परिक्रमा करते चार चंद्रमा देखे।

उनके सर्वाधिक उलझाने वाले प्रेक्षणों में शनि था, जो उनकी आदिम दूरबीन से विचित्र आकार का दिखाई देता था। जिसे आज हम शनि के वलय जानते हैं उसे विभेदित न कर पाने के कारण गैलीलियो ने त्रिगुण ग्रह अथवा हत्थों वाला ग्रह जैसा कुछ देखा। प्राथमिकता स्थापित करते हुए गोपनीयता बनाए रखने की विद्वत् परिपाटी का अनुसरण कर उन्होंने 1610 में विपर्यस्ताक्षरी से इस खोज की घोषणा की: *Smaismrmilmepoetaleumibunenugttauiras*, जिसे कूटमुक्त करने पर *Altissimum planetam tergeminum observavi* (“मैंने उच्चतम ग्रह को त्रिगुण देखा है”) प्रकट हुआ। इस कूटलेखीय उपागम ने खगोलविदों को अपनी खोजों की अग्रता का दावा करने के साथ उन्हें अपने प्रेक्षणों की पुष्टि के लिए समय दिया—यह ऐसी प्रथा थी जो प्रारंभिक दूरबीन-खगोलशास्त्र की प्रतिस्पर्धात्मक प्रकृति और स्थापित ब्रह्मांड-विज्ञान संबंधी विश्वासों को चुनौती देने में अपेक्षित सावधानी, दोनों को दर्शाती थी।

1610 में *Sidereus Nuncius* (“तारकीय संदेशवाहक”) के रूप में प्रकाशित इन खोजों ने अरस्तूवादी ब्रह्मांड-विज्ञान की नींव हिला दी। कोसिमो द्वितीय दे मेदिची की कृपा प्राप्त करने के लिए गैलीलियो ने चंद्रमाओं को “मेदिची तारे” नाम दिया और संरक्षण तथा अंतरराष्ट्रीय प्रसिद्धि, दोनों प्राप्त किए। यह रणनीतिक नामकरण दर्शाता है कि आरंभिक आधुनिक काल में वैज्ञानिक उन्नति केवल खोज पर ही नहीं, बल्कि संरक्षण और राजनीतिक प्रभाव के जटिल संजालों में मार्ग बनाने पर भी निर्भर थी।

1611 में उन्हें आरंभिक वैज्ञानिक संस्थाओं में से एक *Accademia dei Lincei* में सम्मिलित किया गया। किंतु विवाद आसन्न था।

गैलीलियो के प्रेक्षणों ने कोपर्निकसी सूर्यकेंद्रीयता—यह विचार कि पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा करती है—का समर्थन किया। किंतु चर्च ने हाल ही में इस सिद्धांत को विधर्मी घोषित किया था। 1616 में कोपर्निकस की *De Revolutionibus Orbium Coelestium* को *Index Librorum Prohibitorum*[7] रखा गया और कार्डिनल बेलार्मीन ने गैलीलियो को यह विचार त्यागने का निर्देश दिया।

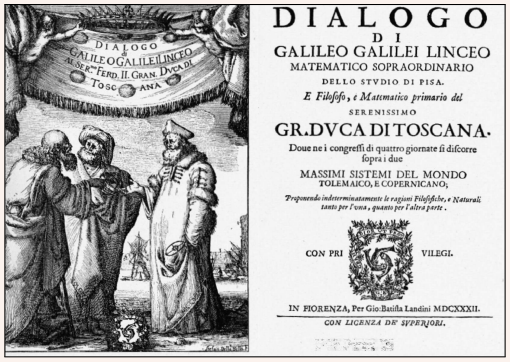
कुछ समय तक गैलीलियो ने पालन किया। किंतु 1623 में उनके प्रशंसक कार्डिनल बार्बेरिनी पोप अर्बन VIII बने। प्रोत्साहित होकर गैलीलियो ने *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano* (दो प्रमुख विश्व-तंत्रों—टॉलेमी और कोपर्निकस के तंत्रों—से संबंधित संवाद),(Galilei, 1632 PDF) चित्र 6.8, प्रकाशित की।

तीन वार्ताकारों—सिम्प्लीचियो (अरस्तूवादी), साग्रेदो (तटस्थ सामान्यजन) और सालिवयाती (कोपर्निकसी)—के बीच विचार-विमर्श के रूप में प्रस्तुत संवाद किंचित भी निष्पक्ष नहीं था। अकेले सिम्प्लीचियो के नाम (“मूर्ख”) ने लेखक का पक्ष प्रकट कर दिया।

आइंस्टाइन ने बाद में लिखा:

[7]रोमन धर्माधिकरण द्वारा अनुरक्षित *Index Librorum Prohibitorum* इतिहास में अद्वितीय नहीं था। असहमति व्यक्त करने वाले अथवा वैचारिक रूप से संकटकारी साहित्य को दबाने के समान प्रयास सर्वसत्तावादी शासन-व्यवस्थाओं ने किए, विशेषतः नाज़ियों के अधीन, जिन्होंने पुस्तक-दहन आयोजित किए और “गैर-जर्मन” लेखकों की निषेध-सूचियाँ रखीं, तथा सोवियत संघ ने, जिसने विद्रोही ग्रंथों को सेंसर किया और निषिद्ध कृतियों को पुस्तकालयों के प्रतिबंधित “विशेष भंडारण” खंडों (*spetskhran*) में सीमित किया। हाल में संयुक्त राज्य ने स्थानीय स्तरों पर पुस्तक-प्रतिबंधों का पुनरुत्थान देखा है, जिनमें प्रायः प्रजाति, लिंग और लैंगिकता संबंधी कृतियाँ लक्ष्य बनती हैं—विशेषतः ट्रंप युग द्वारा आकार दिए गए राजनीतिक वातावरण में—जिससे सेंसरशिप और बौद्धिक स्वतंत्रता संबंधी चिंताएँ पुनः बढ़ी हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 6.8: गैलीलियो गैलिली के संवाद (Galilei, 1632)

> यहाँ एक ऐसा व्यक्ति प्रकट होता है जिसमें विवेकपूर्ण चिंतन के प्रतिनिधि के रूप में खड़े होने की उत्कट इच्छा, बुद्धि और साहस है...
>
> Einstein, 1954 *Ideas and Opinions*

गैलीलियो अपनी सीमा से आगे बढ़ गए थे। चर्च प्रसन्न नहीं था।

अंतराल: धर्माधिकरण *Dialogues* के प्रकाशन के शीघ्र बाद inquisition ने उसकी बिक्री पर प्रतिबंध लगा दिया और गैलीलियो को विचारण के लिए रोम आने का आदेश दिया गया। जून 1633 में उन्हें "विधर्म के प्रबल संदेह" का दोषी ठहराया गया और कारावास का उनका दंड तुरंत आजीवन गृहबंदी में बदल दिया गया। उन्हें सूर्यकेंद्रीयता संबंधी अपने विचार सार्वजनिक रूप से वापस लेने के लिए बाध्य किया गया—यद्यपि किंवदंती है कि अपने प्रत्याख्यान के अंत में उन्होंने अवज्ञापूर्ण शब्द *e pur si muove* ("फिर भी यह चलती है") बुदबुदाए[8]। गैलीलियो का विचारण विज्ञान और संस्थागत प्राधिकार के संबंध में निर्णायक क्षण बना; उसने स्थापित रूढ़िवाद को चुनौती देने की व्यक्तिगत लागत भी प्रदर्शित की और उन्हें बौद्धिक स्वतंत्रता के शहीद के रूप में स्थापित किया।[9]

पोप पॉल III द्वारा 1542 में स्थापित रोमन धर्माधिकरण विधर्म का उन्मूलन करने और विशेषतः प्रोटेस्टेंट सुधार आंदोलन की प्रतिक्रिया में कैथोलिक रूढ़िवाद को सुरक्षित रखने के लिए बनाए गए न्यायाधिकरणों की प्रणाली थी। पूर्ववर्ती मध्ययुगीन धर्माधिकरण के विपरीत यह पवित्र कार्यालय की सभा के अधीन केंद्रीकृत था और सीधे पोपीय पर्यवेक्षण में कार्य करता था। यद्यपि इसका उद्देश्य मताधारित त्रुटि को रोकना था, इसने असहमति भी दबाई, प्रकाशनों को सेंसर किया और विज्ञान तथा धर्म के बीच सीमा का अनुशासन किया। गैलीलियो का मामला इसके सर्वाधिक कुख्यात प्रकरणों में से एक बना और मुक्त अन्वेषण तथा संस्थागत प्राधिकार के संघर्ष का प्रतीक बना।

[8] 1870 के दशक में गैलीलियो के विचारण-प्रलेखों के पूर्ण प्रकाशन के बाद से उनके दोषनिर्णय का संपूर्ण उत्तरदायित्व सामान्यतः कैथोलिक चर्च को दिया गया है। किंतु इससे उन अकादमिक दार्शनिकों की प्रभावशाली भूमिका अस्पष्ट हो जाती है जिन्होंने सर्वप्रथम धर्मशास्त्रियों को गैलीलियो के वैज्ञानिक सिद्धांतों को विधर्म के साथ मिलाने के लिए सहमत किया। 1979 में पोप जॉन पॉल II ने गैलीलियो के विचारण की औपचारिक जाँच आरंभ की, जिसकी परिणति 1992 में पोपीय आयोग की उस रिपोर्ट में हुई जिसने वेटिकन की त्रुटि स्वीकार की।

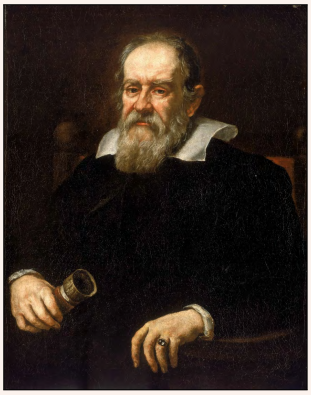
[9] प्रायः इसकी तुलना टेनेसी के 1925 के स्कोप्स "मंकी ट्रायल" से की जाती है, जिसमें सार्वजनिक विद्यालयों में विकासवाद की शिक्षा को राज्य के विधि-विधान के अधीन चुनौती दी गई और वैज्ञानिक विचारों तथा प्रचलित सामाजिक अथवा धार्मिक मानदंडों के बीच समान तनाव उजागर हुए। दुर्भाग्यवश, ट्रंप के अधीन 2025 में हमें समान दिशाओं में और पुनरुत्थान देखने पड़ सकते हैं, जैसे सार्वजनिक पुस्तकालयों में पुस्तकों को सेंसर करना, स्थापित विज्ञान को नकारना और टीकों के प्रमाणित मूल्य को अस्वीकार करना।

प्रारूप प्रतिकृति समीक्षा

कार्यपद्धति: वार्ताएँ 1634 में आरचेट्री स्थित अपने विला तक सीमित गैलीलियो ने उस कृति पर कार्य आरंभ किया जो उनकी अंतिम और संभवतः सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण पुस्तक बनने वाली थी: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali* (यांत्रिकी और स्थानीय गतियों से संबंधित दो नए विज्ञानों पर वार्ताएँ और गणितीय प्रदर्शन)। इस ग्रंथ ने उनके जीवन-वृत्त में पहले विकसित यांत्रिकी का विस्तार किया। यह कृति उनकी खगोलीय खोजों की तुलना में अभियांत्रिक विज्ञान के विकास के लिए अधिक प्रभावशाली सिद्ध होने वाली थी, क्योंकि इसने पदार्थ-व्यवहार और संरचनात्मक अनुक्रिया को समझने के लिए गणितीय आधार रखा।

पांडुलिपि (Galilei, 1638), जो चित्र 6.9b में दर्शाई गई है, को इटली से गुप्त रूप से बाहर ले जाया गया और धर्माधिकरण की पहुँच से परे लेडेन (नीदरलैंड) में 1638 में Elzevir द्वारा मुद्रित किया गया।

चार वर्ष बाद 1642 में गैलीलियो की मृत्यु हुई। दोषनिर्णय के कारण उन्हें 1737 में पुनः समाधिस्थ किए जाने तक एक अज्ञात स्थान पर दफनाया गया था।



(a) खगोलविद्, भौतिक विज्ञानी, अभियंता—सर्वोत्कृष्ट बहुविद्


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Apprello gli Elſeuirii. M. D. C. XXXVIII.

(b) *दो नए विज्ञानों से संबंधित वार्ताएँ* (Galilei, 1638)

चित्र 6.9: गैलीलियो गैलिली

विडंबना यह है कि धर्माधिकरण ने नई पुस्तक के विरुद्ध कोई कार्रवाई नहीं की। वास्तव में जब पचास प्रतियाँ रोम की पुस्तक-दुकानों तक पहुँचीं, वे शीघ्र बिक गईं।

दार्शनिक और धर्मशास्त्रीय विषयों पर विचार करने वाली *Dialogues* के विपरीत *Discourses* सुरक्षित रूप से भौतिक यांत्रिकी के क्षेत्र के भीतर रही, जैसा उसके उपशीर्षक *Mechanics and Local Motions* (सारणी 6.2) से संकेत मिलता है। नई कृति का स्वर अधिक प्राविधिक था और वह अंशतः अभियंताओं को संबोधित थी। ब्रह्मांड-विज्ञान संबंधी परिकल्पना के बजाय व्यावहारिक यांत्रिक समस्याओं पर केंद्रित होकर *Discourses* ने उन धर्मशास्त्रीय विवादों से बचाव किया जिन्होंने *Dialogues* को इतना संकटकारी बनाया था।

संरचनात्मक अभियंताओं के लिए दो विषय विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण हैं: ब्रैकट धरनों का सामर्थ्य (§7.2.2) और मापानुपात की धारणा। दूसरी धारणा केंद्रीय महत्त्व रखती है।

मापानुपात की धारणा आधुनिक संरचनात्मक अभियांत्रिकी के लिए मूलभूत है। संभवतः उसे पहली बार गैलीलियो ने प्रस्तुत किया—यद्यपि उस बीजगणितीय अथवा विमीय अर्थ में नहीं जिसका हम अब उपयोग करते हैं। वे यह पहचानने वाले प्रथम व्यक्ति थे कि प्रकृति में छोटे जीव अथवा वस्तुएँ केवल बड़ी वस्तुओं के छोटे किए गए रूप नहीं होते।

Discourses में प्रतिज्ञप्ति IX (द्वितीय दिवस) में गैलीलियो—सालिवयाती के माध्यम से बोलते हुए—कहते हैं:

> ...मैंने एक बार किसी अस्थि का आकार बनाया, जिसे तीन गुना लंबा किया [चित्र 6.10], और फिर उसे ऐसे अनुपात में मोटा किया कि वह बड़े पशु में उसी प्रकार कार्य कर सके जैसे छोटी अस्थि छोटे पशु की सेवा करती है: यहाँ चित्र हैं; आप देखते हैं कि बढ़ाई गई अस्थि का आकार कितना असंगत हो जाता है... वह अपने भार से कुचला हुआ और गिरा हुआ दिखाई देगा।
>
> Galilei, 1638 *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*

तालिका 6.2: गैलीलियो के संवादों और वार्ताओं के चार दिवस

	संवाद (Galilei, 1632)	वार्ताएँ (Galilei, 1638)
शीर्षक	दो विश्व-तंत्रों से संबंधित संवाद	दो नए विज्ञानों से संबंधित वार्ताएँ और गणितीय प्रदर्शन
उपशीर्षक	टॉलेमी और कोपर्निकस संबंधी	यांत्रिकी और स्थानीय गतियाँ
मुद्रित भाषा	इतालवी	लैटिन
दिवस		
1	अरस्तूवादी भौतिकी के विरुद्ध	पिंडों के पृथक्करण का प्रतिरोध
2	जड़त्व का नियम	संसंजन का कारण
3	खगोलीय परिघटनाओं का विश्लेषण	प्राकृतिक रूप से त्वरित गति
4	सौरमंडल की कोपर्निकसी व्याख्या	प्रक्षेप्यों की गति


DEL GALILEO. 129
E per vn breue esempio di questo che dico disegnai già la figura di vn'osso allungato solamente tre volte, & ingrossato con tal proportione, che potesse nel suo animale grande far l'vffizio proporzio-

चित्र 6.10: गैलीलियो द्वारा अस्थियों का मापानुपात (Galilei, 1638)

गैलीलियो के पास dimensional analysis के औपचारिक साधन नहीं थे, जिन्हें बाद में Vashy, 1892 ने प्रस्तुत किया। किंतु वे केंद्रीय विचार समझते थे: किसी अस्थि द्वारा समर्थित भार आयतन (L^3) के समान बढ़ता है, जबकि उसका सामर्थ्य केवल अनुप्रस्थ-काट क्षेत्रफल (L^2) के समान बढ़ता है। अतः 3 के गुणक से आकार बढ़ाने पर बढ़े हुए भार को समर्थन देने के लिए अस्थियाँ 3 गुने से अधिक चौड़ी—लगभग $3^{3/2} \approx 5$—होनी चाहिए।[10]

[10]गैलीलियो का गुणात्मक तर्क उस आधुनिक *size effect* संकल्पना का पूर्वाभास देता है जिसे Bažant, 1984 ने औपचारिक रूप दिया और Saouma and Barton, 1994 ने संशोधित व्युत्पत्ति प्रदान की; यह संरचनाओं का आकार बढ़ने पर उनके नाममात्र सामर्थ्य में होने वाली व्यवस्थित कमी को परिमाणित करती है और इसके अनुप्रयोग विभंग यांत्रिकी से लेकर अर्धभंगुर पदार्थों के मापानुपात नियमों तक हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

उनकी अंतर्दृष्टि क्रांतिकारी थी क्योंकि उसने दिखाया कि प्राकृतिक रूप मनमाने नहीं, बल्कि यांत्रिक बाधाओं के इष्टतम समाधान हैं—एक ऐसा सिद्धांत जो बाद में अभियंताओं और वास्तुकारों की पीढ़ियों को प्रेरित करने वाला था।

यह अंतर्दृष्टि—कि ज्यामितीय समरूपता संरचनात्मक असमरूपता उत्पन्न करती है—क्रांतिकारी थी। अभियंताओं और वास्तुकारों के लिए इसने भौतिक प्रतिरूपण का द्वार खोला।

6.6.3 रेने देकार्त (1596–1650)

रेने देकार्त चिरसम्मत दर्शन और आधुनिक विज्ञान के बीच संक्रमणशील व्यक्तित्व के रूप में स्थित हैं। यद्यपि वे अपने दार्शनिक सूत्र *Cogito, ergo sum* के लिए सर्वाधिक प्रसिद्ध हैं[11] तथापि देकार्त ने अपने बुद्धिवादी ढाँचे तथा ज्यामिति और भौतिकी में आधारभूत योगदानों के माध्यम से यांत्रिकी और गणित को गहराई से प्रभावित किया। पद्धतिपरक संदेह और गणितीय तर्क पर बल देने वाले ज्ञान के प्रति उनके व्यवस्थित उपागम ने परवर्ती वैज्ञानिक क्रांति के लिए दार्शनिक आधार प्रदान किया।

La Géométrie अपनी 1637 की कृति *La Géométrie* (Descartes, 1637b) में, जो उनकी अधिक दार्शनिक *Discours de la méthode* का परिशिष्ट थी, देकार्त ने विश्लेषणात्मक ज्यामिति प्रस्तुत की—जिसमें निर्देशांक तंत्र में वक्रों को बीजगणितीय समीकरणों के रूप में निरूपित करके बीजगणित और यूक्लिडीय ज्यामिति (§6.2.3) को जोड़ा गया। इस नवोन्मेष ने कलन का परवर्ती विकास संभव किया और यांत्रिकी को गणितीय पदों में औपचारिक रूप देने के लिए अनिवार्य बना। कार्तीय निर्देशांक तंत्र ने गति और बल-संबंधों का परिमाणात्मक वर्णन करने के लिए आवश्यक गणितीय भाषा प्रदान की और न्यूटन, ऑयलर तथा लाग्रांज द्वारा विकसित की जाने वाली विश्लेषणात्मक यांत्रिकी को संभव बनाया।

देकार्त ने गति के तीन नियम भी प्रस्तावित किए और बाह्य बलों के अभाव में जड़त्वीय गति पर बल दिया—यह अरस्तूवादी गतिकी से स्पष्ट विचलन था। यद्यपि अंततः उनके नियमों को न्यूटन के अधिक यथार्थ सूत्रीकरणों ने प्रतिस्थापित किया, देकार्त ने प्रकृति को यांत्रिक सिद्धांतों द्वारा शासित मानने की आधारशिला रखी; यह दृष्टि हाइगेन्स, लाइबनित्स और बर्नूली जैसे चिंतकों ने अपनाई और परिष्कृत की।

देकार्त ने संरक्षण-सिद्धांत का आरंभिक रूप भी प्रस्तुत किया और तर्क दिया कि ईश्वर ब्रह्मांड में समान कुल "गति की मात्रा" संरक्षित रखते हैं। यद्यपि उनकी अदिश संकल्पना (दिशा की उपेक्षा करके द्रव्यमान गुणा चाल) भौतिक रूप से अशुद्ध थी—हाइगेन्स ने बाद में दिखाया कि संघट्ट संवेग को सदिश राशि के रूप में संरक्षित रखते हैं—उसने यह अपेक्षा स्थापित की कि यांत्रिक अंतःक्रियाएँ संरक्षण नियमों का पालन करती हैं; यह मार्गदर्शक सिद्धांत विश्लेषणात्मक यांत्रिकी के विकास में केंद्रीय सिद्ध होने वाला था।

ग्रहों की गति का उनका भँवर-सिद्धांत, जो दूरी पर क्रिया के बजाय घूर्णित पदार्थ के माध्यम से आकाशीय यांत्रिकी समझाता था, तब तक महाद्वीपीय भौतिकी पर प्रभावी रहा जब तक न्यूटन की *Principia* ने गणितीय रूप से श्रेष्ठ विकल्प प्रदान नहीं किया। कार्तीय भँवरों पर न्यूटनीय गुरुत्व की अंतिम विजय ने अठारहवीं शताब्दी के कार्यपद्धतिगत वाद-विवादों को आकार दिया: क्या यांत्रिकी को यांत्रिक स्पष्टीकरण (संपर्क बल) खोजने चाहिए अथवा अस्पष्टीकृत बलों के गणितीय वर्णन स्वीकार करने चाहिए? यह तनाव ऑयलर और लाग्रांज तक बना रहा और उन्नीसवीं शताब्दी में क्षेत्र-सिद्धांत के साथ ही पूर्णतः सुलझा।

प्रायोगिक प्रेक्षण में निहित गैलीलियो की भौतिकी के विपरीत देकार्त ने प्रथम सिद्धांतों से निगमनात्मक तर्क का समर्थन किया। यांत्रिक, नियतात्मक ब्रह्मांड पर उनके आग्रह ने सत्रहवीं शताब्दी के बौद्धिक वातावरण को गहराई से प्रभावित किया। यह दार्शनिक ढाँचा प्राकृतिक परिघटनाओं के गणितीय वर्णनों की स्वीकृति के लिए अनिवार्य सिद्ध हुआ, तब भी जब वे वर्णन सामान्य बुद्धि अथवा धार्मिक मत का खंडन करते थे। अतः देकार्त को केवल गणितीय नवोन्मेष का ही नहीं, बल्कि चिरसम्मत यांत्रिकी की संकल्पनात्मक आधारशिला को आकार देने का श्रेय भी दिया जाना चाहिए।

[11] *Cogito, ergo sum* ("मैं सोचता हूँ, अतः मैं हूँ" का लैटिन रूप) रेने देकार्त के दर्शन का आधारभूत कथन है, जिसे सर्वप्रथम फ़्रांसीसी में *Je pense, donc je suis* के रूप में उनकी 1637 की कृति *Discours de la méthode* में और बाद में लैटिन में *Principia Philosophiae* (1644) में सूत्रित किया गया। यह इस विचार को व्यक्त करता है कि चिंतन का कार्य व्यक्ति के अस्तित्व का अखंडनीय प्रमाण है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.6.4 क्रिस्टियान हाइगेन्स (1623–1695)

क्रिस्टियान हाइगेन्स का जन्म एक प्रतिष्ठित परिवार में हुआ। उनके पिता कॉन्स्टैंटाइन हाइगेन्स को “डच साहित्यिक इतिहास का सबसे प्रतिभाशाली व्यक्तित्व” कहा गया है और स्वयं क्रिस्टियान “हॉलैंड में दार्शनिकों के राजकुमार तथा सत्रहवीं शताब्दी के महानतम वैज्ञानिकों में से एक” के रूप में प्रसिद्ध हुए। कॉन्स्टैंटाइन ऐसे राजनयिक थे जिन्होंने प्राकृतिक दर्शन का अध्ययन किया था और जेम्स I के शासनकाल में इंग्लैंड में समय बिताया था। पिता के संपर्कों के माध्यम से क्रिस्टियान को अपने समय के सर्वोच्च वैज्ञानिक मंडलों तक शीघ्र पहुँच मिली। यह विशेषाधिकार-प्राप्त पृष्ठभूमि दर्शाती है कि सत्रहवीं शताब्दी में वैज्ञानिक संजाल प्रायः सामाजिक संपर्कों और पारिवारिक प्रतिष्ठा पर निर्भर थे, यद्यपि योग्यता और खोज वैज्ञानिक प्रतिष्ठा के लिए उत्तरोत्तर अधिक महत्त्वपूर्ण बन रहे थे।

सोलह वर्ष की आयु तक निजी शिक्षकों से शिक्षित क्रिस्टियान ने ज्यामिति पढ़ी, यांत्रिक प्रतिरूप बनाए और ल्यूट बजाने जैसे सामाजिक कौशल सीखे। उनकी गणितीय शिक्षा देकार्त से अत्यधिक प्रभावित थी, जो कभी-कभी हाइगेन्स परिवार के यहाँ आते थे और बालक के बौद्धिक विकास में व्यक्तिगत रुचि लेते थे।

हाइगेन्स ने आगे विधि और गणित का अध्ययन किया और 1647 से 1649 तक अपनी शिक्षा जारी रखी। उनके पिता के फ़्रांसीसी बहुविद् मारिन मर्सेन से संबंध के माध्यम से मर्सेन और युवा हाइगेन्स के बीच पत्राचार आरंभ हुआ। मर्सेन ने उन्हें अनेक समस्याओं की चुनौती दी, जिनमें दो आधारों के बीच निलंबित रस्सी का आकार निर्धारित करने का कार्य भी था। यद्यपि हाइगेन्स इस *कैटेनरी* *कैटेनरी समस्या* को हल नहीं कर सके, उन्होंने संबंधित प्रश्न सफलतापूर्वक हल किया: रस्सी के अनुदिश भारों को कैसे वितरित किया जाए ताकि वह परवलयिक आकार ग्रहण करे। इससे न केवल उनकी आविष्कारशीलता, बल्कि ज्यामिति और भौतिकी के अंतरापृष्ठ की समस्याओं से उनका आरंभिक संपर्क भी प्रदर्शित हुआ। इस आरंभिक कार्य ने दिखाया कि सैद्धांतिक गणितीय समस्याएँ प्रायः व्यावहारिक यांत्रिक चुनौतियों से उत्पन्न होती थीं—यह संबंध सत्रहवीं शताब्दी के अधिकांश विज्ञान को अभिलक्षित करने वाला था।[12]

क्षेत्र और प्रक्षेप-पथ: दूरबीनें, लोलक और प्रकाश क्रिस्टियान हाइगेन्स सत्रहवीं शताब्दी के सर्वाधिक मौलिक वैज्ञानिक मस्तिष्कों में से एक हैं, जिनके कार्य ने गणित, खगोलशास्त्र, यांत्रिकी और प्रकाशिकी के क्षेत्रों को जोड़ा। उनका जीवन-वृत्त अन्वेषण के ऐसे सतत सूत्र को दर्शाता है जो परिष्कृत दूरबीन उपकरणों से आकाशीय पिंडों के प्रेक्षण से, यथार्थ कालमापन के लिए लोलक-घड़ियों के आविष्कार और विश्लेषण तक, और अंततः प्रकाश के तरंग-सिद्धांत तक चला। दूरबीनों से लोलकों और लोलकों से प्रकाश तक की यह प्रगति न केवल उनके बौद्धिक विकास के प्रक्षेप-पथ का आलेखन करती है, बल्कि प्राकृतिक दर्शन में गणितीय यथार्थता और भौतिक प्रतिरूपण की ओर व्यापक संक्रमण को भी प्रतिबिंबित करती है। हाइगेन्स सत्रहवीं शताब्दी में उभरते नए प्रकार के वैज्ञानिक के उदाहरण थे: वह व्यक्ति जो सैद्धांतिक परिष्कार को व्यावहारिक अभियांत्रिक कौशल से जोड़ता और शुद्ध गणित तथा अनुप्रयुक्त यांत्रिकी के बीच निर्बाध रूप से चलता था।[13]

हाइगेन्स के व्यापक नवोन्मेषों—जिनमें शनि के सबसे बड़े चंद्रमा की खोज, प्रथम व्यावहारिक लोलक-घड़ी का निर्माण और तरंग-प्रकाशिकी में आज हाइगेन्स सिद्धांत कहलाने वाले सिद्धांत का प्रतिपादन सम्मिलित हैं—ने उन्हें आधुनिक विज्ञान के उद्भव में आधारभूत व्यक्तित्व बनाया। उनका कार्य कार्तीय परंपरा में निहित किंतु बाद में न्यूटन द्वारा औपचारिक की जाने वाली अधिक गतिशील यांत्रिकी की ओर विकसित होती ज्यामितीय सुरुचि और अनुभवजन्य स्पष्टता की प्रेरणा दर्शाता है। यद्यपि न्यूटन के विराट प्रभाव से वे प्रायः आच्छादित हो जाते हैं, हाइगेन्स ने भौतिक नियम की वैकल्पिक और अनेक दृष्टियों से पूरक दृष्टि दी—जिसमें तरंगें, वक्र और दोलन केंद्रीय स्थान ग्रहण करते थे।

[12] आधुनिक संरचनात्मक अभियांत्रिकी में इसका समानांतर Cross, 1932 के कार्य में मिलता है, जिनकी आघूर्ण-वितरण विधि (1930) ने अनिर्धार्य ढाँचों के विश्लेषण की व्यावहारिक चुनौती का सुरुचिपूर्ण विश्लेषणात्मक समाधान दिया; अथवा Przemieniecki, 1968 में, जिन्होंने जटिल अंतरिक्ष और सिविल संरचनाओं के लिए व्यवस्थित विश्लेषणात्मक ढाँचा प्रदान किया; या क्षार-समुच्चय अभिक्रियाओं के प्रतिरूपण के लिए Saouma and Perotti, 2004 में भी। सभी प्रकरणों में व्यावहारिक अभिकल्प आवश्यकताओं ने शक्तिशाली नए विश्लेषणात्मक साधनों के विकास को प्रेरित किया।

[13] सिद्धांत और व्यवहार का यह एकीकरण बाद में क्लोद-लुई नाविए जैसे व्यक्तियों ने आगे बढ़ाया (उनके असफल सेतु-अभिकल्प के वृत्तांत के लिए §6.7.3 देखें), जिन्होंने गणितीय कठोरता को संरचनात्मक अभियांत्रिकी के अनुप्रयोगों के साथ जोड़ा, और ऐसा ही उन्नीसवीं शताब्दी के अन्य यांत्रिकीविदों ने किया।

प्रारूप समीक्षा

दूरबीनों से लोलकों तक: कालमापन और *Horologium Oscillatorium* खगोलशास्त्र के कार्य के लिए यथार्थ timekeeping अपेक्षित था (§6.6.6 देखें) और इस चुनौती ने हाइगेन्स को समस्या पर सीधे विचार करने के लिए प्रेरित किया। 1656 में उन्होंने प्रथम लोलक-घड़ी का एकस्व प्राप्त किया और समय-मापन की यथार्थता में नाटकीय सुधार किया। लोलकों पर उनके अन्वेषण चक्रज पर उनके गणितीय कार्य से निकटता से जुड़े थे; पास्कल की चुनौती के बाद उन्होंने इस वक्र का अध्ययन किया था। यह मानते हुए कि अधिक बड़े दोलन-चाप वाला लोलक जहाज़ों पर अधिक उपयोगी होगा, हाइगेन्स ने cycloidal pendulum का आविष्कार किया। उन्होंने समुद्र में देशांतर निर्धारित करने के लिए अनेक लोलक-घड़ियाँ बनाईं, जिनका समुद्री परीक्षण 1662 में और पुनः 1686 में हुआ। इन प्रयासों की परिणति उनकी मौलिक कृति *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum* में हुई, जिसमें उन्होंने लोलक-गति के सिद्धांत का वर्णन किया। यह कृति वैशिष्ट्यक महत्त्व की तात्कालिक व्यावहारिक समस्या को हल करने के लिए उन्नत गणित के प्रथम सफल अनुप्रयोगों में से एक थी।

अकादमियाँ और अंतरराष्ट्रीय वैज्ञानिक व्यवहार 1661 में हाइगेन्स लंदन गए, जहाँ उन्होंने नवस्थापित रॉयल सोसाइटी के विषय में जानकारी एकत्र की और 1663 में उसके लिए निर्वाचित हुए। रॉयल सोसाइटी और *Académie des Sciences*, दोनों की उनकी सदस्यता ने उन्हें प्रथम वास्तविक अंतरराष्ट्रीय वैज्ञानिकों में से एक बनाया, जो राष्ट्रीय सीमाओं के पार संचार और सहयोग सुगम कर सकते थे।

1666 में उन्होंने नवसृजित *Académie des Sciences* की स्थापना में सहायता के लिए जाँ-बातिस्त कोलबेर का निमंत्रण स्वीकार किया। पेरिस पहुँचकर उन्होंने पाया कि संस्था अभी कार्यरत नहीं थी। प्रथम बैठकें कोलबेर के पुस्तकालय में हुईं और बाद में *Bibliothèque du Roi* में स्थानांतरित हुईं, जहाँ हाइगेन्स ने निवास ग्रहण किया। उन्होंने नेतृत्वकारी भूमिका अपनाई और इंग्लैंड में रॉयल सोसाइटी की कार्यप्रणाली के अपने ज्ञान के आधार पर अकादमी को संगठित करने में सहायता की।

विस्तारित पिंडों की गतिकी: वृत्तीय गति और संयुक्त लोलक क्रिस्टियान हाइगेन्स (1629–1695) (Huygens, 1986) ने गतिकी में आधारभूत योगदान किए, जिन्होंने काल-परिवर्ती भारों के अधीन संरचनात्मक विश्लेषण के लिए अनिवार्य संकल्पनाएँ स्थापित कीं। उनकी *Horologium Oscillatorium* (लोलक-घड़ी), जो 1673 में प्रकाशित हुई, 17वीं शताब्दी की गणितीय भौतिकी की उत्कृष्ट कृति है और व्यावहारिक आविष्कार को गहन सैद्धांतिक विश्लेषण से जोड़ती है।

यांत्रिकी के लिए अधिक महत्त्वपूर्ण रूप से हाइगेन्स ने वृत्तीय पथों में पिंडों की गति का विश्लेषण किया और अपकेंद्री बल के लिए व्यंजक $F = mv^2/r$ व्युत्पन्न किया। घूर्णी गति को समझने के लिए अनिवार्य यह परिणाम घूर्णित मशीनरी, वक्र गति और गतिक भारण से संबंधित संरचनात्मक समस्याओं पर सीधे लागू होता है।

हाइगेन्स ने दोलन-केंद्र की संकल्पना भी विकसित की—वह बिंदु जहाँ किसी विस्तारित पिंड के द्रव्यमान को उसकी दोलन-अवधि बदले बिना संकेंद्रित किया जा सकता है—और संरचनात्मक गतिकी में प्रयुक्त तुल्य-तंत्र विचारों का पूर्वाभास दिया। संयुक्त लोलक पर उनके कार्य ने दृढ पिंडों की गतिकी के विश्लेषण की ऐसी विधियाँ स्थापित कीं जो सीधे संरचनात्मक अवयवों के कंपन-विश्लेषण तक विस्तृत होती हैं।

Horologium Oscillatorium में अभिकेंद्री त्वरण के सूत्र की प्रथम सही व्युत्पत्ति तथा वक्रों के विकासज और प्रतिविकासज पर महत्त्वपूर्ण परिणाम भी सम्मिलित हैं। हाइगेन्स द्वारा गणितीय कठोरता और व्यावहारिक अनुप्रयोग का संयोजन विज्ञान तथा प्रौद्योगिकी के उस उभरते संबंध का उदाहरण था जो संरचनात्मक अभियांत्रिकी को अभिलक्षित करने वाला था।

लोलक से प्रकाश तक: तरंगें और हाइगेन्स सिद्धांत 1678 में हाइगेन्स ने वह प्रस्तुत किया जो बाद में *हाइगेन्स सिद्धांत* कहलाया: दीप्त तरंगाग्र का प्रत्येक बिंदु द्वितीयक गोलाकार तरंगिकाओं के स्रोत के रूप में कार्य करता है और नया तरंगाग्र इन तरंगिकाओं का अन्वालोप होता है। इस रचना ने हाइगेन्स को परावर्तन और अपवर्तन के नियम व्युत्पन्न करने तथा प्रकाश के रैखिक और गोलाकार, दोनों प्रकार के संचरण की व्याख्या करने की अनुमति दी।

अपने पूरे जीवन में हाइगेन्स ने विषाद के दीर्घ दौर अनुभव किए, जिनमें उन्होंने बहुत कम उत्पादन किया, और उनके बाद तीव्र सृजनशीलता के काल आए—आधुनिक नैदानिक पदों में संभवतः द्विध्रुवी प्रवृत्तियों के संकेत। विचित्र रूप से और अपने अनेक समकालीनों (देकार्त, लाइबनित्स, न्यूटन) के विपरीत हाइगेन्स ने तत्त्वमीमांसात्मक अथवा दार्शनिक अन्वेषण में बहुत कम रुचि दिखाई। उनका ध्यान प्रेक्षणीय परिघटनाओं और गणितीय नियमों पर दृढता से केंद्रित रहा। यह अनुभवजन्य केंद्रण यांत्रिकी के उस अभियांत्रिक उपागम का लक्षण बनने वाला था जो अगली शताब्दी में उभरता।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.6.5 ब्लेज़ पास्कल (1623–1662)

ब्लेज़ पास्कल का जन्म 1623 में क्लेरमों-फ़ेराँ के एक सुसंस्कृत परिवार में हुआ। उनकी माता की असमय मृत्यु के बाद उनके पिता एतिएन पास्कल—एक मजिस्ट्रेट और शौकिया गणितज्ञ—ने उनकी शिक्षा का प्रत्यक्ष दायित्व लिया। पास्कल की गणितीय प्रतिभा असाधारण रूप से कम आयु में प्रकट हुई: किशोरावस्था के आरंभ तक उन्होंने यूक्लिडीय ज्यामिति के परिणाम स्वतंत्र रूप से पुनः खोज लिए थे और सोलह वर्ष की आयु में शांकव परिच्छेदों पर प्रभावशाली निबंध लिखा जिसने देकार्त का ध्यान आकर्षित किया। बौद्धिक स्वतंत्रता को प्रोत्साहित करने वाले घरेलू परिवेश के साथ गणित में इस आरंभिक निमज्जन ने पास्कल के सिद्धांत, प्रयोग और दार्शनिक चिंतन के आजीवन एकीकरण को आकार दिया।

प्रयोग, दाब और तरलों की प्रकृति उनके आरंभिक कार्य ने तरल यांत्रिकी और दाब-सिद्धांत की आधारशिला रखी। किशोर के रूप में उन्होंने अंकगणितीय संक्रियाओं को स्वचालित करने के लिए बनाए गए प्रथम उपकरणों में से एक यांत्रिक परिकलक—पास्कलीन—का अभिकल्प और निर्माण किया। बीसवें दशक की आयु में उन्होंने वायुमंडलीय दाब पर युगांतरकारी प्रयोग किए, तोरिचेली के कार्य को आगे बढ़ाया और पुई द दोम की चढ़ाई के समय वायुदाबमापी परिवर्तनों को मापकर प्रदर्शित किया कि ऊँचाई के साथ वायुमंडलीय दाब घटता है।

इन प्रयोगों ने निर्वात के अस्तित्व को नकारने वाले अरस्तूवादी सिद्धांत को निर्णायक रूप से चुनौती दी। पास्कल ने दिखाया कि रिक्तता का कोई अंतर्निहित भय नहीं, बल्कि वायु का भार वायुदाबमापी में पारे के स्तंभ को बनाए रखता है। उनके कार्य ने नए वैज्ञानिक दृष्टिकोण का उदाहरण प्रस्तुत किया: प्राधिकार अथवा गुणात्मक तर्क के बजाय सावधानीपूर्वक अभिकल्पित प्रयोगों द्वारा निर्देशित गणितीय तर्क।

द्रवस्थैतिकी और पास्कल का नियम अपनी 1647 की कृति *Traité de l'équilibre des liqueurs* में पास्कल ने द्रवस्थैतिकी के सिद्धांतों को औपचारिक रूप दिया और वह प्रस्तुत किया जिसे आज पास्कल का नियम कहते हैं: परिरुद्ध तरल पर लगाया गया दाब सभी दिशाओं में बिना कमी के संचरित होता है। इस परिणाम ने तरल-स्थैतिकी के लिए एकीकारी सिद्धांत प्रदान किया और दाबित्रों तथा उत्थापकों से लेकर बल के तरलीय संचरण वाले बाद के अभियांत्रिक अनुप्रयोगों तक, द्रवचालित उपकरणों का आधार बना।

पास्कल के सूत्रीकरण ने पात्र के आकार से स्वतंत्र तरल के भीतर दाब को अदिश क्षेत्र माना—यह संकल्पनात्मक कदम तरल यांत्रिकी को भौतिक परिघटनाओं के उभरते क्षेत्र-आधारित वर्णनों के साथ संरेखित करता था। यद्यपि इसे आंशिक अवकल समीकरणों के बाद के उपकरणों के बिना व्यक्त किया गया, उनके तर्क ने उस सातत्यक उपागम का पूर्वाभास दिया जिसे ऑयलर और नाविए अधिक पूर्णतः विकसित करने वाले थे।

यांत्रिकी के विकास में स्थान यद्यपि संकीर्ण अर्थ में पास्कल का कार्य सीधे संरचनात्मक यांत्रिकी से संबद्ध नहीं है, दाब और तरलों के उनके विश्लेषण के तरल-बलों के अधीन संरचनाओं—जिनमें बाँध, धारण भित्तियाँ, द्रवचालित मशीनरी और बाद की तरल-संरचना अंतःक्रिया समस्याएँ सम्मिलित हैं—के अभिकल्प तथा विश्लेषण के लिए स्थायी निहितार्थ थे। उनके योगदानों ने उस बौद्धिक आधार का प्रमुख भाग बनाया जिस पर बर्नूली, ऑयलर और नाविए तरल-गति तथा दाब के व्यवस्थित सिद्धांत निर्मित करने वाले थे।

संभवतः इससे भी अधिक महत्त्वपूर्ण यह है कि पास्कल द्वारा प्रायोगिक व्यवहार के साथ गणितीय सिद्धांत के एकीकरण ने अभियांत्रिक विज्ञान की उन्नति का प्रतिरूप दिया: अमूर्त तर्क और अनुभवजन्य सत्यापन की व्यवस्थित अंतःक्रिया के माध्यम से। परिकलन को प्रयोग से जोड़ने वाली यह कार्यपद्धतिगत विरासत आधुनिक यांत्रिकी और अभियांत्रिक विज्ञान का परिभाषक लक्षण बनी[14]।

6.6.6 रॉबर्ट हुक (1635–1703)

रॉबर्ट हुक का जन्म 1635 में आइल ऑफ़ वाइट पर एक साधारण ऐंग्लिकन पादरी के पुत्र के रूप में हुआ। बाल्यावस्था में शारीरिक रूप से दुर्बल और वयस्कता तक जीवित रहने की आशा न होने के कारण उन्हें आरंभ में चिरसम्मत विद्वत्ता के बजाय रेखांकन और यांत्रिक कौशलों का प्रशिक्षण दिया गया। पिता की मृत्यु के बाद हुक लंदन चले गए, जहाँ उनकी प्रतिभा ने प्रमुख बुद्धिजीवियों का ध्यान आकर्षित किया। उन्होंने वेस्टमिंस्टर स्कूल में संक्षिप्त अध्ययन किया और बाद में ऑक्सफ़र्ड में

[14] आधुनिक शब्दावली में इसे Thacker et al., 2004 ने अभिव्यक्त किया है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रॉबर्ट बॉयल के सहायक के रूप में कार्य किया। प्रायोगिक व्यवहार, उपकरण-निर्माण और व्यावहारिक समस्या-समाधान में इस आरंभिक निमज्जन ने व्यवस्थित गणितीय औपचारिकता की अपेक्षा प्रेक्षण, उपकरण और यांत्रिक प्रवीणता पर हुक के आजीवन बल को आकार दिया।

रॉबर्ट हुक वास्तव में सत्रहवीं शताब्दी के विज्ञान के सर्वाधिक आकर्षक—और दुर्भाग्यवश कम आंके गए—व्यक्तित्वों में से एक हैं। यदि न्यूटन ने उन्हें आच्छादित और विरोधग्रस्त न किया होता, तो संभवतः उन्हें यांत्रिक विज्ञानों के केंद्रीय महापुरुष के रूप में स्मरण किया जाता। हुक असाधारण रूप से बहुमुखी थे: भौतिक विज्ञानी, खगोलविद्, आविष्कारक, सूक्ष्मदर्शीविद्, वास्तुकार और अभियंता। रॉयल सोसाइटी में दीर्घकालीन *Curator of Experiments* और बाद में उसके सचिव के रूप में उन्होंने उस काल की प्रायोगिक संस्कृति को परिभाषित करने में प्रमुख भूमिका निभाई। रॉयल सोसाइटी में उनकी भूमिका ने उन्हें यूरोपीय वैज्ञानिक संप्रेषण के केंद्र में रखा, जहाँ उन्होंने न केवल अपना अनुसंधान किया, बल्कि अन्य लोगों का कार्य भी सुगम बनाया और आधुनिक विज्ञान के लिए केंद्रीय बने प्रायोगिक सत्यापन के नियम स्थापित करने में सहायता की। उन्होंने प्रत्यास्थता, खगोलशास्त्र, घड़ीविज्ञान और सूक्ष्मदर्शिकी में अग्रणी योगदान किए—फिर भी उनकी अनेक अंतर्दृष्टियाँ अविकसित रहीं अथवा उनका श्रेय अन्य लोगों को मिला। यह खंड यांत्रिकी और अभियांत्रिकी में उनके योगदानों का संक्षिप्त सर्वेक्षण करता है, जिसमें कालमापन में उनकी भागीदारी और न्यूटन के साथ गुरुत्व संबंधी विवाद पर विशेष ध्यान है।

देशांतर की चुनौती समुद्री नौवहन आकाशीय तकनीकों पर अत्यधिक निर्भर था। ज्ञात समय पर सूर्य अथवा चंद्रमा की ऊँचाई मापने के लिए षष्ठांशमापी का उपयोग करके अक्षांश निर्धारित किया जा सकता था, किंतु समुद्र में देशांतर निर्धारित करना कहीं अधिक कठिन था—इसके लिए स्थानीय समय की संदर्भ मध्याह्न-रेखा से तुलना करने हेतु अत्यधिक यथार्थ घड़ी अपेक्षित थी। 17वीं और 18वीं शताब्दियों में ऐसा विश्वसनीय कालमापन अभी संभव नहीं था। देशांतर निर्धारित न कर पाने से अनेक जहाज़ दुर्घटनाएँ और राजनीतिक चिंताएँ उत्पन्न हुईं। यह समस्या दर्शाती है कि व्यावहारिक चुनौतियाँ प्रायः सैद्धांतिक नवोन्मेष को प्रेरित करती थीं, क्योंकि यथार्थ नौवहन की तात्कालिक आवश्यकता ने घड़ीविज्ञान और आकाशीय यांत्रिकी, दोनों में प्रगति को प्रोत्साहित किया।

यह नौवहन चुनौती राष्ट्रीय महत्त्व का विषय बन गई। 1714 में ब्रिटिश संसद ने देशांतर-निर्धारण में नवोन्मेषों को प्रोत्साहित करने के लिए *Longitude Act* पारित किया। उसने समुद्र में देशांतर के यथार्थ मापन की किसी भी व्यावहारिक विधि के लिए पर्याप्त मौद्रिक पुरस्कार तथा विश्व-मानचित्रण पर कार्यरत विद्वानों के लिए छोटे वार्षिक वृत्तिका प्रदान किए[15]।

हुक और कालमापन की यांत्रिकी देशांतर निर्धारित करने की प्रमुख अपेक्षाओं में से एक यथार्थ समय-मापन था, जिसने घड़ीविज्ञान को वैज्ञानिक नवोन्मेष के केंद्र में रखा। कालमापन पर लोलक के समकालिक गुणों को लागू करने के गैलीलियो के विचार से प्रेरित क्रिस्टियान हाइगेन्स ने क्राउन-व्हील निस्सरण का उपयोग करने वाली लोलक-घड़ी सफलतापूर्वक कार्यान्वित की थी (§6.6.4 देखें)। हुक ने इसके विपरीत मूलतः भिन्न समाधान प्रस्तावित किया: नए प्रकार के निस्सरण तंत्र के साथ युग्मित कमानी-नियंत्रित संतुलन-चक्र।

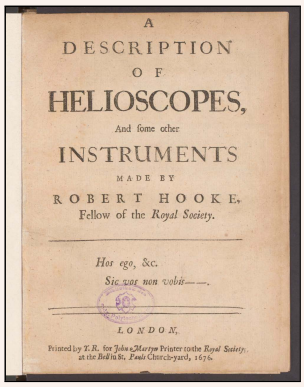
1675 में हुक ने दूरबीन उपकरणों और घड़ीविज्ञान, विशेषतः लंगर निस्सरण तथा कमानी-विनियमित संतुलन-चक्र के आविष्कार पर केंद्रित अपनी *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* प्रकाशित की। आरंभिक ब्रिटिश वैज्ञानिक प्रकाशनों की परिपाटी के अनुरूप इस कृति में व्याख्यात्मक चित्र नहीं थे। हुक के तंत्र की दृश्य व्याख्या बाद में Hall, 1951 ने पुनर्निर्मित की, जैसा चित्र 6.11b में दर्शाया गया है।

हुक का निस्सरण-अभिकल्प लोलक की तुलना में अधिक संहत और सुदृढ़ समाधान देने के लिए था, जिससे वह जहाज़ पर उपयोग के लिए अधिक उपयुक्त हो। यद्यपि अंततः हाइगेन्स समुद्री परीक्षण के योग्य लोलक-घड़ियाँ कार्यान्वित करने में सफल हुए, घड़ीविज्ञान में हुक के नवोन्मेष प्रभावशाली बने रहे। उनके कार्य ने भावी संतुलन-चक्र घड़ियों और समुद्री कालमापियों के विकास की आधारशिला रखने में सहायता की।

यांत्रिकी और न्यूटन से विवाद हुक की वैज्ञानिक अंतर्दृष्टि कालमापन से बहुत आगे विस्तृत थी। वे आकाशीय पिंडों की गति को यांत्रिक समस्या के रूप में सूत्रित करने वाले आरंभिक चिंतकों में से एक थे। उन्होंने प्रस्तावित किया कि ग्रहों की गति रैखिक जड़त्वीय गति और कक्षा के केंद्र की ओर निर्देशित आकर्षक बल के संयोजन से उत्पन्न होती है। उन्होंने यह भी पहचाना कि ऐसा आकर्षक बल संभवतः दूरी के साथ परिवर्तित होगा। किंतु हुक यथार्थ गणितीय संबंध व्युत्पन्न करने

[15]यह प्रयास आज के उच्च-प्रतिष्ठा प्रौद्योगिकी पुरस्कारों, जैसे DARPA Robotics Challenge, से असमान नहीं था—जिसमें रणनीतिक सैन्य आवश्यकताएँ मूलभूत वैज्ञानिक अन्वेषण के साथ जुड़ी थीं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।


A
DESCRIPTION
O F
HELIOSCOPES,
And fome other
INSTRUMENTS
MADE BY
ROBERT HOOKE,
Fellow of the *Royal Society*.

Hor ego, &c.
Sic erat non Vobis——.

LONDON,
Printed by T. R. for John Martyn Printer to the *Royal Society*, at the Bell in St. Pauls Church-yard, 1676.

(a) हुक की 1675 की आवरण-पृष्ठका, *A Description of Helioscopes and other Instruments* Hooke, 1676

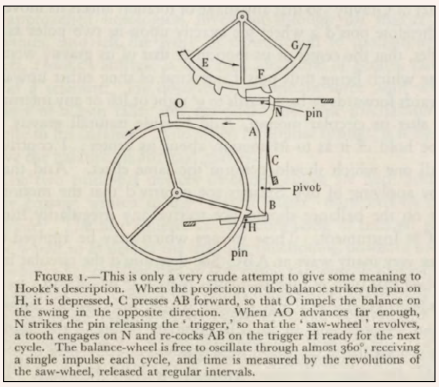


FIGURE 1.—This is only a very crude attempt to give some meaning to Hooke's description. When the projection on the balance strikes the pin on H, it is depressed, C presses AB forward, so that O impels the balance on the swing in the opposite direction. When AO advances far enough, N strikes the pin releasing the 'trigger,' so that the 'saw-wheel' revolves, a tooth engages on N and re-cocks AB on the trigger H ready for the next cycle. The balance-wheel is free to oscillate through almost 360°, receiving a single impulse each cycle, and time is measured by the revolutions of the saw-wheel, released at regular intervals.

(b) घड़ी में हुक के निस्सरण की व्याख्या Hall, 1951

चित्र 6.11: हुक और घड़ी

अथवा केप्लर द्वारा पूर्वानुमानित दीर्घवृत्ताकार कक्षाओं को प्रमाणित करने में असमर्थ थे। यह सीमा भौतिक अंतर्दृष्टियों को कठोर वैज्ञानिक सिद्धांतों में रूपांतरित करने में गणितीय परिष्कार की निर्णायक भूमिका दर्शाती है।

जब न्यूटन ने 1686 में अपनी *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* का प्रथम खंड प्रकाशित किया, हुक ने दावा किया कि वे पहले ही न्यूटन को सार्वभौमिक गुरुत्व का अनिवार्य विचार दे चुके थे। बदले में न्यूटन ने इस दावे को दृढता से नकारा और इंगित किया कि हुक ने कोई कठोर व्युत्पत्ति अथवा ज्यामितीय प्रमाण नहीं दिया था। विवाद शीघ्र बढ गया। हुक की पूर्व आलोचनाओं से पहले ही अप्रसन्न न्यूटन ने इस अवसर का उपयोग हुक के योगदानों को न्यून करने और अभिलेख से उनका प्रभाव मिटाने के लिए किया। उनकी प्रतिद्वंद्विता विज्ञान के इतिहास की सर्वाधिक कटु प्रतिद्वंद्विताओं में से एक बनी। हुक के प्रति न्यूटन की विद्वेषपूर्णता मृत्यु के बाद भी विस्तृत रही, (Westfall, 1980)।

न्यूटन के साथ उनके अग्रता-विवादों से जुडे मतभेद के बावजूद आधुनिक इतिहासकार स्वीकार करते हैं कि हुक ने न्यूटन के गुरुत्व-सिद्धांत के केंद्र की भौतिक अंतर्दृष्टि समझी, किंतु उसे औपचारिक बनाने के लिए उनके पास गणितीय साधन नहीं थे। उनकी अंतःप्रज्ञा ने व्युत्क्रम-वर्ग नियम और कक्षीय यांत्रिकी का पूर्वाभास दिया और उन्हें चिरसम्मत यांत्रिकी के विकास का आधारभूत—यद्यपि अल्प-श्रेयित—व्यक्तित्व बनाया (Westfall, 1980; Inwood, 2002)।

क्षेत्र को बदलने वाले दो विपर्यस्ताक्षर

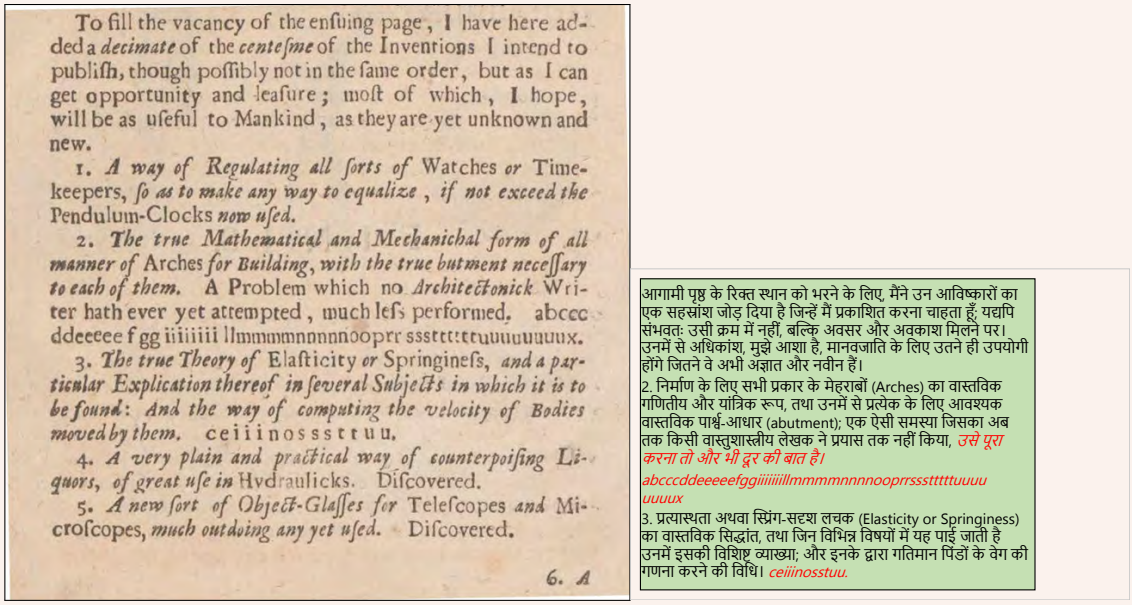
मेहराबों पर हम संरचनात्मक अभियंताओं के लिए सर्वाधिक प्रासंगिक वह है जो हुक ने अपने 1675 के प्रकाशन के परिशिष्ट में लिखा (चित्र 6.12 देखें)।

आश्चर्यजनक रूप से घडियों और कालमापन को समर्पित इस पुस्तक में हुक ने दो (तर्कतः तीन) प्रमुख वैज्ञानिक सिद्धांतों के दावे अंतःस्थापित किए[16]। अगले पृष्ठ का रिक्त स्थान भरने के लिए हुक ने उन दस आविष्कारों की सूची जोड दी जिन्हें वे प्रकाशित करना चाहते थे; उनमें से चार को उन्होंने अपनी विशिष्ट रीति से विपर्यस्ताक्षरों के रूप में कूटबद्ध किया[17]—यह ऐसा साधन था जिसे वे पूर्ण प्रकटन में विलंब करते हुए अग्रता सुरक्षित करने के लिए अपने पूरे जीवन-वृत्त में पसंद करते

[16]यह फ़र्मा से असमान नहीं था, जिन्होंने लगभग 1637 में *Arithmetica* की एक प्रति के हाशिए में लिखा था कि उनके पास इसका प्रमाण है (कि ऐसा कोई $n \neq 2$ नहीं है जिसके लिए $a^n + b^n = c^n$ हो), किंतु वह हाशिए में समाने के लिए बहुत बडा था।

[17]विपर्यस्ताक्षर किसी अन्य शब्द अथवा वाक्यांश के अक्षरों को पुनर्व्यवस्थित करके बनाया गया शब्द अथवा वाक्यांश है, जिसमें सामान्यतः सभी मूल अक्षरों का ठीक एक बार उपयोग होता है। हुक के समय u और v अक्षरों का उपयोग स्वर u अथवा व्यंजन v, दोनों को दर्शाने के लिए परस्पर विनिमेय रूप से किया जाता था। जहाँ न्यूटन ने enciphered Latin

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



To fill the vacancy of the enſuing page, I have here added a *decimate* of the *centeſme* of the Inventions I intend to publiſh, though poſſibly not in the ſame order, but as I can get opportunity and leaſure; moſt of which, I hope, will be as uſeful to Mankind, as they are yet unknown and new.

1. *A way of Regulating all ſorts of* Watches *or* Time-keepers, *ſo as to make any way to equalize, if not exceed the* Pendulum-Clocks *now uſed.*

2. *The true Mathematical and Mechanichal form of all manner of* Arches *for Building, with the true butment neceſſary to each of them.* A Problem which no *Architectonick* Writer hath ever yet attempted, much leſs performed. abccc ddeeeee f gg iiiiiiii llmmmmnnnnnoooprr ssstttttttuuuuuuuux.

3. *The true Theory of* Elaſticity *or* Springineſs, *and a particular Explication thereof in ſeveral Subjects in which it is to be found: And the way of computing the velocity of Bodies moved by them.* ceiiinossssttuu.

4. *A very plain and practical way of counterpoiſing Liquors, of great uſe in* Hydraulicks. Diſcovered.

5. *A new ſort of Object-Glaſſes for* Teleſcopes *and* Microſcopes, *much outdoing any yet uſed.* Diſcovered.

6. *A*

(a)

आगामी पृष्ठ के रिक्त स्थान को भरने के लिए, मैंने उन आविष्कारों का एक सहस्रांश जोड़ दिया है जिन्हें मैं प्रकाशित करना चाहता हूँ; यद्यपि संभवतः उसी क्रम में नहीं, बल्कि अवसर और अवकाश मिलने पर। उनमें से अधिकांश, मुझे आशा है, मानवजाति के लिए उतने ही उपयोगी होंगे जितने वे अभी अज्ञात और नवीन हैं।

2. निर्माण के लिए सभी प्रकार के मेहराबों (Arches) का वास्तविक गणितीय और यांत्रिक रूप, तथा उनमें से प्रत्येक के लिए आवश्यक वास्तविक पार्श्व-आधार (abutment); एक ऐसी समस्या जिसका अब तक किसी वास्तुशास्त्रीय लेखक ने प्रयास तक नहीं किया, *उसे पूरा करना तो और भी दूर की बात है।*

abccccddeeeeefggiiiiiiiillmmmmnnnnnooprrsssttttttuuuuuuuuux

3. प्रत्यास्थता अथवा स्प्रिंग-सदृश लचक (Elasticity or Springiness) का वास्तविक सिद्धांत, तथा जिन विभिन्न विषयों में यह पाई जाती है उनमें इसकी विशिष्ट व्याख्या; और इनके द्वारा गतिमान पिंडों के वेग की गणना करने की विधि। *ceiiinosstuu.*

(b)

चित्र 6.12: हुक के 1675 के विपर्यस्ताक्षर, *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* में (Hooke, 1676)

थे। चार में से उन्होंने बाद में केवल दो प्रकट किए; अन्य आज तक कूटमुक्त नहीं हुए हैं। कूटमुक्त विपर्यस्ताक्षरों में प्रथम संरचनात्मक अभियंताओं के लिए और दूसरा यांत्रिकीविदों के लिए प्रासंगिक था।

हुक का प्रथम विपर्यस्ताक्षर इस प्रकार है:

> *abccccddeeeeefggiiiiiiiillmmmmnnnnnooprrsssttttttuuuuuuuuux.*
>
> Hooke, 1676 *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments*

हुक की मृत्यु के बाद ही उनके निष्पादक रिचर्ड वॉलर ने (Hooke, 1705) में अकूटबद्ध रूप प्रकट किया:

> *Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum*[a]
>
> [a]लैटिन में “u” और “v” अक्षर परस्पर विनिमेय हैं।
>
> जैसे कोई लचीली केबल लटकती है, वैसे ही उलटने पर मेहराब के परस्पर स्पर्शी खंड खड़े रहते हैं।
>
> Hooke, 1705 *The Posthumous Works of Robert Hooke*

दूसरे शब्दों में मेहराब का आदर्श आकार ठीक स्वतंत्र रूप से लटकती रस्सी का आकार है—केवल उलटा। हुक समझते थे कि निर्माण-सामग्री संपीडन का प्रतिरोध कर सकती है, तनन का नहीं, जबकि रस्सी विपरीत व्यवहार करती है। भार-पथ और रूप-अन्वेषण की यह अंतर्दृष्टि संरचनात्मक अभियांत्रिकी के लिए आज भी आधारभूत है। यह सिद्धांत बाद में क्रिस्टोफ़र

वाक्यांश का उपयोग किया[18] हुक ने लैटिन विपर्यस्ताक्षर का उपयोग किया। दोनों ने अपनी खोजों को “छिपाने” का प्रयास किया, संभवतः प्रकटन में विलंब करते हुए अग्रता सुरक्षित करने के लिए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रेन के सेंट पॉल महागिरजाघर के अभिकल्प से लेकर साग्रादा फ़मिलिया में अंतोनी गौदी के क्रांतिकारी कैटेनरी मेहराबों तक, वास्तुकारों और अभियंताओं की पीढ़ियों को प्रेरित करने वाला था।

तथापि उस समय हुक की अंतर्दृष्टि का तत्काल प्रभाव बहुत कम था। उनके गूढ़ सूत्रीकरण, विस्तार के अभाव और सीमित प्रसार का अर्थ था कि उनके समकालीनों ने संरचनात्मक निहितार्थों की व्यापक उपेक्षा की। 18वीं शताब्दी में ही लटकती शृंखलाओं और स्थिर मेहराबों के संबंध का अधिक कठोरता से अध्ययन हुआ—विशेषतः *पोलेनी* द्वारा, जिन्होंने सेंट पीटर गुंबद की प्रणोद-रेखा का विश्लेषण किया। बाद में *कुलमान* और *हेमन* जैसे व्यक्तियों ने हुक के प्रेक्षण को अधिक स्पष्ट गणितीय और आलेखीय केंद्रण में लाकर चिनाई संरचनाओं के सिद्धांत में उसका स्थान सुदृढ़ किया। कैटेनरी से प्रेरित संरचनाओं की चर्चा §15.5.1 में की गई है।

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §30.3.3 देखें

कमानियों पर दूसरा विपर्यस्ताक्षर उस विषय से संबंधित है जिसके लिए हुक को यांत्रिकी में सर्वाधिक व्यापक रूप से स्मरण किया जाता है: प्रत्यास्थ पिंडों में बल और विस्थापन के बीच रैखिक संबंध।

प्रथम विपर्यस्ताक्षर—जिसे हुक की मृत्यु के बाद ही हल किया गया—के विपरीत दूसरे को हुक ने स्वयं अपनी *Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies* (Hooke, 1678) में प्रकट किया, जैसा चित्र 6.14 में दिखाया गया है। उस प्रकाशन ने प्रत्यास्थ पदार्थों पर हुक के प्रयोगों के परिणामों का सार दिया और पहली बार ठोसों के प्रत्यास्थ व्यवहार पर वैज्ञानिक रूप से चर्चा की गई।

हुक ने सर्वप्रथम 1675 में खोज की घोषणा की थी[19]—अपनी *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676) के परिशिष्ट में। अग्रता सुरक्षित करने की चिंता में उन्होंने नियम को स्पष्टतः नहीं कहा, बल्कि इस प्रकार कूटबद्ध किया:

> *ceiinosssttuu*
>
> Hooke, 1676 *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments*

समाधान तीन वर्ष बाद 1678 में आया[20]। हुक ने उसे इस प्रकार कूटमुक्त किया:

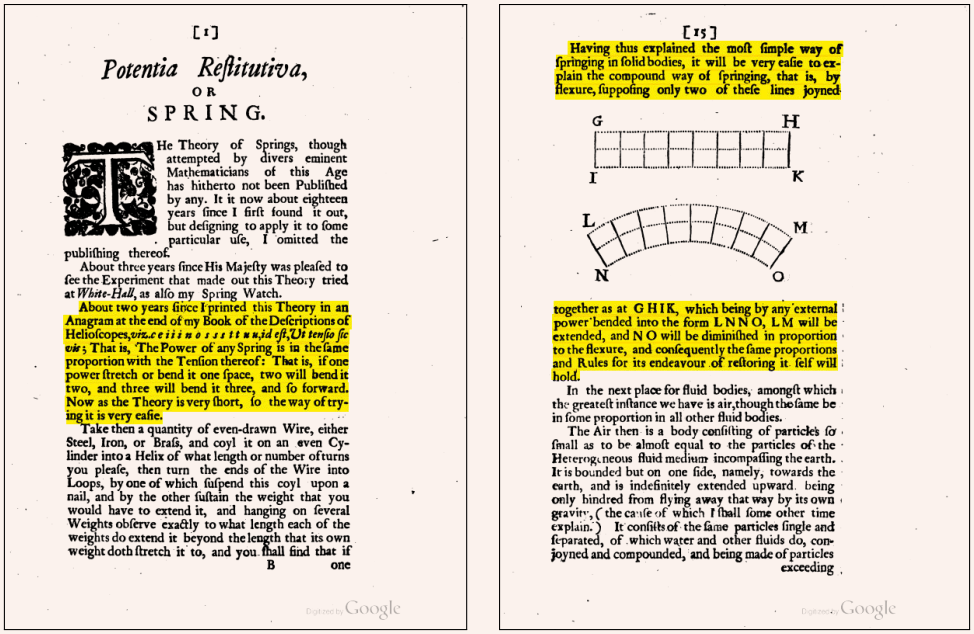
> *Ut tensio sic vis*
>
> जैसा विस्तार, वैसा बल
> Hooke, 1678 *Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies*

> कमानी-सिद्धांत का प्रयास यद्यपि इस युग के विविध प्रख्यात गणितज्ञों ने किया है, तथापि अभी तक किसी ने उसे प्रकाशित नहीं किया। मुझे इसे पहली बार खोजे अब लगभग अठारह वर्ष हो गए हैं, किंतु इसे किसी विशेष उपयोग में लगाने का विचार होने से मैंने प्रमाण प्रकाशित नहीं किया।
>
> लगभग तीन वर्ष पहले महामहिम ने व्हाइट-हॉल में इस सिद्धांत की जाँच करने वाला प्रयोग तथा मेरी कमानी-घड़ी भी देखने की कृपा की।

[19] *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* पर 1676 की मुद्रण-तिथि है, किंतु वास्तव में उसका वितरण अक्तूबर 1675 में हुआ था।

[20] प्रकाशित करने की होड़ में लगे आधुनिक शोधकर्ताओं के विपरीत 17वीं और 18वीं शताब्दियों में प्रकटन में विलंब असामान्य नहीं था। बाद का सुप्रसिद्ध उदाहरण डार्विन हैं, जिन्होंने 1830 के दशक के उत्तरार्ध में विकासवाद का अपना सिद्धांत विकसित किया, किंतु *The Origin of Species* प्रकाशित करने के लिए 1859 तक—लगभग बीस वर्ष—प्रतीक्षा की।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



[1]

Potentia Restitutiva,
OR
SPRING.

THe Theory of Springs, though attempted by divers eminent Mathematicians of this Age has hitherto not been Publiſhed by any. It it now about eighteen years ſince I firſt found it out, but deſigning to apply it to ſome particular uſe, I omitted the publiſhing thereof.

About three years ſince His Majeſty was pleaſed to ſee the Experiment that made out this Theory tried at *White-Hall*, as alſo my Spring Watch.

About two years ſince I printed this Theory in an Anagram at the end of my Book of the Deſcriptions of Helioſcopes, *viz. ceiiinosssttuu, id eſt, Ut tenſio ſic vis*; That is, The Power of any Spring is in the ſame proportion with the Tenſion thereof: That is, if one power ſtretch or bend it one ſpace, two will bend it two, and three will bend it three, and ſo forward. Now as the Theory is very ſhort, ſo the way of trying it is very eaſie.

Take then a quantity of even-drawn Wire, either Steel, Iron, or Braſs, and coyl it on an even Cylinder into a Helix of what length or number of turns you pleaſe, then turn the ends of the Wire into Loops, by one of which ſuſpend this coyl upon a nail, and by the other ſuſtain the weight that you would have to extend it, and hanging on ſeveral Weights obſerve exactly to what length each of the weights do extend it beyond the length that its own weight doth ſtretch it to, and you ſhall find that if

B one

[15]

Having thus explained the moſt ſimple way of ſpringing in ſolid bodies, it will be very eaſie to explain the compound way of ſpringing, that is, by flexure, ſuppoſing only two of theſe lines joyned

G H I K

L M N O

together as at G H I K, which being by any external power bended into the form L N N O, L M will be extended, and N O will be diminiſhed in proportion to the flexure, and conſequently the ſame proportions and Rules for its endeavour of reſtoring it ſelf will hold.

In the next place for fluid bodies, amongſt which the greateſt inſtance we have is air, though the ſame be in ſome proportion in all other fluid bodies.

The Air then is a body conſiſting of particles ſo ſmall as to be almoſt equal to the particles of the Heterogeneous fluid medium incompaſſing the earth. It is bounded but on one ſide, namely, towards the earth, and is indefinitely extended upward being only hindred from flying away that way by its own gravity, (the cauſe of which I ſhall ſome other time explain.) It conſiſts of the ſame particles ſingle and ſeparated, of which water and other fluids do, conjoyned and compounded, and being made of particles exceeding

चित्र 6.13: *De Potentia Restitutiva* से प्रत्यास्थ आनमन का हुक का चित्रण (Hooke, 1678 PDF)

> लगभग दो वर्ष पहले मैंने दूरदर्शियों के वर्णन पर अपनी पुस्तक के अंत में इस सिद्धांत को विपर्यस्ताक्षर, अर्थात् *ceiinosssttuu* अर्थात् *Ut tensio sic vis*, में मुद्रित किया; कहने का आशय यह है कि किसी कमानी की शक्ति उसके तनन के समान अनुपात में होती है: अर्थात् यदि एक शक्ति उसे एक स्थान तक खींचती अथवा मोडती है, तो दो उसे दो तक और तीन उसे तीन तक मोडेंगी, और इसी प्रकार आगे। अब चूँकि सिद्धांत बहुत संक्षिप्त है, उसकी जाँच की विधि बहुत सरल है। ...
>
> 20, अथवा 30, अथवा 40 ft लंबा तार लें और उसका ऊपरी भाग किसी कील से बाँधें तथा दूसरे सिरे पर भार रखने के लिए पलडा बाँधें: फिर परकार से पलडे के तल और नीचे की भूमि अथवा फ़र्श के बीच की दूरी लें और उक्त दूरी लिखें; फिर उक्त पलडे में भार रखें, उक्त तार के विभिन्न विस्तार मापें और उन्हें लिखें। तत्पश्चात उक्त तार के विभिन्न विस्तारों की तुलना करें और आप पाएँगे कि वे परस्पर सदा उन्हीं अनुपातों में होंगे जिनमें उन्हें उत्पन्न करने वाले भार होते हैं।
>
> Hooke, 1678 PDF *Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies*

De Potentia Restitutiva में दिए हुक के कमानी-नियम का प्रामाणिक कथन चित्र 6.13 में दर्शाया गया है।

प्रतिष्ठित कमानी-चित्रण हुक का मुख्य सरोकार शिक्षाप्रद अथवा प्रामाणिक प्रायोगिक चित्रण देने के बजाय प्रकृति के सार्वभौमिक नियम पर अग्रता स्थापित करना था। लगभग दो दशक पहले नियम खोजकर, उसे विपर्यस्ताक्षर के रूप में कूटबद्ध रूप में प्रकाशित करके और रॉयल सोसाइटी के समक्ष सार्वजनिक रूप से प्रदर्शित करके उनका लक्ष्य शिक्षण नहीं, सार्वत्रिकता प्रतिपादित करना था। तदनुसार हुक ने कमानियों को एक उपकरण नहीं, बल्कि प्रत्यावर्ती परिघटनाओं का व्यापक वर्ग माना, जिसमें धातु-कुंडलियाँ, खिंचे तार, मुडी लकडी, कंपित तंत्रियाँ, घडियों की संतुलन-कमानियाँ, धनुष और वायु की प्रत्यास्थता भी सम्मिलित थे। अतः उनके चित्र किसी एक योजनाचित्र के बजाय अनेक भौतिक मूर्त रूप और ज्यामितीय रचनाएँ—लंबाइयाँ, क्षेत्रफल, शक्ति के समुच्चय और वेग-स्थान संबंध—दर्शाते हैं।

अतः यह आश्चर्यजनक नहीं है कि आज हुक के नियम से सामान्यतः संबद्ध परिचित द्रव्यमान-कमानी आरेख *De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678 PDF) के प्रथम संस्करण में नहीं मिलता। पर्याप्त प्रयास के बावजूद मैं चित्र 6.14 में दर्शाए

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रतिष्ठित चित्र का उद्गम नहीं खोज सका हूँ। हुक से इसका आरोपण Andrade, 1950 से प्राप्त होता प्रतीत होता है, यद्यपि वहाँ भी इसे केवल परोक्ष रूप से प्रस्तुत किया गया है।

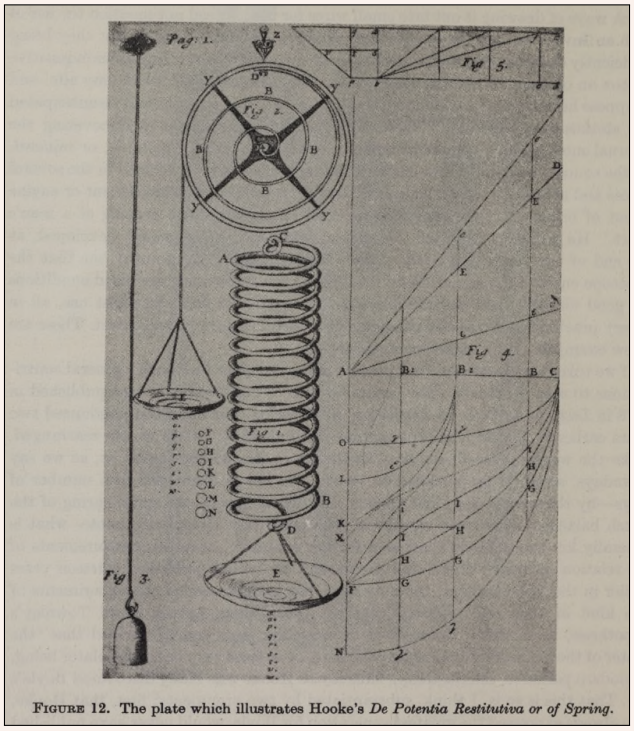


FIGURE 12. The plate which illustrates Hooke's *De Potentia Restitutiva or of Spring.*

चित्र 6.14: निलंबित भारों वाली कुंडलित हेलिकल कमानी। यह प्रतिष्ठित चित्रण सामान्यतः हुक को आरोपित किया जाता है, यद्यपि इसका उद्गम अस्पष्ट है; यहाँ पुनरुत्पादित चित्र Andrade, 1950 से लिया गया है।

कुछ संदर्भ उचित है। हुक की प्रतिष्ठा लंबे समय से न्यूटन द्वारा आच्छादित होने के कारण प्रभावित हुई और वह सहज तथा अविचारित आलोचना का विषय बनी। Andrade, 1950 ने इसे सुधारने का प्रयास किया और तर्क दिया कि विज्ञान के उस वसंतकाल के सभी प्रतिभाशाली व्यक्तियों में रॉबर्ट हुक को महानतम माने जाने का सुदृढ अधिकार है। इसी पुनर्वासात्मक संदर्भ में आंद्रादे यह चित्र प्रस्तुत करते हैं—संभवतः बाद के संस्करणों के लिए स्वयं हुक के पर्यवेक्षण में उत्कीर्ण, यद्यपि यह अनिश्चित है।

हुक के वास्तविक चित्रण हुक के वास्तविक चित्र, जैसे चित्र 6.13 में दर्शाई मुडी पट्टिकाएँ, प्रत्यास्थता के प्रति उनके ज्यामितीय उपागम को स्पष्ट करते हैं। इस रचना में दो सीधी रेखाएँ GHIK अपने सिरों पर जोडी गई हैं और बाह्य “शक्ति” से वक्र रूप LNNO में मोडी गई हैं; विस्तार LM और NO आनमन के समानुपाती हैं। यह प्रत्यावर्ती बल के विषय में हुक की उस तर्क-पद्धति का उदाहरण है जो बीजगणितीय अमूर्तन के बजाय प्रेक्षणीय ज्यामितीय संबंधों—लंबाइयों, वक्रताओं और आनुपातिक विस्तारों—पर आधारित थी।

~~$f = kx$~~ परिचित बीजगणितीय व्यंजक $F = kx$ स्वयं बाद का सूत्रीकरण है। सिद्धांत का हुक का अपना कथन *ut tensio, sic vis* (“जैसा विस्तार, वैसा बल”) प्रत्यास्थता के नियम को प्रतीकात्मक बीजगणित के बजाय ज्यामिति में निहित आनुपातिकता के रूप में व्यक्त करता था। हुक के लिए प्रत्यास्थता किसी अमूर्त स्थिरांक का सहारा लिए बिना विविध भौतिक मूर्त रूपों में विस्तारों, लंबाइयों और बलों के अनुपातों द्वारा प्रकट होती थी। तर्क की इस ज्यामितीय विधि को थॉमस यंग ने आगे बढाया और अत्यधिक परिष्कृत किया; उन्होंने अपनी 1807 की *Lectures on Natural Philosophy* (Young, 1807) में प्रत्यास्थ व्यवहार का प्रथम व्यवस्थित सामान्यीकरण दिया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यंग ने $F = kx$ रूप के समीकरण से आरंभ नहीं किया; इसके बजाय उन्होंने आनुपातिक तर्क—समान बलों से समान विस्तार और आनुपातिक बलों से आनुपातिक विस्तार—के माध्यम से पूर्ण प्रत्यास्थता को परिभाषित किया और तभी पिंड की विमाओं के सापेक्ष इस आनुपातिकता का प्रसामान्यीकरण करके प्रत्यास्थता का माप प्रस्तुत किया। इस प्रकार प्रत्यास्थता विशिष्ट ज्यामिति से स्वतंत्र पदार्थ-गुण बनी, जिसे आज यंग मापांक कहते हैं। बीजगणितीय व्यंजक इस ज्यामितीय प्रसामान्यीकरण की स्थापना के बाद ही उभरे; इस विकास की संकल्पनात्मक जड़ें ऑयलर तक 1727 में ही खोजी जा सकती हैं।[21]

318. परिभाषा। पूर्णतः प्रत्यास्थ पदार्थ आरंभ में समान बलों द्वारा समान मात्रा में और आनुपातिक बलों द्वारा आनुपातिक रूप में विस्तारित तथा संपीडित होता है।

319. परिभाषा किसी पदार्थ की प्रत्यास्थता का मापांक उसी पदार्थ का ऐसा स्तंभ है जो अपने आधार पर ऐसा दाब उत्पन्न करने में सक्षम हो जिसका किसी निश्चित मात्रा का संपीडन उत्पन्न करने वाले भार से वही अनुपात हो जो पदार्थ की लंबाई का उसकी लंबाई में कमी से है।

Young, 1807 *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*

आनमन में यंग के योगदानों के संदर्भित उपचार के लिए §7.3.2.6 देखें।

6.6.7 आइज़क न्यूटन (1642–1727)

आइज़क न्यूटन का जन्म 1642 के क्रिसमस दिवस पर लिंकनशायर के वूल्सथॉर्प में समयपूर्व, साधारण साधनों वाले कृषक परिवार में हुआ। उनके जन्म से पूर्व ही उनके पिता की मृत्यु हो गई थी और माता के पुनर्विवाह के बाद न्यूटन ने अपने बाल्यकाल का अधिकांश भाग उनसे अलग बिताया; इस अनुभव ने संभवतः उनकी आजीवन अंतर्मुखता और आत्मनिर्भरता को पोषित किया। बालक के रूप में उन्होंने कृषि में बहुत कम रुचि दिखाई, किंतु धूप-घड़ियाँ, जल-घड़ियाँ और छोटी मशीनें बनाते हुए यांत्रिक उपकरणों के प्रति आरंभिक आकर्षण प्रदर्शित किया। पहले स्थानीय व्याकरण विद्यालय और बाद में ट्रिनिटी कॉलेज, कैंब्रिज में शिक्षित न्यूटन का आरंभिक परिचय अरस्तूवादी प्राकृतिक दर्शन से हुआ, किंतु शीघ्र ही वे उससे हटकर स्वतंत्र गणितीय और भौतिक अन्वेषण की ओर मुड़े। सामाजिक और बौद्धिक, दोनों प्रकार के इस आरंभिक अलगाव ने तीव्र एकाग्रता, गोपनीयता और प्रायोगिक सामाजिकता की अपेक्षा निगमनात्मक निश्चितता की वरीयता से अभिलक्षित कार्यशैली को आकार दिया।

गैलीलियो से सार्वभौमिक यांत्रिकी तक आइज़क न्यूटन का जन्म 1642 के क्रिसमस दिवस पर, गैलीलियो की मृत्यु वाले वर्ष में हुआ—विज्ञान के इतिहास में मशाल के सांकेतिक हस्तांतरण जैसा। इंग्लैंड के ग्रामीण लिंकनशायर में पले न्यूटन ने 1661 में ट्रिनिटी कॉलेज, कैंब्रिज में प्रवेश लिया और बाद में गणित के Lucasian Professor बने।[22] त्वरण संबंधी गैलीलियो की अंतर्दृष्टियों और देकार्त की यांत्रिक विश्वदृष्टि पर निर्माण करते हुए न्यूटन दोनों से निर्णायक रूप से आगे बढ़े। देकार्त ने प्रस्तावित किया था कि आकाशीय गति अदृश्य तरल के घूमते भँवरों द्वारा शासित है और बलों को संपर्क के माध्यम से कार्य करना चाहिए। न्यूटन ने इसे क्रांतिकारी संकल्पना—दूरी पर गुरुत्वाकर्षण—से प्रतिस्थापित किया। गति के नियमों को औपचारिक बनाकर और यह दिखाकर कि केप्लर की दीर्घवृत्ताकार ग्रहीय कक्षाएँ उनसे स्वाभाविक रूप से निकलती हैं, उन्होंने कार्तीय त्रुटियाँ सुधारीं और स्थलीय तथा आकाशीय यांत्रिकी को एकल ढाँचे में एकीकृत किया। यह एकीकरण संभवतः

[21] ऑयलर ने अक्षीय प्रत्यास्थता के पदार्थ-स्थिरांक की ओर आरंभिक कदम उठाते हुए *विस्तार मापांक* प्रस्तुत किया (पिंड की विमाओं द्वारा प्रसामान्यीकृत ऐसा आनुपातिकता गुणक जो अनुदैर्ध्य विस्तार को लगाए गए बल से जोड़ता है) और उसका उपयोग हुक-प्रकार विस्तार को प्रत्यास्थ पिंडों के बंकन से जोड़ने के लिए किया। यह परिणाम ca. 1727/28 में लिखा गया और केवल 1862 में मरणोपरांत प्रकाशित हुआ; ऑयलर की *De oscillationibus annulorum elasticorum* (Euler, 1862) और ट्रूज़डेल में ऐतिहासिक वृत्तांत (Truesdell, 1960) देखें।

[22] यह प्रतिष्ठित पीठ बाद में स्टीफ़न हॉकिंग ने संभाली।

प्रारूप समीक्षा

वैज्ञानिक क्रांति की महानतम बौद्धिक उपलब्धि था और उसने प्रदर्शित किया कि गिरते सेब तथा परिक्रमा करते ग्रह, दोनों समान गणितीय नियमों से शासित होते हैं।[23]

न्यूटन की प्रतिभा के साथ उनका तीव्र वैयक्तिक स्वभाव जुड़ा था। यद्यपि प्रायः एकांतप्रिय और संघर्षशील, वे उग्र बौद्धिक प्रतिद्वंद्विताओं में लगे—सर्वाधिक प्रसिद्ध रूप से व्युत्क्रम-वर्ग नियम पर रॉबर्ट हुक के साथ और कलन के आविष्कार पर गॉटफ़्रीड लाइबनित्स के साथ। कटु होते हुए भी इन विवादों ने प्रमुख वैज्ञानिक सिद्धांतों के विकास और स्पष्टीकरण को प्रेरित किया। विरोधाभासी रूप से न्यूटन की गोपनीय और प्रतिस्पर्धी प्रकृति ने, यद्यपि व्यक्तिगत रूप से विनाशकारी, उन्हें और उनके समकालीनों को अपने दावे स्थापित करने के लिए अधिक कठोर प्रमाण तथा स्पष्ट व्याख्याएँ विकसित करने को बाध्य करके वैज्ञानिक प्रगति को संभवतः तीव्र किया। न्यूटन का गणित, भौतिकी और खगोलशास्त्र का संश्लेषण शताब्दियों तक विज्ञान की दिशा आकार देने वाला था। उन्हें व्यापक रूप से सर्वकालीन सर्वाधिक प्रभावशाली वैज्ञानिक माना जाता है।

वे अत्यंत जटिल व्यक्तित्व भी थे: केवल गणितज्ञ और भौतिक विज्ञानी ही नहीं, बल्कि रसायनसिद्ध और धर्मशास्त्री भी। न्यूटन ने बाइबिलीय कालक्रम और रसायनसिद्ध रूपांतरण का दशकों तक अध्ययन किया, यद्यपि ये प्रयास उनके जीवनकाल में अप्रकाशित रहे। Royal Society के संस्थापक सदस्य के रूप में उन्होंने अंततः उसके अध्यक्ष का पद संभाला और शाही टकसाल के अधीक्षक की शक्तिशाली शासकीय भूमिका भी निभाई। कठोर विज्ञान, रहस्यवादी परिकल्पना, संस्थागत नेतृत्व और राष्ट्रीय सेवा तक विस्तृत उनकी गतिविधि का विस्तार सत्रहवीं शताब्दी के बौद्धिक परिदृश्य की समृद्धि और अंतर्विरोध दर्शाता है।

आगे न्यूटन के गणित, भौतिकी और यांत्रिकी में योगदानों की केंद्रित चर्चाएँ हैं। ये उपखंड आधुनिक वैज्ञानिक विश्वदृष्टि को आकार देने में उनकी भूमिका सुदृढ करने वाले प्राविधिक आधारों पर बल देते हैं।

गणितज्ञ गैलीलियो की मृत्यु वाले वर्ष में क्रिसमस दिवस पर जन्मे आइज़क न्यूटन विज्ञान के इतिहास में विराट व्यक्तित्व के रूप में उभरे। गणितज्ञ, भौतिक विज्ञानी, खगोलविद् और धर्मशास्त्री न्यूटन ने कैंब्रिज विश्वविद्यालय में गणित के प्राध्यापक के रूप में सेवा की और उन्हें व्यापक रूप से सर्वकालीन सर्वाधिक प्रभावशाली वैज्ञानिक माना जाता है।

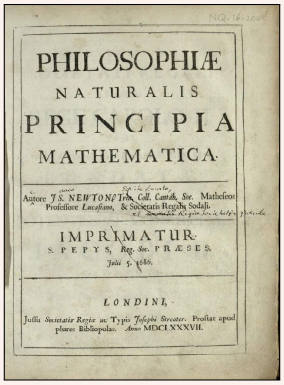
न्यूटन के हस्तक्षेप तक Aristotelian!mechanics प्रभावी थी: माना जाता था कि वस्तुएँ अपनी प्राकृतिक विराम-अवस्था खोजती हैं। न्यूटन ने यह कहकर इस विश्वदृष्टि को मूलतः बदल दिया कि कोई वस्तु बाह्य बल द्वारा प्रभावित न होने तक एकसमान गति में रहती है—और इस प्रकार गति के केंद्र में स्थिरता नहीं, जड़त्व रखा। घर्षण और प्रतिरोध के उनके स्पष्ट गणितीय उपचार से जुड़ी इस पुनर्व्याख्या ने बल की संकल्पना को पुनर्परिभाषित किया।

खगोलशास्त्र में Kepler टाइको ब्राहे के सूक्ष्म प्रेक्षणों के आधार पर ग्रह-गति के अपने तीन अनुभवजन्य नियम पहले ही सूत्रित कर चुके थे। किंतु एकीकारी सैद्धांतिक ढाँचे का अभाव था। न्यूटन की उपलब्धि का उत्प्रेरक 1684 में आया, जब खगोलविद् एडमंड हेली एक निर्णायक प्रश्न लेकर उनसे मिलने आए: यदि गुरुत्व-बल दूरी के व्युत्क्रम-वर्ग नियम का पालन करे, तो कोई ग्रह किस वक्र का अनुरेखण करेगा? न्यूटन ने तुरंत “एक दीर्घवृत्त” उत्तर दिया और दावा किया कि वे इसकी गणना पहले ही कर चुके थे। अपना मूल कार्य न मिलने पर उन्होंने हेली को व्युत्पत्ति भेजने का वचन दिया, जिससे *De motu corporum in gyrum* (कक्षा में पिंडों की गति पर) की रचना हुई। इस ग्रंथ ने गणितीय रूप से प्रदर्शित किया कि दीर्घवृत्ताकार कक्षाएँ व्युत्क्रम-वर्ग गुरुत्वाकर्षण से स्वाभाविक रूप से उत्पन्न होती हैं; इससे हेली इतने प्रभावित हुए कि उन्होंने न्यूटन से इसका विस्तार करने का आग्रह किया। परिणाम न्यूटन की 1687 की स्मारकीय कृति *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687 PDF), चित्र 6.15a, था। उसमें उन्होंने गति और सार्वभौमिक गुरुत्व के नियम व्यवस्थित रूप से व्युत्पन्न किए तथा एकल सुसंगत सिद्धांत-समुच्चय से स्थलीय यांत्रिकी और आकाशीय गतिकी को जोड़ा।

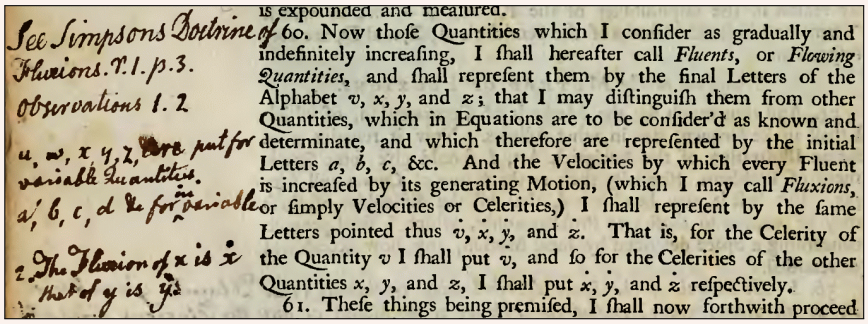
Principia में प्रस्तुत गति के तीन नियम चिरसम्मत यांत्रिकी और अभियांत्रिकी, दोनों के आधार हैं और इस पुस्तक में आगे अधिक प्राविधिक विस्तार से उनका विश्लेषण किया जाएगा। प्रकाशिकी और विशेषतः गणित में न्यूटन के योगदान समान रूप से गहन थे। किंतु कलन के आविष्कार को लेकर लाइबनित्स के साथ कुख्यात विवाद ने उनकी गणितीय विरासत को कलंकित

[23] आधुनिक भौतिकी में यह एकता और आगे विस्तृत है: मूलतः परमाणिवक और उपपरमाणिवक परिघटनाओं के वर्णन के लिए विकसित क्वांटम यांत्रिकी के आकाशीय भौतिकी में भी अनुप्रयोग हैं, उदाहरणार्थ तारकीय आंतरिक भागों, श्वेत वामन, न्यूट्रॉन तारों और खगोलभौतिक संदर्भों में क्वांटम सुरंगन जैसी प्रक्रियाओं के प्रतिरूपण में।

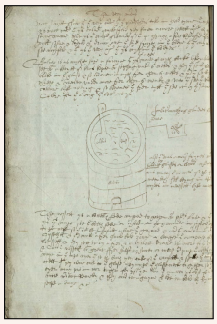
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA
Autore I.S. NEWTONO, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

(a) *Principia*, आवरण-पृष्ठ (Newton, 1687)


is expounded and meaſured.
60. Now thoſe Quantities which I conſider as gradually and indefinitely increaſing, I ſhall hereafter call *Fluents*, or *Flowing Quantities*, and ſhall repreſent them by the final Letters of the Alphabet *v*, *x*, *y*, and *z*; that I may diſtinguiſh them from other Quantities, which in Equations are to be conſider'd as known and determinate, and which therefore are repreſented by the initial Letters *a*, *b*, *c*, &c. And the Velocities by which every Fluent is increaſed by its generating Motion, (which I may call *Fluxions*, or ſimply Velocities or Celerities,) I ſhall repreſent by the ſame Letters pointed thus $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$. That is, for the Celerity of the Quantity *v* I ſhall put $\dot{v}$, and ſo for the Celerities of the other Quantities *x*, *y*, and *z*, I ſhall put $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$ reſpectively.
61. Theſe things being premiſed, I ſhall now forthwith proceed

(b) फ्लक्सियन



(c) रसायनसिद्धि

चित्र 6.15: आइज़क न्यूटन

किया । अत्यल्प राशियों पर आधारित और उनके *fluxions* संकेतन में व्यक्त न्यूटन का संस्करण[24] पांडुलिपियों में 1666 में ही दिखाई दिया, किंतु 1693 तक सार्वजनिक नहीं हुआ। इसके विपरीत लाइबनित्स ने 1675 में अवकलों का उपयोग आरंभ किया और आधुनिक संकेतन $\int$ तथा dy/dx प्रस्तुत किए, जो मानक बने। यद्यपि आधुनिक इतिहासकार दोनों व्यक्तियों द्वारा कलन के स्वतंत्र विकास को स्वीकार करते हैं, रॉयल सोसाइटी की जाँच—जिसकी अध्यक्षता और गुप्त लेखन स्वयं न्यूटन ने किया—ने लाइबनित्स पर plagiarism का आरोप लगाया। इस कटु विवाद के यूरोपीय गणित पर दीर्घकालीन परिणाम हुए, क्योंकि ब्रिटिश गणितज्ञों ने लगभग एक शताब्दी तक स्वयं को महाद्वीपीय विकासों से बड़े स्तर पर अलग रखा और स्वयं अपनी हानि की।

लाइबनित्स के साथ पत्राचार में न्यूटन ने गोपनीयता बनाए रखते हुए अग्रता स्थापित करने के लिए अपनी खोजों को विपर्यस्ताक्षरों से कूटबद्ध किया, जैसे

> *6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux*
> अथवा *Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa*

[24] न्यूटन ने काल-परिवर्ती राशियों को *fluents* और उनकी परिवर्तन की तात्कालिक दरों को *fluxions* कहा, जिन्हें चर के ऊपर बिंदु (उदाहरणार्थ, $\dot{x}$) से निरूपित किया जाता था। यह आधुनिक अवकलज $\frac{dx}{dt}$ के तुल्य है, किंतु काल-आधारित ज्यामितीय ढाँचे में व्यक्त है। न्यूटन ने यह विधि 1660 के दशक के मध्य में विकसित की, यद्यपि यह उनकी *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (1736) में मरणोपरांत प्रकाशित हुई।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> किसी भी संख्या में प्रवाही राशियों वाला समीकरण दिया हो, तो फ्लक्सियन ज्ञात करें; और इसके विपरीत
> Newton, 1960 *"Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676"*

इससे कलन के मूल प्रमेय का गूढ रूप में प्रभावी सार प्रस्तुत हुआ।

एक अन्य उग्र विवाद रॉबर्ट हुक के साथ उत्पन्न हुआ, जिन्होंने 1679 में दावा किया कि न्यूटन ने उनसे inverse-square law of attraction ग्रहण किया था। यद्यपि हुक ने गुणात्मक अंतर्दृष्टि सूत्रित की थी, उन्होंने उसे कभी गणितीय रूप से विकसित नहीं किया। न्यूटन की *Principia* ने विचार को गुरुत्व के परिमाणात्मक सार्वभौमिक नियम में रूपांतरित किया। अधिकांश इतिहासकार साहित्यिक चोरी का आरोप अस्वीकार करते हैं, किंतु प्रतिद्वंद्विता ने दोनों व्यक्तियों की विरासत पर अमिट चिह्न छोड़ा।

अपनी अब किंवदंती बन चुकी प्रतिष्ठा के बावजूद *Principia* लगभग अप्रकाशित रह गई थी। न न्यूटन और न रॉयल सोसाइटी उसका वित्तपोषण कर सके। अंततः खगोलविद् एडमंड हेली ने लागत वहन की; उन्होंने न केवल मुद्रण का वित्तपोषण किया, बल्कि वितरण भी संभाला। हेली ने न्यूटन को व्यक्तिगत उपयोग के लिए प्रतियाँ भेजीं और व्यापक पहुँच सुनिश्चित करने के लिए पुस्तक-विक्रेताओं के माध्यम से कार्य किया (Cohen, 2013)। यह प्रकरण दर्शाता है कि सर्वाधिक स्मारकीय वैज्ञानिक कृतियाँ भी अपने प्रसार के लिए व्यक्तिगत संबंधों और वैयक्तिक पहल पर निर्भर थीं।

न्यूटन के तृतीय नियम के विषय में एक सामान्य भ्रांति सुधारना उचित है। उसे प्रायः "प्रत्येक क्रिया के लिए समान और विपरीत प्रतिक्रिया होती है" के रूप में गलत प्रस्तुत किया जाता है, जिससे एक ही वस्तु पर बलों का स्वतः संतुलित युग्म सूचित होता है। वास्तव में नियम कहता है कि यदि पिंड A बल F_a पिंड B पर लगाता है, तो पिंड B समान और विपरीत बल F_b पिंड A पर लगाता है। चूँकि बल भिन्न पिंडों पर कार्य करते हैं, वे साम्य सूचित नहीं करते (Cohen, 2002 PDF)।

रसायनसिद्ध अंततः, किंतु कम महत्त्वपूर्ण नहीं, न्यूटन रसायनसिद्धि में भी गहराई से संलग्न थे—जिसे उस समय *chymistry* कहा जाता था[25]। इसका एक प्रमुख लक्ष्य *दार्शनिक पाषाण* की खोज था—वह किंवदंतीय पदार्थ जो सामान्य धातुओं को स्वर्ण में रूपांतरित कर सकता माना जाता था। द्वितीयक खोज *जीवन-अमृत* की थी, जिसके विषय में कहा जाता था कि वह दीर्घायु अथवा अमरता प्रदान करता है।

आधुनिक पाठक को ये लक्ष्य काल्पनिक प्रतीत हो सकते हैं, किंतु 17वीं शताब्दी में रसायनसिद्धि को सीमांत विषय अथवा छद्मविज्ञान नहीं माना जाता था। इसके विपरीत वह गंभीर और वैध बौद्धिक उद्यम था, जो बाद में आधुनिक रसायनिकी, धातुकर्म और चिकित्सा बनने वाले क्षेत्रों से अतिव्याप्त था। बॉयल, ग्लाउबर और यहाँ तक कि केप्लर सहित अनेक प्राकृतिक दार्शनिकों ने इसमें भाग लिया। रसायनसिद्धि ने अनुभवजन्य प्रयोग को चिरसम्मत और रहस्यवादी परंपराओं पर आधारित गूढ दर्शन से जोड़ा। उसकी सांकेतिक भाषा और रूपकात्मक ढाँचे अब दुर्बोध लगते हैं, किंतु उसकी विधियों में प्रायः भट्टियों, मूषाओं और आसवन उपकरणों के साथ वास्तविक प्रयोगशाला-कार्य सम्मिलित था। अनेक रूपों में रसायनसिद्ध व्यवहार ने निर्णायक प्रायोगिक तकनीकें और प्रयोगशाला-कौशल प्रदान किए जिन्हें बाद में आधुनिक रसायनिकी तथा पदार्थ-विज्ञान में सम्मिलित किया गया।

न्यूटन का रसायनसिद्ध कार्य व्यवस्थित और विशाल था। एक दशक में उन्होंने *Index Chemicus* संकलित की—150 से अधिक रसायनसिद्ध ग्रंथों के अपने अध्ययन से लिए पदार्थों, प्रक्रियाओं और रूपकात्मक पदों की वर्णानुक्रमिक सूची (Newton, 1680)। उन्होंने प्राचीन विधियों को कूटमुक्त करने और पदार्थ की वास्तविक संरचना उजागर करने के उद्देश्य से निजी रूप से व्यापक प्रयोग किए। ये गतिविधियाँ उनके जीवनकाल में कभी सार्वजनिक रूप से साझा नहीं की गईं, आंशिकतः इसलिए कि रसायनसिद्धि अकादमिक सम्मान की सीमा पर कार्य करती थी और आंशिकतः गोपनीयता तथा शक्ति से उसके संबंधों के कारण।

1727 में उनकी मृत्यु के बाद न्यूटन की रसायनसिद्ध पांडुलिपियाँ "मुद्रण के योग्य नहीं" मानी गईं और सार्वजनिक दृष्टि से

[25] 17वीं शताब्दी में *chymistry* पद ऐसे व्यापक क्षेत्र के लिए प्रयुक्त होता था जिसमें परिकल्पनात्मक रसायनसिद्धि और उभरती प्रायोगिक रसायनिकी, दोनों सम्मिलित थे। यह अभी वह पूर्णतः अनुभवजन्य विज्ञान नहीं था जिसे हम आज जानते हैं, बल्कि व्यावहारिक धातुकर्म, रहस्यवादी दर्शन और आरंभिक प्रयोगशाला-व्यवहार का मिश्रण था। आधुनिक *chemistry* पद 18वीं शताब्दी तक *alchemy* से पूर्णतः पृथक् नहीं हुआ था।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बड़े स्तर पर छिपी रहीं। केवल 20वीं शताब्दी में विद्वानों ने इन लेखनों का व्यवस्थित परीक्षण आरंभ किया। आज रसायनसिद्धि में न्यूटन के निमज्जन को विज्ञान से विचलन नहीं, बल्कि इस तथ्य का प्रतिबिंब माना जाता है कि आरंभिक आधुनिक काल में विज्ञान, दर्शन और रहस्यवाद के बीच सीमाएँ कितनी पारगम्य थीं।

आधुनिक पाठक को न्यूटन की वैज्ञानिक प्रतिभा और प्रायः गलत समझे अथवा अस्वीकार किए जाने वाले क्षेत्र के प्रति उनके समर्पण का सामंजस्य बैठाना फिर भी कठिन लग सकता है। किंतु ठीक इसी सहस्थिति में हम 17वीं शताब्दी के चिंतन की संक्रमणशील प्रकृति देखते हैं—ऐसा संसार जिसमें कठोर गणित, तत्त्वमीमांसात्मक परिकल्पना और प्रायोगिक रसायनसिद्धि एक ही मन में सह-अस्तित्व रखते थे। न्यूटन के रसायनसिद्ध प्रयास हमें स्मरण कराते हैं कि सर्वाधिक विवेकपूर्ण वैज्ञानिक मस्तिष्क भी अपने काल के सांस्कृतिक और बौद्धिक संदर्भों के भीतर कार्य करते हैं और जिसे हम “वैज्ञानिक” मानते हैं उसकी सीमाएँ शताब्दियों में नाटकीय रूप से बदली हैं।

प्रत्यास्थताविद्? प्रत्यास्थता-सिद्धांत के ऐतिहासिक विकास में न्यूटन की केवल गौण भूमिका थी (Todhunter and Pearson, 1893)। फिर भी अपनी बाद की कृति *Opticks* (Newton, 1717) में उन्होंने परिकल्पनात्मक “प्रश्नों” की शृंखला प्रस्तुत की, जिनमें प्रश्न XXXI—“वरणात्मक आकर्षणों” पर—यह सुझाव देता है कि छोटे कणों के बीच आकर्षक शक्तियाँ स्थूल परिघटनाओं के आधार में हो सकती हैं।

> यह सर्वविदित है कि पिंड गुरुत्व, चुंबकत्व और विद्युत के आकर्षणों द्वारा परस्पर क्रिया करते हैं; और ये उदाहरण प्रकृति की प्रवृत्ति तथा क्रम दिखाते हैं और यह असंभाव्य नहीं बनाते कि इनके अतिरिक्त और भी आकर्षक शक्तियाँ हो सकती हैं। क्योंकि प्रकृति स्वयं से अत्यंत सुसंगत और अनुरूप है।
>
> Newton, 1717 *Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light*[Query 31]

इस प्रश्न में न्यूटन समस्त पदार्थ की कल्पना ऐसे कठोर कणों से निर्मित रूप में करते हैं जो ढीले ढंग से एकत्र और कुछ ही बिंदुओं पर मुश्किल से स्पर्श करते हैं। फिर वे संसंजन और प्रत्यास्थ व्यवहार की आरंभिक अंतःप्रज्ञा प्रस्तुत करते हैं:

> अब पदार्थ के छोटे कण सबसे प्रबल आकर्षणों द्वारा संसक्त होकर अपेक्षाकृत दुर्बल शक्ति वाले बड़े कण बना सकते हैं; और इनमें से अनेक संसक्त होकर और बड़े कण बना सकते हैं जिनकी शक्ति और भी दुर्बल हो; और यह विविध अनुक्रमों में तब तक चलता रहे जब तक प्रगति सबसे बड़े कणों पर समाप्त न हो, जिन पर रसायनिकी की संक्रियाएँ और प्राकृतिक पिंडों के रंग निर्भर करते हैं; और जो आसंजित होकर संवेद्य परिमाण के पिंड बनाते हैं। यदि पिंड संहत हो और उसके भागों के किसी सर्पण के बिना दाब से भीतर की ओर मुड़े अथवा दबे, तो वह कठोर और प्रत्यास्थ होता है तथा अपने भागों के पारस्परिक आकर्षणों से उत्पन्न बल के साथ अपने आकार में लौटता है।
>
> Newton, 1717 *Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light*[Query 31]

यह अनुच्छेद स्थूल प्रत्यास्थ अनुक्रिया को आंतरिक आकर्षक बलों से जोड़ने के बाद के प्रयासों का पूर्वाभास देता है। इस परिकल्पनात्मक अंतर्दृष्टि के अतिरिक्त प्रत्यास्थता में न्यूटन का एकमात्र अन्य ज्ञात योगदान *Principia* के उस संक्षिप्त अनुच्छेद में है जो प्रत्यास्थ पिंडों के संघट्ट से संबंधित है। प्रत्यास्थता-सिद्धांत के औपचारिक विकास पर उनका प्रभाव सीमित रहा।

प्रत्यास्थता का कठोर गणितीय सूत्रीकरण आगामी शताब्दियों में उभरने वाला था। कमानियों में बल को विस्थापन से जोड़ने वाला हुक का अनुभवजन्य नियम—जो सर्वप्रथम 1678 में प्रकाशित हुआ—एक निर्णायक आरंभिक कदम था (§6.12 देखें)। बाद में ऑगस्ताँ-लुई कॉशी ने प्रतिबल प्रस्तुत किया और सातत्यक माध्यम में साम्य को औपचारिक रूप दिया; क्लोद-लुई नाविए ने इन विचारों को व्यवस्थित रैखिक सिद्धांत तक विस्तृत किया, जिसका उपयोग आज भी संरचनात्मक यांत्रिकी में होता है।

***Principia* और संरचनात्मक विश्लेषण का न्यूटनीय ढाँचा** आइज़क न्यूटन (1642–1727) (Newton, 1687) ने स्थलीय और आकाशीय यांत्रिकी को एकीकृत करने वाला महान संश्लेषण प्राप्त किया और वह संकल्पनात्मक ढाँचा स्थापित किया जिसके भीतर समस्त परवर्ती संरचनात्मक विश्लेषण कार्य करता है। 1687 में प्रथम बार प्रकाशित उनकी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica (प्राकृतिक दर्शन के गणितीय सिद्धांत) ने गति और सार्वभौमिक गुरुत्व के वे नियम सूत्रित किए जो गिरते सेबों से परिक्रमा करते ग्रहों तक—और अभियांत्रिकी के लिए निर्णायक रूप से, विक्षेपित धरनों से ढहती संरचनाओं तक—की परिघटनाओं को शासित करते हैं।

न्यूटन के गति के तीन नियम संरचनात्मक यांत्रिकी का आधार प्रदान करते हैं। प्रथम नियम (जड़त्व) स्थापित करता है कि बलों द्वारा प्रभावित न होने तक पिंड विराम अथवा एकसमान गति में रहते हैं—यह स्थैतिक साम्य का संकल्पनात्मक आधार है। द्वितीय नियम बल, द्रव्यमान और त्वरण के बीच संबंध परिमाणित करता है और काल-परिवर्ती भारों के अधीन संरचनाओं का गतिक विश्लेषण संभव करता है। तृतीय नियम सुनिश्चित करता है कि भिन्न पिंडों पर अंतःक्रिया-बल समान और विपरीत युग्मों में उत्पन्न होते हैं; यह मुक्त-पिंड विश्लेषण तथा प्रतिक्रियाओं के निर्धारण के लिए अनिवार्य सिद्धांत है।

स्थैतिक संरचनाओं के लिए न्यूटन के नियम साम्य-दशाओं तक सरल हो जाते हैं: सभी बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिए ($\sum \mathbf{F} = 0$) और किसी भी बिंदु के परितः सभी आघूर्णों का योग शून्य होना चाहिए ($\sum \mathbf{M} = 0$)। व्यवस्थित रूप से लागू ये संबंध ट्रसों, धरनों, ढाँचों, मेहराबों और अन्य संरचनात्मक रूपों का विश्लेषण संभव करते हैं। संरचनात्मक अभियंता द्वारा बनाया गया प्रत्येक मुक्त-पिंड आरेख न्यूटनीय यांत्रिकी का अनुप्रयोग है।

Principia ने वह गणितीय उपकरण—ज्यामितीय रूप में प्रस्तुत फ़लक्सियन का कलन—भी दिया जिसने बाद में सातत्यक तंत्रों का विश्लेषण संभव किया। धरन-विक्षेप, स्तंभ-स्थिरता और संरचनात्मक गतिकी को शासित करने वाले अवकल समीकरण विकृतिशील पिंडों पर लागू न्यूटनीय यांत्रिकी की अभिव्यक्तियाँ हैं। विशिष्ट परिणामों से परे न्यूटन ने विवेकपूर्ण यांत्रिकी का आदर्श स्थापित किया: ऐसा स्व-सुसंगत गणितीय तंत्र जो प्रथम सिद्धांतों से भौतिक व्यवहार का पूर्वानुमान कर सके। यह विश्वास संरचनात्मक अभियांत्रिकी के उद्यम का आधार है: किसी संरचना को बनाने से पूर्व उसका विश्लेषण किया जा सकता है और ऐसे भारों के अधीन उसकी अनुक्रिया का पूर्वानुमान किया जा सकता है जिन्हें उसने कभी अनुभव नहीं किया, क्योंकि सभी यांत्रिक परिघटनाएँ समान नियमों से शासित होती हैं।

6.6.8 गॉटफ़्रीड लाइबनित्स (1646–1716)

गॉटफ़्रीड विल्हेल्म लाइबनित्स का जन्म 1646 में लाइपज़िग में नैतिक दर्शन के प्राध्यापक के पुत्र के रूप में हुआ। कम आयु में अनाथ होने पर उन्हें पिता के व्यापक पुस्तकालय तक निर्बाध पहुँच मिली, जहाँ उन्होंने चिरसम्मत साहित्य, दर्शन, तर्कशास्त्र, गणित और विधि का व्यापक अध्ययन करके स्वयं को शिक्षित किया। मुख्यतः स्वशिक्षित इस पालन-पोषण ने असाधारण बौद्धिक विस्तार और ज्ञान की एकता में आजीवन विश्वास को पोषित किया। गणित के बजाय विधि में औपचारिक रूप से प्रशिक्षित लाइबनित्स ने अकादमिक शिक्षण से स्वतंत्र अपने वैज्ञानिक विचार विकसित किए और गणित को सामान्य सत्यों को व्यक्त करने में सक्षम सांकेतिक भाषा माना। तर्कशास्त्र और तत्त्वमीमांसा में इस आरंभिक निमज्जन ने औपचारिक तंत्रों, संकेतन और सार्वभौमिक विधियों पर उनके बाद के बल को आकार दिया—ये लक्षण यांत्रिकी और कलन के प्रति उनके उपागम को न्यूटन की अधिक ज्यामितीय तथा भौतिक रूप से आधारित शैली से अलग करते थे।

सत्रहवीं शताब्दी के बहुविद् गॉटफ़्रीड विल्हेल्म लाइबनित्स ऐसे जर्मन बहुविद्, दार्शनिक और गणितज्ञ थे जिनका बौद्धिक विस्तार सत्रहवीं शताब्दी के किसी भी व्यक्तित्व के समकक्ष था। प्रतिभाशाली चिंतक और प्रचुर लेखक के रूप में उन्होंने तर्कशास्त्र, तत्त्वमीमांसा, विधि, इतिहास और—इस अध्याय के संदर्भ में—गणित तथा यांत्रिकी में आधारभूत योगदान किए। विशिष्ट क्षेत्रों में विशेषज्ञता रखने वाले अपने अनेक समकालीनों के विपरीत लाइबनित्स मानते थे कि समस्त ज्ञान परस्पर संबद्ध है और एक क्षेत्र की प्रगति दूसरे की समस्याओं को प्रकाशित कर सकती है; यह दृष्टि गणितीय भौतिकी के विकास के लिए अत्यंत फलदायी सिद्ध हुई।

निर्माणकारी वर्ष और पेरिस का प्रभाव 1672 के आरंभिक वसंत में एक जर्मन दूत पेरिस पहुँचा: वह अपने संरक्षक बैरन फ़ॉन बॉयनेबुर्ग के लिए राजनयिक अभियान पर आए लगभग पच्चीस वर्षीय लाइबनित्स थे। प्रकटतः राजनीतिक यह यात्रा बौद्धिक रूप से रूपांतरणकारी थी। पेरिस में लाइबनित्स का वैज्ञानिकों और दार्शनिकों के जीवंत समुदाय से संपर्क हुआ। सबसे उल्लेखनीय रूप से वे क्रिस्टियान हाइगेन्स से मिले, जो गणित में उनके मार्गदर्शक बने। हाइगेन्स के मार्गदर्शन में लाइबनित्स दार्शनिक परिकल्पना से कठोर गणितीय विश्लेषण की ओर बढ़े। यह मार्गदर्शन दर्शाता है कि अनौपचारिक यूरोपीय संजाल गणितीय ज्ञान के संचार और उन्नति के निर्णायक साधन थे।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कलन का आविष्कार पेरिस के अपने वर्षों (1672–1676) में लाइबनित्स ने अवकल और समाकल कलन बनने वाले विषय की नींव विकसित की। 1675 में उन्होंने समाकलन के लिए $\int$ और अवकलों के लिए d संकेतन प्रस्तुत किए, जो आज भी सार्वभौमिक उपयोग में हैं। *fluxions* संकेतन का उपयोग करने और अनिच्छा से प्रकाशित करने वाले न्यूटन के विपरीत लाइबनित्स ने अपने निष्कर्ष शीघ्र प्रकाशित और संप्रेषित किए; वैज्ञानिक व्यवहार के इस अंतर ने कटु अग्रता-विवाद को उत्प्रेरित किया (§6.6.7 देखें)। खोजों को खुलकर साझा करने की लाइबनित्स की तत्परता न्यूटन की गोपनीयता के विपरीत थी और अंततः गणितीय विश्लेषण के व्यापक विकास के लिए लाभकारी हुई।

कलन का अग्रता-विवाद आदर्शीकृत राशियों के रूप में अत्यल्प राशियों का लाइबनित्स का दृष्टिकोण न्यूटन के ज्यामितीय तर्कों के विपरीत था। यद्यपि आधुनिक विद्वान सहमत हैं कि दोनों व्यक्तियों ने कलन स्वतंत्र रूप से विकसित किया, न्यूटन के समर्थकों—विशेषतः न्यूटन द्वारा गुप्त रूप से लिखित रॉयल सोसाइटी की रिपोर्ट—ने लाइबनित्स पर साहित्यिक चोरी का आरोप लगाया। इस प्रसंग ने पूरे यूरोप के वैज्ञानिक समुदायों का ध्रुवीकरण किया और दशकों तक ब्रिटिश तथा महाद्वीपीय गणितज्ञों के संबंधों को धूमिल रखा। इस विवाद के गणित के विकास पर गहन परिणाम हुए, क्योंकि ब्रिटिश गणितज्ञ महाद्वीपीय प्रगति से उत्तरोत्तर अलग होते गए और उनकी अपनी प्रगति बाधित हुई।[26]

तत्त्वमीमांसा और यंत्रवाद कलन से परे लाइबनित्स ने तत्त्वमीमांसात्मक सिद्धांतों पर आधारित यांत्रिक विश्वदृष्टि को आगे बढ़ाया। अविभाज्य, आत्मा-सदृश इकाइयों—*monads*—की उनकी संकल्पना यंत्रवाद को एकता और पूर्वस्थापित सामंजस्य के दार्शनिक वृत्तांत से मिलाने का प्रयास थी। अमूर्त होते हुए भी इस कार्य ने विज्ञान और दर्शन, दोनों में बाद के चिंतकों को प्रेरित किया, जिनमें कांट और परोक्ष रूप से क्षेत्र-सिद्धांत के कुछ पक्ष सम्मिलित हैं।

यांत्रिक परिकलक और अभियांत्रिक रुचियाँ लाइबनित्स ने अभियंताओं के साथ सहयोग किया और व्यावहारिक नवोन्मेष खोजे। उन्होंने *Stepped Reckoner* का अभिकल्प किया—गुणा और भाग करने में सक्षम ऐसा यांत्रिक परिकलक जो ब्लेज़ पास्कल की पूर्ववर्ती जोड़ने वाली मशीन पर आधारित था। यांत्रिक रूप से अपूर्ण होते हुए भी वह परिकलन को स्वचालित करने का साहसिक प्रयास और बाद की संगणन मशीनों का अग्रदूत माना जाता है। यह कार्य लाइबनित्स के उस विश्वास को दर्शाता है कि सैद्धांतिक गणित के व्यावहारिक अनुप्रयोग होने चाहिए; यह दृष्टि अभियांत्रिक विज्ञान में केंद्रीय बनने वाली थी।[27]

सांकेतिक तर्क और सार्वभौमिक भाषा औपचारिक तार्किक कलन *calculus ratiocinator* के साथ संयुक्त सार्वभौमिक वैज्ञानिक भाषा *characteristica universalis* की उनकी दृष्टि ने शताब्दियों बाद सांकेतिक तर्क और कंप्यूटर विज्ञान के विकासों का पूर्वाभास दिया। इन प्रयासों का लक्ष्य तर्क को परिकलन तक सरल करना था और उन्होंने बूल, फ़्रेगे तथा ट्यूरिंग जैसे बाद के चिंतकों को प्रभावित किया।

विस वीवा और संरक्षण-विवाद यांत्रिकी में लाइबनित्स ने *vis viva* ("जीवित बल") की संकल्पना प्रस्तुत की, जो mv^2 के समानुपाती और यांत्रिक प्रक्रियाओं में संरक्षित राशि थी। इससे वे न्यूटनीय मत के विपरीत आए, जो संवेग (mv) को प्राथमिक संरक्षित राशि मानता था। यह विवाद उन्नीसवीं शताब्दी तक चलता रहा और अंततः ऊर्जा-संरक्षण की आधुनिक समझ में योगदान दिया। ऊर्जा-संरक्षण की यह आरंभिक पहचान बाद के ऊष्मागतिकी तथा मशीनों और संरचनाओं के अभियांत्रिक विश्लेषण के लिए निर्णायक सिद्ध होने वाली थी।

अवकल समीकरण और भौतिक प्रतिरूपण लाइबनित्स ने गतिक तंत्रों के प्रतिरूपण के लिए अवकल समीकरणों के उपयोग की आधारशिला भी रखी। उनकी संकेतन-स्पष्टता और बीजगणितीय औपचारिकता ने परिवर्तन तथा भौतिक नियम को व्यवस्थित रूप से व्यक्त करना संभव किया; ये साधन ऑयलर, लाग्रांज और अन्य द्वारा विकसित यांत्रिकी में केंद्रीय बने।

संस्थागत दृष्टि और वैज्ञानिक राजनय लाइबनित्स ने वैज्ञानिक अकादमियों की स्थापना में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाई, जिनमें बाद में बर्लिन अकादमी बनने वाली संस्था सम्मिलित थी। उन्होंने राष्ट्रीय सीमाओं के पार वैज्ञानिक प्रयासों

[26] भू-तकनीकी अभियांत्रिकी में 1930 के दशक में मृदा यांत्रिकी के गणितीय आधारों और प्रभावी प्रतिबल सिद्धांत की वैधता पर कार्ल टेर्ज़ागी तथा पॉल फ़िलुंगर के बीच उतना ही उग्र विवाद उत्पन्न हुआ, (Goodman, 1999)। विवाद अत्यंत व्यक्तिगत और राजनीतिक रूप से आवेशित हो गया तथा अंततः फ़िलुंगर की मृत्यु के साथ दुखद रूप से समाप्त हुआ; उसके परिणामों ने दशकों तक मृदा यांत्रिकी अनुसंधान के प्रक्षेप-पथ और स्वीकृति को आकार दिया।

[27] इस दर्शन का आधुनिक उदाहरण Benoît Mandelbrot के कार्य में देखा जा सकता है, जिनके भग्न-ज्यामिति के विकास—मूलतः एक सैद्धांतिक रचना—के अभियांत्रिकी में विस्तृत अनुप्रयोग मिले, खुरदरे पृष्ठों और सरंध्र माध्यमों के प्रतिरूपण से लेकर संकेत-संसाधन तथा ऐंटेना-अभिकल्प के सुधार तक।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के एकीकरण का समर्थन किया और अंतरराष्ट्रीय सहयोग के आधुनिक संजालों का पूर्वाभास दिया। उनका संस्थागत दृष्टिकोण इस समझ को दर्शाता है कि वैज्ञानिक प्रगति के लिए केवल वैयक्तिक प्रतिभा ही नहीं, बल्कि सतत सहयोग हेतु संगठित संरचनाएँ भी अपेक्षित थीं।[28]

परस्पर-संदर्भ और प्रभाव इस ग्रंथ में सर्वत्र न्यूटन (§6.6.7) के साथ लाइबनित्स की अंतःक्रियाओं, हाइगेन्स (§6.6.4) के अधीन उनके मार्गदर्शन और कॉशी तथा ऑयलर जैसे बाद के व्यक्तियों में उनकी प्रतिध्वनियों के परस्पर-संदर्भ दिए गए हैं; इन व्यक्तियों ने गणितीय कठोरता और भौतिक अंतःप्रज्ञा के बीच सेतु बनाने में सहायता की।

कलन, परिवर्तनात्मक चिंतन और अभियांत्रिक विरासत गॉटफ़रीड विल्हेल्म लाइबनित्स (1646–1716) (Leibniz, 1969) ने न्यूटन से स्वतंत्र रूप से कलन का सह-विकास किया और वह संकेतन तथा संकल्पनात्मक ढाँचा प्रस्तुत किया जो महाद्वीपीय गणित और अंततः विश्व भर के अभियांत्रिक विश्लेषण में मानक बना। यद्यपि यांत्रिकी में उनके योगदान न्यूटन के योगदानों से कम प्रसिद्ध हैं, उन्होंने ऐसे परिवर्तनात्मक सिद्धांत स्थापित किए जो संरचनात्मक विश्लेषण में अनिवार्य साधन बने।

लाइबनित्स का कलन-संकेतन—dx, dy, $\int$, d/dx—न्यूटन के फ्लक्सियनों की तुलना में परिकलन के लिए कहीं अधिक व्यावहारिक सिद्ध हुआ और आज सार्वभौमिक रूप से प्रयुक्त होता है। 1680 के दशक से शोध-पत्रों में प्रस्तुत अवकलन और समाकलन के नियमों के उनके व्यवस्थित विकास ने पूरे यूरोप के गणितज्ञों और अभियंताओं के लिए कलन को सुलभ बनाया। बर्नूली, ऑयलर, लाग्रांज और यांत्रिकीविदों की परवर्ती पीढ़ियों ने लाइबनित्सीय ढाँचे में ही कार्य किया।

संकेतन से परे लाइबनित्स ने यांत्रिकी को मूलभूत संकल्पनाएँ दीं। उनका *vis viva* सिद्धांत—जिसे अब हम गतिज ऊर्जा कहते हैं—ने यांत्रिकी के उस ऊर्जा-आधारित उपागम का आरंभ किया जो बल-आधारित न्यूटनीय सूत्रीकरण का पूरक है। यह पहचान कि कुछ राशियाँ (ऊर्जा, कार्य) यांत्रिक प्रक्रियाओं में संरक्षित रहती हैं, उन तंत्रों के विश्लेषण के लिए शक्तिशाली साधन प्रदान करती है जहाँ प्रत्यक्ष बल-विश्लेषण कठिन होता है।

लाइबनित्स यांत्रिकी के आधारों से भी जुड़े और दिक्, काल तथा बल की प्रकृति पर न्यूटन तथा उनके अनुयायियों से वाद-विवाद किया। पर्याप्त कारण का उनका सिद्धांत—कि कुछ भी कारण के बिना घटित नहीं होता—परिवर्तनात्मक सिद्धांतों का पूर्वाभास देता था: सभी संभव गतियों में प्रकृति ऐसी गति चुनती है जो किसी राशि को चरम करती है। ऑयलर, लाग्रांज और हैमिल्टन द्वारा गणितीय रूप से विकसित इस चिंतन-रेखा ने न्यूनतम क्रिया के सिद्धांत तथा आधुनिक संरचनात्मक यांत्रिकी के आधारभूत परिवर्तनात्मक सूत्रीकरणों को जन्म दिया।

संरचनात्मक अभियांत्रिकी के लिए लाइबनित्स की विरासत में कलन के उपकरण, आभासी कार्य और विकृति-ऊर्जा विधियों के आधारभूत ऊर्जा-विचार तथा परिमित अवयव विश्लेषण को संभव करने वाला परिवर्तनात्मक ढाँचा सम्मिलित हैं। विश्लेषणात्मक, व्यवस्थित और परिकलनोन्मुख लाइबनित्सीय परंपरा ने महाद्वीप पर संरचनात्मक यांत्रिकी के विकास को आकार दिया और École Polytechnique तथा उसके उत्तराधिकारियों के माध्यम से आज प्रभावी अभियांत्रिकी के गणितीय उपागम को स्थापित करने में सहायता की।

6.6.9 बर्नूली परिवार (1654–1782)

मसाला व्यापारी याकॉब बर्नूली स्पेनी धार्मिक उत्पीड़न से बचने के लिए नीदरलैंड से निकलकर 1620 में स्विट्ज़रलैंड के बासेल—उस समय मध्य यूरोप का प्रमुख वाणिज्यिक केंद्र—चले गए, जहाँ उन्हें 1622 में नागरिकता प्रदान की गई। आरंभ में याकॉब और उनके पुत्र निकलाउस ने व्यापारी के रूप में सफलता पाई और व्यवसाय में समृद्ध हुए। व्यापारियों से गणितज्ञों तक परिवार का प्रक्षेप-पथ सत्रहवीं शताब्दी के व्यापक सामाजिक परिवर्तनों को प्रतिबिंबित करता है, जब वाणिज्यिक

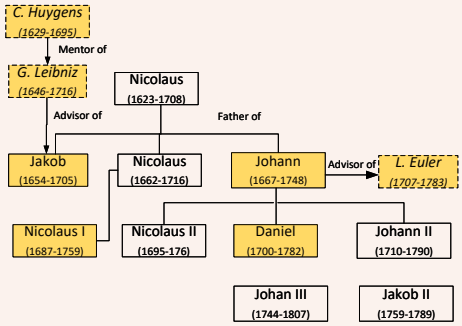
[28]इसका आधुनिक समानांतर अमेरिकी नेशनल साइंस फ़ाउंडेशन (NSF) द्वारा प्रायोजित बड़े स्तर की अनुसंधान पहलों में देखा जा सकता है, जैसे George E. Brown, Jr. Network for Earthquake Engineering Simulation (NEES) और उसका उत्तराधिकारी Natural Hazards Engineering Research Infrastructure (NHERI)। ये कार्यक्रम जटिल अभियांत्रिक चुनौतियों पर विचार करने के लिए विश्वविद्यालयों, राष्ट्रीय प्रयोगशालाओं और उद्योग के बहु-संस्थागत दलों को एकीकृत करते हैं तथा विशेषज्ञता, संसाधनों और प्रायोगिक सुविधाओं को ऐसे ढंग से संयोजित करते हैं जिसे कोई एक अन्वेषक अकेले प्राप्त नहीं कर सकता।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

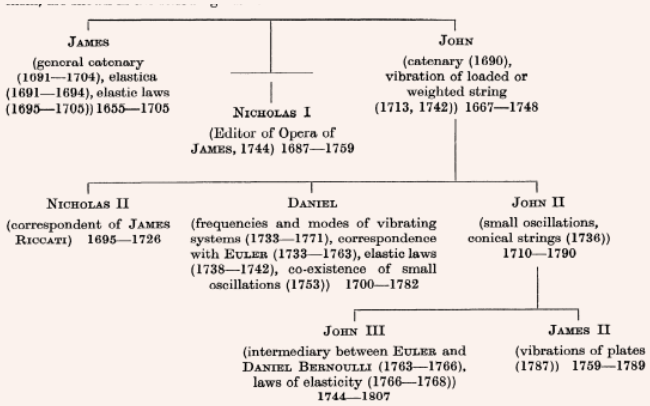
समृद्धि ने बौद्धिक अनुसरण के अवसर निर्मित किए और गणितीय कौशल नौवहन, अभियांत्रिकी तथा प्राकृतिक दर्शन के लिए उत्तरोत्तर मूल्यवान बने।

निकोलाउस (1623–1708) के वंशज ही एक शताब्दी से अधिक समय तक उत्कृष्ट गणितज्ञ बने। उनमें सर्वाधिक उल्लेखनीय उनके पुत्र याकॉब और योहान तथा पौत्र डैनियल थे।

यह उल्लेखनीय है कि लाइबनित्स ने योहान को पढ़ाया और बदले में योहान ने ऑयलर को, जिससे आधुनिक गणित को आकार देने वाली विलक्षण बौद्धिक वंशावली बनी। यह मार्गदर्शन-शृंखला दर्शाती है कि गणितीय ज्ञान व्यक्तिगत संबंधों और प्रत्यक्ष शिक्षण से कैसे संचारित हुआ तथा उसने पीढ़ियों और राष्ट्रीय सीमाओं में विस्तृत गणितीय चिंतन की सतत परंपराएँ निर्मित कीं। यदि यांत्रिकी में राजवंश होता, तो निश्चय ही बर्नूली शासन करते[29]। फिर भी उनका राजवंश नाटकीय घटनाओं



(a)



(b) (Truesdell, 1960), टिप्पणी: अंग्रेज़ी स्रोतों में याकॉब और योहान बर्नूली को जेम्स और जॉन भी कहा जाता है

चित्र 6.16: बर्नूली वंश-वृक्ष (उजागर सदस्यों की इस पुस्तक में चर्चा की गई है) और उनका बौद्धिक मंडल

से रहित नहीं था—याकॉब और योहान के बीच तीव्र तथा सुविख्यात प्रतिद्वंद्विता उस उग्र प्रतिस्पर्धा की प्रतीक है जो कभी-कभी महान प्रतिभा के साथ आती है (Peiffer, 2006)। उनके पारिवारिक विवाद इतने सुविख्यात थे कि वे आरंभिक आधुनिक काल में वैज्ञानिक प्रतिस्पर्धा को प्रेरित करने वाली व्यक्तिगत गतिकी में अद्वितीय दृष्टि देते हैं।[30]

ध्यान दें कि Bernoulli-Euler Online (BEOL) मंच आरंभिक आधुनिक गणित और विज्ञान के अन्वेषण पर केंद्रित समर्पित अनुसंधान-केंद्र है। इसका प्राथमिक उद्देश्य बर्नूली वंश के प्रमुख सदस्यों और प्रभावशाली गणितज्ञ लियोनहार्ड ऑयलर की व्यापक कृतियों तथा पत्राचार को निर्बाध रूप से एकीकृत करना है।

[29]आधुनिक युग में "राजवंश" क्यूरी परिवार होता—ऐसा वैज्ञानिक वंश जिसके सदस्यों ने कुल पाँच नोबेल पुरस्कार प्राप्त किए। मारी और पिएर क्यूरी ने रेडियोधर्मिता पर अपने कार्य के लिए 1903 का भौतिकी पुरस्कार साझा किया। रेडियम और पोलोनियम की खोज के लिए मारी क्यूरी ने 1911 में रसायन विज्ञान का दूसरा नोबेल पुरस्कार प्राप्त किया और दो भिन्न विज्ञानों में नोबेल पुरस्कार पाने वाली एकमात्र व्यक्ति बनीं। उनकी पुत्री इरेन जोलियो-क्यूरी और दामाद फ़्रेदेरिक जोलियो ने नए रेडियोधर्मी तत्त्वों के संश्लेषण के लिए 1935 का रसायन विज्ञान पुरस्कार साझा किया। परिवार के योगदानों ने परमाणु भौतिकी और रसायनिकी की हमारी समझ को मूलतः आकार दिया तथा 17वीं और 18वीं शताब्दियों में गणित और यांत्रिकी पर बर्नूली के प्रभुत्व के तुल्य वैज्ञानिक उत्कृष्टता की बहु-पीढ़ीगत विरासत स्थापित की।

[30]आधुनिक काल में वैज्ञानिक प्रतिद्वंद्विताएँ अनुसंधान-प्रक्षेप-पथों को आकार देती रही हैं, जैसे DNA संरचना के स्पष्टीकरण में जेम्स वॉटसन और रोज़ालिंड फ़्रैंकलिन के समूह के बीच तीव्र प्रतिस्पर्धा अथवा कृष्ण-विवर सूचना-विरोधाभास पर स्टीफ़न हॉकिंग और लियोनर्ड सस्किंड के बीच दीर्घकालीन विवाद। बर्नूली के संघर्ष की भाँति इन प्रतिद्वंद्विताओं में गहन सैद्धांतिक दाँव और प्रबल व्यक्तिगत आयाम जुड़े थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.6.9.1 याकॉब बर्नूली (1654–1705)

याकॉब बर्नूली बर्नूली वंश के प्रथम गणितज्ञ थे। वे सफल व्यापारी निक्लाउस बर्नूली (1623–1708) और उनकी पत्नी मार्ग्रेटा Sch onauer के ज्येष्ठ पुत्र थे। पिता के आग्रह पर याकॉब ने 1671 में लैटिन, यूनानी और दर्शन में अपनी *magister artium* पूर्ण की, जिसके बाद धर्मशास्त्र का अध्ययन किया। गणित के प्रति बढते आकर्षण के बावजूद उन्हें धर्मशास्त्र जारी रखना पडा और 1676 में *licentiate* उपाधि प्राप्त की। बाद में वे बासेल के पवित्र मंत्रालय में सम्मिलित हुए, किंतु स्वशिक्षित रूप से विज्ञान का अनुसरण करते रहे और प्राथमिक ग्रंथों से स्वयं गणित तथा खगोलशास्त्र सीखा। आरंभिक गणितज्ञों में यह स्वशिक्षित उपागम सामान्य था, क्योंकि अधिकांश यूरोपीय विश्वविद्यालयों में औपचारिक गणितीय शिक्षा अभी अविकसित थी।

यात्राएँ और बौद्धिक विकास अगस्त 1676 में याकॉब ने बौद्धिक समृद्धि की खोज में यात्रा आरंभ की। पहला पडाव जिनेवा था, जहाँ उन्होंने 20 महीने तक प्रतिभाशाली दृष्टिहीन बालिका एलिज़ाबेथ वाल्डकिर्ख (1660–1728) को पढाया और उसके लिए लेखन-प्रणाली का आविष्कार किया[31]। उन्होंने धर्मशास्त्रीय वाद-विवादों में भाग लिया और 1677 में अपनी टिप्पण-पुस्तिका *Meditationes* में वैज्ञानिक चिंतन तथा *Reisb uchlein* में यात्रा-प्रविष्टियाँ अभिलिखित करना आरंभ किया।

जिनेवा से बर्नूली फ्रांस गए—पहले मार्की द लोस्ताँज के शिक्षक के रूप में लिमूज़ाँ, फिर बोर्डो और बाद में नांत, सोम्यूर तथा पेरिस जैसे नगरों में। इस काल में वे फ़्रांसीसी में प्रवीण हुए और देकार्त के प्राकृतिक दर्शन से गहराई से प्रभावित हुए। 1680 में वे संक्षिप्त समय के लिए बासेल लौटे और उसके बाद हॉलैंड तथा इंग्लैंड की 18-महीने की यात्रा की। लेडेन में उन्होंने गणित के व्याख्यानों में भाग लिया और व्याख्यान दिए। यह व्यापक यात्रा दर्शाती है कि गणितीय ज्ञान व्यक्तिगत संजालों के माध्यम से कैसे फैला और युवा विद्वानों ने शिक्षा के स्थापित केंद्रों की खोज करके विशेषज्ञता कैसे प्राप्त की।

लंदन में वैज्ञानिक संपर्क अगस्त 1682 में बर्नूली लंदन पहुँचे, जहाँ वे जॉन फ़्लैम्स्टीड (1646–1719) और रॉबर्ट हुक (1635–1703) से मिले। 12 अगस्त 1682 को उन्होंने रॉयल सोसाइटी की उस बैठक में भाग लिया जिसमें पदार्थों के सामर्थ्य पर प्रयोग प्रस्तुत किया गया था। यांत्रिक समस्याओं के प्रायोगिक उपागमों से इस संपर्क ने प्रत्यास्थता पर उनके बाद के सैद्धांतिक कार्य को गहराई से प्रभावित किया।

बासेल वापसी और अकादमिक जीवन-वृत्त अक्तूबर 1683 में स्विट्ज़रलैंड लौटने पर बर्नूली बासेल में बस गए और 1684 में यूडिथ स्तुपानुस से विवाह किया। उनकी दो संतानें हुईं। तब तक उनकी रुचि प्रायोगिक भौतिकी की ओर मुड चुकी थी, संभवतः रॉबर्ट बॉयल (1627–1691) की कृतियों के प्रभाव से। 1683 से 1686 तक उन्होंने प्रायोगिक भौतिकी पर व्याख्यान दिए, जिन्हें उनकी *Collegium Experimentale sive curiosum* में संकलित किया गया; यह भौतिक और यांत्रिक प्रयोगों तथा चिंतनों का संग्रह था, जिसे प्रायः विमर्शात्मक अथवा शिक्षण शैली में प्रस्तुत किया गया।

गणितीय योगदान और प्राध्यापक पद 1685 के बाद बर्नूली ने गणित में उत्तरोत्तर अधिक प्रकाशन किया और Descartes, 1637b के द्वितीय लैटिन संस्करण तथा लाइबनित्स के अत्यल्प कलन का अध्ययन किया। उनका अनुसंधान बीजगणितीय और अवकल ज्यामिति, श्रेणियों, प्रायिकता तथा परिवर्तनात्मक और समाकल कलन तक विस्तृत था। 1687 में उन्हें बासेल विश्वविद्यालय में गणित का प्राध्यापक नियुक्त किया गया और मृत्यु तक वे इस पद पर रहे। उनका ज्ञान-दर्शन स्थापित आधारों से क्रमशः समझ निर्मित करने पर बल देता था। ज्ञान-निर्माण का यह व्यवस्थित उपागम बासेल गणितीय संप्रदाय का लक्षण बना और विद्यार्थियों की पीढ़ियों को प्रभावित किया।

योहान के साथ सहयोग और प्रतिद्वंद्विता याकॉब ने अपने छोटे भाई योहान (1667–1748) को गणित पढाया, जो बाद में उनके प्रतिद्वंद्वी बने। आरंभ में उन्होंने तब सहयोग किया जब याकॉब भौतिकी पढाते थे और योहान चिकित्सा का अध्ययन कर रहे थे। दोनों ने कुछ ही दिनों में लाइबनित्स के अवकल कलन में निपुणता प्राप्त की और शीघ्र ही उसे वक्र-विश्लेषण सहित जटिल समस्याओं पर लागू किया। उनके कार्य ने विधि को और विकसित करने में सहायता की—इतनी कि 1696 में लाइबनित्स ने उन्हें सार्वजनिक रूप से धन्यवाद दिया। कलन में यह तीव्र प्रवीणता दोनों भाइयों की गणितीय प्रतिभा और सहयोगात्मक अधिगम की शक्ति, दोनों दर्शाती है, यद्यपि प्रतिस्पर्धी दबावों से उनका संबंध बाद में कटु होने वाला था।

विवेकपूर्ण यांत्रिकी के आधार याकॉब बर्नूली के अनुसंधान ने चार आधारभूत समस्याएँ उत्पन्न कीं, जिन्हें Truesdell, 1968 ने विवेकपूर्ण यांत्रिकी के इतिहास में सीमाचिह्नों के रूप में पहचाना है:

[31] 17वीं शताब्दी में अपनी दृष्टिहीन पुत्री को शिक्षा देने के लिए ऐसे प्रतिभाशाली व्यक्ति पर विश्वास करने हेतु एलिज़ाबेथ के माता-पिता का सम्मान ही किया जा सकता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. अनुदैर्ध्य तंतुओं के विस्तार-नियम से प्रत्यास्थ पट्टी के बंकन-नियम की व्युत्पत्ति।
2. मुडी धरन में उदासीन तंतु की स्थिति और अनुप्रस्थ-काट पर कार्यरत बलों की प्रकृति का निर्धारण।
3. बल-साम्य द्वारा शासित लचीली रेखाओं के सिद्धांत का आघूर्ण-साम्य द्वारा शासित प्रत्यास्थ पट्टियों के सिद्धांत से एकीकरण।
4. पदार्थों की प्रत्यास्थ अनुक्रिया का निर्धारण।

इन उपलब्धियों ने प्रत्यास्थता के चिरसम्मत सिद्धांत, विशेषतः *elastica*, –तनु छडों और धरनों में बडे विरूपणों के गणितीय प्रतिरूप–के विकास की आधारशिला रखी। प्रत्यास्थ वक्रों के आकार पर याकॉब के अग्रणी कार्य ने ऑयलर के बाद के योगदानों का पूर्वाभास दिया, जिनका विश्लेषणात्मक उपचार विषय को औपचारिक बनाने वाला था।

***elastica* और संरचनात्मक विश्लेषण** बर्नूली ने 1691 में elastica समस्या प्रस्तुत की और क्रमिक कृतियों में उसका समाधान दिया, जिसकी परिणति उनकी 1694 की *Curvatura Laminae Elasticae*, (Bernoulli, Jakob, 1694) में हुई। उन्होंने दिखाया कि अंतिम बल के अधीन मुडी पतली प्रत्यास्थ पट्टी द्वारा ग्रहण किए वक्र को अवकल समीकरण से अभिलक्षित किया जा सकता है। ज्यामितीय तर्क और वक्रता की संकल्पना का उपयोग करके उन्होंने बंकन आघूर्ण तथा पट्टी के अनुदिश स्थिति के बीच संबंध व्युत्पन्न किए और प्रदर्शित किया कि वक्रता-त्रिज्या लगाए गए भार से लंबवत दूरी के साथ बदलती है। अत्यल्प रूपों के मिश्रण में व्यक्त होने के बावजूद उनका विश्लेषण प्रत्यास्थ स्थिरता और अरैखिक विरूपण के सूत्रीकरण में बडा कदम था। यह कार्य संरचनात्मक अवयवों में बडे-विक्षेप व्यवहार का प्रथम व्यवस्थित गणितीय उपचार है और उसने आधुनिक अरैखिक विश्लेषण का शताब्दियों पहले पूर्वाभास दिया।

स्वीकृति और विरासत क्रिस्टियान हाइगेन्स और गॉटफ़्रीड लाइबनित्स दोनों ने elastica समस्या की कठिनाई पहचानी। हाइगेन्स को तो संदेह था कि उसे सुरुचिपूर्ण ढंग से हल किया जा सकता है, यद्यपि बाद में उन्होंने बर्नूली की उपलब्धि स्वीकार की। ये आलोचनाएँ दर्शाती हैं कि कुछ सीमाओं–जैसे उदासीन तंतु के अविकृत रहने की मान्यता, जिसे आधुनिक प्रत्यास्थता-सिद्धांत ने तब से सुधारा है–के बावजूद बर्नूली की अंतर्दृष्टि कितनी उन्नत थी।

अगली शताब्दी में elastica चुनौती पुनः उभरी। डैनियल बर्नूली ने लियोनहार्ड ऑयलर को परिवर्तनात्मक उपागम सुझाया, जिन्होंने अंततः परिवर्तन-कलन का उपयोग करके समस्या को सामान्यीकृत किया। इससे प्रत्यास्थ स्थिरता और संरचनात्मक विश्लेषण के आधुनिक सिद्धांत का मंच तैयार हुआ और बर्नूली, लाइबनित्स, हाइगेन्स तथा ऑयलर के कार्यों के बीच सेतु बना।

निष्कर्ष: अनुभववाद और विवेकपूर्ण यांत्रिकी अपनी गणितीय कठोरता के अतिरिक्त याकॉब की विधियों ने ऐसे दार्शनिक पक्ष को प्रतिबिंबित किया जिसने अनुभवजन्य प्रेक्षण और क्रमिक तर्क को वैज्ञानिक अन्वेषण के केंद्र में रखा। Truesdell, 1968 के लिए विवेकपूर्ण यांत्रिकी के सृजन का श्रेय याकॉब बर्नूली को न्यूटन जितना ही है। उनकी विरासत केवल अपनी कृतियों से नहीं, बल्कि अपने भाई योहान, अपने विद्यार्थी ऑयलर और अपने संकल्पनात्मक आधारों पर निर्माण करने वाली यांत्रिकीविदों की पीढ़ियों पर प्रभाव से भी बनी हुई है। अनुभवजन्य प्रेक्षण और गणितीय विश्लेषण के याकॉब के एकीकरण ने ऐसी कार्यपद्धति स्थापित की जो अभियांत्रिक विज्ञान में केंद्रीय बनने वाली थी[32]।

6.6.9.2 योहान बर्नूली (1667–1748)

याकॉब के छोटे भाई और डैनियल के पिता योहान बर्नूली ने लाइबनित्सीय कलन के प्रसार और विकास में निर्णायक भूमिका निभाई। याकॉब से गणित का परिचय पाने के बाद योहान अवकल कलन के प्रबल समर्थक और भौतिकी तथा यांत्रिकी में उसके आरंभिक व्यवस्थित उपयोगकर्ताओं में से एक बने। उन्होंने उल्लेखनीय रूप से brachistochrone समस्या हल की[33] और भूपृष्ठीय रेखाओं, कैटेनरियों तथा तरलों की गति के अध्ययन में योगदान दिया। ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या के उनके

[32]आधुनिक संरचनात्मक अभियांत्रिकी इस एकीकरण का उदाहरण संरचनात्मक स्वास्थ्य अनुश्रवण तंत्रों के माध्यम से प्रस्तुत करती है, जैसे गोल्डन गेट ब्रिज जैसे प्रमुख सेतुओं पर लगाए तंत्र, जहाँ सैद्धांतिक पूर्वानुमानों का मान्यकरण करने और अनुरक्षण समय-सारणी को इष्टतम बनाने के लिए वास्तविक-काल संवेदक आँकडों (विकृति, विस्थापन, कंपन) को परिमित अवयव प्रतिरूपों तथा गतिक अनुक्रिया समीकरणों के साथ सतत एकीकृत किया जाता है।

[33]ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या: दो बिंदु A और B दिए हों, तो वह कौन-सा वक्र है जिसके अनुदिश कोई कण केवल गुरुत्व के अधीन न्यूनतम समय में A से B तक सरकेगा? समाधान–एक चक्रज–न्यूटन, याकॉब बर्नूली, लाइबनित्स, लोपिताल और स्वयं

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समाधान—तीव्रतम अवरोह का वक्र ज्ञात करना—ने परिवर्तनात्मक विधियों के प्रथम प्रमुख अनुप्रयोगों में स्थान पाया और परिवर्तन-कलन को नए गणितीय अनुशासन के रूप में स्थापित करने में सहायता की।

योहान ने ग्रोनिंगन में गणित की पीठ संभाली और बाद में बासेल विश्वविद्यालय में अपने भाई के उत्तराधिकारी बने। उनका सर्वाधिक स्थायी प्रभाव विद्यार्थियों के माध्यम से आया—सबसे प्रसिद्ध लियोनहार्ड ऑयलर, जिन्हें उन्होंने कम आयु से मार्गदर्शन दिया। उनके 1713 के प्रकाशन *Opera Omnia* में कलन और यांत्रिकी के उनके अनेक सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण योगदान सम्मिलित हैं। योहान का शिक्षण-उपागम भौतिक समस्याओं पर गणितीय तकनीकों के व्यावहारिक अनुप्रयोग पर बल देता था; इस उपागम ने ऑयलर और गणितीय भौतिकविदों की परवर्ती पीढ़ियों को गहराई से प्रभावित किया, (Reddy, 2017)।

6.6.9.3 अंतराल: *Opera Omnia*

समान गणितीय वंश में जन्म लेने के बावजूद याकॉब और योहान बर्नूली ने कलन, यांत्रिकी तथा प्रायिकता को आकार देने में अतिव्याप्त किंतु भिन्न मार्ग अपनाए। पृथक् रूप से *Opera Omnia* के रूप में प्रकाशित उनकी संकलित कृतियाँ उनकी बौद्धिक विरासत का प्रामाणिक अभिलेख प्रदान करती हैं। नीचे की सारणी उनके Opera Omnia खंडों से लिए प्रमुख योगदानों का पार्श्व-दर-पार्श्व संश्लेषण प्रस्तुत करती है, सारणी 6.3।

तालिका 6.3: याकॉब और योहान बर्नूली के प्रमुख योगदान, जैसा उनकी *Opera Omnia* में प्रतिबिंबित है

लेखक	योगदान / कृति	वर्ष (प्रकाशित)	क्षेत्र
याकॉब बर्नूली	*Ars Conjectandi* – बडी संख्याओं का नियम प्रस्तुत करने वाला प्रायिकता-सिद्धांत का आधारभूत ग्रंथ	1713 (मरणोपरांत)	प्रायिकता
	समपरिमितीय समस्या पर आरंभिक अध्ययन	1700 का दशक	परिवर्तन-कलन
	चरघातांकी/लघुगणकीय श्रेणी-विस्तारों का विकास	1680 का दशक–1690 का दशक	विश्लेषण
	अवकल कलन पर लाइबनित्स से पत्राचार	1690 का दशक	कलन / आधार
योहान बर्नूली	*Meditationes de Curva Isochrona Paracentrica* – ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या का समाधान	1697	परिवर्तन-कलन
	तरल गतिकी और अवकल समीकरणों पर कार्य (उदा., चरघातांकी वृद्धि, लघुगणकीय सर्पिल)	1690 का दशक–1710 का दशक	यांत्रिकी / अवकल समीकरण
	सार्वजनिक गणितीय चुनौतियाँ और वाद-विवाद (उदा., न्यूटन और टेलर के विरुद्ध)	1700 का दशक	गणितीय संस्कृति
	न्यूटन, लाइबनित्स, ऑयलर और अपने पुत्रों के साथ पत्राचार	1690 का दशक–1740 का दशक	सामान्य गणित

योहान बर्नूली ने पाया; यह परिवर्तन-कलन के विकास का आधारभूत कृषण था। वायु नौवहन में ब्रैकिस्टोक्रोन गोले अथवा दीर्घवृत्तज पर इष्टतम उडान-प्रक्षेप-पथ है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.6.9.4 डैनियल बर्नूली (1700–1782)

डैनियल बर्नूली का जन्म नीदरलैंड के ग्रोनिंगन में योहान बर्नूली के दूसरे पुत्र और याकॉब बर्नूली के भतीजे के रूप में हुआ। उनका पालन-पोषण गणित और वैज्ञानिक अन्वेषण में डूबे परिवार में हुआ, यद्यपि पिता के साथ उनका संबंध प्रायः प्रतिद्वंद्विता से तनावपूर्ण था। आरंभ में योहान ने डैनियल की गणितीय शिक्षा का मार्गदर्शन किया, किंतु डैनियल की प्रतिभा के परिपक्व होने और मान्यता पाने के साथ योहान का गर्व असंतोष में बदल गया। तनाव की परिणति योहान द्वारा उन प्रतियोगिताओं में गुमनाम रूप से प्रतिस्पर्धी कार्य प्रस्तुत करने में हुई जिनमें डैनियल ने भाग लिया था और यहाँ तक कि डैनियल की खोजों का श्रेय लेने के प्रयास में भी। यह पारिवारिक गतिकी दर्शाती है कि अठारहवीं शताब्दी की वैज्ञानिक संस्कृति के प्रतिस्पर्धी दबाव अत्यंत निकट संबंधों को भी कैसे विकृत कर सकते थे।

इन चुनौतियों के बावजूद डैनियल ने व्यापक शिक्षा प्राप्त की और चिकित्सा तथा गणित, दोनों में डॉक्टरेट अर्जित की। उन्होंने शरीरक्रिया-विज्ञान और गणित में अकादमिक पद संभाले तथा तरल यांत्रिकी, प्रायिकता, प्रत्यास्थता और अर्थशास्त्र जैसे विविध क्षेत्रों में बौद्धिक रूप से सक्रिय रहे। अंततः वे बासेल में बस गए, जहाँ उन्होंने अध्यापन किया और अपना अधिकांश प्रभावशाली कार्य प्रकाशित किया।

डैनियल का स्वभाव उल्लेखनीय रूप से विनम्र और सहयोगात्मक था तथा उन्होंने ऑयलर सहित अपने समय के प्रमुख वैज्ञानिकों के साथ मैत्री तथा विद्वत्तापूर्ण आदान-प्रदान बनाए रखा; ऑयलर के साथ उनका दीर्घ और उत्पादक पत्राचार था। उनकी सहयोगी भावना पिता की प्रतिस्पर्धा से स्पष्ट रूप से भिन्न थी और प्रबोधन को अभिलक्षित करने वाली अधिक मुक्त वैज्ञानिक संस्कृति स्थापित करने में सहायक हुई।

***elastica* समस्या का परिवर्तनात्मक पुनर्सूत्रीकरण** योहान के पुत्र और याकॉब के भतीजे डैनियल बर्नूली ने *elastica* समस्या के लिए परिवर्तनात्मक उपागम प्रस्तुत करके यांत्रिकी में परिवार की विरासत को आगे बढ़ाया। याकॉब बर्नूली ने आयताकार elastica प्रकरण 1690 के दशक में ज्यामितीय तर्क और आरंभिक differential!calculus का उपयोग करके सूत्रित और हल किया था, किंतु डैनियल ने दूरगामी सामान्यीकरण प्रस्तावित किया।

> *विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, अध्याय 9 देखें*

1742 दिनांकित पत्र में डैनियल ने लियोनहार्ड ऑयलर को सुझाव दिया कि प्रत्यास्थ छड का आकार उसकी प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा को न्यून करके निर्धारित किया जाना चाहिए। विशेष रूप से उन्होंने कुल ऊर्जा को धरन की लंबाई के अनुदिश वक्रता के वर्ग वाले समाकल के रूप में व्यक्त किया। इस अंतर्दृष्टि ने elastica को परिवर्तनात्मक समस्या के रूप में पुनः निरूपित किया और इस प्रकार प्रत्यास्थता में परिवर्तन-कलन के उपयोग का द्वार खोला। यह ऊर्जा-आधारित उपागम अंततः संरचनात्मक यांत्रिकी की आधुनिक संगणकीय विधियों, जिनमें परिमित अवयव विश्लेषण सम्मिलित है, का आधार बनने वाला था।

इस सुझाव पर कार्य करते हुए ऑयलर ने शीघ्र बाद सामान्य elastica समस्या हल की। उनके उपचार ने उस विषय को जन्म दिया जिसे आज ऑयलर–बर्नूली धरन-सिद्धांत कहते हैं और प्रत्यास्थ स्थिरता तथा संरचनात्मक यांत्रिकी के अध्ययन का आधार बना।

इस प्रकार डैनियल का योगदान निर्णायक है: ज्यामितीय चुनौती को ऊर्जा-न्यूनीकरण के सिद्धांत के रूप में पुनर्व्याख्यायित करके उन्होंने चिरसम्मत यांत्रिकी और आधुनिक विश्लेषणात्मक विधियों के बीच सेतु बनाया। उनकी अंतर्दृष्टि ने याकॉब के अग्रणी कार्य को उभरते परिवर्तनात्मक ढाँचे के साथ एकीकृत किया जो अठारहवीं और उन्नीसवीं शताब्दियों की यांत्रिकी पर प्रभावी होने वाला था।

द्रवगतिकी और तरल यांत्रिकी प्रत्यास्थता में योगदानों के अतिरिक्त डैनियल बर्नूली तरल यांत्रिकी के अपने कार्य के लिए प्रसिद्ध हैं। उनकी 1738 की कृति *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii*, (Bernoulli, Daniel, 1738) ने तरल-व्यवहार के अध्ययन की आधारशिला रखी और वह प्रस्तुत किया जिसे आज बर्नूली सिद्धांत कहते हैं—यह विचार कि तरल की चाल में वृद्धि दाब अथवा स्थितिज ऊर्जा में कमी के साथ-साथ होती है।

ऊर्जा-संरक्षण से व्युत्पन्न यह सिद्धांत पंखों के ऊपर वायुप्रवाह, नली-प्रवाह और रक्त-परिसंचरण सहित यांत्रिक तंत्रों की व्यापक श्रेणी पर लागू होता है। असंपीड्य, अश्यान प्रवाह के लिए बर्नूली समीकरण अब तरल यांत्रिकी में मूलभूत है और

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सैद्धांतिक तथा अनुप्रयुक्त द्रवगतिकी, दोनों में प्रमुख संबंध का कार्य करता है। इस कार्य ने प्रदर्शित किया कि समान गणितीय सिद्धांत यांत्रिकी की भिन्न शाखाओं में लागू किए जा सकते हैं और भौतिक विज्ञान की एकता को सुदृढ किया[34]।

यांत्रिक दोलन और स्थिरता डैनियल बर्नूली ने यांत्रिक कंपनों के सिद्धांत में भी योगदान दिया। उन्होंने प्रत्यास्थ दंडों के अनुप्रस्थ दोलनों और आवर्त विधाओं के अध्यारोपण का अध्ययन किया—यह फ़ूरिये विश्लेषण का अग्रदूत था। कंपित तंत्रों का उनका विश्लेषण यांत्रिक तर्क को विश्लेषणात्मक साधनों से जोडने वाले आरंभिक विश्लेषणों में था और उसने ध्वनिकी, संरचनात्मक गतिकी तथा तरंग-सिद्धांत के बाद के विकासों का पूर्वाभास दिया।

संरचनाओं की स्थिरता तथा भार, विरूपण और गतिक अनुक्रिया के परस्पर प्रभाव पर उनके अन्वेषणों ने उनकी यांत्रिक अंतर्दृष्टि का विस्तार और प्रदर्शित किया। इन अन्वेषणों ने परिवर्ती बलों के प्रति तंत्रों की अनुक्रिया की समझ समृद्ध की—यह विवेकपूर्ण यांत्रिकी की केंद्रीय चिंता है। कंपित तंत्रों पर उनके कार्य ने अनुनाद और गतिक आवर्धन को समझने का गणितीय आधार स्थापित किया; ये परिघटनाएँ आधुनिक संरचनात्मक अभिकल्प के लिए निर्णायक हैं[35]।

यांत्रिकी में विरासत यांत्रिकी में डैनियल बर्नूली की विरासत उनकी *ज्यामिति, भौतिकी और परिवर्तनात्मक सिद्धांतों को सुसंगत ढाँचे में संश्लेषित करने* की क्षमता से उत्पन्न होती है। उन्होंने याकॉब की विरासत और आधुनिक यांत्रिकी के ऊर्जा-सिद्धांतों को जोडा, ऑयलर के आधारभूत कार्य को सूचित किया और तरल तथा संरचनात्मक, दोनों विश्लेषणों में अनिवार्य आधारशिला रखी। धरनों से तरलों और कंपनों तक यांत्रिकी के प्रमुख सैद्धांतिक प्रतिरूपों से उनका नाम आज भी जुडा है और अनुशासन के विकास में उनके केंद्रीय स्थान की पुष्टि करता है। संभवतः सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण यह है कि डैनियल के उपागम ने प्रदर्शित किया कि गणितीय विश्लेषण स्पष्टतः असंबद्ध भौतिक परिघटनाओं को सामान्य सिद्धांतों के अधीन कैसे एकीकृत कर सकता है; यह दृष्टि उन्नीसवीं शताब्दी की भौतिकी और अभियांत्रिकी में केंद्रीय बनने वाली थी[36]।

6.6.10 लियोनहार्ड ऑयलर (1707–1783)

लियोनहार्ड ऑयलर का जन्म अप्रैल 15, 1707 को बासेल में हुआ, जो उस समय स्विस परिसंघ के भीतर शिक्षा का समृद्ध केंद्र था। उनके पिता पॉल ऑयलर प्रोटेस्टेंट पादरी थे जिन्होंने याकॉब बर्नूली के अधीन गणित का अध्ययन किया था, जबकि उनकी माता मार्गरीट ब्रुकर विद्वानों के परिवार से थीं। यद्यपि आरंभ में उन्हें धर्मवृत्ति के लिए निर्धारित किया गया था, ऑयलर ने कम आयु से गणित के लिए असाधारण योग्यता प्रदर्शित की। उनके पिता ने उन्हें प्राथमिक शिक्षण दिया, किंतु शीघ्र ही स्पष्ट हो गया कि उनकी क्षमताएँ पारंपरिक धर्मशास्त्रीय शिक्षा में समाहित की जा सकने वाली सीमा से कहीं आगे थीं।

[34] उदाहरणार्थ सरल आवर्त गति का अवकल समीकरण $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ विविध भौतिक परिघटनाओं को शासित करता है: कमानी पर द्रव्यमान का दोलन, छोटे कोणों के लिए लोलक की गति, क्रिस्टलों में अणुओं का कंपन, विद्युत LC परिपथों का व्यवहार और ध्वनिक तरंग-संचरण। यह गणितीय एकता एक क्षेत्र (जैसे यांत्रिक कमानियाँ) की अंतर्दृष्टियों को पूर्णतः भिन्न क्षेत्रों (जैसे विद्युत अभियांत्रिकी अथवा आणविक भौतिकी) की परिघटनाओं को प्रकाशित करने देती है और उदाहरण देती है कि मूलभूत गणितीय संबंध भौतिकी की विभिन्न शाखाओं के बीच सीमाओं को कैसे पार करते हैं।

[35] आधुनिक उदाहरणों में 1940 में टैकोमा नैरोज़ ब्रिज का पतन सम्मिलित है, जहाँ सेतु की प्राकृतिक आवृत्ति पर पवन-प्रेरित दोलनों ने विपत्तिपूर्ण अनुनाद-विफलता उत्पन्न की, और समकालीन गगनचुंबी भवनों का अभिकल्प, जहाँ अभियंताओं को पवन-प्रेरित कंपनों को ध्यान में रखना और समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक (जैसे 660-टन अवमंदक ताइपे 101 में) का उपयोग करना पडता है ताकि भवनों को अनिवास्य अथवा संरचनात्मक रूप से असुरक्षित बना सकने वाले अनुनाद-प्रभावों का प्रतिकार हो।

[36] अनेक भौतिक परिघटनाएँ सार्वभौमिक गणितीय रूप $\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla u) + s$ का पालन करती हैं, जहाँ u अवस्था-चर है, ρ भंडारण-क्षमता दर्शाता है, D परिवहन-गुण है और s स्रोत-पद है। यह समीकरण ऊष्मा-संचरण (तापमान-वितरण), द्रव्यमान-विसरण (सांद्रता-क्षेत्र), स्थिरवैद्युतिकी (विद्युत विभव), भूजल-प्रवाह (द्रवचालित शीर्ष), प्रत्यास्थ विरूपण (विस्थापन), विद्युतचुंबकीय क्षेत्र (चुंबकीय विभव) और ध्वनिक तरंग-संचरण (दाब) को शासित करता है। गणितीय एकता समान संख्यात्मक विधियों और समाधान-तकनीकों को इन विविध भौतिक क्षेत्रों में लागू होने देती है।

प्रारूप प्रतिलिपि

बासेल से यूरोपीय राजदरबारों तक: आरंभिक वर्ष और सेंट पीटर्सबर्ग संभवतः सर्वकालीन सर्वाधिक बहुमुखी और निश्चय ही सर्वाधिक प्रचुर गणितज्ञ लियोनहार्ड ऑयलर[37] पादरी के पुत्र थे और बासेल के निकट जन्मे थे। 1720 में उन्होंने बासेल विश्वविद्यालय में प्रवेश लिया, जो उस समय योहान बर्नूली के प्रभावशाली व्याख्यानों के कारण गणितीय अनुसंधान का महत्त्वपूर्ण केंद्र था; वे पूरे यूरोप से युवा गणितज्ञों को आकर्षित करते थे। ऑयलर की असाधारण प्रतिभा शीघ्र पहचानी गई और औपचारिक व्याख्यानों के अतिरिक्त बर्नूली ने उन्हें साप्ताहिक निजी शिक्षण दिया। सोलह वर्ष की आयु में ऑयलर ने स्नातकोत्तर उपाधि प्राप्त की और बीस वर्ष के होने से पूर्व ही फ़्रांसीसी विज्ञान अकादमी द्वारा प्रायोजित अंतरराष्ट्रीय प्रतियोगिता में भाग लेकर अपना प्रथम वैज्ञानिक शोध-पत्र प्रकाशित कर चुके थे। यह आरंभिक मान्यता दर्शाती है कि अकादमियों और प्रतियोगिताओं का उभरता यूरोपीय संजाल राष्ट्रीय सीमाओं के पार गणितीय प्रतिभा को पहचानना और पोषित करना आरंभ कर चुका था[38]।

Academia Scientiarum Imperialis Petropolitana (रूसी विज्ञान अकादमी) की स्थापना 1725 में रूस के पश्चिमीकरण के पीटर महान के व्यापक अभियान के भाग के रूप में उनके आदेश से St. Petersburg में हुई। योहान बर्नूली के पुत्र निकलाउस और डैनियल भर्ती किए गए प्रथम संकाय-सदस्यों में थे[39]; रूस स्थानांतरित होने के बाद उन्होंने ऑयलर को सहयोगी सदस्य का पद दिलाने में सहायता की। 1727 की गर्मियों में ऑयलर सेंट पीटर्सबर्ग चले गए और अध्यापन अथवा प्रशासनिक कर्तव्यों से मुक्त होकर[40] पूर्णतः गणितीय अनुसंधान पर केंद्रित हो सके। वे 1730 में अकादमी के भौतिकी विभाग में सम्मिलित हुए। 1733 में डैनियल बर्नूली बासेल लौटे; उनके भाई की मृत्यु 1726 में हुई थी। तब ऑयलर गणित विभाग के प्रमुख के रूप में उनके उत्तराधिकारी बने। यूरोपीय अकादमियों के बीच इस गतिशीलता ने गणितीय प्रतिभा का अंतरराष्ट्रीय बाज़ार निर्मित किया जिसने पूरे महाद्वीप में विचारों और विधियों के प्रसार को तीव्र किया।[41]

ऑयलर का आरंभिक प्रक्षेप-पथ आधुनिक वैज्ञानिक अकादमी के उद्भव का उदाहरण है: ऐसी प्रणाली जिसने प्रतिभा को शीघ्र पहचाना, राष्ट्रीय सीमाओं के पार उसका संवर्धन किया और केंद्रित बौद्धिक कार्य के लिए संस्थागत स्थान निर्मित किए। आगे चलकर वे तर्कतः इतिहास के सर्वाधिक प्रचुर गणितज्ञ बने, जिनके योगदान यांत्रिकी, कलन, आलेख-सिद्धांत, संख्या-सिद्धांत और खगोलशास्त्र तक विस्तृत थे।

बर्लिन प्रस्थान और परिवर्तन-कलन का जन्म सेंट पीटर्सबर्ग में रूसी अकादमी के अपने समय में ऑयलर ने यांत्रिकी पर अपनी प्रसिद्ध पुस्तक *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita* (यांत्रिकी, अथवा विश्लेषणात्मक रूप से प्रदर्शित गति-विज्ञान, 1736) लिखी। इस कृति में न्यूटन द्वारा प्रयुक्त ज्यामितीय विधियों पर निर्भर रहने के बजाय उन्होंने विश्लेषणात्मक विधियाँ प्रस्तुत कीं और यांत्रिकी के औपचारीकरण में परिवर्तन-बिंदु चिह्नित किया। लगभग इसी काल में ऑयलर ने प्रत्यास्थ वक्रों का अध्ययन आरंभ किया, जो शीघ्र आधारभूत योगदानों की ओर ले गया। ज्यामितीय से विश्लेषणात्मक विधियों की ओर इस परिवर्तन ने यांत्रिक समस्याओं पर आक्रमण की रीति बदल दी और ज्यामितीय रचनाओं से अधिक बीजगणितीय संक्रिया तथा अवकल समीकरणों पर बल दिया।

1740 में फ़्रेडरिक द्वितीय—जो बाद में फ़्रेडरिक महान कहलाए—प्रशा के सिंहासन पर बैठे। विज्ञान और दर्शन के संरक्षक के रूप में उन्होंने प्रख्यात विद्वानों को प्रशाई अकादमी में लाने का प्रयास किया। तब तक ऑयलर यूरोप के अग्रणी गणितज्ञों में माने जाते थे और फ़्रेडरिक ने उन्हें बर्लिन अकादमी में सम्मिलित होने का निमंत्रण दिया। रूस में राजनीतिक अशांति बढ़ने पर ऑयलर ने स्वीकार किया और 1741 की गर्मियों में बर्लिन चले गए। स्थानांतरण के बावजूद उन्होंने रूसी अकादमी से संबंध बनाए रखा और *Commentarii Academiae Petropolitanae* (रूसी अकादमी के संस्मरण) में अनेक शोध-पत्र प्रकाशित

[37] 1783 के आरंभ तक उनके 530 अध्ययन प्रकाशित हो चुके थे; 1826 तक संख्या बढ़कर 771 हो गई। 1844 में एक प्रपौत्र ने पांडुलिपि में और सामग्री खोजी।

[38] यह प्रतिरूप आज भी जारी है, जैसा नोबेल पुरस्कार विजेताओं और फ़ील्ड्स पदक विजेताओं का अनेक राष्ट्रीय अकादमियों (जैसे रॉयल सोसाइटी, नेशनल अकादमी ऑफ़ साइंसेज़ अथवा *Académie des Sciences*) के विदेशी सदस्य बनना तथा आधुनिक अंतरराष्ट्रीय वैज्ञानिक सहयोग, आगंतुक अध्येतावृत्तियाँ और राष्ट्रीय सीमाओं से परे वैज्ञानिक उत्कृष्टता पहचानने तथा पोषित करने वाले वैश्विक प्रतिभा-भर्ती कार्यक्रम उदाहरण देते हैं।

[39] ठीक वैसे ही जैसे आधुनिक “प्रतिष्ठित” विश्वविद्यालय पूरे संसार से संकाय भर्ती करते हैं।

[40] प्रिंसटन के इंस्टिट्यूट फ़ॉर एडवांस्ड स्टडी के विद्वानों की तरह।

[41] पूरे यूरोप में बौद्धिक गतिशीलता का यह ऐतिहासिक प्रतिरूप विद्यार्थियों के आधुनिक इरास्मस कार्यक्रम के समानांतर है, जिसने 1987 से यूरोपीय संस्थाओं में अकादमिक आदान-प्रदान सुगम किया है और राष्ट्रीय सीमाओं से परे ऐसे संजाल बनाए हैं जो पूरे महाद्वीप में विचारों, विधियों और अनुसंधान-उपागमों के पर-परागण को तीव्र करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करते रहे। यह गतिशीलता दर्शाती है कि अठारहवीं शताब्दी के विद्वान अवसर उत्पन्न होने पर राजदरबारों और अकादमियों के बीच आते-जाते हुए यूरोपीय बौद्धिक क्षेत्र में कैसे कार्य करते थे।

बर्लिन में ऑयलर ने अपना प्रचुर अनुसंधान जारी रखा और प्रशाई तथा रूसी, दोनों अकादमियों के वार्षिक खंडों में नियमित रूप से प्रकाशित किया। 1744 में उन्होंने अपनी सीमाचिह्न कृति *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (अधिकतम अथवा न्यूनतम गुण वाली वक्र रेखाएँ खोजने की विधि, अथवा व्यापकतम अर्थ में समपरिमितीय समस्या का समाधान)(Euler, 1744b) प्रकाशित की। यह परिवर्तन-कलन पर प्रथम पुस्तक थी और परिशिष्ट के रूप में प्रत्यास्थ वक्रों का प्रथम व्यवस्थित उपचार सम्मिलित करती थी। पुस्तक का आरंभिक खंड इस प्रकार है:

> सभी महानतम ज्यामितिज्ञों ने बहुत पहले पहचान लिया था कि इस पुस्तक में प्रस्तुत विधि न केवल स्वयं विश्लेषण में सर्वाधिक उपयोगी है, बल्कि भौतिक समस्याओं के समाधान में भी अत्यधिक सहायक है। क्योंकि ब्रह्मांड का विन्यास सर्वाधिक पूर्ण और परम विवेकी स्रष्टा की कृति है, अतः ब्रह्मांड में ऐसा कुछ भी घटित नहीं होता जिसमें अधिकतम अथवा न्यूनतम का कोई नियम प्रकट न हो। इसलिए इसमें कोई संदेह नहीं कि ब्रह्मांड के सभी प्रभावों को अधिकतम और न्यूनतम की विधि द्वारा अंतिम कारणों से तथा स्वयं निमित्त कारणों से समान सफलता के साथ समझाया जा सकता है। इस तथ्य के इतने सुंदर उदाहरण यहाँ-वहाँ हैं कि उसे प्रमाणित करने के लिए हमें शायद ही अधिक की आवश्यकता हो; इसके बजाय शेष कार्य केवल प्रत्येक प्रकार के वैज्ञानिक प्रश्न में अधिकतम अथवा न्यूनतम मान ग्रहण करने वाली राशि खोजना है—ऐसा विषय जो गणित की अपेक्षा प्राकृतिक विज्ञान (philosophia) से अधिक संबंधित प्रतीत होता है। अतः प्रकृति के प्रभावों को जानने के दो मार्ग हैं—एक निमित्त कारणों के माध्यम से, जिसे सामान्यतः प्रत्यक्ष विधि कहते हैं, और दूसरा अंतिम कारणों के माध्यम से—और गणितज्ञ दोनों का समान सफलता से उपयोग करता है।
>
> यदि निमित्त कारण अत्यधिक छिपे हों, जबकि अंतिम कारण हमसे कम सरलता से बचते हों, तो प्रश्न सामान्यतः अप्रत्यक्ष विधि से हल किया जाता है; इसके विपरीत जहाँ प्रभाव निमित्त कारणों से निर्धारित किया जा सके वहाँ प्रत्यक्ष विधि प्रयुक्त होती है। किंतु सबसे बढकर यह दिखाना चाहिए कि प्रत्येक विधि समाधान का मार्ग खोलती है; इससे न केवल एक दूसरी को अत्यधिक सुदृढ करती है, बल्कि उनके सामंजस्य से हमें सर्वोच्च आनंद भी मिलता है। इस प्रकार रस्सी अथवा लटकती शृंखला की वक्रता दो विधियों से खोजी गई है—एक ओर गुरुत्वजनित भारण से a priori, दूसरी ओर अधिकतम और न्यूनतम की विधि से, क्योंकि पहचाना गया कि रस्सी को ऐसी वक्रता ग्रहण करनी चाहिए जो उसके गुरुत्व-केंद्र को यथासंभव निम्न करे। इसी प्रकार पारदर्शी माध्यम में किरणों की वक्रता a priori और इस सिद्धांत से, दोनों प्रकार निर्धारित की गई है कि उन्हें दिए बिंदु तक न्यूनतम समय में पहुँचना चाहिए। ऐसे अनेक अन्य उदाहरण अत्यंत प्रसिद्ध बर्नूली और अन्य लोगों ने प्रस्तुत किए हैं...
>
> फिर भी ... अधिकतम अथवा न्यूनतम को पहचानना प्रायः कठिन होता है, भले ही समाधान [पहले ही] *a priori* ज्ञात हो। अतः यद्यपि प्रत्यास्थ पट्टी द्वारा ग्रहण किया गया वक्राकार रूप लंबे समय से ज्ञात है, फिर भी अधिकतम और न्यूनतम की विधि से, अर्थात् अंतिम कारणों द्वारा, उस वक्र का अन्वेषण अब तक किसी ने प्राप्त नहीं किया। इसलिए जब प्राकृतिक विज्ञान के इस उच्चतर प्रकार में अत्यंत प्रसिद्ध और अत्यंत सूक्ष्मदर्शी डैनियल बर्नूली ने मुझे बताया कि वक्रित प्रत्यास्थ पट्टी में संचित संपूर्ण बल को एक निश्चित सूत्र से व्यक्त किया जा सकता है, जिसे वे स्थितिज बल कहते हैं, और यह व्यंजक प्रत्यास्थ वक्र में न्यूनतम होना चाहिए ... तब मैं अपनी विधि की उपयोगिता स्पष्ट करने के इस अत्यंत वांछित अवसर को जाने नहीं दे सकता, साथ ही अत्यंत प्रसिद्ध बर्नूली द्वारा खोजे प्रत्यास्थ वक्र के इस उल्लेखनीय गुण को प्रकाशित करता हूँ। क्योंकि इस गुण में द्वितीय अवकलज सम्मिलित हैं, इसलिए समपरिमितीय समस्याओं को हल करने के लिए ऊपर विवेचित विधियाँ[a] इसे विकसित करने के लिए पर्याप्त नहीं हैं।
>
> Euler, 1744b *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*

[a] परिवर्तन-कलन में समपरिमितीय समस्याओं का सामान्य अर्थ किसी समाकल की बाधा के अधीन फलनिक का इष्टतमीकरण माना जा सकता है।

समीक्षा प्रति

यह अनुच्छेद यांत्रिकी के प्रति ऑयलर के दार्शनिक उपागम का सार समेटता है: प्राकृतिक परिघटनाओं को कारणात्मक विश्लेषण और इष्टतमीकरण सिद्धांतों, दोनों के माध्यम से समझा जा सकता है और गणित दोनों तक पहुँच प्रदान करता है।

बर्लिन के बाद के वर्ष और रूस वापसी बर्लिन में ऑयलर ने अनेक प्रमुख कृतियाँ लिखीं, जिनमें *Introductio in analysin infinitorum* (1748) सम्मिलित है। इसे आधुनिक गणितीय विश्लेषण का आधारभूत ग्रंथ व्यापक रूप से माना जाता है। इसमें ऑयलर ने फलनों को परिभाषित किया, चरघातांकी और त्रिकोणमितीय फलनों के लिए आधुनिक संकेतन प्रस्तुत किया और अनंत श्रेणियों को केंद्रीय विश्लेषणात्मक वस्तुओं के रूप में ग्रहण किया। इसका प्रभाव उन्नीसवीं शताब्दी तक विस्तृत हुआ, जिसने विश्लेषण, सम्मिश्र फलनों और यहाँ तक कि फ़ूरिये सिद्धांत को आकार दिया तथा अभियांत्रिक गणित के लिए सैद्धांतिक आधार प्रदान किए।

1759 तक ऑयलर अकादमी के *de facto* प्रमुख बन चुके थे और बढ़ते कार्यकारी दायित्वों से बोझिल थे। सप्तवर्षीय युद्ध में उन्हें संचालन बनाए रखने के लिए वित्तपोषण सुरक्षित करने का कार्य भी दिया गया। 1760 में आक्रमणकारी रूसी सेना ने बर्लिन पर अधिकार कर लिया और ऑयलर का घर लूट लिया गया। रूसी सेनापति ने क्षमा माँगी और क्षतिपूर्ति का आदेश दिया; साम्राज्ञी एलिज़ाबेथ ने अतिरिक्त उपहार भेजा जिसने ऑयलर की हानि से अधिक की पूर्ति की। यह प्रकरण ऑयलर को प्राप्त अंतरराष्ट्रीय सम्मान और राष्ट्रीय संघर्षों से परे जा सकने वाले वैज्ञानिक तटस्थता के आदर्श को दर्शाता है।

कैथरीन द्वितीय 1762 में रूस की साम्राज्ञी बनीं। विज्ञान और प्रबोधन की प्रबल समर्थक कैथरीन ने रूसी विज्ञान अकादमी को पुनर्जीवित करने का प्रयास किया। ऑयलर को सेंट पीटर्सबर्ग वापस लाने के लिए वार्ता आरंभ हुई। कैथरीन ने फ़्रेडरिक द्वितीय से अधिक आकर्षक प्रस्ताव दिया और 1766 में—बर्लिन में पच्चीस उत्पादक वर्षों के बाद—ऑयलर रूस लौटे। राजदरबार में उनका गर्मजोशी से स्वागत हुआ और कैथरीन ने उन्हें एक घर दिया[42]। आर्थिक रूप से सुरक्षित ऑयलर ने पुनः स्वयं को पूर्णतः अनुसंधान के लिए समर्पित कर दिया।

तब तक ऑयलर साठ वर्ष के निकट थे और उनकी दृष्टि गंभीर रूप से बिगड़ चुकी थी। 1735 में वे एक आँख की दृष्टि खो चुके थे और दूसरी में मोतियाबिंद बन गया था, जिससे लगभग पूर्ण अंधता हुई। फिर भी उनका उत्पादन बढ़ा। उल्लेखनीय रूप से इस अंतिम चरण में उनके वार्षिक शोध-पत्रों की संख्या किसी भी पूर्व काल से अधिक थी[43]। वे सहायकों के साथ कार्य करते थे जिन्हें समस्याओं और समाधान-विधियों की पूर्ण व्याख्याएँ बोलकर लिखवाते थे[44]। 1766 और 1783 के बीच ऑयलर ने 400 से अधिक शोध-पत्र तैयार किए। उनकी मृत्यु के चालीस वर्ष से अधिक बाद भी रूसी विज्ञान अकादमी अपने वार्षिक संस्मरणों में उनका कार्य प्रकाशित कर रही थी। यह उत्पादकता ऑयलर की मानसिक शक्तियों और सहयोगात्मक वैज्ञानिक कार्य की प्रभावशीलता दर्शाती है।

विरासत और *Opera Omnia* आश्चर्य नहीं कि बीसवीं शताब्दी तक पश्चिमी यूरोप के अधिकांश भाग की तुलना में USSR में ऑयलर का कार्य अधिक व्यापक रूप से ज्ञात और सराहा जाता रहा। 1907 में स्विस ऑयलर समिति, सोवियत संघ की विज्ञान अकादमी और जर्मन लोकतांत्रिक गणराज्य की विज्ञान अकादमी (जो स्वयं को प्रशाई अकादमी का वैधानिक उत्तराधिकारी मानती थी) के सहयोग से बड़ी संपादकीय परियोजना आरंभ हुई। ऑयलर की विरासत सुरक्षित रखने का यह अंतरराष्ट्रीय सहयोग उनके कार्य का सतत महत्त्व दर्शाता है।

इस प्रयास से ऑयलर की संपूर्ण कृतियों के प्रामाणिक विद्वत्तापूर्ण संस्करण *Leonhardi Euleri Opera Omnia* का प्रकाशन हुआ, जिसे तीन श्रेणियों में व्यवस्थित किया गया:

1. गणित (29 खंड);
2. यांत्रिकी और खगोलशास्त्र (31 खंड);
3. भौतिकी और विविध विषय (12 खंड)।

दो विश्वयुद्धों और बाद की आर्थिक बाधाओं से व्यवधान के बावजूद मुद्रित संस्करण (72 खंड) लगभग पूर्ण है। नवीनतम अद्यतन के अनुसार खगोलशास्त्र में विक्षोभ-सिद्धांत के केवल दो खंड अप्रकाशित हैं (Kleinert, 2015)।

[42] जिसे आज हम “स्टार्टअप पैकेज” कह सकते हैं।

[43] जैसे बीथोवन ने बधिर होते हुए अपनी नवम सिम्फ़नी रची, वैसे ही अंधता अथवा आयु ऑयलर को रोक नहीं सकी।

[44] स्टीफ़न हॉकिंग की तरह, जो सृजनात्मक नियंत्रण बनाए रखते हुए जटिल कार्य निष्पादित करने के लिए सहायकों पर निर्भर थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ऑयलर को सार्वभौमिक रूप से इतिहास के महानतम और सर्वाधिक प्रचुर गणितज्ञों में माना जाता है।[45] उनकी 866 से अधिक प्रकाशित कृतियों और गणित, भौतिकी, खगोलशास्त्र तथा अभियांत्रिकी में विस्तृत खोजों ने अनेक अनुशासनों के आधार स्थापित किए; ऑयलर का प्रभाव अप्रतिम है। जैसा पिएर-सिमोन लाप्लास ने घोषित किया: “ऑयलर को पढ़ो, ऑयलर को पढ़ो, वे हम सबके गुरु हैं।”

संभवतः इससे भी अधिक उल्लेखनीय यह है कि ऑयलर गणित के सर्वाधिक प्रसिद्ध समीकरणों में से एक, ऑयलर सर्वसमिका, से भी जुड़े हैं:

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{6.1}$$

यह सर्वसमिका पाँच स्थिरांकों—e, i, π, 1 और 0—को एकीकृत करती है और एक कथन में योग, गुणन तथा घातांक को जोड़ती है। यह ऑयलर के सूत्र $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ से निकलती है, जो चरघातांकी फलनों, त्रिकोणमिति और सम्मिश्र विश्लेषण को जोड़ता है।

प्रमुख गणितीय योगदानों की संक्षिप्त सूची उनके आधारभूत योगदानों में सम्मिलित हैं:

संस्थितिविज्ञान और आलेख-सिद्धांत (1736) 1735 में ऑयलर ने कोनिग्सबर्ग के सात सेतुओं की समस्या हल की, *geometria situs* (स्थिति की ज्यामिति) प्रस्तुत की और आलेख-सिद्धांत तथा संस्थितिविज्ञान की आधारशिला रखी (Euler, 1741)।

गणितीय संकेतन और प्रतीकवाद (1748) ऑयलर ने e, i, π, $f(x)$, Σ जैसे प्रतीकों और आधुनिक त्रिकोणमितीय संकेतन ($\sin$, $\cos$, $\tan$) को प्रस्तुत अथवा मानकीकृत किया। *Introductio in analysin infinitorum* में उनके व्यवस्थित उपयोग ने गणित के अंतरराष्ट्रीयकरण में निर्णायक योगदान दिया (Euler, 1748)।

आधुनिक विश्लेषण के आधार (1748) *Introductio in analysin infinitorum* में ऑयलर ने फलन की धारणा को विश्लेषण के केंद्र में रखा और अनंत श्रेणियों, चरघातांकी तथा लघुगणकीय फलनों और त्रिकोणमिति का एकीकृत ढंग से उपचार किया (Euler, 1748)।

परिवर्तन-कलन (1744) ऑयलर ने *Methodus inveniendi lineas curvas* में परिवर्तन-कलन स्थापित किया और पृथक् इष्टतमीकरण समस्याओं को व्यवस्थित विश्लेषणात्मक सिद्धांत में रूपांतरित किया (Euler, 1744b PDF)। इसका आगे §9.3.2.2 में परीक्षण किया जाएगा।

विश्लेषणात्मक संख्या-सिद्धांत (1730s–1750s) ऑयलर ने अभाज्य संख्याओं के अध्ययन में विश्लेषणात्मक विधियाँ लागू कीं, अपसरण के तर्कों से उनकी अनंतता प्रमाणित की और ऑयलर गुणनफल सूत्र प्रस्तुत किया (Euler, 1748)।

सारणी 6.4 प्रमुख कृतियों का सार प्रस्तुत करती है।

ऑयलर और संरचनात्मक यांत्रिकी के गणितीय आधार लियोनहार्ड ऑयलर (Euler, 1744b PDF) इतिहास के सर्वाधिक प्रचुर गणितज्ञ और किसी भी अन्य व्यक्ति से अधिक संरचनात्मक यांत्रिकी के गणितीय आधार स्थापित करने वाले व्यक्तित्व थे। उनके योगदान यांत्रिकी और अनुप्रयुक्त गणित के लगभग प्रत्येक क्षेत्र में विस्तृत हैं और उनके अनेक परिणाम संरचनात्मक अभियंता आज भी उपयोग करते हैं।

ऑयलर की *Mechanica* (1736) यांत्रिक समस्याओं पर कलन को व्यवस्थित रूप से लागू करने वाला प्रथम व्यापक ग्रंथ था, जिसने न्यूटनीय यांत्रिकी को ज्यामितीय के बजाय विश्लेषणात्मक पदों में पुनः सूत्रित किया। जहाँ न्यूटन ने गतिकी को ज्यामितीय रचनाओं द्वारा प्रस्तुत किया था, ऑयलर ने सिद्धांतों को व्यवस्थित उपचार के योग्य अवकल समीकरणों के रूप में व्यक्त किया। यांत्रिकी के विश्लेषण के रूप में इस पुनर्सूत्रीकरण ने ज्यामितीय विधियों की पहुँच से बाहर की समस्याएँ हल करना संभव किया और गति, बल तथा साम्य के विश्लेषण का ढाँचा स्थापित किया।

स्तंभों के लिए क्रांतिक व्याकुंचन भार की ऑयलर की व्युत्पत्ति (1744) संरचनात्मक स्थिरता-सिद्धांत के सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण परिणामों में आज भी है। व्याकुंचन विधा-आकार की संकल्पना भी ऑयलर के विश्लेषण से उत्पन्न हुई।

[45] “महानतम” की चर्चाओं में प्रायः उल्लिखित अन्य गणितज्ञों में कार्ल फ़्रीडरिख गाउस, आर्किमिडीज़, आइज़क न्यूटन, गॉटफ़्रीड विल्हेल्म लाइबनित्स, डेविड हिल्बर्ट, आनरी Poincaré और बर्नहार्ड रीमान सम्मिलित हैं। ऑयलर की विशिष्टता अंशतः उनकी उत्पादकता में है: उनकी संकलित कृतियाँ *Opera Omnia* 70 से अधिक खंडों की हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 6.4: लियोनहार्ड ऑयलर की प्रमुख कृतियाँ

शीर्षक (लैटिन)	वर्ष	रचना-स्थान	विषयवस्तु / महत्त्व
Mechanica sive motus scientia analytice exposita	1736	सेंट पीटर्सबर्ग	अवकल समीकरणों का उपयोग करके न्यूटनीय यांत्रिकी का पुनर्सूत्रीकरण; विश्लेषणात्मक यांत्रिकी की आधारभूत कृति।
Methodus inveniendi lineas curvas...	1744	सेंट पीटर्सबर्ग	परिवर्तन-कलन का आधारभूत ग्रंथ; बाद में ऑयलर–लाग्रांज समीकरण बनने वाला समीकरण प्रस्तुत किया।
Introductio in analysin infinitorum	1748	सेंट पीटर्सबर्ग	फलनों को विश्लेषणात्मक रूप से परिभाषित किया; अनंत श्रेणियों का कठोर उपचार किया; आधुनिक विश्लेषण की आधारशिला रखी।
Institutiones calculi differentialis	1755	बर्लिन	आंशिक अवकलजों और अवकल समीकरणों सहित अवकल कलन का व्यवस्थित निरूपण।
Institutiones calculi integralis (3 खंड)	1768–1770	बर्लिन	समाकलन की विधियों और अवकल समीकरणों के समाधानों सहित समाकल कलन पर व्यापक कृति।
Lettres à une princesse d'Allemagne	1768–1772	बर्लिन	प्रशा की राजकुमारी फ़्रीडेरिके शार्लोट के लिए लिखे भौतिकी, खगोलशास्त्र और दर्शन पर लोकप्रिय विज्ञान-पत्र।

प्रत्यास्थ वक्र पर ऑयलर के कार्य ने लागू भारों को विरूपण से जोडते हुए धरन-विक्षेप का शासक अवकल समीकरण स्थापित किया:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$$

उपयुक्त सीमा-दशाओं के साथ यह सूत्रीकरण मनमाने भारण के अधीन धरनों के विक्षेप, घूर्णन और आंतरिक बल देता है। चिरसम्मत धरन-विश्लेषण का बडा भाग इसी समीकरण से व्युत्पन्न है।

ऑयलर ने परिवर्तन-कलन भी विकसित किया, जिसने संरचनात्मक विश्लेषण—कास्टिलियानो, न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा, रेले–रिट्ज़—की ऊर्जा-विधियाँ और आधुनिक संरचनात्मक इष्टतमीकरण का समर्थन करने वाली विधियाँ संभव कीं। दृढ-पिंड गतिकी, तरल यांत्रिकी और प्रत्यास्थता पर उनके कार्य ने अभियंताओं के लिए उपलब्ध गणितीय साधनों का विस्तार किया।

ऑयलर के उत्पादन का विशाल परिमाण विस्मयकारी है: उनकी संकलित कृतियाँ 70 से अधिक खंडों में हैं। दृष्टि खोने के बाद भी उन्होंने गणित रचना जारी रखी और मृत्यु तक यांत्रिकी, विश्लेषण तथा संख्या-सिद्धांत पर शोध-पत्र बोलकर लिखवाए। संरचनात्मक अभियंताओं द्वारा प्रयुक्त लगभग प्रत्येक विश्लेषणात्मक विधि की वंशावली का कोई भाग ऑयलर के कार्य तक पहुँचता है।

6.7 विश्लेषणात्मक यांत्रिकी से सातत्यक और संरचनात्मक सिद्धांत तक

यह खंड उन योगदानकर्ताओं को एकीकृत करता है जिन्होंने *analytical mechanics* को कणों और दृढ पिंडों से आगे *continua*, *elasticity* और संरचनात्मक अनुक्रिया तक विस्तृत किया। वास्तविक पिंडों में विरूपण और पदार्थ-व्यवहार का वर्णन करने के लिए अमूर्त सिद्धांत अनुकूलित किए गए। एकीकारी विषय गणितीय औपचारिकता का भौतिक संरचना से एकीकरण है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.7.1 शार्ल-ऑगुस्ताँ द कूलॉम (1736–1806)

(Timoshenko, 1953) से अनुकूलित शार्ल-ऑगुस्ताँ द कूलॉम का जन्म 1736 में फ्रांस के अंगुलेम में ऐसे परिवार में हुआ जिसका संबंध राज्य की प्रशासनिक और प्राविधिक सेवा से था। सैन्य अभियांत्रिकी कोर में प्रवेश से पूर्व उन्होंने पेरिस में सुदृढ गणितीय शिक्षा प्राप्त की, जहाँ ज्यामिति, यांत्रिकी और निर्माण के उन्नत प्रशिक्षण ने उन्हें व्यावहारिक सेवा के लिए तैयार किया। गणितीय शिक्षण को वास्तविक अभियांत्रिक समस्याओं से तात्कालिक संपर्क के साथ जोड़ने वाले इस संस्थागत मार्ग ने कूलॉम के आजीवन उपागम को आकार दिया: विश्लेषणात्मक तर्क से निर्देशित सावधान प्रयोग, जो सदा व्यावहारिक अनुप्रयोग की ओर उन्मुख था।

क्षेत्र में अभियंता: मार्तिनीक और एक संस्मरण का उद्गम शार्ल-ऑगुस्ताँ द कूलॉम आकर्षक व्यक्तित्व थे जिनका जीवन-वृत्त अठारहवीं शताब्दी में व्यावहारिक अभियांत्रिकी और सैद्धांतिक यांत्रिकी के बढते संबंध को दर्शाता है। पेरिस में प्रारंभिक शिक्षा पाने के बाद वे अभियंताओं की सैन्य कोर में प्रविष्ट हुए और मार्तिनीक द्वीप पर नियुक्त हुए। नौ वर्षों तक उन्होंने ऐसे निर्माण कार्यों का पर्यवेक्षण किया जिन्होंने उनका सामना पदार्थों के यांत्रिक व्यवहार और संरचनात्मक निष्पादन की वास्तविकताओं से कराया। द्वीप पर—महानगर के बौद्धिक रूप से प्रेरक परिवेश से दूर—उन्होंने अपना मौलिक शोध-पत्र *Sur une Application des Règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture* लिखा, जिसे उन्होंने 1773 में फ़्रांसीसी विज्ञान अकादमी में प्रस्तुत किया। यह कार्य उदाहरण देता है कि औपनिवेशिक अभियांत्रिक व्यवहार सैद्धांतिक नवोन्मेष को कैसे प्रेरित और यांत्रिकी को उन्नत कर सकता था। अपनी भूमिका में कूलॉम ने विशिष्ट विनम्रता से लिखा:

> कुछ वर्ष पूर्व लिखा यह संस्मरण आरंभ में उस कार्य में मेरे व्यक्तिगत उपयोग के लिए था जिसमें मैं अपने व्यवसाय में संलग्न था। यदि मैं इसे इस अकादमी के समक्ष प्रस्तुत करने का साहस करता हूँ, तो केवल इसलिए कि जब प्रयासों का उद्देश्य उपयोगी हो, तब वह दुर्बलतम प्रयासों का भी सद्भावपूर्वक स्वागत करती है। इसके अतिरिक्त विज्ञान जनकल्याण को समर्पित स्मारक हैं। प्रत्येक नागरिक को अपनी प्रतिभा के अनुसार उनमें योगदान देना चाहिए। जहाँ महान व्यक्ति भवन के शीर्ष तक ले जाए जाएँगे, जहाँ वे ऊपरी मंज़िलों का रेखांकन और निर्माण कर सकते हैं, वहीं निचली मंज़िलों में बिखरे अथवा नींव के अंधकार में छिपे साधारण शिल्पकारों को केवल उसे परिपूर्ण करने का प्रयास करना चाहिए जिसे अधिक निपुण हाथों ने बनाया है।
>
> Coulomb, 1773a *"Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture"*

फ्रांस वापसी: घर्षण, मशीनें और प्रायोगिक विधि फ्रांस लौटने पर कूलॉम ने अभियंता के रूप में अपना कार्य पुनः आरंभ किया और अकादमी के वैज्ञानिक जीवन में अधिक प्रत्यक्ष रूप से प्रविष्ट हुए। उन्होंने दिक्सूचियों के इष्टतम अभिकल्प पर शोध-पत्र के लिए दिया पुरस्कार साझा किया। 1781 में उन्होंने अपने संस्मरण *Théorie des machines simples* के लिए अकादमी का एक और पुरस्कार जीता, जिसमें उन्होंने पदार्थों के शुष्क और स्नेहित, दोनों प्रकार के घर्षण पर व्यापक प्रयोगों के परिणाम प्रस्तुत किए। इन व्यवस्थित मापनों ने यांत्रिक अभिकल्प के लिए निर्णायक आँकड़े दिए और tribology के अनुभवजन्य आधार की स्थापना में सहायता की[46]।

1781 के बाद कूलॉम स्थायी रूप से पेरिस में नियुक्त रहे। वहाँ वे अकादमी के लिए निर्वाचित हुए और उन्हें बेहतर अनुसंधान सुविधाएँ मिलीं। उन्होंने विद्युत और चुंबकत्व की ओर उत्तरोत्तर ध्यान दिया,[47] तथा सूक्ष्म विद्युत और चुंबकीय बल मापने के लिए अत्यधिक संवेदनशील ऐंठन-तुला विकसित की। इस प्रक्रिया में उन्होंने तारों के ऐंठन-प्रतिरोध का अन्वेषण किया—ऐसा क्षेत्र जिसका §10.3.2.1 में आगे परीक्षण किया गया है।

[46] ट्राइबोलॉजी वह अंतःविषयी विज्ञान है जो सापेक्ष गति में अंतःक्रिया करते पृष्ठों के घर्षण, घिसाव और स्नेहन का अध्ययन करता है। इसमें बेयरिंग, गियर और सर्पण पृष्ठों का अभिकल्प; यांत्रिक तंत्रों में ऊर्जा-हानि और पदार्थ-क्षरण न्यून करने के लिए स्नेहकों तथा पृष्ठ-उपचारों का विकास; साथ ही भू-तकनीकी अभियांत्रिकी में मृदा–संरचना घर्षण और निर्माण तथा अवसंरचना अनुप्रयोगों में कंक्रीट घर्षण सम्मिलित हैं।

[47] रोचक रूप से, जैसा हम आगे देखेंगे, ऐंठन पर उनका अनुसंधान मूलतः चुंबकीय अध्ययनों के लिए परिकल्पित उपकरण से संभव हुआ।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ऐंठन और प्रत्यास्थता पर कार्य कूलॉम के torsion प्रयोगों ने न केवल चुंबकत्व की समझ आगे बढ़ाई, बल्कि ऐंठन यांत्रिकी की आधारशिला भी रखी। उन्होंने बलाघूर्ण और कोणीय विरूपण के बीच संबंध व्युत्पन्न किए तथा तारों के अपरूपण-प्रतिरोध के उनके मापनों ने प्रत्यास्थता के बाद के विकासों का मंच तैयार किया। ये अंतर्दृष्टियाँ उनके विद्युत अन्वेषणों की केवल सहायक नहीं थीं; वे प्रत्यास्थ पदार्थों के अभिलक्षण में आधारशिला बनीं। उनके ऐंठन-प्रयोग अठारहवीं शताब्दी के कुछ सर्वाधिक यथार्थ यांत्रिक मापन थे और उन्होंने ऐसी विधियाँ स्थापित कीं जिन्हें अभियंताओं की पीढ़ियाँ उपयोग करने वाली थीं।

अठारहवीं शताब्दी में किसी अन्य वैज्ञानिक ने प्रत्यास्थ पिंडों की यांत्रिकी में कूलॉम जितना योगदान नहीं किया। प्रत्यास्थता में उनकी आधारभूत प्रगति मुख्यतः उनके 1773 के संस्मरण में मिलती है, जिसने अनुभवजन्य निर्माण-व्यवहार और उभरती सैद्धांतिक यांत्रिकी के बीच सेतु बनाने में सहायता की।

यांत्रिकी में प्रभाव और विरासत व्यापक सैद्धांतिक ढाँचों की दृष्टि से कूलॉम भले न्यूटन, ऑयलर अथवा बर्नूली के समान ऊँचे न हों, किंतु उनके सूक्ष्म प्रायोगिक कार्य ने अनुप्रयुक्त यांत्रिकी के लिए निर्णायक आधार रखे। घर्षण, ऐंठन और प्रत्यास्थता पर उनके अध्ययनों ने नाविए, कॉशी और सेंट-वेनां के उन्नीसवीं शताब्दी के कार्य को प्रभावित किया, जिन्होंने प्रतिबल और विकृति के सिद्धांत को विस्तृत और औपचारिक बनाया। कूलॉम की विरासत सावधान मापनों को स्थायी भौतिक नियमों में रूपांतरित करने की उनकी क्षमता में है। संभवतः सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण यह है कि उन्होंने दिखाया कि व्यवस्थित प्रायोगिक अन्वेषण ऐसे परिमाणात्मक संबंध दे सकता है जो सैद्धांतिक रूप से महत्त्वपूर्ण और व्यावहारिक रूप से उपयोगी, दोनों हों।

वैयक्तिक लक्षण और ऐतिहासिक चुनौतियाँ कूलॉम के व्यक्तित्व पर विनम्रता और परिश्रम की छाप थी। यूरोपीय शिक्षा-केंद्रों से दूर औपनिवेशिक एकांत में वर्षों कार्य करने के बावजूद उन्होंने वैज्ञानिक अन्वेषण कभी नहीं छोड़ा। वे प्रायः स्वयं को विज्ञान की “नींव का निर्माता” मात्र कहते और सार्वजनिक श्रेय अन्य लोगों को देते थे। फिर भी विशेषतः प्रायोगिक परिष्करण में उनकी दृढ़ता ने उन्हें अठारहवीं शताब्दी की अनुप्रयुक्त यांत्रिकी के अग्रभाग में रखा।

यद्यपि आज उन्हें प्रायः स्थिरवैद्युतिकी के अपने नियम के लिए स्मरण किया जाता है, यांत्रिकी में कूलॉम के योगदान अपरिहार्य हैं: उन्होंने कठोर प्रायोगिक आँकड़े और भौतिक प्रतिरूप दिए जिन्होंने आगामी शताब्दियों में संरचनात्मक विज्ञान की परिपक्वता का मार्गदर्शन किया। उनका जीवन-वृत्त ऐसे अभियंता-वैज्ञानिक का उदाहरण है जिसने अभियांत्रिक व्यवहार और वैज्ञानिक समझ, दोनों को आगे बढ़ाने के लिए व्यावहारिक विशेषज्ञता को सैद्धांतिक अंतर्दृष्टि से जोड़ा[48]।

6.7.2 Siméon Denis Poisson (1781–1840)

Siméon Denis Poisson का जन्म 1781 में फ़्रांस के पिथिविए में साधारण साधनों वाले परिवार में हुआ। उनकी असाधारण गणितीय प्रतिभा शीघ्र पहचानी गई और फ़्रांसीसी वैज्ञानिक शिक्षा के क्रांति-पश्चात पुनर्गठन के समय स्थापना के कुछ ही समय बाद उन्हें *École Polytechnique* में प्रवेश मिला। वहाँ वे लाप्लास और लाग्रांज के प्रभाव में आए, जिनके यांत्रिकी के विश्लेषणात्मक उपागम ने उनके बौद्धिक विकास को गहराई से आकार दिया। अपनी पीढ़ी के अनेक अभियंता-वैज्ञानिकों के विपरीत पॉइसन ने मुख्यतः गणितीय जीवन-वृत्त अपनाया और प्रायोगिक अन्वेषण की अपेक्षा विश्लेषणात्मक व्यापकता तथा औपचारिक पूर्णता को वरीयता दी।

क्रांति-पश्चात पीढ़ी के विश्लेषक Siméon Denis Poisson ऐसे फ़्रांसीसी गणितज्ञ और भौतिक विज्ञानी थे जिनका नाम प्रायिकता से प्रत्यास्थता तक विज्ञान की अनेक शाखाओं में आज भी अंतःस्थापित है। लाप्लास के विद्यार्थी और फ़ूरिये

[48]संरचनात्मक और यांत्रिक अभियांत्रिकी में उल्लेखनीय उदाहरणों में गुस्ताव आइफ़ेल सम्मिलित हैं, जिन्होंने सेतुओं और मीनारों के लिए पवन-भार तथा पदार्थ-प्रतिबलों के उन्नत सैद्धांतिक विश्लेषण को नवोन्मेषी निर्माण-तकनीकों से जोड़ा; जॉन ऑगस्तस रोबलिंग, जिन्होंने निलंबन-सेतु अभिकल्प का गणितीय सिद्धांत और ब्रुकलिन ब्रिज को संभव बनाने वाली व्यावहारिक अभियांत्रिक विधियाँ, दोनों विकसित कीं; और स्टीफ़न तिमोशेंको, जिन्होंने संरचनात्मक कंपन तथा स्थिरता की वास्तविक समस्याएँ हल करते हुए आधारभूत धरन और पट्टिका-सिद्धांत बनाए। दुर्भाग्यवश आधुनिक व्यावसायिक विशेषज्ञता ने सैद्धांतिक अनुसंधान को व्यावहारिक अभियांत्रिकी से बड़े स्तर पर अलग कर दिया है; अपेक्षाकृत कम समकालीन व्यावसायिकों में गहन वैज्ञानिक समझ और प्रत्यक्ष अभियांत्रिक विशेषज्ञता, दोनों हैं, और इसके विपरीत अनेक वैज्ञानिक सिद्धांत समझते हैं किंतु उनमें व्यावहारिक अभियांत्रिक अनुभव का अभाव है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के समकालीन पॉइसन अठारहवीं तथा उन्नीसवीं शताब्दियों के बीच संक्रमणकाल के केंद्रीय व्यक्तित्व के रूप में उभरे; उन्होंने लाग्रांज और लाप्लास की विश्लेषणात्मक यांत्रिकी की परंपरा को आगे बढ़ाया तथा सातत्यक भौतिकी और अभियांत्रिकी की उभरती आवश्यकताओं के अनुकूल बनाया।

उनका जीवन-वृत्त फ्रांस में वैज्ञानिक और अभियांत्रिक शिक्षा के संस्थागत सुदृढ़ीकरण के साथ घटित हुआ, विशेषतः *École Polytechnique*, के माध्यम से, जहाँ गणितीय कठोरता को यांत्रिकी, पदार्थों और भौतिक विज्ञान की समस्याओं पर व्यवस्थित रूप से लागू किया गया। पॉइसन उस प्रथम पीढ़ी से थे जिसके लिए उन्नत विश्लेषण केवल आकाशीय यांत्रिकी का साधन नहीं, बल्कि पदार्थ के आंतरिक व्यवहार का वर्णन करने वाली भाषा था।

प्रत्यास्थता और द्वितीय प्रत्यास्थ स्थिरांक यांत्रिकी में पॉइसन को द्वितीय प्रत्यास्थ स्थिरांक—जिसे अब पॉइसन *अनुपात* कहते हैं—प्रस्तुत करने के लिए सर्वाधिक जाना जाता है; यह अक्षीय विस्तार के अधीन पदार्थ के पार्श्व संकुचन को परिमाणित करता है। इस संकल्पना ने यह पहचानकर हुकीय आनुपातिकता से आगे निर्णायक कदम चिह्नित किया कि विरूपण अंतर्निहित रूप से त्रिविमीय है: एक दिशा में विस्तार अनिवार्यतः अनुप्रस्थ दिशाओं में संकुचन उत्पन्न करता है।

पॉइसन के सूत्रीकरण ने नाविए द्वारा आरंभ किए रैखिक प्रत्यास्थता-सिद्धांत को परिष्कृत किया और समदैशिक ठोस में अनुदैर्ध्य तथा अनुप्रस्थ विकृतियों को जोड़ने की व्यवस्थित रीति दी। पॉइसन अनुपात को अंतर्जात पदार्थ-गुण के रूप में पहचानकर पॉइसन ने प्रत्यास्थता को एकविमीय नियमों के संग्रह से वास्तविक सातत्यक सिद्धांत में रूपांतरित करने में सहायता की। इस अंतर्दृष्टि ने सेंट-वेनां के बाद के स्पष्टीकरणों और पूर्णतः विकसित नाविए–Lamé समीकरणों के लिए अनिवार्य आधार रखा।

सातत्यक व्यवहार का गणितीकरण पॉइसन का कार्य पदार्थ-व्यवहार के *mathematization* में निर्णायक चरण का प्रतिनिधित्व करता है। केवल ज्यामितीय अंतःप्रज्ञा अथवा प्रायोगिक अनुरूपता पर निर्भर रहने के बजाय उन्होंने पिंड में सर्वत्र प्रतिबल, विकृति और विस्थापन क्षेत्रों को शासित करने वाले आंशिक अवकल समीकरणों द्वारा प्रत्यास्थ अनुक्रिया का वर्णन करने का प्रयास किया। ऐसा करके उन्होंने सीमा-मान समस्या को प्रत्यास्थता और सातत्यक यांत्रिकी के स्वाभाविक ढाँचे के रूप में स्थापित करने में सहायता की।

इस विश्लेषणात्मक दृष्टिकोण ने पॉइसन को प्रत्यास्थता से परे भी महत्त्वपूर्ण परिणामों तक पहुँचाया। उनका समीकरण—जिसे अब *पॉइसन समीकरण* कहते हैं—गुरुत्वीय और स्थिरवैद्युत विभवों के अध्ययन में उत्पन्न हुआ, किंतु उसकी गणितीय संरचना प्रत्यास्थता, तरल यांत्रिकी और ऊष्मा-चालन में पुनः प्रकट होती है। यह समीकरण उदाहरण देता है कि स्थानीय स्रोत (बल, आवेश, द्रव्यमान-घनत्व) वैश्विक क्षेत्र-व्यवहार कैसे निर्धारित करते हैं; यह संकल्पना संरचनात्मक और भौतिक विश्लेषण में केंद्रीय है।

नाविए से संबंध और अभियांत्रिक प्रश्न पॉइसन का जीवन-वृत्त क्लोद-लुई नाविए के साथ बौद्धिक तनाव से चिह्नित था, विशेषतः अभियांत्रिकी में अमूर्त गणित की भूमिका पर। पॉइसन गणितीय पूर्णता और विश्लेषणात्मक सुरुचि को प्राथमिकता देते थे, जबकि नाविए ने भौतिक प्रतिरूपण और व्यावहारिक प्रयोज्यता पर बल दिया। केवल व्यक्तिगत होने से बहुत दूर ये मतभेद गणित-प्रेरित सातत्यक सिद्धांत और अभियांत्रिकी-उन्मुख संरचनात्मक विश्लेषण के बीच अधिक गहरे अनुशासनात्मक विभाजन को प्रतिबिंबित करते थे।

पश्चदृष्टि में प्रतिद्वंद्विता उत्पादक सिद्ध हुई। विश्लेषणात्मक संगति पर पॉइसन के आग्रह ने प्रत्यास्थता के सैद्धांतिक आधारों को सुदृढ़ किया, जबकि नाविए के अभियांत्रिक दृष्टिकोण ने वास्तविक संरचनाओं से प्रासंगिकता सुनिश्चित की। उनके संयुक्त प्रयासों ने मिलकर प्रत्यास्थता-सिद्धांत के उस रूप को आकार दिया जिसे बाद में Lamé और सेंट-वेनां ने स्पष्ट किया।

प्रभाव का विस्तार और विरासत यांत्रिकी से परे पॉइसन ने प्रायिकता-सिद्धांत (पॉइसन वितरण), विश्लेषणात्मक गतिकी (पॉइसन कोष्ठक) और गणितीय भौतिकी में स्थायी योगदान किए। तरंग-संचरण, तरल-दाब और स्थिरवैद्युतिकी पर उनके कार्य ने उन्नीसवीं शताब्दी की भौतिकी को उतनी ही गहराई से प्रभावित किया जितनी उनकी प्रत्यास्थता-सिद्धांतों ने अभियांत्रिकी को।

संरचनात्मक यांत्रिकी में पॉइसन की विरासत पृथक् सूत्रों में नहीं, बल्कि सेतु-व्यक्तित्व के रूप में उनकी भूमिका में है: उन्होंने प्रत्यास्थता को आरंभिक यांत्रिक अंतःप्रज्ञा से गणितीय रूप से सुसंगत सातत्यक सिद्धांत तक ले जाने में सहायता की। उनके नाम वाले प्राचल आधुनिक संघटनात्मक प्रतिरूपों, परिमित अवयव सूत्रीकरणों और पदार्थ-अभिलक्षण में आज भी अपरिहार्य हैं।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §10.3.2.5 देखें

6.7.3 क्लोद लुई मारी आँरी नाविए (1785–1836)

क्लोद लुई मारी आँरी नाविए का जन्म 1785 में डिजॉन में हुआ था। जब वे चौदह वर्ष के थे, तब उनके पिता की मृत्यु हो गई और उनका पालन-पोषण उनके मामा *E. Gauthey* ने किया, जो प्रसिद्ध सेतु अभियंता तथा *Corps des Ponts et Chaussées* के सदस्य थे । इस पारिवारिक संबंध ने नाविए को कम आयु में ही अभियांत्रिकी-जगत की ओर प्रवृत्त किया। फ्रांसीसी अभियांत्रिकी प्रतिष्ठान के भीतर उनकी परवरिश ने इस विश्वास को आकार दिया कि व्यावहारिक निर्माण को गणितीय सिद्धांत से निर्देशित होना चाहिए; यही दृष्टिकोण उनके पूरे कार्यजीवन को परिभाषित करने वाला था।

सत्रह वर्ष की आयु में नाविए ने प्रतिष्ठित *École Polytechnique* में प्रवेश लिया; आने वाले 117 विद्यार्थियों की कक्षा में उनकी आरंभिक श्रेणी साधारण थी। इस विनम्र आरंभ के बावजूद उन्होंने शीघ्र ही अपनी विशिष्टता सिद्ध की और प्रथम वर्ष के अंत तक शीर्ष दस में पहुँच गए। इसके बाद वे *Corps des Ponts et Chaussées* में सम्मिलित हुए, जहाँ उन्होंने अपना शेष कार्यजीवन प्रशासनिक, अकादमिक और वैज्ञानिक उत्तरदायित्वों के बीच संतुलन साधते हुए बिताया। *École Polytechnique* से Corps des Ponts तक का यह संस्थागत मार्ग वैज्ञानिक अभियांत्रिकी-शिक्षा के उस नए प्रतिरूप का प्रतिनिधि था, जिसकी पहल फ्रांस ने की और जो अंततः पूरे यूरोप में फैल गया।

École Polytechnique में रहते हुए नाविए जोज़ेफ फूरिये के प्रभाव में आए, जिनके ऊष्मा और तरंगों के विश्लेषणात्मक अध्ययन ने नाविए के चिंतन को गहराई से प्रभावित किया (Cannone and Friedlander, 2003)। अपने समय के अनेक अभियंताओं के विपरीत, जो अनुभवजन्य नियमों पर निर्भर थे, नाविए ने गणितीय रूप से दृढ कार्यपद्धति का समर्थन किया। उन्होंने अपने मामा के ग्रंथ *Traité des ponts* का संपादन और प्रकाशन किया (Gauthey, 1813), जिसमें ऐतिहासिक अंतर्दृष्टियों को सैद्धांतिक दृढता के साथ संयोजित किया गया था।

नाविए का प्रभाव शोध से भी आगे तक विस्तृत था। उनकी अभियांत्रिकी पाठ्यपुस्तकों ने अभियांत्रिकी-शिक्षा में analytical! mechanics का प्रवेश कराया और अनुभवजन्य शिल्प से वैज्ञानिक दृढता की ओर इस विषय के संक्रमण में एक निर्णायक मोड चिह्नित किया। इन ग्रंथों ने गणितीय विधियों को अभियांत्रिकी समस्याओं, विशेषतः प्रत्यास्थता और तरल यांत्रिकी, पर लागू करने की आधारभूमि प्रदान की। उनके शिक्षण-दृष्टिकोण ने आधुनिक अभियांत्रिकी-शिक्षा का प्रतिरूप स्थापित किया, जिसमें अनुभवजन्य नियमों के स्थान पर गणितीय सिद्धांतों पर बल दिया गया।

उनका कार्यजीवन संस्थागत तनावों से मुक्त नहीं था। नाविए का सैद्धांतिक शोध—विशेष रूप से 1820 के दशक के आरंभ में श्यान तरल-गति के समीकरणों का उनका व्युत्पादन—कुछ गोपनीय ढंग से किया गया, क्योंकि उनके वरिष्ठ व्यावहारिक सेतु-अभिकल्प को प्राथमिकता देते थे। यह सैद्धांतिक और व्यावहारिक अभियांत्रिकी के बीच एक व्यापक संस्थागत विभाजन को प्रतिबिंबित करता था, जिसे नाविए ने अंततः पार कर लिया। व्यवहार और सिद्धांत के उनके संश्लेषण ने उन्हें *Académie des Sciences* तथा कार्यरत अभियंताओं, दोनों से प्रशंसा दिलाई (Cannone and Friedlander, 2003)।

उनकी व्यावसायिक प्रतिद्वंद्विताएँ भी थीं, विशेषतः Siméon दनी पॉइसन के साथ, जिन्होंने दूसरा प्रत्यास्थ स्थिरांक (पॉइसन अनुपात) प्रस्तुत किया और प्रत्यास्थता-सिद्धांत पर प्रतिस्पर्धी दृष्टिकोण दिए। यद्यपि उनके वाद-विवाद कभी-कभी कटु थे, फिर भी उन्होंने प्रत्यास्थ प्रतिरूपों के परिष्कार को प्रेरित किया और सेंट-वेनाँ के बाद के विकासों की भूमि तैयार की।

नमन अपने 1826 के *Leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines* (संरचनाओं और मशीनों की स्थापना में यांत्रिकी के अनुप्रयोग पर रॉयल स्कूल ऑफ ब्रिजेज़ ऐंड रोड्स में दिए गए व्याख्यान) में (Navier, 1826) नाविए ने प्रत्यास्थ धरन के नमन में neutral axis की स्थिति का सही निर्धारण किया। क्षैतिज, ऊर्ध्वाधर और आघूर्ण-संतुलन की शर्तें लागू करके उन्होंने दिखाया कि उदासीन अक्ष अनुप्रस्थ काट के केन्द्रक से होकर गुजरता है। उनके कार्य ने कई आधारभूत सिद्धांत स्थापित किए: नमन के दौरान समतल काट समतल बने रहते हैं; आयताकार काटों के लिए उदासीन अक्ष मध्य-गहराई पर स्थित होता है; और ऐसे परिणाम केवल प्रत्यास्थ सीमा के भीतर ही मान्य होते हैं। ये सिद्धांत आधुनिक धरन-सिद्धांत की आधारशिला बने और आज भी संरचनात्मक विश्लेषण के मूलभूत अंग हैं (§7.3)।

समीक्षा प्रति

नाविए ने रैखिक नमन-संबंध $M = fS$ प्रस्तुत किया, जिसने शास्त्रीय धरन-सिद्धांत की एक आधारशिला रखी। उनके पूर्ववर्तियों, जैसे पैराँ और कूलॉम, जिनके योगदान मुख्यतः अकादमिक क्षेत्र तक सीमित रहे, के विपरीत नाविए के सूत्रीकरणों को उनकी स्पष्टता, दृढता और प्रयोज्यता के कारण अभियांत्रिकी अभिकल्प में व्यापक स्वीकृति मिली।

प्रत्यास्थता नाविए को प्रायः आधुनिक elasticity सिद्धांत का संस्थापक माना जाता है। 1821 में उन्होंने *Institut* के समक्ष एक युगांतरकारी शोध-पत्र, *Mémoire sur les lois du mouvement des corps solides*, (Navier, 1827b) प्रस्तुत किया, जिसमें सतत प्रत्यास्थ पिंड के संतुलन और गति के सामान्य समीकरण प्रतिपादित किए गए थे। ये समीकरण न केवल आंतरिक बिंदुओं पर लागू होते थे, बल्कि सीमाओं पर दशाएँ भी निर्धारित करते थे।[49] यह सूत्रीकरण सतत माध्यम में प्रत्यास्थ व्यवहार का पहला पूर्ण गणितीय वर्णन था और इसने ठोस यांत्रिकी के बाद के सभी विकासों का सैद्धांतिक आधार प्रदान किया।

नाविए ने आरंभ में एक ही प्रत्यास्थ स्थिरांक का उपयोग किया था, जिसे उन्होंने 1822 में संशोधित कर दो स्वतंत्र पदार्थ-प्राचल सम्मिलित किए और इस प्रकार प्रतिरूप की व्यापकता बढाई। बाद में उनके शिष्य सेंट-वेनाँ ने इन सूत्रीकरणों को परिष्कृत किया, किंतु सिद्धांत की आधारभूत संरचना नाविए ने ही स्थापित की थी।

उनका 1826 का प्रकाशन *Leçons*, (Navier, 1826 PDF), अभियांत्रिकी साहित्य में आज भी एक मील का पत्थर है। इसमें प्रत्यास्थ ठोसों का पहला सामान्य सिद्धांत और संरचनात्मक यांत्रिकी का पहला व्यवस्थित विवेचन प्रस्तुत किया गया। उस समय प्रत्यास्थता-सिद्धांत और संरचनात्मक अभियांत्रिकी के बीच कोई स्पष्ट सीमा नहीं थी और नाविए जैसे विद्वान दोनों में गहराई से संलग्न थे।

श्यान तरल तरल यांत्रिकी पर नाविए का कार्य उन समीकरणों के सूत्रीकरण में परिणत हुआ जिन्हें आज नाविए–स्टोक्स समीकरण कहते हैं। उनके 1822 के शोध-पत्र ने आंतरिक घर्षण (श्यानता) की संकल्पना प्रस्तुत की और यह प्रस्तावित किया कि तरल में प्रतिरोध विकृति-दर के समानुपाती होता है—यह अपने समय से आगे की परिकल्पना थी। यद्यपि आरंभ में उनके कार्य की उपेक्षा हुई, फिर भी उसने सातत्यक यांत्रिकी के बाद के विकासों की वैचारिक रीढ बनाई और आज भी तरल गतिकी का केंद्रीय अंग है। इन समीकरणों के व्यापक व्यावहारिक अनुप्रयोगों में विमान और मोटर-वाहन अभिकल्प (वायुगतिकी और कर्षण-न्यूनीकरण), मौसम-पूर्वानुमान और जलवायु-प्रतिरूपण, महासागरीय धाराओं का अनुकरण, हृदवाहिका चिकित्सा में रक्त-प्रवाह विश्लेषण, भवनों और सेतुओं के लिए पवन-भार की गणना, पंपों, टर्बाइनों और प्रणोदकों का अभिकल्प, तेल और गैस पाइपलाइन प्रवाह, प्रदूषण-विक्षेपण प्रतिरूपण, पोत-कवच अभिकल्प तथा HVAC निकायों का इष्टतमीकरण सम्मिलित हैं। ये समीकरण विभिन्न अभियांत्रिकी विषयों में प्रयुक्त संगणकीय तरल गतिकी (CFD) सॉफ्टवेयर के लिए मूलभूत हैं।

विरासत नाविए की स्थायी विरासत अनुभवजन्य प्रेक्षण को विश्लेषणात्मक सूत्रीकरण के साथ संश्लेषित करने की उनकी क्षमता में निहित है। उन्होंने संरचनात्मक और तरल यांत्रिकी को अनुभवजन्य आलेखों के स्थान पर अवकल समीकरणों द्वारा शासित विषयों में रूपांतरित किया। उनकी पाठ्यपुस्तकों ने अभियंताओं की अनेक पीढ़ियों को परिशुद्धता की नई भाषा में शिक्षित किया और उनके सिद्धांत आज भी प्रत्यास्थता तथा द्रवगतिकी के अध्ययन की आधारशिलाएँ हैं।

यद्यपि व्यापक वैज्ञानिक परंपरा में वे न्यूटन या ऑयलर जितने प्रसिद्ध नहीं हैं, किंतु अभियांत्रिकी और अनुप्रयुक्त यांत्रिकी के भीतर अभियांत्रिकी को यथार्थ विज्ञान में परिवर्तित करने की अपनी भूमिका के कारण नाविए दिग्गजों में गिने जाते हैं। उनके दृष्टिकोण ने अभियांत्रिकी विज्ञान का वह प्रतिमान स्थापित किया जो आज भी इस क्षेत्र का मार्गदर्शन करता है: व्यावहारिक समस्याओं पर गणितीय विश्लेषण का व्यवस्थित अनुप्रयोग।

सेतु की *विफलता* अठारहवीं शताब्दी के अंत और उन्नीसवीं शताब्दी के आरंभ तक अधिकांश संरचनाएँ पत्थर से बनाई जाती थीं। किंतु औद्योगिक क्रांति (1760–1840) और विशेषतः लोहे के उत्पादन से प्रेरित होकर इंग्लैंड (और अमेरिका) में नए धातु-सेतु बनाए गए। जॉन स्मीटन (1721–1792) ढलवाँ लोहे का व्यापक स्तर पर उपयोग करने वाले पहले उत्कृष्ट अभियंता थे। पहला ढलवाँ-लोहा सेतु अब्राहम डार्बी ने सेवर्न नदी पर (1776–1779 में) बनाया था। अन्य देशों ने इंग्लैंड का अनुसरण किया और शताब्दी के मोड तक जर्मनी तथा फ्रांस में ढलवाँ-लोहा सेतु दिखाई देने लगे। ये सेतु मेहराबों के रूप में बनाए गए थे। इन नई संरचनाओं के आयाम सदैव उचित रूप से निर्धारित नहीं किए गए और अनेक विफल हुए[50]। अभियंताओं ने निष्कर्ष निकाला कि

[49]इस व्यापक निकाय में 15 युग्मित क्षेत्र-समीकरण सम्मिलित हैं: 3 संतुलन-समीकरण, 6 संघटनात्मक हूकीय प्रतिबल–विकृति संबंध और 6 ज्यामितीय विकृति–विस्थापन समीकरण—कुल 15 अज्ञातों (6 प्रतिबल, 6 विकृतियाँ और 3 विस्थापन) के लिए।

[50]संभवतः भंगुर विफलताएँ।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बड़े विस्तृतियों के लिए ढलवाँ-लोहा सेतु सुरक्षित नहीं हो सकते और उन्होंने निलंबन-सेतु बनाना आरंभ किया (Timoshenko, 1953)। यह संक्रमण दर्शाता है कि संरचनात्मक विफलताएँ प्रायः पदार्थों और संरचनात्मक रूपों, दोनों में नवाचार को प्रेरित करती हैं।

ऐसा पहला सेतु 1796 में पेंसिल्वेनिया में जेम्स फिनली ने बनाया था। फिनली एक कुशल अभियंता थे, जो 1800 के ग्रामीण अमेरिका में, अर्थात् किसी *Grande École* में कार्यरत नाविए के परिवेश से अत्यंत भिन्न वातावरण में काम करते थे। फिनली व्यावहारिक और अनुभववादी थे तथा सफलतापूर्वक ऐसे उपयोगी, सरल और सामान्य अभिकल्प विकसित करने का प्रयास करते थे जिन्हें ग्रामीण लोहार बना सकें। उनकी सफलता का संकेत यह है कि 1820 तक उनके पास कई पेटेंट थे और अमेरिका में चालीस से अधिक शृंखला-निलंबन सेतु बनाए जा चुके थे। फिनली के नवाचारों को ब्रिटेन में सेवानिवृत्त नौसेना कप्तान सैम्युअल ब्राउन ने अपनाया और आगे बढ़ाया; उन्होंने प्रयोगों द्वारा निलंबन-सेतु के केबल में लोहे की कड़ियों के सर्वाधिक दक्ष आकार का निर्धारण किया। वे निलंबन-सेतुओं के प्रमुख निर्माता बने, जिनमें 1820 में ट्वीड नदी पर बना यूनियन ब्रिज भी था; इसकी 436 ft की विस्तृति अमेरिका में बने किसी भी सेतु की अधिकतम विस्तृति की लगभग दुगुनी थी। यूनियन ब्रिज के शीघ्र बाद ब्रिटेन में अन्य अभियांत्रिकी उपलब्धियाँ हुईं, जिनमें ब्रूनेल, स्टीवेंसन और टेल्फर्ड जैसे औद्योगिक क्रांति के अग्रदूतों द्वारा निर्मित सेतु सम्मिलित थे (Cannone and Friedlander, 2003)। विचारों का यह पार-अटलांटिक आदान-प्रदान दर्शाता है कि सीमित संचार के युग में भी अभियांत्रिकी नवाचार राष्ट्रीय सीमाओं को पार कर गया।

ब्रिटिश अभियंताओं ने अमेरिकियों का अनुसरण किया और उन्नीसवीं शताब्दी की पहली चौथाई में इंग्लैंड में ऐसे बहुत-से सेतु बनाए गए। उनमें सबसे महत्त्वपूर्ण, 550 ft केंद्रीय विस्तृति वाला मेनाइ ब्रिज, टेल्फर्ड (1757–1834) ने अभिकल्पित किया था। तब तक Pope, 1811 का शास्त्रीय ग्रंथ प्रकाशित हो चुका था। पीछे छूट जाने का अनुभव करते हुए फ्रांसीसी सरकार ने निलंबन-सेतु प्रौद्योगिकी के विकास में सहायता के लिए *École des Ponts et Chaussées* को बुलाया। स्वाभाविक था कि उनकी दृष्टि ब्रिटेन की ओर गई। अपने वरिष्ठों के अनुरोध पर नाविए, जो पहले ही सेतुओं पर अपने मामा का कार्य प्रकाशित कर चुके थे, निलंबन-सेतुओं का अध्ययन करने के लिए 1821 और 1823 में दो बार ब्रिटेन गए। इसके बाद उन्होंने अपना *Rapport et Mémoire sur les Ponts Suspendus* (Navier, 1830) प्रस्तुत किया, जिसमें न केवल इस क्षेत्र की ऐतिहासिक समीक्षा और तत्कालीन सबसे महत्त्वपूर्ण सेतुओं के विवरण थे, बल्कि ऐसी संरचनाओं के विश्लेषण की सैद्धांतिक विधियाँ भी थीं।

इस पुस्तक में नाविए ने पहली बार गणितज्ञ का विश्लेषणात्मक और अमूर्त दृष्टिकोण इस विषय पर लागू किया। उन्होंने अनुभवजन्य *ad hoc* दृष्टिकोण की तुलना में अमूर्तन की शक्ति और चुनौती को स्पष्ट करने का प्रयास किया। उन्होंने वही किया जो अनुप्रयुक्त गणितज्ञ गणितीय प्रतिरूप बनाते समय करते हैं। उनके शब्दों में,

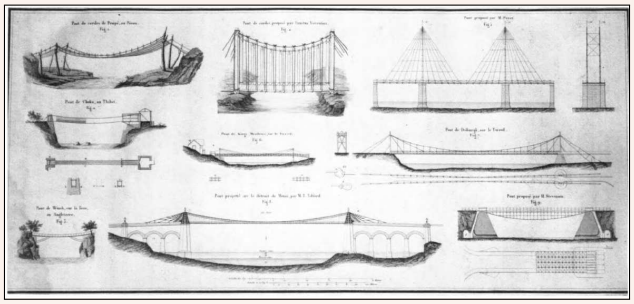
> [प्रतिरूपण के लिए] एक विशिष्ट कला की आवश्यकता होती है, जिसमें हल किए जाने वाले वास्तविक प्रश्नों को ऐसे अन्य प्रश्नों से प्रतिस्थापित किया जाता है जो उनसे यथासंभव कम भिन्न हों और जिन पर गणित लागू किया जा सके।
>
> Navier, 1830 *Rapport à Monsieur Becquey, Conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus*

नाविए ने सुझाव दिया कि परिणामों को इस प्रकार पुनःसूत्रित किया जाए कि वे उन सैद्धांतिक सीमाओं को निर्दिष्ट करें जिनके भीतर परिणाम प्रासंगिक होने चाहिए, तथा महत्त्वपूर्ण प्राचलों के बीच संबंध निर्धारित करने के लिए गणितीय विश्लेषण का उपयोग किया जाए। पचास वर्षों तक यह प्रतिवेदन निलंबन-सेतुओं के अभिकल्प पर सबसे महत्त्वपूर्ण पुस्तकों में से एक रहा। एक अंश उद्धृत करते हुए (Picon, 1988):

> संभावना है कि निलंबन-सेतुओं का उपयोग शीघ्र ही व्यापक हो जाएगा; इस साधन से हम उन स्थानों में संचार-संपर्क बना सकेंगे जहाँ वर्तमान में यह असंभव प्रतीत होता है ...इन संरचनाओं के रूप में अत्यधिक सुरुचि होगी, जो सदैव संतुलन के प्राकृतिक नियमों द्वारा निर्धारित होगी; यदि किसी प्रतिभाशाली अभियंता द्वारा अभिकल्पित हों तो वे राजधानियों के सौंदर्यवर्धन में भी योगदान कर सकती हैं, अथवा गहरी घाटियों के आर-पार निलंबित होकर पर्वतीय क्षेत्रों के रमणीय परिवेश में अत्यंत प्रभावशाली दृश्य उत्पन्न कर सकती हैं। ये निर्माण कल्पना के समक्ष मानव-कला की

समीक्षा प्रति

> उस शक्ति का दर्शन प्रस्तुत करेंगे जो लोकहित के लिए प्रकृति द्वारा खड़ी की गई और लंबे समय से अजेय मानी गई बड़ी बाधाओं पर विजय पाती है।
>
> Picon, 1988 *"Navier and the introduction of suspension bridges in France"*



चित्र 6.17: देशज जनों के आदिम रस्सी-सेतुओं से लेकर टेल्फर्ड के मेनाइ ब्रिज तक, नाविए द्वारा निलंबन-सेतुओं का निरूपण (Picon, 1988)

नाविए के लिए अपने सिद्धांतों को व्यवहार में उतारने का समय आया और उन्होंने पेरिस में सेन नदी पर, लेज़ आंवालिद के सामने, एक निलंबन-सेतु की परियोजना प्रस्तावित की, जिसे वे अपने सैद्धांतिक अनुसंधानों का अनुप्रयोग मानते थे। सेतु में मिस्री शैली के स्तंभ होने थे, जिनका व्यास 3 m और ऊँचाई लगभग 15 m होती; वे 170 m की दूरी पर स्थित होते और उनके ऊपर से शृंखलाएँ गुजरतीं, जिनमें से प्रत्येक आयताकार पिटवाँ-लोहे की कड़ियों की नौ पंक्तियों से बनती। इन शृंखलाओं को 9.5 m चौड़ा और लगभग 600 tonnes भार वाला मंच वहन करना था। यह एक महत्त्वाकांक्षी परियोजना थी, जिसका पैमाना लगभग टेल्फर्ड के मेनाइ ब्रिज के बराबर था। इसे 1823 में *Ponts et Chaussées* के अधिकारियों ने स्वीकृति दी। नाविए ने दावा किया कि उन्होंने सिद्धांत और व्यवहार के बीच के उस विभाजन का निर्णायक समाधान कर दिया है जो "*Ponts et Chaussées* जैसी प्रबुद्ध संस्था के योग्य नहीं" था (Picon, 1988)।

वास्तव में इस स्थान पर सेतु की कोई तात्कालिक आवश्यकता नहीं थी, जैसी पूर्वी पेरिस में थी। इसके बजाय नाविए भव्यता और सौंदर्य चाहते थे—एक ऐसा निर्माण जो फ्रांस की *gloire* और उनके प्रिय *Corps des Ponts et Chaussées* की प्रतिष्ठा बढ़ाए। वे यह प्रदर्शित करना चाहते थे कि सुंदर सेतु लोहे से, पत्थर के स्थान पर, बनाया जा सकता है और यह भी कि उसे सैद्धांतिक विश्लेषण के निर्देशों के अनुसार बनाया जा सकता है। जैसा उन्होंने लिखा,

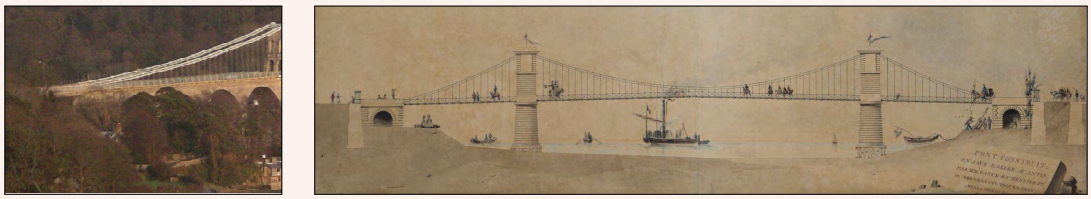
> शाँज़ एलिज़े के लिए सेतु बनाने की कोई तात्कालिक आवश्यकता नहीं है ...किंतु यदि इसे बनाने की इच्छा हो, तो इसे एक स्मारक बनाया जाए ...इसकी व्यवस्था की गणना ऐसा निर्माण बनाने के विचार से की जाए जिसे कलाकारों की स्वीकृति मिले, जो जनता को प्रिय हो और प्रशासन के लिए सम्मानजनक हो।
>
> ...यह अध्ययन (निलंबन-सेतुओं का) हाल के समय में गणितीय विश्लेषण में हुई प्रगति तथा उन संस्थानों के बिना संभव नहीं होता जिनके माध्यम से लोक-निर्माण के निर्देशन का दायित्व सँभालने वालों को गणित के सर्वाधिक उन्नत विचारों से परिचित कराया जाता है।
>
> Navier, 1823 *Rapport à Monsieur le Ministre de l'Intérieur sur le projet d'un pont suspendu à établir au port des Champs-Élysées*

अतः 1823 में नाविए ने *Corps des Ponts et Chaussées* में अपने वरिष्ठों के समक्ष अत्यंत सूक्ष्म योजनाएँ प्रस्तुत कीं। प्रत्येक विवरण सैद्धांतिक विश्लेषण के आधार पर अभिकल्पित था और नाविए का आत्मविश्वास इतना था कि उन्होंने "अतिनिर्माण" की सामान्य अभियांत्रिकी प्रथा, अर्थात् सुरक्षा गुणक जोड़ने, का सहारा नहीं लिया। ऐसा आत्मविश्वास आज

प्रारूप पाठ्यसामग्री

अकल्पनीय होगा; आधुनिक संहिताओं में विश्वसनीयता सूचकांकों के अनुरूप सुरक्षा गुणक अंतर्निहित होते हैं[51]। विशेषज्ञों की एक समिति ने नाविए की परियोजना पर अत्यंत अनुकूल प्रतिवेदन दिया और विश्वास व्यक्त किया कि "सिद्धांत सर्वत्र व्यवहार को प्रकाशित करता है" (Cannone and Friedlander, 2003)। यह प्रसंग आरंभिक अभियांत्रिकी विज्ञान की संभावना और संकट, दोनों को स्पष्ट करता है: *व्यावहारिक अनिश्चितताओं की अपूर्ण समझ के साथ संयुक्त गणितीय विश्लेषण की शक्ति*[52]।

सेतु लगभग पूरा हो चुका था जब शृंखला-लंगरन गर्तों में हल्की गति दिखाई दी। 6–7 सितंबर 1826 की रात नगर की 0.32 m व्यास वाली जल-नलिका के टूटने से शाँज़-एलिज़े की ओर यह गति और बढ़ गई। शैयो जलाशयों से 30 m दाबोच्चता के अधीन निकली जलधारा ने अधूरी खुदाइयों के पास एक जलाशय बना दिया और पहले ही पूर्ण हो चुके मृदा-कार्यों में अंतःस्यंदन उत्पन्न किया। पाड स्थापित किया गया, किंतु ऊँचे ज्वार, शीतकालीन पाला और वित्तीय चिंताओं ने लंगरनों के आपात सुदृढीकरण में विलंब किया। मरम्मत अगले मौसम तक स्थगित करने तथा डेक और शृंखलाएँ खोलने का निर्णय लिया गया। अंततः पूर्ण किया गया कार्य ध्वस्त कर दिया गया (Cannone and Friedlander, 2003)। अतः विफलता संरचनात्मक नहीं, बल्कि भू-तकनीकी थी[53]। यह विफलता स्मरण कराती है कि अत्यंत परिष्कृत संरचनात्मक विश्लेषण भी उतना ही अच्छा होता है जितनी नींवों और पर्यावरणीय दशाओं सहित संपूर्ण निकाय की समझ।



(a) टेल्फर्ड का एक सेतु (मेनाइ पर)

(b) नाविए का प्रस्तावित पों देज़ आंवालिद

चित्र 6.18: नाविए और टेल्फर्ड (सेतु)

समाचार-पत्रों में Corps के विरुद्ध व्यंग्यपूर्ण लेख प्रकाशित हुए और नाविए को "वह प्रख्यात वैज्ञानिक जिसकी गणनाएँ पेरिस में विफल हो जाती हैं" कहा गया। *Pont des Invalides* की दुर्घटना के तकनीकी और वित्तीय परिणामों की जाँच के लिए एक सरकारी समिति गठित की गई। ब्रिटिश और अमेरिकी अभियांत्रिकी प्रतिष्ठानों की तुलना में सिद्धांत से अत्यधिक आसक्त तथा अत्यधिक निरंकुश और अभिजनवादी होने के लिए Corps की आलोचना की गई। यह सुझाव दिया गया कि यदि प्रत्यालंब एक "छोटी दुर्घटना" सहन नहीं कर सके, तो शृंखलाएँ उनके लिए अत्यधिक भारी रही होंगी। इसके विपरीत ब्रिटिश सेतु-निर्माताओं की श्रेष्ठ उपलब्धियों की प्रशंसा इसलिए की गई कि उन्होंने समस्या का "गणितीकरण" नहीं किया था। नाविए की विफलता के परिणाम अभियांत्रिकी के सैद्धांतिक और अनुभवजन्य दृष्टिकोणों के बीच जारी तनाव को दर्शाते हैं; यह वाद-विवाद आज भी विभिन्न रूपों में चलता है।

वास्तव में सैद्धांतिक विद्वान/गणितज्ञ से सेतु-निर्माता तक नाविए की यात्रा की तुलना अधिक व्यावहारिक मार्ग से होना अपरिहार्य है।

[51] §36.3 में विवेचित, कम-से-कम 3 के बराबर

[52] संरचनात्मक अभियांत्रिकी के उदाहरणों में 1940 का टैकोमा नैरोज़ ब्रिज पतन, 2000 के लंदन मिलेनियम ब्रिज की पार्श्व कंपन समस्या और 1978 में सिटीकॉर्प सेंटर का चतुर्थांश-पवन पुनःसंयोजन सम्मिलित हैं।

[53] नाविए का मामला अद्वितीय नहीं है। मोइसेफ का निधन टैकोमा नैरोज़ निलंबन-सेतु के पूर्ण होने और ढहने (1940) के तीन वर्ष बाद हुआ। फ्रांस में नाविए के सेतु-दुर्घटना के 100 वर्ष बाद, महान *Polytechnicien* अभियंता आँद्रé क्वान द्वारा अभिकल्पित मालपासे बाँध विफल हुआ (तब तक वे लगभग 100 बाँध अभिकल्पित कर चुके थे); पुनः यह संरचनात्मक विफलता नहीं, बल्कि शैल-स्खलन था, जिसमें 423 लोग मारे गए। क्वान इस दुर्घटना से गहराई से प्रभावित हुए और छह महीने बाद उनका निधन हो गया (Londe, 1987)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.7.4 ज्याँ ल रों द’आलाँबेर (1717–1783)

ज्याँ ल रों द’आलाँबेर का जन्म 1717 में पेरिस में हुआ और शैशवावस्था में उन्हें सेंट-ज्याँ-ल-रों गिरजाघर की सीढ़ियों पर छोड़ दिया गया था, जहाँ से उन्होंने अपना नाम लिया। उनका पालन-पोषण एक धाय-परिवार ने किया और बाद में उनके जैविक पिता, जो एक तोपखाना अधिकारी थे, ने विवेकपूर्ण ढंग से उन्हें आर्थिक सहायता दी। द’आलाँबेर ने Collège des Quatre-Nations (Collège Mazarin) में कठोर शिक्षा प्राप्त की, जहाँ उन्हें गणित, दर्शन और विज्ञानों का प्रशिक्षण मिला। यद्यपि आरंभ में उन्हें धर्मशास्त्र और विधि की ओर निर्देशित किया गया था, वे शीघ्र ही निर्णायक रूप से गणित की ओर मुड़े और औपचारिक अकादमिक संरचनाओं से मुख्यतः बाहर रहकर वैज्ञानिक अन्वेषण किया। इस अपरंपरागत मार्ग ने उनकी वैचारिक स्वतंत्रता और परंपरा की तुलना में अमूर्त तर्क पर उनके बल को पोषित किया।

गतिकी और संतुलन में न्यूनीकरण ज्याँ ल रों द’आलाँबेर प्रबोधन-युग के एक निर्णायक चिंतक थे, जिनके कार्य ने यांत्रिकी को ज्यामितीय और बल-चालित ढाँचे से अमूर्त सिद्धांतों पर आधारित ढाँचे में रूपांतरित करने में सहायता की। अपने *Traité de Dynamique*, (d’Alembert, 1743 📄) में उन्होंने वह सिद्धांत प्रस्तुत किया जिसे अब d’Alembert’s principle कहा जाता है। इस सिद्धांत के अनुसार सभी आभासी विस्थापनों के लिए प्रयुक्त बलों और विपरीत चिह्न सहित जड़त्वीय बलों का योग शून्य होना चाहिए। जड़त्व को एक काल्पनिक बल के रूप में सम्मिलित करके द’आलाँबेर ने न्यूटन के द्वितीय नियम को संतुलन की एक दशा में पुनःरूपित किया।

> *विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §35.3.1 देखें*

यह पुनःसंरचना अत्यंत गहन थी। इसने गति की समस्याओं को स्थैतिकी के औपचारिक रूप से समतुल्य प्रश्नों में बदल दिया, जिससे आभासी कार्य और संतुलन की विधियों को गतिकी पर लागू करना संभव हुआ। इस प्रकार द’आलाँबेर ने न्यूटनीय यांत्रिकी और बाद में लाग्राँज द्वारा औपचारिकीकृत विश्लेषणात्मक यांत्रिकी के बीच एक वैचारिक सेतु प्रदान किया। अतः *Traité de Dynamique* आभासी कार्य-विधियों, सामान्यीकृत निर्देशांकों और उन ऊर्जा-सिद्धांतों के विकास का एक आधारभूत ग्रंथ है जो उन्नीसवीं शताब्दी की यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण में प्रमुख बने।

Encyclopédie और बुद्धिवादी कार्यक्रम द’आलाँबेर *Encyclopédie* के भी प्रमुख योगदानकर्ता थे और उसके गणितीय तथा वैज्ञानिक लेखों के सह-संपादक (दिदरो के साथ) रहे। इस भूमिका में वे अठारहवीं शताब्दी के फ्रांस में बुद्धिवाद और वैज्ञानिक औपचारिकतावाद के अग्रणी स्वरों में से एक बने। स्पष्टता, अमूर्तन और गणितीय संरचना पर उनके आग्रह ने यांत्रिकी को अनुभवजन्य नियमों के संग्रह के स्थान पर निगमनात्मक विज्ञान के रूप में प्रस्तुत करने की शैली को आकार दिया। *Encyclopédie* के माध्यम से द’आलाँबेर ने गणितीय यांत्रिकी को व्यापक बौद्धिक पाठक-वर्ग तक पहुँचाने में सहायता की और प्रबोधन की सांस्कृतिक संरचना में वैज्ञानिक तर्क को अंतर्निहित किया।

कंपन और तरंग-संचरण गतिकी से परे द’आलाँबेर ने कंपन-सिद्धांत में युगांतरकारी योगदान किए। कंपित तंत्री के उनके विश्लेषण से एक-विमीय तरंग-समीकरण का सूत्रीकरण हुआ, जो गणितीय भौतिकी के सबसे आरंभिक और महत्त्वपूर्ण आंशिक अवकल समीकरणों में से एक है। यद्यपि उनका कार्य आरंभ में विवादास्पद था—विशेषतः सीमा-दशाओं और स्वीकार्य हलों के प्रश्नों को लेकर—तरंग-संचरण पर उनके कार्य ने प्रत्यास्थता, ध्वनिकी और संरचनात्मक गतिकी के बाद के विकासों की आधारभूमि तैयार की, जहाँ तरंग-समीकरण तंत्रियों, धरनों, प्लेटों और सातत्यकों के कंपन को नियंत्रित करते हैं।

यांत्रिकी के विकास में स्थान यद्यपि द’आलाँबेर की शैली लाग्राँज की अपेक्षा कम व्यवस्थित और व्यापक थी, उनके वैचारिक नवाचार उन्हें न्यूटनीय यांत्रिकी और आधुनिक विश्लेषणात्मक यांत्रिकी के बीच एक महत्त्वपूर्ण संक्रमणकारी व्यक्तित्व बनाते हैं। उन्होंने जड़त्व की भूमिका स्पष्ट की, गतिकी के संतुलन में न्यूनीकरण को औपचारिक रूप दिया और ऐसी गणितीय संरचनाएँ प्रस्तुत कीं जो प्रत्यास्थता तथा कंपन के बाद के सिद्धांतों के लिए अपरिहार्य बनीं। अपने तकनीकी कार्य और *Encyclopédie* में अपनी संपादकीय भूमिका, दोनों के माध्यम से द’आलाँबेर ने यांत्रिकी को एक बुद्धिसंगत, अमूर्त और सार्वत्रिक रूप से प्रयोज्य विज्ञान के रूप में स्थापित करने में सहायता की।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.7.5 जोज़ेफ-लुई लाग्राँज (1736–1813)

जोज़ेफ-लुई लाग्राँज का जन्म 1736 में ट्यूरिन में हुआ था, जो उस समय सार्डिनिया राज्य का भाग था। उनके पिता एक सरकारी पद पर थे, जिससे आरंभ में आर्थिक सुरक्षा मिली, किंतु बाद में परिवार की संपत्ति घट गई और सामाजिक प्रतिष्ठा के स्थान पर बौद्धिक उपलब्धि पर लाग्राँज की निर्भरता और दृढ हुई। यद्यपि पहले उनके लिए विधिक अथवा प्रशासनिक कार्यजीवन की कल्पना की गई थी, युवा अवस्था में गैलीलियो, न्यूटन और ऑयलर के कार्यों का स्वतंत्र अध्ययन करने के बाद लाग्राँज निर्णायक रूप से गणित की ओर मुड़े। उल्लेखनीय है कि उच्च गणित में वे मुख्यतः स्वशिक्षित थे और उन्होंने किसी औपचारिक विद्यालय अथवा स्थापित परंपरा से बाहर रहकर अपने विचार विकसित किए।

उन्नीस वर्ष की आयु में लाग्राँज ने ऑयलर को पत्र लिखकर परिवर्तन-कलन में अपने आरंभिक परिणामों का वर्णन किया। ऑयलर ने तुरंत उनकी प्रतिभा पहचानी और मार्गदर्शक तथा समर्थक, दोनों बने; इससे यूरोपीय वैज्ञानिक समुदाय में लाग्राँज की तीव्र उन्नति में सहायता मिली। युग के सर्वोच्च विश्लेषक के प्रोत्साहन के साथ संयुक्त इस आरंभिक स्वतंत्रता ने ज्यामितीय अथवा प्रायोगिक तर्क की तुलना में अमूर्त विवेचन और सामान्य विधियों के प्रति लाग्राँज की आजीवन वरीयता को आकार दिया।

विश्लेषणात्मक यांत्रिकी और बल का उन्मूलन जोज़ेफ-लुई लाग्राँज ने अपने युगांतरकारी ग्रंथ *Mécanique Analytique*, (Lagrange, 1788 📄) के माध्यम से यांत्रिकी की आधारभूत पुनःसंरचना की; इसमें उन्होंने बल की संकल्पना को आदिम राशि के रूप में समाप्त कर संपूर्ण सिद्धांत को आभासी कार्य और ऊर्जा के सिद्धांतों पर निर्मित किया। सामान्यीकृत निर्देशांक और परिवर्तनात्मक विधियाँ प्रस्तुत करके लाग्राँज ने एक ऐसा ढाँचा विकसित किया जो जटिल यांत्रिक निकायों पर, चाहे स्थैतिकी में हों अथवा गतिकी में, समान रूप से लागू होता था। यह दृष्टिकोण यांत्रिकी के चरम *mathematization* का प्रतिनिधि था, जिसमें सभी भौतिक समस्याएँ विश्लेषणात्मक ज्यामिति और कलन के अभ्यासों में घटा दी गईं।

बलों, आरेखों और ज्यामितीय रचनाओं पर आधारित न्यूटनीय यांत्रिकी के विपरीत लाग्राँज के सूत्रीकरण में केवल अदिश राशियों, निर्देशांकों और अवकलजों की आवश्यकता थी। अवरोधों को, चाहे वे समाकलनीय हों अथवा नहीं, ज्यामितीय कौशल से हल करने के स्थान पर सामान्यीकृत निर्देशांकों के माध्यम से व्यवस्थित ढंग से सम्मिलित किया गया। इस अमूर्तन ने अभूतपूर्व जटिलता की समस्याओं को वैचारिक स्पष्टता और गणितीय मितव्ययिता के साथ हल करना संभव किया।

***Mécanique Analytique* और उसकी विरासत** लाग्राँज के दृष्टिकोण ने यांत्रिकी को शुद्ध गणित की एक शाखा के स्तर तक उठाया और हैमिल्टनी यांत्रिकी, क्षेत्र-सिद्धांत तथा आधुनिक विश्लेषणात्मक गतिकी सहित भौतिकी के बाद के विकासों की नींव रखी। *Mécanique Analytique* की प्रसिद्ध भूमिका घोषित करती है कि "इस ग्रंथ में कोई आकृति नहीं मिलेगी"; यह पद्धति का सुविचारित वक्तव्य था: भौतिक अंतर्दृष्टि को आरेखों के स्थान पर पूर्णतः समीकरणों में व्यक्त किया जाना था।

लाग्राँज के सूत्रीकरण आधुनिक सैद्धांतिक यांत्रिकी, अभियांत्रिकी गतिकी और नियंत्रण-सिद्धांत के केंद्रीय अंग बने हुए हैं। ऊर्जा-विधियाँ, सामान्यीकृत निर्देशांक और परिवर्तनात्मक सिद्धांत—जो अब गति तथा संतुलन के समीकरण निकालने के मानक साधन हैं—सीधे उनके कार्य से उद्भूत हैं। बीसवीं शताब्दी में यह विशुद्ध विश्लेषणात्मक दृष्टिकोण संगणकीय यांत्रिकी के साथ विशेष रूप से संगत सिद्ध हुआ, जहाँ भौतिक निकायों का निरूपण और समाधान ज्यामितीय रचना के स्थान पर समीकरणों के संख्यात्मक प्रचालन द्वारा किया जाता है।

लाग्राँज के वैज्ञानिक योगदानों के विषय में अधिक जानकारी §10.3.2.2 में दी गई है।

6.7.6 कोशी (ओगुस्तैं-लुई 1789–1857)

ओगुस्तैं-लुई कोशी का जन्म फ्रांसीसी क्रांति के आरंभ में, 1789 में पेरिस में हुआ था। उन्होंने अपना गणितीय शिक्षण नवस्थापित *École Polytechnique* में प्राप्त किया, जिसे उन्नत विश्लेषण में प्रशिक्षित अभियंता राज्य को उपलब्ध कराने के स्पष्ट उद्देश्य से बनाया गया था। कोशी ने अपनी असाधारण विश्लेषणात्मक क्षमताओं से शीघ्र ही विशिष्टता प्राप्त की और जल्द ही गणित, यांत्रिकी तथा लोक-सेवा को संयुक्त करने वाला अकादमिक कार्यजीवन अपनाया। उनके निर्माणकारी वर्ष फ्रांस में यांत्रिकी के व्यापक रूपांतरण के साथ घटित हुए, जिसमें दृढ विश्लेषण को भौतिक सिद्धांत की उचित आधारभूमि के रूप में उत्तरोत्तर अधिक महत्त्व दिया जा रहा था।

समीक्षा प्रति

किसी बिंदु पर प्रतिबल और यांत्रिकी का स्थानीय दृष्टिकोण ओगुस्तैं-लुई कोशी ने गणित और सैद्धांतिक यांत्रिकी में गहन योगदान किए तथा प्रत्यास्थता और सातत्यक यांत्रिकी की विश्लेषणात्मक आधारभूमि को मूलतः नया रूप दिया। उनका केंद्रीय यांत्रिक योगदान *stress at a point* की संकल्पना प्रस्तुत करना था। कोशी से पहले यांत्रिकीविद् संपूर्ण अनुप्रस्थ काटों पर कार्य करने वाले बलों का विश्लेषण करते थे—जैसे किसी छड में कुल तनाव अथवा किसी स्तंभ में परिणामी संपीडन। कोशी ने इस समाकलीय दृष्टिकोण को स्थानीय दृष्टिकोण से प्रतिस्थापित किया और प्रतिबल को क्षेत्रफल के किसी बिंदु तक सिकुडने पर बल और क्षेत्रफल के अनुपात की सीमा के रूप में परिभाषित किया।

वैश्विक परिणामी बलों से बिंदुवार क्षेत्रों की ओर इस परिवर्तन ने किसी भी आकार के और किसी भी प्रकार से भारित पिंडों की आंतरिक बल-अवस्था को नियंत्रित करने वाले आंशिक अवकल समीकरणों—प्रत्यास्थता के मूलभूत समीकरणों—का सूत्रीकरण संभव किया। इस प्रकार यांत्रिकी बल-संतुलन तर्कों के संग्रह से स्थानीय नियमों द्वारा शासित क्षेत्र-सैद्धांतिक विषय में रूपांतरित हुई।

प्रतिबल प्रदिश और संतुलन एक महत्त्वपूर्ण अंतर्दृष्टि यह थी कि किसी बिंदु पर प्रतिबल को एक अदिश अथवा किसी सदिश से भी निरूपित नहीं किया जा सकता। इसके स्थान पर किसी बिंदु से होकर गुजरने वाली सतह पर कार्य करने वाला कर्षण, अर्थात् प्रति इकाई क्षेत्रफल बल, उस सतह के अभिविन्यास पर निर्भर करता है। कोशी ने प्रदर्शित किया कि यह निर्भरता रैखिक है: यदि तीन परस्पर लंबवत तलों पर कर्षण-सदिश ज्ञात हों, तो किसी भी तल पर कर्षण रैखिक रूपांतरण द्वारा निर्धारित किया जा सकता है। यह परिणाम *stress tensor* को परिभाषित करता है—नौ घटकों वाला द्वितीय-कोटि प्रदिश, जिनमें से छह संतुलन-दशाओं के अंतर्गत स्वतंत्र होते हैं।

प्रतिबल-प्रदिश औपचारिकता ने उन परिघटनाओं को एकीकृत किया जो पहले परस्पर भिन्न प्रतीत होती थीं: तनाव, संपीडन, अपरूपण और जटिल प्रतिबल-अवस्थाओं में इनके संयोजन। कोशी ने विभिन्न निर्देशांक निकायों में प्रतिबल-घटकों को संबंधित करने वाले रूपांतरण नियम व्युत्पन्न किए, प्रमुख प्रतिबलों और प्रमुख दिशाओं की पहचान की तथा वे स्थानीय संतुलन-समीकरण स्थापित किए जिन्हें पूरे पिंड में प्रतिबल-क्षेत्रों को संतुष्ट करना होता है। इन विकासों ने आधुनिक सातत्यक यांत्रिकी की गणितीय नींव रखी।

प्रत्यास्थता से संगणन तक कोशी का ढाँचा आधुनिक संगणकीय यांत्रिकी का केंद्रीय अंग है। प्रत्येक परिमित अवयव विश्लेषण समाकलन-बिंदुओं पर प्रतिबल-प्रदिशों का मूल्यांकन करता है, उन्हें प्रमुख निर्देशांकों में रूपांतरित करता है और संघटनात्मक नियमों तथा विफलता-मानदंडों के आधार पर उनका आकलन करता है—ये प्रक्रियाएँ कोशी के सूत्रीकरण की प्रत्यक्ष उत्तराधिकारी हैं। उनके कार्य ने ठोस यांत्रिकी में संख्यात्मक विधियों के बाद के विकास के लिए आवश्यक भाषा और संरचना प्रदान की।

दृढता और विरासत प्रतिबल के अतिरिक्त कोशी ने विकृति-सिद्धांत, प्रतिबल को विरूपण से जोडने वाले संघटनात्मक संबंधों और गणितीय विश्लेषण की दृढ आधारभूमि में योगदान किया, जिसमें सीमाओं, अभिसरण और सम्मिश्र फलनों की परिशुद्ध परिभाषाएँ सम्मिलित थीं। तार्किक परिशुद्धता पर उनके आग्रह ने यांत्रिकी को प्राकृतिक दर्शन की एक शाखा से गणितीय विज्ञान में रूपांतरित किया। उनके द्वारा प्रस्तुत वैचारिक उपकरण—प्रतिबल और विकृति प्रदिश, संतुलन और संगतता समीकरण तथा संघटनात्मक संबंध—ठोस यांत्रिकी और संरचनात्मक अभियांत्रिकी की आधारभूमि बने हुए हैं।

कोशी के वैज्ञानिक योगदानों के विषय में अधिक जानकारी §10.3.2.4 में दी गई है।

6.7.7 जॉर्ज ग्रीन (1793–1841)

जॉर्ज ग्रीन का जन्म 1793 में इंग्लैंड के नॉटिंघम में एक साधारण साधन-संपन्न परिवार में हुआ था। उन्हें बहुत कम औपचारिक शिक्षा मिली और उन्होंने अपने जीवन का अधिकांश भाग चक्की चलाने वाले के रूप में अपने परिवार की पवनचक्की के संचालन में सहायता करते हुए बिताया। इसके बावजूद ग्रीन ने स्वतंत्र रूप से गणित का अध्ययन किया और उन्नत विश्लेषणात्मक ग्रंथों का मुख्यतः स्वयं अध्ययन किया। उनका वैज्ञानिक विकास अकादमिक संस्थानों से लगभग पूर्णतः अलग रहकर हुआ, जिससे उनके बाद के योगदान और भी उल्लेखनीय बनते हैं। जीवन के अंतिम चरण में ही ग्रीन ने कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय में प्रवेश लिया, जहाँ उनके पहले के कार्य को अंततः मान्यता मिली और वह गणित की मुख्यधारा में समाहित हुआ।

1828 का निबंध और विभव-सिद्धांत 1828 में स्थापित वैज्ञानिक समुदाय से बाहर कार्य करते हुए ग्रीन ने *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* शीर्षक का

समीक्षा प्रति

एक विलक्षण निबंध प्रकाशित किया। इस कार्य ने वे संकल्पनाएँ प्रस्तुत कीं जिन्हें अब ग्रीन प्रमेय और ग्रीन फलन कहा जाता है और जो गणितीय भौतिकी की आधारभूत संकल्पनाएँ बनीं।

यद्यपि निबंध का प्रतिपादन विभव-सिद्धांत के अंतर्गत था, उसके निहितार्थ विद्युत और चुंबकत्व से बहुत आगे तक विस्तृत थे। किसी प्रांत के भीतर क्षेत्र-मानों को उसकी सीमा पर मानों से संबंधित करने वाली समाकल सर्वसमिकाएँ प्रस्तुत करके ग्रीन ने सीमा-मान समस्याओं को हल करने की एक शक्तिशाली विधि दी। ये विचार न केवल स्थिरवैद्युतिकी में, बल्कि प्रत्यास्थता, तरल यांत्रिकी और ऊष्मा-चालन में भी आवश्यक सिद्ध हुए, जहाँ नियंत्रक समीकरणों की दीर्घवृत्तीय संरचना समान होती है।

ऊर्जा-विधियाँ और परिवर्तनात्मक परिप्रेक्ष्य ग्रीन के कार्य ने आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने के लिए ऊर्जा-आधारित और परिवर्तनात्मक परिप्रेक्ष्य को अंतर्निहित रूप से प्रस्तुत किया। हलों को समाकल संकारकों और कर्नेल फलनों के रूप में व्यक्त करके उन्होंने उन विधियों की आधारभूमि तैयार की जिन्हें बाद में टॉमसन (लॉर्ड केल्विन), रेले और अन्य विद्वानों ने प्रत्यास्थ ऊर्जा, स्थिरता तथा कंपन के अध्ययन में औपचारिक रूप दिया। उनके दृष्टिकोण ने प्रकट किया कि ऊर्जा और कार्य जैसी वैश्विक राशियों का उपयोग स्थानीय क्षेत्र-व्यवहार निर्धारित करने में कैसे किया जा सकता है; यह दृष्टि आधुनिक सातत्यक यांत्रिकी का केंद्रीय अंग है।

सीमा-विधियाँ और संगणकीय विरासत अपने जीवनकाल में केवल कुछ शोध-पत्र प्रकाशित करने के बावजूद ग्रीन की विरासत स्थायी है। ग्रीन फलन आज अभियांत्रिकी और भौतिकी की अनेक विश्लेषणात्मक तथा संख्यात्मक तकनीकों की रीढ़ हैं। विशेषतः आधुनिक सीमा-आधारित संगणकीय विधियाँ—इनमें सर्वाधिक उल्लेखनीय सीमा अवयव विधि (BEM) है—आयतन समस्याओं को समतुल्य सीमा-सूत्रीकरणों में रूपांतरित करने के लिए पूर्णतः ग्रीन की सर्वसमिकाओं पर निर्भर करती हैं। ऐसी विधियों का रैखिक प्रत्यास्थता, ध्वनिकी, विद्युतचुंबकत्व, विभंग यांत्रिकी और तरल गतिकी में व्यापक उपयोग होता है।

गणितीय भौतिकी की एकता ग्रीन का कार्य गणितीय भौतिकी की एकता का प्रभावशाली प्रदर्शन है: किसी एक भौतिक सिद्धांत के लिए विकसित तकनीकें प्रायः लगभग अपरिवर्तित रूप में अन्य सिद्धांतों में पुनः प्रकट होती हैं। उनका 1828 का निबंध उदाहरण देता है कि एकांत में विकसित और किसी संकीर्ण समस्या पर लागू गहरी गणितीय अंतर्दृष्टि भी संपूर्ण विषयों को कैसे आकार दे सकती है। अपने प्रस्तुत किए जाने के लगभग दो शताब्दियों बाद भी संरचनात्मक यांत्रिकी और संगणकीय विश्लेषण में ग्रीन के विचार अपरिहार्य हैं।

6.7.8 Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886)

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant का जन्म 1797 में फ्रांस के Villiers-en-Bière में हुआ था। सिविल अभियंता के रूप में प्रशिक्षित होकर उन्होंने *École des Ponts et Chaussées* में प्रवेश लिया, जहाँ दृढ़ गणितीय शिक्षण को व्यावहारिक अभियांत्रिकी-शिक्षा के साथ स्पष्ट रूप से जोड़ा गया था। विश्लेषणात्मक और निर्माणात्मक, इस दोहरी शिक्षा ने उनके पूरे कार्यजीवन को परिभाषित किया। विशुद्ध अकादमिक यांत्रिकीविदों के विपरीत सेंट-वेनाँ ने सिद्धांत और अनुप्रयोग के अंतरापृष्ठ पर कार्य किया और ऐसे सूत्रीकरण खोजे जो गणितीय रूप से सुदृढ़ होने के साथ कार्यरत अभियंताओं के लिए उपयोगी भी हों।

प्रत्यास्थता-सिद्धांत का व्यवस्थापन सेंट-वेनाँ अपने पूर्ववर्तियों, विशेषतः नाविए और कोशी, द्वारा विकसित प्रत्यास्थता-सिद्धांत के परिष्कार और व्यवस्थापन के लिए सर्वाधिक प्रसिद्ध हैं। उन्होंने पिंड-बलों और सीमा-दशाओं को स्पष्ट रूप से सम्मिलित करके प्रत्यास्थता-सिद्धांत की व्यापकता सुधारी और नाविए के मूल सूत्रीकरणों की सीमाओं का समाधान किया। इस प्रकार उन्होंने प्रत्यास्थता को गणितीय रूप से सुरुचिपूर्ण किंतु अपूर्ण सिद्धांत से वास्तविक अभियांत्रिकी समस्याओं पर लागू होने योग्य सुसंगत ढाँचे में रूपांतरित किया।

सेंट-वेनाँ ने अमूर्त सातत्यक यांत्रिकी और अभियांत्रिकी व्यवहार के बीच अत्यंत महत्त्वपूर्ण मध्यस्थ भूमिका निभाई। जटिल यांत्रिक संकल्पनाओं को अभियंताओं द्वारा सीधे लागू की जा सकने वाली कार्यपद्धतियों में रूपांतरित करके उन्होंने आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण की सैद्धांतिक आधारभूमि का बड़ा भाग स्थापित किया—ऐसी आधारभूमि जो आज भी अभियांत्रिकी व्यवहार का केंद्रीय अंग है।

प्रिज़्मीय छड़ों की ऐंठन और नमन सेंट-वेनाँ के सर्वाधिक प्रसिद्ध योगदान प्रिज़्मीय छड़ों की ऐंठन और नमन से संबंधित हैं। ऐंठन की समस्या—बलाघूर्ण के अधीन किसी छड़ में प्रतिबल-वितरण और ऐंठन-कोण का निर्धारण—वृत्त के अतिरिक्त

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अन्य अनुप्रस्थ काटों के लिए समाधान से परे रही थी। सेंट-वेनाँ ने प्रतिबल-फलनों पर आधारित एक सामान्य विधि विकसित की, जिसने आयताकार, दीर्घवृत्तीय और अन्य अवृत्तीय अनुप्रस्थ काटों के लिए समाधान संभव किए।

उनके परिणामों ने महत्त्वपूर्ण और अंतःप्रज्ञा-विरोधी परिघटनाएँ प्रकट कीं: आयताकार काट में अधिकतम अपरूपण प्रतिबल कोनों पर नहीं, बल्कि लंबी भुजाओं के मध्यबिंदु पर होता है; और पतली भित्ति वाले खुले काट बंद काटों की तुलना में ऐंठन में अत्यंत दुर्बल होते हैं। ये अंतर्दृष्टियाँ आधुनिक संरचनात्मक अभिकल्प के लिए आज भी प्रत्यक्ष रूप से प्रासंगिक हैं।

नमन में सेंट-वेनाँ ने नाविए के धरन-सिद्धांत को असममित काटों तक विस्तृत किया और दिखाया कि अपरूपण-केंद्र से न गुजरने वाले भार संयुक्त नमन और ऐंठन उत्पन्न करते हैं। उन्होंने भार लगाने के बिंदुओं के निकट और ज्यामितीय असांतत्यों पर प्रतिबल-संकेंद्रणों का विश्लेषण किया तथा दिखाया कि स्थानीय प्रतिबल-क्षेत्र प्राथमिक धरन-सिद्धांत के पूर्वानुमानों से उल्लेखनीय रूप से भिन्न हो सकते हैं। संकेंद्रित भारों के उनके समाधानों ने दिखाया कि ये स्थानीय प्रभाव भार से दूरी बढ़ने पर तेजी से क्षीण हो जाते हैं।

सेंट-वेनाँ का सिद्धांत इन प्रेक्षणों ने सेंट-वेनाँ के सिद्धांत को जन्म दिया, जो संभवतः उनका सर्वाधिक प्रभावशाली योगदान है। सिद्धांत के अनुसार किसी भारित क्षेत्र से पर्याप्त दूरी पर प्रतिबल-क्षेत्र केवल परिणामी बल और आघूर्ण पर निर्भर करता है, भार के विस्तृत वितरण पर नहीं।

इस सिद्धांत के गहरे व्यावहारिक परिणाम हैं: यह अभियंताओं को जटिल सीमा-दशाओं को स्थैतिक रूप से समतुल्य दशाओं से प्रतिस्थापित करने, भार-वितरणों की परिशुद्ध जानकारी के बिना संरचनाओं का विश्लेषण करने और यह विश्वास करने की अनुमति देता है कि आलंबों तथा संयोजनों के स्थानीय विवरण उन क्षेत्रों से दूर प्रतिबलों को उल्लेखनीय रूप से प्रभावित नहीं करते। सेंट-वेनाँ का सिद्धांत संरचनात्मक विश्लेषण की अनेक सरलीकारी मान्यताओं का आधार है और आदर्शीकृत सीमा-दशाओं के उपयोग को न्यायोचित ठहराता है।

संपादकीय कार्य और विरासत सेंट-वेनाँ ने नाविए के *Résumé* के तीसरे संस्करण का संपादन और व्यापक टिप्पणी भी की तथा प्रत्यास्थता पर क्लेब्श के ग्रंथ का अनुवाद किया; उसमें जोड़े गए उनके विपुल टिप्पण स्वयं मौलिक योगदान थे। उनके जीवनभर के कार्य ने प्रत्यास्थता को गणितीय रूप से परिष्कृत सिद्धांत से व्यावहारिक अभियांत्रिकी साधन में रूपांतरित कर दिया।

ऐंठन-दृढ़ता, नत धरनों में प्रतिबल-वितरण, अवृत्तीय काटों के वक्रण और उनके नाम वाले सिद्धांत के सूत्र आज भी संरचनात्मक अभियंताओं की दैनिक कार्य-भाषा का भाग हैं।

सेंट-वेनाँ के वैज्ञानिक योगदानों के विषय में अधिक जानकारी §10.3.2.8 में दी गई है।

6.8 एक विषय के रूप में संरचनात्मक अभियांत्रिकी का उदय

यह खंड एक विशिष्ट वैज्ञानिक और व्यावसायिक विषय के रूप में *structural engineering* के उद्भव को प्रतिबिंबित करता है। विश्लेषण और अभिकल्प की विधियों को औपचारिकीकृत किया गया तथा सिद्धांत और व्यवहार के संबंध को स्पष्ट किया गया। यहाँ संस्थानीकरण, संहिताकरण और विषयगत अस्मिता पर बल है।

6.8.1 कार्ल कुलमान (1821-1881)

आरंभिक जीवन और अभियांत्रिकी शिक्षा कार्ल कुलमान का जन्म 1821 में जर्मनी के पैलेटिनेट क्षेत्र के बर्गत्साबेर्न में हुआ था। उन्होंने कार्लज़्रूहे पॉलिटेक्निक में अभियंता के रूप में प्रशिक्षण प्राप्त किया, जहाँ उन्हें गणित, यांत्रिकी और व्यावहारिक निर्माण की कठोर शिक्षा मिली। आरंभ से ही कुलमान ने ज्यामितीय तर्क और दृश्य निरूपण के प्रति प्रबल झुकाव दिखाया तथा विशुद्ध बीजीय गणना की तुलना में अंतःप्रज्ञात्मक आलेखीय दृष्टिकोणों को वरीयता दी। गणितीय प्रशिक्षण को बड़े पैमाने के सिविल निर्माणों के अनुभव के साथ संयुक्त करने वाली इस निर्माणकारी पृष्ठभूमि ने संरचनात्मक विश्लेषण को दृढ़ और कार्यरत अभियंताओं के लिए तत्काल बोधगम्य, दोनों बनाने के उनके आजीवन प्रयास को आकार दिया।

समीक्षा प्रति

कुलमान ने (Culmann, 1866) आलेखीय स्थैतिकी को एक व्यवस्थित विषय के रूप में स्थापित किया और बिखरी हुई ज्यामितीय तकनीकों को संरचनात्मक विश्लेषण की एक व्यापक कार्यपद्धति में रूपांतरित किया। 1866 में ज़्यूरिख में प्रकाशित और 1875 में अत्यधिक विस्तारित द्वितीय संस्करण वाले उनके *Die Graphische Statik* (आलेखीय स्थैतिकी) ने ट्रसों, ढाँचों, मेहराबों और प्रतिधारक भित्तियों में बलों के विश्लेषण की ऐसी दृश्य विधियाँ स्थापित कीं जो लगभग एक शताब्दी तक अभियांत्रिकी व्यवहार में प्रमुख रहीं।

कुलमान ने कार्लज़्रूहे पॉलिटेक्निक में प्रशिक्षण प्राप्त किया और सेतु-अभियांत्रिकी का अध्ययन करने के लिए ब्रिटेन तथा संयुक्त राज्य अमेरिका (1849–1851) की यात्रा से पहले बवेरिया में रेलवे अभियंता के रूप में कार्य किया। अमेरिकी काष्ठ और लौह सेतुओं पर उनके प्रतिवेदन ने महाद्वीपीय यूरोप के अभियंताओं को अभिनव अमेरिकी प्रथाओं से परिचित कराया। 1855 में वे ज़्यूरिख के नवस्थापित Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) में अभियांत्रिकी विज्ञान के प्राध्यापक बने, जहाँ उन्होंने संरचनात्मक अभियांत्रिकी के यूरोप के अग्रणी कार्यक्रमों में से एक का निर्माण किया।

आलेखीय स्थैतिकी बल और ज्यामिति के द्वैत का उपयोग करती है: बलों को सदिशों के रूप में निरूपित किया जा सकता है, और संतुलन-दशाओं को बहुभुजों के बंद होने के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। कुलमान ने इन संबंधों को बल-बहुभुज, जो बलों के परिमाण और दिशाएँ दर्शाता है, तथा रज्जु-बहुभुज, जो उनकी क्रिया-रेखाएँ और अनुप्रयोग-बिंदु दर्शाता है, के माध्यम से व्यवस्थित किया। इन दोनों आरेखों—मैक्सवेल की शब्दावली में व्युत्क्रम आकृतियों—की परस्पर क्रिया बीजीय गणना के बिना जटिल संतुलन-समस्याओं का तीव्र समाधान संभव करती है।

ट्रस-विश्लेषण के लिए कुलमान की विधियों ने अभियंताओं को एक ही आरेख बनाकर सभी अवयव-बलों का आलेखीय निर्धारण करने दिया, जिसमें प्रत्येक अवयव उस रेखाखंड के अनुरूप होता है जिसकी लंबाई बल का परिमाण दर्शाती है। मेहराबों और केबलों के लिए रज्जु-बहुभुज सीधे प्रणोद-रेखा को निरूपित करता है, जिससे अभिकल्पक वक्र संरचनाओं में बलों के प्रवाह को देख सकते हैं। प्रतिधारक भित्तियों के लिए आलेखीय रचनाएँ मृदा-दाब और उनके अनुप्रयोग-बिंदु निर्धारित करती हैं। केवल परकार, सरलरेखा और पैमाने की आवश्यकता वाली ये विधियाँ औद्योगिक युग की जटिल संरचनाओं के लिए बीजीय गणना से कहीं अधिक तीव्र थीं।

कुलमान का प्रभाव विशिष्ट तकनीकों से आगे अभियांत्रिकी-शिक्षा के उस दर्शन तक विस्तृत था जिसमें ज्यामितीय अंतःप्रज्ञा और दृश्य तर्क पर बल दिया गया। उनके विद्यार्थियों और उत्तराधिकारियों—जिनमें आलेखीय परंपरा को आगे बढाने वाले विल्हेल्म रिटर और आइफ़ल टावर के अभिकल्प में इन विधियों को लागू करने वाले मॉरिस कोशलैं सम्मिलित थे—ने आलेखीय स्थैतिकी को पूरे यूरोप और विश्व में फैलाया। इलेक्ट्रॉनिक संगणकों द्वारा बीजीय दृष्टिकोण अधिक दक्ष बनाए जाने तक ये विधियाँ मानक व्यवहार बनी रहीं; आज भी आलेखीय तर्क संरचनात्मक व्यवहार में ऐसी अंतर्दृष्टि देता है जिसकी बराबरी विशुद्ध संगणन नहीं कर सकता। कुलमान ने प्रतिबल-क्षेत्रों के दृश्यीकरण में भी योगदान किया; धरनों में प्रमुख प्रतिबल-पथों के उनके आरेखों ने शरीररचनाविद् यूलियस वोल्फ के अस्थि-पुनर्निर्माण संबंधी कार्य को प्रेरित किया और वे आज भी संरचनात्मक अवयवों में बलों के प्रवाह को दर्शाने वाली पाठ्यपुस्तकों में दिखाई देते हैं।

6.8.2 विलियम जॉन मैक्कोर्न रैंकिन (1820-1872)

विलियम जॉन मैक्कोर्न रैंकिन का जन्म 1820 में स्कॉटलैंड के एडिनबरा में प्रबल तकनीकी और वैज्ञानिक रुचियों वाले परिवार में हुआ था। उन्होंने गणित अथवा भौतिकी में कोई औपचारिक विश्वविद्यालयी शिक्षा प्राप्त नहीं की; इसके स्थान पर वे मुख्यतः स्वशिक्षित थे और सिविल अभियांत्रिकी प्रशिक्षु के रूप में कार्य करते हुए स्वतंत्र रूप से उन्नत यांत्रिकी, गणित तथा ऊष्मागतिकी का अध्ययन करते थे। इस अपरंपरागत मार्ग ने यांत्रिकी के प्रति व्यावहारिक और संश्लेषणोन्मुख दृष्टिकोण को पोषित किया, जिसमें सैद्धांतिक सूत्रीकरण सदैव अभियांत्रिकी अनुप्रयोग से जुड़ा रहता था। कठोर स्वाध्याय के साथ संयुक्त वास्तविक निर्माण-समस्याओं के आरंभिक अनुभव ने यांत्रिकी को कार्यरत अभियंताओं के लिए सुसंगत और उपयोगी विज्ञान के रूप में प्रस्तुत करने के उनके आजीवन प्रयास को आकार दिया।

रैंकिन (Rankine, 1858) ऊष्मागतिकी विज्ञान के संस्थापकों में से एक और अंग्रेज़ी-भाषी विश्व में अभियांत्रिकी यांत्रिकी को एक दृढ विषय के रूप में स्थापित करने वाले निर्णायक व्यक्तित्व थे। पहली बार 1858 में प्रकाशित और अनेक संस्करणों में संशोधित उनके *Manual of Applied Mechanics* ने सैद्धांतिक यांत्रिकी और व्यावहारिक अभियांत्रिकी के बीच की खाई को पाटा तथा उन्नत गणितीय विधियों को कार्यरत अभियंताओं के लिए सुलभ रूपों में प्रस्तुत किया।

समीक्षा प्रति

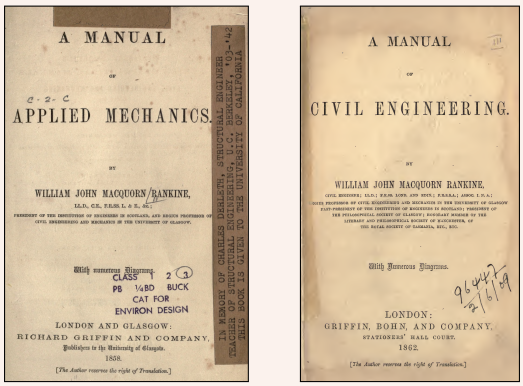
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रैंकिन गणित और भौतिकी में मुख्यतः स्वशिक्षित थे, फिर भी उन्होंने ऊष्मागतिकी (भाप इंजनों के लिए रैंकिन चक्र और रैंकिन तापमान पैमाना), मृदा यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण में आधारभूत योगदान किए। 1855 में ग्लासगो विश्वविद्यालय में सिविल अभियांत्रिकी और यांत्रिकी के रीजियस प्राध्यापक नियुक्त होकर उन्होंने अकादमिक दृढता को रेलवे, बंदरगाह और जलमार्ग परियोजनाओं से प्राप्त व्यावहारिक अभियांत्रिकी अनुभव के साथ संयोजित किया। अनुप्रयुक्त यांत्रिकी, सिविल अभियांत्रिकी, मशीनरी और भाप इंजन पर उनकी पाठ्यपुस्तकें पूरे अंग्रेज़ी-भाषी विश्व में मानक संदर्भ बनीं।

रैंकिन का मृदा-दाब सिद्धांत का सूत्रीकरण भू-तकनीकी और संरचनात्मक अभिकल्प में आज भी आधारभूत है। उन्होंने मृदा-पिंडों के सीमांत संतुलन का विश्लेषण कर आदर्शीकृत दशाओं में प्रतिधारक भित्तियों पर मृदा द्वारा लगाए जाने वाले सक्रिय और निष्क्रिय दाब निर्धारित किए। संसंजनहीन मृदा और समतलीय विफलता-सतहों की मान्यता से व्युत्पन्न रैंकिन के मृदा-दाब गुणांक प्रतिधारक भित्ति-अभिकल्प और ढाल-स्थिरता विश्लेषण का आरंभिक आधार देते हैं। यद्यपि बाद में कूलॉम के अधिक सामान्य पच्चर-सिद्धांत और आधुनिक सीमा-विश्लेषण विधियों ने इन्हें परिष्कृत किया, प्रारंभिक अभिकल्प में रैंकिन का दृष्टिकोण आज भी अभियंताओं का प्रथम साधन है।

Manual of Applied Mechanics ने पदार्थ-सामर्थ्य, संरचनात्मक स्थिरता और प्रत्यास्थता को अभियांत्रिकी-शिक्षा के एक सुसंगत ढाँचे में संश्लेषित किया। रैंकिन ने व्यावहारिक अनुप्रयोग पर ध्यान बनाए रखते हुए पदार्थ-यांत्रिकी, धरन-सिद्धांत, स्तंभ-व्याकुंचन तथा ढाँचों और मेहराबों का विश्लेषण गणितीय परिशुद्धता के साथ प्रस्तुत किया। ऊर्जा-विधियों का उनका विवेचन संरचनात्मक विश्लेषण के बाद के विकासों का पूर्वाभास था और मूलभूत सिद्धांतों की उनकी स्पष्ट व्याख्या ने ब्रिटिश परंपरा में प्रशिक्षित अभियंताओं की पीढ़ियों को प्रभावित किया।

यह रोचक है कि उस समय, जब यांत्रिकीविद् और कार्यरत सिविल अभियंता मुख्यतः एक साझा बौद्धिक ढाँचे में काम करते थे, रैंकिन ने *A Manual of Applied Mechanics* (Rankine, 1858 PDF) और *A Manual of Civil Engineering* (Rankine, 1862 PDF), आकृति 6.19, दोनों लिखे। इस प्रकार उन्होंने दृढ सिद्धांत और अभियांत्रिकी व्यवहार के ऐसे संश्लेषण का उदाहरण दिया जो वर्तमान विखंडन के ठीक विपरीत है, जहाँ दोनों समुदाय बहुत बार समानांतर किंतु दुर्बल रूप से जुडे मार्गों पर आगे बढते हैं।



(a) Rankine, 1858 PDF (b) Rankine, 1862 PDF

चित्र 6.19: अनुप्रयुक्त यांत्रिकी और सिविल अभियांत्रिकी के बीच सेतु बनाती रैंकिन की नियम-पुस्तकें

रैंकिन ने नौ-स्थापत्य में भी योगदान किया और पोतों की स्थिरता तथा दोलन-गति का विश्लेषण किया; उन्होंने ऊष्मागतिकी के उभरते विषय में भी योगदान दिया, जहाँ भाप के गुणों और ऊष्मा इंजनों की दक्षता पर उनका कार्य क्लॉज़ियस तथा केल्विन के कार्य के समानांतर था। सिविल, यांत्रिक और नौ-अभियांत्रिकी तक विस्तृत उनकी उल्लेखनीय व्यापकता अभियंता-वैज्ञानिक के विक्टोरियाई आदर्श का उदाहरण थी। रैंकिन के संश्लेषण ने अभियांत्रिकी को व्यावहारिक कला से पूर्णतः गणितीय विषय के स्तर तक उठाने में सहायता की और औद्योगिक युग की महान अभियांत्रिकी उपलब्धियों को सहारा देने वाली सैद्धांतिक आधारभूमि स्थापित की।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.8.3 क्रिश्चियन ओटो मोहर (1835–1918)

क्रिश्चियन ओटो मोहर का जन्म 1835 में होल्स्टाइन डची के वेसेलब्यूरेन में हुआ था। उन्होंने हनोवर के पॉलिटेक्निक स्कूल में कठोर तकनीकी शिक्षा प्राप्त की, जहाँ गणित, यांत्रिकी और व्यावहारिक अभियांत्रिकी को निकटता से एकीकृत किया गया था। अपने कार्यजीवन के आरंभ में मोहर ने रेलवे अभियंता के रूप में कार्य किया और वास्तविक भार-दशाओं के अधीन सेतुओं, मृदा-कार्यों और संरचनात्मक निकायों का प्रत्यक्ष अनुभव प्राप्त किया। विश्लेषणात्मक प्रशिक्षण और व्यावहारिक अभियांत्रिकी अनुभव के इस संयोजन ने यांत्रिकी के प्रति उनके विशिष्ट दृष्टिकोण को आकार दिया, जो स्पष्टता, व्यापकता और संरचनात्मक अभिकल्प में प्रत्यक्ष प्रयोज्यता चाहता था।

मोहर ने (Mohr, 1874) संरचनात्मक विश्लेषण में ऐसे आधारभूत योगदान किए जो आज भी अभियांत्रिकी व्यवहार के केंद्रीय अंग हैं; उन्होंने आलेखीय और विश्लेषणात्मक, दोनों प्रकार के ऐसे साधन विकसित किए जिनका उपयोग अभियंता उनके प्रस्तुत किए जाने के एक शताब्दी से अधिक समय बाद भी प्रतिदिन करते हैं। उनका कार्य प्रतिबल-विश्लेषण, विस्थापन-गणना, प्रभाव-रेखाओं और विफलता-मानदंडों तक विस्तृत है—संरचनात्मक यांत्रिकी के इतिहास में योगदान की ऐसी व्यापकता बहुत कम व्यक्तियों में मिलती है।

मोहर ने हनोवर के पॉलिटेक्निक स्कूल में अध्ययन किया और 1867 में स्टुटगार्ट पॉलिटेक्निक तथा बाद में 1873 में ड्रेस्डेन पॉलिटेक्निक में प्राध्यापक बनने से पहले रेलवे अभियंता के रूप में कार्य किया; ड्रेस्डेन में वे 1900 में अपनी सेवानिवृत्ति तक रहे। उनके शिक्षण और शोध ने ड्रेस्डेन को जर्मनी में संरचनात्मक अभियांत्रिकी-शिक्षा का एक अग्रणी केंद्र बनाया।

मोहर वृत्त (1882) प्रतिबल-रूपांतरण का सुरुचिपूर्ण आलेखीय निरूपण देता है। किन्हीं दो परस्पर लंबवत तलों पर प्रतिबल-घटक ज्ञात होने पर मोहर ने दिखाया कि किसी बिंदु से होकर गुजरने वाले सभी संभावित तलों पर प्रतिबलों को σ-τ तल में एक वृत्त के बिंदुओं द्वारा निरूपित किया जा सकता है। वृत्त की ज्यामिति तुरंत प्रमुख प्रतिबलों, अर्थात् क्षैतिज अक्ष पर चरम बिंदुओं, अधिकतम अपरूपण प्रतिबल, अर्थात् वृत्त की त्रिज्या, और इन निर्णायक तलों के अभिविन्यासों को प्रकट करती है। आज भी प्रत्येक आरंभिक यांत्रिकी पाठ्यक्रम में पढाया जाने वाला यह दृश्यीकरण अमूर्त प्रदिश-रूपांतरणों को अंतःप्रज्ञात्मक ज्यामितीय संबंधों में बदल देता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के लिए संभवतः अधिक महत्त्वपूर्ण यह था कि मोहर ने इकाई भार विधि, जिसे छद्म भार विधि अथवा मैक्सवेल-मोहर विधि भी कहते हैं, विकसित की; यह आभासी कार्य-सिद्धांत लागू करके संरचनाओं में विस्थापनों की व्यवस्थित गणना करती है। किसी बिंदु पर विस्थापन ज्ञात करने के लिए उस बिंदु पर एक काल्पनिक इकाई भार लगाया जाता है, उससे उत्पन्न आंतरिक बल निर्धारित किए जाते हैं, जो इकाई भार के साथ संतुलन में तो होते हैं किंतु आवश्यक नहीं कि संगत हों, और इन “आभासी” बलों तथा पूरी संरचना में वास्तविक विरूपणों के गुणनफल का समाकलन किया जाता है। सैद्धांतिक रूप से निर्धार्य और अनिर्धार्य, दोनों प्रकार की संरचनाओं पर लागू यह विधि संरचनात्मक विश्लेषण के नम्यता-दृष्टिकोण की आधारभूमि बनी।

मोहर ने प्रभाव-रेखाओं के सिद्धांत को भी आगे बढाया—ये ऐसे आरेख हैं जो दर्शाते हैं कि किसी संरचना पर इकाई भार के गति करने पर किसी बिंदु पर आंतरिक बल, प्रतिक्रियाएँ अथवा विस्थापन कैसे बदलते हैं। गतिशील भारों के अधीन सेतु-अभिकल्प के लिए आवश्यक प्रभाव-रेखा रचना के उनके व्यवस्थित विकास ने रेलवे और राजमार्ग सेतुओं का बुद्धिसंगत विश्लेषण संभव किया। फ्रांसीसी अभियंता विलियो के साथ विकसित विलियो-मोहर आरेख अवयव-दीर्घनों से ट्रस-विक्षेप निर्धारित करने की आलेखीय विधि देता है—यह तकनीक संरचनाओं के शुद्धगतिक व्यवहार को ऐसे रूप में प्रकट करती है जो विशुद्ध संख्यात्मक विधियाँ नहीं कर सकतीं।

भू-तकनीकी अभियांत्रिकी में मोहर के योगदान समान रूप से महत्त्वपूर्ण थे। मोहर-कूलॉम विफलता-मानदंड, जो प्रतिबल-अवस्थाओं के मोहर-निरूपण को मृदा के लिए कूलॉम के घर्षण-आधारित विफलता-नियम से जोडता है, आज भी मृदा और शैल-सामर्थ्य का मानक प्रतिरूप है। विफलता-आवरणों का उनका आलेखीय निरूपण इस बात का तीव्र आकलन संभव करता है कि कोई प्रतिबल-अवस्था विफलता उत्पन्न करेगी या नहीं—यह नींव-अभिकल्प, ढाल-स्थिरता विश्लेषण और प्रतिधारक भित्ति-गणनाओं के लिए आवश्यक है।

प्रारूप

6.8.4 हेनरी मोज़ली (1801–1872)

आरंभिक जीवन और गणितीय शिक्षा हेनरी मोज़ली का जन्म 1801 में लंदन में हुआ और उन्होंने कैम्ब्रिज के ट्रिनिटी कॉलेज में शिक्षा प्राप्त की, जहाँ उन्हें उस समय गणित का कठोर प्रशिक्षण मिला जब कैम्ब्रिज मैथेमैटिकल ट्राइपॉस ब्रिटिश विश्लेषणात्मक शिक्षा पर प्रभुत्व रखता था। ऐंग्लिकन पादरी के रूप में अभिषिक्त होने के बावजूद मोज़ली ने असाधारण तीव्रता से अनुप्रयुक्त गणित और यांत्रिकी का अनुसरण किया; यह उस काल को प्रतिबिंबित करता है जिसमें धार्मिक कर्तव्य और वैज्ञानिक अन्वेषण प्रायः साथ-साथ चलते थे। अमूर्त विश्लेषण और व्यावहारिक तर्क, दोनों से उनके आरंभिक परिचय ने गणितीय यांत्रिकी को अभियंताओं और वास्तुकारों के लिए उपयोगी रूपों में रूपांतरित करने को समर्पित कार्यजीवन को आकार दिया।

मोज़ली (Moseley, 1843) प्रत्यास्थता-सिद्धांत को व्यावहारिक संरचनात्मक समस्याओं पर व्यवस्थित रूप से लागू करने वाले आरंभिक विद्वानों में थे और उन्होंने ऐसी पाठ्यपुस्तक लिखी जिसने अभियंताओं की एक पीढ़ी को संरचनाओं के गणितीय विश्लेषण में प्रशिक्षित किया। 1843 में प्रकाशित उनके *Mechanical Principles of Engineering and Architecture* ने अंग्रेज़ी-भाषी अभियांत्रिकी-शिक्षा में महत्त्वपूर्ण प्रगति का प्रतिनिधित्व किया और धरन-नमन, स्तंभ-व्याकुंचन तथा मेहराब-विश्लेषण की दृढ़ विश्लेषणात्मक विधियाँ सुलभ रूप में प्रस्तुत कीं।

The Mechanical Principles ने किसी अंग्रेज़ी पाठ्यपुस्तक के लिए अभूतपूर्व गणितीय दृढ़ता के साथ संरचनाओं के विश्लेषण का विवेचन किया। मोज़ली ने प्रत्यास्थता के नवोदित सिद्धांत का उपयोग करके धरन-नमन का विवेचन किया और ऐसे विक्षेप-सूत्र तथा प्रतिबल-वितरण व्युत्पन्न किए जिनसे संरचनात्मक अवयवों का बुद्धिसंगत अनुपातीकरण संभव हुआ। स्तंभ-स्थिरता के उनके विश्लेषण ने ऑयलर के व्याकुंचन-सिद्धांत को व्यावहारिक अभिकल्प तक विस्तृत किया और वास्तविक स्तंभों में अनिवार्य रूप से उपस्थित अपूर्णताओं तथा उत्केंद्री भारण के प्रभावों पर विचार किया। चिनाई मेहराबों के लिए मोज़ली ने “न्यूनतम दाब का सिद्धांत” विकसित किया और प्रणोद-रेखा तथा मेहराब-ज्यामिति के बीच संबंध पर विचार करके खंडाश्म मेहराबों की स्थिरता का विश्लेषण किया।

पुस्तक का प्रभाव व्यापक और अंतरराष्ट्रीय था। इसे डेनिस हार्ट महान की अतिरिक्त टिप्पणियों सहित वेस्ट पॉइंट स्थित संयुक्त राज्य सैन्य अकादमी में पुनर्मुद्रित किया गया और यह अमेरिकी अभियांत्रिकी-शिक्षा का मानक ग्रंथ बना। जर्मन अनुवादों ने मोज़ली की विधियों को महाद्वीपीय यूरोप के पाठकों तक पहुँचाया। विस्तृत हल किए हुए उदाहरणों के साथ संयुक्त विश्लेषणात्मक तकनीकों की उनकी स्पष्ट व्याख्या ने अभियांत्रिकी पाठ्यपुस्तकों का वह प्रतिरूप स्थापित किया जो आज भी विद्यमान है।

मोज़ली की रुचियाँ संरचनाओं से आगे मशीनों की दक्षता, पोतों की स्थिरता और जलचक्रों की यांत्रिकी तक विस्तृत थीं। गतिक स्थिरता पर उनके कार्य—उस दशा का विश्लेषण जिसमें तैरते पिंड विक्षोभ के बाद संतुलन में लौटते हैं—ने नौ-स्थापत्य में योगदान किया। अपने पूरे कार्यजीवन में मोज़ली ने व्यावहारिक समस्याओं पर गणितीय विश्लेषण के अनुप्रयोग का उदाहरण दिया और संरचनात्मक अभियांत्रिकी को अनुभवजन्य नियमों द्वारा निर्देशित शिल्प से यांत्रिकी पर आधारित अनुप्रयुक्त विज्ञान में रूपांतरित करने में सहायता की। उन्हें उनके पौत्र, भौतिकशास्त्री हेनरी मोज़ली (1887–1915), से भ्रमित नहीं करना चाहिए, जिन्होंने गैलीपोली में अपनी मृत्यु से पहले परमाणु संख्या की संकल्पना स्थापित की थी।

6.8.5 जेम्स क्लर्क मैक्सवेल (1831–1879)

जेम्स क्लर्क मैक्सवेल का जन्म 1831 में स्कॉटलैंड के एडिनबरा में हुआ और वे ग्लेनलेयर स्थित अपने परिवार की ग्रामीण संपदा में पले-बढ़े। कम आयु से ही उन्होंने ज्यामिति और भौतिक तर्क की असाधारण क्षमता दिखाई तथा विद्यालयी छात्र रहते हुए मौलिक ज्यामितीय अन्वेषण किए। उन्होंने एडिनबरा विश्वविद्यालय और बाद में कैम्ब्रिज के ट्रिनिटी कॉलेज में शिक्षा प्राप्त की, जहाँ उन्हें गणित और प्राकृतिक दर्शन में सर्वोत्तम संभव प्रशिक्षण मिला। ज्यामिति, विश्लेषण और भौतिक अंतःप्रज्ञा में इस आरंभिक निमज्जन ने विविध भौतिक परिघटनाओं के पीछे गहरे संरचनात्मक संबंध खोजने की मैक्सवेल की आजीवन प्रवृत्ति को आकार दिया।

विद्युतचुंबकीय सिद्धांत के कारण इतिहास के महानतम भौतिकशास्त्रियों में प्रसिद्ध मैक्सवेल ने (Maxwell, 1890) ट्रस-विश्लेषण के लिए व्युत्क्रम आरेखों के विकास द्वारा संरचनात्मक यांत्रिकी में भी आधारभूत योगदान किए। उनके शोध-पत्र *On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces* (Maxwell, 1864a) (Maxwell, 1864c), जो 1864

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

में प्रकाशित हुआ, ने उन आलेखीय विधियों की सैद्धांतिक आधारभूमि स्थापित की जो दशकों तक संरचनात्मक विश्लेषण पर प्रभुत्व रखती थीं।



XLV. *On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces.* By J. Clerk Maxwell, *F.R.S., Professor of Natural Philosophy in King's College, London*‡.

RECIPROCAL figures are such that the properties of the first relative to the second are the same as those of the second relative to the first. Thus inverse figures and polar reciprocals are instances of two different kinds of reciprocity.

The kind of reciprocity which we have here to do with has reference to figures consisting of straight lines joining a system of points, and forming closed rectilinear figures; and it consists in the directions of all lines in the one figure having a constant relation to those of the lines in the other figure which correspond to them.

In plane figures, corresponding lines may be either parallel,

चित्र 6.20: जेम्स क्लर्क मैक्सवेल

मैक्सवेल ने एडिनबरा और कैम्ब्रिज में शिक्षा प्राप्त की, जहाँ उनकी असाधारण गणितीय क्षमताएँ तुरंत स्पष्ट हो गईं। उनके कार्यजीवन में एबरडीन, किंग्स कॉलेज लंदन और कैम्ब्रिज के पद सम्मिलित थे; कैम्ब्रिज में वे भौतिकी के प्रथम कैवेंडिश प्राध्यापक बने। विद्युत, चुंबकत्व और प्रकाश को एकीकृत करने वाले उनके विद्युतचुंबकीय समीकरण उनकी महानतम उपलब्धि हैं, किंतु संरचनात्मक यांत्रिकी, वर्ण-दृष्टि, ऊष्मागतिकी और गैसों के अणुगति सिद्धांत पर उनका कार्य उनकी प्रतिभा की उल्लेखनीय व्यापकता दर्शाता है।

मैक्सवेल के व्युत्क्रम आरेख बल-आरेखों और संरचनात्मक ज्यामिति के बीच एक मूलभूत द्वैत का उपयोग करते हैं। किसी ट्रस का विश्लेषण करते समय एक बल-आरेख बनाया जाता है जिसमें प्रत्येक बहुभुज संरचना की एक संधि के अनुरूप होता है और प्रत्येक रेखाखंड संलग्न संधियों को जोड़ने वाले किसी अवयव के बल को निरूपित करता है। मैक्सवेल ने दिखाया कि यह बल-आरेख संरचनात्मक आरेख का "व्युत्क्रम" है: एक में समानांतर रेखाएँ दूसरे में भी समानांतर होती हैं और उनके बीच संबंध परिशुद्ध ज्यामितीय नियमों द्वारा शासित होते हैं। यह व्युत्क्रमता एक ही आलेखीय रचना द्वारा सभी अवयव-बलों का एकसाथ निर्धारण संभव करती है।

इसका व्यावहारिक महत्त्व अत्यधिक था। जहाँ बीजीय विधियों में युगपत समीकरणों के निकायों को हल करना आवश्यक था—संगणक मशीनों से पहले यह श्रमसाध्य और त्रुटि-प्रवण था—वहीं मैक्सवेल के आरेखों ने अभियंताओं को ज्यामितीय रचना द्वारा जटिल ट्रसों में बल निर्धारित करने दिए। यह विधि 19वीं शताब्दी के सेतु और छत निर्माण में सामान्य स्थैतिक रूप से निर्धार्य ट्रसों के लिए विशेष रूप से उपयुक्त थी, जहाँ प्रत्येक अवयव-बल केवल संतुलन से निर्धारित किया जा सकता था।

मैक्सवेल का सैद्धांतिक विवेचन व्यावहारिक तकनीकों से आगे बढ़कर संरचनात्मक यांत्रिकी और प्रक्षेपी ज्यामिति के बीच गहरे संबंध स्थापित करता था। उन्होंने दिखाया कि जब भी कोई ढाँचा स्थैतिक रूप से निर्धार्य होता है, व्युत्क्रम आकृतियाँ विद्यमान होती हैं और ऐसे आरेखों के अस्तित्व तथा अद्वितीयता के मानदंड विकसित किए। उनके कार्य ने कुलमान की आलेखीय स्थैतिकी को प्रभावित किया और क्रेमोना ने इसका विस्तार किया; बल-आरेखों की रचना की उनकी व्यवस्थित प्रक्रिया उनके नाम से जानी जाती है (मैक्सवेल-क्रेमोना आरेख)।

मैक्सवेल ने व्युत्क्रम विस्थापनों के प्रमेय (मैक्सवेल का व्युत्क्रम प्रमेय) में भी योगदान दिया; इसके अनुसार किसी रैखिक प्रत्यास्थ संरचना में बिंदु B पर इकाई भार के कारण बिंदु A पर विस्थापन, बिंदु A पर इकाई भार के कारण बिंदु B पर विस्थापन के बराबर होता है। इस सरल दिखाई देने वाले परिणाम के गहरे निहितार्थ हैं: यह स्वतंत्र प्रभाव-गुणांकों की संख्या घटाता है, विश्लेषणात्मक प्रतिरूपों का प्रायोगिक सत्यापन संभव करता है और आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण में दृढता तथा नम्यता आव्यूहों की सममिति का आधार है (Maxwell, 1864c)। जब भी अभियंता प्रभाव-रेखाओं का उपयोग करते हैं अथवा अनिर्धार्य संरचनाओं पर नम्यता-विधि लागू करते हैं, मैक्सवेल का व्युत्क्रम प्रमेय प्रायः अंतर्निहित रूप से प्रयुक्त होता है।

प्रारूप पाठ्यसामग्री

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6.9 यांत्रिकी के प्रमुख इतिहास

यहाँ एकत्रित व्यक्तित्व स्वयं *history of mechanics* से अपने सरोकार के कारण एक-दूसरे से जुड़े हैं। नए सिद्धांत प्रस्तुत करने के स्थान पर उन्होंने पहले के विकासों का संश्लेषण और निर्वचन किया तथा यांत्रिकी को समझने और संप्रेषित करने की रीति को आकार दिया। उनके कार्य इस विषय को निरंतरता, परिप्रेक्ष्य और आलोचनात्मक संरचना प्रदान करते हैं।

6.9.1 आइज़क टॉडहंटर (1820–1884)

आइज़क टॉडहंटर (1820–1884) ने (Todhunter and Pearson, 1893 PDF) प्रत्यास्थता-सिद्धांत और पदार्थ-यांत्रिकी के विकास का अब तक लिखा गया सर्वाधिक व्यापक ऐतिहासिक विवरण प्रस्तुत किया। 1886 में मरणोपरांत प्रकाशित और कार्ल पियर्सन द्वारा 1893 तक विस्तारित उनका स्मारकीय ग्रंथ *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, from Galilei to the Present Time* उस प्रत्येक व्यक्ति के लिए अपरिहार्य संदर्भ बना हुआ है जो यह समझना चाहता है कि प्रत्यास्थता संरचनात्मक यांत्रिकी का मूलभूत ढाँचा कैसे बनी।

टॉडहंटर अद्भुत परिश्रम वाले कैम्ब्रिज गणितज्ञ थे और कलन, बीजगणित, त्रिकोणमिति तथा विश्लेषणात्मक स्थैतिकी पर उन पाठ्यपुस्तकों के लेखक थे जिन्होंने ब्रिटिश विद्यार्थियों की अनेक पीढ़ियों को प्रशिक्षित किया। किंतु उनका स्थायी योगदान उनके ऐतिहासिक कार्यों में निहित है: परिवर्तन-कलन, प्रायिकता-सिद्धांत और आकर्षण के गणितीय सिद्धांतों (गुरुत्वाकर्षण और विभव-सिद्धांत) के व्यापक सर्वेक्षण, जिनमें प्रत्येक गणितीय विचारों के विकास का अत्यंत संपूर्ण प्रलेखन करता है। उनकी मृत्यु पर अधूरा छूटा प्रत्यास्थता का इतिहास उनकी सबसे महत्त्वाकांक्षी परियोजना थी।

यह कार्य धरन-सामर्थ्य के गैलीलियो के अग्रणी विश्लेषण से लेकर नाविए, कोशी, पॉइसन, ग्रीन और सेंट-वेनाँ के दृढ़ विवेचनों तक गणितीय सूत्रीकरणों के विकास का सूक्ष्म प्रलेखन करता है। टॉडहंटर ने प्रायः लैटिन, फ्रांसीसी, जर्मन और इतालवी भाषाओं में लिखे मूल स्रोतों का विश्लेषण किया तथा सैकड़ों शोध-पत्रों और ग्रंथों की विषयवस्तु, विधियों और निष्कर्षों का सार प्रस्तुत किया। प्रत्यास्थ स्थिरांकों की संख्या, सीमा-दशाओं के सही सूत्रीकरण और प्रायोगिक परिणामों के निर्वचन से जुड़े विवादों के उनके विवरण उन सूक्ष्मताओं को सुरक्षित रखते हैं जो अन्यथा इतिहास में खो जातीं।

टॉडहंटर की मृत्यु के बाद कार्य को पूरा और विस्तृत करने वाले कार्ल पियर्सन (1857–1936) स्वयं एक महत्त्वपूर्ण व्यक्तित्व थे—बाद में गणितीय सांख्यिकी के संस्थापक के रूप में प्रसिद्ध हुए—और उन्होंने परियोजना में गणितीय परिष्कार तथा आलोचनात्मक निर्णय, दोनों जोड़े। पूर्ण इतिहास गैलीलियो (1638) से लॉर्ड केल्विन और 19वीं शताब्दी के उत्तरार्ध तक विस्तृत है तथा तीन खंडों में 2,500 से अधिक पृष्ठ भरता है। विशेषतः प्रत्यास्थता के आणविक सिद्धांतों और ब्रिटिश भौतिकशास्त्रियों के योगदानों पर पियर्सन के संपादकीय परिवर्धनों ने महाद्वीपीय यूरोपीय गणित के टॉडहंटर के विस्तृत विवेचन को पूरित किया।

यांत्रिकी और संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहासकारों के लिए टॉडहंटर और पियर्सन का कार्य किसी भी गंभीर अन्वेषण का आरंभिक बिंदु बना हुआ है। यह कार्य न केवल सफलताओं, बल्कि निष्फल मार्गों, प्राथमिकता-विवादों और अब स्पष्ट प्रतीत होने वाली संकल्पनाओं के क्रमिक स्पष्टीकरण का भी प्रलेखन करता है। यह प्रकट करता है कि प्रतिबल और विकृति का सिद्धांत—जिसे अब प्राथमिक विषयवस्तु के रूप में पढ़ाया जाता है—यूरोप के श्रेष्ठतम गणितीय मस्तिष्कों के दशकों के प्रयास से कैसे उभरा।

6.9.2 स्टीफन प्रोकोफिएविच तिमोशेंको (1878–1972)

स्टीफन प्रोकोफिएविच तिमोशेंको (श्पोतिव्का, यूक्रेन, 1878–वुपर्टाल, जर्मनी, 1972) बीसवीं शताब्दी के सर्वोच्च संरचनात्मक यांत्रिकीविद् थे; पदार्थ-सामर्थ्य, प्रत्यास्थता, कंपन और स्थिरता पर उनकी पाठ्यपुस्तकों ने विश्वभर में अभियंताओं की पीढ़ियों को प्रशिक्षित किया। उन्होंने St. पीटर्सबर्ग पॉलिटेक्निक संस्थान में अध्ययन किया, जहाँ बाद में रूसी क्रांति के बाद की राजनीतिक उथल-पुथल द्वारा विदेश जाने को विवश किए जाने तक वे संकाय में रहे। 1922 में संयुक्त राज्य अमेरिका प्रवास करने से पहले उन्होंने क्रमशः क्रोएशिया (ज़ाग्रेब) और चेकोस्लोवाकिया (प्राग) में अध्यापन किया। पिट्सबर्ग की वेस्टिंगहाउस इलेक्ट्रिक कॉर्पोरेशन में अल्प अवधि के बाद वे मिशिगन विश्वविद्यालय (1927) और तत्पश्चात स्टैनफोर्ड विश्वविद्यालय (1936) में गए, जहाँ उन्होंने उत्तरी अमेरिका में अनुप्रयुक्त यांत्रिकी का सर्वोच्च कार्यक्रम स्थापित किया

समीक्षा प्रति

और विद्वानों की उस पीढ़ी का मार्गदर्शन किया जिसने पूरे देश के अभियांत्रिकी संकायों में पद ग्रहण किए। अनुप्रयुक्त यांत्रिकी में विशिष्ट योगदानों के लिए 1957 से प्रतिवर्ष प्रदान किया जाने वाला ASME तिमोशेंको पदक उनकी विरासत का सम्मान करता है।

पाठ्यपुस्तकें और तकनीकी योगदान तिमोशेंको की पाठ्यपुस्तकें अपने-अपने क्षेत्रों में मानक संदर्भ बनीं, दर्जनों भाषाओं में अनूदित हुईं और दशकों तक प्रयुक्त रहीं: *Vibration Problems in Engineering* (1928), *Strength of Materials* (1930), *Theory of Elasticity* (गुडियर के साथ, 1934), *Theory of Elastic Stability* (गेरे के साथ, 1936) और *Theory of Plates and Shells* (वोइनोव्स्की-क्रीगर के साथ, 1940)। उनके तकनीकी योगदानों में "तिमोशेंको धरन-सिद्धांत" सम्मिलित है, जो मोटी धरनों में अपरूपण-विरूपण का विचार करता है और गहरी धरनों तथा सैंडविच संरचनाओं के परिशुद्ध विश्लेषण के लिए आज भी आवश्यक है।

History of Strength of Materials 1953 में प्रकाशित उनका *History of Strength of Materials* (Timoshenko, 1953 PDF) प्राचीन काल से आधुनिक युग तक ठोस यांत्रिकी विज्ञान के विकास का अनुशीलन उस सिद्धहस्त विशेषज्ञ के प्राधिकार के साथ करता है जिसने स्वयं इस विषय को आगे बढ़ाया था। टॉडहंटर और पियर्सन के विस्तृत प्रलेखन के विपरीत तिमोशेंको का *History* भौतिक समझ और अभियांत्रिकी अनुप्रयोग के विकास पर बल देता है। वे दिखाते हैं कि पदार्थ-विफलता, प्रत्यास्थता और संरचनात्मक स्थिरता संबंधी प्रायोगिक अंतर्दृष्टियाँ धीरे-धीरे एक सुसंगत वैज्ञानिक ढाँचे में कैसे संगठित हुईं। पुस्तक अठारहवीं, उन्नीसवीं और आरंभिक बीसवीं शताब्दियों—वह काल जिसमें पदार्थ-सामर्थ्य एक अभियांत्रिकी विज्ञान के रूप में उभरा—पर केंद्रित होने से पहले प्राचीन विश्व और पुनर्जागरण का संक्षिप्त विवेचन करती है। बीसवीं शताब्दी के अनेक व्यक्तित्वों—प्रांटल, फ़ेप्ल, फ़ॉन कार्मान और अन्य—से तिमोशेंको का व्यक्तिगत परिचय उनके बाद के अध्यायों को जीवंतता देता है, जबकि जीवनभर के शिक्षण और शोध से सूचित योगदानों के सापेक्ष महत्त्व पर उनके निर्णय ऐसा प्राधिकार रखते हैं जिसकी बराबरी विशुद्ध ऐतिहासिक विवरण नहीं कर सकते। *History* में 200 से अधिक जीवनचरितात्मक रेखाचित्र और चित्र भी सम्मिलित हैं, जो कम प्रसिद्ध व्यक्तियों से संबंधित ऐसी जानकारी सुरक्षित रखते हैं जो अन्यथा अंग्रेज़ी-भाषी पाठकों के लिए अप्राप्य रहती। संरचनात्मक अभियंताओं के लिए तिमोशेंको का कार्य तकनीकी शिक्षा और व्यावसायिक अस्मिता, दोनों प्रदान करता है—अर्थात् गैलीलियो द्वारा बहिर्धारी धरन के प्रथम अस्थायी विश्लेषण से आज की परिष्कृत संगणकीय विधियों तक विस्तृत परंपरा से संबंधित होने की अनुभूति। यह पदार्थ-यांत्रिकी का सर्वाधिक सुलभ और पठनीय इतिहास बना हुआ है।

6.9.3 रेने ड्यूगा (1897–1957)

ड्यूगा एक फ्रांसीसी यांत्रिकीविद् और विज्ञान-इतिहासकार थे, जिन्होंने यांत्रिकी के अब तक लिखे गए सर्वाधिक व्यापक और दार्शनिक रूप से परिष्कृत इतिहासों में से एक प्रस्तुत किया। *École Polytechnique* में शिक्षित होकर उन्होंने वहीं यांत्रिकी के प्राध्यापक के रूप में अपना कार्यजीवन बिताया और लाग्राँज, लाप्लास तथा पॉइसन से चली आ रही फ्रांसीसी बुद्धिसंगत यांत्रिकी की परंपरा विरासत में पाई। उनका ऐतिहासिक कार्य इस पृष्ठभूमि को प्रतिबिंबित करता है: गणितीय सूत्रीकरणों पर सूक्ष्म ध्यान, शुद्ध और अनुप्रयुक्त विज्ञान की परस्पर क्रिया के प्रति सम्मान तथा यांत्रिक संकल्पनाओं के दार्शनिक आयामों के प्रति संवेदनशीलता।

Histoire de la Mécanique उनका *Histoire de la Mécanique* (1950), जिसका अंग्रेज़ी अनुवाद *A History of Mechanics* (1955) (Dugas, 1955) शीर्षक से और लुई द ब्रॉय की भूमिका सहित प्रकाशित हुआ, प्राचीन यूनान से बीसवीं शताब्दी तक यांत्रिक चिंतन के विकास का अनुशीलन करता है और स्पष्ट करता है कि व्यावहारिक आवश्यकताओं तथा सैद्धांतिक प्रगतियों, दोनों ने गति और संतुलन के विज्ञान को कैसे आकार दिया। कार्य यूनानी स्थैतिकी और शुद्धगतिकी—आर्किमिडीज़ के उत्तोलक-विश्लेषण तथा अरस्तू और उनके उत्तराधिकारियों की शुद्धगतिक अटकलों—से आरंभ होता है और उन मध्ययुगीन योगदानों का अनुशीलन करता है जिन्होंने यांत्रिक ज्ञान को जीवित रखा तथा उसे सूक्ष्म ढंग से आगे बढ़ाया। वैज्ञानिक क्रांति का विस्तृत विवेचन है: गैलीलियो की शुद्धगतिकी, देकार्त के संरक्षण-सिद्धांत, हाइगेन्स की गतिकी और न्यूटन का महान संश्लेषण। इसके बाद ड्यूगा बर्नूली परिवार, ऑयलर, द'आलाँबेर और लाग्राँज के माध्यम से अठारहवीं शताब्दी में विश्लेषणात्मक यांत्रिकी के विकास तथा उन्नीसवीं शताब्दी में सातत्यक यांत्रिकी, ऊष्मागतिकी और सांख्यिकीय भौतिकी के विस्तार का अनुसरण करते हैं।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दार्शनिक गहराई ड्यूगा यांत्रिकी की वैचारिक आधारभूमि पर विशेष ध्यान देते हैं: बल, द्रव्यमान और जड़त्व की परिभाषाएँ; स्वयंसिद्धों अथवा अनुभवजन्य सामान्यीकरणों के रूप में न्यूटन के नियमों की स्थिति; तथा यांत्रिकी को चरम मान की दशाओं में पुनःरूपित करने वाले परिवर्तनात्मक सिद्धांत। यह दार्शनिक गहराई उनके कार्य को अधिक विशुद्ध तकनीकी इतिहासों से अलग करती है। वे स्पष्ट करते हैं कि जो संकल्पनाएँ पश्चदृष्टि में स्वतःस्पष्ट लगती हैं—बल का सदिश स्वरूप, द्रव्यमान और भार का अंतर, ऊर्जाओं की योज्यता—वे लंबे संघर्ष और वाद-विवाद से कैसे उभरीं। संरचनात्मक अभियंताओं के लिए ड्यूगा आवश्यक संदर्भ प्रदान करते हैं: संरचनात्मक विश्लेषण की विधियाँ—संतुलन-समीकरण, आभासी कार्य, ऊर्जा-सिद्धांत—निकायों के विशिष्ट वर्गों पर सामान्य यांत्रिकी के अनुप्रयोग हैं। इन सिद्धांतों का विकास कैसे हुआ, किन विकल्पों पर विचार कर उन्हें अस्वीकार किया गया और उनकी स्वीकृति के साथ कौन-से विवाद जुड़े थे, यह समझना अब नियमित रूप से प्रयुक्त साधनों के प्रति सराहना को गहरा करता है। ड्यूगा का संश्लेषण संरचनात्मक यांत्रिकी और भौतिक विज्ञान के व्यापक उद्यम के बीच गहरे संबंध प्रकट करता है।

6.9.4 क्लिफर्ड ऐम्ब्रोज़ ट्रूज़डेल तृतीय (1919–2000)

क्लिफर्ड ऐम्ब्रोज़ ट्रूज़डेल तृतीय (लॉस एंजेलिस, 1919–बाल्टिमोर, 2000) बीसवीं शताब्दी की यांत्रिकी में एक विलक्षण व्यक्तित्व थे: दृढता पर आग्रह करने वाले गणितज्ञ, मूल स्रोतों को उनकी मूल भाषाओं में पढने वाले इतिहासकार और प्रतिष्ठाओं को ध्वस्त करने तथा मिथकों को भेदने में आनंद लेने वाले विवादक। कैलटेक (B.S., 1941) और प्रिंसटन (Ph.D., 1943) में शिक्षित होकर उन्होंने अपने कार्यजीवन का अधिकांश भाग इंडियाना विश्वविद्यालय (1950–61) और जॉन्स हॉपकिन्स विश्वविद्यालय (1961–89) में बिताया। ट्रूज़डेल ने *Archive for Rational Mechanics and Analysis* (1957) और *Archive for History of Exact Sciences* (1960) पत्रिकाएँ स्थापित कीं तथा दोनों क्षेत्रों में दृढता के कठोर मानक बनाए। सातत्यक यांत्रिकी—विशेषतः संघटनात्मक समीकरणों के बुद्धिसंगत सूत्रीकरण और पदार्थों की ऊष्मागतिकी—में उनके तकनीकी योगदान प्रभावशाली थे, किंतु उनके ऐतिहासिक कार्य ने भी विद्वानों द्वारा शास्त्रीय भौतिकी के विकास को समझने की रीति को नया रूप देने में उतना ही महत्त्वपूर्ण प्रभाव डाला। ट्रूज़डेल अपनी विलक्षणताओं के लिए कुख्यात थे: वे विमान में यात्रा करने से मना करते, सर्वत्र पोत अथवा रेल से जाते और एक विशाल निजी पुस्तकालय रखते थे जिसमें, उनके दावे के अनुसार, यांत्रिकी पर लिखा प्रत्येक महत्त्वपूर्ण ग्रंथ था। वे यूरोपीय विद्वानों के साथ लैटिन में पत्राचार करते, कठोर गद्य में विचारधाराओं के पूरे संप्रदायों को खारिज कर देते और एक बार किसी प्रमुख भौतिकशास्त्री के कार्य को "सामान्य साहित्यिक अलंकारों से सजाया हुआ निरर्थकता का पुलिंदा" कहा। विद्वत्तापूर्ण विवादों की उनकी क्षमता किंवदंती बन गई—गणितीय दृढता अथवा ऐतिहासिक निर्वचन के बिंदुओं पर सहकर्मियों के साथ उनके विवाद दशकों तक चलते रहे और प्रायः अकादमिक पत्रिकाओं के पृष्ठों पर ऐसी कटुता से लड़े गए जो अनुभवी शिक्षाविदों को भी स्तब्ध कर देती थी।

Essays in the History of Mechanics उनका *Essays in the History of Mechanics* (1968) (Truesdell, 1968) और *history of classical mechanics* (Truesdell, 1976) सातत्यक यांत्रिकी के विकास का ऐसी आलोचनात्मक तीक्ष्णता से विश्लेषण करते हैं जो प्रकट करती है कि भ्रांतियों, त्रुटियों और अस्पष्टताओं ने प्रत्यास्थता, तरल गतिकी तथा ऊष्मागतिकी के औपचारिकीकरण को कैसे विलंबित किया। इस खंड में शास्त्रीय यांत्रिकी, प्रत्यास्थता, द्रवगतिकी और ऊष्मागतिकी के इतिहास पर शोध-पत्र संकलित हैं। ट्रूज़डेल अपने विषयों को कार्यरत वैज्ञानिक की दृष्टि से देखते हैं: उनकी रुचि केवल इस बात में नहीं है कि किसने कब क्या कहा, बल्कि इसमें भी है कि क्या वह सही था और यदि नहीं, तो उसकी त्रुटियाँ क्यों बनी रहीं। प्रतिबल और विकृति के इतिहास पर उनका निबंध दिखाता है कि ये मूलभूत संकल्पनाएँ—जो अब प्राथमिक प्रतीत होती हैं—कुल बल और प्रति इकाई क्षेत्रफल बल, विस्थापन और विकृति तथा पदार्थ-व्यवहार और ज्यामितीय विरूपण के बीच अंतर को लेकर बहुत भ्रम के बीच केवल क्रमशः कैसे उभरीं।

आणविक विवाद ट्रूज़डेल उन्नीसवीं शताब्दी की प्रत्यास्थता के आणविक विवादों पर विशेष रूप से प्रकाश डालते हैं: क्या प्रत्यास्थ स्थिरांक आणविक प्रतिरूपों से व्युत्पन्न किए जा सकते हैं और यदि हाँ, तो किसी पदार्थ में कितने स्वतंत्र स्थिरांक हो सकते हैं, बनाम वह परिघटनात्मक दृष्टिकोण जो संघटनात्मक संबंधों को प्रयोग द्वारा निर्धारित किए जाने वाले अनुभवजन्य तथ्य मानता है। वे दिखाते हैं कि कोशी का आणविक दृष्टिकोण प्रतिबल-प्रदिश की संकल्पना स्थापित करने में फलदायी होते हुए भी गलत पूर्वानुमानों, जैसे समदैशिक पदार्थों के लिए केवल एक प्रत्यास्थ स्थिरांक आवश्यक करने वाले "रेरी-कॉन्स्टैंट" सिद्धांत, तक ले गया और इसने दशकों तक विषय को भ्रमित किया। निबंध ट्रूज़डेल की विशिष्ट शक्ति और व्यंग्य-बुद्धि के साथ लिखे गए हैं। वे किसी भ्रमित तर्क को भ्रमित कहने अथवा बाद की पीढ़ियों द्वारा अनदेखी की गई त्रुटि पहचानने में संकोच नहीं करते। यद्यपि कभी-कभी कठोर, यह आलोचनात्मक रुख एक महत्त्वपूर्ण उद्देश्य पूरा करता है: यह पाठकों को

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्मरण कराता है कि विज्ञान का इतिहास अज्ञान से ज्ञान तक की विजय-यात्रा नहीं, बल्कि रुक-रुककर आगे बढ़ने वाली त्रुटि-प्रवण प्रक्रिया है जिसमें अच्छे विचार प्रायः अस्वीकार और बुरे विचार प्रायः स्वीकार किए गए। प्रत्यास्थता-सिद्धांत को स्थापित सत्य मानने के अभ्यस्त संरचनात्मक अभियंताओं के लिए ट्रूज़डेल के निबंध यह शिक्षाप्रद परिप्रेक्ष्य देते हैं कि वह सत्य कितने कठिन संघर्ष से अर्जित हुआ।

इन आवश्यक कार्यों के अतिरिक्त लेखक को संरचनात्मक यांत्रिकी का कोई अन्य ऐतिहासिक विवेचन इतना व्यापक अथवा अंतर्दृष्टिपूर्ण नहीं मिला कि उसे यहाँ सम्मिलित किया जा सके। यह अनुपस्थिति स्वयं उल्लेखनीय है: मानव सभ्यता के निर्मित परिवेश को आकार देने वाले विषय संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहास को इतिहासकारों से पर्याप्त ध्यान नहीं मिला है। प्रस्तुत खंड इस रिक्ति को भरने का एक संकोची प्रयास है, ताकि संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहास को अभियंताओं की उस नई पीढ़ी के समक्ष मूर्त रूप में रखा जा सके जो अन्यथा उन बौद्धिक संघर्षों, निष्फल आरंभों, अंतर्दृष्टि की कौंधों और ज्ञान के धैर्यपूर्ण संचय के विषय में बहुत कम जानती होगी जिन्होंने उनके व्यवसाय को संभव बनाया। यदि ये पृष्ठ किसी युवा अभियंता में उन दिग्गजों के प्रति सम्मान जगाएँ जिनके कंधों पर हम सब खड़े हैं, तो लेखक अपना श्रम सार्थक मानेगा।

6.10 उल्लेखनीय महिलाएँ

यह दावा करना असत्यनिष्ठ होगा कि इस खंड में वर्णित महिलाओं ने यांत्रिकी में ऑयलर, लाग्राँज अथवा कोशी के समान पैमाने पर योगदान किए। उन्होंने ऐसा नहीं किया। किंतु उनकी उपेक्षा करना भी उतना ही असत्यनिष्ठ होगा, क्योंकि उनके सामने उपस्थित संस्थागत बाधाओं की तुलना में उनकी उपलब्धियाँ उल्लेखनीय थीं। यदि वे पुरुष होतीं तो संभवतः विशेष उल्लेख की पात्र न होतीं; किंतु उस युग में महिलाएँ होने के कारण, जब विश्वविद्यालय उनके लिए बंद थे, विद्वत् संस्थाएँ उनकी सदस्यता अस्वीकार करती थीं और प्रकाशन के लिए प्रायः पुरुष छद्मनाम आवश्यक होते थे, ऐतिहासिक अभिलेख में उनकी उपस्थिति ही उल्लेखनीय है। मैं उन्हें आख्यान को विकृत करने के लिए नहीं, बल्कि यह स्वीकार करने के लिए यहाँ सम्मिलित करता हूँ कि अन्य सभी इतिहासों की भाँति यांत्रिकी का इतिहास भी इस बात से आकार पाया कि किसे भाग लेने की अनुमति थी।

एमिली द्यु शातले (1706–1749) गैब्रिएल एमिली ल तोनेलिए द ब्रतुइ, मार्कीज़ द्यु शातले, फ्रांसीसी प्राकृतिक दार्शनिक, गणितज्ञ और भौतिकशास्त्री थीं। अभिजात वर्ग में जन्मी और असामान्य रूप से कठोर शिक्षा प्राप्त शातले महाद्वीपीय यूरोप में न्यूटनीय भौतिकी की अग्रणी व्याख्याकारों में से एक बनीं। न्यूटन की *Principia Mathematica* का उनका फ्रांसीसी अनुवाद (Newton, 1687 PDF), जो उनकी मृत्यु से कुछ समय पहले पूरा और मरणोपरांत प्रकाशित हुआ, एक शताब्दी से अधिक समय तक मानक फ्रांसीसी संस्करण रहा और आज भी परामर्शित किया जाता है। किंतु द्यु शातले मात्र अनुवादक नहीं थीं: उनकी विस्तृत टिप्पणी ने न्यूटन के तर्कों को स्पष्ट और विस्तारित किया तथा कुछ स्थानों पर सुधारा भी; उसमें महाद्वीपीय गणित के वे विकास सम्मिलित थे जिनका न्यूटन ने स्वयं उपयोग नहीं किया था।

Principia से परे उन्होंने *vis viva* विवाद में योगदान किया—यह वाद-विवाद कि यांत्रिक प्रक्रियाओं में संरक्षित राशि संवेग (mv) थी या वह जिसे अब हम गतिज ऊर्जा (mv^2) मानते हैं। उनकी *Institutions de Physique* (Châtelet, 1740) ने दूसरे मत का समर्थन किया और लाइबनित्सीय तथा न्यूटनीय विचारों को ऐसे ढंग से संश्लेषित किया जिसने ऊर्जा की आधुनिक संकल्पना का पूर्वाभास दिया। किसी महिला का लाइबनित्स, बर्नूली परिवार और फ्रांसीसी अकादमी से जुड़े विवाद में सार्थक हस्तक्षेप कर पाना उनकी बुद्धि और स्थिति की असाधारण प्रकृति दर्शाता है।

सोफी जर्मेन (1776–1831) मारी-सोफी जर्मेन फ्रांसीसी गणितज्ञ थीं जिन्होंने संख्या-सिद्धांत और प्रत्यास्थता-सिद्धांत, दोनों में स्थायी योगदान किए। अपने लिंग के कारण नवस्थापित École Polytechnique में प्रवेश से वंचित होकर उन्होंने पुरुष परिचितों के माध्यम से व्याख्यान-टिप्पणियाँ प्राप्त कीं और अपना आरंभिक कार्य “Monsieur LeBlanc” छद्मनाम से प्रस्तुत किया। जब लाग्राँज को अपने अज्ञात पत्र-संवादी की वास्तविक पहचान ज्ञात हुई तो वे उनके मार्गदर्शक बने—इस समर्थन ने उनके कार्य को ऐसी विश्वसनीयता दी जिससे वह अन्यथा वंचित रह सकता था।

यांत्रिकी में जर्मेन का सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण योगदान 1809 में पेरिस अकादमी द्वारा प्रस्तुत कंपित प्लेट की समस्या के प्रति उनके निरंतर प्रयास से उत्पन्न हुआ; यह एर्न्स्ट क्लाड्नी द्वारा कंपित धातु प्लेटों पर नोडीय प्रतिरूपों के प्रभावशाली प्रदर्शनों के बाद हुआ था। अकादमी ने इन प्रतिरूपों की व्याख्या करने वाले गणितीय सिद्धांत के लिए पुरस्कार घोषित किया—यह समस्या कई अग्रणी गणितज्ञों को पराजित कर चुकी थी। जर्मेन ने 1811, 1813 और अंततः 1816 में प्रविष्टियाँ प्रस्तुत कीं; अंतिम वर्ष उन्हें पुरस्कार मिला (Germain, 1821)। यद्यपि सीमा-दशाओं के उनके व्युत्पादन में त्रुटि थी, उनके

समीक्षा प्रति

दृष्टिकोण ने प्लेट-विक्षेप को नियंत्रित करने वाला चतुर्थ-कोटि आंशिक अवकल समीकरण उत्पन्न किया, जो लाग्राँज द्वारा सुधारे और बाद में किर्खहॉफ द्वारा परिष्कृत किए जाने पर प्लेट-सिद्धांत की आधारभूमि बना:

$$D\nabla^4 w = q$$

जहाँ D नमन-दृढता, w अनुप्रस्थ विक्षेप और q वितरित भार है। उनकी प्राथमिकता की स्वीकृति में कभी-कभी जर्मेन-लाग्राँज समीकरण कहलाने वाला यह समीकरण पतली प्लेटों के संरचनात्मक विश्लेषण का केंद्रीय अंग बना हुआ है। मुख्यतः एकांत में कार्यरत किसी स्वशिक्षित महिला का लाग्राँज, पॉइसन और नाविए को व्यस्त रखने वाली समस्या में स्थायी योगदान कर पाना उनकी क्षमता और दृढसंकल्प, दोनों का प्रमाण है।

एमी नोएदर (1882–1935) अमाली एमी नोएदर जर्मन गणितज्ञ थीं जिनके कार्य ने अमूर्त बीजगणित और गणितीय भौतिकी को रूपांतरित किया। यद्यपि उनके योगदान मुख्यतः संरचनात्मक यांत्रिकी के उचित क्षेत्र से बाहर हैं, सममितियों को संरक्षण-नियमों से जोड़ने वाला उनका प्रसिद्ध प्रमेय (Noether, 1918) विश्लेषणात्मक यांत्रिकी में व्याप्त परिवर्तनात्मक सिद्धांतों—इनमें §9.3.2.2 में आए ऑयलर-लाग्राँज समीकरण भी सम्मिलित हैं—की गहनतम आधारभूमि प्रदान करता है।

नोएदर के प्रमेय का सार यह है कि किसी भौतिक निकाय की प्रत्येक सतत सममिति एक संरक्षित राशि के अनुरूप होती है: काल-अनुवाद सममिति से ऊर्जा का संरक्षण; स्थान-अनुवाद सममिति से संवेग का संरक्षण; और घूर्णन सममिति से कोणीय संवेग का संरक्षण मिलता है। सामान्य सापेक्षता के संबंध में हिल्बर्ट और क्लाइन द्वारा माँगी गई इस अंतर्दृष्टि ने पहले पृथक भौतिक नियम प्रतीत होने वाले नियमों को एक ही गणितीय ढाँचे में एकीकृत किया।

अपने से पहले जर्मेन की भाँति नोएदर ने भी संस्थागत बहिष्करण का सामना किया। उन्हें गॉटिंगेन में केवल हिल्बर्ट के नाम से व्याख्यान देने की अनुमति थी और 1933 में नाज़ियों द्वारा यहूदी संकाय-सदस्यों को निष्कासित किए जाने पर वे संयुक्त राज्य अमेरिका चली गईं, जहाँ दो वर्ष बाद उनकी मृत्यु हुई। *New York Times* में आइंस्टाइन के शोकलेख ने उन्हें “महिलाओं की उच्च शिक्षा आरंभ होने के बाद अब तक उत्पन्न सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण सृजनात्मक गणितीय प्रतिभा” कहा (Einstein, 1935)। इस आकलन को स्वीकार किया जाए अथवा नहीं, उनका प्रमेय यह समझने के इच्छुक प्रत्येक व्यक्ति के लिए अपरिहार्य है कि परिवर्तनात्मक विधियाँ क्यों कार्य करती हैं।

6.11 विश्लेषण और संदर्भ

6.11.1 प्रतिस्पर्धा, गोपनीयता और वैज्ञानिक प्रगति

6.11.1.1 गोपन की विधियाँ

आरंभिक आधुनिक काल न केवल वैज्ञानिक खोज, बल्कि बौद्धिक संशय का भी स्वर्णयुग था। सहकर्मी-समीक्षित पत्रिकाओं और समय-मुद्रांकित पूर्वप्रकाशनों से बहुत पहले वैज्ञानिकों के पास प्राथमिकता स्थापित करने की कोई औपचारिक व्यवस्था नहीं थी—इसलिए वे प्रायः एक असामान्य रणनीति अपनाते थे: अपने निष्कर्षों को कूट में प्रकाशित करना। यह प्रथा उस युग में बौद्धिक संपदा, व्यावसायिक प्रतिष्ठा और वैज्ञानिक ज्ञान के आर्थिक मूल्य से संबंधित गहरी चिंताओं को प्रतिबिंबित करती थी, जब संरक्षण और प्राथमिकता-विवाद किसी कार्यजीवन को बना अथवा बिगाड़ सकते थे।

चाहे *cipher* द्वारा—किसी संदेश की विषयवस्तु को अस्पष्ट करने के लिए उसे व्यवस्थित रूप से रूपांतरित करने की विधि—अथवा *anagram* द्वारा, जिसमें किसी वाक्यांश के अक्षरों को नए क्रम में रखा जाता है, अथवा गूढ लैटिन पहेलियों द्वारा, लक्ष्य समान था: क्षेत्र प्रकट किए बिना अपना ध्वज गाड़ देना। इस विचित्र प्रथा ने बौद्धिक चोरी के वास्तविक भय को पुनर्जागरण-कालीन पहेली-प्रेम के साथ संयोजित किया, सारणी 6.5।

ये वैज्ञानिक केवल सतर्क नहीं थे—वे प्रतिस्पर्धी, गोपनीय और प्रायः एक-दूसरे के प्रति गहरे अविश्वासी थे। परिणाम प्रतिभा और संदेह का विचित्र मिश्रण था: ऐसा समय जब संसार के महानतम मस्तिष्क अपनी अंतर्दृष्टियों को पहेलियों में छिपाते थे, ताकि कहीं कोई उन्हें चुरा न ले।[54] सारणी 6.6।

[54]आज शोधकर्ता बिना विलंब प्राथमिकता स्थापित करने के लिए समय-मुद्रांकित पूर्वप्रकाशन संग्रहों—जैसे *X1* अथवा

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 6.5: आरंभिक आधुनिक वैज्ञानिकों द्वारा प्रयुक्त कूटलेखन-विधियों की तुलना

विधि	तकनीक	मुख्य विशेषताएँ	उदाहरण & सुरक्षा
वर्ण-विपर्यय	अक्षरों का पुन-र्विन्यास	निश्चित अक्षर-संख्या; सरल क्रमचय; कोई व्यवस्थित कुंजी नहीं	हुक: *ceiiinosssttuv -> Ut tensio, sic vis*। बर्नूली: 1690 के *Specimen alterum* के अंत में अपने इलास्टिका-समाधान को वर्ण-विपर्यय में छिपाया। सुरक्षा: निम्न
कूट	व्यवस्थित प्र-तिस्थापन	नियम-आधारित कूटन; विकूटन-कुंजी आवश्यक; कलनविधीय दृष्टिकोण	हाइगेन्स और लाइबनित्स: कैटेनरी पत्राचार में कूटों का आदान-प्रदान किया। बर्नूली ने निजी टिप्पणियों में प्रतिस्थापन-कूट भी प्रयुक्त किए। सु-रक्षा: उच्च
शब्द-पहेली	बहुस्तरीय पहेली	अनेक विधियों का संयोजन; पहे-लियाँ और शब्द-क्रीडा सम्मि-लित; प्रायः संकेत होते हैं	बर्नूली: इलास्टिका की चुनौती वर्ण-विपर्यय, पहेली और अंतिम तिथि (1690 का फसल उत्सव) के साथ प्रस्तुत की। सुरक्षा: परिवर्ती
गोपन	रोक रखना अथवा संकेत देना	कोई औपचारिक कूटन नहीं; लोप पर निर्भर; अस्थायी उपाय	देकार्त: खोजों के अस्पष्ट संदर्भ। गै-लीलियो: प्रकाशन में विलंब किया, परि-णाम पत्रों में रखे। सुरक्षा: अत्यंत नि-म्न

उदाहरण

हुक

ceiiinosssttuv✓

हमें इन 14 अक्षरों को पुनर्व्यवस्थित करके वैज्ञानिक सिद्धांत का वर्णन करने वाला सार्थक लैटिन पाठ बनाना है।

पहले उपलब्ध अक्षरों की सूची बनाएँ:

मूल प्रतिरूप;

- कुल अक्षर: 14
- स्वर: e(1), i(3), o(1), u(1) = 6 स्वर
- व्यंजन: c(1), n(1), s(3), t(2), v(1) = 8 व्यंजन
- सर्वाधिक आवृत्त: i(3), s(3), t(2)

व्यवस्थित विकूटन-दृष्टिकोण:

1. सामान्य लैटिन शब्दों की पहचान: 17वीं शताब्दी का कोई विद्वान परिचित लैटिन प्रतिरूप खोजता:
2. तकनीकी पदों की खोज: हुक के वैज्ञानिक संदर्भ को देखते हुए हम यांत्रिक पद खोजते हैं:
3. शब्द-संयोजनों का प्रयास:

arXiv—का उपयोग करते हैं, जिससे खुलापन और श्रेय, दोनों सुनिश्चित होते हैं। यह आरंभिक वैज्ञानिक संस्कृति की कूटबद्ध गोपनीयता से एक नाटकीय परिवर्तन है।

समीक्षा प्रति

तालिका 6.6: वर्ण-विपर्यय, कूट और अन्य विधियाँ

वैज्ञानिक	विधि	कूटबद्ध पाठ	विकूटित अर्थ
रॉबर्ट हुक § 6.6.6	वर्ण-विपर्यय	*ceiiinosssttuv*	*Ut tensio, sic vis* (“जितना विस्तार, उतना बल”)
	वर्ण-विपर्यय	*abcccddeeeeefggiiiiiiiillmmmm nnnnnooprrsssttttttuuuuuuuux*	*Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum* (“जिस प्रकार नम्य केबल लटकती है, उसी प्रकार उलटने पर मेहराब के स्पर्शी खंड खड़े रहते हैं”)
आइज़क न्यूटन §6.6.7	अक्षर-संख्या वर्ण-विपर्यय	*6accdae13eff7i3l9n4o4qrr 4s8t12ux*	*Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa* (“प्रवाहमान राशियों की किसी भी संख्या वाला समीकरण दिए जाने पर फ़्लक्सियन ज्ञात करना; और इसके विपरीत”)
गैलीलियो गैलिली § 6.6.2	दीर्घ वर्ण-विपर्यय	*Smaismrmilmepoetaleumibu nenugttauiras*	“Altissimum planetam tergeminum observavi” (“मैंने सर्वाधिक दूर के ग्रह को त्रिरूपी देखा है”)
René Descartes	परिणाम रोकना	कोई कूट नहीं, केवल परोक्ष संकेत	प्रकाशिकी और ज्यामिति की खोजों के संकेत दिए, बाद में प्रकाशित किया
याकॉब बर्नूली § 9.3	वर्ण-विपर्यय	*Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqbfp lty ge mutds udthhtuhs tmixy yxdksdbxp gqsrkfgudl bg ipdandtt tcpgkbp aqdbkzs*	*Portio axis applicatam inter et tangentem est ad ipsam tangentem sicut quadratum applicatae ad constans quoddam spatium*

(a) प्रयास 1: “ut” से आरंभ

प्रयोग: `ut` (u,t)

शेष: `ceiiinosssv`

क्या “tensio” बनाया जा सकता है? जाँच: t(1), e(1), n(1), s(3), i(3), o(1)

प्रयोग: `tensio` (t,e,n,s,i,o)

शेष: `ciissv`

(b) प्रयास 2: प्रतिरूप को आगे बढ़ाना: शेष अक्षरों `ciissv` से क्या हम निम्न बना सकते हैं:

प्रयोग: `sic` (s,i,c)

शेष: `isv`

प्रयोग: `vis` (v,i,s)

शेष: कुछ नहीं

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 6.7: हुक के वर्ण-विपर्यय में उपलब्ध अक्षर

अक्षर	संख्या	अक्षर	संख्या	अक्षर	संख्या
c	1	i	3	s	3
e	1	n	1	t	2
o	1	u	1	v	1

तालिका 6.8: बनाए जा सकने वाले सामान्य लैटिन शब्द

शब्द	प्रयुक्त अक्षर	अर्थ
ut	u, t	जैसा/जब
est	e, s, t	है
et	e, t	और
si	s, i	यदि
sic	s, i, c	इस प्रकार/ऐसा
in	i, n	में
vis	v, i, s	बल/सामर्थ्य

(c) समाधान उभरता है: प्राप्त शब्दों को व्यवस्थित करने पर:

ut tensio, sic vis

यह शास्त्रीय लैटिन रचना का अनुसरण करता है:

- “ut...sic” = “जैसा...वैसा” (तुलनात्मक संरचना)
- “tensio” = तनाव, खिंचाव (अपादान कारक)
- “vis” = बल, सामर्थ्य (कर्ता कारक)

इसके बाद अक्षर-संख्या जाँचकर सत्यापन करते हैं

अंततः विकूटित वाक्यांश का अनुवाद है:

“जितना तनाव, उतना बल”

ध्यान दें कि

- **1676**: प्राथमिकता स्थापित करने के लिए वर्ण-विपर्यय प्रकाशित
- **1678**: *De Potentia Restitutiva* में समाधान प्रकट
- **आधुनिक प्रासंगिकता**: प्रत्यास्थता-सिद्धांत और यांत्रिक अभियांत्रिकी की आधारभूमि

बर्नूली इलास्टिका समस्या को हल करने के लिए याकॉब बर्नूली द्वारा प्रस्तुत चुनौती (§9.3.1)

> Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqbfp lty ge mutds udthhtuhs tmixy yxdksdbxp gqsrkfgudl bg ipdandtt tcpgkbp aqdbkzs

तालिका 6.9: उपलब्ध अक्षरों से संभव वैज्ञानिक पद

संभावित शब्द	आवश्यक अक्षर	उपलब्ध?
tensio (तनाव)	t,e,n,s,i,o	✓
motus (गति)	m,o,t,u,s	X (m नहीं है)
vis (बल)	v,i,s	✓

तालिका 6.10: अक्षर-प्रयोग का सत्यापन

अक्षर	मूल	समाधान	मेल
c	1	1 (*sic*)	✓
e	1	1 (*tensio*)	✓
i	3	3 (*tensio*, *sic*, *vis*)	✓
n	1	1 (*tensio*)	✓
o	1	1 (*tensio*)	✓
s	3	3 (*tensio*, *sic*, *vis*)	✓
t	2	2 (*ut*, *tensio*)	✓
u	1	1 (*ut*)	✓
v	1	1 (*vis*)	✓
कुल	**14**	**14**	✓

Bernoulli, Jakob, 1694 “*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*”; शब्द-पहेली

सारणी 6.11 का उपयोग करते हुए, (Alassi, 2020)

तालिका 6.11: बर्नूली की इलास्टिका शब्द-पहेली का विकूटन, (Alassi, 2020)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	x	y	z
1	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	x	y
2	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
3	s	t	u	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r

पंक्ति	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	[2]	1	2	…
कूट	Q	r	z	u	m	u	b	a	p	t	d	x	q	o	p	d	d	b	b	p	p	o	y	l	[u]	f	y	…
सादा पाठ	p	o	r	t	i	o	a	x	i	s	a	p	p	l	i	c	a	t	a	m	i	n	t	e	[r]	e	7	…

कूट में निम्न का उपयोग होता है:

- पंक्ति 1: दाईं ओर एक स्थानांतरण
- पंक्ति 2: दाईं ओर दो स्थानांतरण

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- पंक्ति 3: दाईं ओर छह स्थानांतरण फिर प्रतिरूप दोहराया जाता है

यह स्पष्ट करता है कि "Qrzumu bapt..." का विकूटन "portio axis..." क्यों है—यह पहले दिखाई गई प्रतिस्थापन-सारणी का दोहराते हुए 1-2-3 प्रतिरूप के साथ उपयोग करता है!

न्यूटन का वर्ण-विपर्यय: 1676 में आइज़क न्यूटन ने कलन (फ्लक्सियन-विधि) की अपनी खोज की प्राथमिकता स्थापित करते हुए वास्तविक विधि को गोपनीय रखने के लिए एक कूटलेखीय वर्ण-विपर्यय प्रकाशित किया, (Newton, 1960)। पूर्ण प्रकाशन से पहले बौद्धिक संपदा सुरक्षित करने के लिए 17वीं शताब्दी के गणितज्ञों में यह प्रथा सामान्य थी।

> `6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux`
>
> *Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa*
>
> "प्रवाहमान राशियों की किसी भी संख्या वाला समीकरण दिए जाने पर फ्लक्सियन ज्ञात करना; और इसके विपरीत"
> Newton, 1960 *"Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676"*

यह एक **आवृत्ति-वर्ण-विपर्यय** है, जिसमें:

- संख्याएँ बताती हैं कि अगला अक्षर कितनी बार आता है
- संख्या-विहीन अक्षर एक बार आते हैं
- फिर सभी अक्षरों को पुनर्व्यवस्थित करके लैटिन वाक्य बनाया जाता है

चरणबद्ध विकूटन:

तालिका 6.12: न्यूटन के कूट का विश्लेषण

कूट	अर्थ	कूट	अर्थ
`6a`	6 अक्षर a	`cc`	2 अक्षर c
`d`	1 अक्षर d	`a`	1 अतिरिक्त a
`e`	1 अक्षर e	`13e`	13 अतिरिक्त e
`ff`	2 अक्षर f	`7i`	7 अक्षर i
`3l`	3 अक्षर l	`9n`	9 अक्षर n
`4o`	4 अक्षर o	`4q`	4 अक्षर q
`rr`	2 अक्षर r	`4s`	4 अक्षर s
`8t`	8 अक्षर t	`12u`	12 अक्षर u
`x`	1 अक्षर x		

पुनर्व्यवस्था के लिए उपलब्ध अक्षरों की कुल संख्या:

न्यूटन का विकूटित संदेश कलन के मूलभूत प्रमेय का वर्णन करता है:

- **फ्लक्सियन** = अवकलज (परिवर्तन-दरें)
- **फ्लुएंट** = समाकल (संचित राशियाँ)
- प्रमेय अवकलन और समाकलन के बीच व्युत्क्रम संबंध स्थापित करता है

प्रारूप प्रतिकृति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 6.13: पूर्ण अक्षर-आवृत्ति

अक्षर	संख्या	अक्षर	संख्या	अक्षर	संख्या	अक्षर	संख्या
a	7	e	14	i	7	o	4
c	2	f	2	l	3	q	4
d	1	n	9	r	2	s	4
t	8	u	12	x	1		

आधुनिक संकेत-पद्धति में न्यूटन का कथन इसके अनुरूप है:

$$\text{दिया गया: } F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
$$\text{तब: } F'(x) = f(x)$$
$$\text{इसके विपरीत: } \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

यह वर्ण-विपर्यय कलन के आविष्कार को लेकर लाइबनित्स के साथ उभरते प्राथमिकता-विवाद पर न्यूटन की प्रतिक्रिया था। 1676 में कूटबद्ध रूप प्रकाशित करके न्यूटन बाद में प्रमाणित कर सकते थे कि उन्होंने लाइबनित्स के 1684 के प्रकाशन से पहले मूलभूत सिद्धांत खोज लिए थे।

विकूटन का सत्यापन करने के लिए:

1. विकूटित लैटिन पाठ में अक्षरों की गणना करें
2. पुष्टि करें कि वे कूट में निर्दिष्ट आवृत्ति से मेल खाते हैं
3. मूल वर्ण-विपर्यय के पुनर्निर्माण के लिए अक्षरों को वर्णानुक्रम में पुनर्व्यवस्थित करें

इस प्रथा की दृढता प्रकट करती है कि वैज्ञानिक प्रगति बाद में उभरने वाली सहयोगात्मक संस्थागत संरचनाओं के स्थान पर वैयक्तिक प्रतिष्ठा और मान्यता पर कितनी निर्भर थी।

अपने दूरदर्शी से देखते हुए गैलीलियो भी खगोल-विज्ञान को गूढ शब्द-क्रीडा में बदलने से स्वयं को रोक नहीं सके। ऐसे संसार में जहाँ प्रतिष्ठाएँ प्राथमिकता से बनती अथवा बिगडती थीं, विज्ञान निश्चय ही आगे बढ रहा था—किंतु प्रायः ताले और वर्ण-विपर्यय के भीतर। अपने दूरदर्शी से देखते हुए गैलीलियो भी खगोल-विज्ञान को गूढ शब्द-क्रीडा में बदलने से स्वयं को रोक नहीं सके। ऐसे संसार में जहाँ प्रतिष्ठाएँ प्राथमिकता से बनती अथवा बिगडती थीं, विज्ञान निश्चय ही आगे बढ रहा था—किंतु प्रायः ताले और वर्ण-विपर्यय के भीतर।

6.11.1.2 विवाद और उनके प्रभाव

जैसा कि §6.11.1.1 में विवेचित है, आरंभिक आधुनिक काल न केवल बौद्धिक प्रतिभा, बल्कि तीव्र प्रतिस्पर्धा, गोपनीयता और संदेह से भी चिह्नित था। वैज्ञानिक अपनी अंतर्दृष्टियों को छिपाते हुए अपने दावे सुरक्षित करने के लिए प्रायः कूट, वर्ण-विपर्यय और अन्य अस्पष्टीकरणों का सहारा लेते थे। गोपन की यह संस्कृति मात्र उस युग की विचित्रता नहीं थी—यह एक गहरी वास्तविकता प्रतिबिंबित करती थी: वैज्ञानिक खोज लंबे समय से प्रतिद्वंद्विताओं, विवादों और प्राथमिकता के प्रश्नों से उलझी रही है।

वैज्ञानिक क्रांति को केवल वैयक्तिक प्रतिभा ने नहीं, बल्कि प्रतिद्वंद्विता, सहयोग और बौद्धिक आदान-प्रदान के जटिल संजालों ने भी आगे बढाया। इन व्यक्तिगत संबंधों को समझने से खोज की तीव्र गति और बडी सफलताओं के साथ आए कभी-कभी कटु विवाद, दोनों की व्याख्या करने में सहायता मिलती है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सारणी 6.14 यांत्रिकी के विकास को आकार देने वाले प्रमुख बौद्धिक संघर्षों का प्रलेखन करती है। प्रायः कटु होने के बावजूद इन विवादों ने प्रतिभागियों को अधिक दृढ तर्क और स्पष्ट व्याख्याएँ विकसित करने के लिए बाध्य करके वैज्ञानिक प्रगति को अक्सर तीव्र किया।

इन विवादों को वैज्ञानिक प्रगति से दुर्भाग्यपूर्ण विकर्षण मानने के स्थान पर हमें उन्हें तीव्र उन्नति को प्रेरित करने वाली प्रतिस्पर्धी गतिकी का अभिन्न अंग समझना चाहिए। प्राथमिकता की स्थापना न केवल वैयक्तिक प्रतिष्ठा, बल्कि संरक्षण, अकादमिक पद और संस्थागत समर्थन प्राप्त करने के लिए भी निर्णायक बन गई। इस अर्थ में वैज्ञानिक प्रतिद्वंद्विता नवाचार का शक्तिशाली इंजन थी, तब भी जब उसने संबंधित व्यक्तियों को व्यक्तिगत पीडा पहुँचाई।

प्रारूप प्रकाशन

तालिका 6.14: यांत्रिकी के विकास में प्रमुख बौद्धिक संघर्ष

शताब्दी	संबंधित व्यक्ति	विषय	विवाद की प्रकृति	परिणाम/प्रभाव
16वीं	टाइको ब्राहे बनाम केप्लर	खगोलीय प्रतिरूप	भूकेंद्रीय समझौता (टाइको) बनाम सूर्यकेंद्रीय दीर्घवृत्त (केप्लर)	केप्लर के नियम मान्य हुए
16वीं	गैलीलियो बनाम चर्च	सूर्यकेंद्रीयता	गैलीलियो ने कोपर्निकस का बचाव किया; चर्च ने सूर्यकेंद्रीयता को मत-विरोधी घोषित किया	धर्माधिकरण ने गैलीलियो पर अभियोग चलाया
16वीं	गैलीलियो बनाम सिंप्लिचियो	अरस्तूवादी विज्ञान	*Dialogue* में अरस्तूवादी विचारों का व्यंग्यात्मक निरूपण	चर्च के साथ संघर्ष गहरा हुआ
17वीं	न्यूटन बनाम हुक	गुरुत्व का नियम	हुक ने प्राथमिकता का दावा किया; न्यूटन ने इसका विरोध किया	न्यूटन ने *Principia* में हुक का उल्लेख नहीं किया
17वीं	न्यूटन बनाम लाइबनित्स	कलन का आविष्कार	स्वतंत्र खोजों ने राष्ट्रवादी और अकादमिक विवाद उत्पन्न किया	अंततः दोनों को श्रेय मिला
17वीं	बॉयल बनाम हॉब्स	वैज्ञानिक विधि	प्रयोगवाद (बॉयल) बनाम बुद्धिवादी निगमन (हॉब्स)	आधुनिक वैज्ञानिक व्यवहार को आकार दिया
18वीं	बर्नूली पारिवारिक कलह	परिवर्तन-कलन	याकॉब, योहान और डैनियल के बीच प्रतिद्वंद्विता तथा साहित्यिक चोरी के दावे	प्रमुख प्रगतियों को प्रेरित किया
18वीं	ऑयलर बनाम द'आलाँबेर	कंपित तंत्रियाँ	PDE सूत्रीकरण और निरूवचन पर असहमति	विश्लेषण की आधारभूमि को आगे बढ़ाया
19वीं	पॉइसन बनाम नाविए	प्रत्यास्थता-सिद्धांत	प्रतिबल-विकृति प्रतिरूपण में सातत्यक बनाम आणविक मान्यताएँ	कोशी ने बाद में प्रदिश यांत्रिकी द्वारा दोनों को एकीकृत किया
19वीं	कोशी बनाम पॉइसन	यांत्रिकी में दृढता	कोशी ने पॉइसन के सूत्रीकरणों की गणितीय दृढता के अभाव के लिए आलोचना की	कोशी का प्रदिश-आधारित सिद्धांत मानक बना
19वीं	ब्रिटिश बनाम महाद्वीपीय संप्रदाय	यांत्रिकी	ब्रिटिश *fluxions* बनाम महाद्वीपीय दृढता और फलन	दीर्घकालीन सांस्कृतिक विभाजन उत्पन्न हुआ

प्रारूप पृष्ठ समीक्षाधीन

6.11.2 आधुनिक अभियांत्रिकी विज्ञान की ओर संक्रमण

इस अध्याय में परिचित कराए गए व्यक्तियों ने सामूहिक रूप से भौतिक संसार को समझने और रूपांतरित करने की मानवीय रीति में आधारभूत परिवर्तन संचालित किया। मध्ययुगीन शिल्प-परंपराओं से आधुनिक अभियांत्रिकी विज्ञान तक का संक्रमण एकाएक नहीं हुआ, बल्कि तीन शताब्दियों तक विस्तृत परस्पर संबद्ध विकासों की शृंखला से हुआ।

तीन प्रमुख परिवर्तन इस रूपांतरण को चिह्नित करते हैं:

गणितीय औपचारिकीकरण: गैलीलियो के मापानुपात-नियमों से आरंभ होकर नाविए के अवकल समीकरणों तक पहुँचते हुए व्यावसायिकों ने यांत्रिक परिघटनाओं का वर्णन अनुभवजन्य नियमों के स्थान पर उत्तरोत्तर गणितीय संबंधों द्वारा किया। इस *mathematization* ने अधिक परिशुद्धता और व्यापक सामान्यीकरण, दोनों संभव किए।

संस्थागत नवाचार: वैज्ञानिक अकादमियों, अभियांत्रिकी विद्यालयों और व्यावसायिक संस्थाओं की स्थापना ने ज्ञान के सृजन, मान्यकरण और प्रसार की नई व्यवस्थाएँ बनाईं। इन संस्थाओं ने सहयोग को पोषित करते हुए प्रतिस्पर्धा को भी तीव्र किया; दोनों ने वैज्ञानिक प्रगति तेज की।

सिद्धांत और व्यवहार का एकीकरण: कूलॉम, नाविए और बर्नूली परिवार जैसे व्यक्तियों ने दिखाया कि अमूर्त गणितीय विश्लेषण वास्तविक अभियांत्रिकी समस्याओं को हल कर सकता है। इस एकीकरण ने

सिद्धांतकारों और व्यावसायिकों, दोनों को आश्वस्त किया कि गणितीय यांत्रिकी केवल बौद्धिक संतोष देने वाली नहीं, बल्कि व्यावहारिक रूप से मूल्यवान भी है।

1850 तक आधुनिक संरचनात्मक अभियांत्रिकी के तीव्र विकास की आधारभूमि स्थापित हो चुकी थी, जिसमें गणितीय दृढता, प्रायोगिक मान्यकरण और व्यावहारिक अनुप्रयोग का विशिष्ट संयोजन था।

6.11.3 अभियांत्रिकी-शिक्षा में फ्रांसीसी क्रांति

व्यवस्थित अभियांत्रिकी-शिक्षा का उद्भव फ्रांस में आरंभ हुआ, जहाँ राज्य के महत्त्वाकांक्षी अवसंरचना कार्यक्रम की माँगों ने तकनीकी रूप से प्रशिक्षित व्यावसायिकों की अभूतपूर्व आवश्यकता उत्पन्न की। रूपांतरण *Corps des Ponts et Chaussées* , जिसकी स्थापना फ्रांस के विस्तृत होते सडक, सेतु और नहर संजाल के प्रबंधन के लिए 1716 में हुई थी, से आरंभ हुआ। प्रारंभ में प्रशिक्षुता और व्यावहारिक अनुभव पर निर्भर यह corps 1747 में सरकार द्वारा संसार के प्रथम असैनिक अभियांत्रिकी विद्यालय *École des Ponts et Chaussées* की स्थापना करने पर कहीं अधिक महत्त्वपूर्ण संस्था में विकसित हुआ।

ज्याँ-रोदोल्फ पेरोने के निर्देशन में *École!Ponts et Chaussées* ने एक क्रांतिकारी पाठ्यक्रम विकसित किया, जिसमें दृढ गणितीय शिक्षण को सर्वेक्षण, द्रवचालन और निर्माण के व्यावहारिक प्रशिक्षण के साथ संतुलित किया गया था। वास्तविक अभियांत्रिकी समस्याओं पर इन सिद्धांतों को लागू करने से पहले विद्यार्थी ज्यामिति, यांत्रिकी और कलन का अध्ययन करते थे—यह शिक्षण-दृष्टिकोण पारंपरिक शिल्प-प्रशिक्षुता से मूलतः भिन्न था।

इस फ्रांसीसी नवाचार की परिणति क्रांतिकाल के दौरान 1794 में स्थापित *École!Polytechnique*, में हुई। सैन्य और असैनिक, दोनों प्रकार की सेवा के लिए अभियंताओं को प्रशिक्षित करने हेतु निर्मित Polytechnique ने युग के सर्वाधिक प्रतिष्ठित गणितज्ञों को संकाय में भर्ती किया, जिनमें लाग्राँज, लाप्लास, मोंज और इस अध्याय में परिचित कराए गए कई व्यक्ति सम्मिलित थे। विद्यालय के गणितीय रूप से दृढ पाठ्यक्रम ने यह सिद्धांत स्थापित किया कि सभी अभियांत्रिकी विषय अनुभवजन्य परंपरा के स्थान पर व्यवस्थित सैद्धांतिक ज्ञान पर आधारित होने चाहिए।

यह फ्रांसीसी प्रतिरूप शीघ्र ही पूरे यूरोप और उसके बाहर फैल गया। 1802 में स्थापित West Point स्थित अमेरिकी सैन्य अकादमी का अधीक्षक सिल्वेनस थायर (1817-1833) के अंतर्गत रूपांतरण हुआ; उन्होंने फ्रांस के राजनयिक अभियानों के दौरान *École!Polytechnique* का अध्ययन किया था। थायर के पुनर्गठन ने *Thayer System* प्रस्तुत किया, जिससे West Point अमेरिका का पहला वास्तविक अभियांत्रिकी विद्यालय बना और वह गणितीय दृष्टिकोण स्थापित हुआ जो पूरी उन्नीसवीं शताब्दी में अमेरिकी तकनीकी शिक्षा पर प्रभुत्व रखने वाला था।

समीक्षा प्रति

यूरोपीय संस्थाओं ने शीघ्र इसका अनुसरण किया, सारणी 6.15। कार्लज़रूहे पॉलिटेक्निक (1825) और वियना पॉलिटेक्निक (1815) ने फ्रांसीसी शिक्षण-विधियाँ अपनाईं, जबकि प्रशा, ऑस्ट्रिया और ब्रिटेन की मौजूदा सैन्य अकादमियों ने गणितीय आधारभूमि पर बल देने के लिए अपने पाठ्यक्रमों में सुधार किया। 1850 तक फ्रांसीसी नवाचार ने तकनीकी शिक्षा का नया अंतरराष्ट्रीय मानक बनाया था, जो आधुनिक अभियांत्रिकी विज्ञान की विशेषता सिद्धांत और व्यवहार के एकीकरण को मूर्त रूप देता था। इन संस्थाओं ने न केवल औद्योगिक युग का निर्माण करने वाले अभियंताओं को प्रशिक्षित किया, बल्कि अभियांत्रिकी को मान्य मानकों, व्यवस्थित ज्ञान और सामाजिक प्राधिकार वाले विशिष्ट व्यवसाय के रूप में भी स्थापित किया।

तालिका 6.15: यूरोप और उसके बाहर की प्रमुख अभियांत्रिकी तथा तकनीकी संस्थाएँ (1740-1850)

वर्ष	संस्था	स्थान	प्रकार	फ्रांसीसी प्रभाव/टिप्पणियाँ
1741	रॉयल मिलिटरी अकादमी	वूलविच, ब्रिटेन	सैन्य	फ्रांसीसी प्रतिरूप से पूर्व; तोपखाना & अभियांत्रिकी
1747	École des Ponts et Chaussées	पेरिस, फ्रांस	असैनिक	सिविल अभियांत्रिकी का **मूल प्रतिरूप**
1765	Bergakademie Freiberg	सैक्सनी	खनन	विशिष्ट तकनीकी प्रशिक्षण
1783	École des Mines	पेरिस, फ्रांस	खनन	फ्रांसीसी राज्य तकनीकी शिक्षा
1794	École Polytechnique	पेरिस, फ्रांस	सैन्य/असैनिक	यूरोपीय सुधारों का **प्रमुख प्रतिरूप**
1799	Bauakademie	बर्लिन, प्रशा	वास्तुकला	फ्रांसीसी विधियों का जर्मन अनुकूलन
1802	अमेरिकी सैन्य अकादमी	वेस्ट पॉइंट, अमेरिका	सैन्य	आरंभ में पारंपरिक; बाद में फ्रांसीसी प्रभाव
1802	रॉयल मिलिटरी कॉलेज	सैंडहर्स्ट, ब्रिटेन	सैन्य	ब्रिटिश सैन्य अभियांत्रिकी
1809	रेलवे अभियंता संस्थान	St. पीटर्सबर्ग, रूस	परिवहन	आरंभिक रूसी तकनीकी विद्यालय
1815	k.k. Polytechnisches Institut	वियना, ऑस्ट्रिया	पॉलिटेक्निक	फ्रांसीसी पाठ्यक्रम का प्रत्यक्ष अंगीकरण
1816	Real Academia de Artillería	सेगोविया, स्पेन	सैन्य	फ्रांसीसी विधियों का स्पेनी अंगीकरण
1817	वेस्ट पॉइंट (थायर सुधार)	वेस्ट पॉइंट, अमेरिका	सैन्य	**थायर ने Polytechnique का अध्ययन किया; पूर्ण फ्रांसीसी प्रतिरूप अपनाया गया**
1822	इंपीरियल मिलिटरी अकादमी	रियो द जेनेरो, ब्राज़ील	सैन्य	पुर्तगाली उपनिवेशी अनुकूलन
1825	Polytechnische Schule	कार्लज़रूहे, बाडेन	पॉलिटेक्निक	**Polytechnique का प्रबल प्रभाव**
1826	यूनिवर्सिटी कॉलेज लंदन	लंदन, ब्रिटेन	विश्वविद्यालय	अभियांत्रिकी संकाय; धर्मनिरपेक्ष शिक्षा
1827	Polytechnische Schule	म्यूनिख, बवेरिया	पॉलिटेक्निक	फ्रांसीसी गणितीय दृष्टिकोण
1828	Polytechnische Schule	ड्रेस्डेन, सैक्सनी	पॉलिटेक्निक	व्यवस्थित तकनीकी पाठ्यक्रम
1828	Koninklijke Militaire Academie	ब्रेडा, नीदरलैंड	सैन्य	डच सैन्य अभियांत्रिकी विद्यालय
1828	St. पीटर्सबर्ग संस्थान	St. पीटर्सबर्ग, रूस	प्रौद्योगिकी	पश्चिमी विधियों का रूसी अंगीकरण
1829	किंग्स कॉलेज लंदन	लंदन, ब्रिटेन	विश्वविद्यालय	अभियांत्रिकी विभाग स्थापित
1832	École Centrale des Arts et Manufactures	पेरिस, फ्रांस	अभियांत्रिकी	फ्रांसीसी औद्योगिक अभियांत्रिकी
1842	Koninklijke Academie	डेल्फ्ट, नीदरलैंड	सिविल अभियांत्रिकी	डच असैनिक अभियांत्रिकी विद्यालय
1844	École Nationale Supérieure des Mines	सेंट-एतिएन, फ्रांस	खनन	क्षेत्रीय फ्रांसीसी तकनीकी विद्यालय
1847	Eidgenössische Polytechnische Schule	ज़्यूरिख, स्विट्ज़रलैंड	पॉलिटेक्निक	स्विस संघीय तकनीकी विश्वविद्यालय

6.12 निष्कर्ष: प्राकृतिक दर्शन से अभियांत्रिकी विज्ञान तक

सत्रहवीं और अठारहवीं शताब्दियों ने यांत्रिकी के इतिहास में गहन रूपांतरण चिह्नित किया, जब यह विषय प्रेक्षण और ज्यामिति पर आधारित दार्शनिक अन्वेषण से गणितीय रूप से दृढ विज्ञान में विकसित हुआ। इस अध्याय में सर्वेक्षित व्यक्तियों—प्राचीन काल के मो-त्से और आर्किमिडीज़ से लेकर गैलीलियो, न्यूटन और बर्नूली परिवार होते हुए कोशी, नाविए

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और सेंट-वेनाँ तक—प्रत्येक ने इस रूपांतरण को आकार देने में आधारभूत भूमिका निभाई। उनके विचारों ने न केवल शास्त्रीय यांत्रिकी, बल्कि आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण, प्रत्यास्थता, द्रवगतिकी और परिवर्तनात्मक सिद्धांतों की भी आधारभूमि रखी। यह रूपांतरण न तो अपरिहार्य था, न सरल; इसके लिए उन बौद्धिक, संस्थागत और सांस्कृतिक परिवर्तनों का अभिसरण आवश्यक था जिन्होंने ज्ञान के सृजन और मान्यकरण की रीति को मूलतः बदल दिया।

पश्चदृष्टि में केवल उनके वैयक्तिक योगदानों की व्यापकता ही प्रभावशाली नहीं है, बल्कि उन्हें जोड़ने वाली बौद्धिक वंशावली का संजाल भी है। इनमें से अनेक वैज्ञानिक अपने पूर्ववर्तियों अथवा मार्गदर्शकों से सीधे प्रभावित हुए, जबकि उनके अपने कार्य ने अगली पीढ़ी को गहराई से आकार दिया। ऑयलर जैसे कुछ व्यक्ति युगों के बीच सेतु बने; नाविए जैसे अन्य ने व्यावहारिक ज्ञान को गणितीय ढाँचों द्वारा औपचारिक रूप देकर अभियांत्रिकी विज्ञान के युग के आगमन में सहायता की। इन व्यक्तियों के बीच व्यक्तिगत संबंध—मार्गदर्शन, प्रतिद्वंद्विताएँ, सहयोग और संघर्ष—यांत्रिक विज्ञान की तीव्र प्रगति को आगे बढ़ाने में उनकी वैयक्तिक खोजों जितने ही महत्त्वपूर्ण थे।

संभवतः सबसे महत्त्वपूर्ण यह है कि इस काल ने एक नए प्रकार के व्यावसायिक का उद्भव देखा: गणितीय परिष्कार को व्यावहारिक विशेषज्ञता के साथ जोड़ने वाला अभियंता-वैज्ञानिक। कूलॉम और नाविए जैसे व्यक्तियों ने दिखाया कि अमूर्त गणितीय विश्लेषण वास्तविक अभियांत्रिकी समस्याओं को हल कर सकता है, जबकि बर्नूली परिवार और ऑयलर ने दिखाया कि व्यावहारिक चुनौतियाँ गहरी सैद्धांतिक अंतर्दृष्टियों को प्रेरित कर सकती हैं। सिद्धांत और व्यवहार का यह एकीकरण आधुनिक अभियांत्रिकी की परिभाषक विशेषता बना और आज भी संरचनात्मक यांत्रिकी के लिए आवश्यक है।

यह रूपांतरण केवल वैयक्तिक प्रतिभा से नहीं, बल्कि गहरे संस्थागत परिवर्तनों से संभव हुआ। वैज्ञानिक अकादमियों—लंदन की रॉयल सोसाइटी (1660), पेरिस की *Académie des Sciences* (1666), बर्लिन अकादमी (1700) और St. पीटर्सबर्ग अकादमी (1724)—की स्थापना ने ज्ञान के मान्यकरण और प्रसार की नई व्यवस्थाएँ बनाईं। *École des Ponts et Chaussées* (1747) से *École Polytechnique* (1794) तक अभियांत्रिकी विद्यालयों की स्थापना ने व्यवस्थित तकनीकी शिक्षा स्थापित की, जिसमें गणितीय दृढ़ता को व्यावहारिक अनुप्रयोग के साथ जोड़ा गया था। इन संस्थाओं ने अभियांत्रिकी को प्रशिक्षुता से सीखे जाने वाले शिल्प से वैज्ञानिक सिद्धांतों पर आधारित व्यवसाय में रूपांतरित किया।

इस अध्याय में सर्वेक्षित सीमाचिह्न ग्रंथ—गैलीलियो के *Discorsi* से नाविए के *Leçons* तक—वे माध्यम बने जिनसे अव्यक्त ज्ञान औपचारिक विज्ञान में बदला। इन पुस्तकों ने केवल खोजों को अभिलिखित नहीं किया; उन्होंने व्यावसायिकों की पीढ़ियों को प्रशिक्षित किया, दृढ़ता के मानक स्थापित किए और अभियांत्रिकी-विमर्श की साझा भाषा बनाई। महान पुस्तकें अनुभवजन्य शिल्प से गणितीय दृढ़ता और संगणकीय प्रभुत्व तक की बौद्धिक आरोहण-यात्रा अंकित करती हैं: यूक्लिड के *Elements* की निगमनात्मक शुद्धता से न्यूटन के क्रांतिकारी सूत्रीकरणों तक, नाविए द्वारा अभियांत्रिकी में प्रत्यास्थता-सिद्धांत प्रस्तुत करने से आव्यूह-विधियों और परिमित अवयव विश्लेषण के उदय तक।

ये ग्रंथ केवल ऐतिहासिक दस्तावेज़ नहीं हैं; वे वह पाठ हैं जिस पर संरचनात्मक अभियांत्रिकी और वास्तुकला के विषय निर्मित हैं। आज हम जिन समस्याओं को हल करते हैं—चाहे सेतु, गगनचुंबी भवन अथवा संगणकीय प्रतिरूप का अभिकल्प हो—वे इन कार्यों में प्रलेखित वैचारिक सफलताओं से आकार पाती हैं। इन्हें समझना व्यवसाय के प्रति हमारी सराहना को गहरा करता है—केवल तकनीकों और सूत्रों के संग्रह के रूप में नहीं, बल्कि तर्क, सृजनात्मकता और अन्वेषण की निरंतर विकसित होती वंशावली के रूप में।

जब हम इस ऐतिहासिक आधारभूमि से उभरे तकनीकी विकासों का परीक्षण करने के लिए आगे बढ़ते हैं, तब यह स्मरण रखना उचित है कि प्रत्येक समीकरण, प्रत्येक सिद्धांत और प्रत्येक विधि के पीछे जिज्ञासा, दृढ़ता और बौद्धिक साहस की एक मानवीय कथा है। आज हम जिस संरचनात्मक यांत्रिकी का व्यवहार करते हैं, उस पर इन उल्लेखनीय व्यक्तियों और उस असाधारण काल की छाप है जिसमें वे रहे और कार्यरत थे।

6.12.1 सार-सारणियाँ

इस अध्याय में सर्वत्र विवेचित विकासों का संश्लेषण करने और इन प्रमुख योगदानकर्ताओं की परस्पर संबद्धता उजागर करने के लिए निम्न सारणियाँ विषयानुसार व्यवस्थित संक्षिप्त सार प्रस्तुत करती हैं। वे मिलकर आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण की आधारभूत बौद्धिक वंशावली में ऐतिहासिक अभिविन्यास और अंतर्दृष्टि, दोनों प्रदान करती हैं।

समीक्षा प्रति

6.12.1.1 प्रमुख योगदानकर्ता और उनका प्रभाव

सारणी 6.16 इस अध्याय में परिचित कराए गए प्रमुख व्यक्तियों की जीवनावधियों, प्रमुख उपलब्धियों और पारस्परिक प्रभावों का सार प्रस्तुत करती है। यह सारणीबद्ध दृष्टि आधुनिक युग तक संरचनात्मक यांत्रिकी के विकास के लिए संदर्भ का कार्य करती है। दिखाई गई वंशावलियाँ समकालीन अभियांत्रिकी-शिक्षा और व्यवहार को आकार देना जारी रखती हैं तथा इन आधारभूत व्यक्तियों के स्थायी प्रभाव को प्रदर्शित करती हैं।

तालिका 6.16: यांत्रिकी के प्रमुख योगदानकर्ताओं और उनके प्रभाव का सार

नाम (तिथियाँ)	प्रमुख योगदान	प्रभावित किया / जिनसे प्रभावित हुए
	आधारभूमि और दर्शन	
मो-त्से (c. 470–391 BCE)	आरंभिक स्थैतिकी; उत्तोलक-सिद्धांत; चीनी परंपरा में संतुलन-विश्लेषण।	स्वतंत्र विकास; पश्चिमी विद्वानों द्वारा पुनःखोज
आर्किमिडीज़ (c. 287–212 BCE)	उत्तोलक का नियम; द्रवस्थैतिकी; गुरुत्व-केंद्र; यांत्रिकी में गणितीय दृढता।	बाद की समस्त स्थैतिकी की आधारभूमि
लियोनार्दो दा विंची (1452–1519)	अनुभवजन्य प्रेक्षण; यांत्रिक अभिकल्प; आरंभिक संरचनात्मक अंतर्दृष्टियाँ; मध्ययुगीन और आधुनिक दृष्टिकोणों के बीच सेतु।	बाद की अनुभवजन्य विधियों को प्रभावित किया; गैलीलियो के प्रायोगिक दृष्टिकोण का पूर्वाभास दिया
रेने देकार्त (1596–1650)	निर्देशांक ज्यामिति; यंत्रवादी विश्व-दृष्टि; अरस्तूवादी भौतिकी का अस्वीकरण।	न्यूटन और बर्नूली परिवार को प्रभावित किया
गैलीलियो गैलिली (1564–1642)	शुद्धगतिकी, मापानुपात-नियम, पदार्थ-सामर्थ्य, अनुभवजन्य विधियाँ।	न्यूटन के पूर्ववर्ती; हुक को प्रभावित किया
ब्लेज़ पास्कल (1623–1662)	द्रवस्थैतिकी, पास्कल का नियम, प्रायोगिक विज्ञान की विधियाँ।	तोरिचेली, फर्मा; तरल स्थैतिकी को प्रभावित किया
	प्रत्यास्थता, पदार्थ-सामर्थ्य और संरचनाएँ	
रॉबर्ट हुक (1635–1703)	हुक का नियम; स्प्रिंग यांत्रिकी; प्रायोगिक विज्ञान।	न्यूटन और बर्नूली परिवार को प्रभावित किया
याकॉब बर्नूली (1654–1705)	*Elastica* सिद्धांत; धरनों का नमन और संतुलन; प्रायिकता-सिद्धांत।	ऑयलर और डैनियल बर्नूली को प्रेरित किया
योहान बर्नूली (1667–1748)	लाइबनित्सीय कलन में प्रवीणता; उन्नत यांत्रिकी और शिक्षा।	ऑयलर को पढाया; डैनियल बर्नूली को प्रभावित किया
डैनियल बर्नूली (1700–1782)	प्रत्यास्थता में परिवर्तनात्मक सिद्धांत; द्रवगतिकी; अणुगति सिद्धांत।	ऑयलर को *elastica* का परिवर्तनात्मक रूप सुझाया
शार्ल-ओगुस्तैं द कूलॉम (1736–1806)	घर्षण-नियम; ऐंठन यांत्रिकी; स्थैतिकी और पदार्थ-प्रतिरोध।	नाविए के पूर्ववर्ती; अभियांत्रिकी विज्ञान को प्रभावित किया
क्लोद-लुई नाविए (1785–1836)	धरन-नमन सिद्धांत; प्रत्यास्थता और तरल यांत्रिकी के समीकरण।	फूरिये के शिष्य; सेंट-वेनाँ को प्रभावित किया

अगले पृष्ठ पर जारी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 6.16: यांत्रिकी के प्रमुख योगदानकर्ताओं और उनके प्रभाव का सार (जारी)

नाम (तिथियाँ)	प्रमुख योगदान	प्रभावित किया / जिनसे प्रभावित हुए
सिमेओन-दनी पॉइसन (1781–1840)	पॉइसन अनुपात प्रस्तुत किया; प्रत्यास्थता-सिद्धांत को विस्तृत किया।	नाविए से वाद-विवाद; सेंट-वेनाँ को प्रभावित किया
आदेमार जे.सी.बी. द सेंट-वेनाँ (1797–1886)	प्रिज़्मीय छड़ों की ऐंठन; सेंट-वेनाँ का सिद्धांत; प्रतिबल-वितरण।	नाविए और पॉइसन के बाद प्रत्यास्थता को औपचारिकीकृत किया
	गणितीय यांत्रिकी	
आइज़क न्यूटन (1642–1727)	गति के नियम; गुरुत्वाकर्षण; *Principia*; कलन (फ़्लक्सियन)।	लाइबनित्स से प्रतिद्वंद्विता; समस्त शास्त्रीय यांत्रिकी को प्रभावित किया
गॉटफ़्रीड लाइबनित्स (1646–1716)	कलन; अवकल समीकरण; *vis viva*; विज्ञान के लिए संस्थागत दृष्टि।	हाइगेन्स से मार्गदर्शन; योहान बर्नूली को पढ़ाया; महाद्वीपीय गणित को प्रभावित किया
क्रिस्टियान हाइगेन्स (1623–1695)	लोलक-सिद्धांत; तरंग प्रकाशिकी; अभिकेंद्री बल; यांत्रिकी में गणितीय परिशुद्धता।	लाइबनित्स के मार्गदर्शक; बर्नूली परिवार को प्रभावित किया; न्यूटनीय दृष्टिकोण का विकल्प
लियोनहार्ड ऑयलर (1707–1783)	विश्लेषणात्मक यांत्रिकी; परिवर्तन-कलन; *elastica* समाधान; विपुल गणितीय योगदान।	योहान बर्नूली के शिष्य; डैनियल के परिवर्तनात्मक विचार विकसित किए; बाद की समस्त यांत्रिकी को प्रभावित किया
ज्याँ ल रों द'आलाँबेर (1717–1783)	द'आलाँबेर का सिद्धांत; आंशिक अवकल समीकरण।	लाग्राँज को प्रभावित किया; ऑयलर के समकालीन
जोज़ेफ-लुई लाग्राँज (1736–1813)	लाग्राँजी यांत्रिकी; परिवर्तन-कलन; विश्लेषणात्मक यांत्रिकी।	न्यूटनीय और परिवर्तनात्मक विधियों को एकीकृत किया
ओगुस्तैं-लुई कोशी (1789–1857)	प्रतिबल-प्रदिश; दृढ़ प्रत्यास्थता; सातत्यक यांत्रिकी की आधारभूमि।	ऑयलर से प्रभावित; आधुनिक प्रत्यास्थता के पूर्ववर्ती
जॉर्ज ग्रीन (1793–1841)	विभव-सिद्धांत; ग्रीन सर्वसमिकाएँ और फलन; ऊर्जा-विधियाँ।	गणितीय भौतिकी और क्षेत्र-सिद्धांत को प्रेरित किया

6.12.1.2 सीमाचिह्न प्रकाशन

सारणी 6.17 इस अध्याय में उद्धृत प्रमुख कार्यों को प्राचीन काल से बीसवीं शताब्दी तक कालक्रमानुसार सूचीबद्ध करती है। ये ग्रंथ भौतिक परिघटनाओं के क्रमिक *mathematization* और विज्ञान-आधारित विषय के रूप में अभियांत्रिकी के उद्भव के निर्णायक क्षण चिह्नित करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 6.17: संरचनात्मक यांत्रिकी के विकास में सीमाचिह्न प्रकाशन

वर्ष	लेखक	शीर्षक	महत्त्व
		प्राचीन और मध्ययुगीन आधारभूमि	
5वीं शता. BCE	मो-त्से	*Mo Jing* (Mozi, 2013)	स्थैतिकी, उत्तोलकों और यांत्रिक लाभ पर चीनी संकलन
c.300 BCE	यूक्लिड	*Elements* (Euclid and Heath, 1956)	ज्यामिति और निगमनात्मक तर्क का आधारभूत कार्य
3री शता. BCE	अरस्तू(?)	*Mechanica* (Aristotle, 2000)	सरल मशीनों और बल-सिद्धांतों का आरंभिक व्यवस्थित विश्लेषण
c.240 BCE	अपोलोनियस	*Conics* (Perga, 1896)	शांकव काटों का गणितीय विवेचन
3री शता. BCE	आर्किमिडीज़	*Collected Works* (Archimedes and Heath, 1897)	स्थैतिकी, द्रवस्थैतिकी और संतुलन की आधारभूमि
1ली शता. BCE	विट्रुवियस	*De Architectura* (Vitruvius and Morgan, 1914)	शास्त्रीय वास्तुकलात्मक ग्रंथ: *firmitas, utilitas, venustas*
1ली शता. CE	हीरो	*Mechanica, Pneumatica* (Alexandria, 1851)	व्यावहारिक यांत्रिकी और द्रवचालित निकाय
11वीं शता.	अल-बीरूनी	*Kitab fi Tahqiq* (Al-Bīrūnī, 1910)	स्थैतिकी, घनत्व-मापन, द्रवस्थैतिकी
11वीं शता.	इब्न अल-हैथम	*Kitab al-Manazir* (Haytham, 1989)	प्रायोगिक सत्यापन सहित गणितीय प्रतिरूपण
1121	अल-ख़ाज़िनी	*Treatise on Mechanics* (Khāzinī, 2001)	मध्ययुगीन संतुलन-विश्लेषण और द्रवस्थैतिकी
		पुनर्जागरण और आरंभिक आधुनिक काल	
c.1452	अल्बेर्ती	*De Re Aedificatoria* (Alberti, 1988)	पुनर्जागरण का प्रथम व्यापक वास्तुकलात्मक ग्रंथ
15वीं–16वीं शता.	लियोनार्दो	*Notebooks* (Vinci, 1938)	यांत्रिकी और पदार्थ-सामर्थ्य में अग्रणी अध्ययन
1543	कोपर्निकस	*De Revolutionibus* (Copernicus, 1995)	सूर्यकेंद्रीय प्रतिरूप; गणितीय प्रतिरूपण का प्रतिमान
1570	पल्लादियो	*I Quattro Libri* (Palladio, 1570)	शास्त्रीय सिद्धांत का निर्माण-व्यवहार के साथ संश्लेषण
1586	स्टेविन	*De Beghinselen der Weeghconst* (Stevin, 1955–1966)	स्थैतिकी का गणितीय रूपांतरण
1620	बेकन	*Novum Organum* (Bacon, 2000)	अनुभवजन्य विधि की आधारभूमि
1632	गैलीलियो	*Dialogo* (Galilei, 1632)	कोपर्निकसी और टॉलेमी निकायों पर संवाद
1637	देकार्त	*Discours de la méthode* (Descartes, 1637b)	कार्तीय बुद्धिवाद; वैज्ञानिक विधि की आधारभूमि
1638	गैलीलियो	*Discorsi* (Galilei, 1638)	पदार्थ-सामर्थ्य और शुद्धगतिकी की आधारभूमि

अगले पृष्ठ पर जारी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 6.17: संरचनात्मक यांत्रिकी के विकास में सीमाचिह्न प्रकाशन (जारी)

वर्ष	लेखक	शीर्षक	महत्त्व
		शास्त्रीय यांत्रिकी और कलन	
1673	हाइगेन्स	*Horologium Oscillatorium* (Huygens, 1986)	गतिकी, घूर्णन गति, अपकेंद्री बल
1678	हुक	*De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678)	हुक का नियम और रैखिक प्रत्यास्थता
1687	न्यूटन	*Principia* (Newton, 1687)	गति के नियम और शास्त्रीय यांत्रिकी का ढाँचा
1694	जे. बर्नूली	*Curvatura Laminae Elasticae* (Bernoulli, Jakob, 1694)	प्रत्यास्थ धरनों की वक्रता
1600 के दशक का उत्तरार्ध	लाइबनित्स	*Collected Works* (Leibniz, 1969)	कलन और परिवर्तनात्मक विधियाँ
1736	ऑयलर	*Mechanica*	न्यूटनीय यांत्रिकी का विश्लेषणात्मक पुनःसूत्रीकरण
1738	डी. बर्नूली	*Hydrodynamica* (Bernoulli, Daniel, 1738)	तरल यांत्रिकी और अणुगति सिद्धांत
1743	द'आलाँबेर	*Traité de dynamique* (d'Alembert, 1743)	द'आलाँबेर का सिद्धांत
1744	ऑयलर	*Methodus inveniendi* (Euler, 1744b)	परिवर्तन-कलन
1773	कूलॉम	*Sur une Application* (Coulomb, 1773b)	संरचनात्मक स्थैतिकी में परिवर्तनात्मक विधियाँ
1788	लाग्राँज	*Mécanique Analytique* (Lagrange, 1788)	परिवर्तनात्मक सिद्धांतों द्वारा यांत्रिकी
		उन्नीसवीं शताब्दी का अभियांत्रिकी विज्ञान	
1826	नाविए	*Leçons* (Navier, 1826)	प्रत्यास्थ धरन-सिद्धांत और उदासीन अक्ष
1820s–40s	कोशी	*Collected Works* (Cauchy, 1841)	प्रतिबल-प्रदिश और सातत्यक यांत्रिकी
1843	मोज़ली	*Mechanical Principles* (Moseley, 1843)	संरचनाओं पर लागू प्रत्यास्थता-सिद्धांत
1850s–60s	सेंट-वेनाँ	*Collected Works* (Saint-Venant, 1855b)	ऐंठन, नमन, प्रतिबल-संकेंद्रण
1858	रैंकिन	*Manual of Applied Mechanics* (Rankine, 1858)	सिद्धांत और व्यवहार के बीच सेतु
1864	मैक्सवेल	*On Reciprocal Figures* (Maxwell, 1864a)	ट्रस-विश्लेषण के लिए व्युत्क्रम आरेख
1866	कुलमान	*Die Graphische Statik* (Culmann, 1866)	आलेखीय स्थैतिकी का औपचारिकीकरण
1874	मोहर	*Lehrbuch der Mechanik* (Mohr, 1874)	प्रतिबल-रूपांतरण के लिए मोहर वृत्त

अगले पृष्ठ पर जारी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 6.17: संरचनात्मक यांत्रिकी के विकास में सीमाचिह्न प्रकाशन (जारी)

वर्ष	लेखक	शीर्षक	महत्त्व
1886	टॉडहंटर	*History of Elasticity* (Todhunter and Pearson, 1893)	प्रत्यास्थता-विकास का ऐतिहासिक विवरण
		बीसवीं शताब्दी	
1953	तिमोशेंको	*History of Strength of Materials* (Timoshenko, 1953)	शास्त्रीय ऐतिहासिक सर्वेक्षण
1955	ड्यूगा	*A History of Mechanics* (Dugas, 1955)	स्थैतिकी से आधुनिक सिद्धांत तक यांत्रिकी का विकास
1968	ट्रूज़डेल	*Essays in History of Mechanics* (Truesdell, 1968)	सातत्यक यांत्रिकी का आलोचनात्मक विश्लेषण

6.12.1.3 अभियांत्रिकी-शिक्षा संस्थाएँ

सारणी 6.18 1740 और 1850 के बीच स्थापित प्रमुख अभियांत्रिकी संस्थाओं का सार प्रस्तुत करती है तथा व्यवस्थित तकनीकी शिक्षा के फ्रांसीसी प्रतिरूप का यूरोप और उसके बाहर प्रसार दर्शाती है।

6.12.1.4 प्रमुख बौद्धिक विवाद

सारणी 6.19 यांत्रिकी के विकास को आकार देने वाले प्रमुख बौद्धिक संघर्षों का प्रलेखन करती है। प्रायः कटु होने के बावजूद इन विवादों ने प्रतिभागियों को अधिक दृढ तर्क और स्पष्ट व्याख्याएँ विकसित करने के लिए बाध्य करके वैज्ञानिक प्रगति को अक्सर तीव्र किया।

प्रारूप पाण्डुलिपि

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 6.18: प्रमुख अभियांत्रिकी और तकनीकी संस्थाएँ (1740–1850)

वर्ष	संस्था	स्थान	प्रकार	टिप्पणियाँ
1741	रॉयल मिलिटरी अकादमी	वूलविच, ब्रिटेन	सैन्य	फ्रांसीसी प्रतिरूप से पूर्व; तोपखाना & अभियांत्रिकी
1747	École des Ponts et Chaussées	पेरिस, फ्रांस	असैनिक	सिविल अभियांत्रिकी का **मूल प्रतिरूप**
1765	Bergakademie Freiberg	सैक्सनी	खनन	विशिष्ट तकनीकी प्रशिक्षण
1783	École des Mines	पेरिस, फ्रांस	खनन	फ्रांसीसी राज्य तकनीकी शिक्षा
1794	École Polytechnique	पेरिस, फ्रांस	मिश्रित	यूरोपीय सुधारों का **प्रमुख प्रतिरूप**
1799	Bauakademie	बर्लिन, प्रशा	वास्तुकला	फ्रांसीसी विधियों का जर्मन अनुकूलन
1802	अमेरिकी सैन्य अकादमी	वेस्ट पॉइंट, अमेरिका	सैन्य	आरंभ में पारंपरिक; बाद में फ्रांसीसी प्रतिरूप
1815	k.k. Polytechnisches Institut	वियना, ऑस्ट्रिया	पॉलिटेक्निक	फ्रांसीसी पाठ्यक्रम का प्रत्यक्ष अंगीकरण
1817	वेस्ट पॉइंट (थायर सुधार)	वेस्ट पॉइंट, अमेरिका	सैन्य	पूर्ण फ्रांसीसी प्रतिरूप अपनाया गया
1825	Polytechnische Schule	कार्लज़ूरूहे, बाडेन	पॉलिटेक्निक	Polytechnique का प्रबल प्रभाव
1826	यूनिवर्सिटी कॉलेज लंदन	लंदन, ब्रिटेन	विश्वविद्यालय	अभियांत्रिकी संकाय; धर्मनिरपेक्ष शिक्षा
1847	ETH ज़्यूरिख	ज़्यूरिख, स्विट्ज़रलैंड	पॉलिटेक्निक	स्विस संघीय तकनीकी विश्वविद्यालय

प्रारूप पाठ्यक्रम

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 6.19: यांत्रिकी के विकास में प्रमुख बौद्धिक संघर्ष

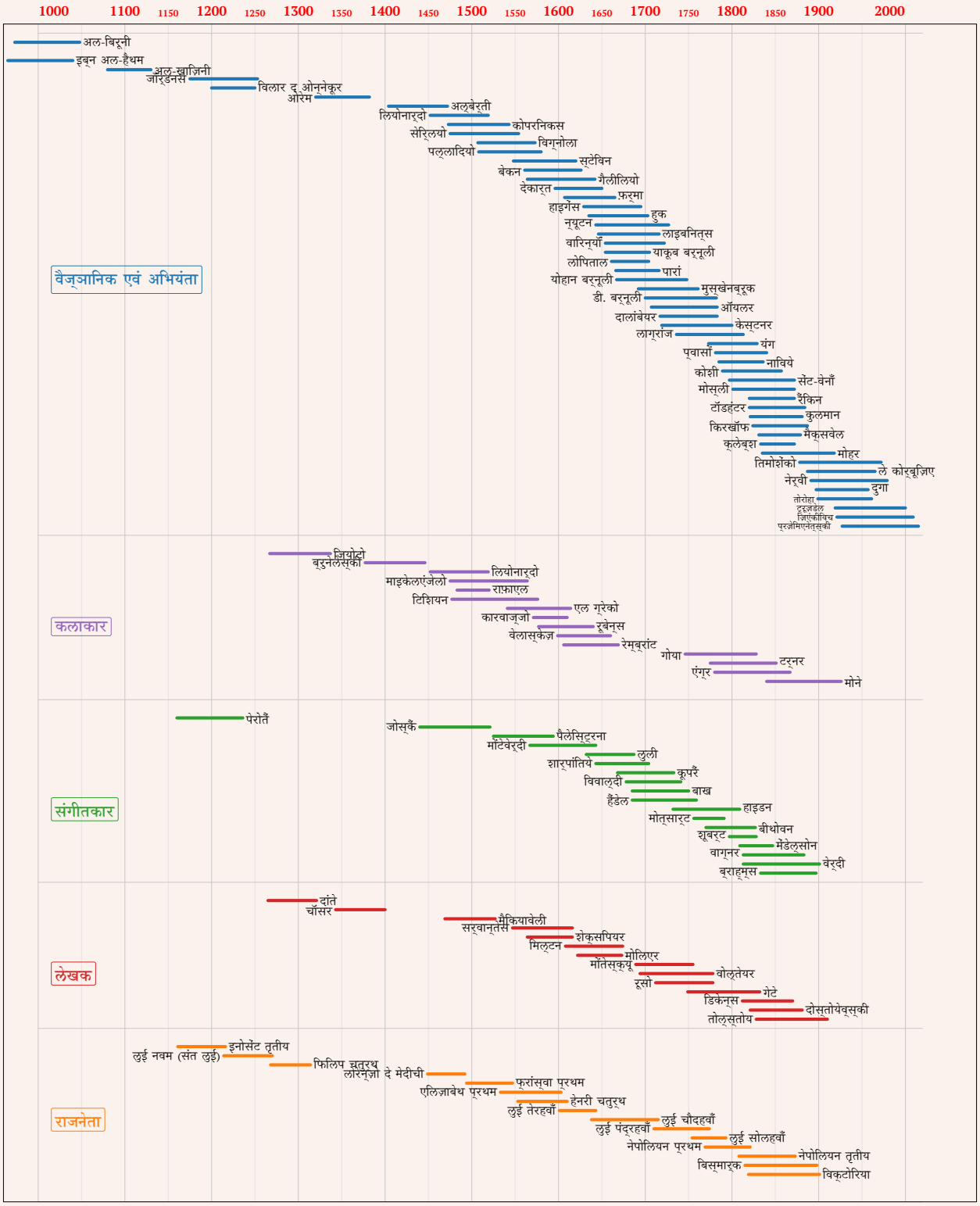
युग	व्यक्ति	विषय	विवाद की प्रकृति	परिणाम
16वीं शता.	गैलीलियो बनाम चर्च	सूर्यकेंद्रीयता	गैलीलियो ने कोपर्निकस का बचाव किया; चर्च ने सूर्यकेंद्रीयता की निंदा की	धर्माधिकरण ने गैलीलियो पर अभियोग चलाया
17वीं शता.	न्यूटन बनाम हुक	गुरुत्व का नियम	हुक ने प्राथमिकता का दावा किया; न्यूटन ने विरोध किया	न्यूटन ने *Principia* में हुक का उल्लेख नहीं किया
17वीं शता.	न्यूटन बनाम लाइबनित्स	कलन	स्वतंत्र खोजों ने राष्ट्रवादी विवाद उत्पन्न किया	अंततः दोनों को श्रेय मिला
18वीं शता.	बर्नूली परिवार	परिवर्तन-कलन	याकॉब, योहान और डैनियल के बीच प्रतिद्वंद्विता तथा साहित्यिक चोरी के दावे	प्रमुख प्रगतियों को प्रेरित किया
18वीं शता.	ऑयलर बनाम द’आलाँबेर	कंपित तंत्रियाँ	PDE सूत्रीकरण पर असहमति	विश्लेषण की आधारभूमि को आगे बढाया
19वीं शता.	पॉइसन बनाम नाविए	प्रत्यास्थता-सिद्धांत	सातत्यक बनाम आणविक मान्यताएँ	कोशी ने दोनों दृष्टिकोणों को एकीकृत किया
19वीं शता.	ब्रिटिश बनाम महाद्वीपीय	यांत्रिकी	ब्रिटिश फ्लक्सियन बनाम महाद्वीपीय दृढता	दीर्घकालीन सांस्कृतिक विभाजन उत्पन्न हुआ

6.12.1.5 ऐतिहासिक समयरेखा

आकृति 6.21 इस अध्याय में परिचित कराए गए वैज्ञानिकों (और अन्य व्यक्तियों) को सांस्कृतिक तथा राजनीतिक इतिहास के व्यापक संदर्भ में रखती है और दिखाती है कि यांत्रिकी का विकास कला, संगीत, साहित्य और शासन के रूपांतरणों के समानांतर कैसे हुआ।

प्रारूप प्रकाशन

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 6.21: ऐतिहासिक समयरेखा: वैज्ञानिक, कलाकार, संगीतकार, लेखक और राजनेता (1000–2020)। Truesdell, 1968 से अनुकूलित और विस्तारित; ध्यान दें कि वैज्ञानिकों की पंक्ति के सभी नाम इस अध्याय में सम्मिलित हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



पन्नीनी, पैंथियन का आंतरिक दृश्य

पन्नीनी का प्रकाशमय आंतरिक दृश्य उदात्त ज्यामिति को मूर्त करता है: बेलन, अर्धगोला और प्रकाश की आँख।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंतराल II: मध्ययुगीन अंतर्दृष्टियों से आधुनिक संरचनात्मक यांत्रिकी तक: (1351-1879)

इन तीन अध्यायों से उभरती संरचनात्मक यांत्रिकी और ज्यामितीय विश्लेषण की कथा पाँच शताब्दियों से अधिक समय में विस्तृत बौद्धिक विकास का आकर्षक और कभी-कभी जटिल वृत्तांत है। खोजों की रैखिक प्रगति से बहुत दूर, हमारी समझ का विकास विभिन्न देशों, शताब्दियों और गणितीय परंपराओं के दर्जनों प्रतिभाशाली मस्तिष्कों द्वारा बुना गया जटिल ताना-बाना है। कुछ योगदानकर्ताओं ने अपने पूर्ववर्तियों के कार्य पर सीधे निर्माण किया; अन्य ने सिद्धांतों की स्वतंत्र रूप से पुनःखोज की; और कुछ ने ऐसी असंबद्ध प्रतीत होने वाली समस्याओं का अनुसरण किया जो बाद में आधारभूत सिद्ध हुईं।

इस कथा को विशेष रूप से प्रभावशाली बनाने वाली बात यह है कि शुद्ध गणित में सैद्धांतिक सफलताओं—वक्रता पर ओरेम का चिंतन, चक्रजों का हाइगेन्स का अध्ययन, कलन का न्यूटन द्वारा विकास—को संरचनात्मक अभियांत्रिकी में बार-बार अप्रत्याशित अनुप्रयोग मिले। इसके विपरीत व्यावहारिक अभियांत्रिकी चुनौतियों—लटकती शृंखला, नत छड़, व्याकुंचित स्तंभ—ने गणितीय विश्लेषण में आधारभूत प्रगतियों को प्रेरित किया। परिणाम ऐसा वैज्ञानिक आख्यान है जिसमें अमूर्त सिद्धांत और व्यावहारिक अनुप्रयोग अविच्छेद्य रूप से परस्पर गुंथे हैं।

आज जिस रूप में हम संरचनात्मक यांत्रिकी को जानते हैं, उसकी परिपक्वता का अस्तित्व किसी एक प्रतिभा का नहीं, बल्कि उत्तर-मध्ययुगीन काल से औद्योगिक क्रांति तक प्राकृतिक दार्शनिकों, गणितज्ञों, प्रयोगकर्ताओं और अभियंताओं की संचित अंतर्दृष्टियों का ऋणी है। लियोनार्दो और गैलीलियो जैसे कुछ व्यक्तियों ने ऐसे आधारभूत प्रेक्षण किए जिन्हें शताब्दियों तक पूरी तरह नहीं समझा गया। बर्नूली परिवार जैसे अन्य व्यक्तियों ने वैज्ञानिक वंश बनाए, जिनमें अंतर्दृष्टियाँ पीढ़ी-दर-पीढ़ी चलीं। ऑयलर जैसे कुछ अन्य ने व्यापक सैद्धांतिक ढाँचे बनाने के लिए अपने पूर्ववर्तियों के कार्य का संश्लेषण और विस्तार किया।

सारणी 6.20 अध्यायों 7, 8, और 9 में विवेचित प्रमुख विकासों का कालक्रमानुसार संश्लेषण प्रस्तुत करती है तथा इन खोजों की परस्पर संबद्ध प्रकृति और इन्हें संभव बनाने वाले व्यक्तियों की उल्लेखनीय सृजनात्मकता, दोनों को प्रकट करती है।

तालिका 6.20: संरचनात्मक यांत्रिकी और ज्यामितीय विश्लेषण की पूर्ण ऐतिहासिक समयरेखा (1351–1879)

तिथि	योगदानकर्ता	योगदान	अध्याय	महत्त्व
1351	निकोल ओरेम	सरलता से विचलन के रूप में वक्रता की गुणात्मक संकल्पना	अध्या. 8	वक्रता को समझने की दिशा में प्रथम वैचारिक सफलता
c. 1490	लियोनार्दो दा विंची	तार-सामर्थ्य के लिए लटकती टोकरी का प्रयोग	अध्या. 7	व्यवस्थित सामर्थ्य-परीक्षण की सर्वप्रथम संकल्पना
c. 1500	लियोनार्दो दा विंची	*Codex Madrid*: रैखिक विकृति-वितरण, उदासीन अक्ष की संकल्पना	अध्या. 7	बर्नूली के धरन-सिद्धांत का 200 वर्ष पहले पूर्वाभास
c. 1500	लियोनार्दो दा विंची	कैटिनरी के रेखाचित्र (गुरुत्व-केंद्र के अध्ययन)	अध्या. 9	लटकती शृंखला की समस्या का आरंभिक प्रेक्षण
1614	आइज़क बीकमान	तंत्री-विस्तार का प्रेक्षण: “लंबी तंत्रियाँ अधिक विस्तृत होती हैं”	अध्या. 7	विकृति-संकल्पना का प्रथम अप्रत्यक्ष संदर्भ
1634	साइमन स्टेविन	सिद्ध किया कि लटकती शृंखला परवलयाकार नहीं होती	अध्या. 9	गैलीलियो की मान्यता का खंडन

समीक्षा प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तिथि	योगदानकर्ता	योगदान	अध्याय	महत्त्व
1638	गैलीलियो गैलिली	*Discourses*: बहिर्धारी धरन का विश्लेषण; कैटिनरी को परवलयाकार माना	अध्या. 7, अध्या. 9	आधारभूत धरन-सिद्धांत; कैटिनरी की गलत मान्यता
1644	रेने देकार्त	*Principia Philosophiae*: पदार्थ-संसंजन की यांत्रिक व्याख्याएँ	अध्या. 7	अरस्तूवादी से यांत्रिक सिद्धांतों की ओर संक्रमण
c. 1646	क्रिस्टियान हाइगेन्स	सिद्ध किया कि शृंखला परवलय नहीं है; खोजा कि निलंबन-सेतु का केबल परवलयाकार होता है	अध्या. 9	कैटिनरी और परवलयाकार केबलों के बीच निर्णायक अंतर
1657	क्रिस्टियान हाइगेन्स	लोलक-घड़ी का आविष्कार	अध्या. 8	समकालिक-पतन समस्या को प्रेरित किया
1658–1659	क्रिस्टियान हाइगेन्स	समकालिक-पतन वक्र के रूप में चक्रज; एवोल्यूट/इनवोल्यूट का व्यवस्थित सिद्धांत	अध्या. 8	वक्रता की ज्यामितीय आधारभूमि स्थापित की
1671	आइज़क न्यूटन	*Methodus Fluxionum*: वक्रता के विश्लेषणात्मक सूत्र, वक्रता-केंद्र	अध्या. 8	वक्रता का प्रथम दृढ़ गणितीय विवेचन
1684	गॉटफ्रीड लाइबनित्स	गैलीलियो की अविस्तार्य धरन-मान्यता की आलोचना	अध्या. 7	धरन-सिद्धांत में महत्त्वपूर्ण वैचारिक प्रगति
1686	गॉटफ्रीड लाइबनित्स	चार-बिंदु संपर्क द्वारा आसन्न वृत्त को परिभाषित किया	अध्या. 8	वक्रता की ज्यामितीय आधारभूमि
1686	एड्म मारीओत	धरनों में रैखिक प्रत्यास्थता; त्रिकोणीय प्रतिबल-वितरण	अध्या. 7	धरन-नमन का प्रथम यथार्थवादी प्रतिरूप
1690	याकॉब बर्नूली	गणितीय समुदाय के समक्ष कैटिनरी चुनौती प्रस्तुत की	अध्या. 9	प्रतिस्पर्धी गणितीय संस्कृति को उत्प्रेरित किया
1690	क्रिस्टियान हाइगेन्स	कूटबद्ध कैटिनरी समाधान प्रस्तुत किया	अध्या. 9	ज्यामितीय दृष्टिकोण का प्रदर्शन
1690	योहान बर्नूली	प्रकाशन की शर्तों सहित कैटिनरी समाधान प्रस्तुत किया	अध्या. 9	कलन की विश्लेषणात्मक शक्ति दिखाई
1691	गॉटफ्रीड लाइबनित्स	कैटिनरी समाधान प्रकाशित किया; लघुगणकों में घटाया	अध्या. 9	कलन की श्रेष्ठता प्रदर्शित की
1691	योहान बर्नूली	वक्रता-त्रिज्या का सामान्य व्युत्पादन	अध्या. 8	वक्रता का व्यवस्थित विश्लेषणात्मक दृष्टिकोण
1691	याकॉब बर्नूली	इलास्टिका समस्या को कूटबद्ध चुनौती के रूप में प्रस्तुत किया	अध्या. 9	अगली महान गणितीय चुनौती आरंभ की
1692	याकॉब बर्नूली	आयताकार इलास्टिका प्रकरण हल किया	अध्या. 9	प्रत्यास्थ वक्र समस्या का प्रथम समाधान
1694	याकॉब बर्नूली	*Curvatura Laminae Elasticae*: इलास्टिका समाधान प्रकाशित किया	अध्या. 8, अध्या. 9	एवोल्यूट रचना सहित ज्यामितीय इलास्टिका-सिद्धांत

प्रारूप समीक्षा हेतु

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तिथि	योगदानकर्ता	योगदान	अध्याय	महत्त्व
1710	इग्नास पार्दी	कैटिनरी का आगे विश्लेषण; सदिशीय बल-संकल्पनाएँ	अध्या. 9	कैटिनरी-सिद्धांत में प्रगति
1713	आंत्वान पैराँ	धरन-नमन में पूर्ण संतुलन-दशाएँ; उदासीन अक्ष	अध्या. 7	नमन का प्रथम पूर्ण स्थैतिक विश्लेषण
1724	अज्ञात “LBC”	मध्यम रूप से नम्य रस्सी की समस्या की चुनौती	अध्या. 9	कैटिनरी और इलास्टिका समस्याओं के बीच सेतु
1728	डैनियल बर्नूली	नम्य/प्रत्यास्थ रेखाओं का एकीकृत सिद्धांत; नमन का मापांक	अध्या. 9	प्रथम व्यवस्थित धरन-सिद्धांत
1728	लियोनहार्ड ऑयलर	सहचर शोध-पत्र; सामान्य संतुलन-समाधान	अध्या. 9	डैनियल के एकीकृत दृष्टिकोण को पूरित किया
1729	पीटर वान मुस्खेनब्रूक	प्रायोगिक व्याकुंचन नियम: $P \propto 1/L^2$	अध्या. 9	प्रथम व्यवस्थित प्रायोगिक व्याकुंचन अध्ययन
1739	पीटर वान मुस्खेनब्रूक	*Elementa Physicae*: व्यवस्थित तनन-परीक्षण	अध्या. 7	प्रायोगिक कार्यपद्धति स्थापित की
1742	डैनियल बर्नूली	इलास्टिका के लिए ऊर्जा-न्यूनीकरण दृष्टिकोण प्रस्तावित किया	अध्या. 9	यांत्रिकी में परिवर्तनात्मक सिद्धांत प्रस्तुत किया
1744	लियोनहार्ड ऑयलर	*Methodus Inveniendi*: परिवर्तन-कलन द्वारा पूर्ण इलास्टिका समाधान	अध्या. 8, अध्या. 9	निर्णायक विश्लेषणात्मक विवेचन
c. 1750	ऑयलर & डैनियल बर्नूली	लघु-ढाल सन्निकटन: $\kappa \approx d^2y/dx^2$	अध्या. 8	अभियांत्रिकी धरन-सिद्धांत की आधारभूमि
1757	लियोनहार्ड ऑयलर	व्याकुंचन भार का व्युत्पादन: $P = \pi^2 EI/L^2$	अध्या. 9	प्रथम क्रांतिक भार-सूत्र
1758	अब्राहम केस्टनर	आधुनिक परिभाषा: वक्रता $= d\theta/ds$	अध्या. 8	वक्रता की आधुनिक संकल्पना को समेकित किया
1771	लियोनहार्ड ऑयलर	सामान्य रेखा-प्रतिबल सिद्धांत; यथार्थ स्थैतिक समीकरण	अध्या. 9	पूर्ण छड-सिद्धांत का ढाँचा
1773	चार्ल्स-अगस्ताँ कूलॉम	पूर्ण आनमनी विश्लेषण; $\sigma = My/I$ रूप	अध्या. 7	प्रथम कठोर बंकन-प्रतिबल सिद्धांत
1784	चार्ल्स-अगस्ताँ कूलॉम	मरोड़ सिद्धांत: $T = GJ/L \cdot \phi$	अध्या. 7	मरोड़ीय विश्लेषण स्थापित किया
1807	थॉमस यंग	प्रत्यास्थता मापांक की परिभाषा; मध्यतृतीयांश नियम	अध्या. 7	मूलभूत पदार्थ-गुण प्रस्तुत किया
1855	बारे द सेंट-वेनाँ	$\sigma = My/I$ की प्रथम कठोर प्रत्यास्थ व्युत्पत्ति	अध्या. 7	धरन-सिद्धांत को ठोस सैद्धांतिक आधार प्रदान किया
1862	अल्फ्रेड क्लेब्श	क्रमबद्ध प्रत्यास्थता सिद्धांत	अध्या. 7	गणितीय ढाँचे को समेकित किया

प्रारूप प्रतिकृति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तिथि	योगदानकर्ता	योगदान	अध्याय महत्त्व
1866	सेंट-वेनाँ	क्लेब्श पर टिप्पणियाँ; समतल परिच्छेद समतल बने रहते हैं	अध्या. 7सैद्धांतिक आधार पूर्ण किया
1879	अल्बेर्तो कास्तिलियानो	विस्थापन-गणना के लिए ऊर्जा प्रमेय	अध्या. 9क्रमबद्ध विक्षेप विश्लेषण संभव बनाया

खोज के प्रतिरूप

इस कालानुक्रमिक संश्लेषण से अनेक उल्लेखनीय प्रतिरूप उभरते हैं:

वैज्ञानिक वंशावलियाँ और संजाल बर्नूली परिवार के अनेक पीढ़ियों तक विस्तृत योगदान लगभग दो शताब्दियों में फैले हैं; प्रत्येक पीढ़ी ने अपने पूर्ववर्तियों के कार्य पर निर्माण किया और उसका विस्तार किया। इसी प्रकार, गुरु-शिष्य संबंधों—हाइगेन्स द्वारा लाइबनित्स का प्रशिक्षण, याकोब बर्नूली द्वारा योहान को परामर्श, और योहान द्वारा डैनियल तथा ऑयलर दोनों को शिक्षण—ने ऐसी बौद्धिक वंशावलियाँ निर्मित कीं जिन्होंने खोज की गति बढ़ाई।

प्रतिस्पर्धी गणितीय संस्कृति 1690 में याकोब बर्नूली की कैटेनरी समस्या से आरंभ हुई सार्वजनिक चुनौती-पद्धति ने एक अभूतपूर्व प्रतिस्पर्धी वातावरण बनाया, जिसने तीव्र सैद्धांतिक प्रगति को प्रेरित किया। कूटबद्ध समाधानों, प्रकाशन-दौड़ों और प्राथमिकता-विवादों का प्रयोग ऐसे गणितीय समुदाय को प्रकट करता है जो शुद्ध ज्ञान जितना ही प्रतिष्ठा और अग्रता के प्रति भी सजग था।

सिद्धांत और व्यवहार का संश्लेषण व्यावहारिक अभियांत्रिकी चुनौतियों ने बार-बार सैद्धांतिक सफलताओं को प्रेरित किया, जबकि अमूर्त गणितीय विकासों को अप्रत्याशित संरचनात्मक अनुप्रयोग मिले। लटकती शृंखला की समस्या ने वैश्लेषिक यांत्रिकी के विकास को उत्प्रेरित किया; बंकित छड़ ने विचरण-कलन को जन्म दिया; और व्याकुंचित स्तंभ ने स्थायित्व सिद्धांत स्थापित किया।

भौगोलिक और कालिक समूहण कुछ काल और क्षेत्रों में खोजों का उल्लेखनीय संकेंद्रण दिखाई देता है: 17वीं शताब्दी के मध्य का नीदरलैंड (स्टेविन, हाइगेन्स), 18वीं शताब्दी के आरंभ का स्विस-जर्मन शैक्षणिक जगत (बर्नूली परिवार, ऑयलर), और 18वीं शताब्दी के उत्तरार्ध तथा 19वीं शताब्दी के आरंभ के फ्रांसीसी अभियांत्रिकी विद्यालय (कूलॉम, सेंट-वेनाँ)।

गणितीय साधनों का विकास ज्यामितीय रचना (लियोनार्दो, गैलीलियो) से वैश्लेषिक ज्यामिति (देकार्त), फिर सूक्ष्मातिसूक्ष्म कलन (न्यूटन, लाइबनित्स), और अंततः विचरणात्मक विधियों (ऑयलर) तक की प्रगति दर्शाती है कि गणितीय परिष्कार ने उत्तरोत्तर अधिक जटिल संरचनात्मक समस्याओं का समाधान संभव किया।

यह कालानुक्रमिक परिप्रेक्ष्य स्पष्ट करता है कि ज्यामिति, सामर्थ्य-विश्लेषण और विरूपण-सिद्धांत में दिखने वाले पृथक विकास वास्तव में उस व्यापक बौद्धिक क्रांति के घनिष्ठ रूप से जुड़े पक्ष थे जिसने गणित और अभियांत्रिकी दोनों को रूपांतरित किया। आज ज्ञात संरचनात्मक यांत्रिकी किसी एक सफलता से नहीं, बल्कि अनेक शताब्दियों में कार्यरत दर्जनों प्रतिभाशाली व्यक्तियों की संचित अंतर्दृष्टियों से उभरी—जिनमें प्रत्येक ने अपने पूर्ववर्तियों के कार्य पर निर्माण किया, उसका विस्तार किया और कभी-कभी उसमें सुधार किया।

पुरुषोत्तम

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

7 सामर्थ्य, उदासीन अक्ष और आनमनी प्रतिबल

सारांश

यह अध्याय 15वीं शताब्दी के उत्तरार्ध से 19वीं शताब्दी के मध्य तक संरचनात्मक सामर्थ्य-विश्लेषण और आंतरिक प्रतिबल-वितरण के ऐतिहासिक विकास का अनुसरण करता है।

1500 के दशक के आरंभ में एक प्रमुख वैचारिक परिवर्तन तब आया जब पहली बार यह पहचाना गया कि संरचनात्मक अवयव अक्षीय अथवा आनमनी भारों के अधीन विफल हो सकते हैं; इस प्रकार पारंपरिक ध्यान चिनाई मेहराबों के स्थायित्व से आगे बढ़ा। इस बोध ने आनमनी प्रतिबलों के आंतरिक वितरण और आरोपित भारों तथा संरचनात्मक क्षमता के मूलभूत संबंध की गहन जाँच आरंभ की।

यह विकास तीन पृथक किंतु परस्पर संबद्ध परंपराओं के माध्यम से आगे बढ़ता है। लियोनार्दो के लटकती टोकरी वाले प्रयोगों से आरंभ और गैलीलियो के कैंटिलीवर विश्लेषण तक चलने वाली अनुभवजन्य परंपरा ने संरचनात्मक परीक्षण और क्षमता-माँग आकलन की आधारभूत अवधारणाएँ स्थापित कीं। देकार्त, मारियोत, पाराँ और कूलॉम द्वारा उन्नत अनुभवजन्य-सातत्य उपागम ने पदार्थ-व्यवहार और आंतरिक बल-वितरण के अधिक परिष्कृत प्रतिरूप क्रमशः विकसित किए। अंततः बर्नूली परिवार और ऑयलर से निदर्शित वैश्लेषिक परंपरा ने ज्यामिति, पदार्थ-गुणों और संरचनात्मक अनुक्रिया को जोड़ने वाले कठोर गणितीय ढाँचे प्रदान किए।

प्रमुख उपलब्धियों में कैंटिलीवर धरनों के लिए गैलीलियो की उत्तोलक-सादृश्यता, रैखिक प्रत्यास्थ व्यवहार और त्रिकोणीय प्रतिबल-वितरण की मारियोत द्वारा पहचान, पाराँ द्वारा पूर्ण साम्यावस्था प्रतिबंधों का अनुप्रयोग, बंकन और मरोड़ का कूलॉम द्वारा क्रमबद्ध विवेचन, यंग द्वारा प्रत्यास्थता मापांक की अवधारणा का प्रस्तुतीकरण, तथा मूलभूत बंकन-प्रतिबल संबंध की सेंट-वेनाँ द्वारा प्रत्यास्थता-आधारित निर्णायक व्युत्पत्ति सम्मिलित हैं।

उल्लेखनीय है कि ये अन्वेषण केवल सामर्थ्य—अर्थात विफल हुए बिना आंतरिक बलों का प्रतिरोध करने की अवयवों की क्षमता—पर केंद्रित थे और भारित संरचनाओं द्वारा ग्रहण किए गए विरूपित आकारों के विषय में कुछ नहीं बताते थे। यह सीमा संरचनात्मक यांत्रिकी के विकास के अगले चरण को प्रेरित करने वाली थी, जिसमें ज्यामितीय विश्लेषण और विरूपण-पूर्वानुमान समान रूप से मूलभूत विषयों के रूप में उभरते।

7.1 परिचय 219
7.2 सामर्थ्य 220
7.2.1 लियोनार्दो (≃ 1490) 220
7.2.2 गैलीलियो (1564-1642) 220
7.2.3 बीकमैन (1588-1637) 222
7.2.4 मुशेनब्रुक (1692—1761) 223
7.3 आंतरिक आनमनी प्रतिबल: तीन अंकों में एक अध्ययन 223
7.3.1 अंक I: अनुभवजन्य परंपरा . . . 225
7.3.2 अंक II: अनुभवजन्य—सातत्य परंपरा 229
7.3.3 अंक III: वैश्लेषिक परंपरा . . . 240
7.4 सारांश 243
7.5 संक्रमण 245

7.1 परिचय

पूर्ववर्ती वास्तु-परंपराओं के विपरीत, जिनका संबंध लगभग पूर्णतः दृढ़ चिनाई से था और जिनमें संरचनात्मक विफलता मुख्यतः मेहराबों तथा फानाकार प्रस्तरों के पतन तक सीमित थी (अध्याय 31 देखें), 16$^{\text{वीं}}$ शताब्दी के आरंभ में एक प्रमुख वैचारिक परिवर्तन हुआ। तब—संभवतः पहली बार—यह पहचाना गया कि संरचनात्मक अवयव अक्षीय अथवा आनमनी भारों के अधीन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भी विफल हो सकते हैं। इस बोध ने आनमनी प्रतिबलों के आंतरिक वितरण को समझने हेतु गहन अन्वेषणों को जन्म दिया[1]। *पूर्वसूचना: गैलीलियो का निष्कर्ष गलत था।*

तदनुसार, यह अध्याय संरचनात्मक अवयवों के अक्षीय और आनमनी सामर्थ्य को निर्धारित करने के आरंभिक प्रयासों तथा आनमनी प्रतिबलों के आंतरिक वितरण को निरूपित करने के प्रथम प्रयत्नों पर विचार करता है। विरूपण के अध्ययन और प्रत्यास्थता सिद्धांत के विकास को बाद के अध्यायों के लिए छोड़ा गया है।

7.2 सामर्थ्य

सामर्थ्य की अवधारणा उन आरंभिक यांत्रिक गुणों में थी जिन्होंने दार्शनिकों, वास्तुकारों और वैज्ञानिकों का समान रूप से ध्यान आकर्षित किया। प्रत्यास्थता अथवा विरूपण के सिद्धांतों के औपचारिक रूप लेने से बहुत पहले, टूटन या पतन रोकने की आवश्यकता ने सामर्थ्य को एक सहज और प्रेक्षणीय विषय बना दिया था। निर्माता अनुभव से जानते थे कि स्तंभ व्याकुंचित हो सकते हैं और धरन टूट सकते हैं—पर वे क्यों विफल होते हैं और किन दशाओं में, यह अस्पष्ट था। इस प्रकार सामर्थ्य आरंभिक यांत्रिकीविदों के लिए स्वाभाविक प्रवेश-बिंदु बना: यह एक प्रत्यक्ष, द्विआधारी परिणाम—विदारण अथवा अस्तित्व—प्रस्तुत करता था, जो अनुमान और परिमाणन दोनों को आमंत्रित करता था। प्रत्यास्थता अथवा आंतरिक प्रतिबल-वितरण के विपरीत, सामर्थ्य का अन्वेषण सरल साधनों और परीक्षणों से किया जा सकता था, जिससे वह यांत्रिकी के आरंभिक परिमाणात्मक अध्ययनों के लिए उर्वर क्षेत्र बना।

7.2.1 लियोनार्दो (≃ 1490)

लियोनार्दो के जीवन-वृत्त के लिए अनुभाग 6.4.2 देखें।

लियोनार्दो ने संभवतः कल्पना योग्य सबसे सरल यांत्रिक परीक्षण बनाया—एक विचार जो उनके सुविख्यात (यद्यपि कभी निष्पादित न किए गए) "लटकती टोकरी" प्रयोग में सन्निहित है, जैसा चित्र 7.1a में दिखाया गया है। इस व्यवस्था में एक कोष्ठ से रेत धीरे-धीरे निलंबित टोकरी में डाली जाती है, जब तक कि सहायक तार टूट न जाए। तब संचित रेत को तौलकर विच्छेदन भार निर्धारित किया जाता है। अनुभवजन्य जिज्ञासा और मूलभूत प्रश्न पूछने की असाधारण क्षमता से सदैव प्रेरित लियोनार्दो का विश्वास था कि विच्छेदन सामर्थ्य तार की लंबाई के साथ बदलेगा—एक निष्कर्ष जिसे आधुनिक यांत्रिकी ने गलत सिद्ध किया है। फिर भी प्रयोग की वैचारिक स्पष्टता पदार्थ-सामर्थ्य के क्रमबद्ध अध्ययन की दिशा में एक आरंभिक कदम है।

7.2.2 गैलीलियो (1564-1642)

गैलीलियो के जीवन-वृत्त के लिए अनुभाग 6.6.2 देखें।

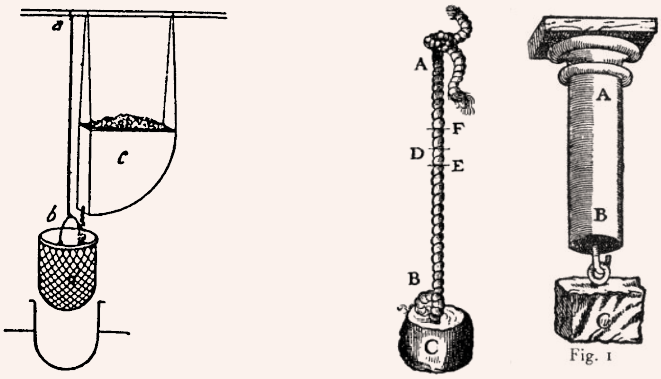
गैलीलियो (Galilei, 1638) निम्नलिखित संवाद के माध्यम से लियोनार्दो की भ्रांति को चुनौती देते हैं, चित्र 7.1b:

> सालिवयाती कहते हैं, "मुझे भय है, सिम्प्लीचियो ..., कि ... आप वही भूल कर रहे हैं जो अनेक अन्य लोग करते हैं; अर्थात यदि आपका आशय यह कहना है कि समान रस्सी की एक लंबी रस्सी ... उसी रस्सी की छोटी लंबाई जितना अधिक भार धारण नहीं कर सकती।" वे चित्र 7.1b में रस्सी तोड़ने के लिए पर्याप्त भार O लगाते हैं और सिम्प्लीचियो से पूछते हैं कि टूटन कहाँ होगी; सिम्प्लीचियो उत्तर देते हैं, "मान लें D पर .. ., क्योंकि इस बिंदु पर रस्सी, मान लें, 100 lbs. को सहारा देने के लिए पर्याप्त प्रबल नहीं है।" तब सालिवयाती रस्सी को D के ठीक ऊपर F पर बाँधकर और E पर भार लगाकर बताते हैं कि D पर रस्सी अब भी उसी खिंचाव के अधीन है, और अतः सिम्प्लीचियो की स्वीकृति के अनुसार छोटा खंड FE पुनः D पर टूटेगा।
>
> Galilei, 1638

[1]एक ऐसा वितरण जिसे अब उदासीन अक्ष के सापेक्ष त्रिकोणीय माना जाता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Truesdell, 1960 के अनुसार, यह सातत्य यांत्रिकी के प्रतिबल-सिद्धांत का प्रथम आदिम उदाहरण है। यह संवाद उस मूलभूत अवधारणा को स्पष्ट करता है जो बाद में प्रतिबल-विश्लेषण का केंद्र बनी: आंतरिक बल केवल ज्यामितीय विमाओं पर नहीं, अपितु भारण दशाओं पर निर्भर करते हैं।



(a) लियोनार्दो (b) गैलीलियो

चित्र 7.1: लियोनार्दो और गैलीलियो द्वारा अक्षीय सामर्थ्य के अध्ययन

संरचनात्मक विश्लेषण, जैसा हम आज जानते हैं, गैलीलियो द्वारा अपने *दो नवीन विज्ञानों से संबंधित संवाद और गणितीय प्रदर्शन* के प्रथम दो "दिवसों" में कैंटिलीवर धरन के विवेचन से आरंभ होता है[2], जो 1638 में तब प्रकाशित हुआ जब गैलीलियो 74 वर्ष के थे।[3] आगे बढने से पूर्व, आइए उनके तर्क की दिशा का अनुसरण करें (Heyman, 1998b)।

आरंभ में गैलीलियो मुख्यतः संरचनात्मक अवयवों के विभंग-सामर्थ्य से चिंतित थे। उन्होंने एक ऐसे स्तंभ पर विचार किया जिसे क्षैतिज रखकर दोनों सिरों और केंद्र पर सहारा दिया गया था। उन्होंने तर्क दिया कि यदि अंतिम अवलंबों में से एक हटा दिया जाए तो स्तंभ मध्य-विस्तार पर टूटेगा, क्योंकि उसका आधा भाग प्रभावी रूप से कैंटिलीवर की भाँति कार्य करेगा—चित्र 7.2a देखें। इसके बाद उन्होंने एक भिन्न विन्यास पर विचार किया: स्वतंत्र रूप से लटका ऊर्ध्वाधर स्तंभ, जिसके निचले भाग पर क्रमशः बढता भार तब तक लगाया जाता है जब तक विदारण न हो, जैसा चित्र 7.1b में दिखाया गया है।

इससे उनके पात्रों के बीच एक रोचक संवाद उत्पन्न हुआ जो—आधुनिक भाषा में—फ्रैक्टल से मिलती-जुलती अवधारणाओं का आभास देता है: "एक परिमित क्षेत्र में अनंत संख्या में रिक्तियाँ हो सकती हैं," अथवा "एक आभासी ठोस अंतर्निहित सामर्थ्य रखने वाले अत्यधिक संख्या में छोटे भागों से बना हो सकता है," ठीक वैसे ही जैसे गुच्छित इस्पाती केबलों का व्यवहार होता है। Benvenuto, 1991a द्वारा वर्णित गैलीलियो की व्याख्या इस धारणा पर आधारित थी कि ठोस तंतुमय अवयवों से बने होते हैं,

> अतः मेरा विचार है कि प्रकृति में किसी ठोस की कल्पना अनंत संख्या में अत्यंत पतली पट्टिकाओं अथवा तंतुओं से बने रूप में की जा सकती है, जो इस प्रकार जुडे और बँधे हों कि संपूर्ण वस्तु एकल सतत ठोस पिंड दिखाई दे; किंतु वास्तव में इस पिंड द्वारा उसे अलग खींचने अथवा तोडने वाले किसी बल के विरुद्ध प्रस्तुत प्रतिरोध उसके बडे द्रव्यमान के कारण नहीं, बल्कि इन सूक्ष्म तंतुओं की बहुलता और उलझाव के कारण होता है।
>
> Galilei, 1632 *"Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"*

[2]इसे 1632 में प्रकाशित उनके पूर्ववर्ती *दो प्रमुख विश्व प्रणालियों से संबंधित संवाद* से भ्रमित न करें।

[3]पाँच वर्ष पूर्व उन्हें विधर्म का दोषी ठहराया गया था, आजीवन कारावास दिया गया था और आगे कोई कृति प्रकाशित करने से निषिद्ध कर दिया गया था। इसी कारण *संवाद* हॉलैंड में—धर्माधिकरण की पहुँच से बाहर—एल्जेविर परिवार द्वारा प्रकाशित हुए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और केवल उनकी संख्या ही नहीं, बल्कि उनके परस्पर बुनाव की मात्रा पर भी विचार करना आवश्यक है। चित्र 7.2b के संदर्भ में,

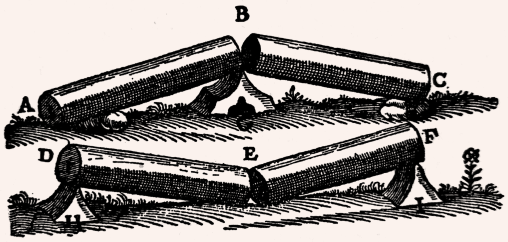
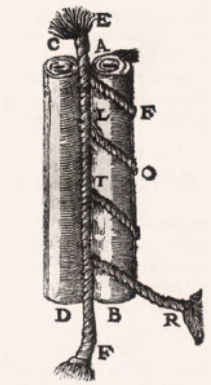


Fig. 29

(a) धरन का टूटना



(b) गैलीलियो की व्याख्या

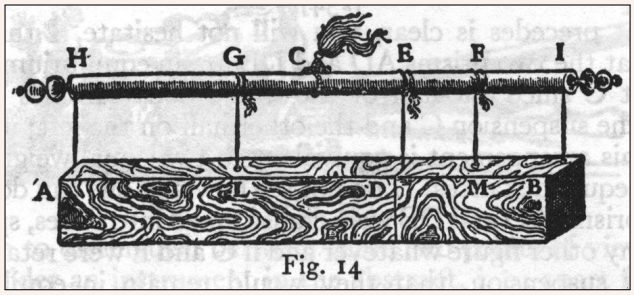


Fig. 14

(c) उत्तोलक का नियम

चित्र 7.2: निर्णायक कैंटिलीवर धरन तक गैलीलियो के मार्ग

> अब यदि हम कल्पना करें कि एक तंतु EF दो सटे हुए छोटे बेलनों AB और CD के बीच तना है, और विचार करें कि उनके बीच दबाए जाने पर क्या होता है, अथवा फिर जब वह स्वतंत्र रूप से फिसलता है, अथवा उनमें से किसी एक के चारों ओर कुंडलित होकर लिपटा है, तो हमें अत्यंत भिन्न व्यवहार दिखाई देंगे। उदाहरणार्थ, तंतु को बेलन से खोलने के प्रयास में जितना अधिक बलपूर्वक खींचा जाता है, वह बेलन पर उतना ही अधिक कसकर दबता है।
>
> इससे प्रतीत होता है कि केवल पदार्थ का सामर्थ्य ही नहीं, बल्कि उसकी व्यवस्था भी महत्त्वपूर्ण है। जैसे हम जानते हैं कि रस्सी का प्रतिरोध उसे बनाने वाले अनेक सन-तंतुओं से प्राप्त होता है, वैसे ही काष्ठ में लंबाई की दिशा में चलने वाले रेशे और तंतु मिलते हैं, जो उसे समान लंबाई की सन की डोरी की अपेक्षा विभंग के प्रति अधिक प्रतिरोधी बनाते हैं। पत्थर अथवा धातु के बेलन में भागों का संसंजन और भी अधिक प्रतीत होता है, यद्यपि वह तंतुओं या रेशों से भिन्न किसी बंधक के कारण होता है। फिर भी पर्याप्त बल से इन्हें भी तोड़ा जा सकता है।
>
> Galilei, 1632 *"Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"*

7.2.3 बीकमैन (1588-1637)

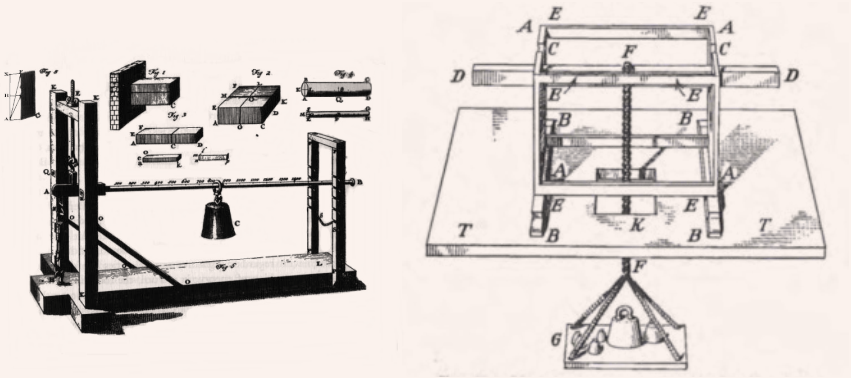
1630 में डच दार्शनिक और वैज्ञानिक आइज़क बीकमैन ने एक सूक्ष्म किंतु महत्त्वपूर्ण प्रेक्षण किया, जिसने यांत्रिकी की एक मूलभूत अवधारणा की पूर्वसूचना दी। उन्होंने लिखा कि जब किसी भार को डोरी से लटकाया जाता है, तो "डोरी जितनी लंबी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

होती है, भार उतना अधिक नीचे उतरता है..."[4] यद्यपि बीकमैन ने इस प्रेक्षण को गणितीय रूप नहीं दिया, उनकी टिप्पणी उस राशि का प्रथम ज्ञात—भले ही अप्रत्यक्ष—संदर्भ है जिसे आज हम *विकृति* कहते हैं। डोरी के दीर्घीकरण को उसके द्वारा वहन किए जाने वाले भार से सहज रूप में जोड़कर बीकमैन ने बल के प्रति पिंड की मापनीय अनुक्रिया को रेखांकित किया। उनकी अंतर्दृष्टि हुक के नियम से कई दशक पूर्व की है और अध्ययन योग्य यांत्रिक परिघटना के रूप में विरूपण के प्रति उभरती अनुभवजन्य जागरूकता को दर्शाती है। अपने जीवनकाल में मुख्यतः अप्रकाशित रहे बीकमैन के कार्य ने देकार्त जैसे समकालीनों को प्रभावित किया और अब उसे प्रत्यास्थता के आधुनिक विज्ञान का महत्त्वपूर्ण पूर्वगामी माना जाता है।

7.2.4 मुशेनब्रुक (1692—1761)

पीटर वान मुशेनब्रुक उन आरंभिक प्रयोगकर्ताओं में थे जिन्होंने क्रमबद्ध तनन-परीक्षण द्वारा पदार्थों के अक्षीय सामर्थ्य का अन्वेषण किया। अपने 1739 के *Elementa Physicae* (Musschenbroek, 1739) में उन्होंने ऐसे प्रयोगों की शृंखला का वर्णन किया जिनमें लंबी तारों अथवा छड़ों से भार लटकाकर वह अधिकतम भार निर्धारित किया गया जिसे वे विदारण से पहले सह सकती थीं। चित्र 7.3a में दिखाए गए ये परीक्षण केवल इसलिए महत्त्वपूर्ण नहीं थे कि उनसे चरम तनन-सामर्थ्य के पुनरुत्पाद्य माप प्राप्त हुए, बल्कि इसलिए भी कि उन्होंने एकाक्षीय भार के अधीन पदार्थ-विफलता के अध्ययन की पद्धतिगत रूपरेखा स्थापित की। मुशेनब्रुक ने सुसंगत परिणामों के लिए एकसमान अनुप्रस्थ क्षेत्रफल और पदार्थ की समरूपता के महत्त्व पर बल दिया—एक ऐसी समझ जिसने पदार्थ-परीक्षण के आधुनिक मानकों की पूर्वसूचना दी। उन्होंने धातुओं, काष्ठ और पशु-रेशों सहित विविध पदार्थों के तुलनात्मक सामर्थ्यों को सारणीबद्ध भी किया और इस प्रकार बाद में प्रतिबल—विकृति अवधारणा के विकास के लिए अनुभवजन्य आधार तैयार किया। मुशेनब्रुक उत्कृष्ट प्रयोगकर्ता थे; उन्होंने बंकन, चित्र 7.3b, और स्तंभ-व्याकुंचन (जिसकी चर्चा §9.5.1.2 में है) का भी अन्वेषण किया।



(a) तनन परीक्षण (b) बंकन परीक्षण

चित्र 7.3: मुशेनब्रुक के प्रयोग (Musschenbroek, 1739)

7.3 आंतरिक आनमनी प्रतिबल: तीन अंकों में एक अध्ययन

प्राचीन और मध्यकालीन संरचनाओं में प्रतिबल कम थे क्योंकि आधुनिक संहिताओं की दृष्टि से उनका अतिअभिकल्पन किया गया था। पत्थरों से निर्मित वे मेहराब और गुंबद अपनी क्षमताओं से बहुत कम प्रतिबलों के अधीन थे। वैज्ञानिक दिशानिर्देशों के अभाव में जिनका समुचित विमांकन नहीं हुआ, वे बस ढह गए (इसीलिए विट्रुवियस के मापक्रम नियम महत्त्वपूर्ण थे)। सरल शब्दों में, प्रतिबल की गणना द्वितीयक महत्त्व रखती है; संरचना का आकार ही उसके स्थायित्व को नियंत्रित करता है।

[4] Drake, 1970, p. 201 में उद्धृत।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

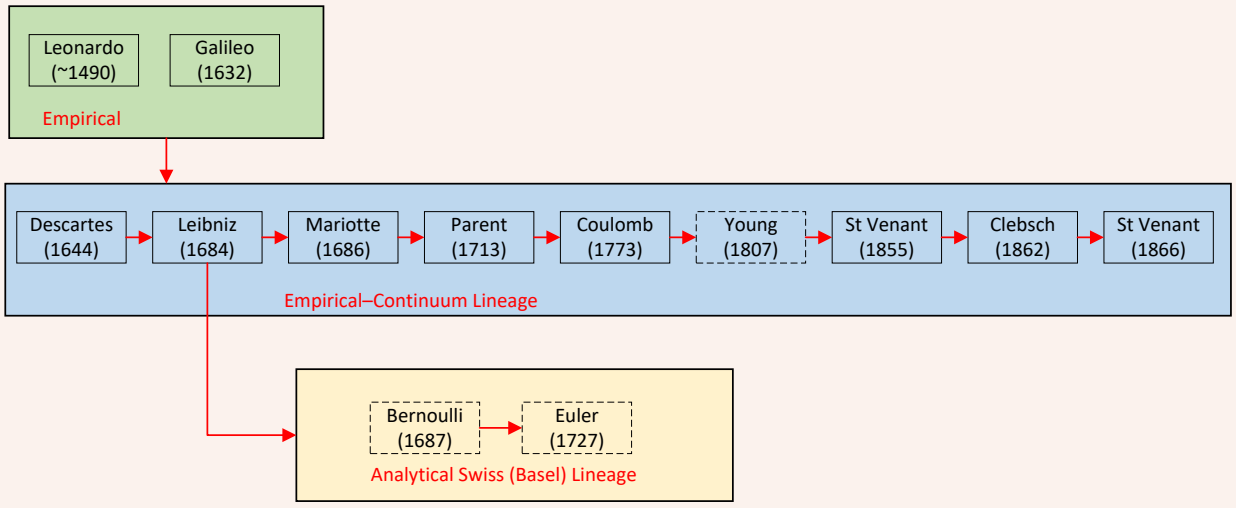
आनमन-सिद्धांत का ऐतिहासिक विकास दो बड़े पैमाने पर स्वतंत्र और समानांतर मार्ग प्रकट करता है, चित्र 7.4, —एक अनुभवजन्य और फ्रांसीसी, दूसरा गणितीय और स्विस-जर्मन—जो उल्लेखनीय रूप से एक शताब्दी से अधिक समय तक असंबद्ध रहे।

प्रयोग और भौतिक अंतर्ज्ञान में निहित प्रथम परंपरा **गैलीलियो** से आरंभ हुई, जिन्होंने धरन-विदारण और मापक्रम के प्रारंभिक प्रश्न उठाए। यह **देकार्त**, **मारियोत**, **पारॉ** से आगे बढ़ी और **कूलॉम** के कार्य में चरम पर पहुँची, जिन्होंने 1773 में आंतरिक संसंजन पर आधारित उल्लेखनीय रूप से दूरदर्शी विफलता-सिद्धांत प्रस्तुत किया। इस मार्ग ने उन्नीसवीं शताब्दी के मध्य में **सेंट-वेनाँ** के साथ अपना पूर्ण वैश्लेषिक परिष्कार प्राप्त किया; उनके संस्मरणों ने प्रतिबल-वितरण की अवधारणा प्रस्तुत की और पूर्ववर्ती प्रतिरूपों की अनेक असंगतियाँ सुधारीं। यह "फ्रांसीसी मार्ग" मुख्यतः विदारण, संसंजन और अनुभवजन्य सत्यापन की चिंताओं से प्रेरित था तथा ज्यामितीय तर्क और भौतिक युक्तिसंगतता पर आधारित रहा।

इसके विपरीत, एक दूसरा स्वतंत्र विकास याकोब बर्नूली के कार्य से उभरा, जिन्होंने वक्रता और विकृति का आदि-सिद्धांत बनाया, और **ऑयलर** द्वारा विचरणात्मक सिद्धांतों का उपयोग कर 1744 में प्रत्यास्थ वक्र की व्युत्पत्ति में इसकी औपचारिक गणितीय अभिव्यक्ति हुई। रैखिक प्रत्यास्थता और लघु विरूपण की धारणाओं पर आधारित ऑयलर का सूत्रीकरण कूलॉम और यंग दोनों के कार्य से पहले का था। फिर भी प्रत्यास्थ धरन के विक्षेपित आकार का पूर्ण अवकल समीकरण प्रस्तुत करने के बावजूद यह "स्विस-जर्मन मार्ग" फ्रांसीसी आख्यान में स्पष्टतः अनुपस्थित था।

इस बात के बहुत कम प्रमाण हैं कि कूलॉम, यंग अथवा सेंट-वेनाँ ने भी धरन-सिद्धांत में ऑयलर के योगदान को स्वीकार किया हो। इस उपेक्षा के अनेक कारण हो सकते हैं। प्रथम, ऑयलर का कार्य अमूर्त गणित में गहराई से अंतर्निहित और लैटिन में लिखा था, जिससे व्यावहारिक संरचनात्मक व्यवहार पर केंद्रित प्रयोगकर्ताओं में उसका प्रसार सीमित रहा होगा। द्वितीय, अठारहवीं शताब्दी का फ्रांसीसी वैज्ञानिक समुदाय मुख्यतः प्रत्यास्थता और विक्षेप के स्थान पर सामर्थ्य और विदारण से चिंतित था—ऐसी चिंताएँ जो ऑयलर की आदर्शीकृत धारणाओं की अपेक्षा कूलॉम और मारियोत के हितों से अधिक मेल खाती थीं। अंततः महाद्वीपीय वैज्ञानिक परंपराओं के बीच संस्थागत और भाषायी विभाजनों ने विचारों के परस्पर आदान-प्रदान में बाधा डाली होगी। परिणाम एक द्विशाखित परंपरा थी: एक अनुभवजन्य सामर्थ्य और विफलता पर आधारित, दूसरी गणितीय प्रत्यास्थता पर; इनका पूर्ण संश्लेषण केवल उन्नीसवीं शताब्दी के उत्तरार्ध में हुआ।

यह विच्छेद विशेषतः उल्लेखनीय है, क्योंकि आधुनिक दृष्टि में आनमनी व्यवहार स्पष्ट रूप से ऑयलर द्वारा प्रस्तुत समीकरण पर आधारित है। जिस तथ्य की ओर इस समीकरण को आरंभ में उन्हीं सिद्धांतकारों ने उपेक्षित किया जिन्होंने धरन-बंकन को औपचारिक रूप दिया, वह रेखांकित करता है कि प्रभावशाली पूर्ववर्ती कार्य के होते हुए भी विषयगत सीमाएँ और बौद्धिक परंपराएँ अभिसरण को कैसे विलंबित कर सकती हैं।



चित्र 7.4: आनमनी प्रतिबलों तक पहुँचने वाली दो समानांतर परंपराएँ

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

7.3.1 अंक I: अनुभवजन्य परंपरा

यह प्रथम अंक प्रत्यक्ष प्रेक्षण, प्रयोग और भौतिक तर्क के माध्यम से धरन-सिद्धांत के विकास का अनुसरण करता है। लियोनार्दो के अंतर्ज्ञानपूर्ण रेखाचित्रों से आरंभ होकर गैलीलियो के क्रमबद्ध विश्लेषण तक, इस अनुभवजन्य परंपरा ने संरचनात्मक विफलता से जुडी व्यावहारिक चिंताओं पर बल दिया। इस परंपरा को प्रेरित करने वाली प्रमुख अंतर्दृष्टि यह थी कि धरन टूटते हैं—परंतु क्यों टूटते हैं और कब टूटेंगे, इसे समझने और पूर्वानुमानित करने के लिए सावधान प्रेक्षण तथा उत्तरोत्तर अधिक परिष्कृत यांत्रिक तर्क की आवश्यकता थी।

7.3.1.1 लियोनार्दो (≃ 1490)

यद्यपि सामान्यतः माना जाता है कि आनमन की समस्या पर विचार करने वाले गैलीलियो प्रथम व्यक्ति थे, तथाकथित मैड्रिड कोडेक्स के नवीनतर प्रमाण सुझाते हैं कि वास्तव में लियोनार्दो दा विंची उनसे पहले थे (Zammattio, 1980)।

आनमन पर लियोनार्दो के रेखाचित्र (Da Vinci, 1490 PDF) में दो पृथक फोलियो में हैं।

फोलियो 9v

पहली दृष्टि में कोई यह समझ सकता है कि चित्र 7.5 में लियोनार्दो के रेखाचित्र या तो प्रयोगात्मक मापों के अभिलेख हैं अथवा आरंभिक गणितीय सिद्धांत। किंतु ऐसा बिल्कुल नहीं है—वे कुछ ही उत्तरों के साथ प्रश्न पर प्रश्न "मात्र" उठाते हैं। जहाँ उत्तर मिलते भी हैं, वे सामान्यतः अनुमानात्मक होते हैं और ज्यामितीय अनुपात में सुविधाजनक पूर्ण संख्याओं—100, 20, 4 अथवा 1/2, 1/4 और 1/8 जैसे भिन्नों—से सजाए गए हैं। आधुनिक अर्थ में लियोनार्दो प्रयोगकर्ता नहीं थे (जैसे गैलीलियो बाद में बने)। उनकी प्रतिभा सही प्रश्न पूछने और कभी-कभी अनुमानात्मक उत्तर प्रस्तुत करने में थी।

आरंभ में ही उन्होंने समझ लिया था कि संरचनाओं के आधारभूत अवयवों—धरनों, स्तंभों, मेहराबों और तिजोरियों—की समझ निर्माण-विज्ञान की उचित आधारभूमि है। चित्र 7.5 के रेखाचित्रों में वे स्पष्टतः धरनों के सामर्थ्य[5] पर उनकी लंबाई, अनुप्रस्थ परिच्छेद, अवलंब की विधि और आरोपित भारों के संबंध में विचार कर रहे हैं। वे अवलंब दशाओं और भारण के फलन के रूप में धरन-विक्षेप पर भी विचार करते हैं।

फिर भी उनके अन्वेषण गुणात्मक रहे: उनके पास न तो गणितीय साधन थे, न आंतरिक *प्रतिबल* की धारणा, और न ही प्रयोगात्मक सत्यापन का कोई क्रमबद्ध उपागम। उनके कार्य में कोई समीकरण नहीं मिलता और नियंत्रित दशाओं में चरों को पृथक करने का भी कोई प्रयास नहीं है। तथापि लियोनार्दो के योगदान का मूल्य समाधानों में नहीं, बल्कि समस्याओं के निरूपण में है। उनके उठाए प्रश्नों ने—चाहे वे कितने भी अनुमानात्मक रहे हों—संरचनात्मक अवयवों को तर्कसंगत अध्ययन योग्य यांत्रिक निकाय मानने की दिशा में निर्णायक परिवर्तन चिह्नित किया। उन्होंने आगामी शताब्दी के अधिक कठोर विकासों के लिए मंच तैयार किया।

यह परिवर्तन गैलीलियो के साथ गंभीर रूप से आरंभ हुआ; उन्होंने न केवल समान प्रश्न पूछे, बल्कि बल-आरेखों, मापक्रम-तर्क और वास्तविक प्रयोगों का उपयोग कर उनके उत्तर देने का भी प्रयास किया।

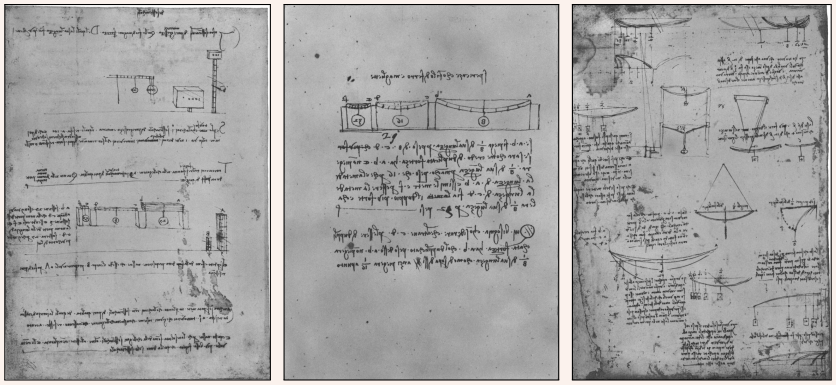
फोलियो 20v

लगभग 1500 में लिखा गया *कोडेक्स मैड्रिड* लगभग 250 वर्षों तक अज्ञात रहा और 1965 में पुनः खोजा गया।[6] इसके 197 पृष्ठों में लियोनार्दो ने यांत्रिकी, स्थैतिकी, ज्यामिति और दुर्ग-निर्माण जैसे विषयों का अन्वेषण किया। ये पांडुलिपियाँ अत्यधिक ऐतिहासिक महत्त्व रखती हैं—केवल इसलिए नहीं कि इनमें लियोनार्दो के सभी उपलब्ध लेखों का लगभग 15% निहित है, बल्कि

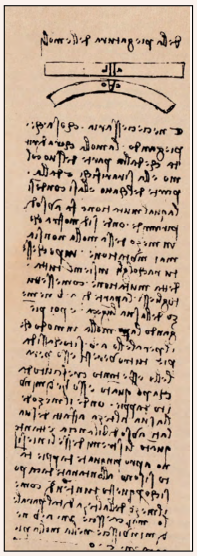
[5] हाल ही में खोजे गए *कोडेक्स मैड्रिड*, चित्र 7.6 में धरन-वक्रता दिखाई देती है, जबकि स्तंभ-सामर्थ्य का अन्वेषण चित्र 9.24a में किया गया है।

[6] *कोडेक्स मैड्रिड* की पांडुलिपियाँ कला-इतिहासकार जूल्स पिकस को स्पेन के राष्ट्रीय पुस्तकालय में संयोगवश मिलीं। यांत्रिकी और अभियांत्रिकी पर लियोनार्दो के कार्य की व्यापकता और तकनीकी गहराई के कारण उनका महत्त्व तत्काल पहचाना गया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 7.5: लियोनार्दो के रेखाचित्र, फोलियो 9v



If a straight spring is bent, it is necessary that its convex part become thinner and its concave part, thicker. This modification is pyramidal and consequently there will never be a change in the middleof the spring. You shall discover, if you consider all of the aforementioned modifications that by taking part a b in the middle of its length and then bending the spring in a way that the two parallel lines, a and b, touch at the bottom, the distance between the parallel lines has grown as much at the top as it has diminished at the bottom. Therefore, the center of its height has become much like a balance for the sides. And the ends of those lines draw as dose at the bottom as much as they draw away at the top. From this, you will understand why the center of the height of the parallels never increases in a b nor diminishes in the bent spring at c o.

चित्र 7.6: लियोनार्दो के रेखाचित्र, फोलियो 20v, (Zammattio, 1980)

विषयवस्तु की गुणवत्ता और तकनीकी प्रासंगिकता के कारण भी, जो इसे अपने युग के सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण अभियांत्रिकी ग्रंथों में स्थान देती है।

फोलियो 84 में लियोनार्दो ने एक बंकित छड के विरूपण का विश्लेषण किया और उसके बाह्यतम रेशों की अनुक्रिया का सही वर्णन किया। उन्होंने निम्नलिखित बातों को स्पष्टतः देखा:

- छड का भीतरी भाग (वक्रता-केंद्र की ओर) छोटा होता है, अर्थात भीतरी रेशे संपीडित होते हैं;
- बाहरी भाग लंबा होता है, जो बाहरी रेशों में तनन दर्शाता है;
- छड के मध्य अक्ष की लंबाई अपरिवर्तित रहती है; और
- रेशों के दीर्घीकरण अथवा संक्षेपण की मात्रा इस *उदासीन अक्ष* से उनकी दूरी के समानुपाती होती है।

मूलतः लियोनार्दो ने बंकन में रैखिक विकृति-वितरण का सिद्धांत बर्नूली से लगभग 200 वर्ष पूर्व व्यक्त किया—यह उल्लेखनीय अंतर्दृष्टि आधुनिक धरन-सिद्धांत की आधारभूत धारणा का पूर्वाभास देती है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

7.3.1.2 गैलीलियो (1632)

इसके बाद गैलीलियो उत्तोलक की पुरातन समस्या (चित्र 7.2c), (Galilei, 1632) (द्वितीय दिवस), पर ध्यान देते हैं। वे दोनों सिरों से जुड़ी डोरियों द्वारा तुला-धरन से निलंबित एकसमान ठोस पर विचार करते हैं। सममिति से धरन अपने मध्यबिंदु C पर संतुलित होता है। फिर वे मानते हैं कि ठोस को किसी मध्यवर्ती बिंदु D पर लंबवत काटा जाता है और बने हुए दोनों खंडों को अस्थायी रूप से DE पर एक साझा डोरी से सहारा दिया जाता है। इस प्रकार प्रत्येक खंड मूल निकाय का छोटा रूप बन जाता है और अपने गुरुत्व-केंद्र—बाईं ओर बिंदु G तथा दाईं ओर F—के चारों ओर संतुलित होता है।

गैलीलियो आगे दर्शाते हैं कि यदि खंड AD को उसके मध्यबिंदु पर LG स्थित एक डोरी से और खंड DB को MF स्थित दूसरी डोरी से सहारा दिया जाए तो शेष सहायक डोरियाँ हटाई जा सकती हैं और साम्यावस्था फिर भी बनी रहेगी। वे प्रदर्शित करते हैं कि अनुपात CG/CF, EI/EH के बराबर है, जो आगे DB/AD के बराबर है; अंतिम दोनों खंडों के भारों के समानुपाती हैं।

यह ध्यान देने योग्य है कि गैलीलियो के आरेख में[7], न तो वास्तव में और न आभासी रूप में कुछ कभी गतिमान होता है। उनका तर्क पूर्णतः स्थैतिक है और शुद्धगतिक अथवा गतिक विश्लेषण के स्थान पर आदर्शीकृत संतुलन में निहित है।

अंततः गैलीलियो कैंटिलीवर धरन की निर्णायक समस्या (चित्र 7.7) पर विचार करने के लिए तैयार हैं—यह विन्यास तब से संरचनात्मक सिद्धांत में तर्कसंगत यांत्रिकी के अनुप्रयोग का प्रतीक बन गया है। अवयव $ABCD$ प्रिज़्मीय है और जब बिंदु



चित्र 7.7: गैलीलियो का निर्णायक कैंटिलीवर धरन

C पर भार लगाया जाता है, तो स्पष्ट है कि विफलता होने पर वह बिंदु B पर होगी, जहाँ अवयव दीवार में अंतःस्थापित है। अवयव में एक निश्चित *निरपेक्ष सामर्थ्य*[8], अर्थात पहले चर्चित तनन-सामर्थ्य, होता है। विभंग-बिंदु पर बिंदु B के चारों ओर

[7]साम्यावस्था और उत्तोलक-भुजाओं के पदों में व्यक्त गैलीलियो का तर्क बंकन में *उदासीन अक्ष* की आधुनिक अवधारणा का पूर्वाभास देता है। यद्यपि वे आंतरिक प्रतिबलों अथवा विकृति-वितरण पर स्पष्ट विचार नहीं करते, उनका ज्यामितीय विघटन और सममिति-तर्क यह आरंभिक अंतर्ज्ञान दर्शाता है कि बंकित पिंड के भीतर कुछ समतल अप्रतिबलित रहते हैं—यह विचार बाद में धरन-सिद्धांत में औपचारिक बना।

[8]"निरपेक्ष सामर्थ्य" से गैलीलियो का आशय पदार्थ के अंतर्निहित तनन अथवा संसंजक सामर्थ्य—आंतरिक प्रतिबल के अधीन विदारण का प्रतिरोध करने की उसकी क्षमता—से है। यह प्रतिबल-वितरण अथवा प्रत्यास्थ व्यवहार की आधुनिक धारणाओं से भिन्न है, क्योंकि गैलीलियो सामर्थ्य को एक नियत सीमांत बल मानते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस निरपेक्ष सामर्थ्य का आघूर्ण उसी बिंदु के चारों ओर आरोपित भार के आघूर्ण को संतुलित करना चाहिए। इस विश्लेषण में गैलीलियो प्रभावी रूप से एक *कोणित उत्तोलक*[9] की आघूर्ण-साम्यावस्था पर विचार कर रहे हैं। आधुनिक संकेत-पद्धति में

$$L = \frac{Sh}{2l} \tag{7.1}$$

चित्र 7.8a में S उस अवयव का निरपेक्ष (अर्थात तनन) सामर्थ्य है, जिसकी चौड़ाई B और गहराई d है। (यदि धरन का अनुप्रस्थ परिच्छेद वृत्ताकार बेलनाकार हो, तो गैलीलियो लिखते हैं कि निरपेक्ष प्रतिरोध की उत्तोलक-भुजा त्रिज्या R है।) प्रतिबल की आधुनिक अवधारणाओं में गैलीलियो ने स्पष्टतः चित्र 7.8b का एकसमान वितरण माना है।

गैलीलियो स्वयं निरपेक्ष सामर्थ्य S के संख्यात्मक मान का उपयोग नहीं करते; उनकी मुख्य चिंता *सा*पेक्ष सामर्थ्यों की गणना है। राशि $S/2$ को केवल विश्लेषण में आने वाला एक प्रदत्त भौतिक प्राचल माना जाता है। उदाहरणार्थ, गैलीलियो सही रूप से प्रदर्शित करते हैं कि आयताकार अनुप्रस्थ परिच्छेद वाले कैंटिलीवर धरन को—किनारे पर और सपाट अभिविन्यासों में—तोड़ने के लिए आवश्यक भारों T और X का अनुपात, ca/cb के बराबर है (चित्र 7.8c)। चूँकि परिच्छेद मापांक की पहचान kbh^2 के रूप में सही हुई है, समीकरण 7.1 में नियत गुणक $k = 1/2$ परिणाम को प्रभावित नहीं करता। वह अनुपात में निरस्त हो जाता है, जिससे पुष्ट होता है कि प्रतिबल की आधुनिक अवधारणा के अभाव के बावजूद गैलीलियो का तर्क सही मापक्रम-व्यवहार ग्रहण करता है।[10]



(a) विभंग की दशा (b) अंतर्निहित प्रतिबल-वितरण (c) तुलनात्मक सामर्थ्य

चित्र 7.8: ...

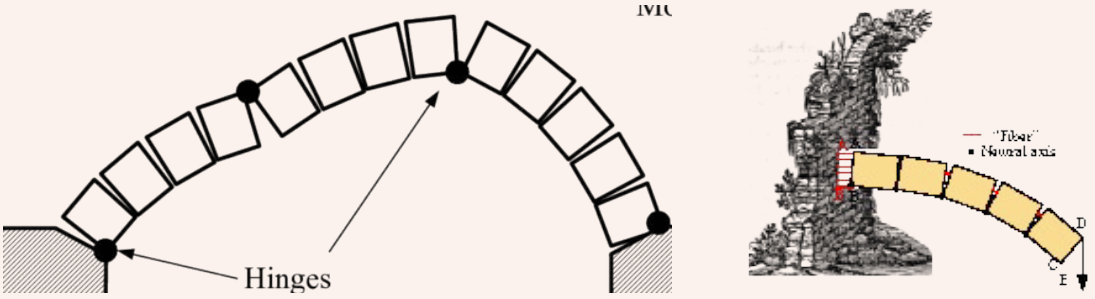
यह ध्यान रखना महत्त्वपूर्ण है कि गैलीलियो अभी प्रतिबल की अवधारणा से परिचित नहीं थे; वे धरन के प्रतिरोध को अब भी खींचकर अलग किए जा रहे (आभासी) आंतरिक तंतुओं से उत्पन्न मानते थे, जैसा चित्र 7.12a में दर्शाया गया है। इस गुणात्मक दृष्टि को बाद में मारियोत ने परिष्कृत किया, जिन्होंने धरन के अनुप्रस्थ परिच्छेद में रेशा-तनन और संपीडन (§10.1.2) की अधिक यांत्रिक व्याख्या प्रस्तुत की—यह बंकन के आधुनिक सिद्धांत की दिशा में आरंभिक कदम था।

आधुनिक पाठक को यह आश्चर्यजनक लग सकता है कि गैलीलियो जैसे प्रतिष्ठित वैज्ञानिक कैंटिलीवर धरन में अधिकतम प्रतिबल का स्थान सही न पहचान सके, किंतु ऐतिहासिक संदर्भ पर विचार करना आवश्यक है। गैलीलियो के समय संरचनात्मक व्यवहार पर चिनाई मेहराबों का प्रभुत्व था। ऐसी संरचनाओं में मुख्य चिंता संपीडन-विफलता नहीं, बल्कि तनन-बलों के कारण सटे हुए खंडों का पृथक्करण (अध्याय 31) था, जो अंततः पतन करा सकता था। उस विचार से प्रभावित होकर जिसे बाद में लाइबनित्स के कार्य (चित्र 7.10) में औपचारिक रूप मिला, चित्र 7.9 वह विफलता-विधा दर्शाता है जिसकी कल्पना संभवतः गैलीलियो—और बाद में मारियोत—ने तनन के अधीन निचले रेशों के पृथक्करण अथवा विदारण से नियंत्रित रूप में की थी।

[9] "कोणित उत्तोलक" पद का अर्थ एक बंकित अथवा कोणीय उत्तोलक-भुजा है—यहाँ कैंटिलीवर अवयव की अंतःस्थापित और प्रक्षेपी ज्यामिति—जो बलों तथा आघूर्ण-भुजाओं की दिशा बदलती है। गैलीलियो का विवेचन धरन को घूर्णी साम्यावस्था के अधीन स्थैतिक उत्तोलक के रूप में सरल करता है।

[10] गैलीलियो की यह पहचान कि सामर्थ्य चौड़ाई और ऊँचाई के वर्ग (bh^2) दोनों पर निर्भर करता है, ऐतिहासिक रूप से महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि यह आधुनिक परिच्छेद मापांक का पूर्वाभास देती है। यद्यपि उनके सूत्रीकरण में प्रतिबल अथवा प्रत्यास्थ विरूपण की औपचारिक अवधारणा नहीं थी, यह विमीय अंतर्दृष्टि संरचनात्मक मापक्रम नियमों की आरंभिक और उल्लेखनीय रूप से सही समझ दर्शाती है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) चिनाई मेहराब (b) चिनाई धरन

चित्र 7.9: एक दृढ “चिनाई धरन” का विक्षेप

गैलीलियो का कार्य अनेक दृष्टियों से उल्लेखनीय है। वे संरचनात्मक समस्याओं पर वैज्ञानिक विधि लागू करने वाले प्रथम व्यक्तियों में ही नहीं थे, बल्कि उन्होंने पहली बार *मुक्त-पिंड आरेख* की संकल्पना भी प्रस्तुत की। उतना ही महत्त्वपूर्ण यह है कि उन्होंने संरचनात्मक *क्षमता* की तुलना आरोपित *माँग* से करने की आधारभूत अवधारणा व्यक्त की—यह सिद्धांत आज भी आधुनिक अभियांत्रिकी व्यवहार के केंद्र में है।[11]

अंततः गैलीलियो का प्रतिरूप केवल तनन पर केंद्रित था और उसने संपीडन की उपेक्षा की। एक ऐसी रेखा के अस्तित्व का क्रांतिकारी विचार—जिसे बाद में *उदासीन अक्ष* कहा गया—जिस पर प्रतिबल शून्य होता है, अभी कल्पित नहीं हुआ था। यह सीमा अन्वेषकों की अगली पीढ़ी को आंतरिक बल-वितरण की अधिक पूर्ण समझ खोजने के लिए प्रेरित करने वाली थी।

गैलीलियो द्वारा स्थापित अनुभवजन्य परंपरा ऐसे अन्वेषकों के माध्यम से आगे बढ़ी जिन्होंने क्रमशः उनकी अंतर्दृष्टियों को परिष्कृत किया, त्रुटियाँ सुधारीं और धरनों को साम्यावस्था-विश्लेषण के अधीन यांत्रिक निकाय मानने वाले उनके आधारभूत उपागम पर निर्माण किया।

7.3.2 अंक II: अनुभवजन्य–सातत्य परंपरा

द्वितीय अंक एक निर्णायक संक्रमण दर्शाता है: अनुभवजन्य प्रेक्षण में आधारित रहते हुए भी अन्वेषक पदार्थों को पृथक तंतुओं के समुच्चय के स्थान पर सतत माध्यम के रूप में देखने लगे। इस परिवर्तन ने आंतरिक प्रतिबल-वितरण को समझने की नई संभावनाएँ खोलीं और संरचनात्मक विश्लेषण में सातत्य यांत्रिकी के आरंभ को चिह्नित किया।

7.3.2.1 देकार्त (1644)

देकार्त के जीवन-वृत्त के लिए अनुभाग 6.6.3 देखें।

1644 में देकार्त ने अपना *Principia Philosophiae*, प्रकाशित किया, जिसमें उन्होंने ठोसों के प्रतिरोध के भौतिक और तत्त्वमीमांसात्मक दोनों कारणों की जाँच के लिए अनेक पृष्ठ समर्पित किए। मेर्सेन को लिखे एक पत्र (दिनांक 1638) में उन्होंने लिखा:

[11] यद्यपि गैलीलियो ने आधुनिक सदिश संकेत-पद्धति का प्रयोग नहीं किया, उनके तर्क में निकाय के भागों को पृथक करना, आरोपित बल और प्रतिक्रिया के बिंदुओं की पहचान करना तथा घूर्णी संतुलन पर विचार करना सम्मिलित था—जो आधुनिक मुक्त-पिंड आरेख का पूर्वाभास देता है। इसी प्रकार अवयव के आंतरिक सामर्थ्य और विफलता उत्पन्न करने वाले बाह्य भार के बीच उनकी तुलनाएँ उस अवधारणा का प्रारंभिक सूत्रीकरण हैं जिसे आज क्षमता—माँग आकलन कहते हैं। इन वैचारिक सफलताओं ने आधुनिक संरचनात्मक सुरक्षा-जाँच की आधारभूमि रखी।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> जहाँ तक श्री गैलीलियो का संबंध है, वे पिंडों के भागों के संसंजन के दो कारण मानते हैं: एक निर्वात है, जिससे उनके अनुसार प्रकृति घृणा करती है; दूसरा एक प्रकार का गोंद अथवा चिपचिपा पदार्थ है जो सतहों से चिपककर उन्हें बाँधता है। किंतु दोनों मुझे पूर्णतः गलत प्रतीत होते हैं। प्रथम के विषय में मैं नहीं मानता कि प्रकृति निर्वात से घृणा करती है; और द्वितीय के विषय में, यदि यह गोंद अस्तित्व में होता तो इसे उन भागों से भी अधिक चिपचिपा होना पड़ता जिन्हें यह जोड़ता है, और तब यही प्रश्न उठता कि इसके अपने भागों को कौन जोड़े रखता है।
>
> Descartes, 1897b *Correspondance de René Descartes*

देकार्त ने अपने व्यापक दार्शनिक तंत्र—जो कणों की अंतःक्रिया और रिक्तियों के निषेध पर आधारित था—के पदों में ठोसों के प्रतिरोध की व्याख्या करने के लिए अपनी कृति के अनेक अनुभाग समर्पित किए।[12] देकार्त की *ठोसता* की अवधारणा का अधिक विस्तृत विवेचन इस अध्याय की सीमा से बाहर है।

देकार्त की *La Géométrie* (Descartes, 1637b), जो *Discours de la méthode* (Descartes, 1637a) के परिशिष्ट के रूप में प्रकाशित हुई, ने शास्त्रीय यूनानी ज्यामितीय समस्याओं को बीजीय प्रतीकवाद से जोड़कर वैश्लेषिक ज्यामिति का सूत्रपात किया। निर्देशांक अक्षों के परिचय, वक्रों के बीजीय निरूपण और क्रमबद्ध विलोपन तकनीकों द्वारा देकार्त ने ज्यामिति को बिंदुपथ और रचना की समस्याएँ हल करने की सामान्य विधि में रूपांतरित किया। इसका प्रभाव सत्रहवीं और अठारहवीं शताब्दी की यांत्रिकी में व्याप्त रहा तथा फर्मा, न्यूटन और बर्नूली परिवार द्वारा बाद में प्रयुक्त गणितीय भाषा प्रदान की।

फिर भी देकार्त एक महत्त्वपूर्ण संक्रमणकालीन व्यक्तित्व हैं: अनुभवजन्य आधार के अभाव के बावजूद यांत्रिक व्याख्याओं पर उनके आग्रह और अरस्तूवादी रूपों के निषेध ने भावी चिंतकों को संसंजन के अधिक भौतिक तथा संरचनात्मक प्रतिरूपों की ओर प्रेरित किया। पदार्थ के प्रति उनकी सातत्य दृष्टि प्रतिबल और विकृति की अवधारणाओं के अंतिम विकास में प्रभावशाली सिद्ध हुई।

7.3.2.2 लाइबनित्स (1684)

लाइबनित्स के जीवन-वृत्त के लिए अनुभाग 6.6.8 देखें।

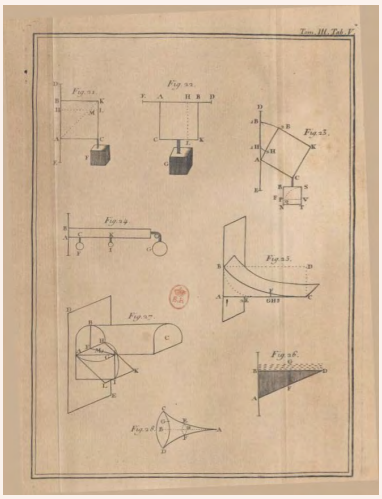
ठोसों की यांत्रिकी में लाइबनित्स की रुचि गैलीलियो और मारियोत के बंकन-सिद्धांतों के समकालीन विवाद से प्रभावित थी। जहाँ गैलीलियो ने माना था कि धरन पूर्णतः दृढ होते हैं और उनका प्रतिरोध पार होते ही वे अचानक विफल हो जाते हैं, वहीं मारियोत ने ऐसे प्रयोगात्मक प्रमाण प्रस्तुत किए जो सुझाते थे कि विदारण से पूर्व विरूपण और विकृति होती है। लाइबनित्स ने मारियोत के तर्क का अनुसरण किया और अपने लेखन तथा पत्राचार में स्वीकार किया कि गैलीलियो के प्रतिरूप ने पदार्थों की विस्तरणशीलता की उपेक्षा की थी, (Leibniz, 1684)।

McDonough, 2016 को उद्धृत करते हुए, लाइबनित्स ने देखा कि प्रयोगात्मक परिणाम—विशेषतः मारियोत द्वारा किए गए, जिनसे उनका प्रत्यक्ष पत्राचार था—दर्शाते हैं कि "धरन को तोड़ने के लिए गैलीलियो के अपेक्षित भार से बहुत कम भार पर्याप्त है।" लाइबनित्स के तर्क (2016, p. 321) में गैलीलियो की त्रुटि का मूल यह है कि "उन्होंने एक पूर्णतः दृढ धरन पर विचार किया, जो अपना प्रतिरोध अत्यधिक हो जाने पर एक ही क्षण में टूट जाएगा।" इसके विपरीत लाइबनित्स का मत था कि सभी धरन "टूटकर अलग होने से पहले कुछ सीमा तक झुकते हैं, जैसा कि ... उस डंडे के उदाहरण में देखा जा सकता है जो चकनाचूर होने से पहले ऐंठता है, और उन डोरियों के उदाहरण में जो टूटने से पहले खिंचती हैं।"

[12] देकार्त ने गैलीलियो के निर्वात के आह्वान और आंतरिक "गोंद" की किसी भी धारणा को तत्त्वमीमांसात्मक रूप से निराधार मानकर अस्वीकार किया। इसके स्थान पर उन्होंने प्रस्तावित किया कि पदार्थ सतत माध्यम में परस्पर फँसे कणों से बना है—जिसे उन्होंने *प्लेनम* कहा—और रिक्त स्थान के अस्तित्व को नकारा। इस दृष्टि में ठोसों का प्रतिरोध सदैव संपर्क और गति में रहने वाले इन कणों की अभेद्यता तथा ज्यामितीय व्यवस्था से उत्पन्न होता है। यद्यपि उनकी व्याख्याएँ अनुमानात्मक और अनुभवजन्य आधार से रहित थीं, उन्होंने अरस्तूवादी रूपों से पूर्णतः यांत्रिक व्याख्याओं की ओर एक महत्त्वपूर्ण परिवर्तन चिह्नित किया। न्यूटन ने बाद में देकार्त की अनेक धारणाओं—विशेषतः दूरी पर क्रिया के उनके निषेध—का सामना किया और उनसे अलग हुए, फिर भी भौतिक परिघटनाओं को गणितीय बनाने की कार्तीय प्रतिबद्धता ग्रहण की।

यद्यपि उन्होंने इस विषय पर कोई व्यापक ग्रंथ प्रकाशित नहीं किया, लाइबनित्स ने वैचारिक नवोन्मेषों द्वारा आनमन के विकसित होते सिद्धांत में योगदान दिया। उनका मत था कि सभी स्थूल पिंड वास्तव में अनंत रूप से विभाज्य हैं। किंतु धरन का धागों और मौलिक खंडों में उनका विभाजन भौतिक संरचना दर्शाने के लिए नहीं, बल्कि गणितीय अमूर्तन के रूप में था। आदर्शीकृत रेशों (§10.1.2) और अवयवों में यह विघटन स्पष्टतः एक पद्धतिगत रचना तथा आधुनिक सातत्य प्रतिरूपण की प्रस्तावना था।

लाइबनित्स ने कल्पना की कि ये रेशे कमानी की भाँति कार्य करते हुए धरन-अवयवों को जोड़े रखते हैं[13]। इस मानसिक प्रतिरूप में धरन उन दृढ खंडों के निकाय की भाँति व्यवहार करता है जो अपनी सटी सतहों पर कमानी-सदृश रेशों से जुड़े हैं। चित्र 7.10 ऐसा ही एक खंड $ABKC$ दर्शाता है, जो A पर आलंब वाले द्विभुजी उत्तोलक की भाँति कार्य करता है। यह $1B2B$ और $1H2H$ जैसे अवयवों से सटी सतह DE से जुड़ा है, जबकि भुजा AC के अनुदिश बिंदु C पर भार लगाया जाता है। यद्यपि यह आरेख अनुमानात्मक है, यह लाइबनित्स की सामान्य प्रतिरूपण रणनीतियों और ज्यामितीय तर्क के उनके आह्वान के अनुरूप है।



चित्र 7.10: लाइबनित्स की ज्यामितीय यांत्रिकी से प्रेरित वैचारिक धरन-प्रतिरूप (Leibniz, 1684)

यद्यपि लाइबनित्स ने धरन-यांत्रिकी में मूलतः नया बहुत कम जोड़ा, उन्होंने महत्त्वपूर्ण वैचारिक आधारभूमि रखी। जैसा उन्होंने स्वयं कहा, पूर्ण सिद्धांत का विकास वे अन्य लोगों के लिए छोड़ेंगे। ऐसा प्रतीत होता है कि समस्या में उनकी दीर्घकालीन रुचि नहीं थी–संभवतः इसलिए कि उन्हें उसमें सीमित गणितीय गहराई दिखाई दी। फिर भी उनकी अंतिम टिप्पणियाँ भौतिक परिघटनाओं को प्रकाशित करने की गणित की शक्ति में उनके विश्वास की पुष्टि करती हैं। वे लिखते हैं:

> ut proinde bis paucis consideratis tota haec materia redacta sit ad puram Geometriam, quod in physicis et mechanicis unice desideratur.
>
> McDonough, 2016 *"Leibniz and the Foundations of Physics: The Later years"*, p. 112

जिसका अनुवाद इस प्रकार किया जा सकता है: "अतः इन कुछ विचारों द्वारा इस विषय का संपूर्ण विवेचन शुद्ध ज्यामिति में सीमित हो जाता है–जो भौतिकी और यांत्रिकी की प्रमुख अभिलाषा है।"[14]

[13] इस दृष्टि से लाइबनित्स को आधुनिक विविक्त अवयव विधि (DEM) का वैचारिक अग्रदूत माना जा सकता है, जो सातत्य को भी नम्य अवयवों से जुड़े दृढ खंडों के समुच्चय के रूप में प्रतिरूपित करती है।

[14] *शुद्ध ज्यामिति* का लाइबनित्स का आह्वान इस आरंभिक पहचान को रेखांकित करता है कि ज्यामितीय तर्क जटिल यांत्रिक व्यवहार में शक्तिशाली अंतर्दृष्टि प्रदान कर सकता है। यह दृष्टिकोण बाद में *इलास्टिका* जैसी अरैखिक प्रत्यास्थ समस्याओं के विवेचन में अनिवार्य सिद्ध हुआ, जहाँ ज्यामिति रैखिक परास से परे साम्यावस्था विन्यासों को नियंत्रित करती है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंततः *Acta Eruditorum* (Leibniz, 1691e), जून 1691, में लाइबनित्स लिखते हैं कि वे निजी पत्रों के माध्यम से धरनों, *तने हुए धनुषों अथवा किसी भी प्रकार के पार्श्व बंकन के झुकने या वक्र होने पर भी विचार करना चाहते हैं*, यद्यपि उन्होंने प्रकाशन स्थगित करने और विवरण निजी संचार के लिए सुरक्षित रखने का निर्णय लिया।

7.3.2.3 मारियोत (1686)

मारियोत जल-नलिकाओं के सामर्थ्य का अन्वेषण कर रहे थे और उन्होंने पहले आंतरिक दाब सहने के लिए दिए गए व्यास की नलिका की आवश्यक भित्ति-मोटाई का सही व्यंजक व्युत्पन्न किया। किंतु अनेक तनन और बंकन परीक्षण (चित्र 7.11a) करने के बावजूद वे अपने परिणामों का गैलीलियो के सूत्र से सामंजस्य नहीं बैठा सके। उन्होंने निष्कर्ष निकाला कि अविस्तरणीयता की गैलीलियो की धारणा गलत थी और सभी पदार्थों में भारित होने पर कुछ विस्तार अवश्य होना चाहिए। (हुक ने हाल ही में अपना प्रसिद्ध नियम, *Ut tensio, sic vis*, प्रकाशित किया था।)

अतः मारियोत ने माना कि पदार्थ रैखिक-प्रत्यास्थ रीति से व्यवहार करते हैं, तनन और संपीडन में समान व्यवहार प्रदर्शित करते हैं तथा विभंग से पूर्व उनका एक परिमित अधिकतम विस्तार होता है। उदासीन अक्ष को परिच्छेद के आधार पर मानने की गैलीलियो की धारणा बनाए रखते हुए, मारियोत ने निष्कर्ष निकाला कि प्रतिबलों का वितरण त्रिकोणीय रूपरेखा में होना चाहिए (चित्र 7.11b) (Heyman, 1998b)।

जब मारियोत ने धरन के बंकन (चित्र 7.11af) पर विचार किया, उन्होंने देखा कि तनन-बलों का योग $S/2$ के बराबर है—अर्थात धरन के निरपेक्ष तनन-सामर्थ्य का केवल आधा—और बिंदु D के चारों ओर उनका आघूर्ण $S/2 \times 2h/3 = Sh/3$ है (चित्र 7.11b देखें)। तब संगत चरम भार निम्न है:

$$L = \frac{Sh}{3l} \tag{7.2}$$

जहाँ L बाह्य भार है (गैलीलियो के सूत्रीकरण में W द्वारा निरूपित)। यह परिणाम गैलीलियो के पूर्वानुमानित चरम भार का केवल दो-तिहाई है (Timoshenko, 1953)।

इसके बाद मारियोत और आगे बढ़े। चित्र 7.11a-f को पुनः संदर्भित करते हुए उन्होंने देखा कि अनुप्रस्थ परिच्छेद के निचले भाग ID के रेशे संपीडन में हैं, जबकि ऊपरी भाग IA के रेशे तनन में हैं (चित्र 7.11c)। तनन-रेशों का प्रतिरोध पार करने के लिए आवश्यक भार L की गणना हेतु उन्होंने समीकरण 7.2 का पुनः उपयोग किया, h को $h/2$ से प्रतिस्थापित किया और परिणाम को दोगुना करके प्राप्त किया:

$$L_1 = 2 \cdot \frac{S}{3l} \cdot \frac{h}{2} = \frac{Sh}{3l} \tag{7.3}$$

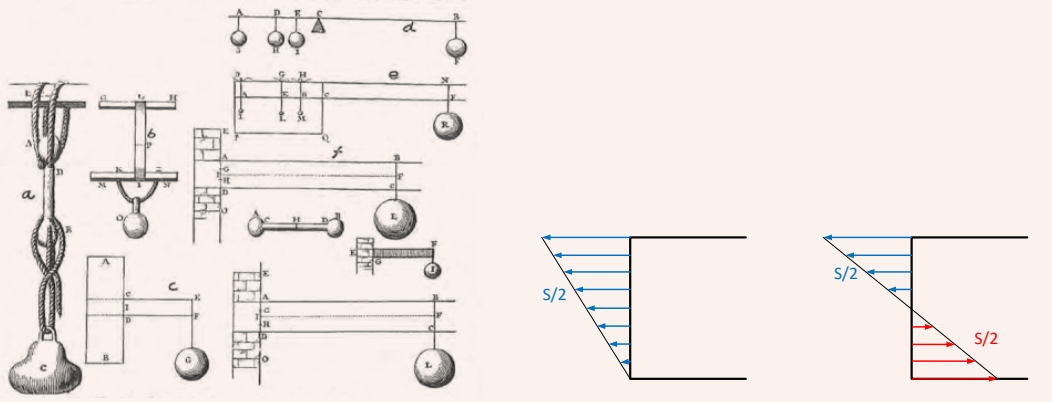
यद्यपि रेशों में बल-वितरण के विषय में उनकी धारणा मूलतः सही थी, उन्होंने बिंदु I के सापेक्ष तनन-बलों के आघूर्ण के मूल्यांकन में गणना-त्रुटि की। समीकरण 7.2 में $h/2$ को h के स्थान पर रखने के अतिरिक्त उन्हें $S/2$ का S के स्थान पर भी उपयोग करना चाहिए था, जिससे सही परिणाम प्राप्त होता:

$$L_2 = 2 \cdot \frac{S}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{3l} = \frac{Sh}{6l} \tag{7.4}$$

इस चूक ने मारियोत को धरनों की चरम भार-क्षमता के सही सूत्र तक पहुँचने से रोका (Timoshenko, 1953)। बाद में सेंट-वेनाँ ने यह त्रुटि सुधारी।

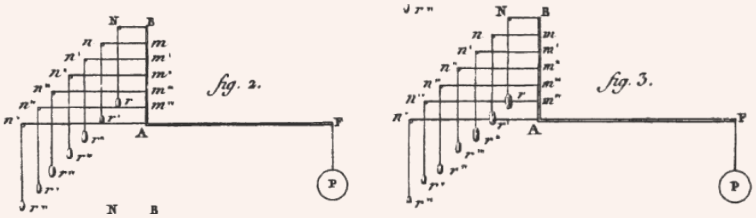
पुनः, प्रतिबल की अवधारणा अभी औपचारिक नहीं हुई थी और मारियोत का तर्क धरन के भीतर तनन का प्रतिरोध करने वाले भारित समानांतर तंतुओं के गैलीलियो के पूर्ववर्ती विचार से निकटता से जुड़ा रहा। इस तंतु-आधारित व्याख्या को Girard, 1798 ने 19वीं शताब्दी के आरंभ में सजीव रूप से दर्शाया: चित्र 7.12a तनन-रेशों से बने बंकित उत्तोलक के गैलीलियो के प्रतिरूप का पुनर्निर्माण करता है, जबकि चित्र 7.12b उस अवधारणा का मारियोत द्वारा परिष्कार दर्शाता है। यद्यपि अल्बर्ट गिरार्ड ने बहुत बाद में कार्य किया, उनके आरेख प्रतिबल-आधारित प्रत्यास्थता सिद्धांत के पूर्ण विकास से पूर्व के संक्रमणकालीन चिंतन को दृश्य बनाते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) मारियोत के परीक्षण (b) मारियोत का मूल प्रतिरूप (c) मारियोत का संशोधित प्रतिरूप

चित्र 7.11: मारियोत के प्रतिरूप (Heyman, 1998b)



(a) गैलीलियो (b) मारियोत

चित्र 7.12: गैलीलियो और मारियोत के प्रतिरूपों का गिरार्ड द्वारा चित्रण

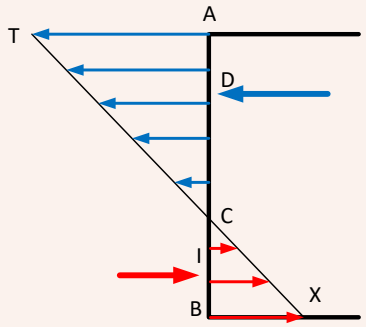
7.3.2.4 पारॉं (1713)

उदासीन अक्ष को मनमाने ढंग से किसी "संभावित" स्थान पर रखने के स्थान पर पारॉं ने साम्यावस्था की सभी दशाओं को संतुष्ट करने की आवश्यकता पहचानी, (Parent, 1713)। द्विविमीय दृढ-पिंड यांत्रिकी में साम्यावस्था के तीन समीकरण संतुष्ट होने चाहिए। पारॉं ने देखा कि गैलीलियो ने प्रभावी रूप से केवल एक समीकरण संतुष्ट किया था–आलंब (अर्थात परिच्छेद के आधार स्थित उदासीन अक्ष) के चारों ओर आरोपित भार के आघूर्ण को विभंग पर आंतरिक बलों के आघूर्ण के बराबर रखकर। गैलीलियो ने स्पष्टतः शेष दो दशाओं–क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर बलों के योग–की उपेक्षा की थी।

इसके विपरीत पारॉं ने क्षैतिज साम्यावस्था समीकरण स्पष्ट रूप से लिखा। उन्होंने तनन और संपीडन में असमान प्रत्यास्थता मापांकों की अनुमति देते हुए एक सामान्य रैखिक विकृति-वितरण (चित्र 7.13) माना। उनके सूत्रीकरण में विभंग रेशा AT के तनन-प्रतिबल से नियंत्रित होता है, यद्यपि रेशा BX में संपीडन-प्रतिबल अधिक हो सकता है। उनके परिमाण चाहे जो हों, पारॉं ने प्रतिपादित किया कि संपीडन त्रिभुज CBX का कुल प्रतिरोध तनन त्रिभुज CAT के प्रतिरोध के बराबर होना चाहिए और संगत बल क्रमशः बिंदुओं I तथा D से होकर क्रियाशील होने चाहिए।

पारॉं अनुप्रस्थ परिच्छेद के सप्रशरेखीय दिशा में क्रियाशील बलों–जिन्हें आज हम अपरूपण-प्रतिबल कहते हैं–की संभावना पहचानने वाले भी प्रथम व्यक्ति थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 7.13: पाराँ का प्रतिरूप

7.3.2.5 कूलॉम (1773)

चार्ल्स-अगस्ताँ कूलॉम ने बंकन के विश्लेषण में महत्त्वपूर्ण प्रगति की। अपने 1773 के संस्मरण (Coulomb, 1773b)(*Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*) में उन्होंने कैंटिलीवर धरनों में आंतरिक बल-वितरण की जाँच की और साम्यावस्था के तीनों समीकरण—दो दिशाओं में बल-संतुलन और एक बिंदु के चारों ओर आघूर्ण-संतुलन—सही रूप से लागू किए। उन्होंने धरन को हुक के नियम का पालन करने वाले रेशों से बना माना और विफलता तक प्रत्यास्थ व्यवहार की स्थिति में आंतरिक प्रतिरोधी आघूर्ण को अधिकतम तनन-प्रतिबल और परिच्छेद की गहराई के वर्ग, अर्थात $\sigma h^2/6$, के समानुपाती आकलित किया।

आनमन

यद्यपि कूलॉम ने इस समीकरण को स्पष्टतः इस रूप में नहीं लिखा, उनका तर्क और उनकी गणनाएँ सारतः इसके समतुल्य हैं। उन्होंने तनन और संपीडन की भूमिकाओं की स्पष्ट पहचान की, उदासीन अक्ष के स्थानांतरण पर चर्चा की और प्रत्यास्थ तथा दृढ पदार्थों के व्यवहार में भेद किया। किंतु उन्होंने पूर्ण रैखिक प्रतिबल-वितरण व्युत्पन्न नहीं किया और न ही प्रत्यास्थता सिद्धांत से उदासीन अक्ष के स्थान को उचित ठहराया। तथापि यह ध्यान रखना महत्त्वपूर्ण है कि कूलॉम का विवेचन मुख्यतः यांत्रिक अंतर्ज्ञान और रेशा-विदारण की सादृश्यता पर आधारित था, प्रत्यास्थता की उभरती गणितीय रूपरेखा पर नहीं। उन्होंने हुक के नियम से सूत्र व्युत्पन्न नहीं किया और न ही विकृति-सुसंगति अथवा आंतरिक साम्यावस्था की दशाएँ सूत्रबद्ध कीं।

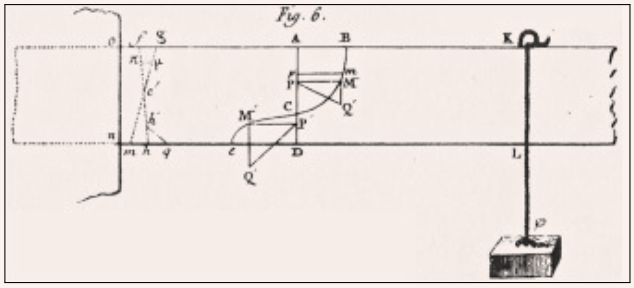
हम उनकी व्युत्पत्ति की रूपरेखा प्रस्तुत करते हैं ((Timoshenko, 1953) पर आधारित)

Coulomb, 1773c चित्र 7.14a में दर्शाए और Timoshenko, 1953 में चर्चित आयताकार कैंटिलीवर धरन में आंतरिक प्रतिबल-वितरण की जाँच से बंकन का विश्लेषण आरंभ करते हैं। उनके तर्क को अनेक प्रमुख चरणों में विभाजित किया जा सकता है:

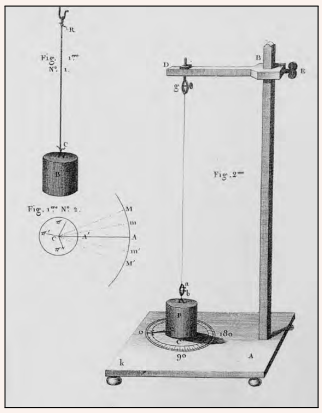
1. **परिच्छेद में प्रतिबल-वितरण** कूलॉम कैंटिलीवर के स्थिर सिरे के निकट अनुप्रस्थ परिच्छेद AD पर विचार करते हैं। वे देखते हैं कि ऊपरी भाग (AC) तनन में और निचला भाग संपीडन में होगा। वे रेशा-बलों को क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर घटकों (सदिश PQ और $P'Q$ से निरूपित) में विघटित करते हैं और स्थैतिकी के तीन समीकरण लागू करते हैं। इससे वे निष्कर्ष निकालते हैं:

    - **क्षैतिज बलों का योग** (परिच्छेद के अनुदिश वक्र BCe द्वारा निरूपित) शून्य होना चाहिए।
    - **ऊर्ध्वाधर बलों का योग** आरोपित भार ϕ के बराबर होना चाहिए।
    - बिंदु C के सापेक्ष आंतरिक बलों के **आघूर्णों का योग** उसी अक्ष के चारों ओर आरोपित भार ϕ के आघूर्ण के बराबर होना चाहिए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) भारित कैंटिलीवर की साम्यावस्था



(b) मरोडीय कंपन-परीक्षण की युक्ति

चित्र 7.14: कूलॉम के प्रयोग (Coulomb, 1773c)

वे लिखते हैं कि ये समीकरण पदार्थ के संघटनात्मक व्यवहार से स्वतंत्र रूप से लागू होते हैं।

2. **पूर्णतः प्रत्यास्थ स्थिति** धरन को हुक के नियम का पालन करने वाले पूर्णतः प्रत्यास्थ पदार्थ से बना मानकर कूलॉम स्थिर सिरे पर अवकल अवयव $ofhn$ की जाँच करते हैं। आरोपित भार ϕ के अधीन प्रारंभ में क्षैतिज समतल fh घूमकर नई स्थिति gm में आ जाता है। अनुप्रस्थ परिच्छेद के भीतर प्रतिबल-वितरण दो त्रिकोणीय क्षेत्रों द्वारा दर्शाया जाता है: तनन में fge और संपीडन में emh, जिनमें प्रत्येक रेशों में विकृति और प्रतिबल दर्शाता है।

   σ को बिंदु f पर अधिकतम तनन-प्रतिबल मानें। तब कूलॉम आंतरिक प्रतिरोधी आघूर्ण (एकक चौडाई के धरन के लिए) की गणना निम्न प्रकार करते हैं:

$$M_{\text{int}} = 2 \cdot \sigma \cdot \frac{fe}{2} \cdot \frac{2}{3} fe = \frac{2}{3}\sigma (fe)^2 = \sigma \frac{(fh)^2}{6} \tag{7.5}$$

   पदार्थ का चरम तनन-सामर्थ्य S प्रस्तुत करके तथा भार की भुजा को l और परिच्छेद की कुल गहराई को h से निरूपित करके वे चरम भार व्युत्पन्न करते हैं:

$$\phi = \frac{Sh}{6l} \tag{7.6}$$

   वे निष्कर्ष निकालते हैं कि अपरूपण-बलों की उपेक्षा की जा सकती है, विशेषतः जब उत्तोलक-भुजा l, गहराई h से बहुत बडी हो।

3. **पूर्णतः दृढ संपीडन की स्थिति** इसके बाद कूलॉम पत्थर जैसे पदार्थ पर विचार करते हैं, जिसे संपीडन में दृढ और तनन में विस्तार-विहीन माना जाता है। वे प्रतिपादित करते हैं कि विभंग निचले किनारे h के चारों ओर घूर्णन से होता है और एकसमान तनन-प्रतिबल वितरण मानते हैं। परिणामी आंतरिक आघूर्ण से चरम भार का अधिक आकलन प्राप्त होता है:

$$\phi = \frac{Sh}{3l} \tag{7.7}$$

   किंतु इस सैद्धांतिक पूर्वानुमान की प्रयोगात्मक आँकडों से तुलना करने पर कूलॉम पाते हैं कि भार का अधिक आकलन हुआ है। अतः वे प्रस्तावित करते हैं कि वास्तविक घूर्णन-बिंदु h से किंचित ऊपर, बिंदु h' पर होना चाहिए, ताकि परिच्छेद का छोटा भाग hh' संपीडन-बल वहन करे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. **महत्त्व और संदर्भ** कूलॉम का विश्लेषण आंतरिक बलों पर स्थैतिक साम्यावस्था को सही रूप से लागू करता है और बंकनशील अवयव के भीतर प्रतिबल-वितरण की स्पष्ट वैचारिक समझ दर्शाता है।[15]

रोचक है कि कूलॉम पाराँ के पूर्ववर्ती योगदानों का संदर्भ नहीं देते, जिससे लगता है कि वे उनसे अनभिज्ञ थे। इसके स्थान पर वे चार्ल्स बोस्यु, का उल्लेख करते हैं, जिन्होंने अपने ग्रंथ *La Construction la plus avantageuse des digues* में काष्ठ-धरनों को प्रत्यास्थ और पत्थर को दृढ मानने की अनुशंसा की थी।

> कूलॉम ने आंतरिक बलों के विश्लेषण में स्थैतिकी के समीकरणों का सही उपयोग किया और धरन के अनुप्रस्थ परिच्छेद पर इन बलों के वितरण के विषय में उनके विचार स्पष्ट थे।
>
> Timoshenko, 1953 *History of Strength of Materials*

> कूलॉम का सिद्धांत... सामान्यतः सही परिणाम देने पर भी सिद्धांत की दृष्टि से दोषपूर्ण था, क्योंकि प्रतिबल-वितरण विकृति के ज्ञान से प्राप्त नहीं किया गया, बल्कि अनुभवजन्य आधार पर प्रतिपादित किया गया था।
>
> Todhunter and Pearson, 1893 *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*

उन्नीसवीं शताब्दी के मध्य तक ऐसा नहीं हुआ कि सेंट-वेनाँ ने प्रत्यास्थता सिद्धांत के माध्यम से इन विचारों को औपचारिक रूप दिया, परिचित संबंध $\sigma = My/I$ व्युत्पन्न किया और स्थापित किया कि उदासीन अक्ष केंद्रक से होकर जाता है। अतः यद्यपि कूलॉम ने धरन-सिद्धांत के मूल तत्त्वों का पूर्वाभास दिया, उसे कठोर सैद्धांतिक आधार पर रखने का कार्य सेंट-वेनाँ के लिए शेष रहा।

मरोड

1784 में कूलॉम ने मरोड पर अपना संस्मरण प्रस्तुत किया। उन्होंने किसी तार से निलंबित धातु-बेलन के मरोडीय दोलनों को देखकर तार की मरोडीय दृढता निर्धारित की[16] चित्र 7.14b। कूलॉम ने माना कि ऐंठे हुए तार का प्रतिरोधी बलाघूर्ण ऐंठन-कोण ϕ के समानुपाती है और पाया कि दोलन-काल ऐंठन-कोण से स्वतंत्र है (यदि वह बहुत बडा न हो); अतः उन्होंने निष्कर्ष निकाला कि बलाघूर्ण और ऐंठन-कोण में समानुपात है। फिर उन्होंने समान पदार्थ किंतु भिन्न लंबाइयों और व्यासों वाली तारों पर प्रयोग किए और स्थापित किया कि बलाघूर्ण M होगा

$$M = \frac{\mu d^4}{l}\phi \tag{7.8}$$

जहाँ l लंबाई, d व्यास और μ एक पदार्थ-नियतांक है। आधुनिक संकेत-पद्धति में यह है

$$T = \frac{GJ}{L}\phi \tag{7.9}$$

जहाँ T, G, J और ϕ क्रमशः बाह्य बलाघूर्ण, अपरूपण मापांक, ध्रुवीय जडत्व आघूर्ण (वृत्ताकार परिच्छेद के लिए J=$\pi d^4/32$), और ऐंठन-कोण हैं। अधिकतम अपरूपण-प्रतिबल का संगत व्यंजक $\tau = TR/J$ है।

[15] कूलॉम के प्रतिबल-आरेख और आघूर्ण-आकलन वैचारिक रूप से आधुनिक धरन-सिद्धांत के अनुरूप हैं, किंतु निष्पादन में भिन्न हैं। आज प्रत्यास्थ धरन में आंतरिक आघूर्ण $M = \int_A \sigma y\, dA$, जहाँ $\sigma = E\kappa y$, के रूप में लिखा जाता है, जिससे $M = EI\kappa$ प्राप्त होता है; यहाँ E यंग मापांक, κ वक्रता और I क्षेत्रफल का द्वितीय आघूर्ण है। कूलॉम त्रिकोणीय प्रतिबल-खंडों पर ज्यामितीय तर्क द्वारा इस कलन-आधारित व्युत्पत्ति को छोड देते हैं। इसके अतिरिक्त विभंग के उनके विवेचन में चरम प्रतिबल का उपयोग और पूर्ण सुघट्य पुनर्वितरण की धारणा है—यह अवधारणा बहुत बाद में सीमा-विश्लेषण और सुघट्य अभिकल्प सिद्धांत में औपचारिक हुई।

[16] यह ध्यान देना चाहिए कि तब तक कूलॉम मरोड-तुला विकसित कर चुके थे और विद्युत तथा चुंबकत्व के साथ-साथ शयानता के अपने अनेक परिमाणात्मक अध्ययनों में उसका उपयोग कर चुके थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कूलॉम ने वास्तव में यह समीकरण व्युत्पन्न किया था; यद्यपि आनमनी प्रतिबलों के समकक्ष समीकरण से इसकी सादृश्यता सरल है, यह स्पष्ट नहीं है कि इसका प्रथम उपयोग किसने किया।

$$\tau = \frac{TR}{J} \Rightarrow \sigma = \frac{My}{I} \tag{7.10}$$

फिर भी आनमनी प्रतिबल-समीकरण सामान्यतः कूलॉम को दिया जाता है।

7.3.2.6 यंग (1807)

हुक द्वारा आरंभ की गई परंपरा में यंग के योगदान की चर्चा के लिए §6.6.6 देखें।

अंतराल: मापांक

1807 में यंग ने किसी पदार्थ की दृढता निरूपित करने के लिए प्रत्यास्थता मापांक की अवधारणा प्रस्तुत की:

> हम किसी पदार्थ की प्रत्यास्थता को उसी पदार्थ के एक निश्चित स्तंभ के भार द्वारा व्यक्त कर सकते हैं, जिसे उसकी प्रत्यास्थता का मापांक कहा जा सकता है; और जिसका भार ऐसा है कि उसमें कोई भी वृद्धि उसे उसी अनुपात में बढाएगी जिस अनुपात में जोडा गया भार अपने दाब से समान व्यास वाले पदार्थ के एक भाग को छोटा करेगा।
>
> Young, 1807 *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*

उनकी परिभाषा कुछ जटिल है और आधुनिक व्याख्या से किंचित भिन्न है। यंग के "मापांक के भार" की इकाइयाँ प्रतिबल के स्थान पर बल की हैं और वह आधुनिक प्रत्यास्थता मापांक (E) को अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल (A) से गुणा करने के समतुल्य है। ध्यान देने योग्य है कि यह संबंध ऑयलर द्वारा पहले ही व्यक्त किया जा चुका था।

इसके अतिरिक्त यंग उस राशि को, जिसे आज हम "अपरूपण" कहते हैं, डेट्रूज़न कहते हैं और लिखते हैं कि:

> फिर भी ऐंठे हुए पदार्थों के गुणों से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि बल कणों की स्वाभाविक स्थिति से उनकी दूरी के सरल अनुपात में बदलता है और वह उस सतह के परिमाण के भी सीधे समानुपाती होना चाहिए जिस पर वह लगाया जाता है।
>
> Young, 1807 *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*

यहाँ यंग अपरूपण-विरूपण और अपरूपण मापांक का सही वर्णन करते हैं तथा यह भी सही निष्कर्ष निकालते हैं कि अवयव का अपरूपण-सामर्थ्य उसके अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल के समानुपाती है।

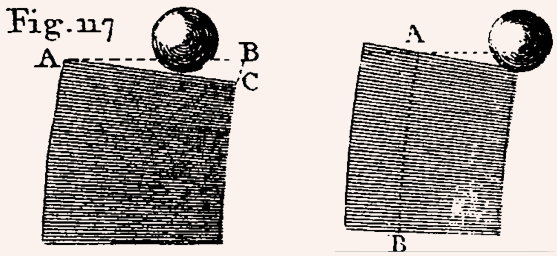
मध्य तृतीयांश नियम; 1807

यंग द्वारा प्रत्यास्थता मापांक प्रस्तुत किए जाने से संबंधित संक्षिप्त अंतराल के बाद अब हम *उदासीन अक्ष* के विषय पर लौटते हैं। यंग ने बंकन में उदासीन अक्ष के स्थान का भी अध्ययन किया। उन्होंने पारॉं और कूलॉम के पूर्ववर्ती कार्य का विस्तार कर अक्षीय बल के प्रभाव सम्मिलित किए, जैसा चित्र 7.15 में दर्शाया गया है।

> **320. प्रमेय**। जब आयताकार पिरज़्मीय रूप के किसी प्रत्यास्थ स्तंभ पर अक्ष के समानांतर दिशा में बल लगाया जाता है, तो बल की क्रिया-रेखा के निकटतम भाग विपरीत दिशा में प्रतिरोध करते हैं; वे कण, जो अक्ष से गहराई और

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 7.15: यंग का मध्य तृतीयांश नियम

> बल की क्रिया-रेखा की दूरी के बारह गुने के तृतीय समानुपाती के बराबर दूरी से परे हैं, अपनी स्वाभाविक अवस्था में रहते हैं; और उनसे परे के भाग बल की दिशा में कार्य करते हैं।
>
> Young, 1807 *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*

यंग के प्रमेय 320 को उत्केंद्रित रूप से भारित प्रत्यास्थ स्तंभ के अनुदैर्ध्य विस्तार और संपीडन को नियंत्रित करने वाला समानुपात का ज्यामितीय कथन माना जा सकता है। मान लें कि बल F आयताकार प्रिज़्मीय स्तंभ के अक्ष के समानांतर किंतु केंद्रकीय अक्ष से अनुप्रस्थ दूरी a पर क्रियाशील है और बंकन की दिशा में स्तंभ की गहराई b है। यंग का तर्क है कि अनुदैर्ध्य विकृति बल की क्रिया-रेखा से दूरी y के समानुपाती बदलती है; अतः उस रेखा के निकट रेशे एक अर्थ में विस्तार अनुभव करते हैं, जबकि पर्याप्त दूर के रेशे विपरीत अर्थ में विस्तार अनुभव करते हैं। अक्ष से y_0 दूरी पर एक मध्यवर्ती स्तर होता है, जिसके लिए विस्तार लुप्त हो जाता है, अर्थात $\varepsilon(y_0) = 0$। यंग इस स्थान को बीजीय प्रतिबल-समीकरण हल करके नहीं, बल्कि समानुपात के तर्क से निर्धारित करते हैं और कहते हैं कि y_0, b और $12a$ का तृतीय समानुपाती है, जिससे $b : y_0 = y_0 : 12a$। आधुनिक पदों में इससे $y_0 \propto \sqrt{ab}$ प्राप्त होता है, जो अक्षीय बल और उत्केंद्रता से उत्पन्न बंकन के बीच संतुलन व्यक्त करता है। इस प्रकार यह प्रमेय परिच्छेद की गहराई में रैखिक समानुपात $\varepsilon(y) \propto y$ को अंतर्निहित करता है, स्थानांतरित उदासीन अक्ष की अवधारणा का पूर्वाभास देता है और दर्शाता है कि यंग ने स्पष्ट संघटनात्मक समीकरणों के स्थान पर लंबाइयों और बलों के अनुपातों द्वारा प्रत्यास्थ व्यवहार को कैसे निरूपित किया।

यहाँ यंग वर्णन करते हैं कि भार की उत्केंद्रता के साथ उदासीन अक्ष की स्थिति कैसे बदलती है और अभियांत्रिकी अभिकल्प में आगे चलकर प्रसिद्ध हुए *मध्य तृतीयांश नियम* को प्रस्तुत करते हैं।

फिर भी यह ध्यान देना चाहिए कि यंग का विवेचन सदैव स्पष्ट नहीं था। प्रासंगिक सामग्री विविध वैज्ञानिक विषयों पर 58 व्याख्यानों के व्यापक संकलन के भाग के रूप में आई थी।

> यह संपूर्ण अनुभाग मुझे अत्यंत अस्पष्ट प्रतीत होता है, जैसा इसके प्रतिष्ठित लेखक के अधिकांश लेखन में है; विज्ञानों और भाषाओं में उनकी विशाल उपलब्धियों में गणितज्ञों की सामान्य बोली में स्वयं को स्पष्टतः व्यक्त करने की क्षमता दुर्भाग्यवश सम्मिलित नहीं थी। इस अनुभाग के सूत्र अपने प्रकट होने के समय संभवतः मुख्यतः नए थे, किंतु जिस अनाकर्षक रूप में वे प्रस्तुत किए गए उसके कारण उनके ध्यान आकर्षित करने की संभावना बहुत कम थी।
>
> Todhunter and Pearson, 1893 *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*

यंग के युग तक अनुभवजन्य-सातत्य परंपरा ने धरन-सिद्धांत की अधिकांश आवश्यक अवधारणाएँ—प्रत्यास्थ व्यवहार, प्रतिबल-वितरण, साम्यावस्था-विश्लेषण और पदार्थ-गुणों की आरंभिक समझ भी—स्थापित कर दी थीं। फिर भी पूर्णतः कठोर सैद्धांतिक रूपरेखा अप्राप्य रही। अंतिम संश्लेषण के लिए वह गणितीय परिशुद्धता आवश्यक थी जो आधी शताब्दी बाद सेंट-वेनाँ प्रदान करने वाले थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

7.3.2.7 सेंट-वेनाँ (1855)

सेंट-वेनाँ ने कूलॉम के अग्रणी कार्य के 80 से अधिक वर्ष बाद धरन-बंकन के विश्लेषण पर पुनः विचार किया। यद्यपि कूलॉम ने पहले ही तनन और संपीडन प्रतिबलों को सम्मिलित करने वाला स्थैतिकतः सही सूत्रीकरण प्रस्तावित किया था—और आधुनिक आघूर्ण—प्रतिबल संबंध से मिलते-जुलते व्यंजक भी दिए थे—उन्होंने प्रत्यास्थता सिद्धांत से प्रतिबल-वितरण व्युत्पन्न नहीं किया। रैखिक प्रत्यास्थता की पूर्ण रूपरेखा का उपयोग करके बंकन के अधीन प्रतिबल-क्षेत्र की *प्रथम कठोर व्युत्पत्ति* प्रदान करना सेंट-वेनाँ के लिए शेष रहा।

अपने निर्णायक संस्मरण (Saint-Venant, 1855c) में सेंट-वेनाँ ने लघु विरूपण, हुक के नियम का पालन करने वाले समरूप और समदैशिक प्रत्यास्थ पदार्थ तथा रेशों के बीच पूर्ण बंधन माना। इन धारणाओं के अधीन उन्होंने प्रदर्शित किया कि:

- *उदासीन अक्ष*—शून्य अनुदैर्ध्य प्रतिबल का बिंदुपथ—धरन के अनुप्रस्थ परिच्छेद के केंद्रक से होकर जाता है।
- शुद्ध बंकन के अधीन अभिलंब प्रतिबल इस अक्ष से दूरी y के साथ रैखिक रूप से बदलता है, जिससे अब मूलभूत व्यंजक प्राप्त होता है:

$$\sigma = \frac{M\,y}{I}$$

यह एक निर्णायक मोड़ था: पहली बार बंकन-प्रतिबल सूत्र केवल साम्यावस्था से नहीं, बल्कि आंतरिक पदार्थ-व्यवहार और सुसंगति से व्युत्पन्न हुआ। इस परिणाम ने अनुभवजन्य अथवा रेशा-आधारित तर्क को प्रत्यास्थ सातत्य उपागम से प्रतिस्थापित किया और ज्यामिति, पदार्थ-व्यवहार तथा आंतरिक प्रतिबल-वितरण को दृढता से जोड़ा।

7.3.2.8 क्लेब्श (1862)

अल्फ्रेड क्लेब्श (1833–1872) ने प्रत्यास्थता सिद्धांत के औपचारिक गणितीय विकास में निर्णायक भूमिका निभाई। उनकी प्रमुख कृति, (Clebsch, 1862b) (*Theorie der Elasticität fester Körper*), जो मरणोपरांत 1862 में प्रकाशित हुई और बाद में 1866 में सेंट-वेनाँ की विस्तृत टिप्पणियों सहित फ्रांसीसी में अनूदित हुई, ने प्रत्यास्थता के नियंत्रक समीकरणों की क्रमबद्ध और कठोर प्रस्तुति दी।

यद्यपि क्लेब्श ने *उदासीन अक्ष* की अवधारणा प्रस्तुत नहीं की, उनके ग्रंथ ने सेंट-वेनाँ के परिणामों को समेकित और विस्तृत किया तथा प्रत्यास्थ पिंडों में प्रतिबल और विकृति-वितरण की अधिक सामान्य तथा औपचारिक व्युत्पत्ति प्रदान की। विशेषतः बंकन के उनके विवेचन में वे दशाएँ सम्मिलित हैं जिनके अधीन उदासीन सतह उत्पन्न होती है—जिसे विरूपित पिंड में शून्य अनुदैर्ध्य विकृति अनुभव करने वाले बिंदुओं के बिंदुपथ के रूप में परिभाषित किया गया है। यह सामान्यीकरण धरन-सिद्धांत की गणितीय आधारभूमि को सुदृढ करता है और भौतिक अंतर्दृष्टि को वैश्लेषिक परिशुद्धता से जोड़ता है।

क्लेब्श का कार्य आधुनिक सूत्रीकरणों की ओर एक महत्त्वपूर्ण संक्रमण था; उसने साम्यावस्था और सुसंगति के स्पष्ट अवकल व्यंजक ही प्रस्तुत नहीं किए, बल्कि प्रत्यास्थता के बाद के प्रदिश-आधारित विवेचनों का भी पूर्वाभास दिया।

> क्लेब्श ... स्वयं को उल्लेखनीय स्पष्टता और परिशुद्धता से व्यक्त करते हैं ... संपूर्ण विवेचन उच्चतर विश्लेषण की विधियों के कठोर अनुरूप है।
>
> Todhunter and Pearson, 1893 *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*

7.3.2.9 सेंट-वेनाँ (1866)

सेंट-वेनाँ ने प्रत्यास्थता पर क्लेब्श के ग्रंथ के 1866 के फ्रांसीसी अनुवाद (Clebsch, 1866) में टिप्पणियों द्वारा अपने पूर्ववर्ती कार्य को और स्पष्ट तथा विस्तृत किया। गैलीलियो, मारियोत और पाराँ की पूर्ववर्ती अंतर्दृष्टियों पर निर्माण करते हुए उन्होंने मारियोत की इस गलत धारणा को सुधारा कि केवल ज्यामिति के आधार पर समतल परिच्छेद समतल बने रहते हैं।

इसके स्थान पर उन्होंने दर्शाया कि लघु विकृति की धारणाओं के अधीन यह परिणाम स्वाभाविक रूप से प्रत्यास्थता सिद्धांत से निकलता है।

चित्र 7.16 में सेंट-वेनाँ की टिप्पणियों का एक अंश दिखाया गया है, जहाँ वे कहते हैं (*les tensions croissent uniformément suivant les tranches parallèles de la section transversale*) कि अनुप्रस्थ परिच्छेद की समानांतर पट्टियों में प्रतिबल एकसमान रूप से बढ़ते हैं।

(*) L'auteur ajoute ceci : « Toutes les hypothèses de cette théorie se trouvent de même confirmées lorsque l'on suppose la section transversale extrêmement petite. Mais c'est seulement à cette condition qu'elles sont vérifiées; c'est seulement dans cette hypothèse que les sections transversales restent planes après la flexion et » (ajoute-t-il) « *que les tensions croissent uniformément suivant les tranches parallèles de la section transversale*. Il n'y a qu'un des résultats de cette théorie qui soit impossible dans tous les cas » (même, apparemment, comme l'auteur semble le penser aussi quand la section est extrêmement petite) « c'est la production d'une flexion plane dont le plan ne passe pas par l'un des axes principaux des sections transversales. »

चित्र 7.16: (Clebsch, 1862b) में सेंट-वेनाँ की टिप्पणियों से उद्धरण

इन स्पष्टीकरणों ने आरंभिक स्थैतिक सूत्रीकरणों और पूर्णतः वैश्लेषिक धरन-सिद्धांत के बीच ऐतिहासिक विभाजन को पाटने में सहायता की। जैसा टॉडहंटर ने देखा:

> सेंट-वेनाँ सरलतम विश्लेषण से दर्शाते हैं कि अनुप्रस्थ परिच्छेद न तो अपनी मूल परिरेखा ... और न अपनी मूल समतलता ... बनाए रखते हैं; उदासीन रेखा जड़त्व-दीर्घवृत्त का वह व्यास है जो अनुप्रस्थ परिच्छेद पर भार-समतल के अनुरेख का संयुग्मी है।
>
> Todhunter and Pearson, 1893 *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*

सेंट-वेनाँ के दो ऐतिहासिक योगदान—उनका 1855 का संस्मरण और 1866 की टिप्पणियाँ—आज भी आधारभूत हैं। उन्होंने केवल उदासीन अक्ष प्रमेय ही नहीं, बल्कि आज व्यवहार में प्रयुक्त प्रत्यास्थ धरन-सिद्धांत का मूल भी स्थापित किया।

7.3.3 अंक III: वैश्लेषिक परंपरा

तृतीय अंक धरन-व्यवहार को समझने का मूलतः भिन्न उपागम प्रस्तुत करता है। प्रेक्षित विफलता-विधाओं अथवा अनुभवजन्य प्रतिबल-वितरण से आरंभ करने के स्थान पर वैश्लेषिक परंपरा गणितीय सिद्धांतों—विशेषतः यह धारणा कि पदार्थ हुक के नियम का पालन करते हैं—से आरंभ हुई और प्रत्यास्थ विरूपण को नियंत्रित करने वाले समीकरणों की व्युत्पत्ति हेतु कलन का उपयोग किया। याकोब बर्नूली द्वारा आरंभ और ऑयलर द्वारा औपचारिक किए गए इस उपागम ने ऐसे अनेक परिणामों का पूर्वाभास दिया जिन तक अनुभवजन्य परंपरा को पहुँचने में एक और शताब्दी लगी।

7.3.3.1 याकोब बर्नूली (1687)

1687 में बर्नूली गणित के प्राध्यापक थे, किंतु भौतिक समस्याएँ हल करने में उनकी रुचि अकृष्णण प्रतीत होती है। कुछ विद्वानों का तर्क है कि बर्नूली अंततः इसलिए कुशल यांत्रिकीविद बने क्योंकि एक शिल्पकार ने तुला के धरन के सर्वोत्तम आकार के विषय में उनसे परामर्श माँगा। इस शिल्पकार के साथ संवाद ने प्रत्यास्थ संरचनाओं पर बर्नूली के अध्ययन की आधारभूमि बनाई[17] (Alassi, 2020)।

यह संवाद दिसंबर 1687 के एक पत्र में लाइबनित्स को बताया गया था।

[17] आज भी कुछ लोग तर्क करेंगे कि एक कुशल (संरचनात्मक) अभियांत्रिकी यांत्रिकीविद को ठोस प्रयोगात्मक अध्ययनों पर निर्भर होना चाहिए। संभवतः सही, किंतु इसका विलोम और अधिक सही है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस पत्र में ठोसों के प्रतिरोध पर लाइबनित्स के लेख की आलोचनाएँ थीं और बताया गया कि

> एक स्थानीय शिल्पकार, जो भार-तुलाएँ बनाने में आश्चर्यजनक निपुणता दिखाता है। मैंने सहज ही समझ लिया कि इस व्यक्ति का विशिष्ट कौशल योक पर विभाजन निर्धारित करने में कम और उसकी मोटाई को इस प्रकार समायोजित करने में अधिक था कि वह अपने भार और संलग्न भार से आसानी से न झुके।
>
> Bernoulli, Jakob, 1855 *"Letter to G. W. Leibniz, December 1687"*

शिल्पकार के साथ इस संवाद ने बर्नूली को ठोसों के प्रतिरोध पर लाइबनित्स के लेख की याद दिलाई। बर्नूली ने कहा कि वे "गणना में निर्धारित कर सकते हैं कि किसी दिए गए योक में उचित सामर्थ्य सुनिश्चित करने के लिए कितनी मोटाई आवश्यक होगी, अथवा इसके विपरीत दी हुई मोटाई और लंबाई के लिए वह कितना भार सह सकता है—यह सब उसी पदार्थ की एक छड़ी पर किए गए एक प्रयोग के आधार पर।"

लाइबनित्स के कुछ प्रयोगात्मक परिणामों को चुनौती देते हुए बर्नूली ने प्रस्तावित किया कि दीर्घीकरण दो प्रमुख कारकों पर निर्भर करता है: आरोपित खिंचाव-बल और पदार्थ की प्रकृति। यह पत्र वह प्रथम ज्ञात उदाहरण है जिसमें प्रत्यास्थता के अध्ययन में पदार्थ-गुणों पर स्पष्टतः विचार किया गया। इस प्रकार बर्नूली यह पहचानने वाले प्रथम व्यक्ति थे कि विरूपण का वर्णन प्रति एकक क्षेत्रफल बल—जिसे आज प्रतिबल कहते हैं—को तनन के अधीन पदार्थ-रेशे के प्रति एकक लंबाई सापेक्ष दीर्घीकरण, अर्थात विकृति, से संबंधित करके किया जाना चाहिए। वास्तव में यह एक महत्त्वपूर्ण अंतर्दृष्टि थी।

यद्यपि बर्नूली ने स्पष्टतः आँत की डोरियों—आर्द्रता और तापमान के प्रति अत्यधिक संवेदनशील पदार्थ—का समय-निर्भर सुघट्य विरूपण देखा था, वे इस व्यवहार की सही व्याख्या नहीं कर सके (Alassi, 2020 PDF)।

इस पत्र का मूल्य केवल इसकी ऐतिहासिक विषयवस्तु में नहीं, बल्कि इसके अद्वितीय समाजशास्त्रीय स्वरूप में भी है। शिल्पकार ने बर्नूली को परिशुद्ध, अनुभव-आधारित अंतर्दृष्टियाँ देकर प्रत्यास्थ संरचनाओं के सिद्धांत के विकास में निर्णायक भूमिका निभाई। बर्नूली ने लाइबनित्स जैसे प्रतिष्ठित व्यक्ति के साथ पत्राचार में शिल्पकार की राय का संदर्भ देकर इस योगदान को स्वीकार किया। उस समय की परंपराओं के बावजूद शिल्पकार बर्नूली के लिए अदृश्य नहीं था। तब—और आज भी प्रायः—शिल्पकारों (या आधुनिक पदों में तकनीशियनों) को केवल निर्देशों का निष्पादक माना जाता था, जिन्हें उपकरण बनाने अथवा प्रयोग करने का कार्य दिया जाता था, किंतु सैद्धांतिक ज्ञान में योगदानकर्ता के रूप में विरले ही श्रेय मिलता था। किंतु बर्नूली ने शिल्पकार को निर्देशन चाहने वाले औजार-निर्माता के रूप में नहीं, बल्कि मूल्यवान विशेषज्ञता के धारक के रूप में देखा। उन्होंने उसके साथ लाइबनित्स के लेख पर गंभीर चर्चा की और उसकी आपत्तियों पर विचारपूर्वक ध्यान दिया।

7.3.3.2 ऑयलर (1727)

ऑयलर ने पुनः अनुप्रस्थ परिच्छेद में अक्षीय तननों का रैखिक वितरण माना और कुल बंकन आघूर्ण प्राप्त करने के लिए उनका समाकलन किया—इस प्रकार लाइबनित्स की विधि (जिसने बंकन की पूर्णतः उपेक्षा की थी) को याकोब बर्नूली की विधि से जोड़ा, जो तनन के परिवर्तन का उचित लेखा नहीं रख सके थे।

Truesdell, 1960 PDF से अनुकूलित उनके उपागम की रूपरेखा नीचे दी गई है।

यद्यपि ऑयलर एक वृत्ताकार वलय के कंपन (चित्र 7.17a) पर विचार कर रहे थे, वलय के सूक्ष्मातिसूक्ष्म खंड के आनमन का विश्लेषण सीधी धरन के समान किया जा सकता है। चित्र 7.17b के बाएँ भाग में वक्रता-त्रिज्या Ca, R है और मोटाई Aa, c है। दाईं ओर वलय विरूपित विन्यास में दिखाया गया है। चाप-लंबाई ds वाले अवयव ab को उसके अविरूपित समकक्ष से मेल खाने के लिए चुना जाता है। नई वक्रता-त्रिज्या ac, r है और अक्षीय विकृति के कारण रेशा AB की लंबाई में परिणामी वृद्धि Euler, 1862 PDF द्वारा दी गई है:

$$d\tau = E\varepsilon = \frac{R-r}{Rr}\, c\, ds = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) c\, ds \tag{7.11}$$

यह व्यंजक प्रति एकक क्षेत्रफल अक्षीय बल $E\varepsilon$ को वक्रताओं के अंतर से संबंधित करता है और प्रत्यास्थ वलयों के आनमन के ऑयलर के विवेचन का आधार बनता है।

चित्र 7.17cc में ऑयलर वलय के पदार्थ को प्रत्यास्थ धागों से बना बताते हैं। जुड़े कण $AaeE$ और $BbeE$ ऐसे प्रत्यास्थ तंतु माने जाते हैं कि जितना अधिक वे खिंचते हैं, संकुचित होने के लिए उतना अधिक बल लगाते हैं। कोण $Ee\varepsilon$ ऐसे अनुप्रस्थ रूप से व्यवस्थित तंतुओं से भरा है; वे भुजाओं Ee और εe को निकट लाने का प्रयास करते हैं। ऑयलर के अनुसार वलय के पदार्थ का संसंजन इन आंतरिक धागों से उत्पन्न बल पर निर्भर करता है।

इसके बाद ऑयलर इस संसंजन को ऐसा मानते हैं कि आरंभिक लंबाई $FG = f$ वाले और $FJ = g$ तक विस्तारित धागों का समुच्चय कुल भार P सह सकता है (चित्र 7.17cc देखें)। अर्थात अनुपात

$$\frac{P}{fg}$$

प्रति एकक अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल और प्रति एकक विस्तार बल देता है—यह व्यंजक आज यंग मापांक कहलाने वाली राशि के अनुरूप है और यहाँ पहली बार प्रकट होता है।

पूर्ववर्ती सिद्धांतों में इसका अंतर्निहित रूप से लेखा रखा गया था:

- गैलीलियो तथा लाइबनित्स, वेरिन्यों, और पारों के कार्य में पदार्थ-नियतांक K को विदारण-प्रतिबल माना गया। इन सिद्धांतों ने प्रतिबल पर विचार किया किंतु संबद्ध विकृति की उपेक्षा की।
- बाद के लेखकों द्वारा परिष्कृत हुक के सिद्धांत में प्रत्यास्थ बल को किसी दिए गए पिंड में निर्दिष्ट विकृति उत्पन्न करने के लिए आवश्यक बल के रूप में परिभाषित किया गया—किंतु पुनः, स्पष्ट पदार्थ-नियतांक के बिना।

यहाँ नवीनता यह है कि ऑयलर के $P/(fg)$ को पदार्थ के प्रत्यास्थ नियतांक—अर्थात विशिष्ट प्रत्यास्थ विकृति (विदारण नहीं) उत्पन्न करने वाले माध्य प्रतिबल (बल नहीं)—के रूप में प्रस्तुत किया गया है। यद्यपि ऐसे नियतांक का अस्तित्व याकोब बर्नूली के पूर्ववर्ती कार्य में स्पष्टतः निहित था, उन्होंने उसे स्पष्ट रूप से प्रस्तुत नहीं किया था। ऑयलर के विवेचन में उसका स्पष्ट प्रकटन इस तथ्य के कारण है कि यह पहली समस्या थी जिसके सही समाधान के लिए ऐसे मापांक की आवश्यकता थी।

इन बलों के वितरण का परिमाण निर्धारित करने के लिए ऑयलर आगे कहते हैं (पुनः चित्र 7.17cc देखें): मान लें $eM = x$, और $Mm = dx$; तब छोटा क्षेत्र $MmnN$, $\frac{x}{c}d\tau$ लंबाई वाले तंतुओं से भरा है। Mn को Nn की ओर खींचने वाला बल F_x है:

$$F_x = \frac{P}{fg} \cdot dx \cdot \frac{x}{c} d\tau \tag{7.12}$$

अतः वह भार F, जिसे E और ε पर लगाना आवश्यक है ताकि वह बिंदु e के चारों ओर वही आघूर्ण उत्पन्न करे जो दूरी x पर क्रियाशील F_x करता है, निम्न है:

$$F = \frac{x}{c} F_x = \frac{P}{fgc^2} x^2 dx\, d\tau \tag{7.13}$$

$x = 0$ से $x = c$ तक समाकलन करने पर E पर लगाया जाने वाला कुल बल (अथवा “भार”) प्राप्त होता है:

$$\text{weight} = \frac{Pc}{3fg} d\tau = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pc^2}{fg} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) ds \tag{7.14}$$

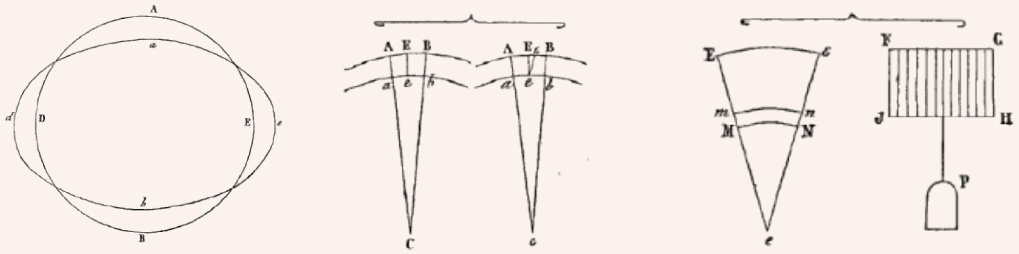
अब हम इसे शास्त्रीय आघूर्ण—वक्रता संबंध के रूप में पहचानते हैं:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right), \qquad \mathfrak{B} = EI \tag{7.15}$$

यहाँ E यंग मापांक और I क्षेत्रफल का द्वितीय आघूर्ण है। आयताकार अनुप्रस्थ परिच्छेद के लिए, और यह मानते हुए कि उदासीन अक्ष अवतल किनारे पर है, $I = \frac{1}{3}AD^2$ है, जो चित्र 7.17c-c में ऑयलर के सूत्रीकरण से मेल खाता है। यह उस संबंध की प्रथम कठोर व्युत्पत्ति है जिसे आज हम आघूर्ण-वक्रता संबंध कहते हैं—संरचनात्मक यांत्रिकी का एक मूलभूत समीकरण।

अतः ऑयलर द्वारा प्रस्तुत किसी विशिष्ट नमूने के स्थान पर प्रत्यास्थ पदार्थ को निरूपित करने वाला *विस्तार मापांक* आज यंग के नाम पर जाना जाता है (Truesdell, 1968 PDF)।

बाद के शोधपत्रों Euler, 1760 और Euler, 1780 में ऑयलर ने इन विचारों को अधिक संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत किया और बेहतर व्याख्या की। विशेषतः उन्होंने विस्तार मापांक को स्पष्ट रूप से परिभाषित किया, जिसका अपने पूर्ववर्ती कार्य में उन्होंने केवल संक्षिप्त उल्लेख के साथ उपयोग किया था।



(a) ऑयलर द्वारा अन्वेषित दोलनशील वलय

(b) हुक के नियम से बर्नूली के नियम की ऑयलर की प्रथम व्युत्पत्ति का आरेख (1727)

(c) विस्तार मापांक ("यंग मापांक") की ऑयलर की प्रथम परिभाषा (1727)

चित्र 7.17: ऑयलर, बर्नूली और हुक का समागम (Euler, 1862 PDF)

ऑयलर की उपलब्धि उल्लेखनीय थी: केवल गणितीय सिद्धांतों और हुक के नियम से कार्य करते हुए उन्होंने धरन-बंकन का मूलभूत समीकरण उस समय से दशकों पूर्व व्युत्पन्न किया जब अनुभवजन्य परंपरा समान निष्कर्षों तक पहुँची। फिर भी यह वैश्लेषिक सफलता व्यावहारिक संरचनात्मक विश्लेषण से मुख्यतः असंबद्ध रही, जब तक कि दोनों परंपराएँ अंततः उन्नीसवीं शताब्दी के मध्य में अभिसरित नहीं हुईं।

7.4 सारांश

आनमन-सिद्धांत का ऐतिहासिक विकास उस जटिल, अरैखिक मार्ग को प्रकट करता है जिससे वैज्ञानिक समझ उभरती है। तीन पृथक परंपराओं—लियोनार्दो के अनुभवजन्य प्रेक्षण, व्यावहारिक प्रयोग की फ्रांसीसी परंपरा और स्विस-जर्मन गणितीय उपागम—में से प्रत्येक ने आवश्यक अंतर्दृष्टियाँ दीं, जो अंततः आधुनिक धरन-सिद्धांत में संश्लेषित हुईं।

संभवतः सबसे आश्चर्यजनक यह है कि समान मूलभूत प्रश्नों पर विचार करने के बावजूद वैश्लेषिक और अनुभवजन्य परंपराएँ कितने लंबे समय तक पृथक रहीं। 1727 में ऑयलर द्वारा आघूर्ण-वक्रता संबंध की कठोर गणितीय व्युत्पत्ति ने उन अनेक परिणामों का दशकों पूर्व अनुमान कर लिया था जिन्हें प्राप्त करने के लिए व्यावहारिक परंपरा संघर्ष कर रही थी। फिर भी अनुभवजन्य अन्वेषकों—गैलीलियो, मारियोत, कूलॉम और सेंट-वेनाँ—ने वे प्रश्न पूछे जिनके उत्तर व्यवहाररत अभियंताओं को वास्तव में चाहिए थे: धरन कब टूटते हैं? वे कितना भार वहन कर सकते हैं? अधिकतम प्रतिबल कहाँ उत्पन्न होते हैं?

सेंट-वेनाँ के कार्य में इन उपागमों का अंतिम अभिसरण दर्शाता है कि वैज्ञानिक प्रगति के लिए प्रायः गणितीय कठोरता और व्यावहारिक अंतर्दृष्टि दोनों आवश्यक होते हैं। आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण इस संश्लेषण से लाभान्वित होता है: हम गैलीलियो द्वारा सर्वप्रथम उठाई गई व्यावहारिक समस्याओं को हल करने के लिए सेंट-वेनाँ के प्रतिबल-वितरण ढाँचे के भीतर ऑयलर के गणितीय रूप से व्युत्पन्न आघूर्ण-वक्रता संबंध का उपयोग करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सारणी 7.1 उदासीन अक्ष की अवधारणा के प्रमुख विकासों का सार प्रस्तुत करती है।

तालिका 7.1: सामर्थ्य और आंतरिक प्रतिबल-वितरण के प्रमुख विकास

वर्ष	व्यक्ति / घटना	कार्य / शीर्षक	सारांश
c. 1490	लियोनार्दो दा विंची	लटकती टोकरी का प्रयोग	तार के विदारण तक निलंबित टोकरी का वृद्धिशील भारण; अक्षीय सामर्थ्य की आरंभिक अनुभवजन्य जाँच, यद्यपि लंबाई पर निर्भरता की (गलत) अपेक्षा।
1630	आइज़क बीकमैन	डोरी के विस्तार पर टिप्पणी (Drake, 1970)	प्रेक्षण कि लंबी डोरियाँ भार के अधीन अधिक विस्तारित होती हैं—विकृति की आरंभिक अप्रत्यक्ष पहचान।
1638	गैलीलियो गैलिली	*Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences* (Galilei, 1638)	उत्तोलक-सादृश्यता द्वारा कैंटिलीवर सामर्थ्य; क्षमता–माँग चिंतन और आदि मुक्त-पिंड तर्क का प्रस्तुतीकरण; आधुनिक प्रतिबल अवधारणा का अभाव।
c. 1500	लियोनार्दो दा विंची	*Codex Madrid*, फोलियो 9v (Da Vinci, 1490; Zammattio, 1980)	लंबाई, परिच्छेद, अवलंब और भारण के सापेक्ष धरन-सामर्थ्य पर प्रश्न उठाने वाले रेखाचित्र-अध्ययन; समीकरणों के बिना समस्या-निरूपण।
c. 1500	लियोनार्दो दा विंची	*Codex Madrid*, फोलियो 20v (Zammattio, 1980)	बर्नूली से शताब्दियों पूर्व बंकन में रैखिक विकृति-वितरण और उदासीन अक्ष का पूर्वाभास।
1644	रेने देकार्त	*Principia Philosophiae*; मेर्सेन को पत्र	"गोंद"/निर्वात से संसंजन की यांत्रिक सातत्य व्याख्याओं की ओर परिवर्तन; प्रतिबल/विकृति चिंतन की दिशा में वैचारिक सेतु।
1686	एडम मारियोत	बंकन और विदारण के प्रयोग (Heyman, 1998b; Timoshenko, 1953)	रैखिक प्रत्यास्थता और त्रिकोणीय प्रतिबल की अवधारणा स्वीकार की, किंतु NA को चरम रेशे पर रखा; $L = Sh/(3l)$ व्युत्पन्न किया; सही आघूर्ण-परिणाम के निकट पहुँचे।
1687	याकोब बर्नूली	प्रत्यास्थ व्यवहार पर पत्र (Bernoulli, Jakob, 1855; Alassi, 2020)	पदार्थ-गुण के रूप में बल–दीर्घीकरण संबंध प्रस्तुत किया; शिल्पकार-सूचित समस्याओं से प्रतिबल–विकृति चिंतन का बीजारोपण।
1691	गॉटफ्रीड डब्ल्यू. लाइबनित्स	*Acta Eruditorum* में सूचना (Leibniz, 1691e; McDonough, 2016)	गैलीलियो के अविस्तरणीय धरन की आलोचना; गणितीय प्रतिरूप के रूप में वैचारिक रेशा/कमानी विघटन।
1713	अंत्वान पाराँ	उदासीन अक्ष और साम्यावस्था (Parent, 1713)	पूर्ण साम्यावस्था (बल और आघूर्ण) लागू की; पहचाना कि तनन/संपीडन परिणामियों को संतुलित होना चाहिए और स्पर्शरेखीय (अपरूपण) क्रियाओं का उल्लेख किया।
1739	पी. वान मुशेनब्रुक	*Elementa Physicae* (Musschenbroek, 1739)	क्रमबद्ध तनन (और बंकन) परीक्षण; तुलनात्मक सामर्थ्य; आरंभिक परीक्षण-पद्धति और आँकड़ा-सारणीकरण।

वर्ष	व्यक्ति / घटना	कार्य / शीर्षक	सारांश
1773	सी.-ए. कूलॉम	आनमन संस्मरण (Coulomb, 1773b; Timoshenko, 1953)	स्थैतिकी के तीनों समीकरण लागू किए; त्रिकोणीय प्रतिबल-खंड; प्रत्यास्थ स्थिति में चरम भार $\phi = Sh/(6l)$; आंतरिक बल की स्पष्ट अवधारणा।
1784	सी.-ए. कूलॉम	मरोड़ संस्मरण (मरोड़-तुला)	$T = \dfrac{GJ}{L}\phi$ व्यवहार स्थापित किया; दोलन-काल आयाम से स्वतंत्र (लघु कोण); बंकन से सादृश्य स्पष्ट किया।
1807	थॉमस यंग	*Lectures on Natural Philosophy* (Young, 1807)	प्रत्यास्थता मापांक की (शाब्दिक) परिभाषा; अपरूपण ("डेट्रूज़न") पर चर्चा; उत्केंद्रित अक्षीय भार के साथ मध्य-तृतीयांश नियम।
1855	बारे द सेंट-वेनाँ	बंकन संस्मरण (Saint-Venant, 1855c)	प्रथम कठोर प्रत्यास्थ व्युत्पत्ति: NA केंद्रक से होकर; केवल साम्यावस्था से नहीं, सुसंगति + हुक के नियम से $\sigma = My/I$।
1862	अल्फ्रेड क्लेब्श	*Theorie der Elasticität* (Clebsch, 1862b)	उच्चतर विश्लेषण द्वारा प्रत्यास्थता को क्रमबद्ध किया; शून्य अनुदैर्ध्य विकृति के बिंदुपथ के रूप में उदासीन सतह सहित बंकन को समेकित किया।
1866	सेंट-वेनाँ (टिप्पणीकार)	क्लेब्श का फ्रांसीसी संस्करण (Clebsch, 1866)	स्पष्ट किया कि समतल-परिच्छेद प्रत्यास्थता से परिणत होते हैं; पट्टियों में प्रतिबल एकसमान रूप से बदलते हैं; ज्यामिति और प्रतिबल के बीच संबंध सुदृढ़ किया।
1727	लियोनहार्ड ऑयलर	प्रत्यास्थ वलय/धरन वक्रता (Euler, 1862)	आघूर्ण–वक्रता $M = EI\kappa$ व्युत्पन्न किया; बंकन-सिद्धांत में पदार्थ-नियतांक के रूप में स्पष्ट मापांक प्रस्तुत किया।
1760; 1780	लियोनहार्ड ऑयलर	प्रत्यास्थ गति/सूत्रों पर अनुवर्ती कार्य (Euler, 1760; Euler, 1780)	मापांक अवधारणा और प्रत्यास्थ सूत्रीकरण परिष्कृत किए; पूर्ववर्ती व्युत्पत्तियों को संक्षिप्त किया और अनुप्रयोगों का सामान्यीकरण किया।

7.5 संक्रमण

इस अध्याय में सम्मिलित अन्वेषणों ने संरचनात्मक अवयवों के सामर्थ्य और भार के अधीन प्रतिबलों के आंतरिक वितरण को नियंत्रित करने वाले मूलभूत सिद्धांत स्थापित किए। लियोनार्दो के अनुभवजन्य प्रेक्षणों से सेंट-वेनाँ के कठोर प्रत्यास्थता सिद्धांत तक हमने देखा कि अभियंताओं और गणितज्ञों ने धरनों के विफल होने के कारण और अधिकतम प्रतिबल के स्थान के विषय में हमारी समझ कैसे विकसित की।

किंतु इन सामर्थ्य-आधारित विश्लेषणों की एक साझा सीमा थी: वे इस समान रूप से महत्त्वपूर्ण प्रश्न पर विचार किए बिना आंतरिक बलों का प्रतिरोध करने की अवयवों की क्षमता पर केंद्रित थे कि भार के अधीन ये अवयव कैसे विरूपित होते हैं। यह जानना कि धरन एक निश्चित आघूर्ण वहन कर सकता है, उसके विक्षेपित आकार के विषय में कुछ नहीं बताता—फिर भी यही आकार संरचनात्मक स्थायित्व से लेकर सेवायोग्यता तक सब कुछ नियंत्रित करता है।

सामर्थ्य-विश्लेषण से विरूपण-विश्लेषण तक के संक्रमण के लिए गणितीय क्रांति आवश्यक थी। जहाँ पूर्ववर्ती अन्वेषक स्थैतिक साम्यावस्था और पदार्थ-गुणों पर निर्भर हो सकते थे, वहीं विक्षेपित आकारों के अध्ययन के लिए ऐसी परिष्कृत ज्यामितीय अवधारणाएँ आवश्यक थीं जो 17वीं शताब्दी में ही उभरना आरंभ हुई थीं। लटकती शृंखला और बंकित प्रत्यास्थ

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

छड—वे “महान चुनौतियाँ” जिनकी हम अध्याय 9 में जाँच करेंगे—वक्रता, स्पर्शरेखाओं, स्पर्शी वृत्तों और वक्रों तथा उनके केंद्रजों के बीच गणितीय संबंधों की गहरी समझ के बिना हल नहीं हो सकती थीं।

अगला अध्याय 8 वक्रता के विषय में निकोल ओरेस्मे की गुणात्मक अंतर्दृष्टियों से लेकर न्यूटन, बर्नूली परिवार और ऑयलर द्वारा स्थापित कठोर गणितीय ढाँचे तक इस ज्यामितीय क्रांति का अनुसरण करेगा। ये विकास केवल गणितीय अमूर्तन नहीं थे—उन्होंने वे आवश्यक साधन प्रदान किए जिनसे सदियों तक प्राकृतिक दार्शनिकों को चुनौती देने वाली मूलभूत संरचनात्मक समस्याओं का समाधान संभव हुआ।

कैटेनरी और इलास्टिका के समाधानों से निरूपित बौद्धिक उपलब्धि को समझने के लिए इस ज्यामितीय आधारभूमि को समझना अनिवार्य है। जब याकोब बर्नूली ने 1691 में अपनी इलास्टिका चुनौती प्रस्तुत की, अथवा जब गणितीय समुदाय लटकती शृंखला के आकार से जूझा, तब वे केवल रोचक पहेलियाँ हल नहीं कर रहे थे। वे वह सैद्धांतिक ढाँचा स्थापित कर रहे थे जो ऑयलर के व्याकुंचन सूत्र से आधुनिक महाविक्षेप विश्लेषण तक संरचनात्मक यांत्रिकी के सभी परवर्ती विकासों की आधारभूमि बनने वाला था।

अब हम अध्याय 8 में इसी ज्यामितीय क्रांति—उसके द्वारा निर्मित गणितीय साधनों और संभव की गई वैचारिक सफलताओं—की ओर बढ़ते हैं। ये विकास अध्याय 9 की भूमिका तैयार करेंगे, जहाँ संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहास की कुछ सर्वाधिक सुंदर और व्यावहारिक रूप से महत्त्वपूर्ण समस्याओं के सुरुचिपूर्ण समाधानों में ज्यामिति और यांत्रिकी अभिसरित होते हैं।



कारवाज्जो, डेविड विद द हेड ऑफ गोलायथ (1609-1610)

गोफन की भौतिकी, डेविड के प्रक्षेप की आघूर्ण-भुजा और पदार्थ-सीमाओं को पार करने का परिणाम—सामर्थ्य द्वारा द्रव्यमान पर विजय।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

8 वक्रों की अवकल ज्यामिति

सारांश

यह अध्याय वक्रता की आरंभिक वैचारिक जड़ों से लेकर अठारहवीं शताब्दी के परिपक्व सूत्रीकरणों तक उसकी ज्यामितीय आधारभूमि का अनुसरण करता है। यहाँ प्रस्तुत सामग्री अगले अध्याय (§9.3) की आवश्यक तैयारी है, जहाँ इलास्टिका समस्या का विस्तृत विवेचन होगा—यहाँ विकसित वक्रता की समझ के बिना प्रत्यास्थ वक्रों के यांत्रिक सूत्रीकरण को ठीक से नहीं समझा जा सकता।

अवकल कलन के आगमन से पूर्व वक्रता को मूर्त ज्यामितीय रचनाओं—स्पर्शरेखाओं, अभिलंबों, स्पर्शी वृत्तों और केंद्रजों—द्वारा समझा जाता था, जिन्हें चक्रजों, कैटेनरियों और बंकित छड़ों जैसे भौतिक वक्रों पर लागू किया जाता था।

चौदहवीं शताब्दी में निकोल ओरेस्मे की गुणात्मक धारणाओं से आरंभ होकर यह आख्यान हाइगेन्स, न्यूटन, लाइबनित्स और बर्नूली परिवार द्वारा किए गए उत्तरोत्तर परिष्कारों का अनुसरण करता है और ऑयलर के विचरणात्मक सूत्रीकरण तथा ऑयलर–बर्नूली लघु-ढाल सन्निकटन में परिणत होता है। चाप-लंबाई के सापेक्ष स्पर्शरेखा-कोण के परिवर्तन की सीमांत दर के रूप में केस्टनर द्वारा वक्रता के क्रमबद्ध निरूपण ने आधुनिक परिभाषा के समेकन को चिह्नित किया।

यह अध्याय केंद्रजों और अंतर्वलितों के परस्पर गुंथे विकास का भी परीक्षण करता है—ज्यामितीय रचनाओं और व्यावहारिक साधनों दोनों के रूप में, विशेषतः हाइगेन्स के चक्रजी लोलक में। इन प्रगतियों को उनके यांत्रिक और गणितीय संदर्भों में रखकर चर्चा यह रेखांकित करती है कि वक्रता की ज्यामितीय परंपरा ने परवर्ती वैश्लेषिक, संरचनात्मक और भौतिक सिद्धांतों के लिए आवश्यक आधारभूमि कैसे प्रदान की—विशेषतः याकोब बर्नूली का इलास्टिका-सूत्रीकरण, जो यहाँ स्थापित ज्यामितीय अवधारणाओं पर मूलतः निर्भर है।

8.1 परिचय: वक्रता और इलास्टिका के ज्यामितीय उद्गम 247
8.2 वक्रता 248
8.2.1 ओरेस्मे (1351) 249
8.2.2 न्यूटन (1671) 250
8.2.3 लाइबनित्स (1686) 252
8.2.4 योहान बर्नूली (1691) 253
8.2.5 याकोब बर्नूली; स्वर्ण प्रमेय (1694) 254
8.2.6 केस्टनर (1758) 258
8.2.7 सारांश 259
8.3 केंद्रज/अंतर्वलित 260
8.3.1 हाइगेन्स (1658-1673) 261
8.3.2 व्यावहारिक सीमाएँ और विरासत 262
8.3.3 समापन टिप्पणियाँ 263
8.4 ज्यामितीय वक्रों से संरचनात्मक यांत्रिकी तक 264
8.5 आगामी दिशा: 266

8.1 परिचय: वक्रता और इलास्टिका के ज्यामितीय उद्गम

अवकल कलन द्वारा वक्रता के लिए सामान्य भाषा दिए जाने से पूर्व ज्यामितीय रचनाएँ ही किसी वक्र के बंकन को व्यक्त करने का एकमात्र व्यवहार्य माध्यम थीं। वक्रता का सिद्धांत अमूर्तन से नहीं, बल्कि प्रकृति में मिलने वाले वक्रों की भौतिक और यांत्रिक वास्तविकता से उत्पन्न हुआ: प्रक्षिप्त वस्तु का पथ, लुढकते पहिए का परिमंडल, लटकती शृंखला का आकार, अथवा नम्य छड़ द्वारा अनुरेखित चाप।

प्रारंभिक चिंतकों, विशेषतः निकोल ओरेस्मे, ने कार्तीय ढाँचे द्वारा ऐसे निरूपणों को औपचारिक किए जाने से बहुत पहले आलेखों की वक्रता को स्थानिक आकारों के रूप में खोजा। सत्रहवीं शताब्दी में हाइगेन्स, न्यूटन और बर्नूली परिवार ने स्पर्शरेखाओं, अभिलंबों, स्पर्शी वृत्तों और वक्रता-केंद्रों जैसे ज्यामितीय साधनों को अमूर्त सत्ताओं के रूप में नहीं, बल्कि भौतिक वक्रों के व्यवहार में निहित रचनाओं के रूप में कठोरता से विकसित किया। विशेषतः हाइगेन्स ने यह दर्शाकर वक्रता को गतिकी से जोड़ा कि चक्रज का आकार समकालिक वक्र और केंद्रज को कैसे नियंत्रित करता है। न्यूटन ने वक्रता को

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

गति के द्वितीय-कोटि प्रभाव के रूप में देखा। याकोब बर्नूली ने बंकित छड के आकार के लिए *elastica* पद प्रस्तुत किया और उसके नियंत्रक समीकरण को प्रस्तुत करने के लिए ज्यामितीय तर्क का उपयोग किया।

यद्यपि परवर्ती विकासों ने इन विचारों को विश्लेषण की भाषा में पुनर्गठित किया, यह अध्याय उस निर्माणात्मक चरण पर केंद्रित है जब वक्रता और इलास्टिका अब भी मुख्यतः ज्यामितीय पदों में समझे जाते थे। यह ओरेस्मे की ज्यामितीय कल्पना से आरंभ होकर सत्रहवीं शताब्दी के उत्तरार्ध और अठारहवीं शताब्दी के आरंभ की परिशुद्ध रचनाओं तक इन विचारों के विकास का सर्वेक्षण करता है। साथ ही यह उन प्रमुख व्यक्तियों—हाइगेन्स, न्यूटन, लाइबनित्स और बर्नूली परिवार—पर प्रकाश डालता है जिन्होंने केंद्रजों, स्पर्शी वृत्तों और सूक्ष्मातिसूक्ष्मों के ज्यामितीय कलन जैसे साधनों द्वारा वक्रता की समझ को उन्नत किया।

विशेषतः इलास्टिका (§9) वह सर्वोत्कृष्ट समस्या बनकर उभरी जहाँ ज्यामिति और यांत्रिकी का समागम हुआ। उसके समाधान के लिए अंततः विचरण-कलन आवश्यक हुआ, किंतु उसका सूत्रीकरण और आरंभिक विवेचन स्पष्टतः ज्यामितीय परंपरा के भीतर थे। आधुनिक प्रत्यास्थता और संरचनात्मक रूप के सिद्धांत ने कैसे आकार लिया, इसे समझने के लिए इस वंशक्रम को जानना आवश्यक है।

इस काल में विकसित वक्रता की ज्यामितीय समझ आगे उन्नीसवीं शताब्दी की प्रगतियों के लिए आधारभूत सिद्ध हुई, जिनमें पृष्ठों के लिए गाउस द्वारा अंतर्निहित वक्रता का विकास, रीमानी ज्यामिति का अंतिम सूत्रीकरण और कंप्यूटर ग्राफिक्स तथा CAD प्रणालियों से लेकर आइंस्टीन के सामान्य सापेक्षता सिद्धांत के अंतर्निहित ज्यामितीय ढाँचे तक आधुनिक अनुप्रयोग सम्मिलित हैं।

8.2 वक्रता

हम *इलास्टिका* के विकास (§9.3) पर विचार करें, उससे पूर्व वक्रता की अवधारणा प्रस्तुत करना आवश्यक है—वह आधारभूत ज्यामितीय राशि जो किसी वक्र के बंकन को नियंत्रित करती है। वक्रता यह बताती है कि कोई वक्र सरल रेखा से किस मात्रा में विचलित होता है और वह ऐसा *स्थानीय* अर्थ में करती है: वह संपूर्ण आकार के स्थान पर किसी विशिष्ट बिंदु पर बंकन मापती है।

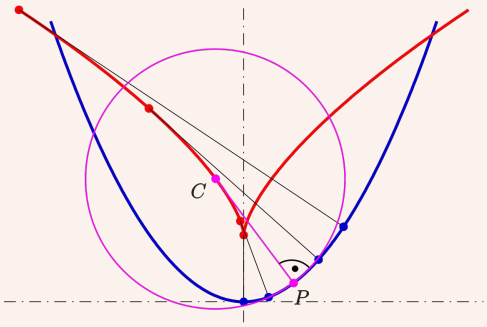
वृत्त के लिए वक्रता नियत और केवल त्रिज्या की व्युत्क्रम होती है: छोटे वृत्त अधिक तीक्ष्णता से मुडते हैं और इसलिए उनकी वक्रता अधिक होती है। यह परिचित स्थिति सामान्य रूप से वक्रता को परिभाषित करने का स्वाभाविक आधार देती है। एक प्रामाणिक इलास्टिका समस्या—अर्थात कैंटिलीवर धरन का महाविक्षेप—का आधुनिक समाधान आगे §29.2.3 में दिया गया है और वह इस समझ पर आधारित है कि धरन की लंबाई में वक्रता कैसे बदलती है।

प्राचीन काल में ही यूक्लिड ने स्पर्शरेखा को ऐसी रेखा के रूप में परिभाषित किया था जो वृत्त को काटे बिना ठीक एक बिंदु पर स्पर्श करती है, किंतु वक्रता की अधिक सामान्य धारणाएँ अभी विकसित नहीं हुई थीं। इसी प्रकार क्षेत्रकलन की शास्त्रीय समस्या—वक्रों से परिबद्ध क्षेत्रफल निर्धारित करना—सदियों बाद औपचारिक बनने के लिए कलन के साधनों की प्रतीक्षा करती रही।

इसके विपरीत आधुनिक वक्रता को चाप-लंबाई के सापेक्ष स्पर्शरेखा के झुकाव-कोण के परिवर्तन की दर के रूप में परिभाषित किया जाता है। वर्णनात्मक पदों में यह मापती है कि वक्र कितनी शीघ्रता से मुडता है। यदि वक्र वृत्त हो तो मुडने की यह दर नियत होती है। स्वेच्छ वक्रों के लिए स्वीकृत विधि यह है कि स्थानीय रूप से वक्र का सन्निकटन ऐसे वृत्त से किया जाए जिसकी किसी बिंदु पर स्पर्शरेखा और वक्रता दोनों उससे मेल खाती हों। लाइबनित्स के अनुसार इस सर्वोत्तम-सन्निकट वृत्त को *स्पर्शी वृत्त*[1] कहते हैं (चित्र 8.1) (Brackenridge, 1992 PDF)। संपर्क-बिंदु पर उसके प्रथम और द्वितीय अवकलज वक्र के समान होते हैं।

[1]एक **स्पर्शी वृत्त** (लैटिन *osculari*, “चूमना”) वह वृत्त है जो किसी दिए गए बिंदु पर वक्र का सर्वोत्तम सन्निकटन करता है। उस बिंदु पर उसकी स्पर्शरेखा और वक्रता वक्र के समान होती है, जिससे वह वक्र को सबसे निकट से “चूमने” वाला अद्वितीय वृत्त बनता है। इस वृत्त की त्रिज्या वक्रता-त्रिज्या के बराबर होती है और उसका केंद्र संपर्क-बिंदु पर वक्र के अभिलंब पर स्थित होता है। बर्नूली के युग में वैश्लेषिक परिभाषाओं के विकसित होने से पूर्व यह अवधारणा वक्रता मापने की प्रमुख ज्यामितीय विधि देती थी।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 8.1: परवलय (नीला) के स्पर्शी वृत्त (बैंगनी); वर्तमान स्थिति में वृत्त का केंद्र C और स्पर्श-बिंदु P है। केंद्रों का बिंदुपथ लाल रंग में दिखाया गया है।

यद्यपि वक्रता को कठोरता से केवल सत्रहवीं शताब्दी के उत्तरार्ध में परिभाषित किया गया, बंकन की आरंभिक अंतर्दृष्टियाँ चौदहवीं शताब्दी तक मिलती हैं। निकोल ओरेस्मे के अग्रणी कार्य (जिसकी चर्चा आगे है) के अतिरिक्त वक्रता का परिशुद्ध गणितीय विवेचन न्यूटन और लाइबनित्स के कार्य से स्वतंत्र रूप से उत्पन्न हुआ। फिर भी परंपरागत रूप से वक्रता के ऐतिहासिक विकास को केंद्रजों और अंतर्वलितों के विकास से संबद्ध किया जाता है—विशेषतः जब किसी वक्र (केंद्रज) से धागा खोलने का यांत्रिक वर्णन दूसरा वक्र (अंतर्वलित) उत्पन्न करता है, जैसा §8.3 में चर्चा की गई है।

8.2.1 ओरेस्मे (1351)

यूक्लिडीय ज्यामिति में वक्रता की अवधारणा अनुपस्थित है, जहाँ बिंदु, रेखाएँ और वृत्त प्रमुख थे और कोई वक्र कैसे मुडता है इसकी सामान्य धारणा सूत्रबद्ध नहीं हुई थी। चौदहवीं शताब्दी में ही सरलता से मापनीय विचलन के रूप में वक्रता का विचार पहली बार उठाया गया—विशेषतः निकोल ओरेस्मे द्वारा।

अपने *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Oresme, 1351) में ओरेस्मे ने वक्रता की गुणात्मक धारणा प्रस्तुत की और उसे सतत परिवर्ती परिमाण के रूप में देखा। वृत्तों के लिए उन्होंने पहचाना कि वक्रता त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती है और इस विचार को अधिक सामान्य वक्रों तक विस्तारित करने का प्रयास किया। यद्यपि उनके विचार अभी अनुमानात्मक और औपचारिकता-विहीन थे, वे एक वैचारिक सफलता दर्शाते हैं। उन्होंने लिखा:

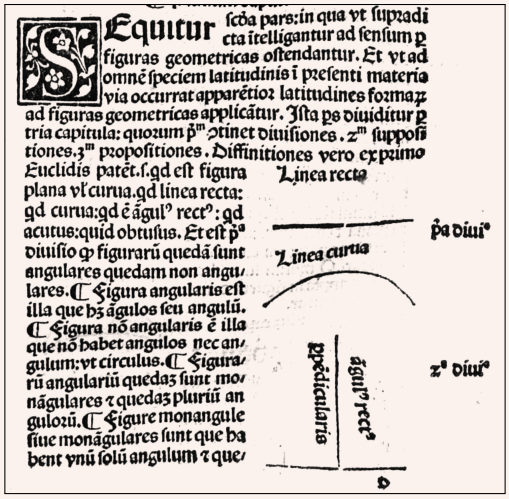
> हम नहीं जानते कि वक्रता की तीव्रता किससे अथवा किसके सापेक्ष मापी जाती है। अभी मुझे प्रतीत होता है कि वक्रता के माप के विषय में कहने के केवल दो [संभव] उपाय हैं। प्रथम यह है कि वक्रता में वृद्धि उसकी सरलता से दूरी, अर्थात सरलता से उसके विचलन का फलन है। इसे किसी सरल रेखा और वक्र से बने कोण के परिमाण से [मापा जाना] है, उदाहरणार्थ संस्पर्श-कोण अथवा संभवतः किसी सरल रेखा और वक्र से बना कोई अन्य कोण।
>
> Serrano and Suceavă, 2017 *"A Medieval Mystery: Nicole Oresme's Concept of Curvitas"*

ओरेस्मे कोई साधारण आरंभिक विद्वान नहीं थे। पश्चदृष्टि से उन्हें ग्रेशम के नियम, वैश्लेषिक ज्यामिति, मुक्त-पतन के नियम, पदार्थ के संरचनात्मक सिद्धांतों और पृथ्वी के घूर्णन से मिलते-जुलते विचार प्रस्तावित करने का श्रेय दिया गया है। यद्यपि आधुनिक जाँच में इनमें से कोई दावा कठोरता से सही नहीं ठहरता, प्रत्येक उनके चिंतन की व्यापकता और मौलिकता दर्शाता है (Clagett, 1964)।

एक रोचक पार्श्व टिप्पणी: माना जाता है कि ओरेस्मे ने जोड के लिए गणितीय $+$ चिह्न प्रस्तुत किया।[2]

[2]गुणन चिह्न "x" विलियम ऑट्रेड ने 1618 में, भाग चिह्न div योहान रान ने 1659 में और अनंत चिह्न ∞ जॉन वालिस ने 1655 में प्रस्तुत किया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 8.2: ओरेस्मे की वक्रता

अनेक दृष्टियों से ओरेस्मे को वैज्ञानिक क्रांति का अग्रदूत माना जा सकता है (§5.3 देखें)। यह उल्लेखनीय है कि ओरेस्मे की अग्रणी अवधारणा (1351) और न्यूटन के वैश्लेषिक सूत्रीकरण (1671) के बीच तीन शताब्दियों से अधिक बीत गईं—यह इस बात का प्रमाण है कि ओरेस्मे के विचार कितने क्रांतिकारी थे और उन्हें औपचारिक रूप देने के लिए आवश्यक गणितीय साधनों के विकास में कितना समय लगा।

8.2.2 न्यूटन (1671)

वक्रता पर न्यूटन का आरंभिक कार्य 1671 में उनके निर्णायक ग्रंथ *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (Newton, 1736 PDF) में मिलता है, जहाँ उन्होंने अभिलंबों, स्पर्शरेखाओं और वक्रता की समस्याओं पर विचार किया। मई 1665 तक न्यूटन फलन $y = f(x)$ के लिए वक्रता-त्रिज्या का सामान्य सूत्र विकसित कर चुके थे और 1670–71 की शीत ऋतु तक उस कृति का प्रारूप तैयार करने लगे थे जो *Methods of Series and Fluxions* के नाम से जानी गई।

इस कृति में उन्होंने अन्य समस्याओं के साथ निम्नलिखित प्रस्तुत कीं:

- समस्या 5: “किसी बिंदु पर वक्र की वक्रता का निर्धारण”।
- समस्या 6: “किसी बिंदु पर वक्रता का गुण”।

उन्होंने कार्तीय निर्देशांकों में वक्रता का सामान्य सूत्र व्युत्पन्न किया और उल्लेखनीय रूप से उसे ध्रुवीय रूप में भी व्यक्त किया। समस्या 5 में न्यूटन ने पाँच परिभाषक दशाएँ सूचीबद्ध कीं जो वक्रता-त्रिज्या अथवा वक्रता-केंद्र निर्धारित करती हैं (Bardini and Gianella, 2014 PDF):

- सरल रेखा में कोई वक्रता नहीं होती।
- वृत्त की वक्रता नियत और उसकी त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती होती है ($k = 1/R$)।
- यदि कोई वृत्त किसी वक्र को उसकी अवतल ओर स्पर्श करता है और संपर्क-कोण के भीतर कोई अन्य वृत्त अंतर्लिखित नहीं किया जा सकता, तो उस बिंदु पर उसकी वक्रता वक्र के समान होती है।
- वक्रता-केंद्र उस वृत्त का केंद्र है जो किसी बिंदु पर वक्र को स्पर्श करता है, अवतल ओर स्थित होता है और उसकी वक्रता समान होती है। उसे ज्ञात करने के लिए दो सूक्ष्मातिसूक्ष्म निकट बिंदुओं पर अभिलंबों का प्रतिच्छेदन करना चाहिए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

न्यूटन ने इस रचना को एक ऐसे ज्यामितीय विन्यास से स्पष्ट किया जिसमें अभिलंब DH और dh बिंदु d पर प्रतिच्छेद करते हैं; और जैसे-जैसे D, P के निकट आता है, सीमांत बिंदु वक्रता-केंद्र C बन जाता है (चित्र 8.3)।

> एक ही वृत्त में सर्वत्र समान वक्रता होती है और भिन्न वृत्तों में वह उनके व्यासों के व्युत्क्रमानुपाती होती है।
>
> यदि कोई वृत्त किसी दिए गए बिंदु पर किसी वक्र को उसकी अवतल ओर स्पर्श करता है और उसका परिमाण ऐसा है कि उस बिंदु के संपर्क-कोण में कोई अन्य स्पर्शी वृत्त अंतर्लिखित नहीं किया जा सकता, तो उस वृत्त की वक्रता संपर्क-बिंदु पर वक्र के समान होगी।
>
> अतः वक्र के किसी बिंदु का वक्रता-केंद्र समान रूप से वक्र वृत्त का केंद्र है, और इस प्रकार वक्रता की त्रिज्या अथवा अर्ध-व्यास उस वक्र के अभिलंब का वह भाग है जो केंद्र पर समाप्त होता है।
>
> भिन्न बिंदुओं पर वक्रता का अनुपात समान-वक्र वृत्तों की वक्रता के अनुपात से अथवा वक्रता-त्रिज्याओं के व्युत्क्रम अनुपात से ज्ञात होगा।
>
> आगे स्पष्टीकरण तुरंत आता है:
>
> किंतु इस बिंदु C के अनेक लक्षण अथवा गुण हैं जिनका उसके निर्धारण में उपयोग किया जा सकता है।
>
> Coolidge, 1952 *"The unsatisfactory story of curvature"*

1. यह बिंदु के दोनों ओर सूक्ष्मातिसूक्ष्म अंतरालों पर लिए गए चाप के अभिलंबों का प्रतिच्छेद है।
2. यदि DC को वक्र के लंबवत रहते हुए गतिमान कल्पित किया जाए तो C न्यूनतम गति अनुभव करेगा और उसके घूर्णन-केंद्र का कार्य करेगा।
3. यदि केंद्र C और त्रिज्या DC वाला वृत्त बनाया जाए तो इस वृत्त और वक्र के बीच कोई अन्य वृत्त स्थित नहीं हो सकता।
4. यदि किसी स्पर्शी वृत्त का अन्य केंद्र H क्रमशः C के निकट आता है तो अंततः संपर्क-बिंदु संपाती हो जाएँगे।
5. इनमें से प्रत्येक गुण समस्या हल करने की एक विधि देता है, किंतु प्रथम सबसे सरल है और उसी को चुना जाता है।

हाइगेन्स की भाँति न्यूटन ने माना कि यदि वक्र पर एक बिंदु (जो नति-परिवर्तन बिंदु न हो) स्थिर रखा जाए और दूसरा निकट बिंदु किसी भी ओर से उसके निकट आए, तो उनके अभिलंबों का प्रतिच्छेद एक सुपरिभाषित वक्रता-केंद्र पर अभिसरित होता है। यह समान वक्रता वाले उस वृत्त का केंद्र है जो वक्र को स्पर्श करता है—उसके और वक्र के बीच कोई अन्य ऐसा वृत्त स्थित नहीं हो सकता।

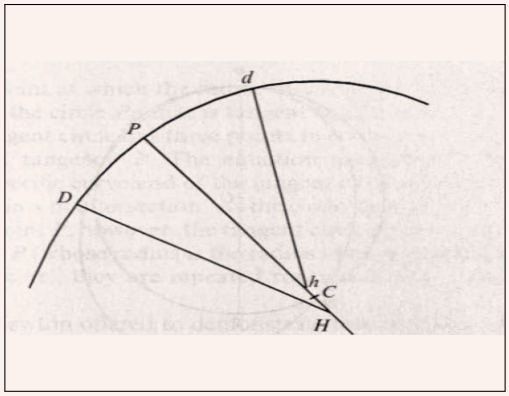
उन्होंने x को स्वतंत्र चर, $\dot{x} = 1$ और $z = dy/dx$ लिया, जिससे कार्तीय निर्देशांकों में वक्रता-त्रिज्या का सुविख्यात सूत्र प्राप्त हुआ:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \tag{8.1}$$

न्यूटन ने इस सूत्र को विविध वक्रों पर लागू करने वाले अनेक उदाहरण दिए। उन्होंने अनुभाग का समापन निम्न कथन से किया:

> चूँकि सभी ज्यामितीय वक्र ... समकोणिक कोटियों के सापेक्ष निर्दिष्ट किए जा सकते हैं, मेरा विश्वास है कि मैंने पर्याप्त किया है। जो कोई अधिक चाहता है वह अपने प्रयास से उसे बिना कठिनाई प्राप्त कर लेगा, विशेषतः यदि अतिरिक्त रूप में इस बिंदु के उदाहरणार्थ मैं सर्पिलों की एक विधि जोड़ दूँ।

समीक्षा प्रति



चित्र 8.3: न्यूटन द्वारा वक्रता की व्युत्पत्ति

> Newton, 1736 *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam*

वक्रता-सिद्धांत में इन मूलभूत प्रगतियों के बावजूद गणितीय खोज के प्रति न्यूटन का उपागम उस सार्वजनिक चुनौती-परंपरा से स्पष्टतः भिन्न था जो महाद्वीप में उभरने वाली थी। वक्र-वर्गीकरण पर उनका क्रमबद्ध कार्य—जिसमें 72 जातियों की पहचान, घन वक्रों की कुल 78 जातियों में से, 1660 और 1670 के दशकों में, सम्मिलित थी—उनके जीवनकाल में मुख्यतः अप्रकाशित रहा (Whiteside, 1969)। यद्यपि न्यूटन के पास जटिल वक्राकार रूपों के विश्लेषण के लिए आवश्यक गणितीय साधन थे, जिनमें वे रूप भी सम्मिलित थे जो बाद में इलास्टिका सिद्धांत के केंद्र में आए, उन्होंने प्रत्यास्थ वक्रों की वह विशिष्ट भौतिक समस्या कभी सूत्रबद्ध नहीं की जिसे याकोब बर्नूली ने दो दशक बाद सार्वजनिक चुनौती के रूप में प्रस्तुत किया (§9.3)। न्यूटन के निजी गणितीय अन्वेषणों और बर्नूली बंधुओं की खुली गणितीय प्रतियोगिताओं के बीच यह अंतर गणितीय अनुसंधान और प्रसार के प्रति महाद्वीपीय तथा अंग्रेजी उपागमों के व्यापक भेद दर्शाता है।

8.2.3 लाइबनित्स (1686)

लाइबनित्स के जीवन-वृत्त के लिए अनुभाग 6.6.8 देखें।

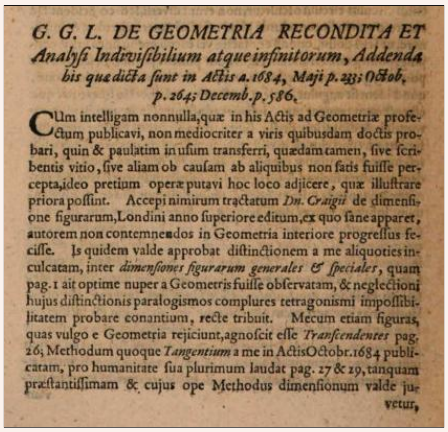
जहाँ न्यूटन ने वक्रता के वैश्लेषिक व्यंजक को औपचारिक रूप दिया, वहीं गॉटफ्रीड विल्हेल्म लाइबनित्स ने महत्त्वपूर्ण ज्यामितीय अंतर्दृष्टियाँ प्रदान कीं। *Acta Eruditorum* में प्रकाशित अपने 1686 के लेख "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum" (Leibniz, 1686b), चित्र 8.4[3] में लाइबनित्स ने संस्पर्श की अवधारणा पर चर्चा की और लिखा कि किसी शीर्ष पर स्पर्शी शंकु-वक्र पर्याप्त रूप से छोटे चाप पर विचार करने पर स्वयं वक्र से प्रत्यक्षतः भिन्न नहीं होता।

अधिक महत्त्वपूर्ण यह है कि इस शोधपत्र ने लाइबनित्स की अवकल कलन संकेत-पद्धति (dx और dy का उपयोग करते हुए) प्रस्तुत की और परातीत वक्रों से संबंधित समस्याओं सहित ज्यामितीय समस्याओं पर उसका अनुप्रयोग प्रदर्शित किया। लाइबनित्स ने $pdy = xdx$ जैसे समीकरण लिखकर और समाकल चिह्न $\int$ (मूल में f के रूप में लिखा) प्रस्तुत करके दर्शाया कि उनकी सूक्ष्मातिसूक्ष्म-विधि स्पर्शरेखा समस्याओं तथा क्षेत्रकलनों का एकीकृत ढाँचे में विवेचन कैसे कर सकती है।

यद्यपि यह विशिष्ट शोधपत्र वक्रता की ज्यामितीय परिभाषाओं की अपेक्षा वैश्लेषिक यंत्रावली पर अधिक केंद्रित है, लाइबनित्स के उपागम ने बल दिया कि ज्यामितीय गुण सूक्ष्मातिसूक्ष्म विश्लेषण द्वारा समझे जा सकते हैं। उनकी संकेत-

[3] ध्यान दें कि लाइबनित्स केवल G.G.L. (लैटिनीकरण: *Gottfridus Guilielmus Leibnitius*) के रूप में हस्ताक्षर करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



G. G. L. DE GEOMETRIA RECONDITA ET
Analyſi Indiviſibilium atque infinitorum, Addenda
his quæ dicta ſunt in Actis a. 1684, Maji p. 233; Octob.
p. 264; Decemb. p. 586.

Cum intelligam nonnulla, quæ in his Actis ad Geometriæ profectum publicavi, non mediocriter a viris quibusdam doctis probari, quin & paulatim in uſum transferri, quædam tamen, ſive ſcribentis vitio, ſive aliam ob cauſam ab aliquibus non ſatis fuiſſe percepta, ideo pretium operæ putavi hoc loco adjicere, quæ illuſtrare priora poſſint. Accepi nimirum tractatum *Dn. Craigii* de dimenſione figurarum, Londini anno ſuperiore editum, ex quo ſane apparet, autorem non contemnendos in Geometria interiore progreſſus feciſſe. Is quidem valde approbat diſtinctionem a me aliquoties inculcatam, inter *dimenſiones figurarum generales & ſpeciales*, quam pag. 1 ait optime nuper a Geometris fuiſſe obſervatam, & neglectioni hujus diſtinctionis paralogismos complures tetragonismi impoſſibilitatem probare conantium, recte tribuit. Mecum etiam figuras, quas vulgo e Geometria rejiciunt, agnoſcit eſſe *Tranſcendentes* pag. 26; Methodum quoque *Tangentium* a me in Actis Octobr. 1684 publicatam, pro humanitate ſua plurimum laudat pag. 27 & 29, tanquam præſtantiſſimam & cujus ope Methodus dimenſionum valde juvetur,

G. G. L. DE GEOMETRIA RECONDITA ET Analyſi Indiviſibilium atque infinitorum, तथा 1684 के *Acts*, May p. 233; October p. 264; December p. 586 में कही गई बातों के परिशिष्ट।

चूँकि मुझे ज्ञात हुआ है कि ज्यामिति की उन्नति के लिए इन *Acts* में प्रकाशित मेरी अनेक बातों को कुछ विद्वानों ने पर्याप्त सराहा है और उनका धीरे-धीरे उपयोग भी होने लगा है, किंतु कुछ बातें—चाहे लेखक की त्रुटि से अथवा किसी अन्य कारण से—कुछ लोगों द्वारा पर्याप्त रूप से नहीं समझी गई हैं, इसलिए मैंने यहाँ ऐसी बातें जोड़ना उचित समझा जो पूर्ववर्ती बातों को अधिक स्पष्ट कर सकें।

मुझे वास्तव में आकृतियों के मापन पर Mr. Craig का ग्रंथ प्राप्त हुआ है, जो पिछले वर्ष London में प्रकाशित हुआ था; उससे स्पष्ट होता है कि लेखक ने आंतरिक ज्यामिति (interior Geometry) में पर्याप्त प्रगति की है। वे आकृतियों के सामान्य और विशेष आयामों (general and special dimensions) के बीच उस भेद को अत्यधिक स्वीकार करते हैं, जिस पर मैंने बार-बार बल दिया है; और p. 1 पर कहते हैं कि हाल में ज्यामितिविदों ने इसे उत्कृष्ट रूप से पहचाना है। इस भेद की उपेक्षा को वे उचित रूप से उन लोगों के अनेक कुतर्कों (paralogisms) का कारण मानते हैं जो [वृत्त के] क्षेत्रफल-निर्धारण (squaring) की असंभवता सिद्ध करने का प्रयास करते हैं।

वे मेरे साथ यह भी स्वीकार करते हैं कि वे आकृतियाँ जिन्हें सामान्यतः ज्यामिति से बाहर रखा जाता है, **Transcendentes [ट्रान्सेन्डेन्टल]** हैं, p. 26; और अपनी उदारता से, October 1684 के *Acts* में प्रकाशित मेरी स्पर्शरेखा-विधि (Method of Tangents) की p. 27 & 29 पर अत्यधिक प्रशंसा करते हैं, उसे अत्युत्तम बताते हुए और यह कहते हुए कि उसकी सहायता से आयामों की विधि (Method of dimensions) बहुत आगे बढ़ती है…"

चित्र 8.4: लाइबनित्स की *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Leibniz, 1686b)

पद्धति—विशेषतः d/dx रूप—वक्रता-संबंधों को व्यक्त करने में अत्यंत बहुउपयोगी सिद्ध हुई और अंततः अवकल ज्यामिति का मानक बनी।

कलन और ज्यामितीय समस्याओं दोनों के प्रति न्यूटन तथा लाइबनित्स के भिन्न उपागमों ने उनके प्रसिद्ध प्राथमिकता-विवाद को जन्म दिया। जहाँ न्यूटन की फ्लक्सन संकेत-पद्धति गतिकी के लिए सुरुचिपूर्ण थी, वहीं लाइबनित्स की अवकल संकेत-पद्धति वक्रता-सूत्रों और ज्यामितीय विश्लेषण में आने वाले जटिल व्यंजकों के लिए अधिक अनुकूल सिद्ध हुई। इस पद्धतिगत भेद ने पीढ़ियों तक गणितीय विकास को प्रभावित किया; अंततः महाद्वीपीय यूरोप में लाइबनित्स की संकेत-पद्धति प्रमुख हुई और आधुनिक मानक बनी।

इस शोधपत्र में लाइबनित्स के कार्य—विशेषतः परातीत वक्रों का उनका विवेचन और उनका यह प्रतिपादन कि ज्यामिति को ऐसे वक्रों को अपवर्जित नहीं करना चाहिए जिनकी रचना केवल सीमांत प्रक्रियाओं द्वारा हो सकती है—ने बर्नूली परिवार, ऑयलर और अन्य विद्वानों द्वारा अवकल ज्यामिति के परवर्ती विकासों की आधारभूमि रखी।

8.2.4 योहान बर्नूली (1691)

योहान बर्नूली ने 1691 की पांडुलिपि (Bernoulli, Johann, 1691a) में पहली बार वक्रता-त्रिज्या का सामान्य सूत्र व्युत्पन्न किया। व्युत्पत्ति का वर्णन Bos, 1974, pp. 36–37 ने किया है और उसे चित्र 8.5 में दर्शाया गया है।

लक्ष्य वक्रता-त्रिज्या r की बिंदु B पर गणना करना है, जिसे निम्न रूप में व्यक्त किया गया है:

$$r = BH + HD \tag{8.2}$$

1. चूँकि $\angle O'BD = \angle HBE$, त्रिभुज $O'BO$ और EBH समरूप हैं, अतः:

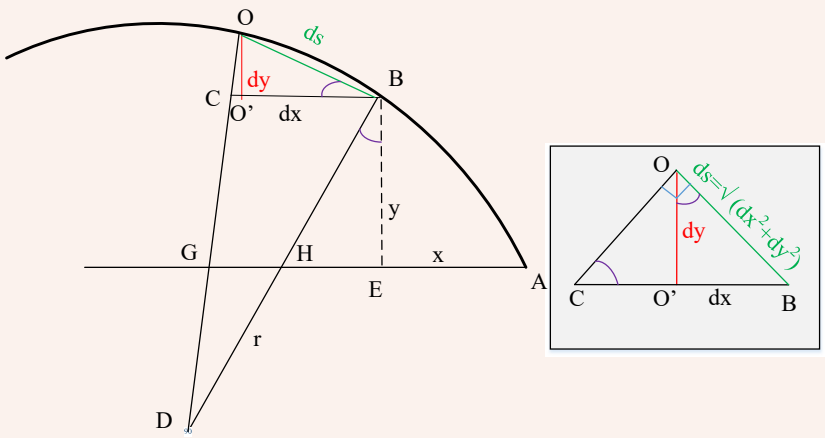
$$BH = BE \cdot \frac{BO}{BO'} = y \cdot \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \tag{8.3}$$

$$AH = AE + EH = AE + OO' \cdot \frac{EB}{O'B} = x + y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{8.4}$$

2. इसके बाद HD के लिए:

$$HD = r \cdot \frac{BC}{HG} \tag{8.5}$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 8.5: योहान बर्नूली द्वारा वक्रता की व्युत्पत्ति

3. HG, AH का अवकल है:

$$HG = d(AH) = d\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = dx + dy \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{ddy}{dx} = dx + \frac{dy^2 + y\,ddy}{dx} \tag{8.6}$$

4. समरूप त्रिभुजों ($\angle BCO = \angle BOO'$) से:

$$BC = \frac{BO^2}{BO'} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx} \tag{8.7}$$

5. समीकरणों (8.3), (8.5), (8.6), और (8.7) को समीकरण (8.2) में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है:

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx \cdot ddy} \tag{8.8}$$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ का उपयोग करके सरल करने पर:

$$r = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy} \tag{8.9}$$

जो निम्न के अनुरूप है:

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{8.10}$$

8.2.5 याकोब बर्नूली; स्वर्ण प्रमेय (1694)

संदर्भ अपने 1694 के *Acta Eruditorum* संस्मरण (Bernoulli, Jakob, 1694 PDF) में याकोब बर्नूली ने दो पृथक किंतु परस्पर संबद्ध योगदान किए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- प्रथम, जिसे उन्होंने *Theorema Aureum* (“radii circulorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti”) कहा, उसमें उन्होंने स्पर्शी वृत्त की त्रिज्या—और अतः वक्रता—के लिए सरलतम पदों में सामान्य वैश्लेषिक व्यंजक प्रस्तुत किया, जैसे $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, जिससे $\kappa = 1/R$। इसका विवेचन यहाँ किया गया है।
- द्वितीय, उन्होंने इस वक्रता-अपरिवर्त्य का उपयोग इलास्टिका हल करने के लिए किया: स्थैतिक साम्यावस्था में पतली, अविस्तरणीय पट्टी का प्रतिरूपण करते हुए उन्होंने आघूर्ण–वक्रता नियम (आधुनिक रूप में $M \propto \kappa$) को शुद्धगतिक संबंधों $dx/ds = \cos\theta$, $dy/ds = \sin\theta$, और $\kappa = d\theta/ds$ से जोड़ा और इस प्रकार यांत्रिक संतुलन को वक्र के लिए हल किए जा सकने वाले अवकल समीकरण में बदला। इसका विवेचन §9.3.2.1 में किया गया है।

यह बलपूर्वक कहना चाहिए कि यह शोधपत्र उस चुनौती का उनका समाधान था जिसे उन्होंने पूर्व में प्रस्तुत किया था (§9.3.1), (Bernoulli, Jakob, 1690a)। अतः वे शोधपत्र का आरंभ इस प्रकार करते हैं:

> ...relationem fili evolventis seu radii circuli osculatoris (non quomodocunque, ut factum in A. Lips. Mens. Jan. 1691. p. 22, sed) in terminis simplicissimis & pure differentialibus exhibeat. Hæc nobis jam eo tempore, quo speculationi funis vacabamus, innotuerat, eamque mox nonnullis inter peregrinandum communicavit Frater; interea dum immensa inventi utilitas in resolvenda Velaria, & hac quam præ manibus habemus Elaterum Curvatura, aliisque sublimioribus, quotidie magis magisque sese mihi explicuit, effecitque tandem, ut non possim publico aureum Theorema diutius invidere...
>
> अंतर्वलित (डोरी) के संबंध अथवा स्पर्शी वृत्त की त्रिज्या को सरलतम और शुद्धतः अवकल पदों में प्रस्तुत करना। यह मुझे तभी ज्ञात हो गया था जब मैं कैटेनरी का अध्ययन कर रहा था और मेरे भ्राता ने शीघ्र ही हमारी यात्राओं के दौरान इसे कुछ लोगों को बताया; इस बीच वेलारिया के समाधान में, यहाँ विवेचित कमानियों की वक्रता (इलास्टिका) में और अन्य अधिक गूढ विषयों में इस खोज की अपार उपयोगिता प्रतिदिन मुझे और स्पष्ट होती गई, और अंततः उसने मुझे उस बिंदु तक पहुँचा दिया कि मैं अब स्वर्ण प्रमेय को जनता से और अधिक वंचित नहीं रख सकता था।
>
> Bernoulli, Jakob, 1694 *“Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus”*

स्वर्ण प्रमेय की व्युत्पत्ति

> Priusquam itaque ad institutum pergo, sunto in fig. I, portiuncula Curvae cujuspiam infinite parvae ab, bc, quibus perpendiculariter insistant radii circuli osculatoris af, bf, concurrentes in puncto Evolutae f, facientesque angulum afb aequalem angulo gbc, quem producta portio ab cum altera bc efficit; tum abscindatur $bh = bc$, ductaeque intelligantur parallelae al, bn, co, nec non bl, hom, gcn; quarum illae abscissarum, hae applicatarum elementa (sive dx, dy, ddx, etc.) indigitent. Dico,
>
> α. Quod positis Curvae elementis ab, bc, hoc est, ipsis ds aequalibus, radius circuli osculatoris seu longitudo fili evolventis af, nempe
>
> $$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}, \quad \text{item} \quad z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$$
>
> Nam $ho : bc :: ho : hc :: hc : bc ::$ (ob similitud. $\triangle$rum bmh, hoc, item hcb, abf) $bm : bh :: ab : bf :: al : ab :: ab : bf :: al : bf :: dx : z$. Sed $ho = hm = nc = bl = nc = ddy$, et $bc = ds$; quare $ddy : ds :: dx : z$. Eodem modo ostendetur $ddx : ds :: dy : z$. Q.E.D.
>
> Coroll. In omni Curva, positis ejus elementis aequalibus, differentiae secundae coordinatarum primis reciproce proportionantur: cum enim $\frac{dx \cdot ds}{ddy} = z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$, erit $dx \cdot ddx = dy \cdot ddy$, adeoque

$ddx : ddy :: dy : dx$; quod ipsum quoque ex sola similitudine △rum bmh, hoc, liquet; ubi co seu ddx est ad oh seu ddy, ut hm ad bm, vel bl ad al, seu dy ad dx.

β. Positis vero abscissae elementis al, bn, hoc est, ipsis dx aequalibus, erit radius osculantis circuli af seu

$$z = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy}$$

Quoniam $gc : bc :: gc : hc :: hc : bc ::$ (ob similit. △rum bng, chg, nec non hcb, abf) $bg : bn :: ab : bf :: ab : al :: ab : bf :: ds : dx :: ds : z :: ds^2 : z \cdot dx$; atque $gc = gn = nc = bl = nc = ddy$, et $bc = ds$; erit $ddy : ds :: ds^2 : z \cdot dx$. Q.E.D. Haud absimiliter ostendetur, quod positis dy aequalibus, futurum est $z = \frac{ds^3}{dy \cdot ddx}$.

His addo nova, de quibus nec Fratri adhuc constat, Theoremata...

आगे विषय पर बढने से पूर्व चित्र I में किसी वक्र का सूक्ष्मातिसूक्ष्म छोटा भाग ab, bc हो, जिस पर स्पर्शी वृत्त की त्रिज्याएँ af, bf लंबवत हों, जो केंद्रज के बिंदु f पर मिलती हैं और कोण afb को कोण gbc के बराबर बनाती हैं, जिसे विस्तारित भाग ab दूसरे bc के साथ बनाता है; फिर $bh = bc$ काटा जाए और समानांतर al, bn, co, तथा bl, hom, gcn खींचे हुए माने जाएँ; इनमें पहले भुजों के अवयव और बाद वाले कोटियों के अवयव (अर्थात dx, dy, ddx, आदि) निरूपित करते हैं। मेरा कथन है:
α. जब वक्र के अवयव ab, bc बराबर लिए जाते हैं, अर्थात जब ds बराबर हों, तब स्पर्शी वृत्त की त्रिज्या अथवा खुलती डोरी की लंबाई af, अर्थात

$$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}, \quad \text{also} \quad z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$$

क्योंकि $ho : bc :: ho : hc :: hc : bc ::$ (त्रिभुजों bmh, hoc, तथा hcb, abf की समरूपता से) $bm : bh :: ab : bf :: al : ab :: ab : bf :: al : bf :: dx : z$। किंतु $ho = hm = nc = bl = nc = ddy$, और $bc = ds$; अतः $ddy : ds :: dx : z$। उसी प्रकार दर्शाया जाएगा कि $ddx : ds :: dy : z$। Q.E.D.
उपप्रमेय। प्रत्येक वक्र में जब उसके अवयव बराबर लिए जाते हैं, निर्देशांकों के द्वितीय अंतर प्रथम अंतरों के व्युत्क्रमानुपाती होते हैं: क्योंकि $\frac{dx \cdot ds}{ddy} = z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$, अतः $dx \cdot ddx = dy \cdot ddy$ होगा और इसलिए $ddx : ddy :: dy : dx$; यह त्रिभुजों bmh, hoc की केवल समरूपता से भी निकलता है; जहाँ co अथवा ddx का oh अथवा ddy से वही अनुपात है जो hm का bm से, या bl का al से, अथवा dy का dx से है।
β. जब भुज के अवयव al, bn बराबर लिए जाते हैं, अर्थात जब dx बराबर हों, तो स्पर्शी वृत्त की त्रिज्या af होगी

$$z = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy}$$

चूँकि $gc : bc :: gc : hc :: hc : bc ::$ (त्रिभुजों bng, chg, तथा hcb, abf की समरूपता से) $bg : bn :: ab : bf :: ab : al :: ab : bf :: ds : dx :: ds : z :: ds^2 : z \cdot dx$; और $gc = gn = nc = bl = nc = ddy$, तथा $bc = ds$; अतः $ddy : ds :: ds^2 : z \cdot dx$। Q.E.D. इसी प्रकार दर्शाया जाएगा कि जब dy बराबर हों तो $z = \frac{ds^3}{dy \cdot ddx}$ होगा।
इनमें मैं नए प्रमेय जोड़ता हूँ, जिनके विषय में अभी मेरे भ्राता भी नहीं जानते...

Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"* pg. 264

लघु-ढाल धारणा के अभाव से समाधान की व्युत्पत्ति सरल होती है। किंतु प्रत्यास्थ वक्र का परिणामी अवकल समीकरण प्राथमिक फलनों में हल नहीं किया जा सकता। बाद में डैनियल बर्नूली ने यह धारणा प्रस्तुत की और समीकरण को वैश्लेषिक रूप से सरल कर सके (§9.4.1.3 देखें)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चित्र 8.6 के संदर्भ में बर्नूली निर्धारित करते हैं:

$$ab = bc; \quad af \perp ab; \quad bf \perp bc; \quad bh = bc; \quad \Rightarrow al = bm \tag{8.11}$$

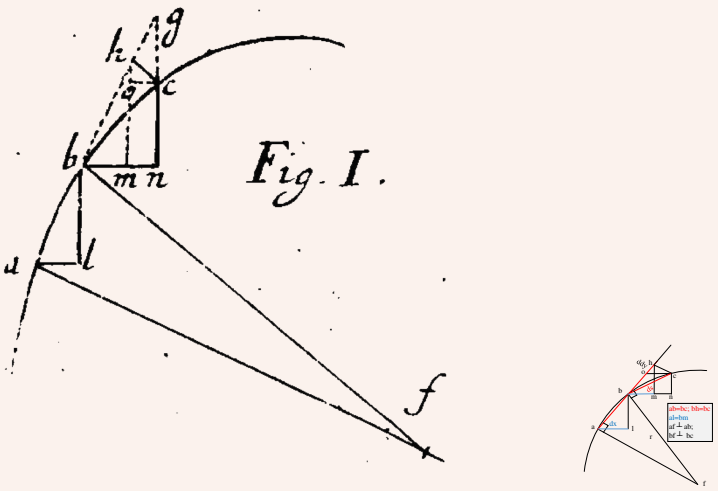
और निम्नलिखित त्रिभुज (लगभग) समरूप हैं:

$$\triangle bmh \sim \triangle hoc \quad \text{and} \quad \triangle hcb \sim \triangle abf \tag{8.12}$$

अतः हम लिख सकते हैं:

$$\frac{ho}{bc} = \frac{ho}{hc} \cdot \frac{hc}{bc} = \frac{bm}{bh} \cdot \frac{ab}{bf} = \frac{al}{ab} \cdot \frac{ab}{bf} \tag{8.13}$$

नियत ds के लिए यह सरल होकर $\frac{ho}{bc} = \frac{al}{bf}$ बनता है। अब:



चित्र 8.6: याकोब बर्नूली द्वारा वक्रता की व्युत्पत्ति

$$bf = r; \quad al = dx; \quad bc = ds; \quad ho = hm - nc = bl - nc = ddy \tag{8.14}$$

(चिह्न-परंपराओं की उपेक्षा करते हुए)। अतः:

$$\frac{dx}{r} = \frac{ddy}{ds} \tag{8.15}$$

और अंततः:

$$r = \frac{dx \cdot ds}{ddy} \tag{8.16}$$

नियत ds के लिए।

नियत ds की धारणा s को स्वतंत्र चर लेने के अनुरूप है।

चित्र 8.6 में AED इलास्टिका और GLM उसका केंद्रज है। अतः पद *evolutione describitur* वक्र GLM का *अंतर्वलित* लेकर इलास्टिका AED की रचना करने का संकेत देता प्रतीत होता है। केंद्रज पर बिंदु L, इलास्टिका पर बिंदु E के अनुरूप है। L के कार्तीय निर्देशांक (p, z) हैं; E के निर्देशांक (x, y) हैं। बर्नूली स्पष्टतः वक्रता को परिभाषित करने के ज्यामितीय साधन के रूप में केंद्रज का उपयोग करते हैं—यह इलास्टिका के सिद्धांत के केंद्र में है। परिभाषा से खंड EL, बिंदु E पर AED की वक्रता-त्रिज्या है।

जहाँ याकोब बर्नूली का सूत्रीकरण गहन रूप से ज्यामितीय और अरैखिक था, वहीं उसने उनके भतीजे डैनियल (§9.3.2.1.2.4) और ऑयलर (§9.4.1.2) के लिए अधिक वैश्लेषिक परिप्रेक्ष्य से इलास्टिका पर विचार करने तथा निर्णायक सरलीकरण तक पहुँचने की भूमिका तैयार की।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 8.1: बर्नूली के मूल और आधुनिक वक्रता-सूत्रों की तुलना

बर्नूली का सूत्रीकरण (1694)	आधुनिक सूत्रीकरण
समान चाप-अवयवों की धारणा (नियत ds)	फलन $y(x)$ की धारणा, जिसमें x प्राचल है
$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$	$R = \frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$
परिमित (सूक्ष्मातिसूक्ष्म) अंतरों का उपयोग	सीमा-आधारित अवकलजों का उपयोग
केंद्रज सहित ज्यामितीय रचना	वैश्लेषिक अवकलन
किसी भी प्राचलीकरण के साथ कार्यशील	सामान्यतः स्पष्ट $y(x)$ के लिए
समरूप त्रिभुजों पर आधारित	स्पर्शरेखा-कोण के परिवर्तन की दर पर आधारित

तुलना: बर्नूली (1694) और आधुनिक सूत्रीकरण बर्नूली के सूत्र को आधुनिक सूत्र से जोडने के लिए: $z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$ से आरंभ करके और $ds^2 = dx^2 + dy^2$ का उपयोग करके हम लिख सकते हैं: $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

अतः: $R = \frac{dx \cdot ds}{d^2y} = \frac{dx^2\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{d^2y}$

अंश और हर को dx^2 से विभाजित करने पर: $R = \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{d^2y/dx^2}$

किंतु आधुनिक सूत्र में एक अतिरिक्त गुणक सम्मिलित है। यह विसंगति इसलिए उत्पन्न होती है क्योंकि बर्नूली का ddy (नियत ds के साथ लिया गया द्वितीय अंतर) आधुनिक d^2y/dx^2 (x के सापेक्ष द्वितीय अवकलज) से सूक्ष्म रूप से भिन्न है। चरों के परिवर्तन और अवकलों के बीच संबंध का उचित लेखा रखने पर प्राप्त होता है:

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \tag{8.17}$$

अंश में अतिरिक्त गुणक $[1 + (dy/dx)^2]$ इस तथ्य का लेखा रखता है कि वक्र के झुकने पर प्रक्षेपण-प्रभावों को उचित रूप से सम्मिलित करना आवश्यक है।

ऐतिहासिक प्रभाव यह प्रमेय इलास्टिका समस्या हल करने का बर्नूली का प्रमुख साधन बना। उन्होंने इसे अपना "स्वर्ण प्रमेय" इसलिए नहीं कहा कि उन्होंने वक्रता अथवा स्पर्शी वृत्त की अवधारणा खोजी थी, बल्कि इसलिए कि इसने वह व्यावहारिक संगणकीय विधि—"अनुपस्थित कुंजी"—प्रदान की जिसने अंततः गणितज्ञों को प्रत्यास्थ वक्रों के साथ सफलतापूर्वक कार्य करने दिया। जैसा वे पृष्ठ 263 पर कहते हैं, पूर्ववर्ती प्रयासों (जनवरी 1691 में प्रकाशित एक प्रयास सहित) ने स्पर्शी वृत्तों पर विचार किया था, किंतु ऐसे रूप में नहीं जो परातीत यांत्रिकी समस्याएँ हल करने के लिए उपयुक्त हो। केवल ज्यामितीय रचनाओं के स्थान पर अवकल संबंधों पर विधि की निर्भरता ने गणितीय भौतिकी में वैश्लेषिक विधियों की ओर निर्णायक परिवर्तन चिह्नित किया और विचरण-कलन के क्रमबद्ध विकास का पूर्वाभास दिया।

8.2.6 केस्टनर (1758)

गॉटिंगेन विश्वविद्यालय के प्राध्यापक अब्राहम गॉटहेल्फ केस्टनर (1719–1800) मौलिक अनुसंधानकर्ता की अपेक्षा गणित के विपुल व्याख्याकार के रूप में जाने जाते थे। फिर भी उनकी बहुखंडीय पाठ्यपुस्तक *Anfangsgründe der Mathematik* ("गणित की आधारभूमि"), (Kästner, 1786) ने अवकल ज्यामिति और विश्लेषण की अनेक अवधारणाओं को क्रमबद्ध तथा लोकप्रिय बनाने में सहायता की।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1758 के खंड में केस्टनर ने वक्रता की वह परिभाषा दी जो मूलतः आधुनिक परिभाषा है; उन्होंने उसे दो निकटवर्ती स्पर्शरेखाओं के बीच कोण $\Delta\theta$ और उनके बीच चाप-लंबाई Δs के सीमांत अनुपात के रूप में वर्णित किया:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \tag{8.18}$$

यह वक्रता को वक्र के अनुदिश स्पर्शरेखा के घूर्णन की दर के रूप में व्यक्त करता है—एक ऐसी परिभाषा जिसे बाद में वैश्लेषिक ज्यामिति और आधुनिक अवकल ज्यामिति में अपनाया गया।

केस्टनर का मूल कथन इस प्रकार है:

> Man kann die Krümmung einer Linie in einem Punkte durch das Verhältnis des Winkels messen, den zwei sehr nahe Tangenten machen, zu dem zwischen ihnen liegenden Bogen, wenn dieser unendlich klein wird.
>
> Kästner, 1786 *Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*

अनुवाद:

> किसी बिंदु पर रेखा की वक्रता को दो अत्यंत निकट स्पर्शरेखाओं द्वारा बनाए गए कोण और उनके बीच के चाप के अनुपात से मापा जा सकता है, जब वह चाप अनंततः छोटा हो जाता है।
>
> Kästner, 1786 *Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*

यह परिभाषा उस विचार को औपचारिक करती है जिसे बर्नूली परिवार और हाइगेन्स जैसे पूर्ववर्ती गणितज्ञों ने ज्यामितीय रूप से अपनाया था और उसे उस अवकल कलन ढाँचे में स्थापित करती है जो 18वीं शताब्दी के मध्य तक परिपक्व हो चुका था।

आधुनिक वैश्लेषिक ज्यामिति में इस विचार को और औपचारिक किया गया है। $y = f(x)$ द्वारा दिए गए समतलीय वक्र के लिए वक्रता निम्न रूप में लिखी जा सकती है:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$$

जो केस्टनर की ज्यामितीय अंतर्दृष्टि को आज प्रयुक्त कलन-आधारित सूत्र से जोड़ता है।

वक्रता की यह आधुनिक परिभाषा उन्नीसवीं शताब्दी की प्रगतियों के लिए आधारभूत सिद्ध हुई। इसने गाउस द्वारा *Theorema Egregium*[4] (1827) का विकास संभव बनाया, जिसने दर्शाया कि गाउसी वक्रता पृष्ठों का अंतर्निहित गुण है। यह अंतर्दृष्टि अंततः रीमानी ज्यामिति के विकास की ओर ले गई और आइंस्टीन के सामान्य सापेक्षता सिद्धांत के लिए गणितीय ढाँचा प्रदान किया; इस प्रकार पुनः प्रदर्शित हुआ कि व्यावहारिक समस्याओं से जन्मी ज्यामितीय अवधारणाएँ गहन सैद्धांतिक साधनों में कैसे विकसित होती हैं।

8.2.7 सारांश

[4](लैटिन में “उल्लेखनीय प्रमेय”) अवकल ज्यामिति का एक प्रमुख परिणाम है, जो पृष्ठों की वक्रता से संबंधित है। प्रमेय कहता है कि परिवेशी 3-विमीय यूक्लिडीय समष्टि में पृष्ठ के अंतःस्थापन की विशिष्ट रीति के संदर्भ के बिना, केवल पृष्ठ पर कोणों, दूरियों और उनके परिवर्तन की दरों को मापकर गाउसी वक्रता पूर्णतः निर्धारित की जा सकती है। दूसरे शब्दों में, यदि किसी पृष्ठ को खींचे बिना मोड़ा जाए तो उसकी गाउसी वक्रता नहीं बदलती। अतः गाउसी वक्रता पृष्ठ का अंतर्निहित अपरिवर्त्य है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 8.2: वक्रता के विकास की प्रमुख उपलब्धियाँ

नाम	तिथि	योगदान	प्रतिनिधि सूत्र	प्रमुख कृति / स्रोत
निकोल ओरेस्मे	1351	वक्रता और सरलता से विचलन के बीच वैचारिक संबंध; गुणात्मक वर्णन	कोई नहीं (गुणात्मक)	*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*
आइज़क न्यूटन	1671	कार्तीय और ध्रुवीय निर्देशांकों में वक्रता का वैश्लेषिक सूत्र; अभिलंबों द्वारा ज्यामितीय वक्रता-केंद्र	$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$	*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*
जी. डब्ल्यू. लाइबनित्स	1686	चार संपाती बिंदुओं पर वक्र को प्रतिच्छेद करने वाले वृत्त की सीमा के रूप में स्पर्शी वृत्त की परिभाषा	कोई नहीं (ज्यामितीय)	*Acta Eruditorum* (1686 का लेख)
योहान बर्नूली	1691	अवकलों द्वारा सामान्य वक्रता-त्रिज्या की बीजीय व्युत्पत्ति	$r = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$	अप्रकाशित पांडुलिपि (1691)
याकोब बर्नूली	1694	केंद्रज/अंतर्वलित द्वारा ज्यामितीय रचना; इलास्टिका सिद्धांत में वक्रता केंद्रीय	$r = \frac{dx \cdot ds}{dd y}$	*Curvatura Laminae Elasticae*, *Acta Eruditorum* (1694)
लियोनहार्ड ऑयलर	1744	इलास्टिका के लिए विचरण-कलन का ढाँचा; वक्र-अनुकूलन के लिए ऑयलर-लाग्रांज समीकरण	$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$	*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes*
ऑयलर-बर्नूली सहयोग	ca. 1750	रैखिक धरन-सिद्धांत तक ले जाने वाला लघु-ढाल सन्निकटन	$\kappa \approx \frac{d^2y}{dx^2}$	ऑयलर का विचरणात्मक ढाँचा + डैनियल का ऊर्जा-सिद्धांत
ए. जी. केस्टनर	1758	चाप-लंबाई के सापेक्ष स्पर्शरेखा-कोण के परिवर्तन की दर के रूप में वक्रता की आधुनिक परिभाषा	$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$	*Anfangsgründe der Mathematik*

8.3 केंद्रज/अंतर्वलित

अवकल ज्यामिति में केंद्रज और अंतर्वलित की अवधारणाएँ, जिन्हें क्रिस्टियान हाइगेन्स ने पहली बार प्रस्तुत किया, वक्रता, इलास्टिका और कैटेनरी के परवर्ती विवेचन को समझने के लिए निर्णायक हैं। ये अवधारणाएँ शुद्ध गणित को व्यावहारिक यांत्रिकी से जोड़ने वाले ज्यामितीय चिंतन की परिणति दर्शाती हैं।

ऐतिहासिक और सांस्कृतिक परिप्रेक्ष्य में रखने के लिए, 1691 में हाइगेन्स ने अपने युग की भावना इस प्रकार व्यक्त की:

> मैंने प्रायः विचार किया है कि वे वक्र जिन्हें प्रकृति बार-बार हमारे समक्ष प्रस्तुत करती है और जिनका वह स्वयं मानो अनुरेखण करती है, सभी में अत्यंत उल्लेखनीय गुण होते हैं। जैसे वृत्त, जो सर्वत्र मिलता है। परवलय, जिसका जलधाराएँ अनुरेखण करती हैं। दीर्घवृत्त और अतिपरवलय, जिन पर शंकु-छाया की नोक चलती है और जो अन्यत्र भी

> मिलते हैं। चक्रज, जिसका पहिए की परिधि पर स्थित कील अनुरेखण करती है। और अंततः हमारी कैटेनरी, जिसे अनेक शताब्दियों से बिना जाँचे देखा गया है। मेरे विचार में ऐसे वक्र अध्ययन के लिए चुने जाने योग्य हैं, किंतु वे [वक्र] नहीं जो केवल उन पर ज्यामितीय कलन का उपयोग करने के लिए नए गढ़े गए हों।
>
> Blasjo, 2017 *Transcendental curves in the Leibnizian calculus* ([Chapter8])

अवकल ज्यामिति में किसी वक्र का केंद्रज उसके सभी वक्रता-केंद्रों का बिंदुपथ है। किसी वक्र का अंतर्वलित तनी हुई डोरी के एक बिंदु का वह बिंदुपथ है जो डोरी को वक्र से खोले अथवा उसके चारों ओर लपेटे जाने पर बनता है। किसी अंतर्वलित का केंद्रज मूल वक्र होता है।

गणितीय रूप से प्राचलीय वक्र $\vec{c}(t)$ के लिए केंद्रज निम्न है:

$$\vec{E}(t) = \vec{c}(t) + \rho(t)\vec{n}(t) \tag{8.19}$$

जहाँ $\rho(t)$ वक्रता-त्रिज्या और $\vec{n}(t)$ एकक अभिलंब सदिश है। अंतर्वलित को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

$$\vec{C}_a(t) = \vec{c}(t) - \frac{\vec{c}'(t)}{|\vec{c}'(t)|}\int_a^t |\vec{c}'(w)|\,dw \tag{8.20}$$

जहाँ समाकल वक्र से खोली गई डोरी की चाप-लंबाई दर्शाता है।

एक सरल उदाहरण इन अवधारणाओं को स्पष्ट करता है: वृत्त का केंद्रज उसके केंद्र पर एकल बिंदु (जहाँ सभी अभिलंब मिलते हैं) है, जबकि वृत्त का अंतर्वलित सर्पिल वक्र बनाता है। यद्यपि उसे प्रायः आर्किमिडीय सर्पिल समझ लिया जाता है, वृत्त का अंतर्वलित वास्तव में अपने अद्वितीय गुणों वाला पृथक वक्र है—यह भेद सदियों बाद गियर-दंतों के अभिकल्प के विकास में निर्णायक सिद्ध हुआ।

8.3.1 हाइगेन्स (1658-1673)

यद्यपि अपोलोनियस ने अपनी *Conics* की पुस्तक V (c. 200 BC) में केंद्रजों की चर्चा की थी, हाइगेन्स ने पहली बार क्रमबद्ध सिद्धांत विकसित किया और उसे व्यावहारिक यांत्रिक समस्या के समाधान में लागू किया। समय का परिशुद्ध मापन चाहने वाले डच गणितज्ञ, भौतिकविद और खगोलशास्त्री हाइगेन्स ने 1657 में लोलक-घड़ी का आविष्कार किया और बाद में उसे वास्तव में समकालिक बनाने का उपाय खोजा। उनके निष्कर्ष उनकी श्रेष्ठ कृति *Horologium Oscillatorium* (1673)(Huygens, 1673) में प्रकाशित हुए, जिसे 17वीं शताब्दी की यांत्रिकी की तीन सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण कृतियों में माना जाता है; अन्य दो गैलीलियो की *Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences* (1638)(Galilei, 1638) और न्यूटन की *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687) हैं।[5]

सरल लोलक की गति का आवर्तकाल (5° से कम कोण के लिए) लगभग है:

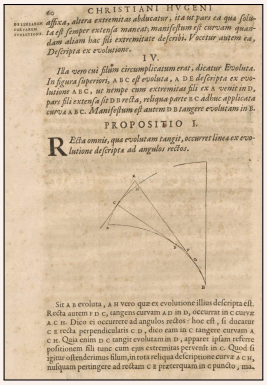
$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{8.21}$$

लघु आयामों के लिए लगभग समकालिक होने पर भी सरल लोलक समय-मापन की ऐसी त्रुटियाँ दर्शाता है जो आयाम के साथ बढ़ती हैं। इस सीमा को खोजने और समाधान बनाने वाले हाइगेन्स प्रथम थे (Zixuan, Jixun, and Zhigang, 2018)। ज्यामितीय विश्लेषण द्वारा उन्होंने खोजा कि समकालिक वक्र—जिस पर कोई कण आरंभिक स्थिति से स्वतंत्र रूप से समान समय में निम्नतम बिंदु तक उतरता है—चक्रज है[6]।

[5] 17वीं शताब्दी की तीन सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण यांत्रिकी-कृतियों का यह आकलन विज्ञान-इतिहास साहित्य में व्यापक रूप से स्वीकृत है।

[6] चक्रज वह वक्र है जिसका अनुरेखण वृत्त पर स्थित कोई बिंदु सरल रेखा के अनुदिश वृत्त के लुढ़कने पर करता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।


CHRISTIANI HVGENI

PROPOSITIO I.

Cycloid
a
2π a
Bumper Cycloid
2a
Evolute
θ
L=4a
Involute
Pendulum Cycloid

चित्र 8.7: हाइगेन्स का समकालिक लोलक (Huygens, 1673)

चक्रज को समकालिक वक्र बनाने वाला निर्णायक गुण यह है कि किसी बिंदु से तल तक चाप-लंबाई का वर्ग ऊर्ध्वाधर ऊँचाई-अंतर के समानुपाती होता है:

$$s^2 = 8ar \cdot h \tag{8.22}$$

जहाँ s चाप-लंबाई, a जनक वृत्त की त्रिज्या और h ऊँचाई है। ऊर्जा-संरक्षण के साथ यह संबंध सुनिश्चित करता है कि अवरोहण-काल आरंभिक स्थिति से स्वतंत्र है और इस प्रकार नियत आवर्तकाल प्राप्त होता है।

लोलक-गोलक को चक्रजी पथ पर चलाने के लिए हाइगेन्स ने केंद्रज और अंतर्वलित की अवधारणा प्रस्तुत की। उनकी उल्लेखनीय खोज थी कि चक्रज का अंतर्वलित एक अन्य चक्रज होता है। लोलक के शीर्ष पर दो सममित चक्रजी कपोल रखकर डोरी झूलते समय आंशिक रूप से इन कपोलों पर लिपटती थी। तब लोलक-गोलक चक्रजी पथ—चक्रजी कपोलों का अंतर्वलित—अनुरेखित करता और इस प्रकार कठोर समकालिकता प्राप्त होती।

हाइगेन्स के चक्रजी लोलक का आवर्तकाल है:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \tag{8.23}$$

जहाँ a चक्रज के जनक वृत्त की त्रिज्या है (ध्यान रखते हुए कि पूर्ण चक्रज की चाप-लंबाई $8a$ और लोलक की लंबाई $4a$ के बराबर है)।

हाइगेन्स की व्युत्पत्ति पूर्णतः ज्यामितीय थी और आर्किमिडीज की शैली में अनुपातों तथा असंभवता-प्रमाण पर आधारित थी; उसने उन तकनीकों का पूर्वाभास दिया जिन्हें बाद में कलन द्वारा औपचारिक किया गया। समय-मापन की इस व्यावहारिक समस्या को हल करने के लिए विकसित उनका केंद्रज-सिद्धांत अवकल ज्यामिति के अध्ययन का आधार बना।

8.3.2 व्यावहारिक सीमाएँ और विरासत

सैद्धांतिक सुरुचि के बावजूद हाइगेन्स के चक्रजी लोलक ने व्यावहारिक चुनौतियों का सामना किया: कपोलों के चारों ओर डोरी के मुड़ने से घर्षण, संपर्क-बिंदुओं पर घिसाव और चक्रजी आकारों के लिए आवश्यक परिशुद्ध निर्माण। बाद में एंकर एस्केपमेंट (लगभग 1670) के आविष्कार ने इन समस्याओं को दूर किया; उसने लोलकों को छोटे चापों में झूलने दिया जहाँ वृत्तीय त्रुटि नगण्य हो जाती है और अधिकांश समय-मापन अनुप्रयोगों में जटिल चक्रजी यंत्रावली अनावश्यक हो गई।

फिर भी केंद्रजों के लिए हाइगेन्स द्वारा विकसित गणितीय ढाँचा उनके विशिष्ट घड़ी-अभिकल्प से कहीं अधिक प्रभावशाली सिद्ध हुआ। वक्रता के प्रति उनके ज्यामितीय उपागम और वक्रों तथा उनके केंद्रजों के बीच संबंध ने निम्नलिखित की आधारभूमि रखी:

- प्रकाशिकी में कॉस्टिकों का अध्ययन (परावर्तित अथवा अपवर्तित किरणों का अन्वालोप)
- ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या (योहान बर्नूली, 1696)—तीव्रतम अवरोहण-वक्र ज्ञात करना

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- वक्र-परिवारों के अनुवालोपों का सामान्य सिद्धांत
- गियर-अभिकल्प में आधुनिक अनुप्रयोग, जहाँ अंतर्वलित गियर नियत वेग-अनुपात बनाए रखते हैं
- गणितीय अनुशासन के रूप में अवकल ज्यामिति का विकास

हाइगेन्स द्वारा प्रस्तुत अवधारणाएँ इलास्टिका और कैटेनरी सहित वक्रों की वक्रता समझने के लिए आवश्यक सिद्ध हुईं—वे वक्र जिन्हें, जैसा हाइगेन्स ने कहा, प्रकृति हमारे समक्ष प्रस्तुत करती है और जिनमें “अत्यंत उल्लेखनीय गुण” होते हैं।

8.3.3 समापन टिप्पणियाँ

केंद्रजों और अंतर्वलितों की कथा ज्यामिति के इतिहास में आवर्ती विषय का उदाहरण है: व्यावहारिक समस्याएँ ऐसी सैद्धांतिक प्रगतियों को प्रेरित करती हैं जो अंततः अपने मूल अनुप्रयोगों से आगे निकल जाती हैं। हाइगेन्स एक बेहतर घड़ी बनाना चाहते थे, किंतु इसके स्थान पर उन्होंने गणित को यह समझने का मूलभूत ढाँचा दिया कि वक्र अपने वक्रता-गुणों द्वारा एक-दूसरे से कैसे संबंधित होते हैं। व्यावहारिक और सैद्धांतिक, यांत्रिक आवश्यकता और ज्यामितीय सौंदर्य का यह परस्पर प्रभाव 17वीं शताब्दी से आगे ज्यामिति के अधिकांश विकास को निरूपित करता है।

जैसा हमने इस अध्याय में देखा, ज्यामिति केवल अमूर्त अभ्यास नहीं, बल्कि वह दृष्टि है जिसके माध्यम से हम प्राकृतिक जगत और अपने द्वारा निर्मित वस्तुओं दोनों को समझ सकते हैं। वृत्त के क्षेत्रकलन की प्राचीन समस्याओं से अंतर्वलित गियरों के आधुनिक अनुप्रयोगों तक ज्यामितीय सिद्धांत स्थान, गति और रूप की हमारी समझ को निरंतर आकार देते हैं। परिशुद्ध समय-मापन की व्यावहारिक आवश्यकता से उत्पन्न केंद्रज और अंतर्वलित हमें स्मरण कराते हैं कि सर्वाधिक अमूर्त गणितीय अवधारणाओं की जड़ें भी प्रायः मानव अनुभव की मूर्त चुनौतियों में होती हैं।

सारणी 8.3 इस अध्याय में उल्लिखित प्रमुख घटनाओं/पुस्तकों का सार प्रस्तुत करती है।

तालिका 8.3: वक्रता & इलास्टिका: प्रमुख घटनाएँ और पुस्तकें

वर्ष	लेखक	पुस्तक का शीर्षक / घटना	सारांश
1351	निकोल ओरेस्मे	*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Oresme, 1351)	वक्रता को सरलता से विचलन से जोड़ने वाली आरंभिक गुणात्मक धारणा; परवर्ती वैश्लेषिक परिभाषाओं का अग्रदूत।
1657	क्रिस्टियान हाइगेन्स	लोलक-घड़ी का आविष्कार (घटना)	समकालिकता को प्रेरित करने वाली व्यावहारिक समय-मापन समस्या; चक्रजी (समकालिक) समाधान की भूमिका।
1658–1673	क्रिस्टियान हाइगेन्स	चक्रजी लोलक & केंद्रज/अंतर्वलित रचना (घटना)	समकालिकता लागू करने के लिए चक्रजी कपोलों द्वारा चक्रज के अंतर्वलित का उपयोग; केंद्रज/अंतर्वलित को ज्यामितीय रूप से औपचारिक किया।
1671	आइज़क न्यूटन	*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (Newton, 1736 PDF)	वैश्लेषिक वक्रता-सूत्र (कार्तीय/ध्रुवीय); प्रतिच्छेदी अभिलंबों द्वारा वक्रता-केंद्र।
1673	क्रिस्टियान हाइगेन्स	*Horologium Oscillatorium* (Huygens, 1673 PDF)	लोलक-गतिकी की श्रेष्ठ कृति; समकालिक वक्र के रूप में चक्रज; केंद्रजों/अंतर्वलितों का क्रमबद्ध उपयोग।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

वर्ष	लेखक	पुस्तक का शीर्षक / घटना	सारांश
1686	जी. डब्ल्यू. लाइबनित्स	चतुर्बिंदु संपर्क द्वारा स्पर्शी वृत्त (घटना)	4 संपाती बिंदुओं वाले वृत्त की सीमा के रूप में स्पर्शी वृत्त की परिभाषा; वक्रता की ज्यामितीय आधारभूमि।
1691	योहान बर्नूली	सामान्य वक्रता-त्रिज्या (अप्रकाशित पांडुलिपि)	r की अवकल व्युत्पत्ति; आधुनिक $r = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{y''}$ तक बीजीय मार्ग।
1694	याकोब बर्नूली	*Curvatura Laminae Elasticae* (Bernoulli, Jakob, 1744a)	केंद्रज/अंतर्वलित द्वारा ज्यामितीय इलास्टिका; प्रत्यास्थ वक्र की रचना में वक्रता-त्रिज्या केंद्रीय।
1744	लियोनहार्ड ऑयलर	*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes* (Euler, 1744b)	विचरण-कलन; ऑयलर–लाग्रांज समीकरण; यथार्थ (अरैखिक) इलास्टिका का विचरणात्मक सूत्रीकरण।
ca. 1750	ऑयलर & डैनियल बर्नूली	लघु-ढाल (ऑयलर–बर्नूली) सन्निकटन (घटना)	वक्रता को रैखिक करता है, $\kappa \approx y''$; $EI\,y'' = M(x)$ देता है—शास्त्रीय धरन-सिद्धांत की आधारभूमि।
1758	ए.जी. केस्टनर	*Anfangsgründe der Mathematik* (Kästner, 1786)	$d\theta/ds$ (चाप-लंबाई के साथ स्पर्शरेखा-कोण के परिवर्तन की दर) के रूप में आधुनिक वक्रता; अवधारणा का समेकन।

8.4 ज्यामितीय वक्रों से संरचनात्मक यांत्रिकी तक

इस अध्याय में अनुसरण किए गए ज्यामितीय विकास—ओरेस्मे की गुणात्मक अंतर्दृष्टियों से केस्टनर की वक्रता की कठोर परिभाषा तक—केवल गणितीय अमूर्तन नहीं थे। उन्होंने भौतिक समस्याओं के एक नए वर्ग को सूत्रबद्ध और हल करने के लिए आवश्यक परिमाणात्मक भाषा प्रदान की: **नम्य और प्रत्यास्थ संरचनाएँ भार के अधीन कैसे विरूपित होती हैं?**

निर्णायक अंतर्दृष्टि: बंकन वाली किसी भी भारित संरचना—लटकती शृंखला, नमित छड, वक्र धरन—का विरूपित आकार मूलतः उसकी **प्रत्येक बिंदु पर वक्रता** से निरूपित होता है। वक्रता का वर्णन और गणना करने की गणितीय यंत्रावली के बिना संरचनात्मक यांत्रिकी अपरिष्कृत सन्निकटनों से आगे नहीं बढ सकती थी।

अध्याय 9 में आने वाली दो महान चुनौतियों पर विचार करें:

कैटेनरी (§9.2): लटकती शृंखला ऐसा आकार ग्रहण करती है जिसमें प्रत्येक बिंदु पर **तनन-बल नीचे स्थित शृंखला के भार को संतुलित करता है**। किंतु इस संतुलन को गणितीय रूप से लिखने के लिए शृंखला की ज्यामिति—विशेषतः चाप-लंबाई, ढाल-कोण θ और ऊर्ध्वाधर स्थिति के बीच संबंध—व्यक्त करना आवश्यक है। हाइगेन्स की ज्यामितीय अंतर्दृष्टियों (§8.3.1) और न्यूटन (§8.2.2) तथा लाइबनित्स (§6.6.8) के कलन ने इसे संभव बनाया। परिणामी अवकल समीकरण शृंखला की वक्रता को उसकी लंबाई में तनन-वितरण से सीधे संबंधित करता है।

इलास्टिका (§9.3): याकोब बर्नूली का 1691–1694 का कार्य ज्यामिति और यांत्रिकी के संबंध का सर्वोत्तम उदाहरण है। उनकी चुनौती-समस्या पूछती है: *भार के अधीन प्रत्यास्थ छड कौन-सा आकार ग्रहण करती है?* उनकी समाधान-विधि इस अध्याय में विकसित ज्यामितीय अवधारणाओं का सीधे उपयोग करती है:

समीक्षा प्रति

1. वक्रता को ज्यामितीय रूप से व्यक्त करने के लिए अपने **स्वर्ण प्रमेय** (§8.2.5) का उपयोग: $\kappa = d\theta/ds$, जहाँ केंद्रज-रचना (§8.3) ज्यामितीय आधार प्रदान करती है
2. एक **भौतिक सिद्धांत** का आह्वान: बंकन आघूर्ण M वक्रता के समानुपाती है ($M \propto \kappa$)—आंतरिक बलों को ज्यामितीय विरूपण से जोड़ने वाला प्रथम स्पष्ट कथन
3. **यांत्रिक साम्यावस्था** का अनुप्रयोग: वक्र के प्रत्येक बिंदु पर आघूर्ण को आरोपित भारों को संतुलित करना चाहिए
4. ज्यामितीय वक्रता को यांत्रिक भारण से संबंधित करने वाला **अवकल समीकरण**, जो कलन की तकनीकों द्वारा हल किया जा सकता है

यह संश्लेषण—जिसमें ज्यामितीय वक्रता विरूपण और आंतरिक बल के बीच सेतु बनती है—इस अध्याय में अभिलिखित पूर्ववर्ती तीन शताब्दियों के ज्यामितीय विकास के बिना संभव नहीं हो सकता था।

आरंभ में चक्रजी लोलक (§8.3.1) के लिए विकसित हाइगेन्स की केंद्रज-रचना तब आवश्यक सिद्ध हुई जब याकोब बर्नूली ने इलास्टिका समीकरण व्युत्पन्न करने के लिए केंद्रजों का उपयोग किया। केंद्रज वक्रता-केंद्रों का बिंदुपथ प्रदान करता है—ठीक वही ज्यामितीय सूचना जो यह व्यक्त करने के लिए आवश्यक है कि बंकित धरन का आकार उसकी लंबाई में कैसे बदलता है। न्यूटन (§8.2.2) और लाइबनित्स (§6.6.8) का स्पर्शी वृत्त, जो आरंभ में शुद्ध ज्यामितीय अवधारणा था, इस बात की भौतिक अभिव्यक्ति बन गया कि बंकित धरन प्रत्येक बिंदु पर कैसे वक्र होना "चाहता" है—स्थानीय वृत्तीय सन्निकटन स्थानीय बंकन आघूर्ण को नियंत्रित करता है। केस्टनर द्वारा औपचारिक की गई स्पर्शरेखा-कोण के परिवर्तन की दर $d\theta/ds$ (§8.2.6) वह यांत्रिक वक्रता κ बनी जो प्रत्येक धरन-समीकरण में आती है।

ज्यामिति से यांत्रिकी का सेतु: सारणी 8.4 संक्षेप में दर्शाती है कि इस अध्याय में विकसित प्रत्येक ज्यामितीय अवधारणा का संरचनात्मक यांत्रिकी में सीधा अनुप्रयोग कैसे हुआ:

तालिका 8.4: ज्यामितीय अवधारणाओं से यांत्रिक अनुप्रयोगों तक

ज्यामितीय अवधारणा	यांत्रिक अनुप्रयोग
स्पर्शी वृत्त (न्यूटन, लाइबनित्स)	धरन-विक्षेप का स्थानीय सन्निकटन; स्थानीय बंकन-दृढता की आवश्यकताओं का निर्धारण
वक्रता-त्रिज्या $\rho = 1/\kappa$	बंकन आघूर्ण के व्युत्क्रमानुपाती: $M = EI\kappa$
वक्रता-केंद्रों के बिंदुपथ के रूप में केंद्रज	इलास्टिका आकार ज्ञात करने की ज्यामितीय रचना-विधि
मुड़ने की दर $d\theta/ds$ (केस्टनर)	धरन-सिद्धांत में ढाल-कोण को चाप-लंबाई से जोड़ने वाला शुद्धगतिक संबंध
स्वर्ण प्रमेय (याकोब बर्नूली)	इलास्टिका अवकल समीकरण हल करने का संगणकीय साधन

विरासत: याकोब बर्नूली द्वारा स्थापित, ऑयलर द्वारा विचरण-कलन में परिष्कृत (§9.4.1.2), और ऑयलर–बर्नूली लघु-ढाल सन्निकटन द्वारा सरलित (§9.4.1.3) वक्रता-आधारित सूत्रीकरण **संपूर्ण** संरचनात्मक धरन-सिद्धांत की आधारभूमि बना। सरल $EIy'' = M(x)$ से लेकर जटिल परिमित अवयव सूत्रीकरणों तक प्रत्येक आधुनिक धरन-समीकरण का वंशक्रम इस अध्याय में विकसित ज्यामितीय अवधारणाओं तक जाता है। प्राथमिक धरन-सिद्धांत संभव बनाने वाला लघु-ढाल सन्निकटन $\kappa \approx d^2y/dx^2$, बर्नूली परिवार द्वारा ज्यामितीय रूप से व्युत्पन्न यथार्थ वक्रता-सूत्र $\kappa = d\theta/ds$ का केवल रैखिकीकरण है।

इस प्रकार वक्रता की कथा गणितीय भौतिकी का गहन प्रतिरूप दर्शाती है: **अपने लिए विकसित अमूर्त ज्यामितीय अंतर्दृष्टियाँ बाद में भौतिक वास्तविकता के वर्णन के लिए अपरिहार्य सिद्ध होती हैं।** न्यूटन के स्पर्शी वृत्त, हाइगेन्स के केंद्रज और बर्नूली परिवार की अवकल ज्यामिति संरचनात्मक समस्याओं को हल करने के लिए नहीं बनाए गए थे—फिर भी उनके बिना संरचनाओं का आधुनिक सिद्धांत अस्तित्व में नहीं हो सकता था। हाइगेन्स ने बेहतर घड़ी बनाने के लिए केंद्रज विकसित किए; याकोब बर्नूली ने पहचाना कि वही ज्यामितीय यंत्रावली धरनों के बंकन का वर्णन कर सकती है। समय-मापन

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

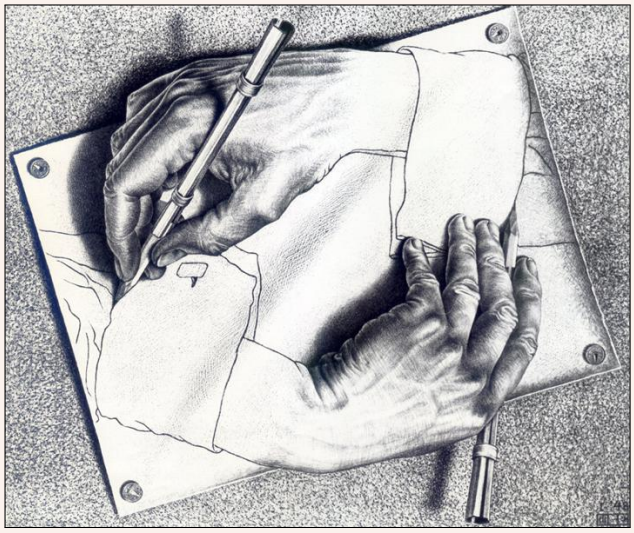
और संरचनात्मक यांत्रिकी के बीच यह पर-निषेचन दर्शाता है कि गणितीय साधन अपने मूल अनुप्रयोगों को कैसे पार कर जाते हैं।

8.5 आगामी दिशा:

अध्याय 9 में हम देखेंगे कि इन ज्यामितीय साधनों ने संरचनात्मक यांत्रिकी को परिभाषित करने वाली दो समस्याओं—कैटेनरी और इलास्टिका—का समाधान कैसे संभव बनाया। ये ज्यामितीय रचना से वैश्लेषिक समाधान की ओर, वक्रों को अमूर्त रूप में समझने से भारित संरचनात्मक अवयवों के व्यवहार का पूर्वानुमान करने की ओर निर्णायक परिवर्तन चिह्नित करती हैं। यहाँ इस अध्याय में स्थापित ज्यामितीय अंतर्दृष्टियाँ लटकती शृंखलाओं और बंकित छडों की भौतिक वास्तविकता से मिलती हैं और संरचनात्मक यांत्रिकी के इतिहास के कुछ सर्वाधिक सुरुचिपूर्ण तथा व्यावहारिक रूप से महत्त्वपूर्ण परिणामों तक ले जाती हैं।

कैटेनरी समस्या दर्शाएगी कि वक्रता नम्य केबल में आंतरिक तनन-वितरण से कैसे संबंधित है। इलास्टिका प्रदर्शित करेगी कि वक्रता आरोपित भारों और प्रत्यास्थ छड के परिणामी विरूपित आकार के बीच संबंध को कैसे नियंत्रित करती है। दोनों समस्याओं की गणितीय संरचना समान है: ऐसा अवकल समीकरण जो वक्रता के ज्यामितीय गुण को यांत्रिक राशियों (तनन, आघूर्ण, भार) से संबंधित करता है। याकोब बर्नूली द्वारा पहली बार पहचानी और ऑयलर द्वारा औपचारिक की गई यह संरचना आज भी संरचनात्मक विश्लेषण के केंद्र में है।

ये चुनौतियाँ यह भी प्रकट करेंगी कि पूर्ववर्ती अध्यायों के सामर्थ्य-सिद्धांतों और अभी स्थापित ज्यामितीय आधारभूमि दोनों पर निर्माण करते हुए विरूपित आकारों का अध्ययन संरचनात्मक व्यवहार की पूर्ण समझ के लिए क्यों अनिवार्य बना। यह जानना अपर्याप्त है कि कोई संरचना दिया गया भार सह सकती है—हमें यह भी पूर्वानुमान करना चाहिए कि वह कितना विरूपित होगी और क्या वह विरूपण उसके अभिप्रेत कार्य के लिए स्वीकार्य रहेगा।



एम.सी. एशर, ड्रॉइंग हैंड्स (1948)

आत्म-संदर्भित वक्र और असंभव ज्यामितियाँ—कलात्मक विरोधाभास द्वारा दृश्य बनाया गया गणित।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9 महान चुनौतियाँ: कैटेनरी, इलास्टिका और वैश्लेषिक यांत्रिकी का जन्म

सारांश

यह अध्याय यांत्रिकी की तथाकथित "महान चुनौतियों" के विकास का परीक्षण करता है, जिन्होंने सत्रहवीं और अठारहवीं शताब्दियों में गणित तथा अभियांत्रिकी की निर्णायक प्रगतियों को प्रेरित किया। 1690 के दशक की कैटेनरी समस्या से आरंभ होकर—जिसे याकोब बर्नूली ने प्रस्तुत किया, किंतु लाइबनित्स, योहान बर्नूली और हाइगेन्स ने हल किया—यह रेखांकित करता है कि वास्तविक भौतिक समस्या पर कलन के अनुप्रयोग ने नए विश्लेषण की शक्ति कैसे प्रदर्शित की। याकोब बर्नूली की परवर्ती इलास्टिका चुनौती ने एक और निर्णायक मोड चिह्नित किया और गणित को विचरण-कलन की ओर प्रेरित किया, जिसे पहले डैनियल बर्नूली ने सूत्रबद्ध और फिर ऑयलर ने परिष्कृत किया। 1724 की अनाम चुनौती ने सामान्य बलों के अधीन नम्य और प्रत्यास्थ रेखाओं के समाधान माँगकर अन्वेषण-क्षेत्र विस्तृत किया और पुनः डैनियल बर्नूली तथा ऑयलर के योगदान आकर्षित किए। अंततः स्तंभ-व्याकुंचन पर ऑयलर के 1759 के संस्मरण ने ज्यामितीय कौतूहल को संरचनात्मक स्थायित्व के केंद्रीय परिणाम में रूपांतरित किया।

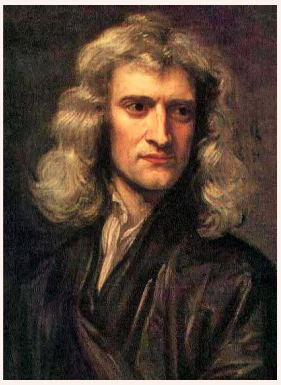
अध्याय की परिणति ऑयलर के 1771 के ग्रंथ Genuina principia में होती है, जहाँ उन्होंने इन पृथक धाराओं को विरूपणीय रेखाओं के व्यापक सिद्धांत में एकीकृत किया। रेखा-साम्यावस्था की "सामान्य समस्या" प्रस्तुत करके ऑयलर ने स्पर्शरेखीय तथा अभिलंब बल-परिणामियों और बंकन आघूर्ण की अवधारणाओं को औपचारिक किया तथा यांत्रिक संतुलन-नियमों को संघटनात्मक संबंधों से पृथक किया। उनके संश्लेषण ने शृंखला, छड और स्तंभ की शास्त्रीय समस्याओं को न केवल अपने भीतर समाहित किया, बल्कि सातत्य यांत्रिकी के नियंत्रक ढाँचे का पूर्वाभास भी दिया। आख्यान दर्शाता है कि ज्यामितिविदों के बीच प्रतियोगिताओं के रूप में प्रस्तुत चुनौतियों ने अंततः ऐसी सार्वभौमिक कार्यपद्धति उत्पन्न की जो आज भी पुलों और मीनारों से लेकर पदार्थों तथा जैविक निकायों तक संरचनात्मक विश्लेषण की आधारभूमि है।

इस पुस्तक के सभी अध्यायों में यह अध्याय लिखने में सबसे अधिक कठिन और जटिल सिद्ध हुआ, किंतु बौद्धिक दृष्टि से सर्वाधिक फलदायक तथा आनंददायक भी रहा।

9.1 गणितीय आधारभूमि: ज्यामिति से कलन तक 268
9.1.1 यूनानी विरासत: यूक्लिड से ज्यामितीय-यांत्रिक विभाजन तक 268
9.1.2 देकार्त की क्रांति: निर्देशांक और बीजगणित 269
9.1.3 कलन की क्रांति 269
9.1.4 वक्रों से यांत्रिकी तक: सेतु . . . 269
9.1.5 रूपांतरण की पूर्णता 270
9.1.6 गणितीय संकेत-पद्धति 271
9.2 कैटेनरी चुनौती (मई 1690-जून 1691) . . . 271
9.2.1 आरंभिक अध्ययन 272
9.2.2 चुनौतियाँ 276
9.2.3 तीन प्रमुख समाधान 279
9.2.4 उपसंहार 285
9.3 इलास्टिका चुनौती (1690-1744) 286
9.3.1 याकूब बर्नूली की चुनौती (1690) 286
9.3.2 समाधान 291
9.3.3 प्रथम दो चुनौतियों का कालानुक्रमिक सार 327
9.4 एक अज्ञात चुनौती: समस्याओं के बीच सेतु (1724) 329
9.4.1 बर्नूली-ऑयलर सहयोग: प्रथम एकीकरण (1728) 330
9.5 व्याकुंचन सिद्धांत: प्रेक्षण से निर्णायक भारों तक 338
9.5.1 आरंभिक कार्य 338
9.5.2 ऑयलर (1759) 340
9.6 ऑयलर का सामान्य सिद्धांत: पूर्ण एकीकरण (1771) 344
9.7 निष्कर्ष 347

प्रारूप संस्करण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) आइज़क न्यूटन (1643–1727)



(b) क्रिस्टियान हाइगेन्स (1629–1695)



(c) रेने (René) देकार्त (1596–1650)

चित्र 9.1: इलास्टिका के प्रमुख व्यक्तित्व

9.1 गणितीय आधारभूमि: ज्यामिति से कलन तक

लटकती शृंखलाओं, बंकित छडों और व्याकुंचित स्तंभों की महान समस्याओं की ओर बढने से पूर्व हमें सत्रहवीं शताब्दी का परिदृश्य स्थापित करना चाहिए: ज्यामितीय रचना से वैश्लेषिक गणना की ओर एक मूलभूत परिवर्तन, जिसने इन यांत्रिक वक्रों को हल करने योग्य बनाया।

9.1.1 यूनानी विरासत: यूक्लिड से ज्यामितीय-यांत्रिक विभाजन तक

17वीं शताब्दी के अन्वेषकों को विरासत में मिली गणितीय परंपरा यूक्लिड की *The Elements* (c. 300 BCE) तक जाती थी, जिसने ज्यामिति को सरलपट्टी और परकार द्वारा रचे जा सकने वाले आकारों के विज्ञान के रूप में स्थापित किया। यूक्लिड का उपागम—जिसका उदाहरण tangency की उनकी यह परिभाषा है कि स्पर्शरेखा वृत्त को काटे बिना ठीक एक बिंदु पर स्पर्श करती है—रेखाओं, वृत्तों और उनके प्रतिच्छेदों के लिए शक्तिशाली विधियाँ देता था, किंतु अधिक जटिल वक्रों के लिए कोई सामान्य उपागम नहीं देता था।

प्राचीन काल से यूनानी गणितज्ञों ने *ज्यामितीय* वक्रों—जो straightedge and compass द्वारा रचे जा सकते थे और सामान्यतः सरल बीजीय संबंधों से निरूपित होते थे—को *गति अथवा युक्तियों* से उत्पन्न *यांत्रिक* वक्रों (चक्रज, सर्पिल, क्वाड्रेट्रिक्स) से पृथक माना।[1] बाद वाले वक्र प्रायः "शुद्ध" ज्यामिति से बाहर माने जाते थे; वे विशिष्ट समस्याओं को हल करने के लिए स्वीकार्य थे, किंतु सैद्धांतिक विधान से अपवर्जित थे।

ऐतिहासिक संदर्भ यह कार्य *Acta Eruditorum* में बर्नूली के 1691 के विपर्यय पर आधारित है, जिसने उनकी विधि छिपाते हुए प्राथमिकता स्थापित की। विकूटित विपर्यय बाद में प्रकट किए गए परिशुद्ध ज्यामितीय संबंध को बताता है, न कि व्युत्क्रम बंकन-आघूर्ण/वक्रता नियम को, जैसा कुछ साहित्य में त्रुटिपूर्वक उद्धृत किया गया है (§6.11.1.1)।

यह सीमा लगभग दो सहस्राब्दियों तक बनी रही। संरचनात्मक यांत्रिकी पर प्रभुत्व स्थापित करने वाले वक्र—कैटेनरी, इलास्टिका, केंद्रज—दृढता से यांत्रिक श्रेणी में थे, जिससे वे शास्त्रीय ज्यामितीय विधियों के प्रति प्रतिरोधी रहे।

[1] यह "ज्यामितीय-यांत्रिक विभाजन" ज्यामिति और यांत्रिकी के अनुशासनों के बीच पृथक्करण को नहीं, बल्कि वक्रों के यूनानी वर्गीकरण को दर्शाता है—या तो शुद्ध ज्यामितीय सिद्धांत से संबंधित (यूक्लिडीय विधियों द्वारा रचनीय), अथवा व्यावहारिक समस्या-समाधान से संबंधित (यांत्रिक युक्ति अथवा गति आवश्यक)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9.1.2 देकार्त की क्रांति: निर्देशांक और बीजगणित

इस आधार में पहली दरार तब आई जब Descartes, 1637b ने तर्क दिया कि यदि ज्यामिति सामान्य रूप से परिमाणों को मापती है तो अधिक जटिल वक्रों को अपवर्जित करने का कोई कारण नहीं है।[2]

वैश्लेषिक ज्यामिति—निर्देशांक और बीजगणित—ने बीजीय प्रकलन को बिंदुपथों की कार्यभाषा बना दिया। अचानक वक्रों को समीकरणों $F(x,y)=0$ के समाधान के रूप में देखा जा सकता था और ज्यामितीय गुण बीजीय गणना द्वारा व्युत्पन्न किए जा सकते थे। इससे ज्यामितीय और यांत्रिक वक्रों के बीच प्राचीन सीमा धुँधली हुई, किंतु स्पर्शरेखाओं, क्षेत्रफलों और जटिल परातीत वक्रों की सामान्य विधि के लिए अभी एक गहरी सफलता की प्रतीक्षा थी।

9.1.3 कलन की क्रांति

सत्रहवीं शताब्दी के मध्य के विकासों—कावालिएरी के अविभाज्य, टॉरिचेली के क्षेत्रकलन, वालिस के अनंत गुणनफल, बैरो की स्पर्शरेखा–क्षेत्र द्वैतता, फर्मा की स्पर्शरेखा-विधियाँ—ने भूमिका तैयार की। निर्णायक छलाँग लाइबनित्स और न्यूटन के अवकल कलन से आई, जिसे बर्नूली परिवार, हाइगेन्स और ऑयलर ने परिष्कृत किया।

लाइबनित्स ने अपने विवादात्मक *Historia et Origo Calculi Differentialis* (Leibniz, 1858), चित्र 9.2, में इस रूपांतरण का विस्तार व्यक्त किया। न्यूटन के साथ प्राथमिकता-विवाद को अलग रखने पर उनका तकनीकी दावा क्रांतिकारी था:

> अब लाइबनित्स के कलन द्वारा संपूर्ण ज्यामिति वैश्लेषिक गणना के अधीन हो गई है और जिन परातीत रेखाओं को देकार्त ने यांत्रिक कहा था, वे भी उनके अनुकूल चुने गए समीकरणों में सीमित हो गई हैं; इसके लिए अंतरों dx, ddx, आदि तथा उन योगों को, जो इन अंतरों के प्रतिलोम हैं, x के फलनों के रूप में देखा जाता है; और यह केवल कलन प्रस्तुत करने से होता है, जबकि इससे पूर्व x, xx, x^3, $\sqrt{x}$, आदि, अर्थात घातों और मूलों के अतिरिक्त कोई अन्य फलन स्वीकार्य नहीं थे।
>
> Leibniz, 1858, translated by Child, 1920

न्यूटन के प्राथमिकता-विवाद में पक्षपाती होने पर भी उनका विवरण उस गणितीय क्रांति को सही रूप में ग्रहण करता है जिसने परातीत वक्रों को वैश्लेषिक रूप से हल करने योग्य बनाया।

लाइबनित्स और न्यूटन दोनों ने भिन्न उपागमों (अवकल बनाम *fluxions*) के माध्यम से समान सफलता प्राप्त की: परातीत वक्र—जो पूर्व में केवल ज्यामितीय रचना अथवा संख्यात्मक सन्निकटन से सुलभ थे—यथार्थ वैश्लेषिक विवेचन के विषय बन गए।

9.1.4 वक्रों से यांत्रिकी तक: सेतु

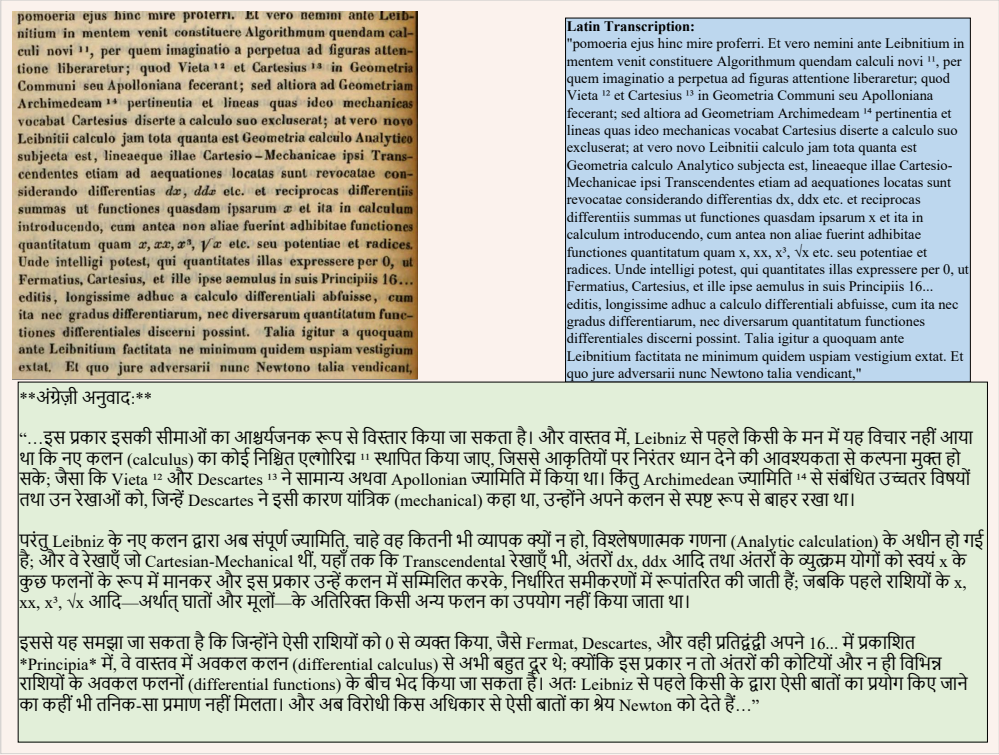
अठारहवीं शताब्दी में, विशेषतः ऑयलर की *Introductio in analysin infinitorum* द्वारा, फलन की आधुनिक अवधारणा क्रमबद्ध वक्र-प्राचलीकरण के साथ परिपक्व हुई। समतलीय वक्र $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ के लिए:

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad \text{(arc-length speed)} \tag{9.1}$$

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad \text{(signed curvature)} \tag{9.2}$$

[2]विडंबना यह है कि देकार्त के हल किए गए उदाहरण फिर भी निम्न-घात के बीजीय वक्रों को प्राथमिकता देते थे; cf. Palomo, 2017।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi [11], per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur; quod Vieta [12] et Cartesius [13] in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant; sed altiora ad Geometriam Archimedeam [14] pertinentia et lineas quas ideo mechanicas vocabat Cartesius diserte a calculo suo excluserat; at vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae ipsi Transcendentes etiam ad aequationes locatas sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum quam $x, xx, x^3, \sqrt{x}$ etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius, et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum, nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant,

Latin Transcription:
"pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi [11], per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur; quod Vieta [12] et Cartesius [13] in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant; sed altiora ad Geometriam Archimedeam [14] pertinentia et lineas quas ideo mechanicas vocabat Cartesius diserte a calculo suo excluserat; at vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae ipsi Transcendentes etiam ad aequationes locatas sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum quam x, xx, x^3, √x etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius, et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum, nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant,"

अंग्रेज़ी अनुवाद:

"...इस प्रकार इसकी सीमाओं का आश्चर्यजनक रूप से विस्तार किया जा सकता है। और वास्तव में, Leibniz से पहले किसी के मन में यह विचार नहीं आया था कि नए कलन (calculus) का कोई निश्चित एल्गोरिद्म [11] स्थापित किया जाए, जिससे आकृतियों पर निरंतर ध्यान देने की आवश्यकता से कल्पना मुक्त हो सके; जैसा कि Vieta [12] और Descartes [13] ने सामान्य अथवा Apollonian ज्यामिति में किया था। किंतु Archimedean ज्यामिति [14] से संबंधित उच्चतर विषयों तथा उन रेखाओं को, जिन्हें Descartes ने इसी कारण यांत्रिक (mechanical) कहा था, उन्होंने अपने कलन से स्पष्ट रूप से बाहर रखा था।

परंतु Leibniz के नए कलन द्वारा अब संपूर्ण ज्यामिति, चाहे वह कितनी भी व्यापक क्यों न हो, विश्लेषणात्मक गणना (Analytic calculation) के अधीन हो गई है; और वे रेखाएँ जो Cartesian-Mechanical थीं, यहाँ तक कि Transcendental रेखाएँ भी, अंतरों dx, ddx आदि तथा अंतरों के व्युत्क्रम योगों को स्वयं x के कुछ फलनों के रूप में मानकर और इस प्रकार उन्हें कलन में सम्मिलित करके, निर्धारित समीकरणों में रूपांतरित की जाती हैं; जबकि पहले राशियों के x, xx, x^3, √x आदि—अर्थात् घातों और मूलों—के अतिरिक्त किसी अन्य फलन का उपयोग नहीं किया जाता था।

इससे यह समझा जा सकता है कि जिन्होंने ऐसी राशियों को 0 से व्यक्त किया, जैसे Fermat, Descartes, और वही प्रतिद्वंद्वी अपने 16... में प्रकाशित *Principia* में, वे वास्तव में अवकल कलन (differential calculus) से अभी बहुत दूर थे; क्योंकि इस प्रकार न तो अंतरों की कोटियों और न ही विभिन्न राशियों के अवकल फलनों (differential functions) के बीच भेद किया जा सकता है। अतः Leibniz से पहले किसी के द्वारा ऐसी बातों का प्रयोग किए जाने का कहीं भी तनिक-सा प्रमाण नहीं मिलता। और अब विरोधी किस अधिकार से ऐसी बातों का श्रेय Newton को देते हैं..."

चित्र 9.2: कलन के विस्तार पर लाइबनित्स (Leibniz, 1858, p. 2–3)।

curvature κ स्पर्शी-वृत्त की त्रिज्या का व्युत्क्रम है और वक्र के स्थानीय 11बंकन" को निरूपित करती है। यह ज्यामितीय राशि संघटनात्मक नियमों के माध्यम से यांत्रिकी की निर्णायक कडी बनती है।

प्रत्यास्थ छड के लिए ज्यामिति को बल से जोडने वाला मूलभूत संबंध है:

$$M = EI\kappa \tag{9.3}$$

जहाँ M बंकन आघूर्ण, E पदार्थ-मापांक, I क्षेत्रफल का द्वितीय आघूर्ण (ज्यामितीय रूप से निर्धारित) और κ वक्रता है। ऐतिहासिक रूप से यह $M = \mathfrak{B}/R$ अथवा $M = Ek^2\kappa$ के रूप में प्रकट हुआ, जिसमें "बंकन मापांक" के लिए विविध संकेत-पद्धतियाँ थीं।

यह भ्रामक रूप से सरल समीकरण ज्यामितीय वक्र-सिद्धांत को संरचनात्मक यांत्रिकी में रूपांतरित करता है। कैटेनरी तब उभरती है जब $EI \to 0$ (पूर्णतः नम्य रस्सी); इलास्टिका तब जब EI परिमित हो (बंकनीय किंतु अविस्तरणीय छड); और व्याकुंचन तब जब अक्षीय भार बंकन-दृढता से अंतःक्रिया करते हैं।

9.1.5 रूपांतरण की पूर्णता

गणितीय क्रांति गहन थी:

- **बीजीय बनाम परातीत वक्र**: बीजीय वक्र बहुपदी संबंधों $F(x, y) = 0$ (वृत्त, दीर्घवृत्त, परवलय) को संतुष्ट करते हैं। कैटेनरी, इलास्टिका और उनके केंद्रज परातीत हैं—ठीक वे वक्र जिन्हें कलन ने हल करने योग्य बनाया।
- **रचना से विश्लेषण तक**: जहाँ यूनानी और मध्यकालीन गणितज्ञ परकार और सरलपट्टी सहित ज्यामितीय रचना का उपयोग करते थे, नए विश्लेषण ने अवकल समीकरणों और समाकलन द्वारा समस्याएँ हल कीं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **शुद्ध और अनुप्रयुक्त का एकीकरण**: अमूर्त वक्रों के गुण प्रकट करने वाले उन्हीं गणितीय साधनों ने तात्कालिक अभियांत्रिकी समस्याएँ—लटकती शृंखलाएँ, धरन-विक्षेप, स्तंभ-स्थायित्व—भी हल कीं।

इस आधारभूमि के साथ हम समझ सकते हैं कि कैटेनरी, इलास्टिका और व्याकुंचन की समस्याएँ 17वीं शताब्दी के उत्तरार्ध और 18वीं शताब्दी के आरंभ के गणित की “महान चुनौतियाँ” क्यों बनीं। वे केवल अमूर्त अभ्यास नहीं, बल्कि इस बात की परीक्षाएँ थीं कि क्या नया कलन उन यांत्रिक वक्रों को वास्तव में नियंत्रित कर सकता है जिन्होंने सहस्राब्दियों तक विश्लेषण का प्रतिरोध किया था।

जैसा हम देखेंगे, याकोब और योहान बर्नूली, ऑयलर तथा उनके समकालीनों द्वारा इन समस्याओं के समाधानों ने केवल विशिष्ट अभियांत्रिकी प्रश्न ही हल नहीं किए—उन्होंने आधुनिक संरचनात्मक यांत्रिकी की गणितीय आधारभूमि स्थापित की और गणितीय भौतिकी में वैश्लेषिक विधियों की अभूतपूर्व शक्ति प्रदर्शित की।

9.1.6 गणितीय संकेत-पद्धति

गणितीय संकेत-पद्धति का विकास वैचारिक विकासों के समानांतर हुआ। भिन्न अग्रदूतों ने प्रतिस्पर्धी प्रतीकात्मक प्रणालियाँ विकसित कीं और उनकी संकेत-पद्धति की समझ प्राथमिक स्रोत पढ़ने में सहायक होती है, सारणी 9.1।

तालिका 9.1: अवकलन & समाकलन के चिह्न

	अवकलन	समाकलन (प्रतिअवकलन)
लाइबनित्स	$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$	$\int y\,dx$
लाग्रांज	$f'(x)$, $f''(x)$, …	$\int \cdot\,dx$
ऑयलर	$D_x y$, $D_x^2 y$	$\int \cdot\,dx$
न्यूटन	$\dot{x}$, $\ddot{x}$ (समय-दरें)	$\dot{x}$ का “फ्लुएंट” (समय-समाकल); न्यूटन ने अपनी संकेत-पद्धति में $\int$ का उपयोग नहीं किया

टिप्पणियाँ: (i) लाग्रांज ने क्षेत्रकलन के लिए नियमित रूप से प्राइम और $\int$ का उपयोग किया; औपचारिक प्रतिलोम-अवकलज संकारक (D^{-1}) बाद का है। (ii) ऑयलर ने विविध संदर्भों में लाइबनित्सीय $\int$ और अवकल संकारक D_x दोनों का उपयोग किया। (iii) न्यूटन के फ्लक्सन/फ्लुएंट समय-आधारित थे; यांत्रिकी के परस्पर संदर्भ में उन्हें आधुनिक $\frac{d}{dt}$ और $\int dt$ से मानचित्रित करें।

9.2 कैटेनरी चुनौती (मई 1690-जून 1691)

17वीं शताब्दी के उत्तरार्ध में catenary अध्ययनों का इतिहास आधुनिक (शैक्षणिक) पाठक के लिए आकर्षक है। यह तीन महान व्यक्तियों (लाइबनित्स, हाइगेन्स और बर्नूली बंधुओं) की प्रतिस्पर्धा, अहं (लाइबनित्स द्वारा “अपने” कलन की सर्वोच्चता सिद्ध करने की इच्छा), गुप्त संचार (कूटलेखों का व्यापक उपयोग), निजी संचार (लाइबनित्स और हाइगेन्स के बीच), ईर्ष्या (याकोब और योहान बर्नूली के बीच), प्रकाशन-दबाव (*Acta Eruditorium* के संपादक द्वारा), और बहुत कुछ की कथा है।

कैटेनरी ने एक मूलभूत चुनौती प्रस्तुत की: यह वैश्लेषिक समाधान चाहने वाला पहला transcendental curve था और इस प्रकार पारंपरिक ज्यामितीय विधियों के विरुद्ध नए कलन की निर्णायक परीक्षा बना। परकार और सरलपट्टी द्वारा रचनीय बीजीय वक्रों के विपरीत लटकती शृंखला के अनंत अवतलन का अर्थ था कि कोई सरल ज्यामितीय रचना उसका आकार निर्धारित नहीं कर सकती थी। समस्या में अज्ञात रूप के वक्र के अनुदिश बलों को संतुलित करना आवश्यक था—ठीक उस प्रकार की चुनौती जिसके लिए लाइबनित्स और न्यूटन द्वारा विकसित अवकल विधियाँ आवश्यक थीं।

बर्नूली परिवार के लिए, चित्र 6.16, यह "पारिवारिक विषय" था, क्योंकि सभी प्रमुख व्यक्ति किसी न किसी रूप में जुड़े थे: हाइगेन्स लाइबनित्स के गुरु थे; लाइबनित्स याकोब बर्नूली के परामर्शदाता थे; याकोब, योहान बर्नूली के भ्राता थे; और योहान, डैनियल बर्नूली के पिता तथा ऑयलर के परामर्शदाता थे।

अतः यह परिचित होने योग्य कथा है।

9.2.1 आरंभिक अध्ययन

बर्नूली और ऑयलर के कार्य से पूर्व लटकती शृंखला की समस्या पहले ही अनेक विद्वानों का ध्यान आकर्षित कर चुकी थी।

9.2.1.1 लियोनार्दो

माना जाता है कि यह समस्या पहली बार तब प्रकट हुई जब लियोनार्दो दा विंची ने अपनी टिप्पण-पुस्तिकाओं में कुछ लटकती शृंखलाओं के रेखाचित्र बनाए, चित्र 9.3। किंतु अधिक संभावना है कि वे आकार की अपेक्षा उसके गुरुत्व-केंद्र की खोज कर रहे थे। फिर भी हम प्रायः दा विंची को अनेक अनुचित खोजों का श्रेय देना पसंद करते हैं। बाद में गैलीलियो ने समस्या पर विचार किया और पूर्वकल्पना की कि आकार परवलय होगा। स्टेविन, हाइगेन्स और अन्य विद्वानों ने इस धारणा का "खंडन"

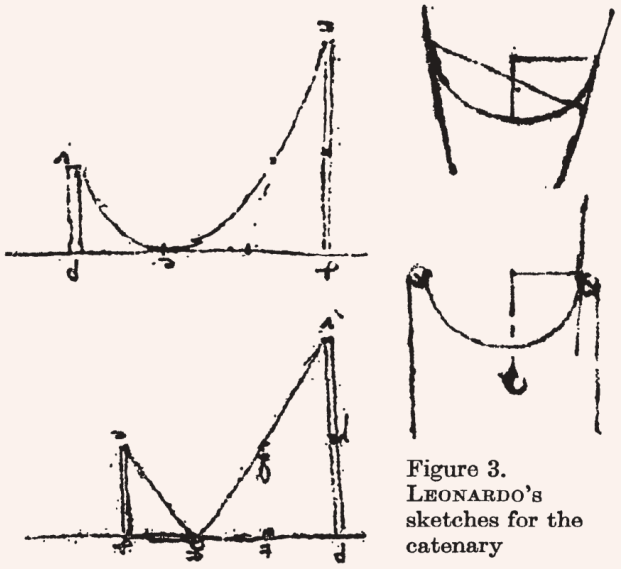


Figure 3. LEONARDO'S sketches for the catenary

चित्र 9.3: (Truesdell, 1960) से कैटेनरी के लिए लियोनार्दो के रेखाचित्र

किया। किंतु यद्यपि उन सभी ने दर्शाया कि वक्र परवलय नहीं है, वे यह नहीं बता सके कि लटकती शृंखला का वास्तविक आकार क्या है। इसके लिए याकोब बर्नूली की चुनौती की प्रतीक्षा करनी पड़ी।

9.2.1.2 गैलीलियो

1614 में फ्लेमिश गणितज्ञ आइज़क बीकमैन (1588–1637) ने अपनी टिप्पण-पुस्तिका में एक लटकती डोरी ("किसी धरन से एक डोरी लटकने दें... सिरों पर इस प्रकार जुड़ी कि वह ढीली और स्वतंत्र रूप से लटके") का रेखाचित्र बनाया; उन्होंने देकार्त के समक्ष भी प्रश्न रखा। देकार्त के पत्रों में एक सीमांत टिप्पणी है जो "Isaacus Middelburgensis [Beeckman]" द्वारा

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पूछे गए इस प्रश्न का उल्लेख करती है कि क्या कीलों से स्थिर डोरी किसी शंकु-वक्र के भाग का अनुरेखण कर सकती है। किंतु ऐसा कोई संकेत नहीं है कि देकार्त ने समाधान खोजा अथवा बीकमैन से आगे उसकी चर्चा की।[3]

बाद में 1638 में Galilei, 1638 ने भी समस्या की जाँच की और बिना किसी औपचारिक विश्लेषण के कहा:

> सुविधाजनक ऊँचाई पर और समान स्तर पर दीवार में दो कीलें ठोकें; इन कीलों के बीच दूरी उस आयत की चौडाई की दुगुनी रखें जिस पर अर्ध-परवलय अनुरेखित करना है। इन दोनों कीलों पर ऐसी लंबाई की हल्की शृंखला लटकाएँ कि उसके अवतलन की गहराई प्रिज्म की लंबाई के बराबर हो। यह शृंखला परवलय का रूप ग्रहण करेगी; अतः यदि यह रूप दीवार पर बिंदुओं द्वारा अंकित किया जाए तो हमने पूर्ण परवलय का अनुरेखण कर लिया होगा, जिसे दोनों कीलों के मध्यबिंदु से होकर ऊर्ध्वाधर रेखा खींचकर दो समान भागों में विभाजित किया जा सकता है।
>
> Galilei, 1638 *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*

यह ध्यान देना चाहिए कि गैलीलियो ने प्रक्षेप्य का प्रक्षेप-पथ परवलयी दर्शाने के बाद माना कि कैटेनरी का आकार भी समान होगा।

9.2.1.3 स्टेविन; (1634)

यह समस्या स्टेविन (1548–1620) की कृतियों में भी प्रकट हुई, जिनकी *Les Oeuvres Mathématiques* गणितज्ञ अल्बर्ट गिरार्ड की टिप्पणियों सहित 1634 में मरणोपरांत प्रकाशित हुई। स्थैतिकी की सामग्री में स्टेविन रस्सियों से संबंधित समस्याओं का विवेचन करते हैं; एक सीमांत टिप्पणी में गिरार्ड कहते हैं:

> *... क्योंकि अन्य ढीली अथवा तनी रस्सियाँ परवलयी रेखाएँ होती हैं (जैसा मैंने पहले 1617 के आसपास सिद्ध किया था), जैसा मैं आगे निम्नलिखित उपप्रमेय के अंत में सिद्ध करूँगा।*
>
> Stevin, 1987 *Les oeuvres mathématiques*, p. 508

1617 का कोई पूर्ववर्ती प्रमाण उपलब्ध नहीं है। स्टेविन के उपप्रमेय के बाद गिरार्ड, (Girard, 1634), पूर्ण तर्क बाद में प्रकाशित करने का एक और आश्वासन (जिसका द्वितीयक साहित्य में प्रायः उल्लेख होता है) जोडते हैं:

> अंतिम उपप्रमेय से पूर्व किए अपने आश्वासन को पूरा करने के लिए, और वर्तमान में अपने संपूर्ण प्रमाण की प्रति यहाँ सम्मिलित करने का अवकाश न होने के कारण, ईश्वर की इच्छा से मैं इसे अपनी अन्य कृतियों के साथ किसी अन्य समय सार्वजनिक करूँगा, जब विज्ञानों का अध्ययन आज की अपेक्षा अधिक अनुकूल रूप से स्वीकार किया जाएगा।
>
> Stevin, 1987 *Les oeuvres mathématiques*, p. 508 *(paraphrase of Girard's French)*

ऐसा कोई प्रमाण प्रकाशित नहीं हुआ और 1634 का संस्करण जारी होने तक गिरार्ड स्वयं दिवंगत हो चुके थे।[4][5]

[3] Bukowski, 2008 देखें; cf. Truesdell, 1960। प्राथमिक स्रोतों के लिए बीकमैन का *Journal* (संपा. de Waard) और *Oeuvres de Descartes* (संपा. Adam–Tannery) (Beeckman, 1939), (Descartes, 1897a) देखें।

[4] चर्चा के लिए (Bukowski, 2008) और (Truesdell, 1960) देखें।

[5] फर्मा की "अत्यधिक संकीर्ण हाशिया" टिप्पणी से प्रायः की जाने वाली तुलना के विषय में: फर्मा की टिप्पणी *c.* 1637 की है और डायोफैंटस के 1670 के मरणोपरांत संस्करण में प्रकाशित हुई थी, 1630 में नहीं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9.2.1.4 हाइगेन्स (c. 1646)

हाइगेन्स (कॉन्स्टेंटाइन) के पिता गिरार्ड (जिन्होंने स्टेविन के कार्य पर टिप्पणियाँ की थीं) के परिचित थे और फ्रांसीसी भिक्षु मारिन मेर्सेन (1588–1648) से पत्राचार करते थे (Bukowski, 2008)। मेर्सेन को प्रायः गणितीय और वैज्ञानिक विचारों का सूचना-केंद्र कहा जाता है, क्योंकि उनका संपूर्ण यूरोप के अनेक श्रेष्ठ चिंतकों से पत्राचार था। गौरवान्वित पिता के रूप में कॉन्स्टेंटाइन हाइगेन्स अपने प्रतिभाशाली सत्रह वर्षीय पुत्र क्रिस्टियान के विषय में मेर्सेन को बताकर प्रसन्न थे।

1640 के दशक में युवा हाइगेन्स (तब किशोर) ने मेर्सेन को लिखा (Huygens, 1888b, p. 28):

> मैं आपको दूसरे पत्र में यह प्रमाण भेजूँगा कि लटकती डोरी अथवा शृंखला परवलय नहीं बनाती और उसे परवलय बनाने के लिए गणितीय डोरी अथवा भारहीन डोरी पर कितना दाब होना चाहिए; मैंने ऐसा प्रमाण कुछ समय पूर्व ही खोजा है।
>
> Huygens, 1888b *Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1*, p. 28

वास्तव में हाइगेन्स ने मेर्सेन को लिखा:

> *Nulla ergo catena pendet secundum lineam parabolicam.* (अतः कोई शृंखला परवलयी रेखा के अनुसार नहीं लटकती।)
>
> Huygens, 1888b *Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1*

किंतु वे वक्र का वास्तविक आकार निर्धारित नहीं कर सके।

चूँकि लटकती शृंखला स्वयं परवलय नहीं है, हाइगेन्स कहते हैं कि उन्होंने कुछ बाह्य बलों की सहायता से शृंखला को परवलय का आकार देने का उपाय खोज लिया है। लटकती शृंखला पर हाइगेन्स के दावे से उत्सुक मेर्सेन ने 16 नवंबर को प्रमाण देखने की इच्छा व्यक्त करते हुए उत्तर दिया

> ... कि अपने भार के अधीन मध्य में लटकती शृंखला अथवा तनी डोरी परवलय नहीं बनाती, जैसा गैलीलियो ने प्रतिपादित किया था...

वे हाइगेन्स के अतिरिक्त प्रमाण को देखने की इच्छा भी व्यक्त करते हैं और एक कदम आगे बढ़कर कहते हैं कि वे यह देखना चाहते हैं कि

> उपर्युक्त परवलय बनाने के लिए दाब कितना होना चाहिए, और यदि आप आवश्यकतानुसार उसे अतिपरवलय तथा दीर्घवृत्त बनाने का दाब भी जोड़ दें तो आप स्वयं को पार कर जाएँगे।

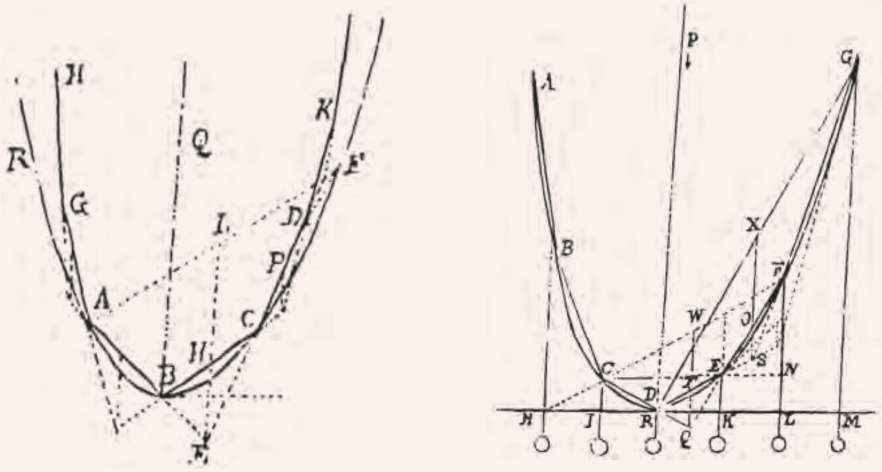
उसी महीने बाद में हाइगेन्स ने लटकती शृंखला से संबंधित अपने दावों के पूर्ण प्रमाण सहित मेर्सेन को उत्तर दिया।

हाइगेन्स का समाधान पूर्णतः ज्यामितीय है, चित्र 9.4a (Huygens, 1888b)। रोचक है कि उन्होंने क्षैतिज प्रक्षेप पर समान अंतरालों पर समान भार लटकाकर शृंखला को परवलय बनने के लिए "बाध्य" किया (स्वयं डोरी के अनुदिश समान अंतरालों के विपरीत)। यह एक निर्णायक भेद दर्शाता है: कैटेनरी (अपने भार के अधीन एकसमान शृंखला) परवलयी निलंबन-पुल केबल (क्षैतिज रूप से वितरित एकसमान भार) से भिन्न होती है। हाइगेन्स ने दोनों रूप खोजे और उनके भिन्न भौतिक उद्गम समझे थे। यह वास्तव में वह पहली खोज हो सकती है कि निलंबन-पुल की सहायक केबलें परवलयी होती हैं!

हाइगेन्स के समाधान की विस्तृत व्याख्या (Bukowski, 2008) में मिलती है।

अनुवाद प्रगति पर है

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) लटकती शृंखला समस्या का सूत्रीकरण (प्रस्ताव 8)

(b) शृंखला को परवलय के रूप में लटकने के लिए बाध्य करना (प्रस्ताव 11)

चित्र 9.4: कैटेनरी; क्रिस्टियान हाइगेन्स (Huygens, 1888b)

हाइगेन्स ने बर्नूली की चुनौती (§9.2.2.2) तक पैंतालीस वर्षों के लिए कैटेनरिया का अपना अध्ययन स्थगित कर दिया।

प्रारूप समीक्षा

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9.2.2 चुनौतियाँ

सारणी 9.2.2.1 इस कथा का कालानुक्रमिक सारांश है; यह (इस अनुभाग के शेष भाग की भाँति) मुख्यतः Alassi, 2020 के उत्कृष्ट नवीन अध्ययन पर आधारित है।

9.2.2.1 अंतराल: शब्दावली

बर्नूली की चुनौती पर विचार करने से पूर्व हम प्रयुक्त होने वाले प्रमुख पद स्पष्ट करते हैं।

तालिका 9.2: “Funicularia” परिवार के वक्रों की शब्दावली (Alassi, 2020 के अनुसार)।

पद	भौतिक प्रतिरूप	प्रमुख धारणाएँ / भार	प्रामाणिक संबंध (संकेतात्मक)
Funicularia	व्यापक पद: दिए गए भारों के अधीन नम्य धागे अथवा चादर द्वारा ग्रहण किए जा सकने वाले आकार (catenaria, elastica, velaria, lintearia सम्मिलित)।	संघटनात्मक व्यवहार और भारण प्रत्येक स्थिति में भिन्न। लक्ष्य: साम्यावस्था से वक्रता $\kappa(s)$ निर्धारित करना।	मूल समस्या: बलों/आघूर्णों का संतुलन $\Rightarrow$ वक्रता-नियम; विशिष्टीकरण नीचे।
Catenaria (कैटेनरी)	अपने भार के अधीन लटकती अविस्तरणीय, पूर्णतः नम्य शृंखला/केबल; सिरे स्थिर।	कोई बंकन-दृढता अथवा अपरूपण नहीं; प्रति एकक लंबाई एकसमान भार w।	$y = a\cosh\!\left(\dfrac{x-x_0}{a}\right) + C$; समतुल्य रूप से $H\,y'' = w\sqrt{1+(y')^2}$; वक्रता $\kappa = \dfrac{w}{H}\,\dfrac{1}{1+(y')^2}$।
Elastica	बंकन-दृढता B (“निरपेक्ष प्रत्यास्थता”) वाली अविस्तरणीय, अपरूपण-विहीन तनु छड।	संघटनात्मक नियम $M = B\,\kappa$; बाह्य सिरा-बल/आघूर्ण सीमांत दशाएँ निर्धारित करते हैं।	ऑयलर रूप (समतलीय): $B\,\theta'' + P\sin(\theta-\theta_P) = 0$; दीर्घवृत्तीय समाकलों द्वारा समाधान (जैसे आयताकार इलास्टिका)।
Velaria	कोनों पर स्थिर और पवन से फूले आयताकार पाल का वक्र (दाबित झिल्ली)।	(लगभग) एकसमान दाब के अधीन नम्य चादर; अविस्तरणीय धागे (बर्नूली आदर्शीकरण)।	*Funicularia* का सदस्य; झिल्ली में दाब-परिणामियों द्वारा नियंत्रित वक्रता; बर्नूली की ज्यामितीय रचना।
Lintearia	आयताकार वस्त्र का वक्र जिसकी दो विपरीत भुजाएँ क्षैतिज रूप से समर्थित हैं और जिसमें निहित तरल का भार है।	नम्य झिल्ली; अनुप्रस्थ भार गहराई के साथ बदलता है (द्रवस्थैतिक)।	*Funicularia* का सदस्य; असमान भारण के कारण कैटेनरी से भिन्न रूपरेखा।

9.2.2.2 याकूब बर्नूली की *funicularia* चुनौती; 1690

कैटेनरी समस्या—अर्थात् लटकती हुई शृंखला द्वारा ग्रहण किए गए गणितीय वक्र का निर्धारण—1690 के दशक में उभरते हुए कलन की एक निर्णायक कसौटी बन गई। यह चुनौती पारंपरिक ज्यामितीय उपागमों की तुलना में वैश्लेषिक विधियों की श्रेष्ठता प्रदर्शित करने वाली थी।

17वीं शताब्दी के अंत तक, न्यूटन और लाइबनिट्स की देन कलन अपनी आरंभिक अवस्था में था, और “पारंपरिक” (ज्यामितीय) विधियों पर उसकी श्रेष्ठता कैटेनरी समस्या के समाधान द्वारा प्रदर्शित होने वाली थी[6]।

[6]यह दिखाया जा सकता है कि किसी परवलय को एक सीधी रेखा पर लुढकाने पर उसका फोकस एक कैटेनरी अनुरेखित करता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः मई 1690 में याकूब बर्नूली द्वारा गणितीय समुदाय को कैटेनरी समस्या हल करने की चुनौती देने के लिए समय उपयुक्त था[7] (Bernoulli, Jakob, 1690b)।

सारणी 9.3 इस वृत्तांत का कालानुक्रमिक सार प्रस्तुत करती है, जो मुख्यतः Alassi, 2020 के उत्कृष्ट नवीन अध्ययन पर आधारित है।

तालिका 9.3: कैटेनरी समाधान का कालानुक्रमिक विकास ((Alassi, 2020) पर आधारित)

तिथि	प्रेषक	प्राप्तकर्ता	विषय
15वीं शताब्दी	लियोनार्डो		लटकती शृंखला का सहज प्रेक्षण
1638	गैलीलियो	—	इसे परवलय होने का दावा
1600 के दशक का उत्तरार्ध	हाइगेन्स, पार्दी		नहीं, यह परवलय नहीं है
मई 1690	याकूब बी.	लाइबनिट्स	लाइबनिट्स & चिरनहाउस को चुनौती जारी की
जुलाई 1690	लाइबनिट्स	याकूब बी.	चुनौती स्वीकार की; समाधान का दावा; समय-सीमा निर्धारित की
9 अक्तूबर, 1690	हाइगेन्स	लाइबनिट्स	एक (कूटबद्ध) समाधान भेजा; लाइबनिट्स का (कूटबद्ध) समाधान देखने को कहा
13 अक्तूबर, 1690	लाइबनिट्स	हाइगेन्स	समानताएँ बताईं; छोटे अंतरों का उल्लेख किया
18 नवंबर, 1690	हाइगेन्स	लाइबनिट्स	सत्यापन हेतु कूटबद्ध समाधान देखने को कहा
दिसंबर 1690	योहान बी.	एई संपादक	शर्तों सहित समाधान प्रस्तुत किया
31 दिसंबर, 1690		**समय-सीमा (लाइबनिट्स द्वारा कोई प्रकाशित समाधान नहीं)**	
6 जनवरी, 1691	एई संपादक	लाइबनिट्स	योहान बी. का समाधान प्राप्त होने की पुष्टि की
27 जनवरी, 1691	लाइबनिट्स	हाइगेन्स	परिशिष्ट: हाइगेन्स का समाधान स्वीकार किया किंतु एक अन्य वक्र बताया
20 फरवरी, 1691	लाइबनिट्स	हाइगेन्स	योहान ने हल कर लिया; उसने “मेरे” कलन का उपयोग किया
23 फरवरी, 1691	हाइगेन्स	लाइबनिट्स	अन्य ज्यामितिज्ञ इस सरल समस्या को हल कर सकते हैं
26 मार्च, 1691	हाइगेन्स	लाइबनिट्स	अपने कूट में त्रुटि स्वीकारी; योहान बी. से जाँच कराने को कहा
मार्च 1691	याकूब बी.	एई संपादक	परिशिष्ट: अपने भाई के समाधान का विस्तार किया
21 मार्च, 1691	एई संपादक	लाइबनिट्स	याकूब के समाधान की सूचना दी
20 अप्रैल, 1691	लाइबनिट्स	हाइगेन्स	अपना समाधान प्रस्तुत करने के लिए एई के दबाव की सूचना दी
5 मई, 1691	हाइगेन्स	लाइबनिट्स	मुहरबंद लिफाफे में समाधान
मई 1691	लाइबनिट्स	एई संपादक	अपना और हाइगेन्स का समाधान प्रस्तुत किया
जून 1691	एई संपादक	—	तीनों समाधानों का प्रकाशन
जुलाई 1691	लाइबनिट्स	हाइगेन्स	विभिन्न प्रस्तुतियों पर अपनी राय भेजी
सितंबर 1691	हाइगेन्स	लाइबनिट्स	उत्तर
21 सितंबर, 1691	लाइबनिट्स	हाइगेन्स	साहित्यिक चोरी के आरोपों के विरुद्ध अपना बचाव किया
16 नवंबर, 1691	हाइगेन्स	लाइबनिट्स	सुलह; नए अतिसूक्ष्म कलन का गहन अध्ययन करेंगे

विचार यह था कि गणितज्ञ अपने समाधान एक साथ प्रकाशन के लिए प्रस्तुत कर सकें, जिससे विधियों की निष्पक्ष तुलना सुनिश्चित हो। ये समाधान *Acta Eruditorum* में प्रकाशित होने थे, (Bernoulli, Jakob, 1690b)[8]।

[7] गणितीय प्रश्नों को प्रतियोगिता के रूप में प्रस्तुत करना पुनर्जागरण और आरंभिक आधुनिक काल के गणितज्ञों, जिनमें हाइगेन्स और लाइबनिट्स भी सम्मिलित थे, के बीच पहले से लोकप्रिय था। सामान्यतः कोई गणितीय प्रश्न समाधान के लिए प्रस्तुत किया जाता था और चुनौतीकर्ता कुछ गणितज्ञों को एक निश्चित समयावधि में उसे हल करने के लिए स्पष्टतः आमंत्रित करता था (Alassi, 2020)।

[8] *Acta Eruditorum* (लैटिन में “विद्वानों के कार्य”) यूरोप के जर्मन-भाषी क्षेत्रों की प्रथम वैज्ञानिक पत्रिका थी, जो 1682 से 1782 तक प्रकाशित हुई। इसे स्वयं लाइबनिट्स का समर्थन प्राप्त था, जिन्होंने इसमें 13 लेख दिए। याकूब बर्नूली और ऑयलर ने भी इसमें प्रकाशन किया। इसने “कलन युद्ध” में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाई (जिसमें न्यूटन और लाइबनिट्स दोनों ने अवकल कलन के विकास का श्रेय प्राप्त करने का दावा किया। *Acta* ने लाइबनिट्स का पक्ष लिया, जबकि फिलॉसॉफिकल ट्रांजैक्शन्स ने न्यूटन का)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
समीक्षा प्रगति पर है

उन्होंने विशेष रूप से लाइबनिट्स और चिरनहाउस[9] को इस समस्या के समाधान हेतु अपनी नई विधियाँ आजमाने के लिए आमंत्रित किया। अपनी 1690 की चुनौती द्वारा याकूब बर्नूली ने प्रश्न को पूरे गणितीय समुदाय के समक्ष रखकर इस प्रथा का विस्तार किया और विशेषतः लाइबनिट्स तथा चिरनहाउस से समस्या पर विचार करने का अनुरोध किया। आरंभ में याकूब ने समस्या की कठिनाई को देखते हुए कोई निश्चित समय-सीमा नहीं रखी। उन्होंने समस्या का वर्णन इस प्रकार किया, चित्र 9.5:

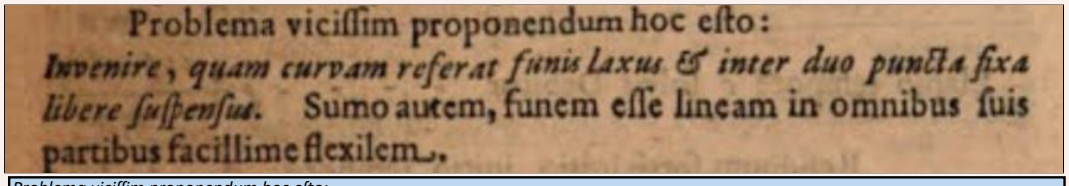
> और अब यह समस्या प्रस्तुत की जाए: दो स्थिर बिंदुओं से स्वतंत्र रूप से लटकाए गए ढीले धागे द्वारा ग्रहण किए गए वक्र को ज्ञात कीजिए। मैं यह भी मानता हूँ कि धागा एक ऐसी रेखा है जो अपने सभी भागों में सरलता से नम्य है।
>
> Bernoulli, Jakob, 1690b "*Problema funicularium (challenge on the curve of a hanging thread)*"

9.2.2.3 लाइबनिट्स की प्रतिक्रिया और चुनौती का संशोधन; 1690 का उत्तरार्ध

यद्यपि लाइबनिट्स ने विधि का प्रशिक्षण लिया था, उन्होंने 1672 से 1676 के बीच पेरिस में हाइगेन्स के साथ गणित का अध्ययन किया था। अतः लाइबनिट्स ने चुनौती स्वीकार की और 1690 के उत्तरार्ध में उत्तर देते हुए याकूब की मुक्त-अवधि वाली चुनौती को प्रभावतः अधिक सुव्यवस्थित प्रतियोगिता में बदल दिया:

> यह भी माना जाता है कि डोरी की लंबाई किसी तार की भाँति खिंचने या सिकुडने के स्थान पर, शृंखला की तरह समान बनी रहती है। गैलीलियो द्वारा प्रस्तुत और उनके समय से प्रसिद्ध यह समस्या अभी तक समाधान के अधीन नहीं हुई है ... अतः मुझ पर डाले गए भार से मुझे उचित रूप से मुक्त समझा जाना चाहिए, विशेषतः क्योंकि मैं अन्य विषयों में अत्यधिक व्यस्त हूँ। किंतु उस परम प्रबुद्ध व्यक्ति की उदारता ऐसी है कि मैं उनके प्रथम आह्वान को विफल नहीं करना चाहता। इसलिए मैंने [समस्या] पर आक्रमण किया, जिसे मैंने अब तक नहीं आजमाया था, और अपनी कुंजी [अर्थात् अवकल कलन] से उसके गुप्त मार्गों को सफलतापूर्वक खोल दिया। तथापि, यह समस्या मेरी पिछली समस्या की अपेक्षा कुछ अधिक जटिल है और हमारी विधि का एक विशिष्ट उपयोग प्रदर्शित करती है; इसलिए अपना समाधान प्रकाशित करने से पहले मैंने अन्य लोगों को भी अपना कौशल आजमाने का समय देना उपयुक्त समझा। इस लीडिया-पाषाण द्वारा हम

[9] चिरनहाउस एक जर्मन गणितज्ञ थे जिनसे लाइबनिट्स पेरिस में भी मिले थे। रोचक रूप से, 1696 1696 में याकूब के भाई योहान बर्नूली ने *Acta Eruditorum* के पाठकों के समक्ष एक समस्या (ब्रैकिस्टोक्रोन) रखी, और चिरनहाउस समाधान प्रस्तुत करने वाले केवल पाँच गणितज्ञों में से एक थे। बर्नूली ने अगले वर्ष मई में इन योगदानों (चिरनहाउस के योगदान सहित) को अपने समाधान के साथ पत्रिका में प्रकाशित किया।


Problema viciſſim proponendum hoc eſto:
Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus. Sumo autem, funem eſſe lineam in omnibus ſuis partibus facillime flexilem.

Problema viciſſim proponendum hoc eſto:
Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus. Sumo autem, funem eſſe lineam in omnibus ſuis partibus facillime flexilem.

अब बारी-बारी से यह समस्या प्रस्तुत की जाए:

दो स्थिर बिंदुओं के बीच स्वतंत्र रूप से लटकी हुई ढीली रस्सी किस वक्र का निरूपण करती है, यह ज्ञात करना है। इसके अतिरिक्त, मैं मानता हूँ कि रस्सी एक ऐसी रेखा है जो अपने सभी भागों में अत्यंत आसानी से लचीली है।

चित्र 9.5: याकूब बर्नूली की *funicularia* चुनौती (Bernoulli, Jakob, 1690b, p. 219)

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> सर्वोत्तम विधियों को पहचानेंगे; इसका विज्ञान की उन्नति पर बहुत प्रभाव है; विशेषतः क्योंकि यहाँ विस्तृत गणना की नहीं, बल्कि युक्ति की बात है। सर्वप्रथम परम कुलीन डी. टी. [काउंट चिरनहाउस], जो इस प्रकार की अद्भुत उपलब्धियों का वचन देते हैं, से पूछा जाना चाहिए कि क्या वे यहाँ भी अपनी विधि की शक्ति आजमाना चाहते हैं। किंतु यदि वर्ष के अंत से पहले कोई यह संकेत नहीं देता कि उसने समाधान पा लिया है, तो ईश्वर की इच्छा से मैं अपना समाधान दूँगा।
>
> Leibniz, 1690 *"Ad ea, quae vir clarissimus JB, mense Majo nupero in his Actis publicavit, responsio"*

मूलतः लाइबनिट्स ने तीन महत्त्वपूर्ण संशोधन किए:

- उन्होंने अविस्तार्य शृंखला (*Catenaria*) मानकर *Funicularia* समस्या को सरल बनाया
- उन्होंने एक समय-सीमा (1690 का अंत) निर्धारित की और अन्य कोई समाधान सामने न आने पर अपना समाधान प्रकट करने का वचन दिया
- उन्होंने चिरनहाउस को अपनी नई गणितीय विधियाँ प्रदर्शित करने की विशेष चुनौती दी

इसके बाद अधिकांश प्रतिभागियों ने याकूब की अधिक सामान्य *Funicularia* (विस्तार्य रज्जु) समस्या के स्थान पर *Catenaria* (अविस्तार्य शृंखला) पर ध्यान केंद्रित किया।

9.2.3 तीन प्रमुख समाधान

निम्नलिखित आदान-प्रदान में कूटों (कूटबद्ध समाधानों) का उपयोग गणितीय खोज की प्रतिस्पर्धी प्रकृति तथा सहकर्मियों को समस्याओं पर कार्य करने का समय देते हुए प्राथमिकता स्थापित करने की इच्छा, दोनों को प्रतिबिंबित करता था।

9.2.3.1 योहान बर्नूली; (दिसंबर 1690 में प्रस्तुत, जून 1691 में प्रकाशित)

इसी बीच, Bernoulli, Johann, 1691c PDF ने भी कैटेनरी समस्या हल की और दिसंबर 1690 में अपना समाधान सीधे एई के संपादक को भेजा तथा उसके प्रकाशन की एक शर्त रखी: वे चाहते थे कि इसे लाइबनिट्स के समाधान के साथ ही प्रकाशित किया जाए। योहान ने अपना समाधान लाइबनिट्स की समय-सीमा समाप्त होने के ठीक पहले प्रस्तुत किया था, किंतु लाइबनिट्स ने अपना विश्लेषण प्रकाशित नहीं किया; इसके स्थान पर उन्होंने हाइगेन्स के साथ पत्राचार जारी रखा।

1691 की शीत और वसंत ऋतु के दौरान लाइबनिट्स और हाइगेन्स के बीच पत्राचार चलता रहा। 27 जनवरी 1691 को हाइगेन्स को भेजे गए पत्र के परिशिष्ट में, अपने विश्लेषण का कोई कूट संलग्न किए बिना, लाइबनिट्स ने स्वीकार किया कि हाइगेन्स के सहायक वक्र का उपयोग कैटेनरी के ज्यामितीय निर्माण के लिए भी किया जा सकता है। उन्होंने एक और सहायक वक्र सुझाया, जो कैटेनरी वक्र के निरूपण के लिए उपयोगी सिद्ध हुआ। कैटेनरी के निरूपण हेतु सहायक वक्र के अनेक विकल्प उपलब्ध होने से हाइगेन्स को यह विश्वास हो गया होगा कि समस्या हल करना कठिन नहीं था। 23 फरवरी 1691 को उन्होंने लाइबनिट्स को लिखा:

> मुझे लगता है कि अनेक अन्य ज्यामितिज्ञ इस समस्या को हल कर लेंगे क्योंकि, सच कहूँ तो, यह बहुत कठिन प्रतीत नहीं होती, सिवाय इसके कि आप मेरे द्वारा ज्ञात परिणाम से अधिक कुछ माँग रहे हों।
>
> Bernoulli, Johann, 1691b *"Letter to Leibniz"*

2 मार्च, 1691 के अपने पत्र में लाइबनिट्स ने हाइगेन्स को सूचित किया कि योहान बर्नूली ने समस्या सफलतापूर्वक हल कर ली थी और इस विचार पर गर्व व्यक्त किया कि उनके कलन ने संभवतः योहान की सहायता की होगी। यह स्वीकार करते हुए कि चिरनहाउस को नामित करते समय उनका स्वर न केवल आग्रहपूर्ण बल्कि जानबूझकर उकसाने वाला भी था, लाइबनिट्स ने चिरनहाउस द्वारा चुनौती स्वीकार न किए जाने पर अपनी निराशा भी व्यक्त की:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> श्री चिरनहाउस ने प्रलोभन स्वीकार नहीं किया, यद्यपि मैंने जानबूझकर इस प्रकार कहा था कि उन्हें इसमें खींच सकूँ और अपनी विधि के उपयोग का अवसर दे सकूँ, क्योंकि उन्होंने हमसे वचन दिया था कि वह इतना कुछ कर सकती है, और यहाँ तक कि यह कहने के लिए मुझे अप्रत्यक्ष रूप से धिक्कारा था कि इन स्थितियों में साधारण विश्लेषण पर्याप्त नहीं होगा।
>
> Leibniz, 1691d *"Letter to Huygens"*

26 मार्च 1691 को हाइगेन्स ने, अपने प्रथम कूट में लेखन-त्रुटि पहचान लेने के बाद, लाइबनिट्स को उसका दूसरा, संशोधित और विस्तारित रूप भेजा। हाइगेन्स ने सुझाव दिया कि लाइबनिट्स इस दूसरे कूट को योहान को बता सकते हैं और बदले में उनसे उनका कूट माँग सकते हैं। इसके अतिरिक्त, लाइबनिट्स द्वारा विशेष रूप से नामित किए जाने के बावजूद चिरनहाउस की चुप्पी पर हाइगेन्स ने आश्चर्य व्यक्त किया। यह भूलते हुए कि समय-सीमा पहले ही समाप्त हो चुकी थी, हाइगेन्स को आशा थी कि शेष समय में चिरनहाउस कुछ प्रस्तुत करेंगे। साथ ही, इस पत्र में हाइगेन्स ने प्राथमिकता सुनिश्चित करने और विवाद रोकने के लिए कूटों के आदान-प्रदान की आवश्यकता पर अपना मत व्यक्त किया।

9.2.3.2 हाइगेन्स; (अक्तूबर 1690 में प्रस्तुत, मई 1691 में प्रकाशित)

आरंभिक कूटबद्ध समाधान (अक्तूबर 1690) याकूब की चुनौती के लाइबनिट्स द्वारा संशोधित रूप पर प्रथम प्रतिक्रिया उनके पूर्व गुरु क्रिस्टियान हाइगेन्स से 9 अक्तूबर 1690 को आई। इस आदान-प्रदान ने कैटेनरी पर इन दोनों महान विद्वानों के बीच विस्तृत पत्राचार का आरंभ चिह्नित किया। अपने पत्र में हाइगेन्स ने अपना समाधान कूटबद्ध रूप में संलग्न किया और बताया कि युवावस्था में वे इस समस्या पर फादर मेर्सेन (§9.2.1.4) से पहले ही पत्राचार कर चुके थे तथा स्थापित कर चुके थे कि लटकती शृंखला का वक्र, गैलीलियो की धारणा के विपरीत, परवलय नहीं है। बदले में हाइगेन्स को आशा थी कि लाइबनिट्स अपना समाधान कूटबद्ध रूप में भेजेंगे; उन्होंने कहा कि वे दोनों मिलकर लाइबनिट्स द्वारा प्रस्तावित समय-सीमा[10] को छोटा कर सकते हैं। उनके संलग्न कूट में कैटेनरी के ज्यामितीय निर्माण हेतु जनक वक्र का समीकरण था:

$$xxyy \propto a^4 - a^2y^2 \tag{9.4}$$

गणितीय आदान-प्रदान और परिष्करण (अक्तूबर 1690–मार्च 1691) 13 अक्तूबर, 1690 को लाइबनिट्स ने कोई कूट संलग्न किए बिना उत्तर दिया[11] कि उन्हें अपनी गणना से कुछ समानताएँ और एक अंतर मिला था, चित्र 9.6:

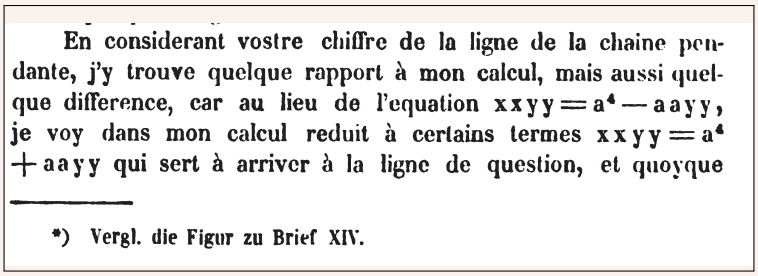
> En considerant vostre chiffre de la chaine pendante, j'y trouve quelque rapport à mon calcul, mais aussi quelque difference, car au lieu de l'equation $xxyy = a^4 - aayy$, je voy dans mon calcul reduit à certain termes $xxyy = a^4 + aayy$, qui sert à arriver à la ligne de question, et quoyque cette ligne soit du nombre des transcendantes, je ne laisse pas (supposita ejus constructione) d'en pouvoir donner non seulement les touchantes, mais encor la dimension de la courbe, la surface du solide de sa rotation et la dimension de l'espace compris de la courbe et del'axe; et le calcul m'offre tout cela comme de soy meme.
>
> लटकती शृंखला के आपके कूट पर विचार करते हुए मुझे अपनी गणना से कुछ साम्य, किंतु कुछ अंतर भी मिलता है। क्योंकि समीकरण $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$ के स्थान पर, अपनी गणना को कुछ पदों तक घटाने पर मैं $x^2y^2 = a^4 + a^2y^2$ पर पहुँचता हूँ, जो अपेक्षित वक्र तक पहुँचने में सहायक है। और यद्यपि यह वक्र अतिपारगामी वक्रों में से है, फिर भी (उसका निर्माण मान लेने पर) मैं न केवल स्पर्शरेखाएँ, बल्कि स्वयं वक्र की माप, उसके घूर्णन से उत्पन्न ठोस

[10] हाइगेन्स ने आरंभ में समय-क्रम को गलत समझा और माना कि लाइबनिट्स ने वर्षांत की समय-सीमा से अधिक अवधि निर्धारित की थी।

[11] हाइगेन्स और लाइबनिट्स ने लाइबनिट्स के पेरिस-काल की साझा विद्वत् भाषा फ्रांसीसी में संवाद किया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> का पृष्ठ तथा वक्र और अक्ष से घिरे स्थान का आयतन भी दे सकता हूँ; और गणना मुझे यह सब मानो अपने आप प्रदान करती है।
>
> Leibniz, 1901 *"Letter to Christiaan Huygens, October 13, 1690"*



En considerant vostre chiffre de la ligne de la chaine pendante, j'y trouve quelque rapport à mon calcul, mais aussi quelque difference, car au lieu de l'equation $xxyy = a^4 - aayy$, je voy dans mon calcul reduit à certains termes $xxyy = a^4 + aayy$ qui sert à arriver à la ligne de question, et quoyque

*) Vergl. die Figur zu Brief XIV.

चित्र 9.6: हाइगेन्स को लाइबनिट्स का उत्तर, अक्तूबर, 1690 (Leibniz, 1923)

लाइबनिट्स द्वारा इंगित अंतर सहायक वक्र के समीकरण में है; उनका दावा है कि उनके कलन से यह प्राप्त होता है:

$$xxyy \propto a^4 + a^2y^2 \tag{9.5}$$

कोई उपपत्ति न भेजे जाने के कारण हाइगेन्स ने अपनी गणना जाँची और उसमें कोई त्रुटि नहीं पाई; अतः उन्हें लाइबनिट्स की गणना की शुद्धता पर संदेह हुआ (Alassi, 2020)। 18 नवंबर 1690 को हाइगेन्स ने दावा किया कि चूँकि उनके परिणामों में एकमात्र अंतर चिह्न का था, इसलिए वह निश्चित रूप से उनकी भिन्न विधियों के कारण था[12]। उन्होंने पुनः आग्रह किया कि लाइबनिट्स अपना पूर्ण समाधान भेजें (Leibniz, 1901, Vol. 9)। किंतु लाइबनिट्स 2 मार्च, 1691 तक मौन रहे; उस दिन उन्होंने हाइगेन्स को पुष्टि की कि योहान बर्नूली ने भी अपना समाधान खोज लिया था और अतिसूक्ष्म कलन ने निश्चय ही उनकी सहायता की होगी (Leibniz, 1901, Vol. 9)।

कूट का संशोधन और अंतिम प्रस्तुति (मार्च–मई 1691) 26 मार्च, 1691 को हाइगेन्स ने, अपने प्रथम कूट में लेखन-त्रुटि पहचान लेने के बाद, लाइबनिट्स को उसका संशोधित और विस्तारित रूप भेजा। हाइगेन्स ने सुझाव दिया कि लाइबनिट्स इस दूसरे कूट को योहान को बता सकते हैं और बदले में उनसे उनका कूट माँग सकते हैं। इसके अतिरिक्त, लाइबनिट्स द्वारा विशेष रूप से नामित किए जाने के बावजूद चिरनहाउस की चुप्पी पर हाइगेन्स ने आश्चर्य व्यक्त किया। यह भूलते हुए कि समय-सीमा पहले ही समाप्त हो चुकी थी, हाइगेन्स को आशा थी कि शेष समय में चिरनहाउस कुछ प्रस्तुत करेंगे। इस पत्र में हाइगेन्स ने प्राथमिकता सुनिश्चित करने और विवाद रोकने के लिए कूटों के आदान-प्रदान की आवश्यकता पर भी अपना मत व्यक्त किया।

हाइगेन्स ने अपना समाधान देखने के लिए आग्रह करते हुए लाइबनिट्स को दो और पत्र लिखे, किंतु लाइबनिट्स सहमत नहीं हुए (Alassi, 2020)। अंततः 5 मई, 1691 को हाइगेन्स ने अपना निश्चित समाधान एक मुहरबंद लिफाफे में लाइबनिट्स को भेजा और साथ के पत्र में अनुरोध किया कि उनका संलग्न समाधान एई को भेज दिया जाए। इससे कैटेनरी समस्या पर उनके उपागम से संबंधित लगभग आठ माह के पत्राचार और परिष्करण का अंत हुआ।

प्रकाशन (जून 1691) हाइगेन्स का समाधान जून 1691 में योहान बर्नूली और लाइबनिट्स के समाधानों के साथ *Acta Eruditorum* में प्रकाशित हुआ; यह अक्तूबर 1690 से मई 1691 तक कैटेनरी चुनौती में उनकी दीर्घ सहभागिता की परिणति थी।

9.2.3.3 लाइबनिट्स; (मई 1691 में प्रस्तुत, जून 1691 में प्रकाशित)

1691 की शीत और वसंत ऋतु में हाइगेन्स के साथ विस्तृत पत्राचार बनाए रखते हुए लाइबनिट्स कैटेनरी समस्या के प्रति अपना व्यवस्थित उपागम भी विकसित कर रहे थे। अंततः "De linea in quam flexile se pondere proprio curvat,

[12] इसी आदान-प्रदान में हाइगेन्स ने *catenaria* नाम गढा (Leibniz, 1901, Vol. 9)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ejusque usu insigni adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos" (Leibniz, 1691a) शीर्षक से प्रकाशित उनका समाधान तीनों समाधानों में सर्वाधिक व्यापक और सैद्धांतिक रूप से गहन विवेचन था।

अवकल कलन पर आधारित वैश्लेषिक उपागम लाइबनिट्स की विधि उनके नवविकसित अवकल कलन की शक्ति का उदाहरण थी। हाइगेन्स के ज्यामितीय उपागम के विपरीत, लाइबनिट्स ने कैटेनरी को पूर्णतः वैश्लेषिक समस्या के रूप में लिया और लटकती शृंखला के प्रत्येक अवयव पर कार्यरत भौतिक बलों के आधार पर अवकल समीकरण स्थापित किए। उनका उपागम इस मूल सिद्धांत से आरंभ हुआ कि प्रत्येक बिंदु पर शृंखला को तनाव और गुरुत्व के बलों के अधीन साम्यावस्था में होना चाहिए।

शृंखला के एक अतिसूक्ष्म अवयव पर विचार करके और बल-संतुलन लागू करके लाइबनिट्स ने कैटेनरी का अभिलाक्षणिक अवकल समीकरण व्युत्पन्न किया। अवकलों के उनके व्यवस्थित उपयोग ने उन्हें वक्र के निर्देशांकों के बीच संबंध को समस्या के भौतिक प्राचलों के पदों में सीधे व्यक्त करने दिया।

लघुगणकों और अतिपरवलय के क्षेत्रकलन से संबंध संभवतः सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण बात यह थी कि लाइबनिट्स ने पहचाना कि कैटेनरी समस्या मूलतः अतिपरवलय के क्षेत्रकलन—अर्थात् लघुगणकीय फलनों—से संबद्ध थी। 24 जुलाई, 1691 को हाइगेन्स को लिखे पत्र में उन्होंने बताया कि कैटेनरी और अन्य अतिपारगामी समस्याओं, दोनों के निर्माण के लिए "केवल अतिपरवलय के क्षेत्रकलन की आवश्यकता है" और उन्होंने "सब कुछ लघुगणकों में घटा दिया था।"

यह अंतर्दृष्टि क्रांतिकारी थी। लाइबनिट्स ने दिखाया कि कैटेनरी को उन फलनों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है जिन्हें आज हम अतिपरवलयिक फलनों के रूप में पहचानते हैं; इस प्रकार ज्यामितीय वक्र और चरघातांकों तथा लघुगणकों वाले वैश्लेषिक व्यंजकों के बीच सीधा संबंध स्थापित हुआ। लघुगणकों में इस न्यूनीकरण ने न केवल सर्वाधिक सुरुचिपूर्ण गणितीय वर्णन दिया, बल्कि संख्यात्मक परिकलन की सर्वाधिक व्यावहारिक विधि भी प्रदान की।

व्यापक गणितीय विवेचन लाइबनिट्स का समाधान केवल वक्र का समीकरण ज्ञात करने तक सीमित नहीं था। उनके शोध-पत्र ने प्रदर्शित किया कि कैटेनरी का उपयोग "adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos" (किसी भी संख्या में मध्यानुपातियों और लघुगणकों को ज्ञात करने के लिए) किया जा सकता है; इस प्रकार अन्य गणितीय समस्याओं के समाधान में वक्र के व्यावहारिक अनुप्रयोग दिखाए गए। उन्होंने निम्नलिखित के लिए विधियाँ दीं:

- किसी भी बिंदु पर कैटेनरी की स्पर्शरेखा ज्ञात करना
- वक्र के किसी भी भाग की चाप-लंबाई की गणना करना
- कैटेनरी के नीचे का क्षेत्रफल निर्धारित करना
- कैटेनरी को घुमाने से बने घूर्णन-ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन परिकलित करना

व्यवस्थित कार्यविधि लाइबनिट्स के उपागम की विशिष्टता उसकी व्यवस्थित व्यापकता थी। जहाँ हाइगेन्स और योहान बर्नूली ने कैटेनरी समस्या के विशिष्ट समाधान खोजे थे, वहीं लाइबनिट्स ने एक व्यापक वैश्लेषिक ढाँचा विकसित किया जिसे समान समस्याओं के पूरे वर्ग पर लागू किया जा सकता था। उनकी विधि ने वह प्रदान किया जिसे उन्होंने अतिपारगामियों के लिए "सभी संभावित निर्माणों में सर्वोत्तम" कहा और ऐसी समस्याओं के समाधान हेतु अवकल कलन को अधिमान्य साधन के रूप में स्थापित किया।

लाइबनिट्स ने मई 1691 में अपना समाधान *Acta Eruditorum* को प्रस्तुत किया और वह जून के अंक में हाइगेन्स तथा योहान बर्नूली के समाधानों के साथ प्रकाशित हुआ। इस प्रकार उन तीन समाधानों की त्रयी पूर्ण हुई, जिसने भौतिक समस्याओं पर कलन के अनुप्रयोग में कैटेनरी को एक ऐतिहासिक उपलब्धि के रूप में स्थापित किया।

9.2.3.4 प्रकाशन और अंतिम समाधान; जून 1691

21 मार्च 1691 को मेन्के ने लाइबनिट्स को याकूब बर्नूली के लेख और उसके *Additamentum ad Problema Funicularium* के बारे में सूचित किया। चूँकि याकूब का लेख प्रकाशित करना योहान के अनुरोध का उल्लंघन करता, उन्होंने उसे उसी अंक में प्रकाशित करने का निर्णय किया जिसमें कैटेनरी समस्या के समाधान आने वाले थे। 20 अप्रैल 1691 को लाइबनिट्स ने हाइगेन्स को बताया कि एई के संपादक उन पर उत्तर प्रस्तुत करने का दबाव डाल रहे थे। लाइबनिट्स ने योहान के समाधान के प्रकाशन की व्यवस्था भी समझाई और प्रमाणित किया कि उन्होंने स्वयं उसे नहीं देखा था। उन्होंने योहान से कूट माँगने से

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भी परहेज किया, क्योंकि योहान ने अपना उत्तर सीधे एई के संपादकों को भेजा था और कूट माँगने से संदेह उत्पन्न हो सकता था। यह स्मरण कराते हुए कि प्रतियोगिता की समय-सीमा बहुत पहले समाप्त हो चुकी थी, उन्होंने हाइगेन्स को सूचित किया कि वे शीघ्र ही अपना विश्लेषण प्रकाशन हेतु प्रस्तुत करेंगे और हाइगेन्स से भी ऐसा करने का आग्रह किया। लाइबनिट्स ने हाइगेन्स को आश्वस्त किया कि संपादक जानते थे कि हाइगेन्स ने समस्या पहले हल कर ली थी और वे उनके समाधान को गोपनीय रखेंगे।

5 मई 1691 को हाइगेन्स ने अपना समाधान एक मुहरबंद लिफाफे में लाइबनिट्स को भेजा और साथ के पत्र में अनुरोध किया कि उनका संलग्न समाधान एई को भेज दिया जाए। इसके साथ ही लाइबनिट्स ने मई 1691 में अपना समाधान भी प्रकाशन हेतु प्रस्तुत किया। जून 1691 में एई ने सभी प्रमुख समाधान, चित्र 9.7, एक ऐसी प्रस्तावना के साथ प्रकाशित किए जिसमें संपादक द्वारा उत्तर प्राप्त किए जाने का क्रम और तिथि वर्णित थे। संपादक ने याकूब बर्नूली का लेख तीनों समाधानों के तुरंत बाद रखा।


274 ACTA ERUDITORUM

SOLUTIO PROBLEMATIS FUNICULARII, exhibita a Johanne Bernoulli, Basil. Med. Cand.

ANnus fere est, cum inter sermocinandum cum Cl. Fratre mentio forte incidisset de Natura Curvæ, quam funis inter duo puncta fixa libere suspensus format. Mirabamur rem omnium oculis & ma-

(a) योहान बर्नूली

MENSIS JUNII A. M DC XCI. 277

DE LINEA IN QUAM FLEXILE SE pondere proprio curvat, ejusque usu insigni adinveniendas quotcunque medias proportionales & Logarithmos. Autore G. G. L.

PRoblema Linea Catenaria vel Funicularis duplicem usum habet; unum, ut augeatur ars inveniendi seu Analysis, quæ hactenus ad talia non satis pertingebat, alterum ut praxis construendi promoveatur. Reperi enim hanc lineam ut facillimam factu, ita utilissimam effectu esse, nec ulli Transcendentium secundam. Nam suspensione

(b) लाइबनिट्स

CHRISTIANI HUGENII, DYNASTÆ IN Zülechem, Solutio ejusdem Problematis.

SI Catena CVA suspensa sit ex filis FC, EA utrinque annexis, ac gravitate carentibus, ita ut capita C & A sint pari altitudine, deturque angulus inclinationis filorum productorum CGA, & catenæ totius positus, cujus vertex sit V, axis VB. Fig. 2.

1. Licebit hinc invenire tangentem in dato quovis catenæ puncto. Velut si punctum datum sit L, unde ducta applicata LH dividat æqualiter axem BV. Jam si angulus CGA sit 60°, erit inclinanda a puncto A ad axem recta AJV, æqualis ½ AB, cui ducta parellela LR, tanget curvam in puncto L. Item si latera GB, BA, AG sint partium 3, 4, 5, erit AIV ponenda partium 4½. TAB. VII.

(c) हाइगेन्स

SPECIMEN ALTERUM CALCULI DIFferentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Arcis Triangulorum Sphæricorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque, per I. B.

TAB. VIII. Fig. 1. DE Spirali Logarithmica: Si in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam secent eodem angulo obliquo radii CB, CL &c. ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc Spiralis Logarithmica; quoniam sumtis arcubus LM. MN &c, infinite parvis & æqualibus, hoc est, ipsis BL, BM, BN, Arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, sunt Geometrice proportionales, ob Triangula similia DCE, ECI, &c. Spiralis isthæc jam Wallisio & Barrovio considerari cœpta est; nec

(d) याकूब बर्नूली

चित्र 9.7: याकूब बर्नूली की कैटेनरी चुनौती के जून 1691 के *acta eruditis* समाधान

9.2.3.5 प्रकाशनोत्तर विश्लेषण और विरासत

सभी समाधान प्रकाशित हो जाने पर लाइबनिट्स ने हाइगेन्स को प्रत्येक गणितीय वर्णन की समानताओं और अंतरों पर अपनी राय दी। 24 जुलाई, 1691 को हाइगेन्स को लिखे पत्र (Leibniz, 1691c) में उन्होंने योहान बर्नूली द्वारा अपनी नई विधि के उपयोग का उल्लेख किया, जिसने समस्या को उनकी गणितीय तुल्यता द्वारा अतिपरवलय के क्षेत्रकलन में घटाया:

> [C]omme les Equations communes pures se resolvent par la seule extraction des racines ; de même les Equations pures Transcendentes sont reduites aux sommes ou quadratures. Et comme on n'a pas encor perfectionné l'Analyse des Equations ; de même n'ay je pas encor tellement perfectionnée ma methode que je puisse tousjours reduire tous ces problemes Transcendans aux

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> seules quadratures. Cependant j'en ay ouvert le chemin, et même je suis assez avancé. Aussi les deux problemes, que vous m'avés proposés, Monsieur, qui donnent d'abord une Equation Transcendente Affectée, se peuvent tous deux reduire aux quadratures ; at même je trouve qu'ils ne supposent que la quadrature de l'Hyperbole pour estre construits. Et quand je puis reduire ces problemes aux quadratures, je crois alors d'avoir surmonté la plus grande difficulté. Cependant pour perfectionner cette Methode il faut aussi achever la doctrine des quadratures.
>
> जिस प्रकार साधारण शुद्ध समीकरणों को केवल मूल निकालकर हल किया जाता है, उसी प्रकार शुद्ध अतिपारगामी समीकरण योगों अथवा कृषेत्रकलनों में घटाए जाते हैं। और जिस प्रकार समीकरणों का विश्लेषण अभी पूर्ण नहीं हुआ है, उसी प्रकार मैंने भी अभी अपनी विधि को इतना पूर्ण नहीं किया है कि इन सभी अतिपारगामी समस्याओं को सदैव केवल कृषेत्रकलनों में घटा सकूँ। तथापि मैंने मार्ग खोल दिया है और पर्याप्त प्रगति भी कर चुका हूँ। महोदय, आपने जो दो समस्याएँ मुझे दी हैं, वे आरंभ में एक प्रभावित अतिपारगामी समीकरण देती हैं, किंतु दोनों को कृषेत्रकलनों में घटाया जा सकता है; और मैं यह भी पाता हूँ कि उनके निर्माण के लिए केवल अतिपरवलय के कृषेत्रकलन की आवश्यकता है। जब मैं इन समस्याओं को कृषेत्रकलनों में घटा सकता हूँ, तब मुझे विश्वास होता है कि मैंने सबसे बड़ी कठिनाई पार कर ली है। किंतु इस विधि को पूर्ण करने के लिए कृषेत्रकलनों के सिद्धांत को भी पूरा करना आवश्यक है।
>
> Leibniz, 1691c *"Letter to Christiaan Huygens"*

लाइबनिट्स के कलन की परिशुद्धता ने उनमें यह संदेह उत्पन्न किया कि अन्य लोग उनकी विधियों की साहित्यिक चोरी कर सकते हैं। किंतु कैटेनरी समाधानों के संबंध में ऐसे संदेह उठने पर लाइबनिट्स ने 21 सितंबर, 1691 के पत्र में अपना बचाव करते हुए दावा किया कि Acta Eruditorum के संपादकों ने योहान बर्नूली के योगदान को पूर्ण गोपनीयता से संभाला था। इसके अतिरिक्त, लाइबनिट्स ने हाइगेन्स द्वारा की गई अनेक त्रुटियों की ओर संकेत किया। उन्होंने जून 1688 के Acta Eruditorum में "De Angulo contactus et osculi" नामक लेख प्रकाशित किया था, जिसमें कैटेनरी को चाप की छेदक रेखाओं के योग में घटाया था; उन्हें कैटेनरी को अतिपरवलय के कृषेत्रकलन से जोड़ना चाहिए था। 16 नवंबर, 1691 के पत्र में हाइगेन्स के उत्तर ने इस विवाद में सुलह का कार्य किया। उन्होंने कहा कि कैटेनरी और अतिपरवलय के कृषेत्रकलन के बीच संबंध को अंततः समझने के लिए वे नए अतिसूक्ष्म कलन का गहन अध्ययन करना चाहते थे।

इसके बावजूद, और याकूब बर्नूली की चुनौती का समाधान हो जाने के बाद भी, हाइगेन्स लाइबनिट्स के वैश्लेषिक उपागम की तुलना में अपनी ज्यामितीय विधियों की पर्याप्तता का समर्थन करते रहे। यह गणितीय कार्यविधि में पीढ़ीगत संक्रमण को प्रतिबिंबित करता है—पुरानी ज्यामितीय परंपरा के प्रतिनिधि हाइगेन्स ने धीरे-धीरे लाइबनिट्सीय कलन की शक्ति को सराहा, किंतु वे अपनी स्थापित तकनीकों में अधिक सहज बने रहे। यद्यपि हाइगेन्स ने अंततः कुछ स्थितियों में नए कलन को लागू करना सीखा, उन्होंने शास्त्रीय ज्यामितीय विधियों के प्रति अपनी वरीयता कभी पूरी तरह नहीं छोड़ी। कैटेनरी चुनौती का समाधान गणित के इतिहास में एक निर्णायक मोड़ था। लाइबनिट्स के समाधान ने उनके समकालीनों, विशेषतः हाइगेन्स, के समक्ष अतिसूक्ष्म कलन की शक्ति और उपयोगिता का प्रभावशाली प्रदर्शन किया। इस समाधान द्वारा वे यांत्रिक वक्रों का गणितीय वर्णन ज्ञात करने की एक सामान्य विधि प्रस्तुत कर सके—ऐसा उपागम जिसने गणितीय अनंतता वाली समस्याओं से व्यवस्थित रूप से निपटने का साधन दिया (Palomo, 2017 PDF) और आगामी शताब्दियों के लिए अवकल कलन को प्रमुख वैश्लेषिक साधन के रूप में स्थापित किया।

हाइगेन्स की प्रतिक्रिया (Huygens, 1888a) 1 सितंबर, 1691 तक विलंबित रही; तब उन्होंने स्वीकार किया कि उन्होंने कैटेनरी को अतिपरवलय के कृषेत्रकलन से नहीं जोड़ा था। स्पष्टतः उन्हें संदेह था कि लाइबनिट्स और योहान बर्नूली ने *Acta Eruditorum* में प्रकाशन से पहले अपने समाधान साझा किए होंगे। इससे उनकी प्रक्रियाओं के बीच अत्यधिक समानता समझाई जा सकती थी, जैसा उन्होंने लाइबनिट्स के समक्ष बहुत अनुकूल न रहने वाले स्वर में व्यक्त किया। यद्यपि योहान बर्नूली ने स्वीकार किया कि अतिपरवलय के कृषेत्रकलन का उपयोग कैटेनरी खींचने के लिए किया जा सकता है, लाइबनिट्स इससे आगे गए; उन्होंने सब कुछ लघुगणकों में घटाया और इस प्रकार भविष्य के गणित के विकास की दिशा निर्धारित की:

> मैंने अपने समाधान में इस अंतिम आकृति, अर्थात् उसके कृषेत्रफल, का गुरुत्व-केंद्र भी जोड़ दिया है। श्री हाइगेन्स निम्नलिखित कृषेत्रकलन मानकर वक्र का निर्माण देते हैं: $xxyy = a^4 - aayy$, जबकि श्री योहान बर्नूली और मैंने

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> कैटेनरी को अतिपरवलय के कृषेत्रकलन से संबंधित किया है; बाद वाले ने एक परवलयिक वक्र के कृषेत्रकलन का अत्यंत विवेकपूर्ण उपयोग किया है, जबकि मैंने सब कुछ लघुगणकों में घटा दिया है; इस प्रकार मैंने अतिपारगामियों के लिए व्यंजक के प्रकार और सभी संभावित निर्माणों में सर्वोत्तम निर्माण निर्धारित किया है। वास्तव में, आपको केवल एक अद्वितीय स्थिर अनुपात जानना आवश्यक है, जो केवल साधारण ज्यामिति का उपयोग करते हुए और किसी अतिरिक्त कृषेत्रकलन अथवा चाप-परिमापन की आवश्यकता के बिना अनंत बिंदुओं को ज्ञात करने में सक्षम बनाएगा।
>
> Huygens, 1888a *"Letter to Gottfried Wilhelm Leibniz, 1 September 1691"*

9.2.4 उपसंहार

9.2.4.1 विस्मृत एकीकरण

आधुनिक अध्ययनों ने प्रकट किया है कि याकूब बर्नूली ने एक सामान्य अवकल समीकरण की व्युत्पत्ति द्वारा कैटेनरी और इलास्टिका समस्याओं का सफलतापूर्वक एकीकरण किया था और अपनी मूल 1690 की चुनौती जारी करते समय निर्धारित लक्ष्य प्राप्त किया था (Alassi, 2020)। यह उल्लेखनीय उपलब्धि उनकी निजी टिप्पण-पुस्तिकाओं में दबी रही और उनके समकालीनों तथा बाद के इतिहासकारों, दोनों द्वारा अपरिचित रही। यद्यपि निकोलाउस (प्रथम) बर्नूली (चित्र 6.16) ने 1744 में याकूब की *Varia Posthuma* में इस कार्य को सम्मिलित किया था, (Bernoulli, 1744) इसके महत्त्व की उपेक्षा हुई।

याकूब के योगदान की विस्मृत प्रकृति तब स्पष्ट हुई जब एलबीसी आद्याक्षरों का उपयोग करने वाले एक अज्ञात गणितज्ञ ने *Acta Eruditorum* के अगस्त 1724 अंक में कैटेनरी चुनौती को पुनर्जीवित किया (Anonymous, 1724)। इस नए सूत्रीकरण में मूल समस्या की आदर्श, पूर्णतः नम्य शृंखलाओं के स्थान पर "मध्यम रूप से नम्य" और "वास्तविक" शृंखलाओं के विश्लेषण की माँग की गई। एलबीसी चुनौती ने मूलतः याकूब की अधिक व्यापक funicularia समस्या को पुनः सूत्रबद्ध किया और प्रदर्शित किया कि लाइबनिट्स की संकीर्णतर व्याख्या ने गणितीय स्मृति में याकूब की मूल परिकल्पना को कितनी पूर्णता से विस्थापित कर दिया था।

लियोनार्ड ऑयलर ने 1728 में इस चुनौती का ऐसा समाधान दिया जो एकीकृत उपागम से कैटेनरी और इलास्टिका दोनों की वक्रताएँ व्युत्पन्न कर सकता था। फलतः गणित के इतिहासकारों ने परंपरागत रूप से इन दोनों समस्याओं के प्रथम एकीकरण का श्रेय याकूब बर्नूली को नहीं, बल्कि ऑयलर को दिया है—यह आरोपण याकूब के तीन दशकों से अधिक पुराने अग्रणी कार्य की उपेक्षा करता है (Alassi, 2020)। यह ऐतिहासिक उपेक्षा किसी गणितीय खोज के विद्वत् स्मृति से लुप्त होकर वर्षों बाद स्वतंत्र रूप से पुनः खोजे जाने के सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण उदाहरणों में से एक है।

9.2.4.2 गणितीय विरासत

यद्यपि 1690-1691 की कैटेनरी चुनौती को लाइबनिट्स, हाइगेन्स और योहान बर्नूली ने विजयपूर्वक हल कर लिया था, उसके बौद्धिक प्रभाव Acta Eruditorum में समाधानों के प्रकाशित होने के बहुत बाद तक बने रहे। लगभग 1692 में अपने अध्ययन-कक्ष की निस्तब्धता में याकूब बर्नूली—वह मूल चुनौतीकर्ता जो अपनी ही समस्या हल नहीं कर सके थे—एक अधिक गहन गणितीय चिंतन में प्रवृत्त हुए (Bernoulli, Jakob, 1677–1705)। अपनी निजी टिप्पण-पुस्तिका Meditationes में कार्य करते हुए उन्होंने ऐसी संबद्धताएँ देखनी आरंभ कीं जो एकल लटकती शृंखला से परे थीं। catenaria अकेली नहीं थी: वह velaria (पाल-वक्र), lintearia (वस्त्र-वक्र) और elastica (प्रत्यास्थ-वक्र) वाले एक परिवार की सदस्य थी। याकूब ने इन्हें एकीकृत गणितीय सिद्धांत की अभिव्यक्तियों के रूप में पहचाना और इन सभी को नियंत्रित करने वाला एक सामान्य अवकल समीकरण विकसित किया। शताब्दियों तक उनकी टिप्पण-पुस्तिकाओं में छिपी यह निजी अंतर्दृष्टि, उस उपलब्धि से तीस वर्ष से भी पहले की थी जिसे लियोनार्ड ऑयलर बाद में विचरण-कलन की आधारशिला के रूप में औपचारिक रूप देंगे। इस प्रकार गणितीय प्रतिद्वंद्वियों की प्रतियोगिता के रूप में आरंभ हुई कैटेनरी चुनौती कहीं अधिक व्यापक विषय में विकसित हुई—प्रकृति के वक्रों की अंतर्निहित एकता की एक खिड़की, जिसने दिखाया कि एक साधारण लटकती शृंखला कैसे प्रत्यास्थ धरनों से लेकर हवा में फूलते पालों तक को नियंत्रित करने वाली गणितीय संरचनाओं को प्रकाशित कर सकती है।

समीक्षा प्रति

9.2.4.3 याकूब का विरोधाभास

कैटेनरी चुनौती गणित की सर्वाधिक मार्मिक विडंबनाओं में से एक प्रस्तुत करती है: लटकती शृंखला का वक्र ज्ञात करने की चुनौती आत्मविश्वास से जारी करने वाले प्रतिष्ठित प्राध्यापक याकूब बर्नूली अपने युग के एकमात्र प्रमुख गणितज्ञ बन गए जो अपनी ही समस्या हल नहीं कर सके। याकूब बर्नूली ने अपने द्वारा प्रस्तुत लटकती शृंखला की समस्या का समाधान नहीं दिया—यह बात उनके छोटे भाई योहान ने प्रायः उस कटु प्रतिद्वंद्विता में उठाई जो 1705 में याकूब की मृत्यु के बाद भी चली (Deakin, 2007; Alassi, 2020)। जहाँ लाइबनिट्स, हाइगेन्स और—उनके लिए सर्वाधिक लज्जाजनक रूप से—उनके अपने छोटे भाई योहान ने जून 1691 के *Acta Eruditorum* में सुरुचिपूर्ण समाधान प्रकाशित किए, वहीं याकूब उल्लेखनीय रूप से मौन रहे। गणित में याकूब के विद्यार्थी रहे योहान ने इस विफलता को खुले उल्लास से भुनाते हुए गर्वपूर्वक कहा

> मेरे भाई के प्रयास निष्फल रहे; जहाँ तक मेरा प्रश्न है, मैं अधिक भाग्यशाली था, क्योंकि मैंने इसे पूर्णतः हल करने का कौशल पाया (मैं बिना डींग हाँके यह कहता हूँ, सत्य क्यों छिपाऊँ?)।
>
> n.d. *Jakob Bernoulli*

नए कलन की शक्ति प्रदर्शित करने के लिए याकूब द्वारा बनाई गई चुनौती इसके स्थान पर इस बात का सार्वजनिक प्रदर्शन बन गई कि विद्यार्थी ने गुरु को पीछे छोड दिया था। संभवतः सर्वाधिक अर्थपूर्ण बात यह है कि बाद में याकूब ने वक्रों के एकीकृत परिवार के विषय में अपनी गहन अंतर्दृष्टियाँ केवल सार्वजनिक जाँच से दूर अपनी *Meditationes* टिप्पण-पुस्तिका (Bernoulli, Jakob, 1677–1705) की निजता में विकसित कीं (Alassi, 2020)—मानो गणित के देवताओं ने अपने गहनतम रहस्य उसी व्यक्ति के लिए सुरक्षित रखे हों जो उनकी आरंभिक परीक्षा में असफल रहा था।

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §30.3.3 देखें

9.3 इलास्टिका चुनौती (1690-1744)

9.3.1 याकूब बर्नूली की चुनौती (1690)

भूमिका: एक शिल्पकार के साथ संवाद

याकूब बर्नूली की प्रसिद्ध इलास्टिका चुनौती प्रस्तुत करने से पहले, उस संक्षिप्त किंतु अर्थपूर्ण पाठ पर विचार करना उपयोगी है जिसे कभी-कभी उनका "एक शिल्पकार के साथ संवाद" कहा जाता है (Bernoulli, Jakob, 1691)[13]। कुछ संक्षिप्त अनुच्छेदों में बर्नूली एक अनुभवी यांत्रिक के साथ काल्पनिक वार्तालाप प्रस्तुत करते हैं, जो कार्यशाला के अनुभव से बताता है कि लकडी की पतली पट्टियाँ कैसे मुडती हैं—शिकंजों की भूमिका, दृढता की सीमाएँ और भार DANIEL हटने पर अनिवार्य प्रत्यावर्तन। बर्नूली सुनते हैं, किंतु इन व्यावहारिक अनुमानों को विनम्रता से चुनौती देते हुए सुझाते हैं कि "मुडी हुई आकृति" को अनंत प्रयोगों के स्थान पर प्रथम सिद्धांतों से व्युत्पन्न किसी निश्चित गणितीय नियम का पालन करना चाहिए। वे यह घोषित करते हुए समाप्त करते हैं कि पूर्ण उपपत्ति आगे दी जाएगी, और इस प्रकार विद्वत् जगत को उस विचरणात्मक इलास्टिका समस्या को हल करने के लिए प्रभावतः आमंत्रित करते हैं जो शीघ्र ही *Acta Eruditorum* (1691–1694) में आने वाली थी।

यह साहित्यिक युक्ति सुविचारित थी। बर्नूली द्वारा संवादात्मक प्रारूप का चयन गैलीलियो के प्रसिद्ध *Dialogo* की प्रतिध्वनि है, जिसमें सालिवयाती, साग्रेदो और सिम्प्लीचियो के जीवंत वाद-विवाद विद्वानों तथा सामान्य पाठकों, दोनों के

[13]विशुद्ध वैज्ञानिक दृष्टिकोण से यह संवाद इलास्टिका के गणित में बहुत कम जोडता है। इसका महत्त्व यह दिखाने में है कि सत्रहवीं शताब्दी के एक अग्रणी गणितज्ञ ने व्यावहारिक शिल्पकार से अंतर्दृष्टि कैसे प्राप्त की। दुर्भाग्य से आज ऐसा पारस्परिक आदान-प्रदान दुर्लभ है: समकालीन शोधकर्ता समस्याओं के सूत्रीकरण अथवा अपनी सैद्धांतिक प्रगति के अनुप्रयोग में प्रेरणा के लिए कुशल कारीगरों की ओर विरले ही देखते हैं। इस आदान-प्रदान के ऐतिहासिक संदर्भ का अधिक विवरण (Alassi, 2019) में मिलता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समकक्ष प्राकृतिक दर्शन प्रस्तुत करने का आदर्श बन गए थे, §6.6.2 और §6.6.2। गैलीलियो की भाँति बर्नूली ने अनुभवजन्य व्यावहारिक ज्ञान और गणितीय अमूर्तन के मिलन को नाटकीय रूप देने के लिए संवाद का उपयोग किया।

इस पाठ में कोई समीकरण नहीं है और यह विचरण-कलन का परिचय भी नहीं देता; इसका मूल्य शिल्पकार की अंतःप्रज्ञा से कठोर सिद्धांत तक के संक्रमण को चित्रित करने में है। आधुनिक पाठकों के लिए यह तकनीकी स्रोत से अधिक सांस्कृतिक भूमिका है, जो व्यावहारिक यांत्रिकी से बर्नूली के संबंध को रेखांकित करती है, सुगम वैज्ञानिक विमर्श की गैलीलियाई परंपरा को स्वीकार करती है और उन सरलीकरणकारी मान्यताओं—तनु, भारहीन, अविस्तार्य छडों—का संकेत देती है जिनके अधीन वे शीघ्र ही अपनी प्रसिद्ध चुनौती प्रस्तुत करने वाले थे।

पृष्ठभूमि

1690 तक गैलीलियो, देकार्त, मारियोट और अन्य प्राकृतिक दार्शनिकों के अन्वेषण मुख्यतः सामर्थ्य के प्रश्नों—विभंजन भार, प्रतिबल वितरण और विफलता विधियों—पर केंद्रित थे और संरचनात्मक अवयवों को मूलतः दृढ पिंड माना जाता था। बर्नूली का 1690 का प्रकाशन पदार्थों की यांत्रिकी में गहन परिवर्तन चिह्नित करने वाला था। केवल यह पूछने के स्थान पर कि कोई संरचना कब विफल होगी, उन्होंने यह समझना चाहा कि वह कैसे मुडती और विकृत होती है; इस प्रकार यांत्रिकी के अध्ययन में प्रत्यास्थता की सतत क्रिया का प्रवेश हुआ।

मुख्य शोध-पत्र

याकूब बर्नूली का लेख (Bernoulli, Jakob, 1690a)[14], जिसका शीर्षक *Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum* था, विश्लेषण के आरंभिक इतिहास में अद्वितीय स्थान रखता है[15]।

उस समय लाइबनिट्स का अवकल कलन अभी शैशवावस्था में था और ठोस समस्याएँ हल करने की उसकी शक्ति संदेहशील गणितीय समुदाय के समक्ष प्रदर्शित की जानी थी। इस प्रकाशन में बर्नूली के योगदान ने ठीक ऐसा ही प्रदर्शन प्रस्तुत किया। उन्होंने नई विधियों को तीन परस्पर संबद्ध समस्याओं पर लागू किया:

लघुगणकीय सर्पिल: याकूब लघुगणकीय सर्पिलों के गुणों का परीक्षण करते हैं, उनकी चाप-लंबाइयों, स्पर्शरेखाओं और क्षेत्रफलों की गणना करते हैं तथा उनके स्व-सादृश्य के उल्लेखनीय गुण पर प्रकाश डालते हैं। अधिक विशेषतः वे दिखाते हैं कि केंद्र से खींची गई त्रिज्याएँ सर्पिल को नियत कोणों पर काटती हैं और जब संगत चाप-लंबाइयाँ समांतर श्रेणी में हों तब ये त्रिज्याएँ गुणोत्तर श्रेणी बनाती हैं।

लोक्सोड्रोम (रम्ब रेखाएँ): गोले पर नौचालन का विचार करते हुए बर्नूली उन वक्रों का विश्लेषण करते हैं जो सभी याम्योत्तरों को नियत कोणों पर काटते हैं—अर्थात् वे पथ जिनका अनुसरण पोत नियत दिक्सूचक दिक्मान रखते हुए करते हैं। गोले पर नियत दिक्सूचक दिक्मान से अनुरेखित इन रेखाओं ने कलन को नौचालन और मानचित्रण की व्यावहारिक आवश्यकताओं से जोडा। वे ऐसे मार्गों पर दूरियाँ और देशांतर-अंतर परिकलित करने की विधियाँ विकसित करते हैं।

गोलीय त्रिभुजों के क्षेत्रफल: वे गोलीय त्रिभुजों के क्षेत्रफल निर्धारित करने के लिए ज्यामितीय निर्माण और वैश्लेषिक सूत्र, दोनों प्रस्तुत करते हैं, जिनके खगोल-विज्ञान और मानचित्रण में अनुप्रयोग हैं। इस कार्य ने दिखाया कि अतिसूक्ष्म विधियाँ शास्त्रीय गोलीय त्रिकोणमिति के साथ कैसे अंतःक्रिया कर सकती हैं।

[14]आधुनिक अध्ययन (Alassi, 2020) ने स्थापित किया है कि परिशिष्ट और विपर्यय 1690 के लेख से संबंधित हैं, जो उसी वर्ष जून में प्रकाशित हुआ था। पुराने ग्रंथ-सूचियों में 1691 के संदर्भ त्रुटिपूर्ण हैं।

[15]वक्रता की ज्यामितीय आधारभूमि—जिसमें स्पर्शवृत्त, उत्केंद्रज और स्पर्शरेखा-कोण के परिवर्तन की दर की संकल्पनाएँ सम्मिलित हैं—से अपरिचित पाठकों को पहले अध्याय 8 देखने की प्रबल अनुशंसा की जाती है; उसमें इन आवश्यक संकल्पनाओं को उनके ऐतिहासिक उद्गम से परिपक्व सूत्रीकरण तक विकसित किया गया है। वहाँ प्रस्तुत सामग्री आगे आने वाले इलास्टिका समस्या के यांत्रिक सूत्रीकरण को समझने की पूर्वापेक्षा है।

समीक्षा प्रति

इन विषयों के बीच संबंध विषयगत न होकर कार्यविधिगत हैं। प्रत्येक समस्या नवविकसित अवकल कलन के परिष्कृत अनुप्रयोग माँगती है: लघुगणकीय सर्पिल अवकल संबंधों द्वारा परिभाषित वक्रों के विश्लेषण की तकनीकें दर्शाता है; लोक्सोड्रोम विश्लेषण में वक्र पृष्ठों पर जटिल समाकलन सम्मिलित हैं; और गोलीय त्रिभुज का कार्य ज्यामितीय तर्क को वैश्लेषिक परिकलन से मिलाता है। इन गणितीय साधनों ने बर्नूली को स्वाभाविक रूप से इलास्टिका समस्या की ओर निर्देशित किया—भौतिक प्रतिबंधों के अधीन वक्र रूपों वाली एक अन्य अवकल-समीकरण चुनौती, किंतु ऐसी चुनौती जिसके लिए उन विचरणात्मक विधियों का विकास आवश्यक था जो अभी पूर्णतः सूत्रबद्ध नहीं हुई थीं।

मूलतः यह शोध-पत्र विविध गणितीय क्षेत्रों में नए कलन की शक्ति और बहुमुखिता प्रदर्शित करता है तथा इसके परिशिष्ट में घोषित कठिन इलास्टिका समस्या पर समाप्त होता है।

परिशिष्ट में चुनौती

1690 में जब याकूब funicularia समस्या पर लाइबनिट्स के साथ सहयोग कर रहे थे, तब उनका सामना उस समस्या से हुआ जो गणितीय भौतिकी की सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण समस्याओं में से एक बनने वाली थी।

> Occasione Problematis funicularii moz in aliud non minus illustre delapsi sumus
>
> फ़्यूनिक्युलर समस्या के प्रसंग में शीघ्र ही हमारा सामना एक अन्य, उससे कम विलक्षण नहीं [समस्या] से हुआ।
> Bernoulli, Jakob, 1690a *"Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum"*

> Occasione Problematis funicularii moz in aliud non minus illustre delapsi sumus, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tensorum aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenso pondere aut alia quacunque vi comprimente factas; quorsum etiam Celeberrimum Leibnitium in privatis, quibus sub idem me tempus honoravit, literis digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheseos incertitudinem, tum casuum multiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori, quanquam hic non prolixo calculo sed industria tantum opus est. Ego per solutionem casus simplicissimi (saltem in præmemorata hypothesi extensionis) adyta Problematis feliciter reseravi; verum ut ad imitationem Viri Excellentissimi & aliis spatium concedam suam tentandi Analysin, premam pro nunc solutionem, eamque tantisper Logogripho occultabo, clavem cum demonstratione in nundinis autumnalibus communicaturus.
>
> Funicularia समस्या पर कार्य करते समय हमारा [याकूब बर्नूली और लाइबनिट्स का] सामना एक अन्य विलक्षण समस्या से हुआ। यह धरनों, खींचे हुए धनुषों अथवा किन्हीं प्रत्यास्थ पट्टियों के बंकन अथवा वक्रता से संबंधित है, जो उनके अपने भार, किसी लटकते भार अथवा किसी अन्य बंकन बल के कारण उत्पन्न होती है। प्रसिद्ध श्री लाइबनिट्स ने एक पत्र में मेरा ध्यान इस समस्या की ओर आकर्षित किया। चाहे परिकल्पना के chap:trustregion के कारण हो अथवा स्थितियों की बहुल विविधता के कारण, यह पिछली समस्या से अधिक कठिन प्रतीत होती है। यहाँ लंबी नहीं, बल्कि परिश्रमी गणना की आवश्यकता है। किंतु सौभाग्य से सरलतम स्थिति के समाधान द्वारा (कम-से-कम उस उल्लिखित मान्यता के अधीन कि विस्तार खिंचाव बलों के समानुपाती हैं) इस समस्या के समाधान के द्वार मेरे लिए खुल गए। जैसा अत्यंत प्रसिद्ध व्यक्ति [लाइबनिट्स] पहले कर चुके हैं, मैं भी दूसरों को इस विषय का विश्लेषण आजमाने का कुछ समय दूँगा। अतः अभी समाधान रोककर उसे एक Logogriph में छिपाऊँगा। फसल उत्सव तक मैं समाधान और उपपत्तियाँ प्रकाशित करूँगा।
> Bernoulli, Jakob, 1690a *"Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum"*

Acta Eruditorum में प्रकाशित इस चुनौती ने दृढ पिंडों के स्थैतिकी से प्रत्यास्थ वक्रों के गणितीय सिद्धांत की ओर

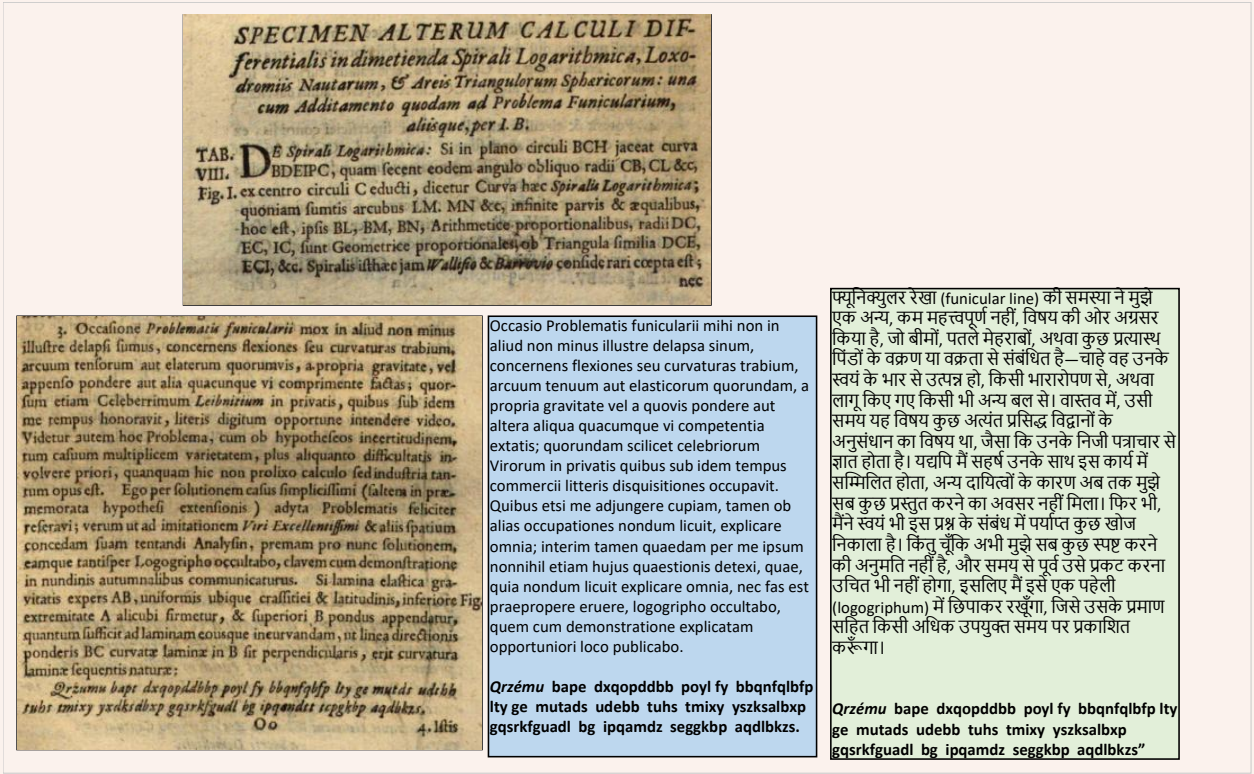
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संक्रमण का प्रभावी संकेत दिया। यद्यपि न्यूटन ने 1670 के दशक में निजी रूप से संबंधित आकृतियों का अन्वेषण किया था (§8.2.2), बर्नूली के सार्वजनिक सूत्रीकरण ने ही इस क्षेत्र के व्यवस्थित विकास की आधारशिला रखी।

बर्नूली ने एक परिष्कृत रणनीति अपनाई: उन्होंने घोषणा की कि उनके पास एक समाधान है जिसे वे *logogriph* में छिपाएँगे (§6.11.1.1, सारणी 6.6):

> Qrzumu bapt dxqopddbbp poylfy bbqnfqbfp ltyge murds udıbb tubstmixyyxdksdbxpgqsrkfgudl bg ipqandtt tcpgkbp aqdbkzs
>
> Bernoulli, Jakob, 1690a "*Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum*"; Logogriph

उन्होंने अक्तूबर 1690 में Basel!harvest festival तक कूट और उसका समाधान, दोनों प्रकट करने का वचन दिया[16]। इस रणनीतिक उपागम ने अनेक उद्देश्यों की पूर्ति की: इसने खोज पर उनकी प्राथमिकता स्थापित की, समकालीनों को स्वतंत्र रूप से समस्या आजमाने का समय दिया और उन्हें अपने गणितीय विवेचन के परिष्करण हेतु अतिरिक्त समय प्रदान किया।



SPECIMEN ALTERUM CALCULI DIFferentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphæricorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque, per I. B.

TAB. VIII. Fig. I. DE Spirali Logarithmica: Si in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam fecent eodem angulo obliquo radii CB, CL &c, ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc Spiralis Logarithmica; quoniam sumtis arcubus LM. MN &c, infinite parvis & æqualibus, hoc est, ipsis BL, BM, BN, Arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, sunt Geometrice proportionales, ob Triangula similia DCE, ECI, &c. Spiralis isthæc jam Wallisio & Barrovio conside rari cœpta est; nec

3. Occasione Problematis funicularii mox in aliud non minus illustre delapsi sumus, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tenforum aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenso pondere aut alia quacunque vi comprimente factas; quorsum etiam Celeberrimum Leibnitium in privatis, quibus sub idem me rempus honoravit, literis digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheseos incertitudinem, tum casuum multiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori, quanquam hic non prolixo calculo sed industria tantum opus est. Ego per solutionem casus simplicissimi (saltem in præmemorata hypothesi extensionis) adyta Problematis felsciter reseravi; verum ut ad imitationem Viri Excellentissimi & aliis spatium concedam suam tentandi Analysin, premam pro nunc solutionem, eamque tantisper Logogripho occultabo, clavem cum demonstratione in nundinis autumnalibus communicaturus. Si lamina elastica gravitatis expers AB, uniformis ubique crassitiei & latitudinis, inferiore Fig. extremitate A alicubi firmetur, & superiori B pondus appendatur, quantum sufficit ad laminam eousque incurvandam, ut linea directionis ponderis BC curvatæ laminæ in B sit perpendicularis, erit curvatura laminæ sequentis naturæ:

Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutads udebb tuhs tmixy yxdksdbxp gqsrkfguadl bg ipqamdz tcpgkbp aqdbkzs.

Oo 4. Idis

Occasio Problematis funicularii mihi non in aliud non minus illustre delapsa sinum, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tenuum aut elasticorum quorundam, a propria gravitate vel a quovis pondere aut altera aliqua quacumque vi competentia extatis; quorundam scilicet celebriorum Virorum in privatis quibus sub idem tempus commercii litteris disquisitiones occupavit. Quibus etsi me adjungere cupiam, tamen ob alias occupationes nondum licuit, explicare omnia; interim tamen quaedam per me ipsum nonnihil etiam hujus quaestionis detexi, quae, quia nondum licuit explicare omnia, nec fas est praepropere eruere, logogripho occultabo, quem cum demonstratione explicatam opportuniori loco publicabo.

Qrzému bape dxqopddbb poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutads udebb tuhs tmixy yszksalbxp gqsrkfguadl bg ipqamdz seggkbp aqdlbkzs.

फ्यूनिक्युलर रेखा (funicular line) की समस्या ने मुझे एक अन्य, कम महत्त्वपूर्ण नहीं, विषय की ओर अग्रसर किया है, जो बीमों, पतले मेहराबों, अथवा कुछ प्रत्यास्थ पिंडों के वक्रण या वक्रता से संबंधित है—चाहे वह उनके स्वयं के भार से उत्पन्न हो, किसी भारारोपण से, अथवा लागू किए गए किसी भी अन्य बल से। वास्तव में, उसी समय यह विषय कुछ अत्यंत प्रसिद्ध विद्वानों के अनुसंधान का विषय था, जैसा कि उनके निजी पत्राचार से ज्ञात होता है। यद्यपि मैं सहर्ष उनके साथ इस कार्य में सम्मिलित होता, अन्य दायित्वों के कारण अब तक मुझे सब कुछ प्रस्तुत करने का अवसर नहीं मिला। फिर भी, मैंने स्वयं भी इस प्रश्न के संबंध में पर्याप्त कुछ खोज निकाला है। किंतु चूँकि अभी मुझे सब कुछ स्पष्ट करने की अनुमति नहीं है, और समय से पूर्व उसे प्रकट करना उचित भी नहीं होगा, इसलिए मैं इसे एक पहेली (logogriphum) में छिपाकर रखूँगा, जिसे उसके प्रमाण सहित किसी अधिक उपयुक्त समय पर प्रकाशित करूँगा।

Qrzému bape dxqopddbb poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutads udebb tuhs tmixy yszksalbxp gqsrkfguadl bg ipqamdz seggkbp aqdlbkzs"

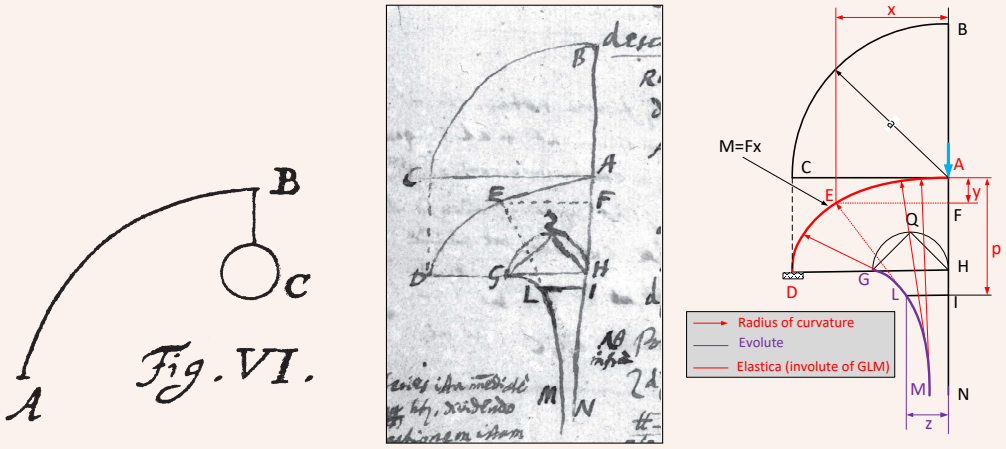
चित्र 9.8: बर्नूली की चुनौती, (Bernoulli, Jakob, 1690a)

अक्तूबर 1690 की समय-सीमा आने पर अन्य गणितज्ञों ने कोई समाधान प्रस्तुत नहीं किया था। अपना उत्तर तत्काल प्रकट करने के स्थान पर, जैसा उन्होंने वचन दिया था, बर्नूली ने निजी रूप से अपना समाधान विकसित करना जारी रखा। 1692 तक वे अपनी निजी वैज्ञानिक दैनंदिनी *Meditatione CLXX* में आयताकार स्थिति का विश्लेषण पूर्ण कर चुके थे;

[16] शाही विशेषाधिकार द्वारा 1471 में स्थापित बासेल *Herbstmesse* (फसल मेला) परंपरागत रूप से अक्तूबर के अंतिम शनिवार को आरंभ होता है और दो सप्ताह चलता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

उसका शीर्षक *Quadratura Curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura* (एक वक्र का क्षेत्रकलन, जिसके उत्क्रम से मुडी हुई पटलिका का वक्र अनुरेखित होता है) था (Bernoulli, Jakob, 1692)।



(a) याकूब बर्नूली का आरेख (Bernoulli, Jakob, 1692)

(b) आधुनिक पुनर्निर्माण ((Levien, 2008) पर आधारित)

चित्र 9.9: याकूब बर्नूली की इलास्टिका

सारणी 9.4 चुनौती की प्रतिक्रियाओं का अवलोकन प्रस्तुत करती है।

तालिका 9.4: इलास्टिका चुनौती की समयरेखा

तिथि	घटना
जून 1690	याकूब बर्नूली ने *Specimen alterum* में इलास्टिका समस्या प्रस्तुत की (Bernoulli, Jakob, 1690a)।
1690	बर्नूली ने समाधान को विपर्यय (logogriph) में कूटबद्ध किया (Bernoulli, Jakob, 1690a)।
अक्तूबर 1690	समय-सीमा (बासेल फसल उत्सव) बीती; कोई समाधान प्रस्तुत नहीं हुआ।
1692	याकूब ने निजी रूप से *Meditationes* CLXX में समाधान पूर्ण किया (Bernoulli, Jakob, 1677–1705)।
जून 1694	याकूब ने कूट खोले हुए समाधान सहित *Curvatura laminae elasticae* प्रकाशित किया (Bernoulli, 1694)।
1694	हाइगेन्स ने अनेक इलास्टिका विन्यासों की पहचान करने वाली समीक्षा प्रकाशित की (Bernoulli, 1694)।
1694	याकूब ने अपनी विधि की व्यापकता का समर्थन करते हुए हाइगेन्स को उत्तर दिया (Bernoulli, 1694)।
1696	योहान बर्नूली ने ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती प्रस्तुत की (Bernoulli, Johann, 1696)।
मई 1697	योहान ने प्रकाशिक सादृश्य का उपयोग कर ब्रैकिस्टोक्रोन समाधान प्रकाशित किया (Bernoulli, Johann, 1697a)।
1724	अज्ञात (एलबीसी) चुनौती ने समस्या को मध्यम रूप से नम्य रेखाओं तक विस्तारित किया (Anonymous, 1724)।
1728	डेनियल बर्नूली & ऑयलर ने नम्य–प्रत्यास्थ रेखा का एकीकृत सिद्धांत प्रकाशित किया (Bernoulli, Daniel, 1744; E
1732	ऑयलर ने प्रत्यास्थ और नम्य वक्रों को एकीकृत करने वाले सामान्य ज्यामितीय ढाँचे सहित *Solutio problematis* प्रकाि
अक्तूबर 1742	डेनियल ने ऑयलर को ऊर्जा-न्यूनतमीकरण सिद्धांत प्रस्तावित करते हुए लिखा (Bernoulli, Daniel, 1845)।
1744	ऑयलर ने व्यवस्थित विचरणात्मक समाधान सहित *Methodus inveniendi* प्रकाशित किया (Euler, 1744b)।
1744	याकूब का पूर्ण इलास्टिका कार्य मरणोपरांत *Opera Omnia* में संकलित हुआ (Bernoulli, Johann, 1713)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9.3.2 समाधान

बर्नूली ने स्वयं अपने विपर्यय (जिसके दो रूप उपलब्ध थे) द्वारा चुनौती में संकेतित समाधान प्रस्तुत किया। हाइगेन्स ने तुरंत प्रतिक्रिया करते हुए बर्नूली के समाधान पर आपत्ति की। ऑयलर ने 1732 में एक ज्यामितीय समाधान दिया; उसके बाद याकूब के भतीजे डेनियल ने 1742 में उस विचरण-कलन का बीज बोया जिसे ऑयलर ने आगे 1744 में औपचारिक रूप दिया, चित्र 9.10c।



(a) याकूब बर्नूली (1655-1705)



(b) डेनियल बर्नूली (1700-1782)

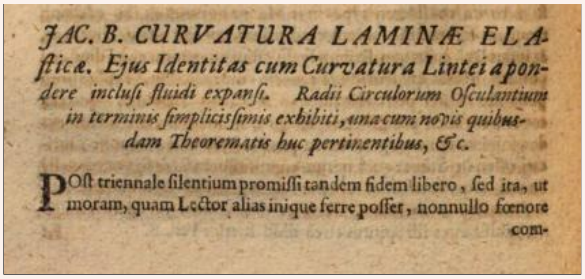


(c) लियोनार्ड ऑयलर (1707-1783)

चित्र 9.10: इलास्टिका सिद्धांत के शिल्पी: बासेल के गणितीय मनीषी (विकिपीडिया)

9.3.2.1 याकूब बर्नूली का समाधान (1694)

ऐतिहासिक संदर्भ बर्नूली का समाधान, (Bernoulli, Jakob, 1694), चित्र 9.11, उनके *Acta Eruditorum* के 1691 के विपर्यय पर आधारित कार्य है, जिसने उनकी विधि छिपाते हुए प्राथमिकता स्थापित की। कूट खोला गया विपर्यय बाद में प्रकट किए गए निश्चित ज्यामितीय संबंध को बताता है, न कि कुछ साहित्य में त्रुटिपूर्वक उद्धृत व्युत्क्रम बंकन-आघूर्ण/वक्रता नियम को (§6.11.1.1)।



JAC. B. CURVATURA LAMINÆ ELAstica. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere incluſi fluidi expanſi. Radii Circulorum Oſculantium in terminis ſimpliciſſimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.

POſt triennale ſilentium promiſſi tandem fidem libero, ſed ita, ut moram, quam Lector alias inique ferre poſſet, nonnullo fœnore com-

JAC. B. CURVATURA LAMINAE ELASTICAE. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.

Jakob Bernoulli. **प्रत्यास्थ पट्टिका (Elastic Lamina) की वक्रता। अंतर्निहित द्रव के भार से फैले लिनेन की वक्रता के साथ इसकी समानता। वक्रता-वृत्तों (Osculating Circles) की त्रिज्याएँ सरलतम पदों में व्यक्त, तथा इससे संबंधित कुछ नए प्रमेय आदि।**

चित्र 9.11: याकूब बर्नूली का Curvatura Laminae Elasticae... (Bernoulli, Jakob, 1694)

> Post triennale silentium promissi tandem fidem libero, sed ita, ut moram, quam Lector alias inique ferre posset, nonnullo foenore compensem, dum Elaterum curvaturam non in una sola, (ut initio fueram pollicitus,) sed generaliter in quacunque Extensionum hypothesi constructam exhibeo... Extitit enim jam inde a Galilei quoque temporibus celebre, qui Curvam hanc, per inde ut Funicullariam, Parabolam esse suspicatus erat.
>
> तीन वर्ष के मौन के बाद अंततः मैं अपना वचन पूरा करता हूँ, किंतु विलंब की क्षतिपूर्ति पर्याप्त ब्याज सहित करते हुए—जिसे पाठक अन्यथा अनुचित मान सकता था—प्रत्यास्थ पिंडों की वक्रता केवल एक स्थिति में (जैसा मैंने आरंभ में वचन दिया था) नहीं, बल्कि विस्तार की किसी भी परिकल्पना के अधीन सामान्य रूप से प्रस्तुत करता हूँ...
> क्योंकि यह समस्या गैलीलियो के समय से ही प्रसिद्ध हो चुकी थी; उन्होंने अनुमान किया था कि कैटेनरी की भाँति यह वक्र भी परवलय था।
>
> Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"*

बर्नूली अपने कार्य को गैलीलियो और अन्य लोगों के असफल प्रयासों के प्रतिपक्ष में रखते हैं तथा समस्या को "विस्तार की किसी भी परिकल्पना के अधीन" हल करने की अपनी उपलब्धि पर बल देते हैं—अर्थात् विशेष स्थितियों के स्थान पर एक सामान्य ढाँचा। बर्नूली द्वारा वक्रता की व्युत्पत्ति के लिए पाठक को पहले §8.2.5 देखने को कहा जाता है।

इलास्टिका का अभिलक्षण

> [Keep the entire Latin and English translation exactly as you have it]
>
> Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"* pg. 272
>
> CORRECT

यह बर्नूली के **आयताकार इलास्टिका** समाधान को निरूपित करता है—एक विशिष्ट स्थिति जिसमें एक सिरे पर स्थिर प्रत्यास्थ धरन को किसी भार द्वारा तब तक मोड़ा जाता है जब तक भारित सिरे की स्पर्शरेखा बल की दिशा के लंबवत न हो जाए। यद्यपि यह सभी इलास्टिका समस्याओं का पूर्ण समाधान नहीं है, यह कार्य विचरण-कलन के व्यवस्थित विकास से पहले का है और अतिपारगामी समस्याओं के प्रति 17वीं शताब्दी के गणितीय उपागमों की उल्लेखनीय अंतर्दृष्टि देता है।

बर्नूली का उपागम एक परिष्कृत ज्यामितीय निर्माण पर केंद्रित है जो भौतिक इलास्टिका समस्या को वक्र-जनन की समस्या में रूपांतरित करता है। उनकी विधि का सार इस प्रकार है:

1. दिए गए वक्र AFC से आरंभ करें, जो "तनाव नियम"—लगाए गए बलों AE और परिणामी तनावों EF के बीच संबंध—निरूपित करता है
2. ऐसा चतुर्थांश वृत्त GKL बनाएँ जिसका क्षेत्रफल वक्र AFC के नीचे के क्षेत्रफल के बराबर हो
3. प्रत्येक बिंदु E के लिए आधार AB पर संगत तनाव EF ज्ञात करें और एक विशिष्ट ज्यामितीय प्रक्रिया द्वारा सहायक वक्र AN बनाएँ
4. तब इस निर्माण की रेखाओं के प्रतिच्छेदन द्वारा प्रत्यास्थ वक्र AQR उत्पन्न होता है

निर्णायक अंतर्दृष्टि यह है कि बर्नूली ने पहचाना कि इलास्टिका मूलतः उससे संबंधित है जिसे आज हम दीर्घवृत्तीय समाकल कहते हैं, किंतु उन्होंने इसे वैश्लेषिक समाकलन के स्थान पर ज्यामितीय चाप-परिमापन द्वारा हल किया।

बर्नूली अपना प्रमुख ज्यामितीय संबंध इस प्रकार बताते हैं:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> Portio axis applicatam inter & tangentem eft ad ipfam tangentem, ficut quadratum applicatæ ad conftans quoddam fpatium.
>
> कोटि और स्पर्शरेखा के बीच अक्ष का भाग स्वयं स्पर्शरेखा के सापेक्ष वैसा ही है, जैसा कोटि का वर्ग किसी नियत क्षेत्रफल के सापेक्ष है।
>
> Bernoulli, Jakob, 1694 “*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*” pg. 272

किंतु इस कथन को बर्नूली के विशिष्ट ज्यामितीय ढाँचे में समझना आवश्यक है। “portio axis” आधुनिक पारिभाषिकी में मात्र उपस्पर्शरेखा नहीं, बल्कि उनके निर्माण के एक विशिष्ट खंड को संदर्भित करता है। विशेषतः यदि हम निरूपित करें:

- प्रत्यास्थ वक्र पर किसी बिंदु को Q
- कोटि के पाद को P, जो Q से अक्ष AB पर डाली गई है
- उस बिंदु को p जहाँ स्पर्शरेखा Q पर अक्ष को काटती है

तब बर्नूली का गुण बताता है:

$$\frac{Pp}{Qp} = \frac{QP^2}{C}$$

जहाँ C बंकन दृढता और लगाए गए भारण से संबंधित एक नियत क्षेत्रफल है।

आधुनिक परिप्रेक्ष्य आधुनिक दृष्टिकोण से (जिसे बहुत बाद में ऑयलर ने 1740 के दशक में विकसित किया), इलास्टिका समस्या ऐसे वक्र $y(x)$ की खोज करती है जो बंकन ऊर्जा को न्यूनतम करे:

$$I = \int_0^L \frac{\kappa^2}{2EI}\, ds$$

सीमा प्रतिबंधों के अधीन, जहाँ $\kappa = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$ वक्रता है।

इस विचरणात्मक समस्या के लिए ऑयलर-लाग्रांज समीकरण देता है:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa}{(1+(y')^2)^{1/2}}\right) = \frac{P}{EI}$$

जहाँ P लगाया गया भार है। इससे यह अवकल समीकरण प्राप्त होता है:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\sin\theta$$

जहाँ θ वह कोण है जो स्पर्शरेखा क्षैतिज से बनाती है। यह लोलक के समीकरण के तुल्य है और इसके समाधान में दीर्घवृत्तीय समाकल देता है—वही दीर्घवृत्तीय समाकल जिनका सामना बर्नूली ने अपनी ज्यामितीय विधि द्वारा किया था।

अतिपारगामी प्रकृति की पहचान बर्नूली ने स्पष्ट रूप से पहचाना कि उनके समाधान में अतिपारगामी वक्र सम्मिलित थे। वे बताते हैं कि प्रत्यास्थ वक्र का “किसी शांकव परिच्छेद के क्षेत्रकलन द्वारा निर्माण नहीं किया जा सकता” और इसके लिए उस रूप के समाकल आवश्यक हैं जिन्हें आज हम दीर्घवृत्तीय समाकल समझते हैं:

$$s = \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{a^2 - \sin^2\phi}}$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

उनकी ज्यामितीय विधि वक्र के चाप-परिमापन द्वारा इस समाकलन को प्रभावतः निष्पादित करती है—1694 में उपलब्ध गणितीय साधनों को देखते हुए यह एक उल्लेखनीय उपलब्धि थी।

ऐतिहासिक महत्त्व यह कार्य गणित में अनेक प्रथम उपलब्धियाँ प्रस्तुत करता है:

- अतिपारगामी यांत्रिकी समस्या की किसी विशिष्ट स्थिति का प्रथम समाधान
- आगे चलकर दीर्घवृत्तीय फलन सिद्धांत बनने वाले विषय का आरंभिक व्यवस्थित विवेचन
- उस विषय में अग्रणी कार्य जिसे बाद में विचरण-कलन के रूप में औपचारिक बनाया गया
- शास्त्रीय ज्यामितीय विधियों और उभरती वैश्लेषिक तकनीकों के बीच सेतु

आयताकार इलास्टिका के लिए बर्नूली का ज्यामितीय समाधान 1744 में विचरण-कलन का उपयोग करते हुए ऑयलर के व्यापक वैश्लेषिक विवेचन तक महत्त्वपूर्ण बना रहा; ऑयलर के विवेचन ने स्वेच्छ सीमा प्रतिबंधों वाली सामान्य इलास्टिका समस्या हल की। तथापि ज्यामितीय अंतर्दृष्टियाँ प्रत्यास्थ विरूपण समस्याओं की अंतर्निहित गहन गणितीय संरचना को समझने के लिए आज भी उपयोगी अंतःप्रज्ञा प्रदान करती हैं।

इस अंतर्निहित अतिपारगामी समस्या के लिए बर्नूली के विशुद्ध ज्यामितीय समाधान की सुरुचि 17वीं शताब्दी की गणितीय प्रतिभा के सर्वोत्तम उदाहरणों में से एक है; यह प्रदर्शित करती है कि ज्यामितीय तर्क उन समस्याओं को कैसे खोल सकता था जो आगामी दशकों तक प्रत्यक्ष वैश्लेषिक आक्रमण के अधीन नहीं हुईं।

वस्तर समस्या से संबंध

[Keep the entire Latin and English translation exactly as you have it]

Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"* pg. 275-276

भौतिक द्वैत प्राथमिक इलास्टिका समस्या के अतिरिक्त बर्नूली ने एक उल्लेखनीय भौतिक द्वैत की पहचान की जो उनके ज्यामितीय समाधान की अंतर्निहित गहन गणितीय संरचना प्रदर्शित करता है। उन्होंने देखा कि वही प्रत्यास्थ वक्र तरल से भरी और दो बिंदुओं पर स्थिर किसी नम्य झिल्ली अथवा वस्तर-थैले के साम्यावस्था-आकार का भी वर्णन करता है।

यह संबंध गणितीय कौतूहल से अधिक है—यह प्रकट करता है कि दो भौतिक रूप से भिन्न निकायों (भार के अधीन मुडती दृढ धरन और तरल धारण करती नम्य झिल्ली) को समान ज्यामितीय संबंध नियंत्रित कर सकते हैं, यदि अंतर्निहित ज्यामितीय प्रतिबंध तुल्य हों। यह उस सिद्धांत की आरंभिक झलक थी जो गणितीय भौतिकी में मूलभूत बनने वाला था: भिन्न भौतिक क्रियाविधियाँ समान गणितीय वर्णन उत्पन्न कर सकती हैं।

भौतिक तुल्यता बर्नूली की अंतर्दृष्टि प्रत्येक निकाय को नियंत्रित करने वाली साम्यावस्था की शर्तों द्वारा समझी जा सकती है:

इलास्टिका: कोई दृढ धरन लगाए गए भारों के अधीन बंकन विरूपण से गुजरती है; वक्रता κ बंकन आघूर्ण M के समानुपाती होती है, जिसका संबंध $\kappa = M/(EI)$ है, जहाँ EI आनमनी दृढता निरूपित करता है।

तरल-भरी झिल्ली: कोई नम्य, अविस्तार्य वस्तर द्रवस्थैतिक दाब के अधीन तरल धारण करता है; स्थानीय वक्रता झिल्ली-तनाव T और वक्र अंतरापृष्ठ के आर-पार दाब-अंतर Δp के बीच संतुलन से निर्धारित होती है।

गणितीय तुल्यता इसलिए उत्पन्न होती है क्योंकि दोनों निकाय वक्रता और बल-वितरण (इलास्टिका में बंकन आघूर्ण, झिल्ली में द्रवस्थैतिक दाब) के बीच समान मूल संबंध संतुष्ट करते हैं। बर्नूली का ज्यामितीय निर्माण इस उभयनिष्ठ संरचना को ग्रहण करता है।

बल-विश्लेषण और प्रमुख संबंध बर्नूली का विस्तृत बल-विश्लेषण अनेक मात्रात्मक संबंध प्रकट करता है जो ज्यामितीय तुल्यता के बावजूद दोनों भौतिक साकार रूपों को अलग करते हैं:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

एकसमान तनाव सिद्धांत: झिल्ली अपनी पूरी लंबाई में **नियत तनाव** T बनाए रखती है, जो भीतर के तरल के कुल भार के बराबर है। यह प्रत्यास्थ धरन से बिल्कुल विपरीत है, जिसमें बंकन प्रतिबल लंबाई के साथ बदलता है और मुक्त सिरे के निकट (उनके संकेतों में R के निकट बिंदुओं पर) न्यूनतम होता है।

परिणामी बल की दिशा: झिल्ली को उसके प्रतिबंधों से अचानक मुक्त करने पर परिणामी द्रवस्थैतिक बल क्षैतिज से θ कोण पर कार्य करता है, जहाँ बर्नूली के ज्यामितीय संकेतों में $\tan\theta = EF/Ei$ है। विशिष्ट आयताकार स्थिति में पूरा वस्त्र समकोण पर निष्कासित होता है।

बल का परिमाण: झिल्ली को प्रेरित करने वाला कुल द्रवस्थैतिक बल निहित तरल के निरपेक्ष भार से $2:1$ के अनुपात में संबंधित है। यह वक्र झिल्ली-पृष्ठ पर समाकलित द्रवस्थैतिक दाब-वितरण से प्राप्त होता है।

साम्यावस्था अक्ष का स्थान: साम्यावस्था का अक्ष ऐसे निर्धारित बिंदु से गुजरता है जिसे Ao को AB में से इस प्रकार काटकर पाया जाता है कि $Ao : AB = 1 : \sqrt{2}$ हो। उल्लेखनीय रूप से यह अक्ष सिरों पर स्पर्शरेखाओं के प्रतिच्छेद से **नहीं** गुजरता—यह एक ज्यामितीय सूक्ष्मता है जिसे बर्नूली स्पष्टतः बताते हैं।

ज्यामितीय इष्टतमता बर्नूली एक उल्लेखनीय चरम गुण देखते हैं: समान सिरों को जोड़ने वाले समान परिमाप के सभी वक्रों (समपरिमापी वक्रों) में इलास्टिका वक्र आधाररेखा से केंद्रक की दूरी को अधिकतम करता है। यह समपरिमापी इष्टतमीकरण का एक आरंभिक उदाहरण है—ऐसी समस्याएँ जिनका दशकों बाद विचरण-कलन द्वारा व्यवस्थित रूप से समाधान किया गया।

वे कैटेनरी से स्पष्ट सादृश्य खींचते हुए भौतिक रूप से संबंधित समस्याओं के दो युग्मों के बीच "उल्लेखनीय आत्मीयता" (*affinitatem miram*) बताते हैं:

- कैटेनरी (लटकती शृंखला) और Velaria (पाल-वक्र)
- इलास्टिका (मुड़ी धरन) और तरल-भरी झिल्ली का वक्र

प्रत्येक युग्म में एक समस्या स्व-भार (कैटेनरी, पाल) से संबंधित है, जबकि दूसरी बाह्य भारण (इलास्टिका, द्रवस्थैतिक दाब) से संबंधित है; फिर भी उनकी गणितीय संरचनाएँ गहन समानताएँ प्रदर्शित करती हैं।

ऐतिहासिक महत्त्व यह द्वैत बर्नूली की गहन भौतिक अंतःप्रज्ञा प्रदर्शित करता है। उन्होंने पहचाना कि उनके ज्यामितीय निर्माण ने संतति यांत्रिकी में साम्यावस्था की दशाओं के विषय में कुछ मूलभूत ग्रहण किया था, जो प्रत्यास्थ धरनों के विशिष्ट संदर्भ से परे था। यह उपलब्धि पूर्णतः ज्यामितीय तर्क द्वारा, उन वैश्लेषिक साधनों के बिना प्राप्त हुई जो बाद में ऐसे संबंधों को अधिक व्यवस्थित बनाने वाले थे।

वस्त्र-इलास्टिका द्वैत यांत्रिकी और गणितीय भौतिकी के अनेक महत्त्वपूर्ण विकासों का पूर्वाभास देता है:

- **झिल्ली सिद्धांत:** दाब भारों के अधीन पतली, नम्य संरचनाओं के विश्लेषण का गणितीय ढाँचा, जिसे 19वीं शताब्दी में व्यवस्थित रूप से विकसित किया गया
- **विचरणात्मक सिद्धांत:** यह पहचान कि भिन्न भौतिक निकाय समान गणितीय संरचनाएँ साझा कर सकते हैं जब वे समान फलनिक (ऊर्जा, क्रिया आदि) को न्यूनतम अथवा अधिकतम करते हैं
- **भौतिक सादृश्य:** समाधान विधियों को भिन्न भौतिक क्षेत्रों के बीच स्थानांतरित करने के लिए गणितीय तुल्यताओं का उपयोग, जो 19वीं शताब्दी की गणितीय भौतिकी की केंद्रीय तकनीक बना

1694 में विशुद्ध ज्यामितीय तर्क द्वारा प्राप्त इस द्वैत की बर्नूली की पहचान बताती है कि उनका इलास्टिका समाधान आधी शताब्दी से अधिक समय तक समस्या का निर्णायक विवेचन क्यों बना रहा। उनकी ज्यामितीय विधि ने उस विचरणात्मक संरचना को अप्रत्यक्ष रूप से ग्रहण कर लिया था जिसे ऑयलर ने बाद में 1744 में विचरण-कलन द्वारा स्पष्ट किया। भौतिक द्वैत ने अनुभवजन्य प्रमाण दिया कि उनके गणितीय उपागम ने विरूपणीय पिंडों की यांत्रिकी के विषय में वास्तव में किसी मूलभूत तत्त्व की पहचान की थी।

9.3.2.1.1 हाइगेन्स की प्रतिक्रिया (1694)

क्रिस्टियान हाइगेन्स ने बर्नूली का समाधान आने से पहले ही संदेह व्यक्त किया था। 16 नवंबर 1691 को लाइबनिट्स को लिखे पत्र में उन्होंने कहा:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> मैं यह देखने की प्रतीक्षा नहीं कर सकता कि ज्येष्ठ श्री बर्नूली कमानी की वक्रता के विषय में क्या प्रस्तुत करेंगे। मुझे आशा करने का साहस नहीं हुआ कि यहाँ कोई स्पष्ट अथवा सुरुचिपूर्ण परिणाम निकलेगा, और इसीलिए मैंने कभी प्रयास नहीं किया।
>
> Huygens, 1691 *Lettre à G.W. Leibniz*

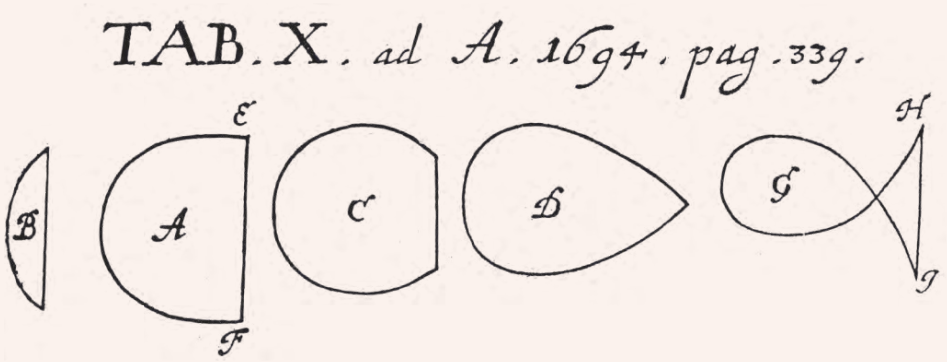
जून 1694 में बर्नूली का *Curvatura Laminae Elasticae* प्रकाशित होने पर हाइगेन्स ने उसी पत्रिका में शीघ्र ही एक औपचारिक समीक्षा प्रकाशित की (Fraser, 1991)। लाइबनिट्स के साथ निजी पत्राचार में हाइगेन्स और भी स्पष्ट थे:

> श्री बर्नूली का तीन वर्ष का कार्य पर्याप्त व्यापक है, बशर्ते उनके सभी कथन सत्य हों; वे उस पर बहुत गर्व भी करते हैं। कमानी के सिद्धांत के विषय में मुझे लगता है कि उन्होंने उसका अच्छा उपयोग किया है और यह सत्य है कि वक्रता मापने वाली त्रिज्याएँ कमानी मोड़ने वाले बलों के व्युत्क्रम अनुपात में होती हैं, यद्यपि मेरी राय में केवल बाहरी पृष्ठ विस्तृत नहीं होता, बल्कि भीतर का पृष्ठ भी साथ ही संकुचित होता है। यदि यह सिद्धांत अद्वितीय और सत्य न हो, बल्कि रेखा AFC अनंत प्रयोगों पर निर्भर कोई वक्र हो, तो मैं उनके समस्त अनुसंधान को अत्यंत अस्पष्ट और लगाए गए समय के बहुत कम योग्य मानूँगा। अब भी मुझे उनकी सभी उपलब्धियाँ अनुपयोगी लगती हैं, केवल वे अत्यंत सुंदर और सूक्ष्म मनोरंजन जो तब मिलते हैं जब गणित को अधिक फलदायी रूप से लगाने के लिए कुछ न हो।
>
> प्रत्येक वक्र के क्षेत्रकलन को दिया हुआ मान लेना एक विचित्र परिकल्पना है, और यदि किसी समस्या का निर्माण उसी पर समाप्त हो (वृत्त और अतिपरवलय के क्षेत्रकलन को छोड़कर), तो मैं मानूँगा कि कुछ भी निष्पादित नहीं हुआ, क्योंकि यांत्रिक रूप से भी कोई यह नहीं जानता कि कुछ कैसे किया जाए। श्री बर्नूली ने चाप A की वक्रता केवल उस स्थिति में निर्धारित की है जब सिरों E, F की स्पर्शरेखाएँ समांतर हों; मैं इन्हें डोरी EF से जुड़ा मानता हूँ। वास्तविक चाप B का रूप देना अभी शेष होगा; फिर C का, जिसके सिरे एक-दूसरे की ओर संकेत करते हैं; D का, जहाँ वे मिलते हैं; और G का, जहाँ वे आगे निकलकर छड़ HI द्वारा थामे जाते हैं।
>
> Huygens, 1694 *Lettre à G.W. Leibniz*

वास्तव में हाइगेन्स ने अपनी विशिष्ट सूक्ष्मताप्रियता के साथ प्रतिक्रिया करते हुए बर्नूली के समाधान की पूर्णता पर आपत्ति की। बर्नूली के कार्य की गणितीय परिष्कृति स्वीकार करते हुए हाइगेन्स ने तर्क दिया कि उसने केवल एक विशिष्ट स्थिति—जिसे उन्होंने “आयताकार इलास्टिका” (चित्र 9.12 में वक्र A) कहा—का समाधान किया था, जहाँ प्रत्यास्थ पट्टी लगभग समकोण बनाती है। हाइगेन्स ने व्यवस्थित परिशुद्धता से प्रदर्शित किया कि लगाए गए बलों और सीमा प्रतिबंधों के अनुसार अनेक प्रत्यास्थ वक्र-विन्यास संभव थे, जैसा विभिन्न इलास्टिका आकृतियाँ (वक्र A से G) दर्शाने वाले उनके 1694 के आरेख में दिखाया गया है। उनका तर्क था कि बर्नूली की ज्यामितीय विधि अपूर्ण थी क्योंकि वह उन स्थितियों का विचार नहीं करती जिनमें पट्टी पाश बना सकती थी (वक्र C और D), अधिक जटिल विरूपण से गुजर सकती थी (वक्र G), अथवा भिन्न सिरा-अभिविन्यास दिखा सकती थी। यह सूक्ष्म समीक्षा दूरदर्शी सिद्ध हुई: ऑयलर के 1732 के ज्यामितीय समाधान ने इनमें से कुछ सीमाओं को संबोधित किया; उसके बाद याकूब के भतीजे डेनियल ने 1742 में विचरण-कलन का बीज बोया, जिसे ऑयलर ने आगे 1744 में औपचारिक रूप दिया और अंततः उन सभी संभावित इलास्टिका विन्यासों का पूर्ण वर्गीकरण प्रदान किया जिनकी माँग हाइगेन्स के कठोर मानकों ने की थी।

बर्नूली ने इन आलोचनाओं को शालीनता से स्वीकार किया। 1694 में बाद में प्रकाशित एक अनुवर्ती टिप्पणी (Bernoulli, 1694) में उन्होंने समझाया कि उनकी ज्यामितीय विधि “आयताकार” स्थिति तक सीमित नहीं थी, क्योंकि भिन्न समाकलन नियतांक चुनकर विभिन्न इलास्टिका आकृतियाँ उत्पन्न की जा सकती थीं। उन्होंने अपने समाधान को सामान्य और पूर्ण बनाए रखा तथा आगे के स्पष्टीकरण को प्रेरित करने का श्रेय विनम्रतापूर्वक हाइगेन्स और लाइबनिट्स को दिया।

> चूँकि हाल के वर्षों में मैंने जो प्रकाशित किया... उसे प्रसिद्ध ज्यामितिज्ञ श्री हाइगेन्स और श्री लाइबनिट्स ने विशेष परीक्षण के अधीन रखने की कृपा की है, जिसमें कुछ भागों को उन्होंने अनुमोदित किया, कथन में अधिक छिपे अन्य भागों को अनुमानों द्वारा बढ़ाया, कहीं शंकाएँ उठाईं और कहीं अपना खुला असहमति व्यक्त की; अतः मैंने पूर्व विचारों



चित्र 9.12: बर्नूली के समाधान पर हाइगेन्स की 1694 की आपत्ति।

> में कुछ बाद के विचार जोड़ने और विभिन्न विषयों को जिस प्रकार वे मुझे दिखाई देते हैं उस क्रम तथा निष्कपटता से समझाने का निर्णय किया है, ताकि उन अत्यंत प्रसिद्ध पुरुषों की इच्छाएँ संतुष्ट हों और प्रकृति के छिपे प्रकोष्ठों से सत्य की अधिक शुद्ध चिनगारियाँ क्रमशः प्रकाश में लाई जाएँ...
>
> वक्रता की त्रिज्याएँ खिंचाव बलों (अधिक सत्यतः, दीर्घनों) के व्युत्क्रमानुपाती होती हैं—जिसे वे दोनों अत्यंत प्रसिद्ध पुरुष मेरे द्वारा आरंभ-बिंदु के रूप में प्रयुक्त मानते हैं—यह पहले खोजे गए समीकरण से ज्ञात होता है और आरंभ के स्थान पर निष्कर्ष है...
>
> अतः यदि श्री हाइगेन्स को इसके विषय में कुछ संदेह था और वे मानते थे कि न केवल बाहरी पृष्ठ विस्तृत होता है बल्कि भीतर का पृष्ठ भी संकुचित होता है, तो उन्हें यह आपत्ति मुझसे नहीं, श्री लाइबनिट्स से करनी चाहिए थी; मैंने तो इसे सिद्धांत के रचयिता से केवल दस वर्ष बाद अपनाया था। किंतु मैं स्वीकार करता हूँ कि जब मैंने इस विषय पर पहली बार विचार किया, तब यही आपत्ति मेरे मन में भी आई, क्योंकि जो कुछ विस्तार ग्रहण कर सकता है उसे संपीडन भी ग्रहण कर सकना चाहिए।
>
> Bernoulli, 1694 *"Responsio ad Objectiones Clarissimi Hugenii de Curvatura Laminae Elasticae"*

9.3.2.1.2 मध्यांतर

9.3.2.1.2.1 लाइबनिट्स का *Vis Viva* और ऊर्जा की संकल्पनाओं का विकास 17वीं और 18वीं शताब्दियों में ऊर्जा-संबंधी चिंतन के वैचारिक विकास को समझे बिना विचरण-कलन के विकास को नहीं समझा जा सकता। इस विकास के केंद्र में गॉटफ्रीड विल्हेल्म लाइबनिट्स द्वारा *vis viva* (शाब्दिक अर्थ "जीवित बल") का परिचय था—एक ऐसी संकल्पना जिसने यांत्रिक दर्शन को मूलतः पुनर्गठित किया और इष्टतमीकरण समस्याओं के प्रति बाद के ऊर्जा-आधारित उपागमों की वैचारिक आधारभूमि प्रदान की।

यह अनुभाग नीचे विवेचित डेनियल बर्नूली (§9.3.2.1.2.4) और ऑयलर (§9.3.2.2) के बाद के विकासों की आधारभूमि तैयार करता है।

1686: लाइबनिट्स का *Vis Viva* (कार्तीय यांत्रिकी को चुनौती) 1686 में लाइबनिट्स ने *Acta Eruditorum* में "Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii" (देकार्त की एक उल्लेखनीय त्रुटि की संक्षिप्त उपपत्ति) प्रकाशित की (Leibniz, 1686a)[17]; इसने कार्तीय यांत्रिकी को मूलतः चुनौती दी।

[17]पूरा शीर्षक: *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturae, secundum quam volunt a Deo eandem semper quantitatem motus conservari, qua et in re mechanica abutuntur,*

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रेने देकार्त ने *Principia Philosophiae* (Descartes, 1644) में अपना संरक्षण सिद्धांत सूत्रबद्ध किया था; उनके अनुसार ब्रह्मांड में गति की मात्रा—अदिश योग $\sum mv$ के रूप में मापी गई—ईश्वरीय संरक्षण द्वारा नियत रहती है। आधुनिक संवेग संरक्षण के विपरीत देकार्त के सूत्रीकरण ने दिशात्मक गुणों की उपेक्षा की और इस धर्ममीमांसात्मक तर्क पर निर्भर किया कि पूर्ण और अपरिवर्तनशील ईश्वर ब्रह्मांड को आरंभ में प्रदान की गई गति की कुल मात्रा को बनाए रखेंगे।

लाइबनिट्स ने सावधानीपूर्वक रचे वैचारिक प्रयोगों द्वारा देकार्त के संघट्ट नियमों की गणितीय अपर्याप्तता और उनके दार्शनिक आधार, दोनों को लक्ष्य बनाया। उन्होंने प्रत्यास्थ रूप से टकराते दो समान पिंडों पर विचार किया—एक गतिमान और एक विराम में। जहाँ देकार्त के नियमों ने कुल अदिश मात्रा mv के संरक्षित रहने की भविष्यवाणी की, वहीं लाइबनिट्स ने दिखाया कि यह अनुभवजन्य प्रेक्षणों का उल्लंघन करता और भौतिक असंगतियों को जन्म देता है। अधिक मूल रूप से उन्होंने दिखाया कि देकार्त का संरक्षण नियम कार्य करने की पिंडों की क्षमता को नहीं दर्शाता। ऊँचाई h से गिरता पिंड वेग $v = \sqrt{2gh}$ और किसी अन्य पिंड को समान ऊँचाई तक उठाने की क्षमता प्राप्त करता है। यह क्षमता—जिसे लाइबनिट्स ने *vis viva* कहा—mv^2 के समानुपाती थी, mv के नहीं।

ऐसे उदाहरणों द्वारा लाइबनिट्स ने स्थापित किया कि यद्यपि देकार्त ने एक महत्त्वपूर्ण संरक्षण सिद्धांत पहचाना था, उन्होंने संरक्षित मात्रा की गलत पहचान की थी। इसके स्थान पर लाइबनिट्स ने प्रस्तावित किया कि वास्तविक संरक्षित मात्रा *vis viva* है, जिसे $\sum mv^2$ द्वारा परिभाषित किया गया। उनका तर्क था कि यह "जीवित बल" प्रभाव उत्पन्न करने की किसी पिंड की क्षमता—प्रतिरोध पर विजय पाने, भार उठाने अथवा कमानियों को संपीडित करने की उसकी योग्यता—का वास्तविक माप था। कार्तीय मात्रा mv के विपरीत, जो अलग-अलग पिंडों की गति पूर्णतः समाप्त हो जाने पर भी संरक्षित हो सकती थी, *vis viva* गतिमान पिंडों में निहित सक्रिय शक्ति को ग्रहण करती थी।

लाइबनिट्स की पारिभाषिकी उनके व्यापक दार्शनिक कार्यक्रम को प्रतिबिंबित करती थी। उन्होंने स्थैतिक दाब अथवा तनाव निरूपित करने वाले *vis mortua* (मृत बल) और गति की गतिक शक्ति निरूपित करने वाले *vis viva* (जीवित बल) के बीच भेद किया। इस भेद ने प्रकृति को कणों के बीच मात्र ज्यामितीय संबंधों के स्थान पर बलों और क्रियाओं के पदों में समझने की उनकी तत्त्वमीमांसात्मक प्रतिबद्धता को मूर्त रूप दिया।

Vis Viva विवाद और उसका समाधान लाइबनिट्स के प्रस्ताव ने "vis viva विवाद" के नाम से प्रसिद्ध एक तीव्र बहस उत्पन्न की, जो दशकों तक यूरोपीय प्राकृतिक दर्शन पर छाई रही। कार्तीय समर्थकों ने संवेग संरक्षण ($\sum mv$) का समर्थन किया, जबकि लाइबनिट्सीय समर्थकों ने vis viva संरक्षण ($\sum mv^2$) की वकालत की। इस विवाद में बर्नूली परिवार सहित अनेक अग्रणी चिंतक सम्मिलित थे, जो सामान्यतः लाइबनिट्सीय मत का समर्थन करते थे।

लाइबनिट्स के vis viva और आधुनिक गतिज ऊर्जा के बीच गणितीय संबंध सरल है: लाइबनिट्स का mv^2 हमारे $\frac{1}{2}mv^2$ से केवल आधे के नियत गुणक द्वारा भिन्न है। यह गुणक संरक्षण के तर्कों के लिए अप्रासंगिक सिद्ध हुआ, क्योंकि किसी संरक्षित मात्रा को नियतांक से गुणा करने पर दूसरी संरक्षित मात्रा प्राप्त होती है। महत्त्वपूर्ण लाइबनिट्स की यह अंतर्दृष्टि थी कि v^2, न कि v, गति और यांत्रिक प्रभाव के बीच आवश्यक संबंध को ग्रहण करता है।

विवाद का पूर्ण समाधान 19वीं शताब्दी तक नहीं हुआ, जब यह स्पष्ट हुआ कि संवेग और ऊर्जा दो भिन्न संरक्षण सिद्धांत निरूपित करते हैं। संवेग (mv) सभी अंतःक्रियाओं में संरक्षित रहता है, जबकि गतिज ऊर्जा ($\frac{1}{2}mv^2$) केवल प्रत्यास्थ संघट्टों में संरक्षित रहती है। दोनों मात्राएँ यांत्रिक निकायों को समझने के लिए आवश्यक सिद्ध हुईं, किंतु विश्लेषण में उनके प्रयोजन भिन्न हैं।

गतिज से स्थितिज तक: बल-संकल्पनाओं का विस्तार लाइबनिट्स के vis viva द्वारा स्थापित वैचारिक ढाँचा बाद के विकासों के लिए उल्लेखनीय रूप से उर्वर सिद्ध हुआ। यदि गतिमान पिंडों में mv^2 के समानुपाती "जीवित बल" था, तो प्राकृतिक दार्शनिकों ने पूछना आरंभ किया कि क्या प्रतिबल के अधीन स्थिर पिंडों में कोई सादृश्य "स्थितिज बल" अथवा गति उत्पन्न करने की संचित क्षमता हो सकती है।

यह वैचारिक विस्तार प्रत्यास्थ निकायों को समझने के लिए निर्णायक सिद्ध हुआ। संपीडित कमानी अथवा मुडी हुई धरन मुक्त होने पर स्पष्टतः गति उत्पन्न करने की क्षमता रखती थी, किंतु इस क्षमता का वर्णन लाइबनिट्स के मूल vis viva द्वारा नहीं किया जा सकता था, जो केवल पहले से गतिमान पिंडों पर लागू होता था। गणितीय समुदाय ने धीरे-धीरे यह धारणा

अर्थात् प्रकृति के उस नियम के संबंध में देकार्त और अन्य लोगों की उल्लेखनीय त्रुटि की संक्षिप्त उपपत्ति, जिसके अनुसार वे चाहते हैं कि ईश्वर सदैव गति की समान मात्रा संरक्षित रखें, जिसका वे यांत्रिक विषयों में भी दुरुपयोग करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विकसित की कि प्रत्यास्थ विरूपण एक प्रकार का स्थितिज vis viva संचित करता है जिसे मुक्त होने पर पुनः गतिज vis viva में बदला जा सकता है।

1740 के दशक तक डेनियल बर्नूली जैसे परिष्कृत चिंतक इस संचित क्षमता का वर्णन करने के लिए "vis viva potentialis" जैसे पदों का उपयोग कर रहे थे। यह लाइबनिट्स के मूल गतिज केंद्रण और आज स्थितिज ऊर्जा के रूप में पहचानी जाने वाली संकल्पना के बीच एक वैचारिक सेतु था। डेनियल द्वारा प्रस्तावित गणितीय रूप $\int \frac{ds}{R^2}$, जो प्रत्यास्थ ऊर्जा के लिए था, ने विरूपण और प्रतिबंध की समस्याओं तक लाइबनिट्सीय चिंतन के स्वाभाविक विस्तार को निरूपित किया।

Vis Viva और आधुनिक ऊर्जा-संकल्पनाएँ 18वीं शताब्दी की vis viva संकल्पनाओं और आधुनिक ऊर्जा-पारिभाषिकी के संबंध को इस प्रकार संक्षेपित किया जा सकता है:

- **लाइबनिट्स का vis viva** (mv^2) = आधुनिक गतिज ऊर्जा ($\frac{1}{2}mv^2$), जो केवल एक नियत गुणक से भिन्न है
- **Vis viva potentialis** = आधुनिक स्थितिज ऊर्जा, जो गति उत्पन्न करने की संचित क्षमता निरूपित करती है
- **कुल vis viva** = आधुनिक कुल यांत्रिक ऊर्जा (गतिज + स्थितिज)
- **Vis mortua** = स्थैतिक बल और दाब, आधुनिक स्थैतिकी की बल-संकल्पनाओं के सदृश

vis viva से आधुनिक ऊर्जा-चिंतन तक के वैचारिक विकास के लिए अनेक निर्णायक अंतर्दृष्टियाँ आवश्यक थीं जो 18वीं शताब्दी में क्रमशः उभरीं। प्रथम, यह पहचान कि vis viva को विरूपित प्रत्यास्थ निकायों और गुरुत्वीय विन्यासों में संचित किया जा सकता है। द्वितीय, यह समझ कि अनेक यांत्रिक निकायों में कुल vis viva (गतिज + स्थितिज) नियत रहता है। तृतीय, प्रतिबंधों और परिवर्तनशील बलों वाले जटिल निकायों में vis viva की गणना की गणितीय तकनीकें।

विचरण-कलन के लिए निहितार्थ vis viva ढाँचा अनेक प्रकार से विचरण-कलन के विकास के लिए आवश्यक सिद्ध हुआ। प्रथम, इसने भौतिक रूप से सार्थक ऐसी मात्रा दी जिसका इष्टतमीकरण किया जा सकता था—निकाय स्वाभाविक रूप से स्थितिज vis viva को न्यूनतम करने अथवा कुल vis viva को संरक्षित रखने की ओर विकसित होते थे। द्वितीय, इसने एक ऐसा एकीकृत परिप्रेक्ष्य दिया जो बल-विश्लेषण के स्थान पर ऊर्जा-विचारों द्वारा विविध यांत्रिक समस्याओं को संभाल सकता था। तृतीय, इसने द्विघाती रूपों (v^2, κ^2) के साथ कार्य करने की गणितीय परंपरा स्थापित की, जो विचरणात्मक फलनिकों के लिए केंद्रीय सिद्ध होने वाली थी।

बाद में जब डेनियल बर्नूली "vis viva potentialis" का उपयोग करते हुए अपना प्रत्यास्थ ऊर्जा सिद्धांत सूत्रबद्ध करेंगे, (§9.3.2.1.2.4) तब वे एक सुस्थापित वैचारिक ढाँचे को नए क्षेत्रों तक विस्तारित कर रहे होंगे। उनकी यह अंतर्दृष्टि कि प्रत्यास्थ साम्यावस्था न्यूनतम स्थितिज vis viva के संगत है, इष्टतमीकरण समस्याओं पर लाइबनिट्सीय चिंतन का स्वाभाविक अनुप्रयोग थी। यह वैचारिक आधारभूमि ऑयलर द्वारा विचरणात्मक विधियों के बाद के गणितीय व्यवस्थापन (§9.3.2.2) के लिए आवश्यक सिद्ध होने वाली थी।

vis viva का ऐतिहासिक महत्त्व आधुनिक ऊर्जा-संकल्पनाओं के पूर्ववर्ती के रूप में उसकी भूमिका से परे है। उसने यांत्रिकी में ज्यामितीय से गतिक चिंतन की ओर मूलभूत परिवर्तन निरूपित किया—प्रकृति को ज्यामितीय नियमों के अनुसार चलते कणों के संग्रह के रूप में देखने से लेकर उसे बलों और ऊर्जा-रूपांतरणों के जाल के रूप में समझने तक। परिप्रेक्ष्य का यह परिवर्तन व्यवस्थित विचरण-कलन को संभव बनाने वाली गणितीय क्रांति के लिए आवश्यक सिद्ध हुआ।

9.3.2.1.2.2 ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती (1696) 17वीं शताब्दी के उत्तरार्ध का गणितीय समुदाय तीव्र बौद्धिक प्रति-स्पर्धा से चिह्नित था; अग्रणी गणितज्ञ एक-दूसरे की विधियों की परीक्षा और अपनी प्रतिष्ठा स्थापित करने के लिए नियमित रूप से कठिन समस्याएँ प्रस्तुत करते थे। प्रमुख प्रतिस्पर्धियों में बर्नूली बंधु, याकूब और योहान (§6.6.9), थे, जिनके व्यावसायिक संबंध में सहयोग और प्रतिद्वंद्विता, दोनों सम्मिलित थे जब वे नवविकसित अवकल कलन की सीमाओं को आगे बढा रहे थे।

दोनों भाइयों ने गणित में महत्त्वपूर्ण योगदान दिए थे: याकूब ने अनंत श्रेणियों और प्रायिकता सिद्धांत पर अपने कार्य द्वारा, तथा योहान ने अवकल कलन और यांत्रिकी की तकनीकों के विकास द्वारा। उनका संबंध जटिल था; उसमें एक-दूसरे की क्षमताओं के लिए पारस्परिक सम्मान के साथ अपनी पीढ़ी के अग्रणी गणितज्ञ के रूप में मान्यता पाने की व्यावसायिक प्रतिस्पर्धा भी थी। यह प्रतिस्पर्धी गतिकी इस निर्णायक काल में गणितीय नवोन्मेष को प्रेरित करने में महत्त्वपूर्ण सिद्ध

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हुई, विशेषतः जब महाद्वीपीय यूरोप के गणितज्ञ उभरते लाइबनिट्स-न्यूटन प्राथमिकता विवाद के दौरान अपनी कलन-विधियों की श्रेष्ठता प्रदर्शित करना चाहते थे।

योहान ने उस युग की प्रमुख गणितीय पत्रिका *Acta Eruditorum* में अपना ग्रंथ अवकल कलन की रूपांतरणकारी शक्ति के विषय में एक साहसिक उद्घोषणा से आरंभ किया (Bernoulli, Johann, 1696 📄):

> Quantum Geometriae incrementum accesserit, ex quo variae infinitorum Methodi, inter quas Differentialis Calculus nemine invidente primas tenebit, inclaruerunt, mille inventorum exempla comprobant, quae, si verum dicere fas est, nostro hoc aevo, ut superiora taceam, etiamnum pro desperatis habebantur..."
>
> अपरिमितों की विभिन्न विधियों के स्पष्ट होने के बाद से ज्यामिति कितनी उन्नत हुई है—जिनमें अवकल कलन, किसी की ईर्ष्या के बिना, प्रथम स्थान रखेगा—इसे खोजों के हजार उदाहरण प्रमाणित करते हैं। यदि सत्य कहना अनुमत हो, तो ये खोजें हमारे युग में भी (पूर्व कालों की बात छोड दें) निराशाजनक मानी जाती थीं..."
>
> Bernoulli, Johann, 1696 📄 *"Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur"*

उस समय की विद्वत् संपर्क-भाषा लैटिन में लिखते हुए योहान अनेक गणितीय विषयों को व्यवस्थित रूप से संबोधित करते हैं जो इन नई वैश्लेषिक विधियों की शक्ति प्रदर्शित करते हैं:

1. कार्तीय ज्यामिति की सीमाओं की समीक्षा
2. वृत्त के गुण और सामान्यीकरण
3. अतिपरवलय के गुण
4. ज्यामितीय निर्माण की समस्याएँ
5. लाइबनिट्स और चिरनहाउस पर टिप्पणी
6. पृष्ठीय क्षेत्रफल की समस्याएँ

पारंपरिक ज्यामितीय उपागमों पर अवकल कलन की श्रेष्ठता व्यवस्थित रूप से स्थापित करने के बाद बर्नूली अपने ग्रंथ का समापन उस योगदान से करते हैं जो उनका सर्वाधिक प्रसिद्ध और प्रभावशाली योगदान बनने वाला था। ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या लगभग एक अंतिम चुनौती के रूप में आती है—फिर भी ऐसी चुनौती जो गणितीय परिदृश्य को मूलतः पुनर्गठित करने वाली थी, चित्र 9.13:

> Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur.
>
> Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid Fig. 5) assignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate sua deficendens & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.
>
> Ut harum rerum amatores instigentur & propensiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, sciant non consistere in nuda speculatione, ut quidem videtur, ac si nullum haberet usum; habet enim maximum etiam in aliis scientiis quam in mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim (ut forte quorundam praecipiti judicio obviam eam) quanquam recta AB sit brevissima inter terminos A & B, non tamen illa brevissimo tempore percurritur; sed est curva AMB Geometris notissima, quam ego nominabo, si elapso hoc anno nemo alius eam nominaverit.
>
> एक नई समस्या जिसके समाधान के लिए गणितज्ञों को आमंत्रित किया जाता है।
> ऊर्ध्वाधर तल में दो बिंदु A और B दिए हों (चित्र 5 देखें), तो किसी गतिशील [कण] M को ऐसा पथ AMB प्रदान

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> करना है जिसके अनुदिश वह अपने गुरुत्व से उतरते हुए और बिंदु A से गति आरंभ करते हुए न्यूनतम समय में दूसरे बिंदु B तक पहुँचे।
> इन विषयों के प्रेमियों को इस समस्या का प्रयास करने हेतु प्रेरित और अधिक अनुकूल भाव से प्रवृत्त करने के लिए उन्हें ज्ञात हो कि यह केवल चिंतन में निहित नहीं है, जैसा वास्तव में प्रतीत होता है मानो इसका कोई उपयोग न हो; क्योंकि यांत्रिकी के अतिरिक्त अन्य विज्ञानों में भी इसका अत्यंत महत्त्वपूर्ण [अनुप्रयोग] है, जिस पर कोई सरलता से विश्वास नहीं करेगा। इस बीच (ताकि मैं संभवतः कुछ लोगों के उतावले निर्णय को रोक सकूँ), यद्यपि सीधी रेखा AB सिरों A और B के बीच सबसे छोटी है, फिर भी उसे न्यूनतम समय में पार नहीं किया जाता; बल्कि ज्यामितिज्ञों को भली-भाँति ज्ञात एक वक्र AMB है, जिसका नाम मैं रखूँगा यदि इस वर्ष की समाप्ति तक कोई अन्य उसका नाम न रखे।
>
> Bernoulli, Johann, 1696 *"Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur"*

चुनौती और उसका गणितीय महत्त्व योहान बर्नूली द्वारा 1696 में गणितीय समुदाय के लिए सार्वजनिक चुनौती के रूप में प्रस्तुत ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या[18] पूछती है: भिन्न ऊँचाइयों पर दो बिंदु दिए हों, तो उन्हें जोडने वाला वह कौन-सा वक्र है जिसके अनुदिश विराम से आरंभ करके गुरुत्व के अधीन फिसलता कण न्यूनतम समय में यात्रा करेगा? यह भ्रामक रूप से सरल प्रश्न गहन गणितीय जटिलता छिपाता है, क्योंकि यह किसी मात्रा का इष्टतमीकरण करने वाली संख्या अथवा फलन नहीं, बल्कि अनंत बिंदुओं द्वारा परिभाषित एक संपूर्ण वक्र—एक ज्यामितीय वस्तु—खोजता है।

समस्या का क्रांतिकारी स्वरूप वास्तविक संख्याओं अथवा परिमित-विमीय प्राचलों के समष्टि पर नहीं, बल्कि सभी संभावित वक्रों के समष्टि पर इष्टतमीकरण की उसकी माँग में निहित है। यह 17वीं शताब्दी के गणित में प्रधान बीजीय इष्टतमीकरण समस्याओं से मूलतः भिन्न प्रकार की गणितीय चुनौती थी। जहाँ पारंपरिक इष्टतमीकरण फलनों को अधिकतम अथवा न्यूनतम करने वाले चरों के मान खोजता था, ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या ने समाकलों का इष्टतमीकरण करने वाले स्वयं फलनों की खोज माँगी—जिसे आज हम फलनिक इष्टतमीकरण के रूप में पहचानते हैं।

समस्या की भ्रामक सरलता ने गहन भौतिक अंतर्दृष्टियाँ छिपाईं। यद्यपि अंतःप्रज्ञा सुझा सकती है कि न्यूनतम पथ (सीधी रेखा) ही सबसे तीव्र होगा, गिरते पिंडों पर गैलीलियो के पूर्व अन्वेषणों पर आधारित योहान की अंतर्दृष्टि ने पहचाना कि कोई कण आरंभ में अधिक तीव्रता से उतरकर अधिक शीघ्र वेग प्राप्त कर सकता है, भले ही इसके लिए उसे अधिक दूरी तय करनी पडे। बाद में इस सिद्धांत का प्रकाशिकी में फर्मा के न्यूनतम समय सिद्धांत से गहन संबंध स्थापित हुआ और वे इष्टतमीकरण सिद्धांत बने जो भौतिकी के लिए मूलभूत होने वाले थे।

इस समस्या ने युग के सर्वाधिक प्रतिष्ठित गणितज्ञों से समाधान आकर्षित किए, जिनमें आइजैक न्यूटन, गॉटफ्रीड लाइबनिट्स, गियोम द लोपिताल और याकूब बर्नूली सम्मिलित थे प्रत्येक गणितज्ञ ने भिन्न तकनीकों द्वारा चुनौती का सामना किया; इससे उपलब्ध गणितीय विधियों की विविधता और ऐसी इष्टतमीकरण समस्याओं के लिए अधिक व्यवस्थित उपागमों की आवश्यकता, दोनों प्रदर्शित हुए। रॉयल मिंट के कर्तव्यों से लौटने के बाद न्यूटन ने प्रसिद्ध रूप से इसे एक ही संध्या में हल किया और अपना समाधान अज्ञात रूप से प्रस्तुत किया। लोकप्रिय आख्यान के अनुसार बर्नूली ने तुरंत न्यूटन का लेखन पहचानते हुए घोषित किया कि वे *सिंह को उसके पंजे से पहचान सकते हैं*, किंतु यह रोचक उद्धरण प्रलेखित तथ्य के स्थान पर बाद का ऐतिहासिक अलंकरण प्रतीत होता है। प्रतियोगिता ने प्रकट किया कि यद्यपि अलग-अलग समस्याएँ कुशाग्र विधियों से हल की जा सकती थीं, गणितीय समुदाय में फलनिक इष्टतमीकरण संभालने का कोई सामान्य ढाँचा नहीं था।

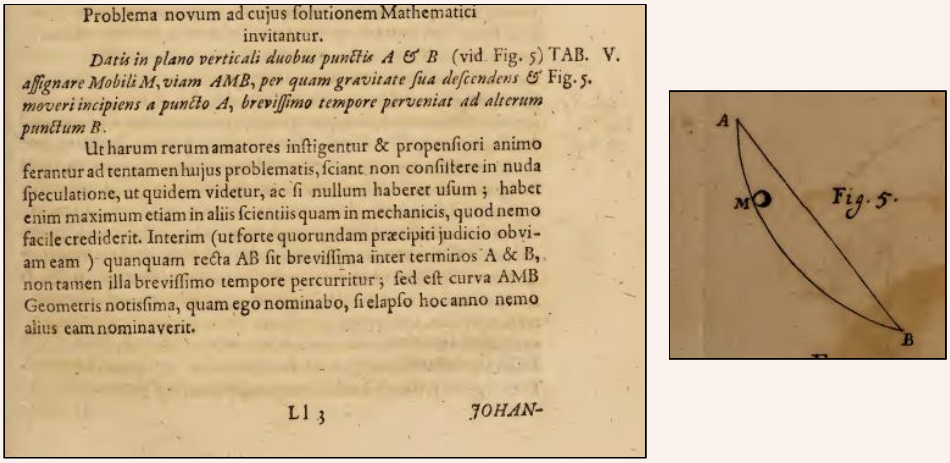
लाइबनिट्स के सुझाव पर बर्नूली ने ग्रोनिंगन में प्रकाशित 'Programma' नामक मुद्रित प्रचार-पत्र द्वारा चुनौती को रणनीतिक रूप से ईस्टर 1697 तक बढा दिया। ग्रेगोरी पंचांग में 1 जनवरी 1697 दिनांकित यह अधिक भव्य रूप गणितीय अभिजात वर्ग को प्रत्यक्ष चुनौती से आरंभ हुआ (Bernoulli, Johann, 1697b):

[18] "ब्रैकिस्टोक्रोन" पद (यूनानी *brachistos*, न्यूनतम, और *chronos*, समय, से) स्वयं योहान बर्नूली ने गढा था जब उन्होंने 1696 में गणितीय समुदाय के समक्ष यह समस्या चुनौती के रूप में प्रस्तुत की। समस्या पूछती है कि केवल गुरुत्व के अधीन कोई कण किस वक्र के अनुदिश एक बिंदु से दूसरे तक न्यूनतम समय में फिसलता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> मैं, योहान बर्नूली, विश्व के सर्वाधिक प्रतिभाशाली गणितज्ञों को संबोधित करता हूँ। बुद्धिमान लोगों के लिए एक निष्कपट, कठिन समस्या से अधिक आकर्षक कुछ नहीं, जिसका संभावित समाधान ख्याति देगा और एक स्थायी स्मारक के रूप में बना रहेगा।
>
> Bernoulli, Johann, 1697b *Programma [extending the brachistochrone challenge]*

ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या ने गणित में एक निर्णायक मोड चिह्नित किया और उस विषय को स्थापित किया जो विचरण-कलन कहलाने वाला था। समाधान—कि इष्टतम वक्र एक चक्रज है—ने लाइबनिट्स-न्यूटन प्राथमिकता विवाद के निर्णायक समय में महाद्वीपीय यूरोप की वैश्लेषिक विधियों की शक्ति प्रदर्शित की। अधिक गहन रूप से, समस्या के समाधान ने उन इष्टतमीकरण सिद्धांतों को स्थापित किया जो आगे लाग्रांजीय यांत्रिकी में विकसित हुए; ब्रैकिस्टोक्रोन इस बात का आदर्श उदाहरण बना कि प्रकृति किस प्रकार कुछ मात्राओं का इष्टतमीकरण करने वाले पथों का अनुसरण करती प्रतीत होती है। अंततः इस सिद्धांत ने न्यूनतम क्रिया के सिद्धांत से आधुनिक क्षेत्र सिद्धांत तक, सैद्धांतिक भौतिकी की कुछ सर्वाधिक मूलभूत अंतर्दृष्टियों में योगदान दिया।



Problema novum ad cujus ſolutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid. Fig. 5) TAB. V. *aſſignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate ſua deſcendens & moveri incipiens a puncto A, breviſſimo tempore perveniat ad alterum punctum B.*

Ut harum rerum amatores inſtigentur & propenſiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, ſciant non conſiltere in nuda ſpeculatione, ut quidem videtur, ac ſi nullum haberet uſum; habet enim maximum etiam in aliis ſcientiis quam in mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim (ut forte quorundam præcipiti judicio obviam eam) quanquam recta AB ſit breviſſima inter terminos A & B, non tamen illa breviſſimo tempore percurritur; ſed eſt curva AMB Geometris notiſſima, quam ego nominabo, ſi elapſo hoc anno nemo alius eam nominaverit.

L l 3 JOHAN-

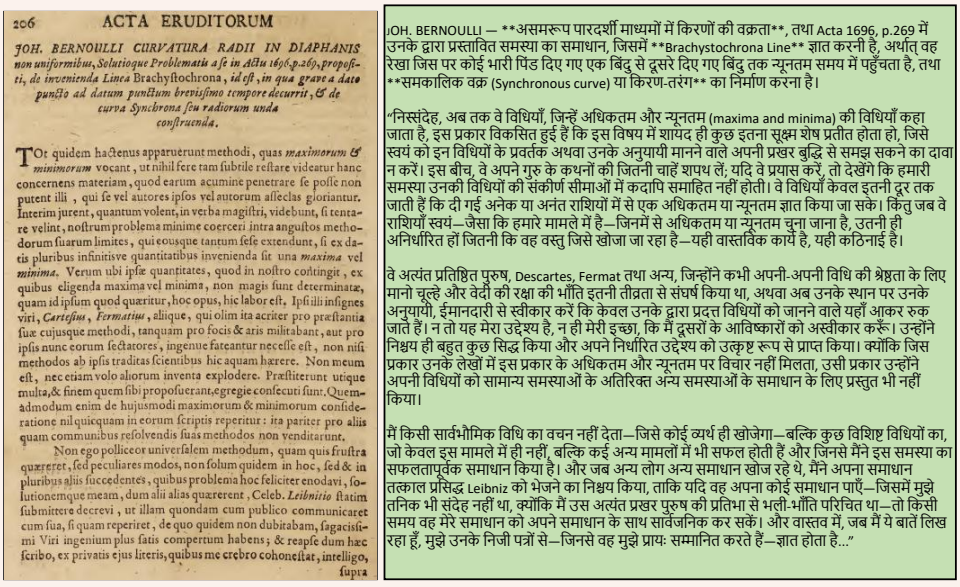
चित्र 9.13: योहान बर्नूली की ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती (Bernoulli, Johann, 1696 PDF)

9.3.2.1.2.3 योहान बर्नूली का समाधान (1697) योहान बर्नूली का 1697 का शोध-पत्र *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus: Solutio problematis brachistochrona* [19] (Bernoulli, Johann, 1697a PDF) इसी प्रतिस्पर्धी परिवेश से उभरा और गणित के इतिहास में निर्णायक मोड बना। मई 1697 में *Acta Eruditorum* में प्रकाशित इस कार्य ने उस समस्या का कुशाग्र समाधान दिया जिसे विचरण-कलन की संस्थापक समस्या माना जाने वाला था। शोध-पत्र ने फलनों के स्थान पर फलनिकों वाली इष्टतमीकरण समस्याओं के लिए गणितीय पूर्वोदाहरण स्थापित किया—एक वैचारिक छलाँग जिसे ऑयलर के महान 1744 के ग्रंथ तक पूर्णतः व्यवस्थित नहीं किया गया।

किंतु पहले प्रथम पृष्ठ, चित्र 9.14, से आरंभ करें। यह उल्लेखनीय आरंभ योहान बर्नूली की इस तीक्ष्ण जागरूकता को प्रकट करता है कि वे मूलतः नए प्रकार की गणितीय समस्या का सामना कर रहे थे। पारंपरिक इष्टतमीकरण—"दी गई अनेक

[19] पूरा शीर्षक: *CURVATURA RADII IN DIAPHANIS non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actis 1696, p.269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, & de curva Synchrona seu radiorum unda construenda*, अर्थात् असमान पारदर्शी माध्यमों में किरणों की वक्रता और Acta 1696, p.269 में स्वयं द्वारा प्रस्तुत समस्या का समाधान, जिसमें ब्रैकिस्टोक्रोन रेखा—अर्थात् वह रेखा जिसमें कोई भारी पिंड दिए गए बिंदु से दिए गए बिंदु तक न्यूनतम समय में चलता है—ज्ञात करना और समकालिक वक्र अथवा किरणों की तरंग का निर्माण करना है

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



206 ACTA ERUDITORUM

JOH. BERNOULLI CURVATURA RADII IN DIAPHANIS non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actis 1696. p. 269. propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua gravis a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, & de curva Synchrona seu radiorum unda construenda.

TOt quidem hactenus apparuerunt methodi, quas *maximorum & minimorum* vocant, ut nihil fere tam subtile restare videatur hanc concernens materiam, quod earum acumine penetrare se posse non putent illi, qui se vel autores ipsos vel autorum assecias gloriantur. Interim jurent, quantum volent, in verba magistri, videbunt, si tentare velint, nostrum problema minime coerceri intra angustos methodorum suarum limites, qui eousque tantum sese extendunt, si ex datis pluribus infinitisve quantitatibus invenienda sit una *maxima* vel *minima*. Verum ubi ipsæ quantitates, quod in nostro contingit, ex quibus eligenda maxima vel minima, non magis sunt determinatæ, quam id ipsum quod quæritur, hoc opus, hic labor est. Ipsi illi insignes viri, *Cartesius*, *Fermatius*, alique, qui olim ita acriter pro præstantia suæ cujusque methodi, tanquam pro focis & aris militabant, aut pro ipsis nunc eorum sectatores, ingenue fateantur necesse est, non nisi methodos ab ipsis traditas scientibus hic aquam hærere. Non meum est, nec etiam volo aliorum inventa explodere. Præstiterunt utique multa, & finem quem sibi proposuerant, egregie consecuti sunt. Quemadmodum enim de hujusmodi maximorum & minimorum consideratione nil quicquam in eorum scriptis reperitur: ita pariter pro aliis quam communibus resolvendis suas methodos non venditarunt.

Non ego pollicor universalem methodum, quam quis frustra quæreret, sed peculiares modos, non solum quidem in hoc, sed & in pluribus aliis succedentes, quibus problemata hoc feliciter enodavi, solutionemque meam, dum alii alias quærerent, Celeb. *Leibnitio* statim submittere decrevi, ut illam quondam cum publico communicaret cum sua, si quam reperiret, de quo quidem non dubitabam, sagacissimi Viri ingenium plus satis compertum habens; & reapse dum hæc scribo, ex privatis ejus literis, quibus me crebro cohonestat, intelligo, supra

JOH. BERNOULLI — **असमरूप पारदर्शी माध्यमों में किरणों की वक्रता**, तथा Acta 1696, p.269 में उनके द्वारा प्रस्तावित समस्या का समाधान, जिसमें **Brachystochrona Line** ज्ञात करनी है, अर्थात् वह रेखा जिस पर कोई भारी पिंड दिए गए एक बिंदु से दूसरे दिए गए बिंदु तक न्यूनतम समय में पहुँचता है, तथा **समकालिक वक्र (Synchronous curve) या किरण-तरंग** का निर्माण करना है।

"निस्संदेह, अब तक वे विधियाँ, जिन्हें अधिकतम और न्यूनतम (maxima and minima) की विधियाँ कहा जाता है, इस प्रकार विकसित हुई हैं कि इस विषय में शायद ही कुछ इतना सूक्ष्म शेष प्रतीत होता हो, जिसे स्वयं को इन विधियों के प्रवर्तक अथवा उनके अनुयायी मानने वाले अपनी प्रखर बुद्धि से समझ सकने का दावा न करें। इस बीच, वे अपने गुरु के कथनों की जितनी चाहें शपथ लें; यदि वे प्रयास करें, तो देखेंगे कि हमारी समस्या उनकी विधियों की संकीर्ण सीमाओं में कदापि समाहित नहीं होती। वे विधियाँ केवल इतनी दूर तक जाती हैं कि दी गई अनेक या अनंत राशियों में से एक अधिकतम या न्यूनतम ज्ञात किया जा सके। किंतु जब वे राशियाँ स्वयं—जैसा कि हमारे मामले में है—जिनमें से अधिकतम या न्यूनतम चुना जाना है, उतनी ही अनिर्धारित हों जितनी कि वह वस्तु जिसे खोजा जा रहा है—यही वास्तविक कार्य है, यही कठिनाई है।

वे अत्यंत प्रतिष्ठित पुरुष, Descartes, Fermat तथा अन्य, जिन्होंने कभी अपनी-अपनी विधि की श्रेष्ठता के लिए मानो चूल्हे और वेदी की रक्षा की भाँति इतनी तीव्रता से संघर्ष किया था, अथवा अब उनके स्थान पर उनके अनुयायी, ईमानदारी से स्वीकार करें कि केवल उनके द्वारा प्रदत्त विधियों को जानने वाले यहाँ आकर रुक जाते हैं। न तो यह मेरा उद्देश्य है, न ही मेरी इच्छा, कि मैं दूसरों के आविष्कारों को अस्वीकार करूँ। उन्होंने निश्चय ही बहुत कुछ सिद्ध किया और अपने निर्धारित उद्देश्य को उत्कृष्ट रूप से प्राप्त किया। क्योंकि जिस प्रकार उनके लेखों में इस प्रकार के अधिकतम और न्यूनतम पर विचार नहीं मिलता, उसी प्रकार उन्होंने अपनी विधियों को सामान्य समस्याओं के अतिरिक्त अन्य समस्याओं के समाधान के लिए प्रस्तुत भी नहीं किया।

मैं किसी सार्वभौमिक विधि का वचन नहीं देता—जिसे कोई व्यर्थ ही खोजेगा—बल्कि कुछ विशिष्ट विधियों का, जो केवल इस मामले में ही नहीं, बल्कि कई अन्य मामलों में भी सफल होती हैं और जिनसे मैंने इस समस्या का सफलतापूर्वक समाधान किया है। और जब अन्य लोग अन्य समाधान खोज रहे थे, मैंने अपना समाधान तत्काल प्रसिद्ध Leibniz को भेजने का निश्चय किया, ताकि यदि वह अपना कोई समाधान पाएँ—जिसमें मुझे तनिक भी संदेह नहीं था, क्योंकि मैं उस अत्यंत प्रखर पुरुष की प्रतिभा से भली-भाँति परिचित था—तो किसी समय वह मेरे समाधान को अपने समाधान के साथ सार्वजनिक कर सकें। और वास्तव में, जब मैं ये बातें लिख रहा हूँ, मुझे उनके निजी पत्रों से—जिनसे वह मुझे प्रायः सम्मानित करते हैं—ज्ञात होता है..."

चित्र 9.14: ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती का योहान बर्नूली का 1697 का समाधान (Bernoulli, Johann, 1697a)

अथवा अनंत मात्राओं में से एक अधिकतम अथवा न्यूनतम ज्ञात करना"—और ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती, जहाँ "मात्राएँ स्वयं...उस वस्तु से अधिक निर्धारित नहीं हैं जिसे खोजा जा रहा है," के बीच उनका भेद परिमित-विमीय से अनंत-विमीय इष्टतमीकरण तक की वैचारिक छलाँग को ठीक-ठीक ग्रहण करता है। योहान ने पहचाना कि देकार्त, फर्मा और उनके अनुयायियों की विद्यमान विधियाँ उन समस्याओं को संभाल सकती थीं जिनमें खोज-समष्टि सुपरिभाषित थी, किंतु तब विफल होती थीं जब इष्टतमीकरण को केवल इष्टतम मान ही नहीं, बल्कि इष्टतम फलन भी निर्धारित करने होते थे। यह अंतर्दृष्टि 1697 के लिए उल्लेखनीय गणितीय परिष्कृति दर्शाती है और प्राचल इष्टतमीकरण तथा फलनिक इष्टतमीकरण के उस औपचारिक भेद का दशकों पहले पूर्वाभास देती है जो विचरण-कलन का केंद्रीय विषय बनने वाला था।

यह अंश 17वीं शताब्दी के उत्तरार्ध की बौद्धिक संस्कृति और प्रतिस्पर्धी गतिकी पर भी प्रकाश डालता है। अपने पूर्ववर्तियों—जो "अपने गुरु के शब्दों की शपथ लेते हैं" और नई चुनौतियों के सामने "अटक जाते हैं"—की योहान की तीखी समीक्षा उनके अभिनव उपागम में आत्मविश्वास तथा उस काल की तीव्र गणितीय प्रतिद्वंद्विताओं, दोनों को प्रतिबिंबित करती है। फिर भी इन पूर्व गणितज्ञों ने "निश्चय ही बहुत कुछ प्राप्त किया" की उनकी एक साथ स्वीकृति और लाइबनिट्स के प्रति आदरपूर्ण स्वर गणितीय प्रगति को सहयोगात्मक और प्रतिस्पर्धी, दोनों मानने की सूक्ष्म समझ प्रकट करते हैं। उनका विनम्र अस्वीकरण कि वे "सार्वत्रिक विधि" के स्थान पर केवल "विशिष्ट रूप" प्रस्तुत करते हैं, भविष्यसूचक सिद्ध हुआ; क्योंकि ब्रैकिस्टोक्रोन के लिए विलक्षण होने पर भी उनके प्रकाशिक सादृश्य को वास्तव में उस व्यवस्थित सामान्यीकरण की आवश्यकता थी जो आगामी दशकों में उभरने वाला था[20]।

[20]उन विद्वानों की योहान की समीक्षा, जो "अपने गुरु के शब्दों की शपथ लेते हैं" और स्थापित विधियों की सीमाओं से परे समस्याओं का सामना करने से बचते हैं, समकालीन शैक्षणिक गतिकी से उल्लेखनीय साम्य रखती है। इस दृष्टिकोण ने ऐतिहासिक रूप से स्थापित प्रतिमानों के पालन को लागू किया है—गति के गणितीय वर्णनों के प्रति अरस्तूवादी प्राकृतिक दर्शन के प्रतिरोध से, जिसे अंततः गैलीलियाई और न्यूटनीय यांत्रिकी ने प्रतिस्थापित किया, लेकर अधिक नवीन उदाहरणों तक। समकालीन संरचनात्मक अभियंता कभी-कभी प्रगामी निपात विश्लेषण अथवा चरम भारण के अधीन संरचनाओं के अरैखिक गतिक व्यवहार जैसी समस्याओं का सामना करते समय कार्यविधिगत परंपराओं से बाधित हुए हैं। यद्यपि रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण और सरलीकृत धरन-स्तंभ प्रतिरूपों पर व्यापक निर्भरता परिकलनीय रूप से दक्ष और सुस्थापित थी, वह वर्ल्ड ट्रेड सेंटर के निपात जैसी घटनाओं में देखी गई जटिल विफलता क्रियाविधियों को समझने के लिए अपर्याप्त सिद्ध हुई

ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती ने आइजैक न्यूटन, गॉटफ्रीड लाइबनिट्स, गियोम द लोपिताल और याकूब बर्नूली सहित उस युग के सर्वाधिक प्रतिष्ठित गणितज्ञों से समाधान आकर्षित किए थे। प्रत्येक ने भिन्न तकनीकों द्वारा समस्या का सामना किया, किंतु अपनी नवीन कार्यविधि और गहन भौतिक अंतर्दृष्टियों के कारण योहान का समाधान विशेष रूप से प्रभावशाली सिद्ध हुआ।

योहान बर्नूली का प्रकाशिक सादृश्य और समाधान-विधि योहान बर्नूली का समाधान गणितीय कुशाग्रता के साथ उल्लेखनीय भौतिक अंतर्दृष्टि प्रदर्शित करता है। व्यवस्थित विचरणात्मक विधियों (जो अभी विद्यमान नहीं थीं) पर निर्भर न हो सकने के कारण उन्होंने फर्मा के न्यूनतम समय सिद्धांत पर आधारित एक सुरुचिपूर्ण प्रकाशिक सादृश्य अपनाया। उनकी प्रमुख अंतर्दृष्टि गुरुत्वीय क्षेत्र को ऐसी स्तरित माध्यम मानना था जिसमें "अपवर्तनांक" ऊँचाई के साथ बदलता है; इस प्रकार यांत्रिक समस्या प्रकाशिक समस्या में रूपांतरित हुई।

गणितीय सूत्रीकरण यात्रा-समय को $\int \frac{ds}{v(y)}$ के रूप में लेता है, जहाँ $v(y) = \sqrt{2gy}$ ऊँचाई y पर कण का वेग निरूपित करता है। स्नेल के अपवर्तन नियम को लागू करके और उतरते समय कण के बढते वेग का विचार करके योहान ने प्रदर्शित किया कि इष्टतम पथ चक्रज होना चाहिए—एक सीधी रेखा पर लुढकते वृत्त के परिधि-बिंदु द्वारा अनुरेखित वक्र। योहान ने इस उल्लेखनीय परिणाम को तुरंत पहचानते हुए कहा कि "hanc ipsissimam Cycloidem seu tautochronam Hugenianan, esse nostram Brachystochronam quaesitam" (यही चक्रज अथवा हाइगेन्स का समकालिक वक्र हमारी खोजी हुई ब्रैकिस्टोक्रोन है)। यह समाधान गहन प्रतिअंतःप्रज्ञ परिणाम प्रकट करता है कि सबसे तीव्र अवरोह का पथ न तो न्यूनतम दूरी (सीधी रेखा) है, न ही सर्वाधिक तीव्र आरंभिक अवरोह, बल्कि ऐसा वक्र है जो तीव्र आरंभिक त्वरण और कुल पथ-लंबाई में इष्टतम संतुलन बनाता है।

योहान के उपागम की गणितीय सुरुचि इस पहचान में है कि प्रकाशिकी के इष्टतमीकरण सिद्धांतों को यांत्रिकी में स्थानांतरित किया जा सकता था; इसने उन न्यूनतम क्रिया सिद्धांतों का पूर्वाभास दिया जो बाद में सैद्धांतिक भौतिकी के लिए मूलभूत बनने वाले थे। तथापि कुशाग्र होते हुए भी उनकी विधि समस्या-विशिष्ट रही और अन्य विचरणात्मक समस्याओं को व्यवस्थित रूप से संभालने के लिए आवश्यक व्यापकता उसमें नहीं थी। समाधान विलक्षण था, किंतु सरलता से सामान्यीकृत नहीं किया जा सकता था—यह सीमा अधिक व्यवस्थित उपागमों के विकास को प्रेरित करने वाली थी।

गणितीय सीमाएँ और सामान्य विधियों की आवश्यकता वैचारिक सफलता के बावजूद योहान का 1697 का समाधान उन गणितीय प्रतिबंधों को प्रकट करता है जिनका सामना 18वीं शताब्दी के आरंभिक गणितज्ञ वक्रों वाली इष्टतमीकरण समस्याओं से करते समय कर रहे थे। ब्रैकिस्टोक्रोन के लिए सफल होते हुए भी उनके प्रकाशिक सादृश्य ने अन्य विचरणात्मक समस्याओं पर आक्रमण करने का कोई व्यवस्थित ढाँचा नहीं दिया। फलनिकों वाली प्रत्येक नई इष्टतमीकरण समस्या के लिए अपना कुशाग्र उपागम आवश्यक होता; इससे यह क्षेत्र व्यवस्थित विज्ञान से अधिक कला बना रहा।

गणितज्ञों के अतिरिक्त इष्टतमीकरण चुनौतियों का सामना करने पर यह कार्यविधिगत अंतर क्रमशः स्पष्ट हुआ। ब्रैकिस्टोक्रोन समाधान ने गणितीय कार्यविधि की एक निर्णायक आवश्यकता रेखांकित की: इष्टतम वक्रों द्वारा संतुष्ट किए जाने वाले अवकल समीकरणों की व्युत्पत्ति की कोई सामान्य तकनीक विद्यमान नहीं थी। चक्रज के साथ योहान की सफलता उल्लेखनीय थी, किंतु उसने इलास्टिका, समपरिमापी समस्या अथवा स्वेच्छ समाकलों को न्यूनतम करने वाले वक्रों की सामान्य समस्या जैसी अन्य विचरणात्मक समस्याएँ हल करने का कोई स्पष्ट मार्ग नहीं दिया।

यह कार्यविधिगत सीमा समाधानों के अस्तित्व और अद्वितीयता के प्रश्नों तक फैली थी। यद्यपि योहान ने प्रदर्शित किया कि चक्रज ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या हल करता है, यह सिद्ध करने का गणितीय ढाँचा अनुपस्थित था कि वह अद्वितीय वैश्विक न्यूनतम देता है, अथवा यह निर्धारित करने का ढाँचा कि विचरणात्मक समस्याओं के समाधान होते भी हैं या नहीं। इन आधारभूत प्रश्नों को दशकों बाद उभरने वाले व्यवस्थित उपागम की आवश्यकता थी।

(National Institute of Standards and Technology (NIST), 2005); इससे नई परिमित अवयव विधियों और बहु-मानक प्रतिरूपण तकनीकों का विकास आवश्यक हुआ, जिन्होंने पारंपरिक अभिकल्प दर्शन को चुनौती दी। मानकों को बनाए रखने के लिए आवश्यक होते हुए भी समकक्ष समीक्षा प्रक्रिया कभी-कभी उसी बौद्धिक रूढिवादिता को बनाए रख सकती है जिसकी योहान ने समीक्षा की थी—स्वीकृत प्रतिमानों के भीतर क्रमिक प्रगति को उन क्रांतिकारी उपागमों पर वरीयता देकर जो विद्यमान विधियों को अप्रचलित बना सकते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बाद के विचरणात्मक ढाँचे के विकास पर प्रभाव ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या ने इष्टतमीकरण के विषय में बाद के चिंतन को गहन रूप से प्रभावित किया और व्यवस्थित विचरणात्मक विधियों के विकास को प्रत्यक्षतः प्रेरित किया। गणितीय समुदाय में यह पहचान क्रमशः स्पष्ट हुई कि यद्यपि योहान के प्रकाशिक सादृश्य ने एक विशिष्ट समस्या को विलक्षण ढंग से हल किया था, गणित को फलनिकों वाली किसी भी इष्टतमीकरण समस्या को संभाल सकने वाले सामान्य सिद्धांत चाहिए थे।

अंततः उभरने वाली क्रांतिकारी अंतर्दृष्टि उन अवकल समीकरणों की व्युत्पत्ति की व्यवस्थित विधि का विकास था जिन्हें इष्टतम वक्रों को संतुष्ट करना चाहिए, चाहे जिस विशिष्ट फलनिक का इष्टतमीकरण हो। यह "अवकल मानों की विधि" वह सामान्य ढाँचा देने वाली थी जो योहान के उपागम में अनुपस्थित था—किसी भी विचरणात्मक समस्या को ऐसे अवकल समीकरण में रूपांतरित करने का साधन जिसका समाधान इष्टतम वक्र देता था।

1697 की ब्रैकिस्टोक्रोन और बाद के इलास्टिका समाधानों के बीच संबंध मात्र ऐतिहासिक क्रम से अधिक गहन है। दोनों समस्याएँ समाकल मात्राओं का इष्टतमीकरण करने वाले वक्र खोजती हैं: ब्रैकिस्टोक्रोन यात्रा-समय $\int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$ को न्यूनतम करती है, जबकि इलास्टिका विकृति ऊर्जा $\int \kappa^2 ds$ को न्यूनतम करती है। बाद के विकासों की प्रतिभा यह पहचानने में थी कि दोनों समस्याएँ—और वास्तव में सभी विचरणात्मक समस्याएँ—समान व्यवस्थित उपागम से हल की जा सकती थीं।

इलास्टिका समस्या अंततः उन सामान्य विचरणात्मक सिद्धांतों का प्रत्यक्ष अनुप्रयोग निरूपित करने वाली थी जिनका संकेत ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या ने दिया, किंतु व्यवस्थित रूप से उपयोग नहीं कर सकी। जहाँ योहान को समस्या-विशिष्ट भौतिक अंतर्दृष्टि (प्रकाशिक सादृश्य) की आवश्यकता थी, व्यवस्थित विधि किसी भी फलनिक इष्टतमीकरण समस्या पर लागू सार्वत्रिक प्रक्रिया देने वाली थी। इलास्टिका केवल एक और हल की गई समस्या नहीं, बल्कि व्यवस्थित विचरण-कलन की शक्ति का प्रदर्शन बनने वाली थी।

एक नए गणितीय अनुशासन का जन्म इस प्रकार योहान बर्नूली का 1697 का समाधान उस आधारभूत क्षण का प्रतिनिधित्व करता है जब गणितज्ञों ने पहली बार फलनों की अनंत-विमीय समष्टियों पर इष्टतमीकरण की वैचारिक चुनौती का सामना किया। यद्यपि प्रयुक्त विशिष्ट तकनीकें—प्रकाशिक सादृश्य और स्नेल का नियम—सामान्यीकृत नहीं होने वाली थीं, यह मूल अंतर्दृष्टि कि वक्र इष्टतमीकरण सिद्धांतों द्वारा ज्ञात किए जा सकते हैं, क्रांतिकारी सिद्ध होने वाली थी।

ब्रैकिस्टोक्रोन समस्या ने स्थापित किया कि यांत्रिकी और ज्यामिति के अनेक मूलभूत प्रश्नों को विचरणात्मक समस्याओं के रूप में पुनः सूत्रबद्ध किया जा सकता है। यह अंतर्दृष्टि न केवल इलास्टिका पर बाद के कार्य के लिए, बल्कि गणितीय भौतिकी के समस्त आगामी विकास के लिए निर्णायक सिद्ध हुई। यांत्रिकी में हैमिल्टन के सिद्धांत से भौतिकी के आधुनिक गेज सिद्धांतों तक, यह पहचान कि प्राकृतिक परिघटनाएँ प्रायः इष्टतमीकरण सिद्धांतों के संगत होती हैं, योहान की 1697 की सफलता से उद्भूत है।

संक्षिप्त होने के बावजूद योहान बर्नूली के शोध-पत्र ने अनजाने में गणित की एक पूर्णतः नई शाखा खोल दी थी। इस शाखा का व्यवस्थित विकास 1740 के दशक के निर्णायक वैचारिक योगदानों की प्रतीक्षा करने वाला था, किंतु वैचारिक आधारभूमि—यह पहचान कि इष्टतमीकरण केवल संख्याएँ ही नहीं, संपूर्ण फलन भी निर्धारित कर सकता है—निर्णायक रूप से स्थापित हो चुकी थी। ब्रैकिस्टोक्रोन एक कठिन समस्या से बदलकर उस विषय का संस्थापक उदाहरण बन गई जो गणित के सबसे शक्तिशाली सैद्धांतिक ढाँचों में से एक बनने वाला था।

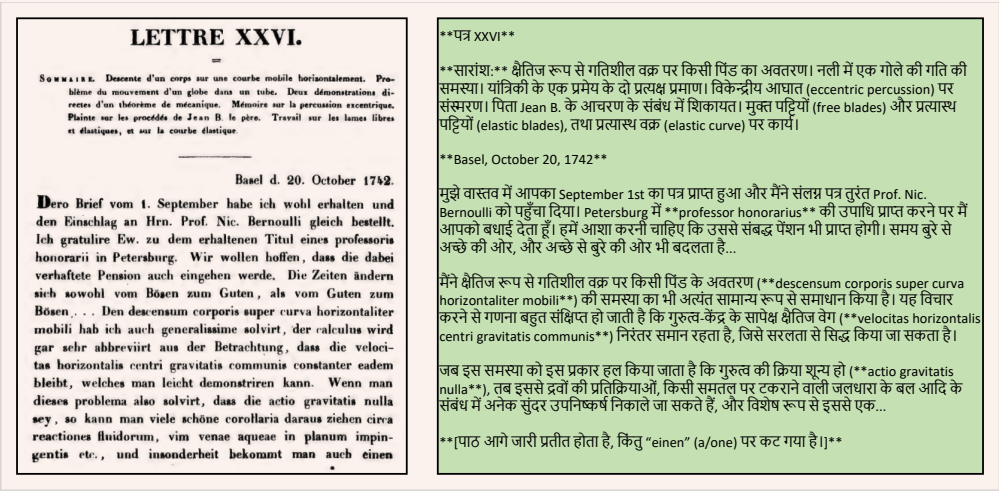
गणितीय अंतराल: 1697 से 1740 का दशक योहान की सफलता के बाद का काल तदर्थ विधियों द्वारा अलग-अलग विचरणात्मक समस्याएँ हल करने के छिटपुट प्रयासों से चिह्नित था। गणितज्ञों ने समपरिमापी समस्या, लटकती शृंखलाओं (कैटेनरियों) के प्रश्न और विभिन्न वक्र-इष्टतमीकरण चुनौतियों का सामना किया, किंतु प्रत्येक के लिए अपना कुशाग्र उपागम आवश्यक था। गणितीय समुदाय ने क्रमशः पहचाना कि एक व्यवस्थित ढाँचे की अत्यंत आवश्यकता थी।

इन दशकों में अनेक निर्णायक विकासों ने भावी प्रगति की आधारभूमि रखी। अवकल समीकरणों की समझ गहरी हुई, सीमा प्रतिबंध संभालने की विधियाँ सुधरीं और इष्टतमीकरण तथा अवकल समीकरणों के बीच वैचारिक संबंध अधिक स्पष्ट हुआ। फिर भी सभी विचरणात्मक समस्याओं को एक व्यवस्थित उपागम के अधीन एकीकृत करने वाली मूल अंतर्दृष्टि दुर्लभ बनी रही।

इसी गणितीय पृष्ठभूमि में डेनियल बर्नूली ने 1742 में अपना निर्णायक योगदान दिया; उन्होंने पहचाना कि ऊर्जा-न्यूनतमीकरण के भौतिक सिद्धांत योहान के समस्या-विशिष्ट प्रकाशिक सादृश्य और वास्तविक सामान्य विचरणात्मक ढाँचे के बीच वैचारिक सेतु दे सकते हैं। यह अंतर्दृष्टि शीघ्र ही होने वाले विचरण-कलन के व्यवस्थित विकास के लिए आवश्यक सिद्ध हुई।

समीक्षा प्रति

9.3.2.1.2.4 डेनियल बर्नूली का समाधान (1742) यह अनुभाग डेनियल बर्नूली द्वारा लियोनार्ड ऑयलर को 20 अक्तूबर, 1742 को लिखे एक उल्लेखनीय पत्र (Bernoulli, Daniel, 1845) का परीक्षण करता है, जो विचरणात्मक विधियों के विकास में निर्णायक संक्रमण निरूपित करता है, चित्र 9.15। डेनियल द्वारा संदर्भित तकनीकी समस्या—गतिशील नलिका के भीतर किसी गोले की गति—मूल ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती का प्रत्यक्ष विकास है, किंतु जटिलता की अतिरिक्त परतों सहित जिसने विद्यमान विधियों की सीमाएँ प्रकट कीं। जहाँ योहान की 1696 की समस्या (Bernoulli, Johann, 1696) ने केवल गुरुत्व के अधीन सबसे तीव्र अवरोह का वक्र पूछा था, डेनियल की नलिका-समस्या गतिक प्रतिबंध और गतिशील निर्देश-तंत्र प्रस्तुत करती है: गेंद को नलिका के निर्धारित पथ का अनुसरण करना है जबकि स्वयं नलिका किसी निर्दिष्ट गति के अनुसार चलती है। इससे एक प्रतिबंधित इष्टतमीकरण समस्या उत्पन्न होती है जिसमें इष्टतम गति केवल गुरुत्व पर नहीं, बल्कि गेंद की जड़ता, नलिका की गति और प्रतिबंध बलों की अंतःक्रिया पर निर्भर करती है।



LETTRE XXVI.

Sommaire. Descente d'un corps sur une courbe mobile horizontalement. Problème du mouvement d'un globe dans un tube. Deux démonstrations directes d'un théorème de mécanique. Mémoire sur la percussion excentrique. Plainte sur les procédés de Jean B. le père. Travail sur les lames libres et élastiques, et sur la courbe élastique.

Basel d. 20. October 1742.

Dero Brief vom 1. September habe ich wohl erhalten und den Einschlag an Hrn. Prof. Nic. Bernoulli gleich bestellt. Ich gratulire Ew. zu dem erhaltenen Titul eines professoris honorarii in Petersburg. Wir wollen hoffen, dass die dabei verhaftete Pension auch eingehen werde. Die Zeiten ändern sich sowohl vom Bösen zum Guten, als vom Guten zum Bösen. . . Den descensum corporis super curva horizontaliter mobili hab ich auch generalissime solvirt, der calculus wird gar sehr abbreviirt aus der Betrachtung, dass die velocitas horizontalis centri gravitatis communis constanter eadem bleibt, welches man leicht demonstriren kann. Wenn man dieses problema also solvirt, dass die actio gravitatis nulla sey, so kann man viele schöne corollaria daraus ziehen circa reactiones fluidorum, vim venae aqueae in planum impingentis etc., und insonderheit bekommt man auch einen

पत्र XXVI

सारांश: क्षैतिज रूप से गतिशील वक्र पर किसी पिंड का अवतरण। नली में एक गोले की गति की समस्या। यांत्रिकी के एक प्रमेय के दो प्रत्यक्ष प्रमाण। विकेन्द्रीय आघात (eccentric percussion) पर संस्मरण। पिता Jean B. के आचरण के संबंध में शिकायत। मुक्त पट्टियों (free blades) और प्रत्यास्थ पट्टियों (elastic blades), तथा प्रत्यास्थ वक्र (elastic curve) पर कार्य।

Basel, October 20, 1742

मुझे वास्तव में आपका September 1st का पत्र प्राप्त हुआ और मैंने संलग्न पत्र तुरंत Prof. Nic. Bernoulli को पहुँचा दिया। Petersburg में **professor honorarius** की उपाधि प्राप्त करने पर मैं आपको बधाई देता हूँ। हमें आशा करनी चाहिए कि उससे संबद्ध पेंशन भी प्राप्त होगी। समय बुरे से अच्छे की ओर, और अच्छे से बुरे की ओर भी बदलता है...

मैंने क्षैतिज रूप से गतिशील वक्र पर किसी पिंड के अवतरण (**descensum corporis super curva horizontaliter mobili**) की समस्या का भी अत्यंत सामान्य रूप से समाधान किया है। यह विचार करने से गणना बहुत संक्षिप्त हो जाती है कि गुरुत्व-केंद्र के सापेक्ष क्षैतिज वेग (**velocitas horizontalis centri gravitatis communis**) निरंतर समान रहता है, जिसे सरलता से सिद्ध किया जा सकता है।

जब इस समस्या को इस प्रकार हल किया जाता है कि गुरुत्व की क्रिया शून्य हो (**actio gravitatis nulla**), तब इससे द्रवों की प्रतिक्रियाओं, किसी समतल पर टकराने वाली जलधारा के बल आदि के संबंध में अनेक सुंदर उपनिष्कर्ष निकाले जा सकते हैं, और विशेष रूप से इससे एक...

[पाठ आगे जारी प्रतीत होता है, किंतु "einen" (a/one) पर कट गया है।]

चित्र 9.15: ऑयलर को डेनियल बर्नूली का पत्र, (Bernoulli, Daniel, 1845)

पारंपरिक ज्यामितीय उपागमों को, जिन्हें सरलतर ब्रैकिस्टोक्रोन हल करने के लिए भी योहान के कुशाग्र प्रकाशिक सादृश्य की आवश्यकता पड़ी थी, ऐसी गतिशील प्रतिबंध समस्याओं के सामने संभालना कठिन हो गया। किंतु डेनियल के ऊर्जा-आधारित सिद्धांत बदलते निर्देशांक तंत्रों में अलग-अलग बल-घटकों का अनुसरण करने के स्थान पर पूरे निकाय की ऊर्जा को एकीकृत मात्रा मानकर इन जटिलताओं को सुरुचिपूर्ण ढंग से संभाल सकते थे। डेनियल के पत्र में भाषाओं का मिश्रण स्वयं गणित के इस व्यापक संक्रमण-क्षण को प्रतिबिंबित करता है। जिस प्रकार गणितीय भाषा विशुद्ध ज्यामितीय वर्णनों से अधिक वैश्लेषिक व्यंजकों की ओर विकसित हो रही थी, उसी प्रकार गणित की शाब्दिक भाषा सार्वत्रिक लैटिन से अधिक सुगम लोकभाषा की ओर बदल रही थी। जर्मन सुपष्टीकरणों और लैटिन तकनीकी पदों के बीच डेनियल का सहज परिवर्तन उनकी कार्यविधिगत सफलता को प्रतिबिंबित करता है: वे ऐसे ऊर्जा-आधारित विचरणात्मक सिद्धांत विकसित कर रहे थे जो प्रतिबंधित इष्टतमीकरण समस्याओं के पूरे वर्ग को व्यवस्थित रूप से संभाल सकते थे, जिसमें योहान की मूल ब्रैकिस्टोक्रोन और ये अधिक जटिल नलिका-गतिकियाँ विशेष स्थितियों के रूप में सम्मिलित थीं।

डेनियल की प्रमुख कार्यविधिगत अंतर्दृष्टि उनके इस कथन में आती है:

> da ich aber ganz andere principia gebrauche, muss ich auch ganz andere denominationes annehmen
>
> चूँकि मैं पूर्णतः भिन्न सिद्धांतों का उपयोग करता हूँ, इसलिए मुझे पूर्णतः भिन्न नामकरण भी अपनाने होंगे।
>
> Bernoulli, Daniel, 1845 *"The 26th letter to Euler"*

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यह ज्यामितीय और शुद्धगतिक विधियों से ऊर्जा-आधारित उपागमों की ओर एक मूल प्रतिमान-परिवर्तन प्रकट करता है, जो ऐतिहासिक रूप से रूपांतरणकारी सिद्ध होने वाला था।

पत्राचार का संजाल ऑयलर-बर्नूली पत्राचार 18वीं शताब्दी के सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण वैज्ञानिक आदान-प्रदानों में से एक है। लियोनार्ड ऑयलर (1707-1783) और डेनियल बर्नूली (1700-1782) ने अपने जीवन-वृत्तों में विस्तृत संवाद बनाए रखा और यांत्रिकी, गणित तथा भौतिकी की समस्याओं पर चर्चा की[21]।

प्रत्यास्थ ऊर्जा का व्यंजक और भौतिक अंतःप्रज्ञा अक्तूबर 1742 के पत्र में डेनियल बर्नूली प्रत्यास्थ ऊर्जा के आरंभिक स्पष्ट सूत्रीकरणों में से एक प्रस्तुत करते हैं:

$$\int \frac{ds}{R^2} \tag{9.6}$$

जहाँ ds चाप-लंबाई का अवयव है, R वक्रता की त्रिज्या है और $\frac{1}{R^2}$ वक्रता का वर्ग निरूपित करता है।

यह व्यंजक किसी प्रत्यास्थ छड़ अथवा धरन की बंकन ऊर्जा निरूपित करता है, किंतु बर्नूली का सूत्रीकरण कठोर व्युत्पत्ति के स्थान पर भौतिक अंतःप्रज्ञा पर आधारित था। उनका तर्क अनेक अंतःप्रज्ञ चरणों का अनुसरण करता था: यह पहचानना कि प्रत्यास्थ ऊर्जा वहाँ संकेंद्रित होनी चाहिए जहाँ धरन सर्वाधिक तीव्रता से मुड़ती है (वक्रता $\kappa = 1/R$ पर निर्भरता सुझाते हुए), अन्य भौतिक निकायों से सादृश्य द्वारा यह अनुमान करना कि यह ऊर्जा विरूपण के साथ द्विघाती रूप से मापनी चाहिए, और यह समझना कि कुल ऊर्जा धरन की लंबाई के अनुदिश स्थानीय ऊर्जा-घनत्व का समाकलन करके प्राप्त होनी चाहिए।

डेनियल कहते हैं कि वे मानते हैं ("ich annehme") कि

> die *vis viva* potentialis laminae elasticae insita müsse minima seyn"
>
> प्रत्यास्थ पटलिका में निहित स्थितिज vis viva न्यूनतम होना चाहिए।
>
> Bernoulli, Daniel, 1845 *"The 26th letter to Euler"*

यह भौतिक अंतःप्रज्ञा द्वारा कठोर गणितीय व्युत्पत्ति से एक शताब्दी से भी अधिक पहले आने का उल्लेखनीय उदाहरण है—उचित सैद्धांतिक आधार कोशी की संतति यांत्रिकी (Cauchy, 1823), पुवासों के प्रत्यास्थ सिद्धांत (Poisson, 1829) और किर्खहॉफ के 1859 के पट्टिका सिद्धांत (Kirchhoff, 1859) द्वारा उभरने वाला था।

विचरणात्मक विधियाँ और गणितीय ढाँचा बर्नूली ने प्रत्यास्थ वक्र समस्या हल करने के लिए "methodum isoperimetricorum" (समपरिमापी समस्याओं की विधि) के उपयोग का स्पष्ट उल्लेख किया है; इसमें फलनिकों का प्रतिबंधित इष्टतमीकरण और ज्यामितीय प्रतिबंधों के अधीन ऊर्जा न्यूनतम करने वाले वक्रों की खोज सम्मिलित है। वे अपने विचरणात्मक उपागम से "eine aequationem differentialem 4ti ordinis" (एक चतुर्थ-कोटि अवकल समीकरण) प्राप्त करने की सूचना देते हैं—यह महत्त्वपूर्ण है क्योंकि ऑयलर-बर्नूली धरन समीकरण वास्तव में चतुर्थ-कोटि का है और ऑयलर द्वारा ऑयलर-लाग्रांज समीकरण के व्यवस्थित विकास से दो वर्ष पहले विचरणात्मक सिद्धांतों तथा अवकल समीकरणों के बीच संबंध प्रदर्शित करता है।

पत्र में दी गई लंबाई की ऐसी प्रत्यास्थ पटलिका की सामान्य समस्या पर चर्चा है जो दो बिंदुओं पर स्थिर है और जिसके सिरों पर स्पर्शरेखा-दिशाएँ निर्धारित हैं; यह प्रत्यास्थता सिद्धांत में सीमा मान समस्याओं के आरंभिक सूत्रीकरणों में से एक है।

वैचारिक नवोन्मेष पत्र अनेक निर्णायक विकास प्रदर्शित करता है: प्रत्यास्थ ऊर्जा का वक्रता के समाकल के रूप में सूत्रीकरण, भौतिक समस्याओं पर समपरिमापी तकनीकों का अनुप्रयोग, यह विचार कि प्राकृतिक विन्यास ऊर्जा को न्यूनतम

[21] ऑयलर–बर्नूली पत्राचार के व्यापक अंकीय संस्करण के लिए Bernoulli–Euler Online (BEOL) परियोजना, Euler Archive, और Early Modern Letters Online (EMLO) आँकड़ा-संग्रह देखें; ये सभी मूल पत्रों के खोजयोग्य पाठ, अधितथ्य और उच्च-विभेदन क्रमवीक्षण प्रदान करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करते हैं, और भौतिकी तथा उन्नत कलन के बीच संबंध। यह 1742 का पत्राचार ऑयलर के *Methodus inveniendi* (Euler, 1744b), दालांबेयर के कंपित डोरियों पर कार्य (D'Alembert, 1747) और लाग्रांज के *Mécanique Analytique* (Lagrange, 1788) से पहले का है।

व्यवस्थित विकास के लिए मंच तैयार करना डेनियल के 1742 के प्रत्यास्थ ऊर्जा-सिद्धांतों के सूत्रीकरण और समपरिमापी विधियों के अनुप्रयोग ने गणितीय समुदाय के लिए अवसर और चुनौती, दोनों उत्पन्न किए। उनकी भौतिक अंतर्दृष्टियाँ गहन थीं—यह पहचान कि प्राकृतिक विन्यास ऊर्जा को न्यूनतम करते हैं, समस्त सैद्धांतिक भौतिकी के लिए मूलभूत सिद्ध होने वाली थी। किंतु उनका उपागम विशिष्ट समस्याओं से बँधा रहा और विचरणात्मक समस्याओं के पूर्ण क्षेत्र को संभालने के लिए आवश्यक व्यवस्थित ढाँचे से रहित था।

गणितीय अंतराल स्पष्ट था: यद्यपि डेनियल $\int ds/R^2$ जैसे ऊर्जा-व्यंजक सूत्रबद्ध कर सकते थे और चतुर्थ-कोटि अवकल समीकरण व्युत्पन्न करने के लिए समपरिमापी तकनीकें लागू कर सकते थे, स्वेच्छ विचरणात्मक समस्याओं को उनके संगत अवकल समीकरणों में रूपांतरित करने की कोई सामान्य विधि नहीं थी। प्रत्येक नया ऊर्जा फलनिक अपने कुशाग्र उपागम की माँग करता था, बहुत कुछ वैसे ही जैसे पचास वर्ष पहले योहान की ब्रैकिस्टोक्रोन को प्रकाशिक सादृश्य की आवश्यकता पड़ी थी।

यह कार्यविधिगत सीमा ऑयलर के व्यवस्थित अन्वेषण को प्रेरित करने वाली थी। डेनियल की ऊर्जा-न्यूनतमीकरण संबंधी अंतर्दृष्टियाँ आत्मसात करने और उनके पत्राचार द्वारा विचरणात्मक उपागमों की शक्ति देखने के बाद ऑयलर ने एक सार्वत्रिक ढाँचे की आवश्यकता पहचानी—ऐसी व्यवस्थित विधि जो किसी भी फलनिक इष्टतमीकरण समस्या को संभाल सके, चाहे वह प्रत्यास्थ ऊर्जा, भूपृष्ठीय रेखाओं अथवा अभी खोजे जाने वाले पूर्णतः नए भौतिक सिद्धांतों से संबंधित हो। ऊर्जा-सिद्धांतों की भौतिक अंतःप्रज्ञा से उनके कठोर गणितीय सूत्रीकरण तक का संक्रमण 18वीं शताब्दी के विज्ञान की सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण प्रगतियों में से एक है; डेनियल का पत्र उस निर्णायक संक्रमण की एक अद्वितीय झलक देता है, जब 1744 में उभरने वाले क्रांतिकारी संश्लेषण के लिए मंच तैयार हुआ।

9.3.2.1.2.5 समपरिमापी समस्याएँ बनाम विचरण-कलन ऑयलर के विचरणात्मक उपागम का अध्ययन करने से पहले हमें कुछ पदों का संदर्भ स्थापित करना चाहिए।

समपरिमापी समस्याएँ इष्टतमीकरण चुनौतियों का एक विशिष्ट वर्ग हैं जो प्राचीन ज्यामितीय प्रश्नों से उभरा; इनमें सर्वाधिक प्रसिद्ध डिडो की समस्या है: नियत परिमाप वाले सभी बंद वक्रों में कौन अधिकतम क्षेत्रफल घेरता है? इन समस्याओं में किसी अन्य मात्रा पर प्रतिबंध बनाए रखते हुए किसी ज्यामितीय अथवा भौतिक मात्रा का इष्टतमीकरण करना होता है।

इसके विपरीत विचरण-कलन वह व्यापक गणितीय ढाँचा है जो समपरिमापी समस्याओं के साथ अनेक अन्य प्रकार के फलनिक इष्टतमीकरण को व्यवस्थित रूप से संभालने के लिए विकसित हुआ। जहाँ समपरिमापी समस्याओं ने विचरणात्मक विधियों के विकास के लिए निर्णायक प्रेरणा दी—विशेषतः 1700 के दशक के आरंभ में बर्नूली बंधुओं के विवादों द्वारा—वहीं परिणामी गणितीय सिद्धांत प्रतिबंधित इष्टतमीकरण से बहुत आगे जाकर फलनिकों के इष्टतमीकरण वाली किसी भी समस्या को समाहित करता है।

समकालीन गणित में समपरिमापी समस्याएँ विचरण-कलन की प्रतिबंधित शाखा बनाती हैं। यद्यपि ऐतिहासिक रूप से उन्होंने व्यवस्थित विचरणात्मक विधियों के विकास को प्रेरित किया, अब वे फलनिक इष्टतमीकरण के उस व्यापक क्षेत्र के भीतर एक महत्त्वपूर्ण श्रेणी हैं जो प्रतिबंधित और अप्रतिबंधित, दोनों समस्याओं को समाहित करता है।

9.3.2.2 ऑयलर का समाधान (विचरण-कलन) (1744)

ऑयलर का 1744 का *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (Euler, 1744b), चित्र 9.16a, विचरण-कलन के व्यवस्थित विकास और उसके अभिनव अनुप्रयोगों, दोनों के कारण गणितीय विश्लेषण की एक ऐतिहासिक उपलब्धि है। इस कार्य में हैं

- छह मुख्य अध्याय, जो जुलाई 1743 में प्रकाशक को दिए गए
- दिसंबर 1743 में दिए गए दो परिशिष्ट; पहले में प्रत्यास्थ वक्रों और दूसरे में न्यूनतम क्रिया के सिद्धांत का विवेचन है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 9.5: समपरिमापी समस्याएँ बनाम विचरण-कलन

पक्ष	समपरिमापी समस्याएँ	विचरण-कलन
परिभाषा	ज्यामितीय प्रतिबंधों (जैसे नियत परिमाप) वाली इष्टतमीकरण समस्याएँ	फलनिकों के इष्टतमीकरण का सामान्य गणितीय ढाँचा
क्षेत्र	प्रतिबंधित इष्टतमीकरण का विशिष्ट प्रकार	समस्त फलनिक इष्टतमीकरण समाहित करने वाला व्यापक क्षेत्र
ऐतिहासिक काल	प्राचीन उद्गम (डिडो की समस्या), 1700 के दशक तक स्थिति-दर-स्थिति समाधान	1696 (ब्रैकिस्टोक्रोन) से 1744 (ऑयलर) तक व्यवस्थित विकास
गणितीय संरचना	Optimize $I[y]$ subject to $J[y] =$ constant	Optimize $I[y] = \int F(x, y, y')dx$ (प्रतिबंधित अथवा अप्रतिबंधित)
समाधान-विधि	लाग्रांज गुणक: $\delta(I - \lambda J) = 0$	ऑयलर-लाग्रांज समीकरण: $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$
शास्त्रीय उदाहरण	वृत्त (अधिकतम क्षेत्रफल, नियत परिमाप), डिडो की समस्या, प्रतिबंधित ब्रैकिस्टोक्रोन	ब्रैकिस्टोक्रोन, इलास्टिका, भूपृष्ठीय रेखाएँ, न्यूनतम पृष्ठ, फर्मा का सिद्धांत
प्रमुख योगदानकर्ता	याकूब & योहान बर्नूली (विवाद 1697-1701), लाग्रांज (गुणक विधि)	योहान बर्नूली (1696), ऑयलर (1744), लाग्रांज (1788)
आधुनिक संबंध	विचरण-कलन का उपसमुच्चय (प्रतिबंधित समस्याएँ)	समपरिमापी समस्याओं को विशेष स्थितियों के रूप में सम्मिलित करने वाला सामान्य सिद्धांत

यह संरचना ऑयलर के व्यवस्थित उपागम को प्रतिबिंबित करती है: मुख्य भाग उस विषय की सैद्धांतिक आधारभूमि स्थापित करता है जो शास्त्रीय विचरण-कलन कहलाने वाला था, जिसमें ऑयलर अवकल समीकरण (अब ऑयलर-लाग्रांज समीकरण) सम्मिलित है; वहीं परिशिष्ट कठिन अनुप्रयोगों द्वारा इन नई विधियों की शक्ति प्रदर्शित करते हैं और Additamentum I में इलास्टिका समस्या का उनका समाधान प्रस्तुत है। सितंबर 1744 में प्रकाशित इस ग्रंथ ने ऑयलर को विचरण-कलन के प्रथम चरण का प्रमुख रचयिता बनाया और उन्हें अपने युग के महानतम जीवित गणितज्ञ के रूप में स्थापित किया। इलास्टिका समाधान को मुख्य पाठ के स्थान पर परिशिष्ट में रखने की रणनीति रेखांकित करती है कि ऑयलर उसे अपने आप में मूल सैद्धांतिक योगदान के स्थान पर अपने नवविकसित विचरणात्मक सिद्धांतों का परिष्कृत अनुप्रयोग मानते थे।

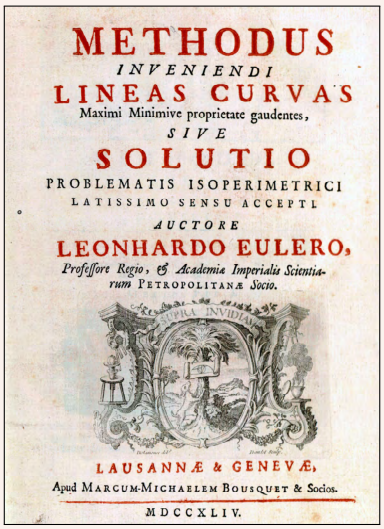
मुख्य भाग: विचरण-कलन की आधारभूमि मुख्य कार्य के छह अध्याय विचरण-कलन की व्यवस्थित आधारभूमि स्थापित करते हैं। ऑयलर का क्रांतिकारी योगदान[22] समाकल फलनिकों का इष्टतमीकरण करने वाले वक्र ज्ञात करने की उनकी व्यवस्थित विधि थी। यह मूलतः नए प्रकार की गणितीय समस्या थी—फलनों का इष्टतमीकरण करने वाले मान खोजने के स्थान पर फलनिकों का इष्टतमीकरण करने वाले फलन खोजना लक्ष्य था।

इस रूप के किसी सामान्य फलनिक के लिए:

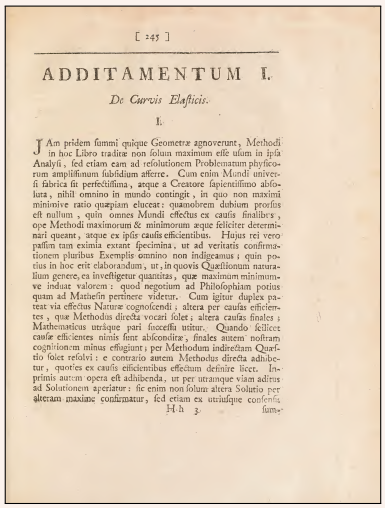
$$I = \int_{x_1}^{x_2} Z(x, y, p, q, r, \ldots)\, dx \tag{9.7}$$

[22]यह अनुभाग मुख्यतः Oldfather, Ellis, and Brown, 1933 के प्रामाणिक अंग्रेजी अनुवाद और टिप्पणी पर आधारित है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) *Methodus iveniendi lineas...* (Euler, 1744b)



(b) *Additamentum I: De curvis elasticis* (Euler, 1744a)

चित्र 9.16: विचरण-कलन पर ऑयलर का 1744 का ग्रंथ (Euler, 1744b)

जहाँ $p = dy/dx$, $q = dp/dx = d^2y/dx^2$, $r = dq/dx = d^3y/dx^3$ आदि, ऑयलर "अवकल मान" की क्रांतिकारी संकल्पना प्रस्तुत करते हैं।

वे Z का पूर्ण अवकल इस प्रकार लिखते हैं:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \cdots \tag{9.8}$$

जहाँ:

$$M = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial Z}{\partial p} \tag{9.9}$$

$$Q = \frac{\partial Z}{\partial q}, \quad R = \frac{\partial Z}{\partial r} \tag{9.10}$$

निर्णायक अंतर्दृष्टि यह है कि फलनिक I के चरम मान के लिए उसका "अवकल मान" शून्य होना चाहिए:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial Z}{\partial q} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial Z}{\partial r} + \cdots \right) \delta y\,dx = 0 \tag{9.11}$$

चूँकि यह स्वेच्छ विचरणों δy के लिए सत्य होना चाहिए, समाकल्य को शून्य होना चाहिए; इससे वह समीकरण मिलता है जिसे आज हम ऑयलर-लाग्रांज समीकरण कहते हैं:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial Z}{\partial q} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial Z}{\partial r} + \cdots = 0 \tag{9.12}$$

इष्टतमीकरण सिद्धांतों से अवकल समीकरण व्युत्पन्न करने की यह व्यवस्थित विधि पूर्णतः नई थी और न केवल यांत्रिकी, बल्कि समस्त गणितीय भौतिकी में क्रांति लाने वाली थी। छहों अध्यायों में ऑयलर ने इस ढाँचे को ब्रैकिस्टोक्रोन, समपरिमापी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समस्याओं और विभिन्न ज्यामितीय इष्टतमीकरण चुनौतियों सहित शास्त्रीय समस्याओं पर लागू किया तथा अपने उपागम की व्यापकता और शक्ति प्रदर्शित की।

ऑयलर अपने कार्यविधिगत उपागम में द्विविध सत्यापन के महत्त्व पर बल देते हैं:

> Inprimis autem opera est adhibenda, ut per utramque viam aditus ad Solutionem aperiatur: sic enim non solum altera Solutio per alteram maxime confirmatur, sed etiam ex utriusque consensu summam percipimus voluptatem.
>
> किंतु यह देखने का विशेष प्रयास करना चाहिए कि समस्या के समाधान की दोनों उपागम-विधियाँ खुली हों; क्योंकि इससे न केवल एक समाधान दूसरे द्वारा अत्यधिक सुदृढ होता है, बल्कि उससे भी अधिक, दोनों समाधानों के सामंजस्य से हमें परम संतोष प्राप्त होता है।
>
> Euler, 1744b *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Section 1

द्विविध सत्यापन का यह सिद्धांत परिशिष्ट में इलास्टिका समस्या के उनके विवेचन का केंद्रीय तत्त्व सिद्ध होने वाला था।

परिशिष्ट I: इलास्टिका पर अनुप्रयोग मुख्य अध्यायों में विचरण-कलन का सामान्य ढाँचा स्थापित करने के बाद ऑयलर प्रथम परिशिष्ट, *Additamentum I: De curvis elasticis* (Euler, 1744a), चित्र 9.16b, में उसके सर्वाधिक कठिन अनुप्रयोग की ओर मुडते हैं। यह अनुप्रयोग मात्र उदाहरणात्मक नहीं था; वह डेनियल बर्नूली की निर्णायक भौतिक अंतर्दृष्टि से प्रेरित था और उनके नए गणितीय ढाँचे की शक्ति के सर्वाधिक सुरुचिपूर्ण प्रदर्शनों में से एक था।

डेनियल बर्नूली की अंतर्दृष्टि और पत्राचार 1742 में ऑयलर को लिखे पत्र में डेनियल बर्नूली ने सुझाव दिया था कि इलास्टिका का समीकरण यह मानकर प्राप्त किया जा सकता है कि कोई निश्चित व्यंजक—जिसे आज हम विकृति ऊर्जा कहेंगे—साम्यावस्था में न्यूनतम होता है:

> Ich möchte wissen, ob Ew. die curvaturam laminae elasticae nicht könnten sub hac facie solviren, dass eine lamina datae longitudinis in duobus punctis positione datis fixirt sey, also dass die Tangentes in istis punctis auch positione datae seyen... Dieses ist die idea generalissima elasticarum; hab aber sub hac facie noch keine Solution gefunden, als per methodum isoperimetricorum, da ich annehme, dass die vis viva potentialis laminae elasticae insita müsse minima seyn, wie ich Ew. schon einmal gemeldet. Auf diese Weise bekomme ich eine aequationem differentialem 4ti ordinis, welche ich nicht hab genugsam reduciren können, um zu zeigen, dass die aequatio ordinaria elastica general sey.
>
> मैं जानना चाहता हूँ कि क्या आप प्रत्यास्थ पटलिका की वक्रता को इस शर्त के अधीन हल कर सकते हैं कि दी गई लंबाई की कोई पटलिका दिए गए स्थानों वाले दो बिंदुओं पर स्थिर हो और इन बिंदुओं पर स्पर्शरेखाओं के स्थान भी दिए हों... यह इलास्टिकाओं की सर्वाधिक सामान्य संकल्पना है; किंतु इस शर्त के अधीन समपरिमापी विधि द्वारा अभी तक मुझे कोई समाधान नहीं मिला है, क्योंकि मेरी मान्यता है कि प्रत्यास्थ पटलिका में निहित स्थितिज vis viva न्यूनतम होना चाहिए, जैसा मैंने आपको पहले भी बताया है। इस प्रकार मुझे 4वीं-कोटि का एक अवकल समीकरण मिलता है, जिसे मैं इतना पर्याप्त रूप से घटा नहीं सका हूँ कि दिखा सकूँ कि सामान्य इलास्टिका का साधारण समीकरण लागू होता है।
>
> Bernoulli, Daniel, 1845 *"The 26th letter to Euler"*

ध्यान दें कि *lamina* एक पतली, समतल, नम्य पट्टी अथवा धरन को संदर्भित करती है—मूलतः जिसे आधुनिक अभियंता प्रत्यास्थ धरन अथवा प्रास-धरन कहेंगे। ऑयलर मानते हैं कि पटलिका तनु है (लंबाई ≫ चौडाई ≫ मोटाई), लगाए गए भारों की तुलना में भारहीन है, अपनी लंबाई के अनुदिश अविस्तार्य है और प्रत्यास्थ है (भार हटने पर अपने मूल सीधे विन्यास में लौटती है)। एक सिरे पर पकडे और दूसरे सिरे पर बल द्वारा मोडे गए पैमाने अथवा डाइविंग बोर्ड की कल्पना करें। लैटिन पद

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

"lamina" (अर्थात् "पतली पट्टिका") 18वीं शताब्दी में किसी भी तनु संरचनात्मक अवयव के लिए मानक पारिभाषिकी था जो मुख्यतः विस्तार के स्थान पर वक्रता द्वारा मुडता है।

> ich annehme, dass die vis viva potentialis laminae elasticae insita müsse minima seyn
>
> मैं मानता हूँ कि प्रत्यास्थ पट्टिका में निहित स्थितिज vis viva न्यूनतम होना चाहिए।
> Euler, 1744b *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*

> "Sonsten exprimire ich die vim vivam potentialem laminae elasticae naturaliter rectae et incurvatae durch $\int (ds/R^2)$"
>
> मैं स्वाभाविक रूप से सीधी किंतु मुडी हुई प्रत्यास्थ पट्टिका के स्थितिज vis viva को $\int (ds/R^2)$ द्वारा व्यक्त करता हूँ।
> Euler, 1744b *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*

यह पत्राचार 1742 के राजनीतिक संक्रमणों के बीच सेंट. पीटर्सबर्ग अकादमी की अस्थिर स्थिति को भी प्रकट करता है, जिसने विद्वानों को यह रणनीति बनाने पर बाध्य किया कि कहाँ (और कब) प्रकाशित करें; साथ ही यह अठारहवीं शताब्दी के शैक्षणिक जीवन की उस कठोर वास्तविकता को प्रतिबिंबित करता है जिसमें वरिष्ठ विद्वान प्रायः अपने कनिष्ठों के कार्य को अपना लेते थे।

इलास्टिका का विचरणात्मक सूत्रीकरण न्यूनतम ऊर्जा संबंधी डेनियल बर्नूली की निर्णायक 1742 की अंतर्दृष्टि पर प्रत्यक्षतः आधारित होकर ऑयलर इलास्टिका समस्या को एक विचरणात्मक सिद्धांत के रूप में सूत्रबद्ध करते हैं। ऑयलर अपनी विशिष्ट परिशुद्धता से समस्या बताते हैं:

> ut, inter omnes curvas ejusdem longitudinis, quae non solum per puncta A & B transeant, sed etiam in his punctis a rectis positione datis tangantur, definiatur ea in qua sit valor hujus expressionis $\int \frac{ds}{R^2}$ minimus.
>
> समान लंबाई के उन सभी वक्रों में, जो न केवल बिंदुओं A और B से गुजरते हैं बल्कि इन बिंदुओं पर दिए गए स्थानों वाली सीधी रेखाओं के स्पर्शी भी हैं, उस वक्र का निर्धारण किया जाए जिसमें $\int \frac{ds}{R^2}$ का मान न्यूनतम हो।
> Euler, 1744b *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Section 2

प्रमुख वैचारिक सफलता यह पहचानना है कि प्रत्यास्थ वक्र उन विन्यासों के संगत हैं जो कुल ऊर्जा फलनिक को न्यूनतम करते हैं:

$$I = \int \left[\frac{1}{2} EI\kappa^2 + V(x,y) \right] ds \tag{9.13}$$

जहाँ प्रथम पद प्रत्यास्थ विकृति ऊर्जा (वक्रता के वर्ग के समानुपाती) निरूपित करता है और $V(x,y)$ बाह्य बलों की स्थितिज ऊर्जा निरूपित करता है।

शुद्ध इलास्टिका (कोई बाह्य बल नहीं) के लिए यह घटकर होता है:

$$I = \int \kappa^2 \, ds = \int \frac{1}{R^2} \, ds \tag{9.14}$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

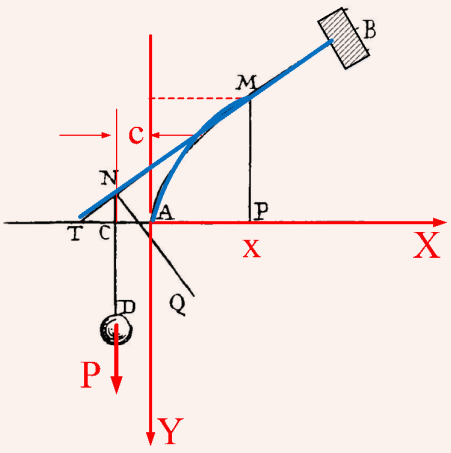
यह ऊर्जा-सूत्रीकरण वह तात्कालिक भौतिक अंतर्दृष्टि देता है जो पहले के उपागमों में अनुपस्थित थी। यह समझाता है:

- **विशिष्ट समाधान क्यों चुने जाते हैं**: प्रकृति कुल ऊर्जा को न्यूनतम करने वाले विन्यास चुनती है
- **समाधान की अनेक शाखाएँ**: भिन्न सीमा प्रतिबंध ऊर्जा फलनिक के भिन्न न्यूनतमों की ओर ले जाते हैं
- **स्थायित्व**: न्यूनतम ऊर्जा के विन्यास अंतर्निहित रूप से स्थायी होते हैं
- **सामान्यीकरण की क्षमता**: समान सिद्धांत सभी प्रत्यास्थ समस्याओं पर लागू होता है

ऊर्जा सिद्धांत हाइगेन्स के 1694 में अनेक संभावित प्रत्यास्थ वक्र-आकृतियों के प्रेक्षण को तत्काल समझाता है: भिन्न सीमा प्रतिबंध और भारण प्राचल ऊर्जा फलनिक के भिन्न न्यूनतमों की ओर ले जाते हैं, जिनमें प्रत्येक भौतिक रूप से साकार विन्यास निरूपित करता है।

प्रत्यक्ष व्युत्पत्ति और सत्यापन द्विविध सत्यापन के अपने सिद्धांत के प्रति निष्ठ रहते हुए ऑयलर ज्ञात यांत्रिक सिद्धांतों द्वारा उसी समीकरण की व्युत्पत्ति करते हैं और इस प्रकार विचरणात्मक प्रक्रिया की वैधता स्थापित करते हैं। परिशिष्ट के आरंभिक अनुभागों में ऑयलर ने विचरण-कलन की विधियों द्वारा डेनियल के अनुमान को सत्यापित किया। इसके बाद परिशिष्ट का अधिकांश भाग प्रत्यास्थ पटलिकाओं की यांत्रिकी के प्रत्यक्ष विधियों द्वारा किए गए ऐसे अन्वेषण को समर्पित है जिसका विचरणात्मक गणित से संबंध नहीं है।

अपनी प्रत्यक्ष व्युत्पत्ति में ऑयलर ऐसी पटलिका AB पर विचार करते हैं जो B पर किसी आधार में आबद्ध है, चित्र 9.17। B और B पर पटलिका की स्पर्शरेखा, दोनों स्थिर माने जाते हैं। दूसरे सिरे A पर एक भारहीन छड जुडी है और छड के सिरे C से बल P कार्य करता है[23]। पटलिका का भार P की तुलना में नगण्य माना गया है।



चित्र 9.17: ऑयलर की प्रत्यक्ष विधि का "मुक्त पिंड आरेख"
इस इलास्टिका आरेख के ऑयलर के बाद के सामान्यीकरण (1771), जो इस 1744 के आरेख पर आधारित है, के लिए चित्र 9.28 से तुलना करें।

ऑयलर मूलबिंदु A वाला ऐसा कार्तीय निर्देशांक तंत्र अपनाते हैं जिसका अभिविन्यास इस प्रकार है कि y-अक्ष बल P की दिशा से संपाती हो। पटलिका पर बिंदु M मानें, जिसके निर्देशांक x और y हैं। M के परितः बाह्य बल द्वारा लगाया गया आघूर्ण $\mathfrak{M} = P(x + c)$ है, जहाँ c, A से बिंदु C तक की दूरी है। M पर पटलिका का प्रतिरोधी "प्रत्यास्थ बल" (जिसे आज हम बंकन आघूर्ण कहेंगे) ऑयलर द्वारा Ek^2/R व्यंजक से दिया माना गया है, जहाँ Ek^2 पटलिका की "दृढता" मापने वाली मात्रा है और R, M पर पटलिका की वक्रता-त्रिज्या है। साम्यावस्था में ये दोनों व्यंजक समान होने चाहिए:

[23] ध्यान देना चाहिए कि ऑयलर के उपागम में प्रत्यास्थ वक्र एकीकृत प्रतिरूप देता है और निर्देशांक तंत्र को बाह्य बल P की दिशा के सापेक्ष एक बार और सदैव के लिए अभिविन्यस्त किया जाता है। संभवतः इसीलिए हम ऑयलरीय (लाग्रांजीय के विपरीत) निर्देशांक तंत्र पद का उपयोग करते हैं, जो बड़े विस्थापनों अथवा तरल यांत्रिकी में प्रयुक्त होता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\mathfrak{M} = P(c+x) = \frac{\mathfrak{B}}{R} \tag{9.15}$$

जहाँ $\mathfrak{B} = Ek^2$ को "बंकन मापांक" कहा गया है।

वक्रता-त्रिज्या का व्यंजक पहले ही याकूब बर्नूली द्वारा व्युत्पन्न किया जा चुका था (समीकरण 8.17)

$$R = \frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

R के इस व्यंजक को समीकरण 9.15 में प्रतिस्थापित और समाकलित करके ऑयलर प्राप्त करते हैं:

$$dy = \frac{-P\left(\frac{1}{2}x^2+cx+f\right)}{\sqrt{\left(E^2k^4 - P^2\left(\frac{1}{2}x^2+cx+f\right)^2\right)}}dx \tag{9.16}$$

जहाँ f समाकलन नियतांक है। ऑयलर इसे उस सामान्य रूप में पुनः व्यक्त करना पसंद करते हैं जिसे उन्होंने पहले विचरणात्मक प्रक्रिया द्वारा प्राप्त किया था:

$$dy = \frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}{\sqrt{\left(a^4 - (\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2\right)}}dx \tag{9.17}$$

जहाँ मात्राएँ a, α, β और γ निम्न संबंधों द्वारा समीकरण 9.16 की मात्राओं से जुड़ी हैं:

$$P = \frac{-2Ek^2\gamma}{a^2}; \qquad c = \frac{\beta}{2\gamma}; \qquad f = \frac{\alpha}{2\gamma} \tag{9.18}$$

बल P की दिशा नियतांक γ के चिह्न से निर्धारित होती है; धनात्मक γ के लिए वह धनात्मक y-अक्ष की दिशा में और ऋणात्मक γ के लिए ऋणात्मक y-अक्ष की दिशा में होती है।

आधुनिक प्रतिबल-विश्लेषण सिद्धांत के बिना भी ऑयलर ने प्रत्यास्थ व्यवहार के मूल घटकों को पहचाना। बंकन मापांक की चर्चा में वे बताते हैं:

> Haec autem elasticitas absoluta Ekk primum pendet *ab* natura materiae, ex qua lamina est fabrefacta; unde alia materia magis, alia minus elatere prodita dici solet. Secundo quoque ita pendet a laminae latitudine, ut expressio Ekk ubique latitudini laminae debeat esse proportionalis, si cetera sint paria. Tertio vero crassities laminae plurimum confert ad valorem ipsius Ekk determinandum, quae ita comparata esse videtur, ut, ceteris paribus, Ekk sit ut crassitiei quadratum. Conjunctim ergo tenebit expressio Ekk rationem compositam ex ratione elateris materiae, latitudinis laminae simplici, ac duplicata crassitiei laminae.
>
> यह निरपेक्ष प्रत्यास्थता Ek^2 सर्वप्रथम उस पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करेगी जिससे फीता बनाया गया है... द्वितीय, वह फीते की चौड़ाई पर इस प्रकार निर्भर करती है कि अन्य बातें समान होने पर व्यंजक Ek^2 सर्वत्र चौड़ाई के समानुपाती होना चाहिए। तृतीय, फीते की मोटाई Ek^2 का मान निर्धारित करने में बहुत अधिक योगदान देती है; उसका संयोजन ऐसा प्रतीत होता है कि अन्य बातें समान होने पर Ek^2 मोटाई के वर्ग के समानुपाती है।
>
> Euler, 1744b *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Section 40

यह उल्लेखनीय अंतर्दृष्टि उस विषय का पूर्वाभास देती है जिसे आज हम धरन के अनुप्रस्थ काट का जड़त्वाघूर्ण समझते हैं और ऑयलर की गहन भौतिक अंतःप्रज्ञा प्रदर्शित करती है। उनके विचरणात्मक और प्रत्यक्ष उपागमों के बीच पूर्ण

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सामंजस्य ने ठीक वह द्विविध सत्यापन दिया जिसे ऑयलर इतना महत्त्व देते थे और उनकी नई गणितीय विधियों की वैधता तथा डेनियल बर्नूली के ऊर्जा सिद्धांत की भौतिक शुद्धता, दोनों की पुष्टि की।

9.3.2.2.1 इलास्टिका की प्रजातियों का वर्गीकरण ऐतिहासिक रूप से गणितज्ञों में गणितीय वस्तुओं को वर्गीकृत करने की प्रवृत्ति रही है।[24] ऑयलर ने *enumeratio curvarum elasticarum* अनुभाग में "इन परत्यास्थ वक्रों की अनंत विविधता" निर्धारित करने का प्रयास किया। वे समीकरण 9.17 से आरंभ करते हैं और अक्षों के मूलबिंदु को $\beta/2\gamma$ दूरी स्थानांतरित करते हैं, $\gamma = 1$ रखते हैं और समीकरण को घटाकर करते हैं:

$$dy = \frac{\alpha + x^2}{\sqrt{a^4 - (\alpha + x^2)^2}} dx$$

यह देखते हुए कि $a^4 - (\alpha + x^2)^2 = (a^2 - \alpha - x^2)(a^2 + \alpha + x^2)$ और $\alpha = a^2 - c^2$ रखते हुए वे प्राप्त करते हैं:

$$dy = \frac{a^2 - c^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} dx \tag{9.19}$$

यह समीकरण परत्यास्थ वक्र अथवा पटलिका पर ऑयलर के आलेखीय अध्ययन की आधारभूमि बनाता है[25] (दोनों पद परस्पर विनिमेय रूप से प्रयुक्त हैं)। चित्र 6, जो चित्र 9.18 में है, में A निर्देशांक तंत्र का मूलबिंदु है और AE तथा AB क्रमशः धनात्मक x और y अक्षों की दिशाएँ हैं। M, वक्र AMC पर एक सामान्य बिंदु है। बाह्य बल P धनात्मक y-दिशा में A पर कार्य करता है। ऑयलर कल्पना करते हैं कि बिंदुओं A और B को तनाव P वाली डोरी से जुडा माना जा सकता है, जिससे P के बराबर और विपरीत बल B पर कार्य करे।

वक्र से संबद्ध उनकी दो महत्त्वपूर्ण मात्राएँ बल P और कोण $\angle PAM$ की ज्या हैं, जो A पर स्पर्शरेखा तथा x-अक्ष द्वारा बनता है:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2Ek^2}{a^2} \\ \sin(\angle PAM) &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} \end{aligned}$$

जहाँ P का यह व्यंजक समीकरण 9.18 से प्राप्त होता है और $\sin(\angle PAM)$, $\tan(\angle PAM) = (a^2 - c^2)/c\sqrt{2a^2 - c^2}$ से व्युत्पन्न होता है, जिसे $x = 0$ रखने पर समीकरण 9.19 से प्राप्त किया जाता है।

ऑयलर व्यवस्थित वर्गीकरण का मूल्य देखते हैं:

> Cum igitur videamus non solum Circulum in curvarum Elasticarum classe contineri, sed etiam in ipsis infinitam varietatem locum habere; operae pretium erit hic enumerationem omnium variarum specierum in hoc curvarum genere contentarum instituere. Hoc enim modo non solum indoles harum curvarum penitius perspicietur; sed etiam, casu quocunque oblato, ex sola figura dijudicare licebit, ad quamnam speciem curva formata referri debeat.

[24] यूनानियों, देकार्त द्वारा समूहीकृत समतल वक्रों, न्यूटन द्वारा गणित घनीय रूपों आदि के लिए §3.2.3 देखें।

[25] इस संदर्भ में *lamina* एक पतली, समतल, नम्य पट्टी अथवा धरन को संदर्भित करती है—मूलतः जिसे आधुनिक अभियंता परत्यास्थ धरन अथवा प्रास-धरन कहेंगे। ऑयलर मानते हैं कि पटलिका तनु है (लंबाई ≫ चौडाई ≫ मोटाई), लगाए गए भारों की तुलना में भारहीन है, अपनी लंबाई के अनुदिश अविस्तार्य है और परत्यास्थ है (भार हटने पर अपने मूल सीधे विन्यास में लौटती है)। एक सिरे पर पकडे और दूसरे सिरे पर बल द्वारा मोडे गए पैमाने अथवा डाइविंग बोर्ड की कल्पना करें। लैटिन पद "lamina" (अर्थात् "पतली पट्टिका") 18वीं शताब्दी में किसी भी तनु संरचनात्मक अवयव के लिए मानक पारिभाषिकी था जो मुख्यतः विस्तार के स्थान पर वक्रता द्वारा मुडता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः चूँकि हम देखते हैं कि प्रत्यास्थ वक्रों के वर्ग में केवल वृत्त ही सम्मिलित नहीं है, बल्कि इन प्रत्यास्थ वक्रों में अनंत विविधता भी है, इसलिए वक्रों के इस वर्ग में सम्मिलित सभी विभिन्न प्रकारों की गणना करना उपयोगी होगा। इस प्रकार न केवल इन वक्रों का स्वरूप अधिक गहराई से समझा जाएगा, बल्कि प्रस्तुत किसी भी स्थिति में केवल आकृति से यह निर्णय भी किया जा सकेगा कि बने हुए वक्र को किस वर्ग में रखा जाना चाहिए।

Euler, 1744b *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Section 14

ऑयलर दो परस्पर पूरक उपागमों द्वारा प्रत्यास्थ वक्रों का व्यवस्थित वर्गीकरण प्रस्तुत करते हैं:

1. **गणितीय प्रजातियाँ**: प्राचल c^2/a^2 द्वारा परिभाषित और कठोर गणितीय विश्लेषण से व्युत्पन्न नौ मूल श्रेणियाँ (प्रजाति I–IX) (ग्रंथ के अनुभाग 25–33)
2. **सचित्र आकृतियाँ**: Tabula III, IV और V में इन प्रजातियों की विभिन्न अभिव्यक्तियाँ और अनुप्रयोग दर्शाने वाले अट्ठाईस आरेख

विभिन्न प्रजातियाँ कोण PAM के मान को $90°$ से $-90°$ तक बदलते हुए विचार करके प्राप्त होती हैं, जैसा सारणी 9.6 और चित्र 9.18 में दिखाया गया है।

तालिका 9.6: ऑयलर की नौ इलास्टिका प्रजातियाँ और उनके परिभाषी प्राचल

प्रजाति	अनुभाग	प्राचल परिसर	भौतिक वर्णन
I	§25	$c \to 0$	सीधी रेखा (प्राकृतिक अवस्था)
II	§26	$0 < c^2/a^2 < 1$	सरल वक्र, कोई नति-परिवर्तन नहीं
III	§27	$c^2/a^2 = 1$	आयताकार इलास्टिका
IV	§28	$1 < c^2/a^2 < 1.652$	नति-परिवर्तित वक्र
V	§29	$c^2/a^2 = 1.652$	स्व-स्पर्शी विन्यास
VI	§30	$1.652 < c^2/a^2 < 2$	स्व-प्रतिच्छेदी पाश
VII	§31	$c^2/a^2 = 2$	अनंतस्पर्शी वक्र
VIII	§32	$c^2/a^2 > 2$	अनेक आवर्ती पाश
IX	§33	विशेष सीमा	वृत्त

प्रत्येक प्रजाति का अभिलक्षण निम्न से होता है:

1. बल प्राचल: $P = \frac{2Ek^2}{a^2}$
2. आरंभिक कोण: $\sin(\angle PAM) = \frac{a^2-c^2}{a^2}$
3. वक्र के अनुदिश वक्रता वितरण

28 आकृतियाँ 9 प्रजातियों में समान रूप से वितरित नहीं हैं। इसके स्थान पर वे कुछ विन्यासों के व्यावहारिक महत्त्व, विशिष्ट स्थितियों की गणितीय जटिलता और सीमा प्रतिबंधों तथा सीमांत व्यवहारों को दर्शाने की आवश्यकता को प्रतिबिंबित करती हैं।

आकृतियों की (भ्रामक) बहुलता अनेक प्रयोजन पूरे करती है:

प्रजाति के भीतर प्राचल परिवर्तन प्रत्येक प्रजाति प्राचल c^2/a^2 के सतत परिसर को समाहित करती है। अनेक आकृतियाँ दिखाती हैं कि इस प्राचल के बदलने पर एक ही प्रजाति के भीतर वक्र का आकार कैसे विकसित होता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 9.7: 28 आकृतियों का 9 प्रजातियों में वितरण

प्रजाति	वर्णन	आकृतियों की संख्या
I	सीधी रेखा	1 (चित्र 1)
II	सरल वक्र	6 (चित्र 2, 3, 4, 6, 23, 26)
III	आयताकार इलास्टिका	3 (चित्र 5, 24, 25)
IV	नति-परिवर्तित वक्र	4 (चित्र 7, 8, 16, 19)
V	स्व-स्पर्शी	1 (चित्र 9)
VI	स्व-प्रतिच्छेदी	4 (चित्र 10, 11, 12, 20)
VII	अनंतस्पर्शी	2 (चित्र 12, 15)
VIII	अनेक पाश	6 (चित्र 17, 18, 22, 27, 28)
IX	वृत्त	1 (चित्र 21)
विशेष/अनुप्रयुक्त स्थितियाँ		2 (चित्र 13, 14)

सीमा प्रतिबंधों के प्रभाव समान गणितीय प्रजाति विभिन्न सीमा प्रतिबंधों के अधीन भिन्न रूप में अभिव्यक्त हो सकती है:

- स्थिर-स्थिर सिरे
- स्थिर-मुक्त (प्रास-धरन) विन्यास
- कब्जेदार संयोजन
- बिंदु बलों के विपरीत लगाए गए आघूर्ण

अभियान्त्रिक अनुप्रयोग आकृतियाँ 13 और 14 व्यावहारिक अनुप्रयोग प्रदर्शित करती हैं:

- आकृति 13: निलंबित भार (कैटेनरी-सदृश व्यवहार)
- आकृति 14: भित्ति-आबद्ध प्रास-धरन (संरचनात्मक अनुप्रयोग)

संक्रमणकालीन और सीमांत स्थितियाँ अनेक आकृतियाँ प्रजातियों के बीच निर्णायक संक्रमण ग्रहण करती हैं और दिखाती हैं कि भारण प्राचल के बदलने पर एक रूप सतत रूप से दूसरे में कैसे विरूपित होता है।

***** गणितीय महत्त्व

ऑयलर का वर्गीकरण अनेक गणितीय सफलताएँ निरूपित करता है:

1. **प्रथम व्यवस्थित वर्गिकी**: नौ प्रजातियाँ दी गई मान्यताओं के अधीन सभी संभावित प्रत्यास्थ विरूपणों का पूर्ण वर्गीकरण देती हैं।
2. **दीर्घवृत्तीय समाकलों से संबंध**: यथार्थ समाधानों में दीर्घवृत्तीय समाकलों की आवश्यकता होती है, जिससे यह इन विशेष फलनों के आरंभिक भौतिक अनुप्रयोगों में से एक बनता है। प्रजाति II से IV तक के लिए चाप-लंबाई इस प्रकार व्यक्त की जा सकती है:

$$s = \int_0^x \frac{a^2\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} \tag{9.20}$$

इस समाकल का परिकलन प्रारंभिक फलनों के पदों में नहीं किया जा सकता।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 9.8: ऑयलर की 28 आकृतियों का उनकी 9 इलास्टिका प्रजातियों से मानचित्रण

आकृति	Tabula	प्रजाति	वर्णन	प्रमुख विशेषताएँ	अनुभाग
1	III	I	सीधी रेखा	प्राकृतिक अवस्था, कोई वक्रता नहीं	25
2	III	II	सरल मुड़ी छड़	आधार पर क्षैतिज स्पर्शरेखा	26
3	III	II	बल-भारित प्रास-धरन	मुक्त सिरे पर भार	26
4	III	II	वक्र प्रास-धरन	एकसमान वक्रता	26
5	III	III	आयताकार इलास्टिका	सिरे पर 90° स्पर्शरेखा	27
6	III	II	सरल वक्र चाप	मूल विरूपण	26
7	III	IV	नति-परिवर्तन वाला S-वक्र	आरंभिक स्व-सामीप्य	28
8	IV	IV	अष्टाकार निर्माण	निकट आते सममित पाश	28
9	IV	V	स्व-स्पर्शी पाश	$\angle PAM = 40°41'$ पर संपर्क	29
10	IV	VI	स्व-प्रतिच्छेदी पाश	एकल प्रतिच्छेद	30
11	IV	VI	असममित प्रतिच्छेद	असमान पालियाँ	30
12	IV	VII	अनंतस्पर्शी के समीप	लगभग ऊर्ध्वाधर स्पर्शरेखा	31
13	IV	विशेष स्थिति	निलंबित भार	व्यावहारिक अनुप्रयोग	-
14	IV	विशेष स्थिति	भित्ति-आबद्ध	अभियान्त्रिक अनुप्रयोग	-
15	IV	VII	अनंतस्पर्शी व्यवहार	अनंत विस्तार	31
16	V	IV	अनेक नति-परिवर्तन	आवर्ती प्रतिरूप	28
17	V	VIII	परिसीमित दोलन	समांतरों के बीच सीमित	32
18	V	VIII	जटिल बहु-पाश	अनेक प्रतिच्छेद	32
19	V	IV	विस्तारित S-वक्र	बड़ा आयाम	28
20	V	VI	त्रिभुजाकार पाश	आसंधि पर तीक्ष्ण कोण	30
21	V	IX	वृत्तीय सीमांत स्थिति	एकसमान त्रिज्या	33
22	V	VIII	आवर्ती तरंग	अनेक आवर्त	32
23	V	II	उथला चाप	छोटा विरूपण	26
24	V	III	गहरा चाप	बड़ी वक्रता	27
25	V	III	परवलयिक रूप	सममित भारण	27
26	V	II	सरल वक्र का रूपांतर	भिन्न सीमा	26
27	V	VIII	जटिल आवर्ती	अनेक प्रतिबंध	32
28	V	VIII	चरम विन्यास	अधिकतम विरूपण	32

3. **विचरणात्मक सिद्धांत**: वर्गीकरण स्थितिज ऊर्जा फलनिक को न्यूनतम करने से उभरता है:

$$\int \frac{ds}{R^2} = \text{minimum} \tag{9.21}$$

जहाँ R वक्रता-त्रिज्या है।

निम्नलिखित सारणी ऑयलर की नौ प्रजातियों में से प्रत्येक के लिए गणितीय समीकरण और ज्यामितीय गुण प्रस्तुत करती है:

* प्रमुख गुण और स्पष्टीकरण

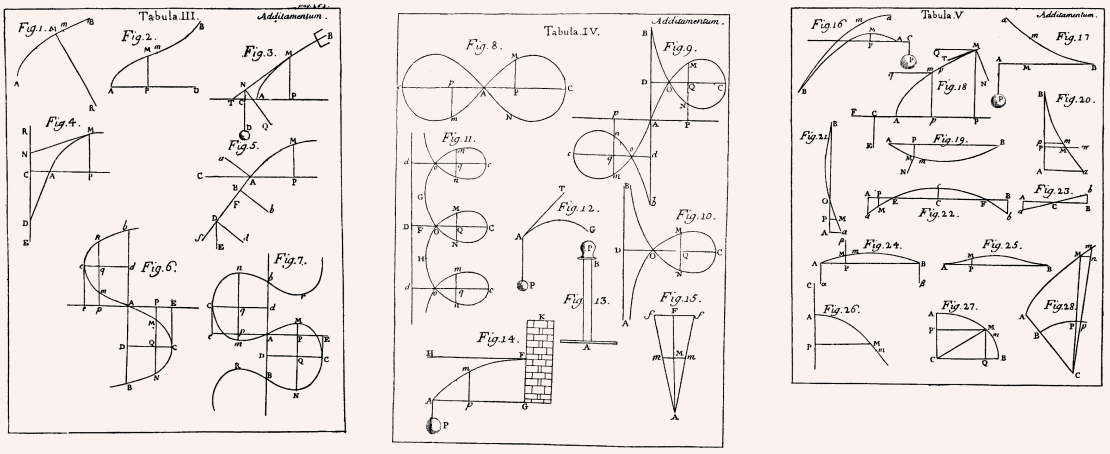
गणितीय संरचना से संबंधित अनेक महत्त्वपूर्ण बिंदु हैं:

तालिका 9.9: ऑयलर की इलास्टिका प्रजातियाँ: ज्यामितीय गुण और वक्र समीकरण

प्रजाति	नाम	वक्र समीकरण अथवा चाप-लंबाई	ज्यामितीय अभिलक्षण
I	Linea recta	$y = 0$ (सीधी रेखा)	प्राकृतिक अवस्था; $R = \infty$; $c \to 0$
II	–	$dy = \dfrac{(a^2 - c^2 + x^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$	सरल वक्र; कोई नति-परिवर्तन नहीं; $0 < c^2/a^2 < 1$; उत्तल; छोटे c के लिए ट्रोकोइड-सदृश
III	Elastica rectangula	$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{9}{128} + \cdots\right)$	A पर अक्ष स्पर्शी; $c^2/a^2 = 1$; क्षेत्रफल संबंध: $4AD \cdot AC = \pi a^2$
IV	–	$dy = \dfrac{(a^2 - c^2 + x^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$	नति-परिवर्तन बिंदु; $1 < c^2/a^2 < 1.652$; पालियाँ स्व-प्रतिच्छेद कर सकती हैं
V	–	$c^2/a^2 = 1.651868$	स्व-स्पर्शी; सिरे मिलते हैं; $AD = 0$; आसंधीय कोण $81°22'$; $\sin(\angle PAM) = 0.651868$
VI	–	प्रजाति IV के समान	स्व-प्रतिच्छेदी; संपर्क से आगे विस्तार; $1.652 < c^2/a^2 < 2$; आसंधीय कोण का परिसर: $81°22' - 112°57'$
VII	–	$y = c\sqrt{c^2 - x^2} - \dfrac{c}{2}\ln\dfrac{c + \sqrt{c^2 - x^2}}{x}$	आधाररेखा AB की अनंतस्पर्शी; $c^2/a^2 = 2$; आसंधीय कोण $112°57'$; केंद्र से $x = 0.2884c$ पर आसंधि
VIII	–	$dy = \dfrac{(x^2 - c^2 + g^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(x^2 - g^2)}}$	अनेक पाश; $c^2/a^2 > 2$; $x = \pm c$ और $x = \pm g$ पर समांतर सीमाओं के बीच परिसीमित; कोई नति-परिवर्तन नहीं
IX	Circulus	$R = \text{constant} = a^2/(hq)$	वृत्त; सीमांत स्थिति; एकसमान वक्रता

समीक्षा प्रति

Victor E. Saouma
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित; अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 9.18: भार प्राचल c^2/a^2 के पदों में ऑयलर की इलास्टिका "प्रजातियाँ"

- **प्रजाति I**: सीधी रेखा $c \to 0$ होने पर सीमांत स्थिति है, जो इलास्टिका की प्राकृतिक (अविरूपित) अवस्था निरूपित करती है।
- **प्रजाति III**: आयताकार इलास्टिका का विशेष गुण है कि अक्ष बिंदु A पर वक्र का स्पर्शी है। ऑयलर ने उल्लेखनीय क्षेत्रफल संबंध खोजा: क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर प्रक्षेपों का गुणनफल $\pi a^2/4$ के बराबर है।
- **प्रजाति V**: निर्णायक प्राचल मान $c^2/a^2 = 1.651868$, $\sin(\angle PAM) = 0.651868$ के संगत है और प्रथम स्व-स्पर्शी विन्यास उत्पन्न करता है।
- **प्रजाति VII**: $c^2/a^2 = 2$ पर वक्र आधाररेखा का अनंतस्पर्शी बन जाता है। आसंधि (स्व-प्रतिच्छेद बिंदु) $x = 0.2884c$ पर $112°57'$ के आसंधीय कोण सहित होती है।
- **प्रजाति VIII**: $c^2/a^2 > 2$ के लिए वक्र $x = \pm c$ और $x = \pm g$ पर समांतर सीमाओं के बीच परिसीमित अनेक पाश प्रदर्शित करता है।

***** प्रजातियों और आकृतियों के बीच संबंध

ऑयलर की पट्टिकाओं की 28 आकृतियाँ इन 9 गणितीय प्रजातियों की विभिन्न अभिव्यक्तियाँ चित्रित करती हैं। वितरण एकसमान नहीं है क्योंकि:

- कुछ प्रजातियाँ (जैसे II और VIII) अपने भौतिक साकार रूपों में अधिक विविधता प्रदर्शित करती हैं
- व्यावहारिक अभियान्त्रिक अनुप्रयोग कुछ विन्यासों का पक्ष लेते हैं
- प्रजातियों के बीच संक्रमणकालीन स्थितियों के लिए अनेक चित्र आवश्यक हैं

गणितीय वर्गीकरण (सारणी 9.9) सैद्धांतिक आधारभूमि देता है, जबकि 28 आकृतियाँ इन गणितीय अमूर्तनों की भौतिक वास्तविकता प्रदर्शित करती हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

गणितीय समाधान और पूर्ण वर्गीकरण वक्रता κ वाली शुद्ध इलास्टिका के लिए ऑयलर की विधि चतुर्थ-कोटि अवकल समीकरण देती है:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \lambda \frac{d^2y}{dx^2}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}$$

जहाँ λ सीमा प्रतिबंधों द्वारा निर्धारित प्राचल है। इस समीकरण को वक्रता और चाप-लंबाई के पदों में अधिक सुरुचिपूर्ण रूप से लिखा जा सकता है:

$$\frac{d^2\kappa}{ds^2} = \lambda\kappa$$

समाधान λ के चिह्न और परिमाण पर निर्भर करते हैं:

$\lambda > 0$ के लिए:

$$\kappa(s) = A\cosh(\sqrt{\lambda}s) + B\sinh(\sqrt{\lambda}s)$$

$\lambda < 0$ के लिए:

$$\kappa(s) = A\cos(\sqrt{|\lambda|}s) + B\sin(\sqrt{|\lambda|}s)$$

$\lambda = 0$ के लिए:

$$\kappa(s) = A + Bs$$

व्यवस्थित प्राचल-विश्लेषण द्वारा ऑयलर ने ऊपर वर्णित प्रत्यास्थ वक्रों की नौ भिन्न प्रजातियाँ पहचानीं; प्रत्येक प्रजाति प्राचल λ के भिन्न परिसरों और सीधी रेखाओं से विभिन्न वक्र रूपों होते हुए पूर्ण वृत्तों तक भिन्न भौतिक विन्यासों के संगत थी।

दीर्घवृत्तीय समाकल के समाधान ऑयलर का विश्लेषण प्रकट करता है कि यथार्थ समाधानों में दीर्घवृत्तीय समाकल सम्मिलित हैं; इससे इलास्टिका इन उन्नत विशेष फलनों की आवश्यकता वाली भौतिक समस्या के आरंभिक उदाहरणों में से एक बनती है। प्रत्यास्थ वक्रों का प्राचलीय निरूपण इस रूप का होता है:

$$x(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_0^{\phi} \mathrm{cn}(u,k)\,du$$
$$y(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_0^{\phi} \mathrm{sn}(u,k)\,du$$

जहाँ cn और sn याकोबी के दीर्घवृत्तीय फलन हैं, जिनका मापांक k सीमा प्रतिबंधों द्वारा निर्धारित होता है।

आयताकार इलास्टिका (याकूब बर्नूली की मूल चुनौती) के लिए ऑयलर दिखाते हैं कि वक्र की लंबाई इस प्रकार व्यक्त की जा सकती है:

$$s = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}K(k)$$

जहाँ $K(k)$ प्रथम प्रकार का पूर्ण दीर्घवृत्तीय समाकल है। लगाए गए बल और परिणामी विरूपण के बीच संबंध में यह सम्मिलित है:

$$P = \frac{\sqrt{2\lambda^3 EI}}{K(k)^2}$$

इलास्टिका सिद्धांत और दीर्घवृत्तीय समाकलों के बीच यह संबंध क्रांतिकारी था; उसने पहले असाध्य समस्याओं के यथार्थ समाधान दिए और साथ ही महत्त्वपूर्ण गणितीय विकास को प्रेरित किया।

वर्गीकरण से यथार्थ समाधानों तक जहाँ ऑयलर का नौ-प्रजाति वर्गीकरण प्रत्यास्थ व्यवहार की पूर्ण गुणात्मक समझ देता है, वहीं मात्रात्मक समाधान प्राप्त करने के लिए परिष्कृत गणितीय साधन आवश्यक हैं। प्रत्येक प्रजाति को नियंत्रित करने वाले अवकल समीकरण, विशेषतः समीकरण 9.19 का मूल संबंध, प्रारंभिक फलनों द्वारा हल नहीं किए जा सकते। इसके स्थान पर उनके यथार्थ समाधानों में दीर्घवृत्तीय समाकलों—ऐसे विशेष फलन जो ऑयलर के समय में अभी विकसित हो रहे थे—का उपयोग आवश्यक है। इस गणितीय चुनौती ने इलास्टिका समस्या को 18वीं शताब्दी के विश्लेषण में प्रेरक शक्ति बनाया और गणितीय रूप से संभव विषयों की सीमाओं को आगे बढाया।

दीर्घवृत्तीय समाकल के समाधान ऑयलर का विश्लेषण प्रकट करता है कि यथार्थ समाधानों में दीर्घवृत्तीय समाकल सम्मिलित हैं; इससे इलास्टिका इन उन्नत विशेष फलनों की आवश्यकता वाली भौतिक समस्या के आरंभिक उदाहरणों में से एक बनती है। प्रत्यास्थ वक्रों का प्राचलीय निरूपण इस रूप का होता है:

$$x(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\phi} \operatorname{cn}(u, k)\, du$$
$$y(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\phi} \operatorname{sn}(u, k)\, du$$

जहाँ cn और sn याकोबी दीर्घवृत्तीय फलन हैं, जिनका मापांक k सीमा प्रतिबंधों द्वारा निर्धारित होता है।

आयताकार इलास्टिका (याकूब बर्नूली की मूल चुनौती) के लिए ऑयलर दिखाते हैं कि वक्र की लंबाई इस प्रकार व्यक्त की जा सकती है:

$$s = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} K(k)$$

जहाँ $K(k)$ प्रथम प्रकार का पूर्ण दीर्घवृत्तीय समाकल है। लगाए गए बल और परिणामी विरूपण के बीच संबंध में यह सम्मिलित है:

$$P = \frac{\sqrt{2\lambda^3 EI}}{K(k)^2}$$

इलास्टिका सिद्धांत और दीर्घवृत्तीय समाकलों के बीच यह संबंध क्रांतिकारी था; उसने पहले असाध्य समस्याओं के यथार्थ समाधान दिए और साथ ही महत्त्वपूर्ण गणितीय विकास को प्रेरित किया।

स्तंभ व्याकुंचन: ऑयलर का प्रथम सूत्र ऑयलर के 1744 के *Methodus inveniendi* (Euler, 1744b) में प्रत्यास्थ वक्रों के प्रसिद्ध सिद्धांत से अधिक था: अनुभाग 37 में संरचनात्मक स्थायित्व के लिए उनके सर्वाधिक प्रसिद्ध योगदान का बीज छिपा था। वहाँ उन्होंने *लगभग प्रसंगवश* वह संबंध लिखा जो बाद में ऑयलर व्याकुंचन सूत्र के रूप में प्रसिद्ध हुआ। इस अनुभाग में हम उस आरंभिक उपस्थिति पर पुनर्विचार करते और उनकी प्रजाति I इलास्टिका से आधुनिक व्युत्पत्ति का पुनर्निर्माण करते हैं। इसके बाद §9.5.2 में हम उनके 1759 के संस्मरण (Euler, 1759) की ओर मुड़ेंगे, जहाँ ऑयलर ने अंततः सूत्र का वास्तविक महत्त्व पहचाना और उसे स्तंभ स्थायित्व के सामान्य सिद्धांत के केंद्र में रखा।

> Nisi ergo onus geftandum P majus fit quam $\pi^2 Ekk/a^2$, nulla prorsus incurvatio erit metuenda; contra vero si pondus P fuerit majus, columna incurvationi resistere non poterit. Manente autem elasticitate columnae, atque adeo ejus crassitie eadem, pondus P, quod sine periculo gestare valet, erit reciproce ut quadratum altitudinis columnae: columnaque duplo altior quartam tantum oneris partem gestare poterit.
>
> अतः वहन किया जाने वाला भार P, $\frac{E\pi^2 k^2}{a^2}$ से अधिक न हो तो बंकन का कोई भय नहीं होगा; दूसरी ओर यदि भार P अधिक हो, तो स्तंभ बंकन का प्रतिरोध नहीं कर सकेगा। अब जब स्तंभ की प्रत्यास्थता और उसी प्रकार उसकी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> मोटाई समान रहती है, तब वह भार P जिसे वह निरापद रूप से वहन कर सकता है, स्तंभ की ऊँचाई के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होगा; और दुगुना ऊँचा स्तंभ भार का केवल एक-चौथाई भाग वहन कर सकेगा।
>
> Euler, 1744b *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Section 37

आधुनिक संकेतों में यह सूत्र $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ (जहाँ ऑयलर का Ekk, आनमनी दृढता EI के और a, स्तंभ की लंबाई L के संगत है), संरचनात्मक यांत्रिकी के सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण परिणामों में से एक है और आज भी अभियान्त्रिक अभिकल्प के लिए मूलभूत है। यह कार्य संरचनात्मक स्थायित्व सिद्धांत के जन्म को चिह्नित करता है और अभियान्त्रिकी को अनुभवजन्य व्यवहार से वैज्ञानिक अनुशासन में रूपांतरित करता है।

इस कथन की आधुनिक व्याख्या इस प्रकार है:

प्रजाति I में छिपा सूत्र (1744)

ऑयलर के 1744 के *Methodus inveniendi* में प्रत्यास्थ वक्रों का नौ भिन्न प्रजातियों में पूर्ण वर्गीकरण था (§9.3.2.2.1), किंतु लगभग सीधे विन्यास निरूपित करने वाली प्रजाति I में एक गहन अंतर्दृष्टि छिपी थी जिसे ऑयलर आरंभ में पहचान नहीं सके। Fraser, 1991 का अनुसरण करते हुए हम इस उपेक्षित खोज का परीक्षण करते हैं।

प्रजाति I के लिए प्राचल अनुपात c^2/a^2 अतिसूक्ष्म है, अर्थात् कोण $\angle PAM \simeq 90°$ और खंड ACB केवल थोडा वक्र है। चूँकि c, a के सापेक्ष छोटा है, ऑयलर का सामान्य इलास्टिका समीकरण (9.19) (यहाँ पुनः दिया गया)

$$dy = \frac{a^2 - c^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} dx \tag{9.22}$$

जहाँ a और c सीमा प्रतिबंधों तथा लगाए गए भारों द्वारा निर्धारित प्राचल हैं और अनुपात c^2/a^2 प्रत्यास्थ वक्रों की भिन्न प्रजातियों को अभिलक्षित करता है।

चरण 1: प्रजाति I की शर्त लागू करें: प्रजाति I का परिभाषी अभिलक्षण है कि प्राचल अनुपात c^2/a^2 अतिसूक्ष्म है। गणितीय रूप से इसका अर्थ $c^2 \ll a^2$ है, जो हमें निम्नलिखित सन्निकटन करने देता है:

$$a^2 - c^2 \approx a^2$$
$$2a^2 - c^2 + x^2 \approx 2a^2 + x^2$$

इन सन्निकटनों को समीकरण 9.22 में प्रतिस्थापित करने पर:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 + x^2)}} dx$$

चरण 2: हर को सरल करें: चूँकि हम लगभग सीधे स्तंभ में छोटे विरूपणों पर विचार कर रहे हैं, x^2, a^2 की तुलना में छोटा रहता है। अतः:

$$\sqrt{2a^2 + x^2} \approx \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

इससे मिलता है:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{a\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}} dx$$

चरण 3: छोटे विरूपणों के लिए अगला सन्निकटन आसन्न व्याकुंचन के लगभग सीधे विन्यास के अभिलक्षण में निर्देशांक x, प्राचल a की तुलना में छोटा रहता है। इस सीमा में:

$$a^2 + x^2 \approx a^2$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस सन्निकटन को प्रतिस्थापित करने पर:

$$dy = \frac{a^2}{a\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}dx = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}dx$$

चरण 4: अंतिम रूप वर्गमूल के भीतर से नियतांक को बाहर निकालने पर:

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2(c^2 - x^2)}} \tag{9.23}$$

यह सरलीकृत समीकरण व्याकुंचन के कगार पर स्तंभ के आकार का वर्णन करता है। गणितीय सन्निकटन भौतिक मान्यताओं के संगत हैं:

- $c^2/a^2 \ll 1$: स्तंभ लगभग सीधा रहता है
- छोटा x: विरूपण अतिसूक्ष्म हैं
- $\angle PAM \simeq 90°$: आधार पर स्पर्शरेखा लगभग ऊर्ध्वाधर है

इस व्यंजक का समाकलन $y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{c}$ देता है। अर्ध-लंबाई f वाले स्तंभ के लिए सीमा प्रतिबंध $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$ देते हैं। बल प्राचल $P = \frac{2Ek^2}{a^2}$ को प्रतिस्थापित करने पर:

$$P = \frac{Ek^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \tag{9.24}$$

इस परिणाम में एक उल्लेखनीय निहितार्थ था जिसका ऑयलर ने केवल प्रसंगवश उल्लेख किया: स्तंभ में अतिसूक्ष्म वक्रता भी उत्पन्न करने के लिए परिमित बल आवश्यक है। इसका भौतिक महत्त्व—कि यह संरचनात्मक स्थायित्व की निर्णायक सीमा निरूपित करता है—तेरह वर्षों तक अपरिचित रहने वाला था।

निष्कर्ष ऑयलर का इलास्टिका वर्गीकरण दो स्तरों पर कार्य करता है: 9 गणितीय प्रजातियों का सैद्धांतिक ढाँचा और 28 आकृतियों द्वारा व्यावहारिक चित्रण। कठोर गणितीय विश्लेषण को व्यापक दृश्य प्रलेखन से मिलाने वाले इस द्विविध उपागम ने एक ऐसी कार्यविधिगत परंपरा स्थापित की जिसने क्रिस्टल-विज्ञान से जैविक वर्गिकी तक अनेक अनुशासनों में वैज्ञानिक वर्गीकरण को प्रभावित किया। 9 प्रजातियों और 28 आकृतियों के बीच प्रतीत होने वाला अंतर विरोधाभास नहीं, बल्कि ऑयलर के गणितीय ढाँचे के भीतर प्रत्यास्थ व्यवहार की समृद्धि को प्रतिबिंबित करता है।

अधिक मूल रूप से यह कार्य गणितीय भौतिकी के प्रथम पूर्ण वर्गीकरणों में से एक है और प्रदर्शित करता है कि व्यवस्थित प्राचल परिवर्तन किसी भौतिक निकाय में संभावित व्यवहारों का पूरा वर्णक्रम कैसे उत्पन्न कर सकता है। ऑयलर द्वारा विचरणात्मक सिद्धांतों, अवकल समीकरणों और दीर्घवृत्तीय समाकलों के संश्लेषण ने इलास्टिका को आधारभूत समस्या के रूप में स्थापित किया, जो आधुनिक परिकलनीय यांत्रिकी और अरैखिक गतिकी को आज भी सूचित करती है।

9.3.2.3 आधुनिक विचरणात्मक ढाँचा

प्रबल रूप: शास्त्रीय ऑयलर–लाग्रांज याकूब बर्नूली के इलास्टिका अन्वेषणों से ऑयलर के *Methodus Inveniendi* में व्यवस्थित विवेचन तक विचरण-कलन के ऐतिहासिक विकास ने मूल सिद्धांत स्थापित किए और विचरणात्मक विधियों की शक्ति प्रदर्शित की। आज प्रयुक्त गणितीय ढाँचा इन शास्त्रीय आधारों पर निर्मित है, साथ ही अधिक कठोरता और व्यापक प्रयोज्यता देने वाली आधुनिक संकल्पनाएँ सम्मिलित करता है। विचरणात्मक विधियों की सुरुचि और व्यावहारिक उपयोगिता, दोनों का पूर्ण मूल्यांकन करने के लिए ऑयलर-लाग्रांज समीकरण को समकालीन गणितीय परिप्रेक्ष्य से देखना शिक्षाप्रद है। आधुनिक विचरणात्मक विश्लेषण ग्राह्य फलन-समष्टियों की परिशुद्ध परिभाषाएँ, शास्त्रीय विधियों का क्षेत्र बढ़ाने वाले व्यवस्थित दुर्बल सूत्रीकरण और प्राकृतिक तथा अनिवार्य सीमा प्रतिबंधों के कठोर वर्गीकरण अपनाता है, जो प्रतिबंधों के उचित विवेचन को स्पष्ट करते हैं। ये समकालीन साधन न केवल अंतर्निहित गणितीय संरचना को आरंभिक अग्रदूतों के लिए संभव स्तर से अधिक स्पष्ट करते हैं, बल्कि परिमित अवयव विधि जैसी परिकलनीय विधियों द्वारा जटिल अभियान्त्रिक

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और वैज्ञानिक समस्याओं पर विचरणात्मक सिद्धांतों का व्यवस्थित अनुप्रयोग भी संभव बनाते हैं। विधि की कठोर प्रस्तुति अध्याय 47 में दी गई है।

संरचनात्मक अभियान्त्रिकी (और यांत्रिकी) में दो भिन्न दृष्टियों से उपागम किया जा सकता है:

न्यूटनीय उपागम, संवेग का संतुलन (साम्यावस्था)।

लाग्रांजीय उपागम: ऊर्जा का संतुलन (ऊष्मागतिकी)।

दूसरी ओर विचरण-कलन की मूल समस्या ऐसा फलन $u(x)$ ज्ञात करना है कि

$$\Pi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{9.25}$$

और वह स्थिर हो

$$\delta\Pi = 0$$

जहाँ δ, *विचरण संकारक* को इंगित करता है (अवकलज से भ्रमित न करें)।

हम $u(x)$ को x का फलन, अंतराल (a,b) में, और F को ज्ञात वास्तविक फलन (जैसे ऊर्जा-घनत्व) परिभाषित करते हैं; तथा किसी फलनिक का *प्रांत* निर्देशांक समष्टि के किसी क्षेत्र (जैसा किसी फलन के लिए होता है) के स्थान पर फलन-समष्टि में फलनों के किसी वर्ग से संबंधित ग्राह्य फलनों के संग्रह के रूप में परिभाषित करते हैं।

फलन $u(x)$ खोजें जो Π को चरम करे। अतः $\tilde{u}(x)$ को चरमकारी फलन $u(x)$ के समीपवर्ती पथों का परिवार मानें और मानें कि सिरा-बिंदुओं $x = a, b$ पर वे संपाती हैं। $u(\tilde{x})$ को चरमकारी पथ और किसी स्वेच्छ विचरण के योग के रूप में परिभाषित करें, चित्र 9.19।

$$\tilde{u}(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x) = u(x) + \delta u(x)$$

जहाँ ε एक छोटा प्राचल है और $\delta u(x)$, $u(x)$ का *विचरण* है। इससे प्राप्त होता है

$$\underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I } (x \in [a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II } (x = a,b)} = 0 \tag{9.26}$$

प्रत्येक पद शून्य होना चाहिए।

1. प्रथम भाग हमें *ऑयलर समीकरण* देगा।
2. द्वितीय भाग हमें *सीमा प्रतिबंध* परिभाषित करने देगा।

समीकरण 9.26 का भाग I प्रबल रूप देता है।

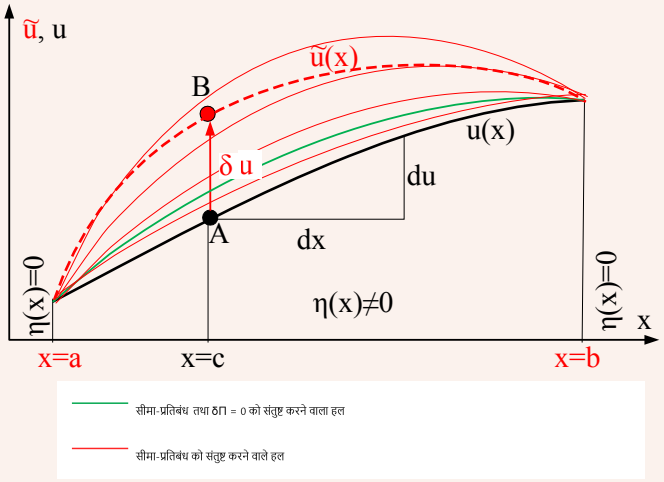
$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad \text{in} \quad a < x < b \tag{9.27}$$

इस अवकल समीकरण को *ऑयलर-लाग्रांज समीकरण* कहते हैं; यह Π से संबद्ध है और $u(x)$ द्वारा Π को चरम करने की आवश्यक शर्त है।

समीकरण 9.26 के दूसरे भाग पर पुनर्विचार हमें सीमा प्रतिबंध परिभाषित करने देता है, चित्र 9.19।

$$\underbrace{\underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{Nat.}}}_{\text{Boundary Cond.}} = 0 \tag{9.28}$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 9.19: विचरणात्मक और अवकल संकारक

यह निम्नलिखित संयोजनों द्वारा प्राप्त किया जा सकता है

$$\begin{array}{llllll} \eta(a)=0 & \text{and} & \eta(b) & =0 & \text{Essential} & \Gamma_u \\ \eta(a)=0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & =0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\ \frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0 & \text{and} & \eta(b) & =0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\ \frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & =0 & \text{Natural} & \Gamma_t \end{array}$$

उदाहरण के रूप में: एकसमान भार p को धारण करने वाली धरन की कुल स्थितिज ऊर्जा इस प्रकार दी जाती है

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2} M\kappa - pw \right) dx = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{2}(EIw'')w'' - pw \right)}_{F} dx$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हम Π का प्रथम विचरण व्युत्पन्न करना चाहते हैं। दो बार खंडशः समाकलन करने पर

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_0^L \delta F dx = \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w \right) dx \\
&= \int_0^L (EIw''\delta w'' - p\delta w) dx \\
&= (EIw''\delta w')|_0^L - \int_0^L \left[(EIw'')'\delta w' - p\delta w \right] dx \\
&= \underbrace{\underbrace{(EIw'')}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w')|_0^L}_{\text{Ess.}} - \underbrace{[(EIw'')'}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w]|_0^L}_{\text{Ess.}}}_{\text{BC}} + \int_0^L \underbrace{\left[(EIw'')'' + p \right]}_{\text{Euler Eq.}} \delta w dx = 0
\end{aligned}$$

अथवा

$$(EIw'')'' = -p \qquad \text{for all x}$$

जो धरनों का नियंत्रक अवकल समीकरण है और सीमा प्रतिबंध इस प्रकार दिए जाते हैं

अनिवार्य		प्राकृतिक
$\delta w' = 0$	अथवा	$EIw'' = -M = 0$
$\delta w = 0$	अथवा	$(EIw'')' = -V = 0$

दुर्बल रूप: गैलेर्किन/भारित अवशेष विधियाँ ध्यान दें कि इस प्रक्रिया को गैलेर्किन विधि (अध्याय 52) द्वारा विपरीत दिशा में लागू किया जा सकता है; यह नियंत्रक समीकरण को परीक्षण फलन $v(x)$ से गुणा करके और प्रांत पर समाकलित करके प्रबल रूप के अवकल समीकरण को दुर्बल रूप में रूपांतरित करती है। फिर अवकलजों की कोटि घटाने के लिए खंडशः समाकलन लागू किया जाता है, जिससे वे परीक्षण और अनुमानी फलनों के बीच वितरित होते हैं तथा सीमा प्रतिबंध स्वाभाविक रूप से सम्मिलित होते हैं। इस प्रक्रिया से ऐसा विचरणात्मक कथन मिलता है जिसमें समाधान आधार फलनों द्वारा विस्तृत परिमित-विमीय उपसमष्टि में खोजा जाता है।

धरन के आनमन के लिए चतुर्थ-कोटि अवकल समीकरण द्वारा दिए गए प्रबल रूप पर विचार करें:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2} \right) = q(x), \quad x \in [0, L] \tag{9.29}$$

जहाँ $w(x)$ विक्षेप है, EI आनमनी दृढता है और $q(x)$ वितरित भार है। परीक्षण फलन $v(x)$ से गुणा और समाकलन करने पर:

$$\int_0^L v(x)\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2} \right) dx = \int_0^L v(x)q(x)dx \tag{9.30}$$

w से v पर अवकलज स्थानांतरित करने के लिए दो बार खंडशः समाकलन लागू करके और उचित सीमा प्रतिबंध सम्मिलित करके दुर्बल रूप मिलता है:

$$\int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}dx = \int_0^L v(x)q(x)dx + \text{boundary terms} \tag{9.31}$$

इस दुर्बल सूत्रीकरण को केवल C^1 सातत्यता चाहिए, प्रबल रूप द्वारा माँगी गई C^3 सातत्यता नहीं, जिससे यह परिमित अवयव विविक्तीकरण के लिए उपयुक्त होता है।

9.3.3 प्रथम दो चुनौतियों का कालानुक्रमिक सार

इलास्टिका समस्या का विकास पाँच दशकों से अधिक समय तक चला; सारणी 9.10 इस कालानुक्रमिक विकास का सार प्रस्तुत करती है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 9.10: याकूब बर्नूली के अवकल कलन और प्रत्यास्थ समस्या संबंधी कार्य का प्रथम प्रकाशनों से मरणोपरांत पूर्णता तक कालानुक्रमिक विकास।

वर्ष/काल	प्रकाशन/स्रोत	विषय और महत्त्व
1670 का दशक	न्यूटन (अप्रकाशित)	निजी रूप से इलास्टिका-सदृश वक्रों का अध्ययन किया, किंतु परिणाम प्रकाशित नहीं किए (§8.2.2)
1689	*Specimen primum calculi differentialis* (बर्नूली, 1689) (*Acta Eruditorum*)	लाइबनिट्सीय कलन का बर्नूली का प्रथम प्रदर्शन; प्रारंभिक समस्याओं पर अनुप्रयोग; विधि का कार्य-क्रमात्मक प्रदर्शन।
1690 जून	*Specimen alterum calculi differentialis* (बर्नूली, 1690) (*Acta Eruditorum*)	मुख्य भाग में लघुगणकीय सर्पिल, लोक्सोड्रोम और गोलीय त्रिभुजों का विवेचन है। निर्णायक *Additamentum de Problema Funiculario* प्रसिद्ध विपर्यय में कूटबद्ध प्रत्यास्थ समस्या प्रस्तुत करता है (Bernoulli, Jakob, 1690a)।
1690 अक्तूबर	समय-सीमा बीती; अन्य गणितज्ञों ने कोई समाधान प्रस्तुत नहीं किया।	
1692	*Meditationes CLXX* (बर्नूली, 1677–1705) (निजी दैनंदिनी)	बर्नूली ने अपनी वैज्ञानिक टिप्पण-पुस्तिका में निजी रूप से प्रत्यास्थ समाधान पूर्ण किया (Bernoulli, Jakob, 1677–1705)।
1694 जून	*Curvatura laminae elasticae* (*Acta Eruditorum*)	कूट के विकूटन, गणितीय उपपत्ति और "वक्रता के स्वरिणम प्रमेय"—प्रत्यास्थ वक्र समस्याओं के प्रमुख वैश्लेषिक साधन—सहित पूर्ण प्रत्यास्थ समाधान प्रकाशित किया (Bernoulli, 1694)।
1694	हाइगेन्स की समीक्षा और बर्नूली का उत्तर	अनेक इलास्टिका विन्यास स्पष्ट करने वाला संवाद *Acta Eruditorum* में प्रकाशित हुआ (Bernoulli, 1694)।
1690 के दशक का उत्तरार्ध–1700 के दशक का आरंभ	विचरणात्मक और समपरिमापी शोध-पत्र	बर्नूली बंधुओं और लाइबनिट्स द्वारा वक्रता तथा न्यूनतमीकरण की विधियों का विस्तार करने वाले संबंधित विकास।
1744	*Opera Omnia* (याकूब बर्नूली, मरणोपरांत, जी. क्रामर द्वारा संपादित)	*Meditationes* और पांडुलिपियों से बर्नूली के पूर्ण प्रत्यास्थ कार्य का संकलन (Bernoulli, Johann, 1713)।
1744	ऑयलर, *Methodus inveniendi*	बर्नूली की आधारभूमि पर निर्मित विचरण-कलन द्वारा निर्णायक व्यवस्थित विवेचन (Euler, 1744b)।

यह समयरेखा ज्यामितीय चुनौती से गणितीय भौतिकी की आधारभूत समस्या तक इलास्टिका के विकास को चित्रित करती है और प्रदर्शित करती है कि गणितीय सफलताओं के लिए प्रायः विद्वानों की अनेक पीढ़ियों में दशकों का परिष्करण आवश्यक होता है। समस्या के समाधान ने संरचनात्मक यांत्रिकी की गणितीय आधारभूमि और सैद्धांतिक भौतिकी में केंद्रीय बनने वाले विचरणात्मक सिद्धांत, दोनों स्थापित किए।

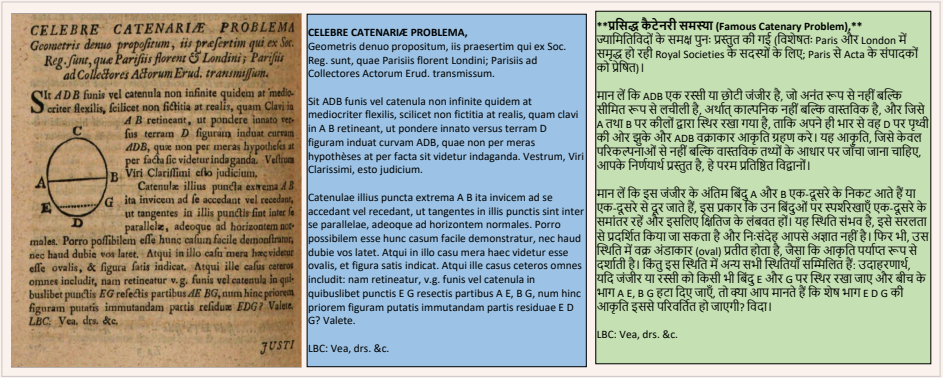
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9.4 एक अज्ञात चुनौती: समस्याओं के बीच सेतु (1724)

(Truesdell, 1960) से अनुकूलित

अगस्त 1724 में *Acta Eruditorum* में एक उकसाने वाले शब्दों वाली टिप्पणी प्रकाशित हुई, चित्र 9.20; उसका शीर्षक था "कैटेनरी की प्रसिद्ध समस्या ज्यामितिज्ञों, विशेषतः लंदन और पेरिस की शाही संस्थाओं के सदस्यों, के समक्ष पुनः प्रस्तुत" (Anonymous, 1724)। रहस्यमय रूप से "LBC[26]," से हस्ताक्षरित चुनौती ने निम्न समस्या प्रस्तुत की:

> ADB कोई रज्जु अथवा छोटी शृंखला हो, जो अनंत रूप से नहीं बल्कि मध्यम रूप से नम्य हो, अर्थात् काल्पनिक नहीं बल्कि वास्तविक हो, जिसे A और B पर कीलें स्थिर रखें, जिससे अपने भार के कारण वह D पर पृथ्वी की ओर उतरकर वक्र आकृति ADB ग्रहण करे। यह आकृति, जो मात्र परिकल्पनाओं से नहीं बल्कि वास्तविक तथ्यों से अन्वेषित की जानी प्रतीत होती है, परम प्रसिद्ध जनों, आपके निर्णय के लिए है।
>
> मानें कि इस शृंखला के चरम बिंदु A और B एक-दूसरे के निकट आएँ अथवा दूर जाएँ, इस प्रकार कि उन बिंदुओं पर स्पर्शरेखाएँ एक-दूसरे के समांतर और इसलिए क्षितिज के अभिलंब (अर्थात् ऊर्ध्वाधर) हों। यह स्थिति संभव है, सरलता से प्रदर्शित किया जा सकता है और निःसंदेह आपसे अज्ञात नहीं है। फिर भी उस स्थिति में वक्र अंडाकार प्रतीत होता है, जैसा आकृति पर्याप्त रूप से इंगित करती है। किंतु उस स्थिति में अन्य सभी सम्मिलित हैं: क्योंकि यदि, उदाहरणतः, शृंखला अथवा रज्जु को किन्हीं बिंदुओं E और G पर स्थिर रखा जाए और मध्यवर्ती भाग AE, BG हटा दिए जाएँ, तो क्या आपको लगता है कि शेष भाग EDG की आकृति इससे बदल जाती है? विदा।
>
> Anonymous, 1724 *"Celebre catenariae problema geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent & Londini; Parisiis ad collectores actorum erud. transmissum"*, pg. 366


CELEBRE CATENARIÆ PROBLEMA
Geometris denuo propositum, iis præsertim qui ex Soc. Reg. sunt, quæ Parisiis florent & Londini; Parisiis ad Collectores Actorum Erud. transmissum.

Sit ADB funis vel catenula non infinite quidem at mediocriter flexilis, scilicet non fictitia at realis, quam Clavi in A B retineant, ut pondere innato versus terram D figuram induat curvam ADB, quæ non per meras hypotheſes at per facta ſic videtur indaganda. Veſtrum Viri Clariſſimi eſto judicium.

Catenulæ illius puncta extrema A B ita invicem ad ſe accedant vel recedant, ut tangentes in illis punctis ſint inter ſe parallelæ, adeoque ad horizontem normales. Porro poſſibilem eſſe hunc caſum facile demonſtratur, nec haud dubie vos latet. Atqui in illo caſu mera hæc videntur eſſe ovalis, & figura ſatis indicat. Atqui ille caſus ceteros omnes includit, nam retineatur v.g. funis vel catenula in quibuslibet punctis *AE BG*, rejectis partibus *AE BG*, num hinc priorem figuram putaris immutandam partis reſiduæ *EDG*? Valete. *LBC.* Vea, drs. &c.

JUSTI

CELEBRE CATENARIÆ PROBLEMA,
Geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent Londini; Parisiis ad Collectores Actorum Erud. transmissum.

Sit ADB funis vel catenula non infinite quidem at mediocriter flexilis, scilicet non fictitia at realis, quam clavi in A B retineant, ut pondere innato versus terram D figuram induat curvam ADB, quae non per meras hypothèses at per facta sit videtur indaganda. Vestrum, Viri Clarissimi, esto judicium.

Catenulae illius puncta extrema A B ita invicem ad se accedant vel recedant, ut tangentes in illis punctis sint inter se parallelae, adeoque ad horizontem normales. Porro possibilem esse hunc casum facile demonstratur, nec haud dubie vos latet. Atqui in illo casu mera haec videtur esse ovalis, et figura satis indicat. Atqui ille casus ceteros omnes includit: nam retineatur, v.g. funis vel catenula in quibuslibet punctis E G resectis partibus A E, B G, num hinc priorem figuram putatis immutandam partis residuae E D G? Valete.

LBC: Vea, drs. &c.

प्रसिद्ध कैटेनरी समस्या (Famous Catenary Problem),
ज्यामितिविदों के समक्ष पुनः प्रस्तुत की गई (विशेषतः Paris और London में समृद्ध हो रही Royal Societies के सदस्यों के लिए; Paris से Acta के संपादकों को प्रेषित)।

मान लें कि ADB एक रस्सी या छोटी जंजीर है, जो अनंत रूप से नहीं बल्कि सीमित रूप से लचीली है, अर्थात् काल्पनिक नहीं बल्कि वास्तविक है, और जिसे A तथा B पर कीलों द्वारा स्थिर रखा गया है, ताकि अपने ही भार से वह D पर पृथ्वी की ओर झुके और ADB वक्राकार आकृति ग्रहण करे। यह आकृति, जिसे केवल परिकल्पनाओं से नहीं बल्कि वास्तविक तथ्यों के आधार पर जाँचा जाना चाहिए, आपके निर्णयार्थ प्रस्तुत है, हे परम प्रतिष्ठित विद्वानों।

मान लें कि इस जंजीर के अंतिम बिंदु A और B एक-दूसरे के निकट आते हैं या एक-दूसरे से दूर जाते हैं, इस प्रकार कि उन बिंदुओं पर स्पर्शरेखाएँ एक-दूसरे के समांतर रहें और इसलिए क्षितिज के लंबवत हों। यह स्थिति संभव है, इसे सरलता से प्रदर्शित किया जा सकता है और निःसंदेह आपसे अज्ञात नहीं है। फिर भी, उस स्थिति में वक्र अंडाकार (oval) प्रतीत होता है, जैसा कि आकृति पर्याप्त रूप से दर्शाती है। किंतु इस स्थिति में अन्य सभी स्थितियाँ सम्मिलित हैं: उदाहरणार्थ, यदि जंजीर या रस्सी को किसी भी बिंदु E और G पर स्थिर रखा जाए और बीच के भाग A E, B G हटा दिए जाएँ, तो क्या आप मानते हैं कि शेष भाग E D G की आकृति इससे परिवर्तित हो जाएगी? विदा।

LBC: Vea, drs. &c.

चित्र 9.20: *Acta Eruditorum* में 1724 की अज्ञात चुनौती (Anonymous, 1724), जिस पर रहस्यमय रूप से "LBC" हस्ताक्षर थे

यह चुनौती परिमित दृढता का तत्त्व प्रस्तुत करके शास्त्रीय कैटेनरी समस्या से मूलतः भिन्न थी—एक ऐसा अभिलक्षण जो पूर्णतः नम्य शृंखलाओं और प्रत्यास्थ छड़ों के बीच अंतराल को पाटता है। एकीकरण की कठिनाई दो भिन्न यांत्रिक सूत्रीकरणों में सामंजस्य स्थापित करने में थी: तनाव बलों के पदों में व्यक्त कैटेनरी समस्या और बंकन आघूर्णों के पदों में व्यक्त इलास्टिका समस्या (Truesdell, 1960)। याकूब बर्नूली ने अपने मूल इलास्टिका शोध-पत्रों में ठीक यही प्रश्न

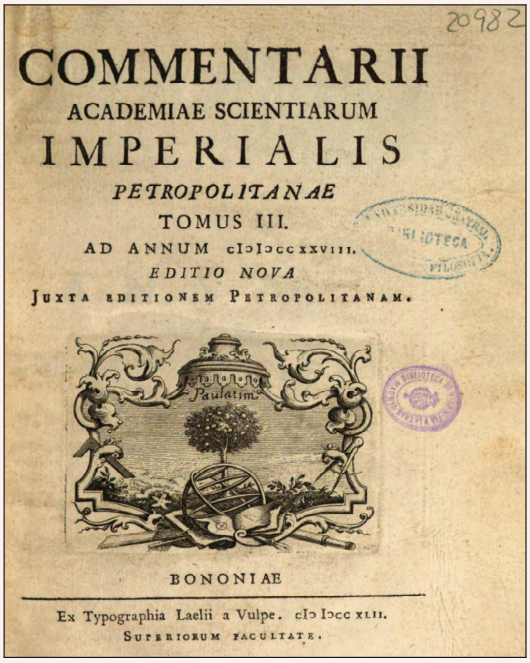
[26]सावधानीपूर्वक विद्वत् अन्वेषण के बावजूद इस हस्ताक्षरकर्ता की पहचान कभी स्थापित नहीं हुई। ट्रूस्डेल के अनुसार, "एलबीसी, वे जो भी थे, उन्हें उत्तर के लिए अनेक वर्ष प्रतीक्षा करनी पड़ी" (Truesdell, 1960)। आज तक लेखक अज्ञात है।

प्रस्तुत करते हुए "प्रत्यास्थ पट्टी को निलंबित भार के अतिरिक्त अपने भार द्वारा मोड़े जाने पर उत्पन्न वक्रों के प्रकार" का अन्वेषण करने को कहा था, किंतु समस्या तीन दशकों से अधिक समय तक अस्पष्टिशत रही। यद्यपि यह 1724 की चुनौती आरंभ में अनदेखी रह गई प्रतीत हुई, उसका समाधान 1728 में एकीकृत धरन सिद्धांत पर डेनियल बर्नूली और ऑयलर के प्रथम प्रकाशनों का विषय बनने वाला था।

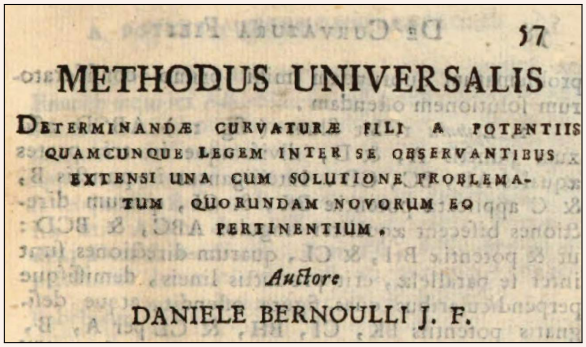
9.4.1 बर्नूली-ऑयलर सहयोग: प्रथम एकीकरण (1728)

1728 तक सेंट पीटर्सबर्ग में डेनियल बर्नूली और लियोनार्ड ऑयलर उभरते संरचनात्मक यांत्रिकी सिद्धांत में प्रमुख थे: दोनों याकूब बर्नूली के अग्रणी कार्य से प्रभावित थे और इंपीरियल अकादमी ऑफ साइंसेज के कनिष्ठ सदस्यों के रूप में समान समस्याएँ हल करने के लिए मैत्रीपूर्ण प्रतिस्पर्धा में संलग्न थे। उस समय अट्ठाईस वर्ष के डेनियल बर्नूली पहले ही प्रसिद्ध वैज्ञानिक थे, जबकि इक्कीस वर्ष के ऑयलर ने केवल तीन शोध-पत्र प्रकाशित किए थे।

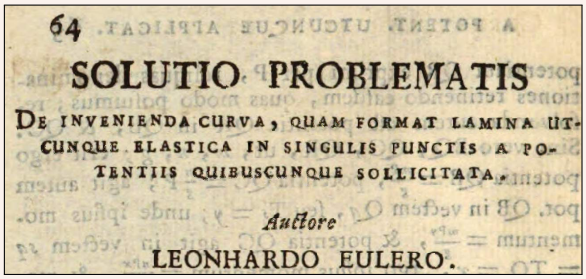
जैसा स्वयं ऑयलर ने बाद में बताया, "हाल ही में प्रतिष्ठित श्री बर्नूली और मेरा इस प्रश्न से सामना हुआ; इसे असुंदर न मानकर हमने इस पर आक्रमण किया और एक ही समय ऐसे समाधान प्राप्त किए जो एक-दूसरे से उत्कृष्ट रूप से सहमत हैं" (Euler, 1728, pg. 70)। फरवरी 1728 में दोनों ने नम्य और प्रत्यास्थ रेखाओं का एकीकृत सिद्धांत संप्रेषित किया; उनके शोध-पत्र उसी खंड में क्रमशः *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* में प्रकाशित हुए, चित्र 9.21 (Bernoulli, Daniel, 1744, pg. 57-63) (Euler, 1728, pg. 64-77)। इस समकालिक प्रकाशन ने कैटेनरी और इलास्टिका सिद्धांतों का प्रथम सफल एकीकरण चिह्नित किया—वही समस्या जिसे एलबीसी ने चार वर्ष पहले प्रस्तुत किया था।



एक विशेष अंक



डेनियल बर्नूली (Bernoulli, Daniel, 1744)



लियोनार्ड ऑयलर (Euler, 1728)

चित्र 9.21: डेनियल बर्नूली और लियोनार्ड ऑयलर के अभूतपूर्व 1728 के प्रकाशन (Euler, 1728)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9.4.1.1 डेनियल बर्नूली (आघूर्ण-वक्रता सिद्धांत की स्थापना) 1728

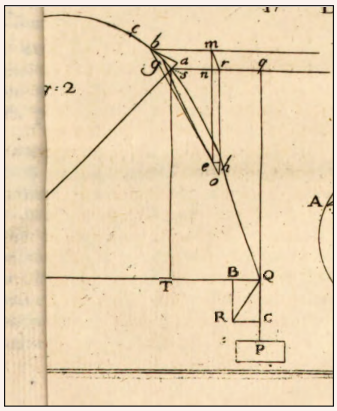
1728 में सेंट पीटर्सबर्ग में डेनियल बर्नूली ने एक अभूतपूर्व कार्य प्रकाशित किया जो आगे के समस्त धरन सिद्धांत की सैद्धांतिक आधारभूमि स्थापित करने वाला था। उनके शोध-पत्र (Bernoulli, Daniel, 1744), जिसका शीर्षक *Methodus universalis determinandae curvaturae fili a potentiis quamcunque legem inter se observantibus extensi* (परस्पर किसी भी नियम का अनुसरण करने वाले बलों द्वारा खिंचे धागे की वक्रता निर्धारित करने की सार्वत्रिक विधि) था, ने उनके परिवार के नाम से प्रसिद्ध मूल आघूर्ण-वक्रता संबंध प्रस्तुत किया, चित्र 9.22।

बर्नूली का क्रांतिकारी योगदान यह पहचानना था कि प्रत्यास्थ प्रतिरोध वक्रता के समानुपाती होना चाहिए। अपने भार और लगाए गए भारों, दोनों के अधीन धरन पर कार्य करते हुए उन्होंने स्थापित किया कि किसी भी बिंदु पर कुल बंकन आघूर्ण पदार्थ के प्रत्यास्थ प्रतिरोध के बराबर होना चाहिए।

स्व-भार के अधीन किसी धरन अवयव के लिए बर्नूली ने दिखाया कि लंबाई s के खंड के भार से आघूर्ण का योगदान है:

$$g\sigma s(x - x_e) = g\sigma s\left(x - \frac{1}{s}\int_0^s x\,ds\right) = g\sigma \int_0^s s\,dx$$

जहाँ g गुरुत्वीय त्वरण है, σ धरन का प्रति इकाई लंबाई भार है और x_e खंड के केंद्रक का स्थान निरूपित करता है।



चित्र 9.22: स्व-भार और लगाए गए भार के प्रभाव दर्शाता बर्नूली का धरन-विश्लेषण

लगाए गए भार P का आघूर्ण जोडने पर बर्नूली की निर्णायक अंतर्दृष्टि यह थी कि इस कुल आघूर्ण को पदार्थ के प्रत्यास्थ प्रतिरोध द्वारा संतुलित होना चाहिए:

$$M = \frac{B}{r} \tag{9.32}$$

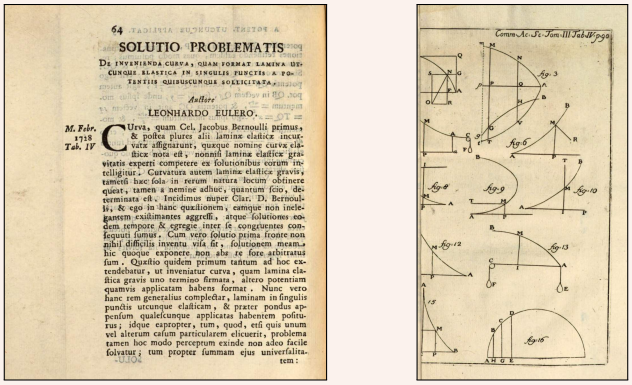
जहाँ B उसे निरूपित करता है जिसे बर्नूली ने "बंकन मापांक" कहा था और r वक्रता-त्रिज्या है। यह आघूर्ण-वक्रता संबंध का प्रथम स्पष्ट कथन है—समस्त धरन सिद्धांत की आधारभूमि।

इस प्रकार बर्नूली का साम्यावस्था समीकरण बनता है:

$$g\sigma \int_0^s s\,dx + Px = \frac{B}{r} \tag{9.33}$$

बर्नूली के 1728 के कार्य ने आघूर्ण-वक्रता सिद्धांत प्रस्तुत करके संरचनात्मक यांत्रिकी की वैचारिक आधारभूमि स्थापित की। किंतु सामान्य भारण स्थितियों और सीमा प्रतिबंधों को संभालने के लिए आवश्यक व्यवस्थित गणितीय ढाँचे के अभाव में उनका उपागम मुख्यतः ज्यामितीय और स्थिति-विशिष्ट बना रहा।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 9.23: Euler, 1732 *Solutio problematis de invenienda curva*

1728 में बर्नूली को उपलब्ध गणितीय तकनीकों ने उन्हें अपेक्षाकृत सरल भारण स्थितियों तक सीमित रखा। स्वेच्छ वितरित भारों, परिवर्तनशील पदार्थ गुणों अथवा सामान्य सीमा प्रतिबंधों वाली जटिल समस्याएँ उनकी विधियों के क्षेत्र से बाहर रहीं। यह सीमा बाद के गणितीय विकासों को प्रेरित करने में निर्णायक सिद्ध होने वाली थी।

बर्नूली के 1728 के योगदान ने आवश्यक भौतिक अंतर्दृष्टि दी—कि प्रत्यास्थ प्रतिरोध वक्रता के समानुपाती है—किंतु इस अंतर्दृष्टि का पूर्ण उपयोग करने की गणितीय यंत्रावली उसमें नहीं थी। मूल समीकरण $M = B/r$ सही था, किंतु जटिल समस्याओं पर उसे व्यवस्थित रूप से लागू करने के लिए ऐसी गणितीय विधियाँ आवश्यक थीं जो अभी विद्यमान नहीं थीं।

भौतिक समझ और गणितीय क्षमता के बीच यह अंतर बाद के विकासों को प्रेरित करने में निर्णायक सिद्ध होने वाला था। 1728 के बाद गणितज्ञों के सामने चुनौती स्पष्ट थी: स्वेच्छ भारण स्थितियों, जटिल ज्यामितियों और सामान्य सीमा प्रतिबंधों को संभालने के लिए बर्नूली की मूल अंतर्दृष्टि पर व्यवस्थित वैश्लेषिक विधियाँ कैसे निर्मित की जाएँ।

बर्नूली का 1728 का आघूर्ण-वक्रता संबंध आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण में अपरिवर्तित है। आज प्रत्येक धरन परिकलन उसी सिद्धांत का उपयोग करता है जिसे उन्होंने पहले व्यक्त किया था: $M = EI\kappa$, जहाँ EI उनके "बंकन मापांक" B के संगत है। लगभग तीन शताब्दियों में यह सातत्य उनकी अंतर्दृष्टि की मूलभूत प्रकृति और संरचनात्मक यांत्रिकी के लिए उसके स्थायी महत्त्व को प्रदर्शित करता है।

9.4.1.2 ऑयलर (ज्यामितीय अंतर्दृष्टि से गणितीय क्रांति तक) (1732)

बर्नूली द्वारा आघूर्ण-वक्रता सिद्धांत स्थापित करने के चार वर्ष बाद ऑयलर ने अपने 1732 के कार्य *Solutio problematis de invenienda curva*, (Euler, 1732), चित्र 9.23, में गणितीय चुनौती का सामना किया; यह यांत्रिकी में एक निर्णायक मोड़ है और तीन आधारभूत योगदान स्थापित करता है: (1) एकल गणितीय ढाँचे के अधीन प्रत्यास्थ तथा नम्य वक्रों को एकीकृत करने वाला प्रथम सामान्य सिद्धांत, (2) समस्त आधुनिक धरन सिद्धांत में अंतर्निहित मूल प्रत्यास्थ परिकल्पना $M = v\kappa$, और (3) ऐसी व्यवस्थित ज्यामितीय विधियाँ जिन्होंने 18वीं शताब्दी की गणितीय तकनीकों की शक्ति और सीमाएँ दोनों प्रकट कीं तथा अंततः विचरण-कलन के विकास को प्रेरित किया।

ऐतिहासिक संदर्भ और ऑयलर की क्रांतिकारी अंतर्दृष्टि जब ऑयलर ने 1732 में इलास्टिका समस्या का समाधान किया (Euler, 1732), तब वे याकूब बर्नूली की 1691 की चुनौती को अत्यधिक विस्तारित क्षेत्र में संबोधित कर रहे थे। ऑयलर के आरंभिक शब्द उनकी गहन अंतर्दृष्टि प्रकट करते हैं:

> Curva, quam Cel. Jacobus Bernoulli primus et postea plures alii laminae elasticae incurvatae assignarunt... nonnisi laminae elasticae gravitatis experti competere ex solutionibus eorum intelligitur.

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> प्रसिद्ध याकूब बर्नूली द्वारा पहले और फिर अनेक अन्य लोगों द्वारा वक्र प्रत्यास्थ पटलिकाओं को दिया गया वक्र केवल भारहीन प्रत्यास्थ पटलिकाओं पर लागू होता है, जबकि प्रकृति में सभी प्रत्यास्थ पिंडों का भार होता है।
> Euler, 1732 "*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*"

इस प्रेक्षण ने एक मूल सीमा पहचानी: पिछले सभी समाधान केवल भारहीन प्रत्यास्थ पट्टियों पर लागू होते थे, जबकि वास्तविक प्रत्यास्थ पिंडों का सदैव भार होता है। ऑयलर का लक्ष्य स्वेच्छ भारण स्थितियों के अधीन *भारी प्रत्यास्थ पटलिकाओं* की सामान्य समस्या हल करना था।

मूल प्रत्यास्थ परिकल्पना ऑयलर का सर्वाधिक क्रांतिकारी योगदान यह पहचानना था कि *प्रत्यास्थ प्रतिरोध वक्रता के समानुपाती* है। उन्होंने प्रस्तावित किया कि जब प्रत्यास्थ अवयवों को बल द्वारा घुमाया जाता है, तब प्रत्यास्थ आघूर्ण प्रत्यास्थ सामर्थ्य और घूर्णन कोण दोनों के समानुपाती होता है:

$$M = \frac{v}{r} = v\kappa$$

जहाँ v प्रत्यास्थ सामर्थ्य है और $\kappa = 1/r$ वक्रता है। यही आधुनिक धरन सिद्धांत का मूल संबंध है, जिसे आज $M = EI\kappa$ लिखा जाता है, जहाँ EI ऑयलर के प्राचल v के संगत है। पश्चदृष्टि में स्पष्ट यह अंतर्दृष्टि 18वीं शताब्दी के आरंभ के लिए क्रांतिकारी थी और आगे के समस्त संरचनात्मक यांत्रिकी की आधारभूमि बनती है।

प्रधान समीकरण और ज्यामितीय विश्लेषण बल-वियोजन और आघूर्ण परिकलन पर दो मूल उपप्रमेयों वाले व्यवस्थित ज्यामितीय विश्लेषण द्वारा ऑयलर ने अपना प्रधान समीकरण व्युत्पन्न किया:

$$\frac{v}{r} = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy$$

ध्यान दें कि चित्र 9.23 में:

- चित्र 3: बल-वियोजन के लिए मूल ज्यामितीय विन्यास दर्शाता है
- चित्र 6: विभिन्न बिंदुओं के परितः आघूर्ण परिकलन चित्रित करता प्रतीत होता है
- आकृतियाँ 8-10: विभिन्न वक्र-विन्यास (संभवतः कैटेनरियाँ और प्रत्यास्थ वक्र) दर्शाती हैं
- आकृतियाँ 12-13: भिन्न भारण परिदृश्य और सीमा प्रतिबंध प्रदर्शित करती हैं
- चित्र 15: पवन-भारित पाल अथवा झिल्ली प्रतीत होने वाली आकृति दर्शाता है
- चित्र 16: अर्धवृत्ताकार विन्यास प्रदर्शित करता है

जहाँ:

- v = प्रत्यास्थ सामर्थ्य (आनमनी दृढता)
- r = वक्रता-त्रिज्या
- E, F = ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशाओं में लगाए गए सिरा-भार
- P, Q = प्रति इकाई लंबाई वितरित भार
- x, y = कार्तीय निर्देशांक

ऑयलर के प्रधान समीकरण की आधुनिक व्याख्या ऑयलर का प्रधान समीकरण मूलतः वक्रता के पदों में व्यक्त किसी धरन का *आघूर्ण-साम्यावस्था समीकरण* है। उनका 1732 का सूत्रीकरण प्रत्यास्थ वक्रों के लिए आघूर्ण साम्यावस्था का प्रथम सामान्य कथन है।

आधुनिक आघूर्ण-वक्रता संबंध:

$$M = EI\kappa = \frac{EI}{R} \tag{9.34}$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ:

- M = आंतरिक बंकन आघूर्ण
- EI = आनमनी दृढता (प्रत्यास्थता मापांक × जड़त्वाघूर्ण)
- $\kappa = 1/R$ = वक्रता
- R = वक्रता-त्रिज्या

समकालीन तुल्य **प्रत्यास्थ वक्र का अवकल समीकरण** है:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \tag{9.35}$$

वितरित भारों $q(x)$ (ऊर्ध्वाधर) और $p(x)$ (क्षैतिज), तथा सिरा-बलों V और H वाली धरन के लिए:

$$M(x) = Vx + Hh + \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.36}$$

समीकरणों (9.35) और (9.36) को मिलाकर हमें आधुनिक समकक्ष समीकरण मिलता है:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Vx + Hh + \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.37}$$

$$\text{Euler's } \frac{v}{r} \leftrightarrow \text{Modern } \frac{EI}{R} = EI\kappa \tag{9.38}$$

$$\text{Euler's } v \leftrightarrow \text{Modern } EI \tag{9.39}$$

$$\text{Euler's } Ex + Fy \leftrightarrow \text{Modern } Vx + Hh \tag{9.40}$$

$$\text{Euler's } \int P\,dx + \int Q\,dy \leftrightarrow \text{Modern } \int q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.41}$$

उल्लेखनीय अंतर्दृष्टि यह है कि ऑयलर के 1732 के ज्यामितीय उपागम ने ठीक उसी भौतिकी को ग्रहण किया जिसे आज हम मूल धरन समीकरण द्वारा व्यक्त करते हैं; यह बाद के लगभग तीन शताब्दियों के विकास के बावजूद उनके गणितीय ढाँचे की स्थायी वैधता प्रदर्शित करता है।

क्रांतिकारी एकीकरण सिद्धांत मूल साम्यावस्था समीकरण स्थापित करने के अतिरिक्त ऑयलर की सर्वाधिक गहन अंतर्दृष्टि यह पहचानना थी कि $v = 0$ रखकर पूर्णतः नम्य पिंडों का वर्णन उसी ढाँचे से किया जा सकता है:

$$0 = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy \tag{9.42}$$

इस एकीकृत विवेचन ने एक मूल अंतर्दृष्टि प्रकट की: कैटेनरियाँ, प्रत्यास्थ वक्र और अन्य यांत्रिक वक्र पृथक गणितीय सत्ताएँ नहीं, बल्कि समान परिवार के सदस्य थे, जो केवल प्रत्यास्थ प्राचल के मान में भिन्न थे। इसने भिन्न भौतिक परिघटनाओं में अंतर्निहित गणितीय एकता देखने की ऑयलर की असाधारण क्षमता प्रदर्शित की।

ढाँचे की शक्ति का प्रदर्शन: कैटेनरी समाधान अपने ढाँचे की बहुमुखिता प्रदर्शित करने के लिए ऑयलर ने दिखाया कि वह ज्ञात परिणामों को व्यवस्थित रूप से कैसे पुनः प्राप्त करता है। सामान्य कैटेनरी (एकसमान ऊर्ध्वाधर भारण के अधीन पूर्णतः नम्य डोरी, जिसमें $dP = a\,ds$, $Q = 0$ और $E = 0$) के लिए अपने एकीकृत समीकरण में $v = 0$ रखने पर मिलता है:

$$0 = Fy + \int_A^M P\,dx \tag{9.43}$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx$ संबंध और उचित समाकलन तकनीकों वाले व्यवस्थित ज्यामितीय विश्लेषण द्वारा यह परिचित कैटेनरी समीकरण में घटता है:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Fy}{\sqrt{a^2y^2 - F^2}} \tag{9.44}$$

इस व्युत्पत्ति ने दिखाया कि सामान्य ढाँचा अंतर्निहित यांत्रिकी की अधिक गहरी ज्यामितीय अंतर्दृष्टि देते हुए ज्ञात परिणामों को व्यवस्थित रूप से कैसे पुनः प्राप्त करता है। ऑयलर के उपागम की व्यवस्थित प्रकृति अलग-अलग वक्र प्रकारों के लिए पहले प्रयुक्त तदर्थ विधियों से स्पष्ट रूप से भिन्न थी।

असाध्य चुनौती: भारी प्रत्यास्थ पटलिकाएँ जब ऑयलर ने अपने प्राथमिक उद्देश्य—अपने भार के अधीन भारी प्रत्यास्थ पटलिकाओं का समाधान—का प्रयास किया, तब उनका सामना मूलतः भिन्न गणितीय चुनौती से हुआ। प्रति इकाई लंबाई भार-घनत्व a वाली धरन के लिए वितरित भारण चाप-लंबाई के समानुपाती आघूर्ण-वितरण उत्पन्न करता है, जिससे मिलता है:

$$\frac{v}{r} = \int as\,dx \tag{9.45}$$

जहाँ s किसी संदर्भ बिंदु से विचाराधीन स्थान तक की चाप-लंबाई निरूपित करता है।

यह समीकरण ऐसी चक्रीय गणितीय निर्भरता प्रस्तुत करता है जो 18वीं शताब्दी की विधियों से असाध्य सिद्ध हुई। मूल कठिनाई यह है कि चाप-लंबाई s और वक्रता-त्रिज्या r, दोनों स्वयं अज्ञात वक्र-आकार $y(x)$ के फलन हैं। विशेषतः:

चाप-लंबाई: $s = \int_0^x \sqrt{1 + (dy/d\xi)^2}\,d\xi$

वक्रता: $\frac{1}{r} = \frac{d^2y/dx^2}{(1+(dy/dx)^2)^{3/2}}$

इन संबंधों को प्रतिस्थापित करने पर ऑयलर का समीकरण अज्ञात फलन $y(x)$ और उसके अवकलजों वाला अत्यधिक अरैखिक समाकल-अवकल समीकरण बन जाता है। जैसा स्वयं ऑयलर ने बताया, ऐसे समीकरणों पर 1732 में उपलब्ध गणितीय तकनीकों द्वारा "सरलता से कार्य नहीं किया जा सकता," और ऐसी गणितीय निर्भरताएँ उत्पन्न होती हैं जिन्होंने सभी प्रारंभिक समाधान-विधियों का प्रतिरोध किया।

गणितीय सीमाएँ और क्रांति के बीज ऑयलर की 1732 की सीमाओं ने अधिक शक्तिशाली गणितीय साधनों की आवश्यकता प्रकट की:

1. **समाकलन की कठिनाइयाँ**: भौतिक रूप से महत्त्वपूर्ण स्थितियों ने ऐसे समाकल दिए जिनका उपलब्ध तकनीकों से परिकलन असंभव था
2. **तदर्थ विधियाँ**: प्रत्येक समस्या के लिए विशिष्ट ज्यामितीय निर्माण आवश्यक थे और व्यवस्थित स्वरूप अनुपस्थित था
3. **अनुपस्थित इष्टतमीकरण सिद्धांत**: गणितीय संभावनाओं में से समाधान के चयन को कोई अंतर्निहित भौतिक सिद्धांत नियंत्रित नहीं करता था

इन सीमाओं ने, विशेषतः भारी प्रत्यास्थ पटलिका की स्थिति ने, स्पष्ट संकेत दिया कि मूल यांत्रिक समस्याओं को ऐसे गणितीय साधन चाहिए थे जो अभी विद्यमान नहीं थे—और अंततः 1744 तक ऑयलर के विचरण-कलन के विकास को प्रेरित किया।

आधुनिक सिद्धांत से संबंध और ऐतिहासिक प्रभाव ऑयलर की प्रत्यास्थ परिकल्पना ने आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण की वैचारिक आधारभूमि स्थापित की। आज का ऑयलर-बर्नूली धरन सिद्धांत प्रत्यक्षतः इस कार्य से उद्भूत है और मूल संबंध $M = EI\kappa$ रूप में अपरिवर्तित है। आधुनिक संकेतों में प्रत्यास्थता मापांक E और जड़त्वाघूर्ण I ठीक

समीक्षाधीन प्रति

ऑयलर के "प्रत्यास्थ सामर्थ्य" प्राचल v के संगत हैं। यह सातत्य प्रदर्शित करता है कि ऑयलर की 1732 की ज्यामितीय अंतर्दृष्टियों ने उस आवश्यक भौतिकी को ठीक पहचाना जो संरचनात्मक अभियान्त्रिकी में आज भी केंद्रीय है।

व्यवस्थित ज्यामितीय उपागम, यद्यपि अंततः विचरणात्मक विधियों द्वारा प्रतिस्थापित हुआ, ने वैश्लेषिक यांत्रिकी का प्रतिरूप स्थापित किया: मूल भौतिक सिद्धांत पहचानें, इन सिद्धांतों को व्यक्त करने वाले गणितीय ढाँचे विकसित करें और व्यवस्थित समाधान तकनीकें लागू करें। यह कार्यविधि गणितीय भौतिकी का मानक बनी।

विरासत और वैश्लेषिक क्रांति का सेतु ऑयलर का 1732 का कार्य वह निर्णायक क्षण निरूपित करता है जहाँ ज्यामितीय अंतर्दृष्टि ने विद्यमान गणितीय विधियों की शक्ति और सीमाएँ, दोनों प्रकट कीं। यह स्पष्ट रूप से दिखाकर कि महत्त्वपूर्ण भौतिक समस्याएँ तत्कालीन तकनीकों की क्षमता से परे थीं, इस कार्य ने विचरण-कलन—वह गणितीय क्रांति जो यांत्रिकी में इष्टतमीकरण समस्याओं का व्यवस्थित समाधान संभव करने वाली थी—के विकास को निर्णायक प्रेरणा दी।

एकल ढाँचे के अधीन प्रत्यास्थ और नम्य वक्रों के एकीकरण ने अंतर्निहित गणितीय एकता देखने की ऑयलर की प्रतिभा का उदाहरण दिया। यह उपागम 18वीं शताब्दी की गणितीय भौतिकी का अभिलक्षण बना: उभयनिष्ठ गणितीय संरचनाओं द्वारा विविध परिघटनाओं को समझाने वाले सामान्य सिद्धांतों की खोज।

सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण रूप से, ऑयलर द्वारा प्रत्यास्थ परिकल्पना $M = v\kappa$ की पहचान ने वह वैचारिक आधार दिया जिस पर आगे का समस्त धरन सिद्धांत निर्मित हुआ। प्रत्येक आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण अंततः वक्रता और प्रत्यास्थ प्रतिरोध के संबंध की इसी मूल अंतर्दृष्टि तक जाता है।

इस प्रकार 1732 का कार्य ज्यामितीय यांत्रिकी की चरम उपलब्धि और अधिक शक्तिशाली गणितीय विधियों की आवश्यकता का स्पष्ट प्रदर्शन, दोनों है—और इस कारण 17वीं शताब्दी की ज्यामितीय परंपरा तथा 18वीं शताब्दी के उत्तरार्ध की वैश्लेषिक क्रांति के बीच पूर्ण सेतु बनता है।

9.4.1.3 ऑयलर-बर्नूली सिद्धांत

आधुनिक पद "ऑयलर-बर्नूली धरन सिद्धांत" एक सावधान ऐतिहासिक श्रेय को प्रतिबिंबित करता है जो डेनियल बर्नूली की 1728 की भौतिक अंतर्दृष्टि और ऑयलर के 1732 के गणितीय ढाँचे के पूरक योगदानों को स्वीकार करता है। समकालीन अभियान्त्रिक साहित्य में मानक होते हुए भी यह द्विविध पदनाम अपनी ऐतिहासिक शुद्धता और स्वयं पारिभाषिकी के विकास का परीक्षण चाहता है।

बर्नूली: पदनाम का "बर्नूली" घटक मुख्यतः डेनियल बर्नूली द्वारा 1728 में मूल आघूर्ण-वक्रता संबंध $\mathcal{M} = B/r$ की स्थापना को सम्मानित करता है। यह प्रथम स्पष्ट पहचान है कि प्रत्यास्थ प्रतिरोध वक्रता के समानुपाती है—वह आधारशिला अंतर्दृष्टि जिस पर आगे का समस्त धरन सिद्धांत आधारित है। किंतु यह श्रेय व्यापक बर्नूली परिवार की विरासत, विशेषतः याकूब बर्नूली द्वारा 1691 में मूल इलास्टिका समस्या के उस सूत्रीकरण को भी अप्रत्यक्ष रूप से स्वीकार करता है जिसने पूरे अन्वेषण-क्षेत्र को प्रेरित किया।

डेनियल बर्नूली का योगदान मूलतः वैचारिक था: यह पहचानना कि मुडी हुई धरन में आंतरिक आघूर्ण, वक्रता-त्रिज्या से विभाजित पदार्थ की आनमनी दृढता के रूप में व्यक्त प्रत्यास्थ प्रतिरोध के बराबर होना चाहिए। इस अंतर्दृष्टि ने प्रत्यास्थ विरूपण को नियंत्रित करने वाला भौतिक सिद्धांत दिया, किंतु जटिल भारण परिदृश्यों पर व्यवस्थित अनुप्रयोग के लिए आवश्यक गणितीय यंत्रावली उसमें नहीं थी।

ऑयलर: ऑयलर के 1732 के कार्य ने बर्नूली की भौतिक अंतर्दृष्टि को व्यापक गणितीय सिद्धांत में उन्नत किया। यद्यपि ऑयलर ने डेनियल बर्नूली द्वारा स्थापित आघूर्ण-वक्रता सिद्धांत पर निर्माण किया, उनके योगदान मात्र क्रमिक न होकर रूपांतरणकारी थे:

1. **व्यवस्थित कार्यविधि**: ऑयलर ने ऐसी ज्यामितीय विधियाँ विकसित कीं जिन्हें विविध भारण स्थितियों में व्यवस्थित रूप से लागू किया जा सकता था
2. **सामान्य साम्यावस्था समीकरण**: उनके प्रधान समीकरण ने एकीकृत ढाँचे में स्वेच्छ प्रत्यास्थ गुण, वितरित भार और सीमा प्रतिबंध समाहित किए

प्रारूप समीक्षा

3. **सैद्धांतिक एकीकरण**: ऑयलर ने प्रदर्शित किया कि प्रत्यास्थ वक्र और पूर्णतः नम्य वक्र समान गणितीय परिवार से संबंधित थे

ऑयलर की गणितीय परिष्कृति ने बर्नूली के भौतिक सिद्धांत का व्यावहारिक अनुप्रयोग संभव बनाया और पृथक अंतर्दृष्टि को संरचनात्मक यांत्रिकी के कार्यशील सिद्धांत में रूपांतरित किया।

संयुक्त पदनाम "ऑयलर-बर्नूली धरन सिद्धांत" इन आधारभूत शोध-पत्रों के प्रकाशन के तुरंत बाद नहीं उभरा। पारिभाषिक विकास दोनों योगदानों की आवश्यक भूमिकाओं की अभियान्त्रिक समुदाय में क्रमिक पहचान को प्रतिबिंबित करता है:

आरंभिक काल (1732-1800): समकालीन संदर्भ सामान्यतः अलग-अलग योगदानों को पृथक श्रेय देते थे; ऑयलर के कार्य को उसकी गणितीय व्यापकता और व्यावहारिक प्रयोज्यता के कारण प्रमुखता मिली।

19वीं शताब्दी का विकास: अभियान्त्रिक शिक्षा और व्यवहार में धरन सिद्धांत के व्यवस्थित होने पर ऑयलर की गणितीय विधियों के साथ बर्नूली के आघूर्ण-वक्रता सिद्धांत की मूल प्रकृति को बढती मान्यता मिली।

आधुनिक मानकीकरण: योजक-चिह्न वाला "ऑयलर-बर्नूली" पदनाम 20वीं शताब्दी के अभियान्त्रिक साहित्य में मानक बना और इस विद्वत् सहमति को प्रतिबिंबित करता है कि पूर्ण सिद्धांत के लिए दोनों योगदान आवश्यक थे।

द्विविध श्रेय धरन सिद्धांत के ऐतिहासिक विकास को ठीक प्रतिबिंबित करता है और स्वीकार करता है कि न तो बर्नूली की भौतिक अंतर्दृष्टि, न ही अकेले ऑयलर का गणितीय ढाँचा प्रत्यास्थ धरनों का पूर्ण सिद्धांत बना:

- **बर्नूली की सीमा**: मूल सिद्धांत स्थापित करते हुए भी उनके 1728 के कार्य में जटिल समस्याएँ संभालने की व्यवस्थित विधियाँ नहीं थीं
- **ऑयलर की निर्भरता**: परिष्कृत गणितीय तकनीकें विकसित करने के बावजूद ऑयलर का उपागम मूलतः बर्नूली के आघूर्ण-वक्रता संबंध पर निर्भर था
- **पूरक आवश्यकता**: पूर्ण सिद्धांत के लिए भौतिक समझ और गणितीय यंत्रावली, दोनों आवश्यक थे

आधुनिक धरन समीकरण $M = EI\kappa$ और साम्यावस्था संबंध $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$ मिलकर दोनों ऐतिहासिक योगदानों को प्रत्यक्ष रूप से मूर्त करते हैं:

$$\text{Bernoulli's insight:} \quad \mathcal{M} = \frac{B}{r} \rightarrow M = EI\kappa \tag{9.46}$$

$$\text{Euler's framework:} \quad \frac{v}{r} = f(\text{loading}) \rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \tag{9.47}$$

यह सातत्य प्रदर्शित करता है कि "ऑयलर-बर्नूली" पदनाम ऐतिहासिक परिपाटी से अधिक है—यह उन गणितीय संबंधों के वैचारिक उद्गम की ठीक पहचान करता है जो आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण को आज भी नियंत्रित करते हैं।

कुछ ऐतिहासिक वृत्तांत सैद्धांतिक विकास के भिन्न पक्षों पर बल देते हैं:

- **याकूब बर्नूली पर बल**: 1691 की इलास्टिका चुनौती को आधारभूत समस्या-कथन के रूप में मान्यता देना
- **ऑयलर की प्रधानता**: निर्णायक सैद्धांतिक प्रगति के रूप में ऑयलर के व्यापक गणितीय विवेचन पर केंद्रित होना
- **सामूहिक विकास**: धरन सिद्धांत को 18वीं शताब्दी के गणितीय भौतिकविदों के व्यापक समुदाय से उभरता देखना

तथापि मानक "ऑयलर-बर्नूली" पदनाम ऐतिहासिक रूप से समर्थनीय और शिक्षाशास्त्रीय रूप से मूल्यवान बना हुआ है तथा दो आवश्यक घटकों की स्पष्ट पहचान करता है: भौतिक सिद्धांत और गणितीय ढाँचा।

समीक्षा प्रति

संक्षेप में, “ऑयलर-बर्नूली धरन सिद्धांत” पद एक शुद्ध ऐतिहासिक श्रेय है जो डेनियल बर्नूली के 1728 के आघूर्ण-वक्रता संबंध द्वारा दी गई मूल भौतिक अंतर्दृष्टि और ऑयलर के 1732 के ज्यामितीय विश्लेषण द्वारा विकसित व्यवस्थित गणितीय ढाँचे, दोनों को स्वीकार करता है। यह द्विविध पदनाम उनके योगदानों की पूरक प्रकृति और उस ऐतिहासिक वास्तविकता को प्रतिबिंबित करता है कि पूर्ण धरन सिद्धांत के लिए भौतिक समझ तथा गणितीय परिष्कृति, दोनों आवश्यक थीं।

अभियान्त्रिक विकास की लगभग तीन शताब्दियों में इस पारिभाषिकी की स्थिरता दोनों आधारभूत योगदानों के स्थायी महत्त्व और उनके द्वारा निरूपित ऐतिहासिक श्रेय की शुद्धता की साक्षी है।

9.5 व्याकुंचन सिद्धांत: प्रेक्षण से निर्णायक भारों तक

कैटेनरी और इलास्टिका के विपरीत स्तंभ व्याकुंचन की समस्या किसी प्रतियोगिता में उद्भूत नहीं हुई, बल्कि ऑयलर के अपने पूर्व कार्य के सर्जनात्मक विस्तार के रूप में उभरी।

9.5.1 आरंभिक कार्य

9.5.1.1 लियोनार्डो (लगभग 1490 का दशक)

लियोनार्डो ने स्तंभों, धरनों, रज्जुओं और चापों पर एक संक्षिप्त ग्रंथ के तुल्य लिखा, जिसमें अस्पष्ट प्रवृत्तियों के स्थान पर निश्चित नियम दिए गए (Truesdell, 1960, p. 20)। ट्रूस्डेल संरचनात्मक व्यवहार के विषय में लियोनार्डो दा विंची की उल्लेखनीय रूप से उन्नत गुणात्मक समझ की चर्चा करते हैं। वे बताते हैं कि लियोनार्डो ने स्तंभों का प्रायोगिक और वैचारिक, दोनों रूपों में परीक्षण किया, (चित्र 9.24a) और यह समझने का प्रयास किया कि कुछ बंकन से जबकि अन्य संदलन से क्यों विफल होते हैं। ट्रूस्डेल के अनुसार लियोनार्डो ने भारण-ज्यामिति की निर्णायक भूमिका पहचानी: जब भार की ऊर्ध्वाधर क्रिया-रेखा स्तंभ के केंद्रकीय अक्ष से गुजरती है, तब अवयव विशुद्ध संपीडन में कार्य करता है। ऐसी स्थितियों में लियोनार्डो का विश्वास था—गुणात्मक अर्थ में सही रूप से—कि अवयव पार्श्व विक्षेप के बिना छोटा होता है। इसके बाद ट्रूस्डेल इस आरंभिक अंतर्दृष्टि की गैलीलियो, मारियोट और ऑयलर के बाद के वैश्लेषिक विवेचनों से तुलना करते हैं तथा दिखाते हैं कि पुनर्जागरण की अंतःप्रज्ञा ने धीरे-धीरे बंकन और स्थायित्व के पूर्ण गणितीय सिद्धांत को स्थान दिया। मूलतः ट्रूस्डेल लियोनार्डो के प्रेक्षण का उपयोग उस विषय की आरंभिक, पूर्वगणितीय पहचान को रेखांकित करने के लिए करते हैं जिसे आज उत्केंद्री भारण और व्याकुंचनप्रेरित बंकन समझा जाता है।

बिखरी टिप्पणियों से लियोनार्डो ने क्षेत्रफल A, व्यास d और लंबाई L वाले स्तंभ के चरम भार P के लिए ऐसे समानुपाती नियम प्रस्तावित किए

$$P \propto \frac{\sqrt{A}}{L}, \qquad P \propto d^2. \tag{9.48}$$

शाब्दिक रूप से लेने पर ये उपलब्ध नियम परस्पर *असंगत* हैं (क्योंकि $A \sim d^2$ प्रथम संबंध से $P \sim d/L$ की भविष्यवाणी कराएगा)। पुरालेखीय अनिश्चितताओं को देखते हुए सावधान व्याख्या यह है कि लियोनार्डो ने केवल गुणात्मक प्रवृत्तियाँ बताईं: सामर्थ्य लंबाई के साथ घटता और अनुप्रस्थ काट के आकार के साथ बढ़ता है, किंतु उनके पास कोई सुसंगत प्रत्यास्थ-स्थायित्व नियम नहीं था (Timoshenko, 1953)। आधुनिक पदों में उन्होंने अक्षीय संपीडन के अधीन लंबी, तनु टेकों की *व्याकुंचन प्रवृत्ति* पहचानी।

9.5.1.2 पीटर वान मुस्खेनब्रुक (1729)

एक अग्रणी प्रयोगकर्ता वान मुस्खेनब्रुक ने ससंजन और स्थायित्व समस्याओं पर स्पष्टतः *प्रयोग* द्वारा आक्रमण किया। चित्र 9.24b के उपकरण का उपयोग करके उन्होंने स्थापित किया कि तनु प्रिज्मीय नमूनों का संपीडन सीमा-भार लंबाई के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती बदलता है, और आयताकार काटों के लिए अनुभवजन्य नियम प्रस्तावित किया:

$$P \propto \frac{h^2 B}{L^2}, \tag{9.49}$$

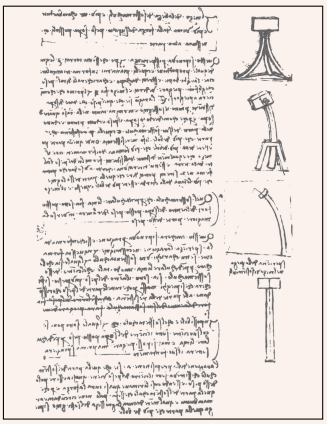
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 9.11: तुलनात्मक विश्लेषण: धरन सिद्धांत में बर्नूली 1728 बनाम ऑयलर 1732 के योगदान

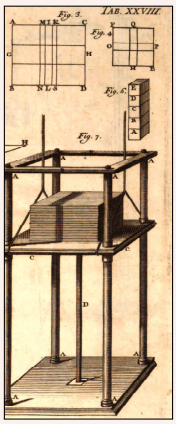
पक्ष	बर्नूली 1728	ऑयलर 1732
प्राथमिक नवोन्मेष	प्रथम स्पष्ट आघूर्ण–वक्रता संबंध: $\mathcal{M} = B/r$	व्यवस्थित ज्यामितीय ढाँचे सहित मूल प्रत्यास्थ परिकल्पना: $M = v\kappa$
गणितीय उपागम	आघूर्ण परिकलनों सहित विशिष्ट भारण स्थितियों का ज्यामितीय विश्लेषण	दो मूल उपप्रमेयों और सामान्य साम्यावस्था सिद्धांतों का उपयोग करने वाली व्यवस्थित ज्यामितीय विधि
अनुप्रयोग का क्षेत्र	स्व-भार और लगाए गए बिंदु भारों वाली धरनें	स्वेच्छ प्रत्यास्थ गुण, वितरित भारण (P, Q) और सामान्य सीमा प्रतिबंध
प्रमुख नियंत्रक समीकरण	$g\sigma \int_0^s s\,dx + Px = \frac{B}{r}$	$\frac{v}{r} = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy$
एकीकरण की उपलब्धि	संयुक्त भारण वाली धरन समस्याओं तक सीमित	प्रत्यास्थ वक्रों, पूर्णतः नम्य पिंडों (कैटेनरियों) और सभी मध्यवर्ती स्थितियों का एकीकरण
भौतिक अंतर्दृष्टि	प्रत्यास्थ प्रतिरोध वक्रता के समानुपाती है	$v = 0$ होने पर नम्य पिंड सीमांत स्थिति के रूप में उभरते हैं; पूर्ण भौतिक समझ
सफलतापूर्वक हल की गई समस्याएँ	• स्व-भार के अधीन धरन • बिंदु भार अनुप्रयोग • स्वेच्छ कोणों पर बल	• सामान्य कैटेनरी की व्युत्पत्ति • परवलयिक भारण स्थितियाँ • अभिलंब बल अनुप्रयोग • संयुक्त अभिलंब/स्पर्शरेखीय बल • सभी पूर्णतः नम्य समस्याएँ
प्रमुख सीमाएँ	• प्रत्येक स्थिति के लिए तदर्थ विधियाँ • सरल भारण तक सीमित • कोई व्यवस्थित ढाँचा नहीं • जटिल सीमाएँ संभालने में असमर्थ	• भारी प्रत्यास्थ पटलिकाएँ असाध्य • जटिल समाकलन कठिनाइयाँ • कोई इष्टतमीकरण सिद्धांत नहीं • ज्यामितीय विधियों में व्यापकता का अभाव
गणितीय साधन	मूल ज्यामितीय विश्लेषण, आघूर्ण संतुलन, गुरुत्व-केंद्र परिकलन	उन्नत ज्यामितीय उपप्रमेय, व्यवस्थित आघूर्ण सिद्धांत, सामान्य अवकल समीकरण, प्राचलीय विधियाँ
कार्यविधिगत स्वरूप	समस्या-विशिष्ट ज्यामितीय निर्माण	व्यवस्थित उपागम: सिद्धांत पहचानें → सामान्य समीकरण व्युत्पन्न करें → विशिष्ट स्थितियों पर लागू करें
भारण का विवेचन	स्व-भार और पृथक लगाए गए बल	सामान्य वितरित भारण: ऊर्ध्वाधर (P), क्षैतिज (Q), और सिरा-भार (E, F)
ऐतिहासिक संदर्भ	चाचा याकूब के इलास्टिका कार्य पर निर्माण	याकूब बर्नूली की 1691 की चुनौती को विस्तारित क्षेत्र में संबोधित करना
उसने क्या सिद्ध किया	आघूर्ण–वक्रता संबंध प्रत्यास्थ व्यवहार के लिए मूलभूत है	यह संबंध विविध यांत्रिक समस्याएँ हल करने के लिए व्यवस्थित रूप से लागू किया जा सकता है
क्या अनसुलझा रहा	जटिल ज्यामितियाँ, वितरित भार, इष्टतमीकरण समस्याएँ	भारी प्रत्यास्थ पटलिकाएँ, चरम सिद्धांतों की आवश्यकता वाली विचरणात्मक समस्याएँ
आधुनिक विरासत	आघूर्ण–वक्रता संबंध अपरिवर्तित: $M = EI\kappa$ (300+ वर्ष)	ऑयलर–बर्नूली धरन सिद्धांत की आधारभूमि, विचरण-कलन के विकास को प्रेरित किया

Victor E. Saouma
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित।
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ h वक्र होने वाली भुजा ("मुड़ी" भुजा) की मोटाई है और B दूसरी भुजा है (Van Musschenbroek, 1729)। L^{-2} मापक्रम ऐतिहासिक रूप से निर्णायक बिंदु है (यह उस फलनिक निर्भरता का पूर्वाभास देता है जो बाद में ऑयलर के सिद्धांत में आएगी)। काट के घातांक (h^2, प्रत्यास्थ $EI \sim Bh^3$ के स्थान पर) संकेत देते हैं कि प्रेक्षित सीमा स्वच्छ प्रत्यास्थ अस्थायित्व के स्थान पर विफलता की ओर बंकन/विभंजन प्रभावों को प्रतिबिंबित करती है। फिर भी यह पार्श्व विक्षेप प्रदर्शित करने वाले संपीडित अवयवों का प्रथम व्यवस्थित अध्ययन है और ऑयलर के विश्लेषण से लगभग पंद्रह वर्ष पहले का है।



(a) व्याकुंचन से संबंधित लियोनार्डो के रेखाचित्र



(b) वान मुस्खेनब्रुक का उपकरण (1729)

चित्र 9.24: अक्षीय-अस्थायित्व परिघटनाओं पर केंद्रित आरंभिक संपीडन अध्ययन।

9.5.2 ऑयलर (1759)

जहाँ वान मुस्खेनब्रुक के प्रयोगों ने स्तंभ-विफलता के लिए अनुभवजन्य L^{-2} मापक्रम नियम स्थापित किया था, व्याकुंचन अस्थायित्व को समझने की सैद्धांतिक आधारभूमि एक अप्रत्याशित स्रोत से उभरी: प्रत्यास्थ वक्रों पर ऑयलर का कार्य। विचरण-कलन में गणितीय अभ्यास के रूप में आरंभ हुआ विषय अंततः संरचनात्मक स्थायित्व का प्रथम कठोर सिद्धांत देने वाला था।

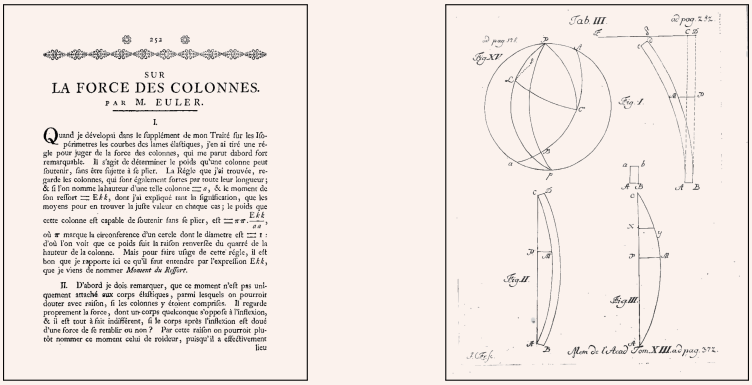
1759 में ऑयलर ने बर्लिन अकादमी को एक शोध-पत्र प्रस्तुत किया (Euler, 1759) जो उनके 1744 के इलास्टिका कार्य का निर्णायक पुनर्परीक्षण था, चित्र 9.25। Euler, 1759 द्वारा अनूदित आरंभिक अनुच्छेद उनकी विलंबित पहचान प्रकट करता है:

> Lorsque j'ai traité des courbes élastiques dans le supplément de mon traité des isopérimètres, j'en ai tiré une conséquence, touchant la force des colonnes, qui m'a paru fort remarquable. Elle consiste dans la charge qu'une colonne peut porter sans se courber. J'ai trouvé une règle qui a lieu pour les colonnes d'une épaisseur égale dans toute leur hauteur; et si l'on désigne par a la hauteur de la colonne, et par Ekk le moment de roideur, la charge qu'une telle colonne peut porter sans se courber sera $= \dfrac{\pi\pi \cdot Ekk}{aa}$, π signifiant le périmètre d'un cercle de diamètre $= 1$. On en conclut que cette charge est en raison inverse du carré de la hauteur de la colonne.

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जब मैंने समपरिमापियों पर अपने ग्रंथ के परिशिष्ट में प्रत्यास्थ वक्र विकसित किए, तब उनसे स्तंभों के सामर्थ्य से संबंधित ऐसा निष्कर्ष निकाला जो मुझे अत्यंत उल्लेखनीय लगा। इसका संबंध उन भारों से है जिन्हें कोई स्तंभ व्याकुंचित हुए बिना धारण कर सकता है। मैंने जो नियम पाया है वह नियत अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल वाले स्तंभों पर लागू होता है; और यदि स्तंभ की ऊँचाई को a तथा प्रतिरोधी आघूर्ण को Ekk निरूपित करें, तो ऐसा स्तंभ व्याकुंचित हुए बिना जो भार धारण कर सकता है वह $\pi\pi.Ekk/aa$ होगा, जहाँ π व्यास = 1 वाले वृत्त की परिधि को दर्शाता है। इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि भार स्तंभ की ऊँचाई के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है।

Euler, 1759 "*Sur la force des colonnes*"


SUR
LA FORCE DES COLONNES.
PAR M. EULER.

I.

Quand je développai dans le supplément de mon Traité sur les Isopérimetres les courbes des lames élastiques, j'en ai tiré une régle pour juger de la force des colonnes, qui me parut dabord fort remarquable. Il s'agit de déterminer le poids qu'une colonne peut soutenir, sans être fujette à fe plier. La Régle que j'ai trouvée, regarde les colonnes, qui font également fortes par toute leur longueur; & fi l'on nomme la hauteur d'une telle colonne $= a$, & le moment de fon reffort $= Ekk$, dont j'ai expliqué tout la fignification, que les moyens pour en trouver la juste valeur en chaque cas; le poids que cette colonne eft capable de foutenir fans fe plier, eft $= \pi\pi \frac{Ekk}{aa}$, où π marque la circonference d'un cercle dont le diametre eft $= 1$: d'où l'on voit que ce poids fuit la raifon renverfée du quarré de la hauteur de la colonne. Mais pour faire ufage de cette régle, il eft bon que je rapporte ici ce qu'il faut entendre par l'expreffion Ekk, que je viens de nommer *Moment du Reffort*.

II. D'abord je dois remarquer, que ce moment n'eft pas uniquement attaché aux corps élaftiques, parmi lesquels on pourroit douter avec raifon, fi les colonnes y étoient comprifes. Il regarde proprement la force, dont un corps quelconque s'oppofe à l'inflexion, & il eft tout à fait indifférent, fi le corps après l'inflexion eft doué d'une force de fe rembler ou non? Par cette raifon on pourroit plutôt nommer ce moment celui de roideur, puisqu'il a effectivement lieu

चित्र 9.25: व्याकुंचन पर ऑयलर का मूलभूत शोध-पत्र (Euler, 1759)

यह उस विषय की प्रथम स्पष्ट अभिव्यक्ति है जिसे आज आधुनिक संकेतों में ऑयलर का व्याकुंचन सूत्र $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ कहते हैं।

ऑयलर के 1757 के कार्य ने संकल्पना को विशुद्ध प्रत्यास्थ पिंडों से परे सामान्यीकृत किया और बल दिया कि "प्रतिरोधी आघूर्ण" Ek^2 अधिक व्यापक रूप से लागू होता है:

मूलतः यह ऐसे बल से संबंधित है जिसके द्वारा कोई पिंड वक्रता में परिवर्तन का प्रतिरोध करता है; और यह पूर्णतः अप्रासंगिक है कि आनमन के बाद ऐसा पिंड अपने मूल आकार को पुनः स्थापित करने का बल रखता है या नहीं। इस कारण हम अधिमानतः इस आघूर्ण को दृढता आघूर्ण *moment de roideur* कह सकते हैं, क्योंकि यह उन सभी पिंडों में होता है जो आनमन का प्रतिरोध करते हैं, चाहे वे प्रत्यास्थ हों अथवा नहीं।

Euler, 1759 "*Sur la force des colonnes*"

ऑयलर (1759) और आधुनिक "प्रजाति I" (§9.3.2.2.1) उपागम, दोनों समान इलास्टिका क्षेत्रकलन से आरंभ होते हैं, जो संपीडित प्रत्यास्थ रेखा का वक्र व्यक्त करता है:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}\, dx. \tag{9.50}$$

यह संबंध बंकन दृढता EI (ऑयलर का Ekk), अक्षीय भार P और वक्रता के संतुलन से उत्पन्न होता है तथा साझा आरंभ-बिंदु बनाता है।

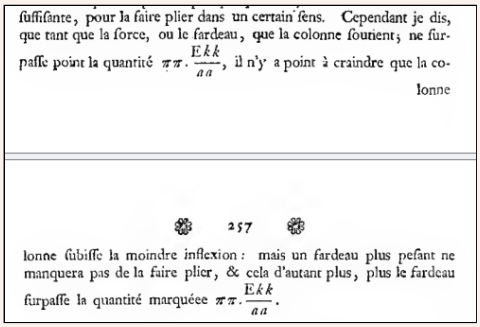
प्रजाति I से व्युत्पन्न (Euler, 1744a)

1. सीधे समीकरण (9.50) से आरंभ करें।
2. $c^2 \ll a^2$ (प्रजाति I की शर्त) मानें। सन्निकटन करें:
$$a^2 - c^2 \approx a^2, \quad 2a^2 - c^2 + x^2 \approx 2a^2 + x^2.$$
3. छोटे x के लिए आगे सरल करें:
$$dy \approx \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}\,dx.$$
4. समाकलित करें:
$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{x}{c}.$$
5. शीर्ष पर सीमा प्रतिबंध लागू करें: $f = \dfrac{\pi a}{2\sqrt{2}}$, अर्ध-लंबाई f के लिए।
6. $P = \dfrac{2Ek^2}{a^2}$ के साथ प्राप्त करें
$$P = \frac{Ek^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}.$$
7. पूर्ण लंबाई $L = 2f$ और $Ek^2 = EI$ के लिए,
$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}.$$

(Euler, 1759) (मूल)

1. अपने पूर्व इलास्टिका सिद्धांत से समीकरण (9.50) प्रस्तुत करते हैं।
2. लगभग सीधी स्थिति के लिए उसे रैखिकीकृत साधारण अवकल समीकरण में घटाते हैं:
$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} + P\,y = 0.$$
3. समाधान:
$$y(x) = C_1 \sin\!\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + C_2 \cos\!\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right).$$
4. कब्जेदार–कब्जेदार सिरों के साथ: $y(0) = 0$, $y(a) = 0$।
5. अतुच्छ समाधान $\Rightarrow$ अभिलाक्षणिक शर्त:
$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\,a = \pi.$$
6. अतः निर्णायक भार:
$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{a^2}}$$

ऑयलर का मार्ग साम्यावस्था अवकल समीकरण से गुजरता है और द्विशाखन की व्याख्या स्थायित्व-सीमा के रूप में करता है। प्रजाति I का उपागम उसी शर्त तक पहुँचने के लिए इलास्टिका कर्षत्रकलन पर सुपष्ट उपगामी सन्निकटन का उपयोग करता है। दोनों समान भौतिक नियम प्रकट करते हैं: निर्णायक व्याकुंचन भार लंबाई के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती बदलता है। चित्र 9.26



चित्र 9.26: निर्णायक व्याकुंचन भार का Euler, 1759 का कथन

इस सफलता के बावजूद ऑयलर के विश्लेषण में महत्त्वपूर्ण सीमाएँ थीं जिनका समाधान केवल बाद के विकासों द्वारा हुआ:

अस्थायित्व संकल्पना का अभाव: ऑयलर यह पहचानने में विफल रहे कि समीकरण 9.24 ऐसा द्विशाखन बिंदु निरूपित करता है जहाँ निर्णायक मान से ऊपर भार की छोटी वृद्धि बड़े विरूपण और संभावित विफलता की ओर ले जाएगी। "निर्णायक" भारों और संरचनात्मक अस्थायित्व की संकल्पना स्थायित्व सिद्धांत पर बहुत बाद के कार्य तक पूर्णतः विकसित नहीं हुई।

अनुप्रस्थ काट के गलत गुण: यद्यपि ऑयलर ने ठीक पहचाना कि Ek^2 दृढता मापता है, उन्होंने त्रुटिपूर्वक अनुमान किया कि चौड़ाई b और मोटाई h वाली आयताकार धरन के लिए बंकन मापांक Ebh^2 के समानुपाती था। सही संबंध में $Ebh^3/12$ सम्मिलित है, किंतु जड़त्वाघूर्ण की संकल्पना और उचित प्रतिबल-वितरण विश्लेषण कूलॉम (1773) के कार्य तथा धरन सिद्धांत के बाद के विकासों तक उभरने वाले नहीं थे।

प्रभाव और विरासत

निर्णायक व्याकुंचन भार की ऑयलर की व्युत्पत्ति संरचनात्मक यांत्रिकी की सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण उपलब्धियों में से एक है। सूत्र $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ ने वान मुस्खेनब्रुक के प्रयोगात्मक L^{-2} मापक्रम की पुष्टि की और साथ ही ऐसा व्यवहार क्यों होता है इसे समझने का सैद्धांतिक ढाँचा दिया।

अधिक मूल रूप से इस कार्य ने संरचनात्मक विश्लेषण में निर्णायक भारों की संकल्पना प्रस्तुत की—यह विचार कि संरचनाएँ पदार्थ के भंजन से नहीं, बल्कि ज्यामितीय अस्थायित्व से विफल हो सकती हैं। यह अंतर्दृष्टि क्रांतिकारी सिद्ध हुई; उसने संरचनात्मक स्थायित्व पर आगे के समस्त कार्य की आधारभूमि स्थापित की और अभियान्त्रिकी को अनुभवजन्य शिल्प से गणितीय सिद्धांतों पर आधारित विज्ञान में रूपांतरित किया।

ऑयलर की गणितीय व्युत्पत्ति से अभियान्त्रिक अनुप्रयोग तक का मार्ग यह भी प्रदर्शित करता है कि सैद्धांतिक सफलताएँ प्रायः अपनी व्यावहारिक व्याख्या से पहले आती हैं। जहाँ 1744 की विचरणात्मक विधियों ने सही गणितीय संबंध दिया, उसके भौतिक निहितार्थ समझने के लिए निरंतर अन्वेषण और पदार्थ-व्यवहार तथा संरचनात्मक विश्लेषण में पूरक सिद्धांतों के विकास की आवश्यकता थी।

निष्कर्ष

निर्णायक व्याकुंचन भार की व्युत्पत्ति उस गणितीय परंपरा की परिणति है जो याकूब बर्नूली की इलास्टिका चुनौती से आरंभ हुई। जैसा Fraser, 1991 ने देखा, ऑयलर वास्तव में महान व्यक्तियों के कंधों पर खड़े थे: याकूब बर्नूली ने इलास्टिका समीकरण व्युत्पन्न किया, हाइगेन्स ने मुड़े रूपों के निर्धारण की समस्या सूत्रबद्ध की, न्यूटन ने व्यवस्थित वर्गीकरण का विषय आरंभ किया और डेनियल बर्नूली ने विचरणात्मक उपागम सुझाया। ऑयलर की विशिष्ट उपलब्धि उस दृढता और वैश्लेषिक अंतर्दृष्टि में थी जिससे उन्होंने इन विचारों का अनुसरण और विकास करके उन्हें एकीकृत सिद्धांत बनाया।

ऑयलर का उपागम—प्रत्यास्थता के मूल समीकरणों को प्रायोगिक निर्धारण और गणितीय विकास के अधीन भौतिक अभिगृहीत मानना—गणितीय भौतिकी के बाद के विकासों का पूर्वाभास देता है। किंतु गणित को केवल प्रचालनात्मक साधन मानने वाले बाद के प्रत्यक्षवादी उपागमों के विपरीत ऑयलर ने गणितीय और भौतिक संकल्पनाओं का मूल एकीकरण प्राप्त किया। यह संश्लेषण न केवल इलास्टिका समस्या की उनकी संकल्पना में, बल्कि उनकी इस पहचान में भी स्पष्ट है कि गणितीय वर्गीकरण भौतिक व्यवहार का पूर्ण वर्णक्रम प्रकट कर सकता है।

इस प्रकार व्याकुंचन सूत्र $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ व्यावहारिक अभियान्त्रिक परिणाम से अधिक है। उसने निर्णायक भारों और संरचनात्मक अस्थायित्व की संकल्पना स्थापित की तथा अभियान्त्रिकी को अनुभवजन्य व्यवहार से गणितीय सिद्धांतों पर आधारित विज्ञान में रूपांतरित किया—ऐसा रूपांतरण जिसका प्रभाव आधुनिक परिकलनीय यांत्रिकी और स्थायित्व विश्लेषण तक विस्तृत है।

समीक्षा प्रति

9.6 ऑयलर का सामान्य सिद्धांत: पूर्ण एकीकरण (1771)

1770 के दशक के आरंभ तक विरूपणीय रेखाओं की सभी प्रमुख चुनौतियाँ प्रस्तुत और हल हो चुकी थीं।

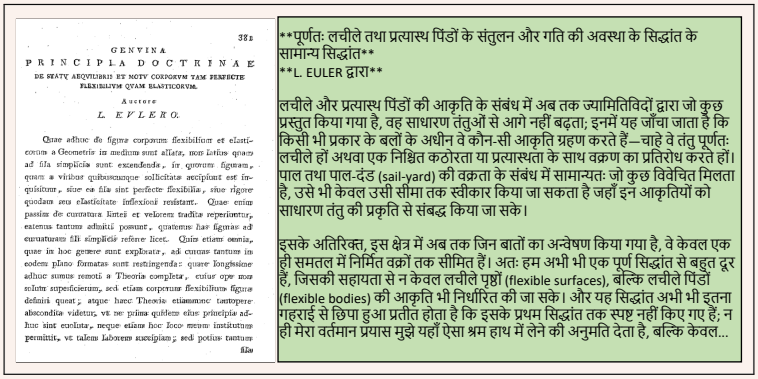
महान चुनौतियों का क्रम लगभग चरणबद्ध नाटक की भाँति खुला। याकूब बर्नूली द्वारा पहले प्रस्तुत कैटेनरी को अंततः लाइबनिट्स, योहान बर्नूली और हाइगेन्स ने निर्धारित किया—यद्यपि विडंबना से स्वयं याकूब ने नहीं (§9.2)। शीघ्र बाद याकूब ने फिर इलास्टिका समस्या प्रस्तुत की, जिसका उन्होंने स्वयं आंशिक समाधान किया और जिसे ऑयलर ने 1744 में पूर्ण किया (§9.3); इसमें उस महत्त्वपूर्ण मध्यांतर की सहायता मिली जिसमें विचरण-कलन की संकल्पना पहले डेनियल बर्नूली ने की और फिर ऑयलर ने कठोरता से परिष्कृत किया। 1724 की अज्ञात चुनौती (§9.4) ने और गति दी तथा डेनियल बर्नूली और ऑयलर ने उसे अपनाकर हल किया। अंततः चरमोत्कर्ष स्तंभों के व्याकुंचन पर ऑयलर के प्रसिद्ध 1759 के संस्मरण से आया, जिसने गणितीय कौतूहल को संरचनात्मक यांत्रिकी के केंद्रीय परिणाम में बदल दिया।

1771 तक ऑयलर इन सूत्रों को एक साथ खींचने के लिए तैयार थे। कैटेनरी, इलास्टिका, अज्ञात चुनौती और स्तंभ-व्याकुंचन समस्या को क्रमशः हल होते देखने के बाद अब उनका लक्ष्य उन्हें एकल वैश्लेषिक ताने-बाने में बुनने से कम नहीं था। अपने *Genuina principia* (Euler, 1771) में उन्होंने वह प्रस्तुत किया जिसे विरूपणीय रेखाओं का *महान एकीकरण सिद्धांत* कहना उचित है,[27] जिसने साम्यावस्था और गति, दोनों को नियंत्रक समीकरणों के एक समूह के अधीन रखा, चित्र 9.27।

> *"Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum."*
>
> "पिंडों की साम्यावस्था और गति के सिद्धांत के वास्तविक मूल नियम, चाहे वे पूर्णतः नम्य हों अथवा प्रत्यास्थ।" Euler, 1771 " *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*", p. 1

इस साहसिक आरंभिक पंक्ति द्वारा ऑयलर ने महान चुनौतियों को एकल सैद्धांतिक निकाय में समाहित करते हुए विरूपणीय रेखाओं की सार्वत्रिक यांत्रिकी स्थापित करने का अपना आशय घोषित किया।

यह घोषणा ऑयलर के आशय को स्पष्ट करती है: नम्य और प्रत्यास्थ रेखाओं की प्रथम वास्तविक सार्वत्रिक यांत्रिकी स्थापित करना।



चित्र 9.27: ऑयलर का "महान-एकीकरण" शोध-पत्र, (Euler, 1771)

[27] आधुनिक भौतिकी में प्रबल, दुर्बल और विद्युतचुंबकीय बलों को एकीकृत करने वाले "महान एकीकृत सिद्धांत" की खोज कैटेनरी, इलास्टिका और व्याकुंचन समस्याओं को एक वैश्लेषिक निकाय में समाहित करने की ऑयलर की महत्त्वाकांक्षा की प्रतिध्वनि है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सामान्य समस्या और प्रतिबल सिद्धांत

1771 के ग्रंथ में ऑयलर ने रेखा-साम्यावस्था की वह समस्या स्थापित की जिसे उन्होंने “सामान्य समस्या” कहा: स्वेच्छ वितरित बलों के अधीन समतल वक्र BMA, चित्र 9.28। बिंदु M पर कल्पनाशील ढंग से वक्र को काटकर और खंड को पृथक करके उन्होंने कटे भाग को तुल्य प्रतिबल परिणामियों—स्पर्शरेखीय बल T, अभिलंब बल V और आंतरिक बंकन आघूर्ण $\mathfrak{M}$—से प्रतिस्थापित किया। यह निर्माण आधुनिक प्रतिबल-परिणामी विश्लेषण का वैचारिक बीज है।

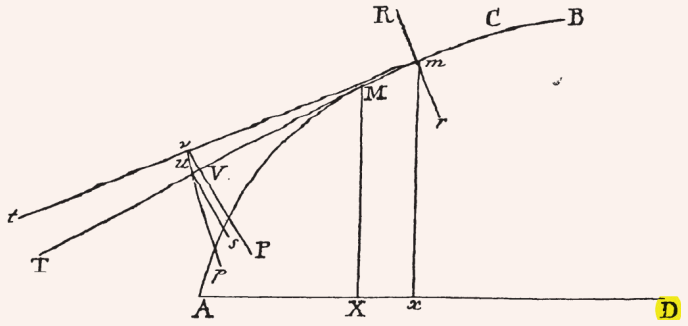
यहाँ आधुनिक नैज संकेतों में व्यक्त (ऑयलर की लैटिन व्युत्पत्ति भिन्न चिह्नों और कुछ भिन्न चिह्न-परिपाटी का उपयोग करती है), संतुलन समीकरण हैं

$$\frac{dT}{ds} + V\,\frac{d\phi}{ds} = -F_t, \tag{9.51}$$

$$\frac{dV}{ds} - T\,\frac{d\phi}{ds} = -F_n, \tag{9.52}$$

$$\frac{d\mathfrak{M}}{ds} - V = 0, \tag{9.53}$$

जहाँ $r^{-1} = d\phi/ds$ वक्रता है और ϕ स्पर्शरेखा-कोण निरूपित करता है (ऑयलर की परिपाटी में प्रायः ढाल-कोण का पूरक)।



चित्र 9.28: किसी रेखा की सामान्य साम्यावस्था के लिए ऑयलर का आरेख (Euler, 1771 PDF)।

महान चुनौतियों का एकीकरण और सामान्यीकरण

ऑयलर के सामान्य समीकरण विरूपणीय रेखाओं की शास्त्रीय समस्याओं को विशेष स्थितियों के रूप में समाहित करते हैं:

कैटेनरी (नम्य शृंखला): यदि $\mathfrak{M} = 0$ (कोई बंकन दृढता नहीं) और $F_t = 0$, $F_n = g\sigma$ (प्रति इकाई लंबाई स्व-भार) हों, तो समीकरण लाइबनिट्स, योहान बर्नूली और हाइगेन्स द्वारा हल की गई कैटेनरी समस्या में घटते हैं।

इलास्टिका (प्रत्यास्थ छड): $F_t = F_n = 0$ (कोई वितरित भारण नहीं) और संघटक नियम $\mathfrak{M} = EI/r$ के साथ वह इलास्टिका समीकरण पुनः प्राप्त होता है जिसे पहले याकूब बर्नूली ने प्रस्तुत किया और ऑयलर ने 1744 में पूर्णतः विकसित किया।

स्तंभ व्याकुंचन (1759): अक्षीय रूप से भारित प्रिज़्मीय स्तंभ पर लागू करने पर समान ढाँचा रैखिकीकृत स्थायित्व शर्त देता है। ऑयलर ने पहले (1759) कब्जेदार सिरों के लिए निर्णायक भार $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ व्युत्पन्न किया था; व्यापक 1771 के विन्यास में यह सामान्य सिद्धांत के भीतर विशिष्ट अभिलाक्षणिक मान (द्विशाखन) समस्या के रूप में आता है।

> *“...terminus $d^3\phi$ ad differentialia quarti gradus assurget.”*

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> "...तृतीय अवकलज पद चतुर्थ-कोटि अवकल समीकरण तक उठता है।"
> Euler, 1771 "*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*", p. 12

यह अंश रेखांकित करता है कि ऑयलर की विधि उच्च-कोटि इलास्टिका समीकरण को स्वाभाविक रूप से कैसे उत्पन्न करती है, जो संरचनात्मक विश्लेषण की ऐतिहासिक उपलब्धि है।

सामान्य रेखा-साम्यावस्था (1771): सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण रूप से 1771 का ग्रंथ दिखाता है कि समान समीकरण स्वेच्छ स्पर्शरेखीय और अभिलंब भार-वितरणों के अधीन *किसी भी* रेखा को नियंत्रित करते हैं, चाहे बंकन दृढता हो अथवा नहीं। स्वयं ऑयलर ने अपने समाधान की अनुकूलनीयता पर बल दिया:

> *"non difficile erit solutionem nostram etiam ad alios casus accommodare..."*
>
> "हमारे समाधान को अन्य स्थितियों के लिए भी अनुकूलित करना कठिन नहीं होगा..."
> Euler, 1771 "*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*", p. 13

व्यापकता के इस नए स्तर ने विश्लेषण को विशेष स्थितियों से रेखा-साम्यावस्था के सार्वत्रिक सिद्धांत तक और संस्मरण के सहायक अनुभागों में गति की समस्याओं (कंपित डोरियों और प्रत्यास्थ छडों) तक उठाया; इस प्रकार एक ही विधि में स्थैतिकी और गतिकी जुडीं।

समापन परिप्रेक्ष्य

एक साथ लेने पर ये कार्य विरूपणीय रेखाओं पर ऑयलर के कार्यक्रम की पूर्णता चिह्नित करते हैं। 1744 की इलास्टिका ने गणितीय आधारभूमि दी; 1759 के स्तंभ-संस्मरण ने केंद्रीय अभियान्त्रिक समस्या हल करने में उसकी शक्ति प्रदर्शित की; और 1771 के ग्रंथ ने विषय को नम्य तथा प्रत्यास्थ रेखाओं की साम्यावस्था और गति के सार्वत्रिक सिद्धांत तक उन्नत किया। इस प्रगति में ऑयलर ने शृंखलाओं, छडों और स्तंभों की पृथक चुनौतियों को एकल वैश्लेषिक ढाँचे के पक्षों में रूपांतरित किया—ऐसी उपलब्धि जिसने न केवल उनकी शताब्दी की यांत्रिकी को एकीकृत किया बल्कि आधुनिक प्रतिबल-परिणामी और संतति सूत्रीकरणों के नियंत्रक सिद्धांतों का पूर्वाभास भी दिया।

संश्लेषण: चुनौतियों से विज्ञान तक

अलग-अलग चुनौतियों से एकीकृत सिद्धांत तक का विकास यांत्रिक विज्ञान में मूल रूपांतरण चिह्नित करता है। 1690 के दशक की कैटेनरी समस्या ने इष्टतमीकरण में कलन की नई शक्ति प्रदर्शित की। याकूब बर्नूली की इलास्टिका चुनौती ने गणित को विचरणात्मक विधियों की ओर धकेला। व्याकुंचन समस्या ने प्रकट किया कि अमूर्त सिद्धांत अभियान्त्रिक संरचनाओं में निर्णायक परिघटनाओं का पूर्वानुमान कैसे कर सकता है।

ऑयलर के 1771 के सामान्य सिद्धांत ने इन उपलब्धियों को एक व्यापक ढाँचे में संश्लेषित किया जिसने:

- **ज्यामिति और यांत्रिकी को एकीकृत किया**: वक्रता और विरूपण को आंतरिक बल-परिणामियों से सीधे जोडा;
- **प्रतिबल सिद्धांत स्थापित किया**: T (स्पर्शरेखीय), V (अभिलंब) और $\mathfrak{M}$ (आघूर्ण) को मूल मात्राओं के रूप में प्रस्तुत किया;
- **सामान्य कार्यविधि दी**: पदार्थ नियमों से स्वतंत्र साम्यावस्था समीकरण सूत्रबद्ध किए, जिन्हें संघटक संबंध पूर्ण करते हैं;
- **शुद्धगतिकी को पदार्थ-व्यवहार से अलग किया**: ज्यामितीय वर्णन को संघटक मान्यताओं से स्पष्टतः पृथक किया;

प्रारूप प्रकाशन

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **व्यवस्थित वर्गीकरण संभव बनाया**: दिखाया कि पूर्णतः नम्य और प्रत्यास्थ रेखाएँ, दोनों सामान्य ढाँचे की विशेष स्थितियों के रूप में कैसे उभरती हैं।

धरन-सामर्थ्य पर गैलीलियो की गुणात्मक टिप्पणियों से ऑयलर के अवकल समीकरणों तक की यात्रा लगभग दो शताब्दियों के गणितीय और यांत्रिक विकास में फैली थी। महान चुनौतियों ने उत्प्रेरक का कार्य किया और कलन, विचरणात्मक विश्लेषण तथा भौतिक तर्क में प्रगति प्रेरित की। ऑयलर के सामान्य सिद्धांत के अधीन उनके अंतिम एकीकरण ने प्रदर्शित किया कि विशिष्ट, सुपरिभाषित समस्याएँ सार्वत्रिक सिद्धांत कैसे प्रकट कर सकती हैं।

विरासत मूल समस्याओं से बहुत आगे विस्तृत है। आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण—गगनचुंबी भवनों से निलंबन सेतुओं तक, सूक्ष्म-मान पदार्थों से डीएनए अणुओं तक—लटकती शृंखलाओं, मुड़ी छड़ों और संपीडित स्तंभों के इन "सरल" प्रश्नों के समाधान द्वारा पहले स्थापित आधारों पर टिका है। इस अर्थ में महान चुनौतियों ने अपना सर्वोच्च उद्देश्य पूरा किया: अभियान्त्रिकी को अनुभवजन्य शिल्प से गणितीय विज्ञान में रूपांतरित करना।

> *"non difficile erit solutionem nostram etiam ad alios casus accommodare..."*
>
> "हमारे समाधान को अन्य स्थितियों के लिए भी अनुकूलित करना कठिन नहीं होगा..."
> Euler, 1771 "*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*", p. 13

ऑयलर की समापन टिप्पणी उनके 1771 के संस्मरण की भावना ग्रहण करती है: ऐसा ढाँचा जो विशेष समस्याओं तक सीमित नहीं, बल्कि मुक्त, अनुकूलनीय और स्थायी है।

9.7 निष्कर्ष

धरन-सामर्थ्य पर गैलीलियो के गुणात्मक चिंतन (§7.2.2) से ऑयलर के विरूपणीय रेखाओं के सार्वत्रिक समीकरणों तक का मार्ग लगभग दो शताब्दियों में फैला और यांत्रिकी को सादृश्य तथा प्रयोग द्वारा निर्देशित शिल्प से गणितीय विज्ञान में रूपांतरित किया। प्रत्येक चुनौती ने निर्णायक भूमिका निभाई: कैटेनरी ने इष्टतमीकरण समस्याओं के समाधान में कलन की क्षमता प्रकट की; इलास्टिका ने गणित को विचरणात्मक विधियों और उच्च-कोटि अवकल समीकरणों की ओर धकेला; 1724 की अज्ञात समस्या ने इन अंतर्दृष्टियों को अधिक सामान्य बल नियमों तक विस्तारित किया; और ऑयलर के व्याकुंचन सूत्र ने संरचनात्मक स्थायित्व के लिए सिद्धांत की पूर्वानुमानकारी शक्ति स्थापित की।

ऑयलर के 1771 के संश्लेषण ने इस प्रगति की परिणति चिह्नित की। रेखा-साम्यावस्था की "सामान्य समस्या" का ढाँचा बनाकर उन्होंने प्रतिबल परिणामियों—स्पर्शरेखीय बल, अभिलंब बल और बंकन आघूर्ण—की वैचारिक यंत्रावली प्रस्तुत की और शुद्धगतिक संतुलन को पदार्थ-प्रतिक्रिया से पृथक किया। ऐसा करते हुए उन्होंने संतति यांत्रिकी के सिद्धांतों का पूर्वाभास दिया और एक ऐसी व्यवस्थित कार्यविधि प्रदान की जिसमें शृंखला, छड़ तथा स्तंभ जैसी विशिष्ट स्थितियाँ एकल ढाँचे के विशेषीकरणों के रूप में उभरीं।

इन महान चुनौतियों की विरासत गहन है। यूरोप के अग्रणी ज्यामितिज्ञों के बीच बौद्धिक प्रतियोगिताओं के रूप में आरंभ हुए विषय ने संरचनाओं की यांत्रिकी को पुनर्गठित किया और आधुनिक अभियान्त्रिक विश्लेषण की आधारभूमि रखी। आज सेतुओं और गगनचुंबी भवनों के अभिकल्प से सूक्ष्मसंरचनाओं तथा जैव-अणुओं के प्रतिरूपण तक, शृंखलाओं, छड़ों और स्तंभों के अध्ययन में पहले गढ़े गए समीकरण आधारभूत बने हुए हैं। इन समस्याओं का इतिहास प्रदर्शित करता है कि विशिष्ट, कभी-कभी मनोरंजक चुनौतियों का अनुसरण प्राकृतिक परिघटनाओं को नियंत्रित करने वाले सार्वत्रिक सिद्धांत कैसे प्रकट कर सकता है, और भौतिक अंतर्दृष्टि से संयुक्त गणित अभियान्त्रिकी को अनुभवजन्य व्यवहार से पूर्वानुमानकारी विज्ञान तक कैसे उठा सकता है।

प्रारूप समीक्षाधीन

तालिका 9.12: तीन महान चुनौतियों की एकीकृत कालानुक्रमिक समयरेखा: कैटेनरी, इलास्टिका और अज्ञात चुनौती

तिथि	चुनौती	घटना
लगभग 1490 का दशक	आरंभिक अध्ययन	लियोनार्डो दा विंची अपनी टिप्पण-पुस्तिकाओं में लटकती शृंखलाओं के रेखाचित्र बनाते हैं।
1614	आरंभिक अध्ययन	आइजैक बीकमान लटकती रज्जु की समस्या बताते और देकार्त से उसकी चर्चा करते हैं।
1634	आरंभिक अध्ययन	स्तेविन का *Oeuvres Mathématiques* मरणोपरांत प्रकाशित हुआ, जिसमें जिरार की टिप्पणियाँ परवलयिक कैटेनरी का दावा करती हैं।
1638	आरंभिक अध्ययन	गैलीलियो कैटेनरी का अन्वेषण करते हैं, किंतु त्रुटिपूर्वक उसे परवलयिक मानते हैं (Galilei, 1638 [PDF])।
लगभग 1646	आरंभिक अध्ययन	युवा हाइगेन्स (आयु 17) मेर्सेन के समक्ष सिद्ध करते हैं कि कैटेनरी परवलयिक नहीं है।
1670 का दशक	आरंभिक अध्ययन	न्यूटन निजी रूप से इलास्टिका-सदृश वक्रों का अध्ययन करते हैं, किंतु अपने परिणाम प्रकाशित नहीं करते।
1690 मई	कैटेनरी	याकूब बर्नूली *Funicularia* चुनौती *Acta Eruditorum* में जारी करते हैं(Bernoulli, Jakob, 1690b [PDF])।
1690 जून	इलास्टिका	याकूब बर्नूली *Specimen alterum* में विपर्यय के रूप में कूटबद्ध इलास्टिका समस्या प्रस्तुत करते हैं (Bernoulli, Jakob, 1690a [PDF])।
1690 उत्तरार्ध	कैटेनरी	लाइबनिट्स चुनौती स्वीकार कर उसे *catenaria* पर केंद्रित करते हुए पुनः सूत्रबद्ध करते हैं।
1690 अक्तूबर 9	कैटेनरी	हाइगेन्स कूटबद्ध समाधान से उत्तर देते हैं।
1690 अक्तूबर 13	कैटेनरी	लाइबनिट्स कूट का उपयोग किए बिना हाइगेन्स को उत्तर देते हैं।
1690 अक्तूबर	इलास्टिका	बासेल फसल उत्सव की समय-सीमा बीतती है; कोई समाधान प्रस्तुत नहीं होता।
1690 दिसंबर	कैटेनरी	योहान बर्नूली अपना समाधान *Acta Eruditorum* के संपादकों को प्रस्तुत करते हैं (Bernoulli, Johann, 1691c [PDF])।
1691 जनवरी 27	कैटेनरी	लाइबनिट्स हाइगेन्स की सहायक-वक्र विधि स्वीकार करते हैं।
1691 फरवरी 23	कैटेनरी	हाइगेन्स समस्या की कठिनाई के विषय में विश्वास व्यक्त करते हैं।
1691 मार्च 2	कैटेनरी	लाइबनिट्स हाइगेन्स को योहान के सफल समाधान की सूचना देते हैं।
1691 मार्च 21	कैटेनरी	याकूब *Additamentum ad Problema Funicularium* प्रस्तुत करते हैं।
1691 मार्च 26	कैटेनरी	हाइगेन्स संशोधित कूट भेजते हैं।
1691 मई 5	कैटेनरी	हाइगेन्स और लाइबनिट्स अंतिम समाधान प्रस्तुत करते हैं (Huygens, 1888a; Leibniz, 1691a)।
1691 जून	कैटेनरी	तीनों समाधान (हाइगेन्स, लाइबनिट्स, योहान बर्नूली) *Acta Eruditorum* में एक साथ प्रकाशित होते हैं (Huygens, 1888a; Leibniz, 1691a; Bernoulli, Johann, 1691c [PDF])।
1692	इलास्टिका	याकूब बर्नूली निजी रूप से *Meditationes CLXX* में इलास्टिका समाधान पूर्ण करते हैं (Bernoulli, Jakob, 1677–1705)।
1694 जून	इलास्टिका	याकूब *Curvatura laminae elasticae* प्रकाशित करते हैं, विपर्यय का कूट खोलते और “स्वरिणम प्रमेय” प्रकट करते हैं (Bernoulli, Jakob, 1694 [PDF])।
1694	इलास्टिका	हाइगेन्स अनेक इलास्टिका विन्यासों (वक्र A–G) की पहचान करने वाली समीक्षा प्रकाशित करते हैं।
1694	इलास्टिका	याकूब अपनी ज्यामितीय विधि की व्यापकता का समर्थन करते हुए हाइगेन्स को शालीनता से उत्तर देते हैं (Bernoulli, 1694)।

अगले पृष्ठ पर जारी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सारणी 9.12 (जारी)

तिथि	चुनौती	घटना
1696	संबंधित	योहान बर्नूली *Acta Eruditorum* में ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती प्रस्तुत करते हैं (Bernoulli, Johann, 1696 PDF)।
1697 जनवरी	संबंधित	योहान मुद्रित *Programma* द्वारा ब्रैकिस्टोक्रोन की समय-सीमा बढ़ाते हैं।
1697 मई	संबंधित	योहान प्रकाशिक सादृश्य से ब्रैकिस्टोक्रोन समाधान प्रकाशित करते हैं; न्यूटन, लाइबनिट्स, लोपिताल (l'Hôpital) और याकूब भी इसे हल करते हैं (Bernoulli, Johann, 1697a PDF)।
1724 अगस्त	अज्ञात	"मध्यम रूप से नम्य" शृंखलाओं से संबंधित एक अज्ञात चुनौती ("LBC" हस्ताक्षरित) *Acta Eruditorum* में आती है (Anonymous, 1724 PDF)।
1724–1727	अज्ञात	चुनौती मुख्यतः अनदेखी रहती है; कोई तत्काल उत्तर नहीं।
1728 फरवरी	अज्ञात	डेनियल बर्नूली और ऑयलर स्ववंतंत्र रूप से एकीकृत नम्य–प्रत्यास्थ रेखा समाधान प्रस्तुत करते हैं (Bernoulli, Daniel, 1744 PDF; Euler, 1728 PDF)।
1728	अज्ञात	दोनों समाधान *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, खंड 3 में क्रमशः प्रकाशित होते हैं (Bernoulli, Daniel, 1744 PDF; Euler, 1728 PDF)।
1728	अज्ञात	डेनियल मूल आघूर्ण–वक्रता संबंध $M = B/r$ स्थापित करते हैं (Bernoulli, Daniel, 1744 PDF)।
1729	संबंधित	पीटर वान मुस्खेनब्रुक $P \propto L^{-2}$ मापक्रम दिखाने वाले प्रयोगात्मक व्यावकुंचन अध्ययन प्रकाशित करते हैं (Van Musschenbroek, 1729 PDF)।
1732	इलास्टिका/अज्ञात	ऑयलर *Solutio problematis* प्रकाशित करते हैं—प्रत्यास्थ और नम्य वक्रों को एकीकृत करने वाला सामान्य ज्यामितीय ढाँचा: $M = v\kappa$ (Euler, 1732 PDF)।
1742 अक्तूबर 20	इलास्टिका	डेनियल बर्नूली ऑयलर को ऊर्जा-न्यूनतमीकरण सिद्धांत प्रस्तावित करते हुए लिखते हैं: "vis viva potentialis" न्यूनतम होना चाहिए (Bernoulli, Daniel, 1845 PDF)।
1742	इलास्टिका	डेनियल प्रत्यास्थ ऊर्जा को $\int ds/R^2$ के रूप में व्यक्त करते और चतुर्थ-कोटि अवकल समीकरण व्युत्पन्न करते हैं (Bernoulli, Daniel, 1845 PDF)।
1744 जुलाई	इलास्टिका	ऑयलर *Methodus inveniendi* के मुख्य अध्याय प्रकाशक को देते हैं (Euler, 1744b PDF)।
1744 दिसंबर	इलास्टिका	ऑयलर दो परिशिष्ट देते हैं: Additamentum I (इलास्टिका) और II (न्यूनतम क्रिया) (Euler, 1744b PDF)।
1744	इलास्टिका	*Methodus inveniendi lineas curvas* प्रकाशित होता है और विचरण-कलन का प्रथम व्यवस्थित विवेचन प्रस्तुत करता है (Euler, 1744b PDF)।
1744	इलास्टिका	ऑयलर पूर्ण गणितीय अभिलक्षण सहित इलास्टिका वक्रों की नौ प्रजातियाँ (प्रजाति I–IX) वर्गीकृत करते हैं (Euler, 1744a PDF)।
1744	इलास्टिका	याकूब का पूर्ण इलास्टिका कार्य मरणोपरांत *Opera Omnia* में आता है, जिसका संपादन गैब्रियल क्रामर ने किया (Bernoulli, Jakob, 1744b)।
1759	व्यावकुंचन	ऑयलर अपना स्तंभ-व्यावकुंचन सूत्र $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ प्रकाशित करते और 1744 की प्रजाति I स्थिति का महत्त्व पहचानते हैं (Euler, 1759 PDF)।
1771	एकीकरण	ऑयलर तीनों चुनौतियों को विरूपणीय रेखाओं के सामान्य सिद्धांत में एकीकृत करने वाला *Genuina principia* प्रकाशित करते हैं (Euler, 1771 PDF)।
1771	एकीकरण	ऑयलर प्रतिबल परिणामियों सहित "सामान्य समस्या" प्रस्तुत करते हैं: स्पर्शरेखीय बल T, अभिलंब बल V और बंकन आघूर्ण $\mathfrak{M}$ (Euler, 1771 PDF)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 9.13: एकीकृत कालानुक्रमिक समयरेखा में संदर्भित प्रकाशन

लेखक	वर्ष	संदर्भ	शीर्षक	विवरण
गैलीलियो गैलीली	1638	(Galilei, 1638)	*Discorsi e dimostrazioni matematiche*	कैटेनरी वक्र को त्रुटिपूर्वक परवलयिक प्रस्तावित करते हैं; धरन-सामर्थ्य और संरचनात्मक यांत्रिकी पर आधारभूत कार्य प्रस्तुत करते हैं
याकूब बर्नूली	1690	(Bernoulli, Jakob, 1690b)	*Problema funicularium*	लटकती शृंखला द्वारा निर्मित वक्र पूछते हुए *Acta Eruditorum* में गणितीय समुदाय के समक्ष कैटेनरी चुनौती प्रस्तुत करते हैं
याकूब बर्नूली	1690	(Bernoulli, Jakob, 1690a)	*Specimen alterum calculi differentialis*	विपर्यय में कूटबद्ध समाधान सहित इलास्टिका समस्या प्रस्तुत करते हैं; अक्तूबर में बासेल के फसल उत्सव तक समाधान प्रकट करने का वचन देते हैं
योहान बर्नूली	1691	(Bernoulli, Johann, 1691c)	*Solutio problematis funicularii*	योहान का कैटेनरी समाधान, दिसंबर 1690 में संपादकों को प्रस्तुत और जून 1691 में लाइबनिट्स तथा हाइगेन्स के साथ प्रकाशित
क्रिस्टियान हाइगेन्स	1691	(Huygens, 1888a)	*Solutio problematis catenarii*	सहायक वक्रों का उपयोग करने वाला हाइगेन्स का ज्यामितीय कैटेनरी समाधान; लाइबनिट्स के साथ कूट-पत्राचार द्वारा विकसित
गॉटफ्रीड डब्ल्यू. लाइबनिट्स	1691	(Leibniz, 1691a)	*De linea in quam flexile se pondere proprio curvat*	लघुगणकों और अतिपरवलयिक फलनों से संबंध स्थापित करने वाला लाइबनिट्स का कैटेनरी समाधान; सर्वाधिक व्यापक विवेचन
याकूब बर्नूली	1692	(Bernoulli, Jakob, 1677–1705)	*Meditationes CLXX*	याकूब की निजी वैज्ञानिक टिप्पण-पुस्तिका जिसमें उनका पूर्ण इलास्टिका समाधान है; उनके जीवनकाल में अप्रकाशित रही
याकूब बर्नूली	1694	(Bernoulli, Jakob, 1694)	*Curvatura Laminae Elasticae*	वक्रता को बंकन आघूर्ण से संबंधित करने वाले “स्वरिणम प्रमेय” सहित प्रथम प्रकाशित इलास्टिका समाधान; 1690 के विपर्यय का कूट खोलता है
याकूब बर्नूली	1694	(Bernoulli, 1694)	*Responsio ad Dn. Hugenium*	हाइगेन्स की आलोचना का शालीन उत्तर, जो इलास्टिका समस्या के लिए उनकी ज्यामितीय विधि की व्यापकता का समर्थन करता है
योहान बर्नूली	1696	(Bernoulli, Johann, 1696)	*Problema novum*	*Acta Eruditorum* में ब्रैकिस्टोक्रोन चुनौती प्रस्तुत करते हैं; यह विचरण-कलन की संस्थापक समस्या बनती है
योहान बर्नूली	1697	(Bernoulli, Johann, 1697a)	*Curvatura radii in diaphanis non uniformibus*	प्रकाशिक सादृश्य और फर्मा सिद्धांत का उपयोग करने वाला ब्रैकिस्टोक्रोन समाधान; सिद्ध करता है कि चक्रज सर्वाधिक तीव्र अवरोह का वक्र है

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सारणी 9.14 (जारी)

लेखक	वर्ष	संदर्भ	शीर्षक	विवरण
अज्ञात (LBC)	1724	(Anonymous, 1724)	*Celebre catenariae problema*	“मध्यम रूप से नम्य” शृंखलाओं की अज्ञात चुनौती, जो पूर्णतः नम्य कैटेनरियों और दृढ प्रत्यास्थ वक्रों के बीच अंतराल को पाटती है
डेनियल बर्नूली	1728	(Bernoulli, Daniel, 1744)	*Methodus universalis determinandae curvaturae fili*	मूल आघूर्ण-वक्रता संबंध $M = B/r$ स्थापित करते हैं, जो समस्त धरन सिद्धांत की नींव बनता है
लियोनार्ड ऑयलर	1728	(Euler, 1728)	*Solutio problematis de invenienda curva*	नम्य और प्रत्यास्थ रेखाओं का प्रथम एकीकृत सिद्धांत; 1724 की चुनौती के उत्तर में डेनियल बर्नूली के शोधपत्र के ठीक बाद प्रकाशित
पीटर वान मुस्खेनब्रुक	1729	(Van Musschenbroek, 1729)	*Physicae experimentales*	ऑयलर के सिद्धांत से तीस वर्ष पूर्व $P \propto L^{-2}$ मापक्रम नियम को अनुभवतः स्थापित करने वाले प्रयोगात्मक व्याकुंचन अध्ययन
लियोनार्ड ऑयलर	1732	(Euler, 1732)	*Solutio problematis de invenienda curva*	प्रत्यास्थ परिकल्पना $M = v\kappa$ वाला सामान्य ज्यामितीय ढाँचा, जो प्रत्यास्थ और नम्य वक्र समस्याओं को एकल सिद्धांत में एकीकृत करता है
डेनियल बर्नूली	1742	(Bernoulli, Daniel, 1845)	ऑयलर को पत्र (20 अक्तूबर)	इलास्टिका के लिए ऊर्जा-न्यूनतमीकरण सिद्धांत प्रस्तावित करते हैं; प्रत्यास्थ ऊर्जा को $\int ds/R^2$ के रूप में व्यक्त करते और चतुर्थ-कोटि अवकल समीकरण व्युत्पन्न करते हैं
लियोनार्ड ऑयलर	1744	(Euler, 1744b)	*Methodus inveniendi lineas curvas*	ऑयलर–लाग्रांज समीकरण सहित विचरण-कलन का व्यवस्थित विकास; इस क्षेत्र को स्थापित करने वाला ऐतिहासिक ग्रंथ
लियोनार्ड ऑयलर	1744	(Euler, 1744a)	*Additamentum I: De curvis elasticis*	व्यवस्थित विचरणात्मक विधियों द्वारा नौ पृथक प्रजातियों (I–IX) के वर्गीकरण सहित पूर्ण इलास्टिका समाधान
याकूब बर्नूली	1744	(Bernoulli, Jakob, 1744b)	*Opera Omnia* (मरणोपरांत)	*Meditationes* की पूर्वतः अप्रकाशित इलास्टिका पांडुलिपियों सहित संपूर्ण संकलित कृतियाँ; गैब्रियल क्रामर द्वारा संपादित
लियोनार्ड ऑयलर	1759	(Euler, 1759)	*Sur la force des colonnes*	स्तंभ-व्याकुंचन सूत्र $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ व्युत्पन्न करते हैं; 1744 के कार्य की प्रजाति I का महत्त्व विलंब से पहचानते हैं
लियोनार्ड ऑयलर	1771	(Euler, 1771)	*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii*	प्रतिबल परिणामियों (सुपरशरेखीय बल, अभिलंब बल, बंकन आघूर्ण) सहित विरूपणीय रेखाओं का सामान्य सिद्धांत प्रस्तुत करने वाला महान एकीकरण

सांस्कृतिक संदर्भ (1670–1790)

यह अवधि उत्तरवर्ती बरोक, रोकोको और आरंभिक शास्त्रीय युगों को जोड़ती है—निरंकुशता का ऐसा काल जो क्रमशः प्रबोधनकालीन विवेकवाद को स्थान दे रहा था। विज्ञान, कला और दर्शन सभी में सामंजस्य, व्यवस्था और अनुपात के प्रति आकर्षण समान था, जिसे बाद में स्वच्छंदतावाद का पूर्वाभास देने वाली भावनात्मक अभिव्यंजकता ने समृद्ध किया।

इटली

संगीतकार: अंतोनियो विवाल्दी (1678–1741) ने बरोक जीवंतता का उदाहरण प्रस्तुत किया; दोमेनिको स्कारलात्ती (1685–1757) ने कुंजी-पटल वादन की कौशलता को आगे बढाया; जियोवानी बतिस्ता पेरगोलेसी (1710–1736) और जियोवानी पैज़िएल्लो (1740–1816) ने आरंभिक हास्य-ओपेरा को आकार देने में सहायता की।
टिप्पणी: इटली के खंडित राजदरबारों और गिरजाघरी संरक्षण ने कलाओं को बनाए रखा, यद्यपि वैज्ञानिक नेतृत्व उत्तर की ओर स्थानांतरित हो गया।

फ्रांस

संगीतकार: जाँ-बातिस्त लुली (1632–1687), फ्रांस्वा कूपरैं (1668–1733) और जाँ-फिलिप रामो (1683–1764) ने फ्रांसीसी बरोक को आकार दिया; पेरिस में सक्रिय क्रिस्टोफ़ विलिबाल्ड ग्लुक (1714–1787) ने ओपेरा में सुधार किया।
लेखक और दार्शनिक: वोल्तेयर, मोंतेस्क्यू, दिदरो और रूसो—जो संगीतकार भी थे—प्रबोधन के *philosophes* के मूर्त रूप थे। रासीन और मोलिएर ने शास्त्रीय भव्यता को आधुनिक नाटक से जोड़ा।
चित्रकार: अंतोआन वत्तो (1684–1721) ने रोकोको सुरुचि को परिष्कृत किया; फ्रांस्वा बुशे (1703–1770) और जाँ-ओनोरे फ्रागोनार (1732–1806) उसकी ऐंद्रिकता के प्रतिमान थे; जाक-लुई दाविद (1748–1825) ने नवशास्त्रवाद और आसन्न क्रांति की उद्घोषणा की।
टिप्पणी: पेरिस यूरोप की बौद्धिक राजधानी के रूप में उभरा; *Encyclopédie* ने समस्त ज्ञान को व्यवस्थित करने की वैज्ञानिक भावना प्रतिबिंबित की।

जर्मनी

संगीतकार: योहान सेबास्टियन बाख (1685–1750), जॉर्ज फ्रेडरिक हैंडल (1685–1759) और जॉर्ज फिलिप टेलेमान (1681–1767) आरंभिक शताब्दी में प्रमुख रहे; योसेफ हाइडन (1732–1809) और वोल्फ़गांग आमादेउस मोत्सार्ट (1756–1791, ऑस्ट्रियाई होते हुए भी जर्मन संस्कृति के केंद्र में) ने शास्त्रीय संक्रमण का नेतृत्व किया।
लेखक और दार्शनिक: गॉटफ्रीड विल्हेल्म लाइबनिट्स (1646–1716) ने विज्ञान और तत्त्वमीमांसा को जोड़ा; गॉटहोल्ड एफ्राइम लेसिंग (1729–1781) ने आधुनिक जर्मन नाटक का प्रवर्तन किया; क्लोपस्टॉक और हेर्डर ने स्वच्छंदतावाद का पूर्वाभास दिया; गेटे (1749–1832) और शिलर (1759–1805) ने इस अवधि का समापन किया।
कलाकार: अंतोन राफाएल मेंग्स (1728–1779) और योहान ज़ोफ़नी (1733–1810) ने परिष्कृत नवशास्त्रीय शैली को प्रोत्साहित किया।
टिप्पणी: पवित्र रोमन साम्राज्य के राजदरबारों के जटिल समूह ने विविध संरक्षण को समर्थन दिया, जो बर्लिन और गोटिंगेन की नई वैज्ञानिक अकादमियों के समानांतर था।

स्विट्ज़रलैंड

लेखक और चिंतक: जिनेवा के जाँ-जाक रूसो (1712–1778) ने यूरोपीय चिंतन और सांगीतिक सौंदर्यशास्त्र को रूपांतरित किया;
टिप्पणी: स्विस बौद्धिक जीवन ने प्रबोधनकालीन विश्वनागरिकता को मूर्त रूप दिया और विज्ञान तथा कला की सीमा पर बहुज्ञ उत्पन्न किए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संश्लेषण

समूचे यूरोप में कलाओं और विज्ञानों ने व्यवस्था और अनुपात की समान खोज साझा की, जिसे बाद में वैयक्तिकता और संवेदना ने संतुलित किया। न्यूटन, बर्नूली परिवार और ऑयलर का मार्गदर्शन करने वाले विवेकवाद ने नवशास्त्रवाद में दृश्य अभिव्यक्ति और प्रबोधन दर्शन में बौद्धिक मूर्त रूप पाया—विचार और कला की ऐसी एकता जिसने स्वच्छंदतावादी मोड़ से पूर्व के यूरोप को परिभाषित किया।



कारवाज्जो, होलोफेर्नेस का सिर काटती जूडिथ (1599-1602)

निर्णायक कार्रवाई का चरम क्षण—महान चुनौतियाँ अधिकतम तनाव के बिंदु पर समाधान की माँग करती हैं।

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

10 संतति यांत्रिकी: संरचनात्मक विश्लेषण की नींव

सारांश

यह अध्याय 19वीं शताब्दी में घटित प्रत्यास्थता के आणविक सिद्धांत से संतति सिद्धांतों की ओर प्रतिमान-परिवर्तन का परीक्षण करता है, जिसने आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण की गणितीय नींव स्थापित की। इस बौद्धिक क्रांति का आरंभ इस मान्यता से हुआ कि प्रत्यास्थ व्यवहार को पदार्थ-बिंदुओं के बीच केंद्रीय बलों पर आधारित सरल आणविक प्रतिरूपों द्वारा पर्याप्त रूप से समझाया नहीं जा सकता। इन प्रतिरूपों की विफलता—विशेषतः उनका यह पूर्वानुमान कि सभी पदार्थों के लिए पॉइसन अनुपात 1/4 होना चाहिए—ने क्षेत्र समीकरणों द्वारा शासित सतत माध्यम के रूप में पदार्थ की मूलभूत पुनर्संकल्पना को प्रेरित किया।

यह अध्याय फ्रांसीसी गणितीय संप्रदाय के योगदानों का अनुसरण करता है, विशेषतः कॉशी द्वारा प्रतिबल प्रदिश का प्रवर्तन, नाविय द्वारा सिद्धांत और व्यवहार का संश्लेषण तथा ग्रीन का क्रांतिकारी विभव-आधारित सूत्रीकरण। 1820-1860 की उल्लेखनीय अवधि में केंद्रित इन विकासों ने प्रत्यास्थता को अनुभवजन्य नियमों के संग्रह से कठोर गणितीय विज्ञान में रूपांतरित किया।

ऐतिहासिक आख्यान के अतिरिक्त यह अध्याय संतति यांत्रिकी की सार्वत्रिक नींव निर्मित करने वाले मूलभूत संतुलन नियम—द्रव्यमान, संवेग और ऊर्जा संरक्षण—प्रस्तुत करता है। संघटनात्मक सिद्धांत का विवेचन दर्शाता है कि पदार्थ-विशिष्ट व्यवहार को वस्तुनिष्ठता, पदार्थ सममिति और ऊष्मागतिकीय संगति के सिद्धांतों द्वारा कैसे अभिलक्षित किया जाता है। उभरते संतति ढाँचे—विशेषतः उसके ऊर्जा-आधारित रूपांतर—ने उन व्यावहारिक संरचनात्मक विश्लेषण विधियों को सैद्धांतिक आधार प्रदान किया जिन्हें अभियंता आगामी दशकों में विकसित करने वाले थे।

इस आख्यान के केंद्र में अपचयवादी यांत्रिक उपागमों और परिघटनात्मक संतति सूत्रीकरणों के बीच कार्यविधिगत तनाव है, जो सूक्ष्मदर्शी संरचना और स्थूलदर्शी व्यवहार के संबंध विषयक गहन दार्शनिक प्रतिबद्धताओं को प्रतिबिंबित करता है। दोनों उपागमों की सीमाएँ स्वीकार करते हुए संतति यांत्रिकी के पक्ष में हुए इस वाद-विवाद का समाधान दर्शाता है कि अनुभवजन्य प्रमाण और गणितीय सुरुचि संयुक्त रूप से वैज्ञानिक प्रगति का मार्गदर्शन कैसे कर सकते हैं।

10.1 प्रत्यास्थता के आणविक बनाम संतति सिद्धांत 355
10.1.1 अवलोकन 355
10.1.2 गैलीलियो से फ्रांसीसी आणविक संप्रदाय तक 356
10.1.3 संतति उपागम का उदय 356
10.1.4 तुलना सारणी 357
10.1.5 कौन-सा सिद्धांत प्रबल हुआ? . 357
10.1.6 ऐतिहासिक संदर्भ 358
10.2 संतति यांत्रिकी 361
10.3 परिचय 361
10.3.1 फ्रांसीसी क्रांतियाँ और आधुनिक प्रत्यास्थता का जन्म 361
10.3.2 संतति यांत्रिकी और प्रत्यास्थता सिद्धांत की नींव 362
10.4 पूर्ण गणितीय ढाँचा 372
10.4.1 ऑयलर और द्रव्यमान संरक्षण 373
10.4.2 कॉशी (1789-1857) और रैखिक संवेग-संतुलन 373
10.4.3 कोणीय संवेग-संतुलन 374
10.4.4 क्लाउसियस (1822-1888), थॉमसन (1824-1907) और ड्यूहेम (1861-1916) के ऊष्मागतिकीय नियम) 375
10.4.5 द्वितीय नियम (एंट्रॉपी असमता): 375
10.4.6 ऐतिहासिक विकास और आधुनिक संश्लेषण 376
10.5 संघटनात्मक सिद्धांत: पदार्थ व्यवहार . 377
10.5.1 सामान्य ढाँचा 377
10.5.2 नोल (1925-2017) और वस्तुनिष्ठता: पदार्थ निर्देश-तंत्र निरपेक्षता का सिद्धांत 378
10.5.3 ग्रीन (1793-1841) और अतिप्रत्यास्थता 378
10.5.4 फॉइग्ट (1850-1919) और पदार्थ सममिति 379

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

10.5.5 कोलमैन (1930-1992) और नोल: ऊष्मागतिकीय प्रतिबंध 380
10.5.6 ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्य: अनुभववाद से सिद्धांत तक 381
10.5.7 संरचनात्मक विश्लेषण से संबंध 382
10.5.8 नाम में क्या रखा है? यांत्रिकी और उसके साधकों का विकास 382
10.6 निष्कर्ष 391

10.1 प्रत्यास्थता के आणविक *बनाम* संतति सिद्धांत

19वीं शताब्दी के आरंभ तक ऑयलर, लाग्रांज और बर्नूली परिवार द्वारा विकसित विचरणात्मक सिद्धांतों तथा वैश्लेषिक यांत्रिकी ने यांत्रिक निकायों को समझने के लिए शक्तिशाली गणितीय साधन प्रदान कर दिए थे। फिर भी एक मूलभूत प्रश्न अनुत्तरित था: *ठोस पिंडों में प्रत्यास्थ विरूपण की प्रकृति क्या है?* दो प्रतिस्पर्धी उत्तर उभरे, जिनमें से प्रत्येक सूक्ष्मदर्शी संरचना और स्थूलदर्शी व्यवहार के संबंध विषयक अत्यंत भिन्न दार्शनिक प्रतिबद्धताओं को प्रतिबिंबित करता था।

प्रत्यास्थता के आणविक और संतति उपागमों के बीच वाद-विवाद केवल तकनीकी नहीं था—यह गणितीय भौतिकी में अधिक गहरे कार्यविधिगत विभाजन का प्रतिनिधित्व करता था। क्या प्रत्यास्थता को प्रथम सिद्धांतों से, पदार्थ की सूक्ष्मदर्शी संरचना संबंधी मान्यताओं से ऊपर की ओर निर्मित करते हुए, व्युत्पन्न किया जाना चाहिए? अथवा अंतर्निहित परमाणविक संरचना का संदर्भ दिए बिना क्षेत्र समीकरणों द्वारा सतत पिंडों का वर्णन करते हुए इसे परिघटनात्मक रूप से सूत्रबद्ध किया जाना चाहिए? इस प्रश्न ने आरंभिक 19वीं शताब्दी की अधिकांश यांत्रिकी को सक्रिय रखा और उस विषय के विकास को आकार दिया जिसे आज हम संतति यांत्रिकी के रूप में पहचानते हैं।

इस वाद-विवाद के समाधान के संरचनात्मक विश्लेषण के लिए गहन परिणाम हुए। अंततः प्रबल हुए संतति सूत्रीकरण—विशेषतः उसके विभव-आधारित रूपांतर, जो ऊर्जा सिद्धांतों पर आधारित था—ने वह सैद्धांतिक नींव प्रदान की जिस पर नावियर, क्लापेरों और परवर्ती अभियंताओं ने धरनों, पट्टिकाओं और ढाँचों के विश्लेषण की व्यावहारिक विधियाँ निर्मित कीं। अतः इस प्रतिमान-परिवर्तन को समझना यह जानने के लिए आवश्यक है कि आगामी अनुभागों में विचारित संतति यांत्रिकी में फ्रांसीसी योगदानों ने अपना विशिष्ट रूप क्यों ग्रहण किया।

हम आरंभ में दो प्रतिस्पर्धी सैद्धांतिक ढाँचों और उस प्रायोगिक संकट की रूपरेखा प्रस्तुत करते हैं जिसने आणविक उपागम के पुनर्मूल्यांकन को बाध्य किया।

10.1.1 अवलोकन

प्रत्यास्थता सिद्धांत ऐतिहासिक रूप से दो प्रमुख प्रतिमानों के माध्यम से विकसित हुआ:

1. **आणविक (अथवा यांत्रिक) सिद्धांत**: इसमें पदार्थ को यांत्रिक (प्रायः केंद्रीय) बलों द्वारा अन्योन्यक्रिया करने वाले पृथक कणों (परमाणुओं अथवा अणुओं) से निर्मित मानकर प्रत्यास्थता की व्याख्या की जाती है।
2. **संतति सिद्धांत**: इसमें पदार्थ को सतत माध्यम माना जाता है और प्रतिबल तथा विकृति जैसे क्षेत्र चरों द्वारा प्रत्यास्थ प्रतिक्रिया का वर्णन किया जाता है।

संतति सिद्धांत के भीतर दो पृथक सूत्रीकरण उभरे:

- **सामान्य संतति सूत्रीकरण**: प्रतिबल को विकृति के फलन के रूप में व्यक्त किया जाता है, यह माने बिना कि वह किसी विभव से व्युत्पन्न होता है।
- **विभव-आधारित सूत्रीकरण**: प्रतिबल को अदिश विकृति-ऊर्जा घनत्व फलन W से व्युत्पन्न किया जाता है, अर्थात् $\sigma = \partial W / \partial \varepsilon$। इस उपसमुच्चय को अतिप्रत्यास्थता भी कहा जाता है।

ये ढाँचे भिन्न दार्शनिक दृष्टियाँ प्रतिबिंबित करते हैं: आणविक सिद्धांत न्यूटनीय यांत्रिकी और अपचयवाद में निहित है; संतति सिद्धांत (विशेषतः विभव-आधारित रूप) विचरणात्मक सिद्धांतों और ऊष्मागतिकीय संगति पर आधारित है।

समीक्षा प्रति

10.1.2 गैलीलियो से फ्रांसीसी आणविक संप्रदाय तक

गैलीलियो ने तंतुमय सूत्रों से निर्मित पदार्थों का विचार प्रस्तुत किया (§7.3.1.2), जो सामर्थ्य और विरूपण के आरंभिक प्रतिरूपों पर प्रभावी मान्यता बना रहा। इस दृष्टि ने प्रत्यास्थता की कणिकीय व्याख्याओं की नींव रखी।

19वीं शताब्दी के आरंभ में फ्रांसीसी यांत्रिकीविदों—विशेषतः नावियर (1821), कॉशी (1822-1823) और पॉइसन (1829)—ने यह मानकर प्रत्यास्थता सूत्रबद्ध की कि पदार्थ केंद्रीय बलों द्वारा अन्योन्यक्रिया करने वाले पदार्थ-बिंदुओं से बना है। 1821 में नावियर ने आणविक मान्यताओं से संतति समीकरण सबसे पहले व्युत्पन्न किए और इस प्रकार कॉशी के अधिक व्यवस्थित विकास से पूर्वगामी रहे, यद्यपि बाद में कॉशी ने प्रतिबल और विकृति सिद्धांत के लिए अधिक सामान्य तथा कठोर ढाँचा प्रदान किया। आणविक यांत्रिकी और न्यूटनीय प्रथम सिद्धांतों में दृढता से निहित यह उपागम वैश्लेषिक प्रवृत्ति वाले फ्रांसीसी संप्रदाय के लिए अत्यंत आकर्षक था।

तथापि एक मूलभूत समस्या उभरी: आणविक सिद्धांत ने पूर्वानुमान किया कि पॉइसन अनुपात—एकाक्षीय भारण के अधीन अनुप्रस्थ और अक्षीय विकृति का अनुपात—सभी समदैशिक पदार्थों के लिए ठीक 1/4 होना चाहिए। यह पदार्थ-बिंदुओं के बीच केंद्रीय बल मानने का प्रत्यक्ष गणितीय परिणाम था। प्रयोगों ने इस पूर्वानुमान का निर्णायक खंडन किया और दिखाया कि पॉइसन अनुपात पदार्थों के बीच उल्लेखनीय रूप से बदलता है (कॉर्क के मान 0 के निकट हैं, जबकि रबर 0.5 के निकट पहुँचता है)। इस विसंगति और दो की आवश्यकता के स्थान पर केवल एक स्वतंत्र प्रत्यास्थ स्थिरांक के प्रतिरूप-पूर्वानुमान ने केंद्रीय-बल आणविक प्रतिरूपों की वैधता पर गंभीर संदेह उत्पन्न किया (Capecchi, Ruta, and Trovalusci, 2010 [PDF]; Todhunter and Pearson, 1893 [PDF])।

इस प्रकार आणविक सिद्धांत की केंद्रीय विफलता उसका यह पूर्वानुमान था कि सभी समदैशिक पदार्थों के लिए पॉइसन अनुपात 1/4 होना चाहिए—जो पदार्थ-बिंदुओं के बीच केंद्रीय बल मानने का परिणाम था। प्रयोगों ने दिखाया कि यह अनुपात उल्लेखनीय रूप से बदलता है (कॉर्क ≈ 0, रबर ≈ 0.5), जिससे आणविक ढाँचे का निर्णायक खंडन हुआ और यह प्रकट हुआ कि प्रकृति को आणविक सिद्धांत द्वारा पूर्वानुमानित एकल स्थिरांक के स्थान पर दो स्वतंत्र प्रत्यास्थ स्थिरांकों की आवश्यकता थी।

10.1.3 संतति उपागम का उदय

आणविक प्रतिरूपों की सीमाएँ पार करने के लिए 1830s-1850s के दौरान प्रत्यास्थता के संतति सूत्रीकरण क्रमशः प्रमुख हुए।

कॉशी ने सतत पिंड के भीतर प्रतिबल और विकृति प्रदिशों की नींव रखी तथा वह सूत्रीकरण दिया जो सामान्य संतति प्रतिरूप बनने वाला था। तथापि संतति यांत्रिकी का गणितीय ढाँचा विकसित करते समय भी उन्होंने आरंभ में आणविक अन्योन्यक्रियाओं पर आधारित यांत्रिक सादृश्य बनाए रखे और दोनों उपागमों में सामंजस्य स्थापित करने का प्रयास किया।

जॉर्ज ग्रीन ने प्रकाश और प्रत्यास्थता पर अपने उल्लेखनीय 1837-1839 शोधपत्र-क्रम में अभूतपूर्व विभव-आधारित उपागम प्रस्तुत किया। यह पहचानते हुए कि पदार्थ को शासित करने वाले वास्तविक आणविक नियम अज्ञात—और संभवतः उस समय अज्ञेय—थे, उन्होंने साहसपूर्वक प्रतिपादित किया कि अंतर्निहित आणविक क्रियाविधियों का संदर्भ दिए बिना अदिश विभव फलन द्वारा प्रत्यास्थ व्यवहार का वर्णन किया जा सकता है। विचरण-कलन और ऊर्जा सिद्धांतों पर प्रत्यक्षतः आधारित उनके प्रतिरूप ने दो स्वतंत्र प्रत्यास्थ स्थिरांक दिए—जो प्रायोगिक परिणामों से मेल खाते थे और आज अतिप्रत्यास्थता कहलाने वाले विषय के प्रथम पूर्ण सूत्रीकरण को चिह्नित करते थे (Green, 1839a; Green, 1839b)।

अनुभवजन्य सफलता के बावजूद ग्रीन के उपागम को आरंभिक प्रतिरोध मिला, विशेषतः फ्रांस में, जहाँ न्यूटनीय सिद्धांतों में निहित यांत्रिक व्याख्याओं को दार्शनिक वरीयता प्राप्त थी। लामे, क्लापेरों और युवा सेंट-वेनां जैसे प्रतिभाशाली सिद्धांतकार भी 1840s के दौरान यह ठीक-ठीक निर्धारित करने में संघर्षरत रहे कि पारंपरिक आणविक सिद्धांत क्यों विफल हुआ था, क्योंकि वे अपचयवादी आदर्श त्यागने के अनिच्छुक थे।[1]

[1]यह प्रथम सिद्धांतों में निहित वैश्लेषिक सुरुचि की फ्रांसीसी खोज और परिघटनात्मक पर्याप्तता तथा प्रायोगिक अनुरूपता पर बल देने वाले अधिक व्यवहारवादी ब्रिटिश अनुभववाद के बीच गहरा कार्यविधिगत अंतर प्रकट करता है। École Polytechnique द्वारा उदाहरणित फ्रांसीसी परंपरा गणितीय कठोरता और मूलभूत यांत्रिक नियमों से व्युत्पत्ति को महत्त्व देती थी। कैंब्रिज गणितीय ट्राइपॉस परंपरा (कैंब्रिज विश्वविद्यालय की पारंपरिक और अत्यंत कठोर परीक्षा-प्रणाली, जो

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

निर्णायक मोड क्रमशः आया। आरंभ में आणविक उपागमों के समर्थक **सेंट-वेनां**, 1850s तक संतति सिद्धांत के सबसे प्रभावी पक्षधरों में से एक बन गए। प्रत्यास्थता समस्याओं के समाधान के लिए अर्ध-प्रतिलोम विधि का उनका विकास और संतति पूर्वानुमानों का व्यवस्थित प्रायोगिक मान्यकरण सिद्धांत की विश्वसनीयता स्थापित करने में सहायक हुआ। Bravais, 1866 के स्फटिक-विज्ञान अध्ययनों ने यह दिखाकर प्रश्न को और स्पष्ट किया कि आणविक संरचना में सरल बिंदु-अन्योन्यक्रियाओं से कहीं अधिक जटिल ज्यामितीय विन्यास होते हैं, जिससे परमाणिवक और संतति वर्णनों के बीच वैचारिक अंतराल को पाटने में सहायता मिली।

10.1.4 तुलना सारणी

पक्ष	आणविक सिद्धांत	संतति सिद्धांत
तत्त्वमीमांसा	पृथक कण	सतत माध्यम
प्रतिबल की व्युत्पत्ति	अंतरापरमाणिवक बलों से	संघटनात्मक नियम से
संघटनात्मक रूप	केंद्रीय बलों पर आधारित	**(a)** सामान्य: $\sigma = f(\varepsilon)$ **(b)** विभव-आधारित: $\sigma = \partial W/\partial \varepsilon$
दर्शन	अपचयवादी, यांत्रिक	परिघटनात्मक, विचरणात्मक
प्रमुख समर्थक	हुक, नावियर, पॉइसन, कॉशी (आरंभिक), केल्विन, मैक्सवेल	कॉशी (सामान्य), ग्रीन (विभव), लामे, सेंट-वेनां, पिओला, किर्ख-हॉफ़
प्रत्यास्थ स्थिरांक	एक का पूर्वानुमान (पॉइसन अनुपात = 1/4)	दो स्वतंत्र स्थिरांकों की अनुमति
विषमदैशिकता का निरूपण	जालक संरचना से	W अथवा f की सममिति द्वारा आरोपित
ऐतिहासिक प्रभुत्व	1820s से 1840s तक	1850s से आगे
आधुनिक भूमिका	आणविक गतिकी और बहुमापक्रमी प्रतिरूपण का आधार	FEM और ठोस यांत्रिकी का मूल; अतिप्रत्यास्थता और परिमित विरूपण में विभव प्रतिरूप प्रमुख

तालिका 10.1: प्रत्यास्थता के आणविक और संतति सिद्धांतों का अंतर, दो संतति सूत्रीकरणों सहित।

10.1.5 कौन-सा सिद्धांत प्रबल हुआ?

19वीं शताब्दी के उत्तरार्ध तक प्रत्यास्थता का **संतति सिद्धांत** अभियांत्रिकी और अनुप्रयुक्त यांत्रिकी में निर्णायक रूप से प्रबल हो चुका था। आणविक प्रतिरूपों द्वारा प्रमुख प्रायोगिक परिणामों—विशेषतः पॉइसन अनुपात के प्रतिबंध और दो

मूलतः अध्ययन-पाठ्यक्रम और उसकी अंतिम परीक्षाओं दोनों को सूचित करती थी तथा गणित के छात्रों को “Wranglers” के रूप में क्रमांकित करने के लिए विशेष प्रसिद्ध थी) से प्रभावित ब्रिटिश उपागम, यदि प्रेक्षण से सहमत हों तो ग्रीन के विकृति-ऊर्जा फलन जैसे परिघटनात्मक संबंधों को यांत्रिक औचित्य के बिना भी प्रतिपादित करने के लिए अधिक तत्पर था। यह दार्शनिक विभाजन 19वीं शताब्दी भर यांत्रिकी के विकास को प्रभावित करता रहा और जब मूलभूत क्रियाविधियाँ अस्पष्ट थीं तब फ्रांसीसी क्रमशः परिघटनात्मक उपागमों की शक्ति को मान्यता देने लगे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रत्यास्थ स्थिरांकों की आवश्यकता—का पूर्वानुमान करने की विफलता तथा संतति सूत्रीकरणों पर आधारित शक्तिशाली वैश्लेषिक एवं अभिकलनात्मक विधियों के उदय ने सैद्धांतिक सहमति में मूलभूत परिवर्तन उत्पन्न किया।

संतति सूत्रीकरणों में *विभव-आधारित* प्रतिरूप ने प्रत्यास्थ (उत्क्रमणीय) पदार्थों के प्रतिरूपण के लिए विशेष प्रमुखता प्राप्त की, विशेषतः 20वीं शताब्दी में ऊष्मागतिकीय रूप से सुसंगत संघटनात्मक सिद्धांतों के विकास के बाद (जैसे ट्रूस्डेल और नोल, कोलमैन और नोल)। रिवलिन, मूनी और अन्य के कार्य द्वारा यह ढाँचा बड़े विरूपण और अरैखिक प्रत्यास्थता के लिए भी आवश्यक सिद्ध हुआ। विभव की आवश्यकता न रखने वाले सामान्य संतति प्रतिरूपों ने अप्रत्यास्थ, अपव्ययी और समय-निर्भर व्यवहार के प्रतिरूपण में लचीलापन प्रदान किया।

फिर भी आणविक सिद्धांतों ने 20वीं शताब्दी में सांख्यिकीय यांत्रिकी और बाद में अभिकलनात्मक आणविक गतिकी के माध्यम से उल्लेखनीय पुनर्जागरण अनुभव किया। आज वे बहुमापक्रमी उपागमों में संतति प्रतिरूपों के पूरक हैं, जहाँ परमाणविक अनुकरण संतति संघटनात्मक संबंधों को सूचित करते हैं—ऐसा संश्लेषण जो 19वीं शताब्दी के आणविक और संतति दोनों संप्रदायों को संतुष्ट करता।

10.1.6 ऐतिहासिक संदर्भ

योगदानकर्ता के अनुसार प्राथमिक स्रोत

लेखक	वर्ष	संदर्भ	शीर्षक	विवरण
नावियर				
नावियर	1821	(Navier, 1821)	*Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*	आणविक मान्यताओं से संतति समीकरणों की प्रथम व्युत्पत्ति
नावियर	1827	(Navier, 1827a)	*Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*	पूर्ण गणितीय विकास सहित विस्तृत संस्करण
कॉशी				
कॉशी	1822	(Cauchy, 1822)	*Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps*	प्रतिबल अवधारणा का आरंभिक सूत्रीकरण
कॉशी	1823	(Cauchy, 1823)	*Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps*	प्रतिबल प्रदिश का व्यवस्थित विकास
कॉशी	1828	(Cauchy, 1828 PDF)	*Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur*	प्रत्यास्थ पिंडों के सामान्य साम्य समीकरण
कॉशी	1829	(Cauchy, 1829)	*Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels*	केंद्रीय बलों सहित प्रत्यास्थता का आणविक सिद्धांत
पॉइसन				
पॉइसन	1829	(Poisson, 1829)	*Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*	व्यापक आणविक सिद्धांत; पॉइसन अनुपात का प्रवर्तन
पॉइसन	1831	(Poisson, 1831)	*Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques*	प्रत्यास्थ माध्यमों में तरंग-संचरण
ग्रीन				

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

लेखक	वर्ष	संदर्भ	शीर्षक	विवरण
ग्रीन	1828	(Green, 1828)	An Essay on the Application of Mathematical Analysis to Electricity and Magnetism	विभव फलन उपागम का प्रवर्तन
ग्रीन	1837	(Green, 1837)	On the Reflection and Refraction of Light	प्रकाशिक प्रत्यास्थता में आरंभिक अनुप्रयोग
ग्रीन	1839	(Green, 1839a)	On the Laws of Reflection and Refraction of Light	विकृति-ऊर्जा फलन का विकास
ग्रीन	1842	(Green, 1842)	On the Propagation of Light in Crystallized Media	विषमदैशिक पदार्थों तक विस्तार
फेरेर्स (संपा.)	1871	(Ferrers, 1871)	Mathematical Papers of George Green	टिप्पणी सहित संकलित कृतियाँ
लामे और क्लापेरों				
लामे & क्लापेरों	1831	(Lamé and Clapeyron, 1831)	*Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes*	ठोसों की आंतरिक साम्यावस्था पर संयुक्त कार्य
लामे & क्लापेरों	1833	(Lamé and Clapeyron, 1833)	*Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide*	शीतलन समस्याओं में प्रत्यास्थता का अनुप्रयोग
लामे	1852	(Lamé, 1852)	*Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*	व्यापक ग्रंथ; लामे स्थिरांक
क्लापेरों	1857	(Clapeyron, 1857)	*Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis*	संतत धरनों के लिए तीन आघूर्णों का प्रमेय
सेंट-वेनां				
सेंट-वेनां	1855	(Saint-Venant, 1855b)	*Mémoire sur la torsion des prismes*	अर्ध-प्रतिलोम विधि; मरोड़ सिद्धांत
सेंट-वेनां	1856	(Saint-Venant, 1855c)	*Mémoire sur la flexion des prismes*	प्रिज्मीय छड़ों के नमन तक विस्तार
सेंट-वेनां	1864	(Saint-Venant, 1864)	*Mémoire sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs*	प्रत्यास्थ सीमा से परे सुघट्यता
ब्रावे				
ब्रावे	1850	(Bravais, 1850)	*Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement*	नियमित बिंदु-वितरण; जालक सिद्धांत
ब्रावे	1866	(Bravais, 1866)	*Études cristallographiques*	स्फटिक संरचना और आणविक विन्यास
पूर्ववर्ती नींव				
गैलीली	1638	(Galilei, 1638)	*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*	पदार्थ-सामर्थ्य; बहिर्धारी धरन सिद्धांत
हुक	1678	(Hooke, 1678)	*De Potentia Restitutiva, or of Spring*	प्रत्यास्थता नियम (हुक नियम) का प्रथम सूत्रीकरण

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

लेखक	वर्ष	संदर्भ	शीर्षक	विवरण
ऑयलर	1744	(Euler, 1744b)	*Methodus Inveniendi Lineas Curvas* (परिशिष्ट: *De curvis elasticis*)	विचरण-कलन; प्रत्यास्थ वक्र
अन्य महत्त्वपूर्ण योगदानकर्ता				
पिओला	1833	(Piola, 1833)	*La meccanica de' corpi naturalmente estesi*	पिओला प्रतिबल प्रदिश; विचरणात्मक सूत्रीकरण
किर्ख-हॉफ़	1850	(Kirchhoff, 1859)	*Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*	बंकन और विस्तारण सहित पट्टिका सिद्धांत

द्वितीयक और ऐतिहासिक स्रोत

लेखक	वर्ष	संदर्भ	शीर्षक	विवरण
टॉड-हंटर & पियर्सन	1886–1893	(Todhunter and Pearson, 1893)	A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials	विक्टोरियाई युग का प्रामाणिक इतिहास
टिमोशेंको	1953	(Timoshenko, 1953)	History of Strength of Materials	विकास पर अभियांत्रिक परिप्रेक्ष्य
ट्रूस्डेल	1960	(Truesdell, 1960)	The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638–1788	17वीं-18वीं शताब्दी का व्यापक विश्लेषण
ट्रूस्डेल & नोल	1965	(Truesdell and Noll, 1965)	The Non-Linear Field Theories of Mechanics	आधुनिक संतति यांत्रिकी का ढाँचा
साबो	1977	(Szabó, 1977)	*Geschichte der mechanischen Prinzipien*	व्यापक इतिहास (जर्मन में)
ग्रैटन-गिनेस	1990	(Grattan-Guinness, 1990)	Convolutions in French Mathematics, 1800–1840	फ्रांसीसी संप्रदाय का विस्तृत विश्लेषण
बेनवेनुतो	1991	(Benvenuto, 1991a)	An Introduction to the History of Structural Mechanics	संरचनात्मक यांत्रिकी का द्विखंडी इतिहास
लव	1927	(Love, 1927)	A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity	ऐतिहासिक टिप्पणियों सहित शास्त्रीय ग्रंथ
कापेकी	2010	(Capecchi, Ruta, and Trovalusci, 2010)	History of Virtual Work Laws	यांत्रिकी के इतिहास पर आधुनिक परिप्रेक्ष्य

10.2 संतति यांत्रिकी

यह अध्याय संतति यांत्रिकी के वैश्लेषिक ढाँचे की ओर संक्रमण चिह्नित करता है, जिसमें भौतिक पिंडों को विस्थापन, विकृति और प्रतिबल जैसे क्षेत्र चरों द्वारा शासित सतत माध्यमों के रूप में प्रतिरूपित किया जाता है। उन वैचारिक और गणितीय विकासों पर बल दिया गया है जो उन्नीसवीं शताब्दी में परिपक्व हुए, जब यांत्रिकी मुख्यतः पृथक और ज्यामितीय तर्क से विश्लेषण पर आधारित व्यवस्थित सिद्धांत में विकसित हुई। ध्यान शासी समीकरणों, संघटनात्मक संबंधों और स्थायित्व निकषों के सूत्रीकरण पर केंद्रित है, जिनके माध्यम से भौतिक अंतर्ज्ञान सुसंगत और पूर्वानुमानकारी गणितीय संरचना में रूपांतरित हुआ।

यहाँ प्रस्तुत सामग्री विचारों के इस उत्तरवर्ती समेकन पर केंद्रित है और रेखांकित करती है कि आंतरिक बल, विरूपण, साम्यावस्था और स्थायित्व जैसी मूलभूत अवधारणाओं को संतति ढाँचे में कठोरता से कैसे परिभाषित और परस्पर संबद्ध किया गया। विवेचन जानबूझकर संक्षिप्त, किंतु गणितीय रूप से पूर्ण है और दर्शाता है कि संतति यांत्रिकी ने वह आधार कैसे प्रदान किया जिस पर आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण और अभियांत्रिकी सिद्धांत अंततः निर्मित हुए।

10.3 परिचय

10.3.1 फ्रांसीसी क्रांतियाँ और आधुनिक प्रत्यास्थता का जन्म

16वीं-18वीं शताब्दियों में ब्रिटिश, डच, जर्मन, इतालवी और स्विस प्राकृतिक दार्शनिकों अथवा वैज्ञानिकों का “प्रभुत्व” था। निस्संदेह मारियोट और कूलॉम सहित कुछ अन्य का हस्तक्षेप हुआ, किंतु फ्रांसीसी योगदान न्यून थे (यद्यपि पेरिस ने लाइबनिट्स और हाइगेन्स के लिए मिलन-स्थल प्रदान किया)।

तथापि 19वीं शताब्दी में फ्रांस ने व्यावहारिक समस्याओं पर वैज्ञानिक सिद्धांतों के अनुप्रयोग में विश्व का नेतृत्व किया; उसने क्रमशः 1747 और 1794 में प्रसिद्ध *École des Ponts et Chaussées* और *École Polytechnique* स्थापित किए थे। क्रांति के दौरान गास्पार मोंज द्वारा स्थापित दूसरे संस्थान का नेपोलियन I के अधीन 1804 में सैन्यीकरण हुआ। इन संस्थानों ने वह कसौटी प्रदान की जिसमें अनेक प्रतिष्ठित अभियंताओं ने अध्यापन अथवा अध्ययन किया। प्रथम संस्थान की सूची में कॉशी, क्लापेरों, फूरिये, लाग्रांज, लामेé (1795-1870), मोंज और पॉइसन सम्मिलित हैं; दूसरे में कॉशी (1789-1857), डार्सी, नावियर, फ्रेसीने और सेंट-वेनां(1797-1886)। कुछ स्थितियों में दोनों संस्थान एक ही व्यक्ति को अपना पूर्वछात्र मानते थे (नावियर और सेंट-वेनां)।

धरन-नमन और संतत धरनों पर नावियर का सैद्धांतिक कार्य, जो उनके 1826 के *Leçons* में पहली बार प्रकाशित हुआ, ने परवर्ती संरचनात्मक अभियांत्रिकी को प्रभावित करने वाली सैद्धांतिक नींव प्रदान की। सामान्य धरन सिद्धांत, जिसमें बर्नूली-नावियर परिकल्पना (कि समतल परिच्छेद समतल और उदासीन अक्ष के अभिलंब बने रहते हैं) नाम से प्रसिद्ध विचार सम्मिलित था, 19वीं शताब्दी के अधिकांश संरचनात्मक अभिकल्प का आधार बना। तथापि रॉबर्ट स्टीफेंसन के ब्रिटानिया सेतु (1850) जैसी प्रमुख परियोजनाएँ शुद्ध वैश्लेषिक विधियों के स्थान पर विलियम फेयरबेर्न के व्यापक प्रायोगिक परीक्षण और ईटन हॉजकिन्सन के अनुभवजन्य सूत्रों पर अत्यधिक निर्भर थीं। सेतु के नलिकाकार अभिकल्प का

मान्यकरण फेयरबेर्न के मिलवॉल आयरन वर्क्स में विस्तृत मापक्रमी प्रतिरूप परीक्षण द्वारा हुआ—जो उभरते सिद्धांत और व्यवहारवादी प्रायोगिक सत्यापन का संगम था (Clark and Stephenson, 1850; Charlton, 1982)।

10.3.2 संतति यांत्रिकी और प्रत्यास्थता सिद्धांत की नींव

10.3.2.1 कूलॉम (1736-1806) और अभियांत्रिक नींव

शार्ल-अगस्तैं द कूलॉम (1736-1806) ने सैद्धांतिक यांत्रिकी और व्यावहारिक अभियांत्रिकी के बीच अंतराल को पाटा। फ्रांसीसी उपनिवेशों में व्यापक सेवा देने वाले सैन्य अभियंता कूलॉम ने कठोर गणितीय विश्लेषण को सावधान प्रयोग से जोड़ा। उनका संस्मरण *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture* (1773) (Coulomb, 1773b) संरचनात्मक अभिकल्प के वैज्ञानिक उपागम में निर्णायक मोड़ चिह्नित करता है। अमूर्त यांत्रिक सिद्धांतों पर केंद्रित अपने समकालीनों के विपरीत कूलॉम ने निर्माण से प्रत्यक्षतः संबंधित समस्याओं पर विचार किया:

1. **मृदा दाब सिद्धांत**: कूलॉम ने प्रतिधारक भित्तियों पर पार्श्व मृदा दाब की गणना के लिए प्रथम तार्किक सिद्धांत विकसित किया। समतल विफलता पृष्ठ की मान्यता के साथ आभासी कार्य सिद्धांत का उपयोग करके उन्होंने व्युत्पन्न किया:

$$P = \frac{1}{2}\gamma H^2 K_a$$

   जहाँ K_a सक्रिय मृदा दाब गुणांक है। इस कार्य ने आधुनिक भू-तकनीकी अभियांत्रिकी की नींव रखी और आज भी वैचारिक रूप से मान्य है।

2. **घर्षण सिद्धांत**: व्यापक प्रयोगों द्वारा कूलॉम ने स्थापित किया कि घर्षण बल अभिलंब बल के समानुपाती और संपर्क क्षेत्रफल से स्वतंत्र है—उनके नाम वाला नियम $F = \mu N$। उन्होंने स्थैतिक और गतिज घर्षण में भेद किया तथा मृदा में संसंजन की भूमिका पहचानी और सूत्रबद्ध किया:

$$\tau = c + \sigma \tan \phi$$

   यह घर्षण नियम संपर्क अंतरापृष्ठों और मृदा-संरचना अन्योन्यक्रिया वाली संरचनाओं के विश्लेषण में मूलभूत बना।

3. **धरन और स्तंभ सिद्धांत**: कूलॉम ने नमन के अधीन धरनों के सामर्थ्य का अन्वेषण किया और प्रस्तावित किया कि तनन प्रतिबल के क्रांतिक मान तक पहुँचने पर विफलता होती है। स्तंभ-व्याकुंचन का उनका विश्लेषण ऑयलर की अपेक्षा कम परिष्कृत होते हुए भी उत्केंद्री भारण और पदार्थ की अपूर्णताओं जैसे उन व्यावहारिक पक्षों पर विचार करता था जिनकी ऑयलर के आदर्शीकृत सिद्धांत ने उपेक्षा की थी।

कूलॉम की विरासत केवल विशिष्ट सूत्रों में नहीं, बल्कि उनकी कार्यविधि में है: वैश्लेषिक यांत्रिकी का प्रायोगिक मान्यकरण और ज्यामितीय तर्क के साथ संयोजन। उनके कार्य ने प्रदर्शित किया कि तार्किक यांत्रिकी को वास्तविक अभियांत्रिक समस्याओं पर लागू किया जा सकता है; इसने École Polytechnique

के व्यावहारिक अभिविन्यास को प्रभावित किया और अभियांत्रिक यांत्रिकी को शुद्ध गणित से पृथक विषय के रूप में स्थापित किया।

19वीं शताब्दी ने यांत्रिकी के गणितीय निरूपण में उल्लेखनीय रूपांतरण देखा, जो कणों और दृढ पिंडों के पृथक विश्लेषण से विरूपणीय ठोसों के सतत निरूपण की ओर बढ़ा। यह क्रांति लगभग पूर्णतः फ्रांसीसी उपलब्धि थी, जो नवस्थापित *École Polytechnique* और *École des Ponts et Chaussées* के उर्वर बौद्धिक परिवेश से उभरी। कुछ दशकों की अवधि में प्रतिभाशाली गणितज्ञों और अभियंताओं के समूह ने वह सैद्धांतिक नींव स्थापित की जिस पर समस्त आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण आधारित है।

10.3.2.2 लाग्रांज (1736-1813) और वैश्लेषिक नींव

जोसेफ-लुई लाग्रांज (1736-1813), (§6.7.5) यद्यपि तूरीन में प्रशिक्षित हुए, उन्होंने अपने सर्वाधिक उत्पादक वर्ष पेरिस में बिताए और École Polytechnique की स्थापना पर वहाँ प्राध्यापक बने। उनके *Mécanique Analytique* (1788) (Lagrange, 1788 PDF) ने ज्यामितीय तर्क को विशुद्ध वैश्लेषिक विधियों से प्रतिस्थापित करके यांत्रिकी में क्रांति ला दी। संरचनात्मक यांत्रिकी के लिए विशेष महत्त्व के विषय थे:

> *विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §24.2.3 देखें*

1. **आभासी कार्य का सिद्धांत**: लाग्रांज के आभासी कार्य के सुरुचिपूर्ण सूत्रीकरण ने संरचनात्मक विश्लेषण की ऊर्जा विधियों की नींव प्रदान की। उन्होंने प्रदर्शित किया कि साम्यावस्था में स्थित निकाय के लिए किसी सुसंगत आभासी विस्थापन द्वारा सभी बलों का आभासी कार्य शून्य है:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

   यह सिद्धांत बाद में विस्थापन विधि और परिमित तत्त्व विश्लेषण के लिए मूलभूत बना।
2. **सामान्यीकृत निर्देशांक**: लाग्रांज के सामान्यीकृत निर्देशांकों के प्रवर्तन ने यांत्रिकी को ज्यामितीय प्रतिबंधों से मुक्त किया और न्यूनतम निर्देशांकों द्वारा जटिल निकायों का विश्लेषण संभव बनाया।
3. **विचरण-कलन**: यद्यपि इसे पहले ऑयलर ने विकसित किया था, लाग्रांज ने विचरणात्मक विधियों को व्यवस्थित किया, जो प्रत्यास्थता में सीमा-मान समस्याओं के सूत्रीकरण के लिए आवश्यक सिद्ध होने वाली थीं।

लाग्रांज के वैश्लेषिक उपागम ने फ्रांसीसी गणितज्ञों की अगली पीढ़ी को गहन रूप से प्रभावित किया और वह कार्यविधि स्थापित की जिसके द्वारा संतति यांत्रिकी विकसित होने वाली थी।

10.3.2.3 फूरिये की (1768-1830) गणितीय विधियाँ

École Polytechnique के एक अन्य महान विद्वान जाँ-बातिस्त जोसेफ फूरिये (1768-1830) ने अपना प्रमुख योगदान *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822) (Fourier, 1822) के माध्यम से दिया। ऊष्मा-चालन पर केंद्रित होते हुए भी फूरिये के कार्य के यांत्रिकी के लिए गहन निहितार्थ थे:

1. **आंशिक अवकल समीकरण**: फूरिये ने प्रदर्शित किया कि उपयुक्त परिसीमा प्रतिबंधों वाले आंशिक अवकल समीकरणों द्वारा भौतिक परिघटनाओं का वर्णन कैसे किया जा सकता है—यह कार्यविधि प्रत्यास्थता समस्याओं में सीधे अंतरित होने वाली थी।
2. **फूरिये श्रेणी**: त्रिकोणमितीय फलनों की अनंत श्रेणी के रूप में फलनों को निरूपित करने की उनकी विधि ने प्रत्यास्थता की सीमा-मान समस्याओं के समाधान के लिए शक्तिशाली साधन प्रदान किए।
3. **विमीय विश्लेषण**: भौतिक विमाओं के प्रति फूरिये के व्यवस्थित उपागम ने प्रत्यास्थ स्थिरांकों और पदार्थ गुणों के सूत्रीकरण को प्रभावित किया।

यद्यपि फूरिये ने प्रत्यास्थता पर प्रत्यक्ष कार्य नहीं किया, उनका गणितीय ढाँचा संतति यांत्रिकी के परवर्ती विकासों के लिए अपरिहार्य सिद्ध हुआ।

10.3.2.4 कॉशी (1789-1857) और प्रतिबल की अवधारणा

अगस्तैं-लुई कॉशी (1789-1857) (§6.7.6) प्रत्यास्थता के गणितीय सिद्धांत के प्रमुख वास्तुकार हैं। École Polytechnique में अपने कार्यकाल (1816-1830) के दौरान उन्होंने संस्मरणों की एक शृंखला लिखी जिसने प्रत्यास्थता को कठोर गणितीय विज्ञान के रूप में स्थापित किया (Cauchy, 1827; Cauchy, 1828 PDF)। उनका सर्वाधिक गहन योगदान प्रतिबल प्रदिश का प्रवर्तन था—एक ऐसी वैचारिक छलाँग जिसने ठोसों में आंतरिक बलों की प्रकृति संबंधी दो शताब्दियों के भ्रम का समाधान किया।

पूर्व-इतिहास: प्रतिबल के बिना बल

कॉशी से पूर्व प्राकृतिक दार्शनिक और अभियंता किसी बिंदु पर गहन राशि के रूप में प्रतिबल की स्पष्ट अवधारणा के बिना *परिच्छेदों पर बलों* का उपयोग करते थे। गैलीलियो ने बहिर्धारी धरन (1638) के अपने विश्लेषण में अनुप्रस्थ परिच्छेद के "परम प्रतिरोध" की चर्चा की—यह वितरित तीव्रता नहीं, कुल बल था। मारियोट (1686) और पारौं (1713) ने यह पहचानकर गैलीलियो के धरन सिद्धांत को परिष्कृत किया कि उदासीन अक्ष की एक ओर के "तंतु" तनन में और दूसरी ओर के तंतु संपीडन में होते हैं, किंतु वे अब भी प्रतिरोध को समग्र परिच्छेद का गुण मानते थे।

कूलॉम (1773) ने धरनों और प्रतिधारक भित्तियों के अपने विश्लेषण में परिच्छेद पर बलों के *वितरण* पर विचार करने का महत्त्वपूर्ण चरण लिया और यह विचार प्रस्तुत किया कि क्रांतिक तीव्रता पर पहुँचने पर विफलता होती है। फिर भी कूलॉम के पास किसी ठोस में किसी मनमाने बिंदु से होकर जाने वाले मनमाने तल पर आंतरिक बल की अवस्था का वर्णन करने के लिए सामान्य ढाँचा नहीं था।

मूलभूत कठिनाई यह थी: निश्चित बिंदुओं पर अथवा निश्चित पृष्ठों पर कार्य करने वाले बाह्य बलों के विपरीत, आंतरिक बल इस पर निर्भर करते हैं कि पिंड में *कौन-सा काल्पनिक काट* बनाया जाता है। सामान्यतः किसी बिंदु से गुजरने वाले कृषैतिज तल पर संचारित बल उसी बिंदु से गुजरने वाले ऊर्ध्वाधर तल पर संचारित बल से भिन्न होता है। जब उत्तर विचाराधीन तल पर निर्भर हो, तब किसी बिंदु पर "आंतरिक बल की अवस्था" को कैसे अभिलक्षित किया जा सकता है?

कॉशी का समाधान: प्रतिबल प्रदिश

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §O.2.2 देखें

कॉशी की प्रतिभा ने पहचाना कि यह प्रत्यक्ष जटिलता अंतर्निहित सरलता को छिपाती है। 1822-1827 के अपने संस्मरणों (Cauchy, 1822; Cauchy, 1823) में उन्होंने *कर्षण सदिश* $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ की अवधारणा प्रस्तुत की: एकक अभिलंब $\mathbf{n}$ वाले काल्पनिक पृष्ठ पर संचारित प्रति एकक क्षेत्रफल बल। कर्षण सदिश विचाराधीन बिंदु और पृष्ठ के अभिविन्यास दोनों पर निर्भर करता है।

इसके बाद कॉशी ने अत्यल्प चतुष्फलक की साम्यावस्था वाले सुंदर तर्क से सिद्ध किया कि *किसी भी* तल पर कर्षण सदिश की गणना केवल *तीन* परस्पर अभिलंब तलों पर कर्षण सदिशों से की जा सकती है। विशेषतः यदि हमें x, y और z अक्षों के अभिलंब तलों पर कर्षण ज्ञात हों, तो सरल रैखिक संक्रिया द्वारा किसी भी तल पर कर्षण ज्ञात किया जा सकता है।

चित्र 10.1: कॉशी का चतुष्फलक तर्क। पिंड से एक अत्यल्प चतुष्फलक काटा जाता है, जिसके तीन फलक निर्देशांक अक्षों के अभिलंब और एक आनत फलक का एकक अभिलंब $\mathbf{n}$ है। चतुष्फलक का आकार शून्य की ओर सिकुड़ते समय उसकी साम्यावस्था से संबंध $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ प्राप्त होता है।

कॉशी का चतुष्फलक तर्क

किसी पिंड के अभ्यंतर से काटे गए अत्यल्प चतुष्फलक पर विचार करें (चित्र 10.2)। तीन फलक निर्देशांक अक्षों के अभिलंब हैं और उनके क्षेत्रफल dA_x, dA_y, dA_z हैं; चौथा फलक एक तिर्यक तल है जिसका बहिर्मुखी एकक अभिलंब $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ और क्षेत्रफल dA है। ज्यामिति से:

$$dA_x = n_x \, dA, \quad dA_y = n_y \, dA, \quad dA_z = n_z \, dA$$

तीन निर्देशांक फलकों पर कर्षण सदिश $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)}$, $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)}$, $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)}$ हैं (ऋणात्मक, क्योंकि इन फलकों के बहिर्मुखी अभिलंब ऋणात्मक निर्देशांक दिशाओं में इंगित करते हैं)। आनत फलक पर कर्षण $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ है।

बल-साम्य के लिए आवश्यक है (पिंड बलों की उपेक्षा करते हुए, जिनका मापक्रम आयतन $\sim dA^{3/2}$ के समान है और चतुष्फलक सिकुड़ने पर पृष्ठ बलों $\sim dA$ की तुलना में नगण्य हो जाता है):

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} dA - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)} dA_x - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)} dA_y - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)} dA_z = \mathbf{0}$$

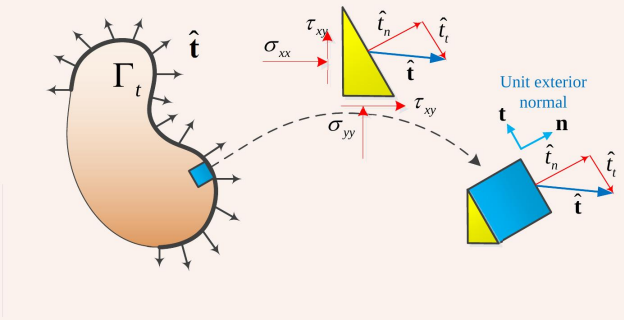
ज्यामितीय संबंधों को प्रतिस्थापित करके और dA से भाग देने पर:

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = n_x \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)} + n_y \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)} + n_z \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)}$$

यह **कॉशी का प्रमेय** है: किसी तल पर कर्षण एकक अभिलंब का रैखिक फलन है। प्रतिबल प्रदिश $\boldsymbol{\sigma}$ को ऐसे आव्यूह के रूप में परिभाषित करने पर, जिसके स्तंभ निर्देशांक तलों पर कर्षण सदिश हैं:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

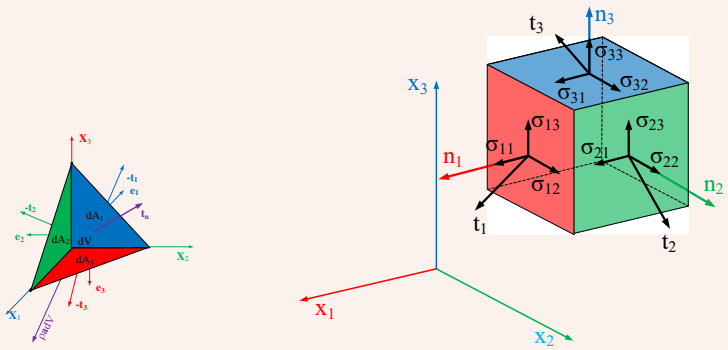


चित्र 10.2: पृष्ठ बल

समीकरण (10.3.2.4) बन जाता है:

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

यह एकल समीकरण कॉशी द्वारा दो-शताब्दी-पुरानी पहेली के समाधान को समाहित करता है। प्रमाण चतुष्फलक तर्क (चित्र 10.3) पर आधारित है: एक ऐसे अत्यल्प चतुष्फलक पर विचार करें जिसके तीन फलक निर्देशांक तलों के साथ संरेखित हैं—प्रत्येक पर संगत प्रतिबल घटक σ_{ij} कार्यरत हैं—और एक तिर्यक फलक ABC है जिसका बहिर्मुखी एकक अभिलंब $\boldsymbol{n}$ और क्षेत्रफल dA है। चतुष्फलक के किसी बिंदु तक सिकुड़ने पर प्रत्येक निर्देशांक दिशा में बल-साम्य के लिए आवश्यक है कि तिर्यक फलक पर कर्षण $\boldsymbol{t}$ केवल तीन निर्देशांक फलकों के कर्षणों के पदों में व्यक्त हो सके—जिससे ठीक रैखिक संबंध (10.3.2.4) प्राप्त होता है। प्रतिबल प्रदिश $\boldsymbol{\sigma}$ किसी बिंदु पर आंतरिक बल की अवस्था को पूर्णतः अभिलक्षित करता है; उस बिंदु से गुजरने वाले किसी भी तल पर कर्षण रैखिक संक्रिया (10.3.2.4) से प्राप्त होता है। प्रतिबल न तो अदिश है, न सदिश, बल्कि प्रदिश है—एकक अभिलंब सदिशों $\boldsymbol{n}$ से कर्षण सदिशों $\boldsymbol{t}$ तक का रैखिक प्रतिचित्र।



(a) चतुष्फलक (b) प्रतिबल

चित्र 10.3: कॉशी: चतुष्फलक से प्रतिबल तक

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रतिबल प्रदिश की सममिति

अत्यल्प चतुष्फलक (अथवा समतुल्य रूप से अत्यल्प घन) के आघूर्ण-साम्य पर विचार करके कॉशी ने प्रदर्शित किया कि प्रतिबल प्रदिश सममित है:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

इससे स्वतंत्र प्रतिबल घटकों की संख्या नौ से घटकर छह हो जाती है। सममिति के गहन परिणाम हैं: यह तीन परस्पर अभिलंब *प्रमुख दिशाओं* के अस्तित्व की प्रत्याभूति देती है, जिनके अनुदिश कर्षण पूर्णतः अभिलंब (कोई अपरूपण नहीं) होता है और संगत *प्रमुख प्रतिबल* σ_1, σ_2, σ_3 होते हैं।

मूलभूत समीकरण

प्रतिबल प्रदिश उपलब्ध होने पर कॉशी ने संतति यांत्रिकी के मूलभूत समीकरण व्युत्पन्न किए:

1. **साम्य समीकरण** (पिंड बलों की अनुपस्थिति में):
$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$
y और z दिशाओं के लिए सदृश समीकरण हैं। संहत संकेतन में: $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$।
2. **विकृति-विस्थापन संबंध** (लघु विरूपणों के लिए):
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
3. **संघटनात्मक संबंध**: कॉशी ने आरंभ में प्रतिबल को विकृति से संबंधित करने वाला आणविक सिद्धांत प्रस्तावित किया, यद्यपि परवर्ती शोधकर्ताओं ने उनके सूत्रीकरण को परिष्कृत किया।

मोहर का आलेखीय निरूपण (1882)

अपनी समस्त सुरुचि के बावजूद प्रतिबल प्रदिश व्यावहारिक अभियंताओं के लिए कुछ अमूर्त बना रहा। 1882 में क्रिश्चियन ओटो मोहर ने एक विलक्षण आलेखीय व्याख्या प्रदान की जिसने प्रदिश अवधारणा को सुगम बनाया (Mohr, 1882b)। **मोहर वृत्त** किसी बिंदु से गुजरने वाले तलों पर अभिलंब और अपरूपण प्रतिबलों के सभी संभव संयोजनों को वृत्त पर स्थित बिंदुओं के रूप में निरूपित करता है (अथवा तीन विमाओं में तीन वृत्तों पर)।

प्रमुख प्रतिबल $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ दिए होने पर किसी भी तल पर अभिलंब प्रतिबल σ और अपरूपण प्रतिबल τ संतुष्ट करते हैं:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

अधिकतम अपरूपण प्रतिबल प्रमुख दिशाओं से 45° पर स्थित तलों पर होता है और $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ के बराबर है। मोहर वृत्त अभियंताओं के लिए अपरिहार्य साधन बना, जिसने मनमाने तलों पर प्रतिबलों का

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तीव्र आलेखीय निर्धारण संभव किया और सुघट्यता तथा विभंग यांत्रिकी में विफलता निकषों का आधार निर्मित किया।

ऐतिहासिक महत्त्व

कॉशी द्वारा प्रतिबल प्रदिश का प्रवर्तन 18वीं शताब्दी के उपागम से पूर्ण विच्छेद था। विशिष्ट संरचनात्मक अवयवों (धरनों, स्तंभों) का अध्ययन करने के स्थान पर उन्होंने किसी भी सतत प्रत्यास्थ माध्यम पर लागू सामान्य क्षेत्र समीकरण सूत्रबद्ध किए। यह वैचारिक छलाँग—प्रतिबल को सदिश नहीं, प्रदिश मानना—संभवतः संतति यांत्रिकी के इतिहास की एकल सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण प्रगति थी।

जैसा ट्रूस्डेल ने देखा, कॉशी के कार्य ने यांत्रिकी को बलों के विज्ञान से क्षेत्रों के विज्ञान में रूपांतरित किया। सतत पिंड की अवस्था पृथक बिंदुओं पर पृथक बलों से नहीं, बल्कि अंतरिक्ष में सतत रूप से बदलने वाले प्रदिश क्षेत्रों से अभिलक्षित होती है। प्रतिबल के लिए सबसे पहले प्राप्त यह क्षेत्र-सैद्धांतिक दृष्टिकोण बाद में विकृति, तापमान, वेग और संतति भौतिकी की अन्य सभी राशियों तक विस्तारित हुआ।

प्रतिबल प्रदिश समस्त आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण की नींव बना हुआ है। चाहे वैश्लेषिक विधियाँ, परिमित तत्त्व अथवा आणविक गतिकी उपयोग की जाए, कॉशी प्रतिबल प्रदिश आंतरिक बलों के वर्णन की भाषा प्रदान करता है। अपने प्रवर्तन के दो शताब्दी बाद भी यह यांत्रिकी के इतिहास की सर्वाधिक परिणामकारी बौद्धिक उपलब्धियों में से एक है।

10.3.2.5 पॉइसन (1781-1840) अनुपात और कॉशी का सरलीकरण

École Polytechnique में कॉशी के सहकर्मी सिमेओं देनी पॉइसन (1781-1840) (§6.7.2) ने प्रत्यास्थता सिद्धांत में अनेक निर्णायक योगदान दिए (Poisson, 1829):

पॉइसन अनुपात:

पॉइसन ने खोजा कि किसी प्रत्यास्थ छड को अनुदैर्घ्य दिशा में खींचने पर वह पार्श्व दिशा में संकुचित होती है और पार्श्व से अनुदैर्घ्य विकृति का अनुपात एक पदार्थ स्थिरांक है:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{lateral}}}{\varepsilon_{\text{longitudinal}}}$$

उन्होंने आरंभ में आणविक प्रतिरूपों के आधार पर त्रुटिपूर्वक यह पूर्वानुमान किया कि सभी पदार्थों के लिए $\nu = 1/4$। यद्यपि यह विशिष्ट मान गलत था, पॉइसन अनुपात की अवधारणा प्रत्यास्थता सिद्धांत के लिए मूलभूत बनी।

समदैशिक पदार्थों के समीकरण:

पॉइसन ने समदैशिक पदार्थों के लिए कॉशी के समीकरण सरल किए और स्वतंत्र प्रत्यास्थ स्थिरांकों की संख्या घटाकर दो की। समदैशिक पदार्थ के लिए प्रतिबल-विकृति संबंध यह रूप ग्रहण करते हैं:

$$\sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ λ और μ लामे स्थिरांक हैं (यद्यपि यह संकेतन बाद में आया)।

पट्टिका सिद्धांत:

पॉइसन ने प्रत्यास्थ पट्टिकाओं का सिद्धांत भी विकसित किया, धरन सिद्धांत को दो विमाओं तक विस्तारित किया और पट्टिका-विक्षेप का शासी अवकल समीकरण व्युत्पन्न किया।

> *विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, अध्याय 33 देखें*

10.3.2.6 नावियर (1785-1836) का संश्लेषण और अनुप्रयोग

क्लोद-लुई-मारी-आँरी नावियर (1785-1836) (§6.7.3 कठोर सिद्धांतकार और व्यावहारिक अभियंता दोनों के रूप में विशिष्ट स्थान रखते हैं। École Polytechnique से स्नातक होने के बाद वे École des Ponts et Chaussées में प्राध्यापक बने, जहाँ उन्होंने 1819 से अपनी मृत्यु तक अध्यापन किया।

नावियर समीकरण:

कॉशी से स्वतंत्र और भिन्न विधियों का उपयोग करके नावियर ने प्रत्यास्थता के मूलभूत समीकरण व्युत्पन्न किए। पदार्थ-बिंदुओं के बीच आणविक बलों पर आधारित उनके उपागम से विस्थापनों के पदों में साम्य समीकरण (नावियर समीकरण) प्राप्त हुए:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

जहाँ $\mathbf{u}$ विस्थापन सदिश है और $\mathbf{f}$ पिंड बलों को निरूपित करता है।

सिद्धांत और व्यवहार के बीच सेतु:

नावियर की महान उपलब्धि कॉशी और पॉइसन के अमूर्त गणित को व्यावहारिक अभियांत्रिक अनुप्रयोगों में रूपांतरित करना थी। उनका *Résumé des Leçons* (Navier, 1826 PDF) अभियांत्रिकी छात्रों के लिए मानक पाठ बना और इसमें प्रस्तुत थे:

- प्रत्यास्थता के सामान्य समीकरणों से व्युत्पन्न धरन सिद्धांत
- व्यावहारिक संरचनाओं में प्रतिबलों और विक्षेपों की गणना की विधियाँ
- संतत और आबद्ध धरनों का विश्लेषण (अनुभाग 11.3.1 में विस्तार से विवेचित)
- सेतुओं, भवनों और मशीनों में अनुप्रयोग

नावियर ने प्रदर्शित किया कि संतति यांत्रिकी का परिष्कृत गणित व्यावहारिक अभिकल्प सूत्र प्रदान कर सकता है। उनका प्रसिद्ध धरन समीकरण:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$$

संरचनात्मक अभियंताओं के लिए मानक साधन बना—कॉशी के क्षेत्र समीकरणों का प्रत्यक्ष वंशज, फिर भी व्यावहारिक गणना के लिए पर्याप्त सरल।

10.3.2.7 लामे (1795-1870) के प्रत्यास्थ स्थिरांक

École Polytechnique और बाद में École des Ponts et Chaussées के प्राध्यापक गैब्रियल लामे (1795-1870) ने प्रत्यास्थता सिद्धांत में गणितीय कठोरता और भौतिक अंतर्दृष्टि का समावेश किया (Lamé, 1852)।

लामे स्थिरांक:

लामे ने समदैशिक पदार्थों के संघटनात्मक समीकरणों को आज उनके नाम वाले दो प्रत्यास्थ स्थिरांकों λ और μ के पदों में पुनः सूत्रबद्ध किया। सामान्यीकृत हुक नियम बन जाता है:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

जहाँ δ_{ij} क्रोनेकर डेल्टा है और आइंस्टीन योग संधि लागू होती है।

ये स्थिरांक अधिक परिचित अभियांत्रिक प्राचलों से संबंधित हैं:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

समाधान विधियाँ:

लामे ने प्रत्यास्थता समस्याओं के समाधान की व्यवस्थित विधियाँ विकसित कीं, विशेषतः ज्यामितीय सममिति वाले पिंडों (गोलों, बेलनों) के लिए। दाबाधीन स्थूल-भित्ति बेलनों पर उनका कार्य शास्त्रीय समाधान बना हुआ है, जिसका दाब-पात्र अभिकल्प में व्यापक उपयोग होता है।

10.3.2.8 सेंट-वेनां (1797-1886) और अर्ध-प्रतिलोम विधि

अदेमार जाँ क्लोद बारे द सेंट-वेनां (1797-1886) (§6.7.8) 19वीं शताब्दी के फ्रांसीसी प्रत्यास्थता सिद्धांत की परिणति का प्रतिनिधित्व करते हैं। École Polytechnique के स्नातक सेंट-वेनां ने अपने अधिकांश जीवनवृत्त में École des Ponts et Chaussées में कार्य किया, जहाँ उन्होंने नावियर के *Résumé* के तृतीय संस्करण का संपादन और व्यापक टिप्पणी की (Navier, 1864 PDF)।

अर्ध-प्रतिलोम विधि:

सेंट-वेनां का महान नवोन्मेष प्रत्यास्थता समस्याओं के समाधान की अर्ध-प्रतिलोम विधि थी। परिसीमा प्रतिबंधों सहित अवकल समीकरणों के पूर्ण निकाय (जो प्रायः असंभव था) को हल करने के स्थान पर वे:

1. भौतिक अंतर्ज्ञान के आधार पर प्रतिबल अथवा विस्थापन क्षेत्र का रूप मानते
2. सत्यापित करते कि यह मान्यता साम्य और सुसंगति संतुष्ट करती है
3. परिसीमा प्रतिबंधों से शेष अज्ञात निर्धारित करते

इस व्यवहारवादी उपागम से पूर्वतः दुरूह समस्याओं के समाधान प्राप्त हुए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सेंट-वेनां सिद्धांत:

संभवतः उनका सर्वाधिक प्रभावशाली योगदान उनके नाम वाला सिद्धांत था:

> saint-venant1855memoire
> यदि किसी प्रत्यास्थ पिंड के पृष्ठ के छोटे भाग पर कार्य करने वाले बलों को उसी भाग पर कार्य करने वाले बलों के किसी अन्य स्थैतिक रूप से समतुल्य निकाय से प्रतिस्थापित किया जाए, तो भारण का यह पुनर्वितरण स्थानीय रूप से प्रतिबलों में पर्याप्त परिवर्तन उत्पन्न करता है, किंतु उन दूरियों पर प्रतिबलों पर नगण्य प्रभाव डालता है जो उस पृष्ठ के रैखिक विमाओं की तुलना में बड़ी हैं जिस पर बल परिवर्तित किए गए हैं।

इस सिद्धांत ने व्यावहारिक समस्याओं में सरलीकृत परिसीमा प्रतिबंधों के उपयोग को उचित ठहराया और अभियांत्रिक विश्लेषण के लिए मूलभूत बना।

शास्त्रीय समाधान:

सेंट-वेनां के संस्मरणों ने निम्नलिखित समस्याओं के निर्णायक समाधान प्रदान किए:

- **अवृत्ताकार शैफ्टों का मरोड़** (Saint-Venant, 1855a): उन्होंने दिखाया कि मरोड़ के दौरान अनुप्रस्थ परिच्छेद समतल नहीं रहते (वार्पन), तथा विभिन्न अनुप्रस्थ परिच्छेद आकृतियों के लिए शासी समीकरण और समाधान व्युत्पन्न किए।
- **धरनों का बंकन**: उन्होंने अपरूपण विरूपण को सम्मिलित करते हुए धरन सिद्धांत को परिष्कृत किया और प्रारंभिक सिद्धांत में संशोधन प्रदान किए।
- **प्रिज़्मीय छड़ों का नमन, तनन और संपीडन**: उनके व्यापक विवेचन ने विभिन्न भारण स्थितियों को समान गणितीय ढाँचे के अंतर्गत एकीकृत किया।

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §23.2 देखें

10.3.2.9 क्लापेरों (1799-1864) की ऊर्जा विधियाँ

ऊष्मागतिकीविदों में अधिक प्रसिद्ध बेनोआ-पॉल-एमील क्लापेरों (1799-1864) ने ऊर्जा विधियों पर अपने कार्य द्वारा संरचनात्मक यांत्रिकी में मूलभूत योगदान दिए (Clapeyron, 1834)।

क्लापेरों प्रमेय:

प्रत्यास्थ ऊर्जा पर उनका प्रमेय (अनुभाग 48.1.6.1 में विस्तार से विवेचित) कहता है कि प्रत्यास्थ पिंड में विकृति ऊर्जा बाह्य बलों द्वारा किए गए कार्य के आधे के बराबर है:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \frac{1}{2}\int_S \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}\, dS + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\, dV$$

यह परिणाम संरचनात्मक विश्लेषण की ऊर्जा विधियों के लिए मूलभूत बना।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

त्रि-आघूर्ण समीकरण:

संतत धरनों पर क्लापेरों के परवर्ती कार्य (Clapeyron, 1857 PDF) (अनुभाग 11.3.2) ने ऐसे व्यावहारिक साधन प्रदान किए जिन्होंने अमूर्त प्रत्यास्थता सिद्धांत और संरचनात्मक अभियांत्रिक व्यवहार के बीच अंतराल को पाटा।

10.3.2.10 परिप्रेक्ष्य में फ्रांसीसी उपलब्धि

उल्लेखनीय रूप से संक्षिप्त अवधि (लगभग 1820-1860) में केंद्रित इन फ्रांसीसी गणितज्ञों और अभियंताओं के योगदानों ने संतति यांत्रिकी तथा प्रत्यास्थता सिद्धांत को कठोर गणितीय विज्ञानों के रूप में स्थापित किया। अनेक कारकों ने इस असाधारण उपलब्धि को संभव बनाया:

1. **संस्थागत समर्थन**: École Polytechnique ने ऐसा विशिष्ट परिवेश प्रदान किया जहाँ गणितज्ञ और अभियंता साथ-साथ कार्य करते थे और अध्यापन के समान अनुसंधान को स्पष्टतः महत्त्व दिया जाता था।
2. **गणितीय परिष्कार**: लाग्रांज से उत्पन्न गणितीय विश्लेषण की फ्रांसीसी परंपरा ने प्रत्यास्थता के आंशिक अवकल समीकरणों के सूत्रीकरण और समाधान के लिए आवश्यक साधन प्रदान किए।
3. **अभियांत्रिक प्रेरणा**: सिविल अभियांत्रिकी की व्यावहारिक माँगों—विशेषतः रेलवे और सेतु निर्माण—ने सैद्धांतिक विकासों के लिए प्रेरणा और मान्यकरण दोनों प्रदान किए।
4. **बौद्धिक निरंतरता**: प्रत्येक पीढ़ी ने अपने पूर्ववर्तियों के कार्य पर व्यवस्थित रूप से निर्माण किया; छात्र प्राध्यापक बने और अपने गुरुओं के कार्य को आगे बढ़ाया।

1860 तक संतति यांत्रिकी की सैद्धांतिक नींव मूलतः पूर्ण थी। शताब्दी के शेष भाग की चुनौती इस गणितीय ढाँचे को संरचनात्मक विश्लेषण की उन व्यावहारिक विधियों में रूपांतरित करना थी जो उन्नत गणितीय भौतिकी में प्रवीणता की आवश्यकता के बिना व्यावहारिक अभियंताओं के लिए सुलभ हों।

10.4 पूर्ण गणितीय ढाँचा

संतति यांत्रिकी के ऐतिहासिक विकास और प्रमुख योगदानकर्ताओं का परीक्षण करने के बाद अब हम उन गणितीय नींवों को प्रस्तुत करते हैं जिन पर समस्त सिद्धांत आधारित है। मूलभूत संतुलन नियम—द्रव्यमान, संवेग और ऊर्जा संरक्षण—किसी विशिष्ट पदार्थ से परे सार्वत्रिक भौतिक सिद्धांतों का प्रतिनिधित्व करते हैं। पदार्थ-विशिष्ट संघटनात्मक संबंधों (अगले अनुभाग में विवेचित) के साथ संयुक्त ये नियम सतत माध्यमों के व्यवहार के वर्णन के लिए पूर्ण गणितीय ढाँचा प्रदान करते हैं।

इन संतुलन नियमों का आधुनिक रूप में सूत्रीकरण 19वीं शताब्दी भर क्रमशः हुआ, यद्यपि उनकी भौतिक अंतर्वस्तु पहले समझ ली गई थी। 1820s में कॉशी के कार्य ने रैखिक संवेग-संतुलन को उस रूप में स्थापित किया जिसे हम आज पहचानते हैं। ऊष्मागतिकीय नियम, यद्यपि 1840s-1850s में क्लाउसियस, थॉमसन (लॉर्ड केल्विन) और अन्य द्वारा सूत्रबद्ध किए गए, 20वीं शताब्दी में ड्यूहेम, ट्रूस्डेल और कोलमैन के कार्य तक संतति यांत्रिकी में व्यवस्थित रूप से सम्मिलित नहीं हुए।

प्रारूप

10.4.1 ऑयलर और द्रव्यमान संरक्षण

द्रव्यमान संरक्षण का सिद्धांत कहता है कि किसी संतति के भीतर द्रव्यमान न तो उत्पन्न किया जा सकता है, न नष्ट, (Euler, 1757b) (Euler, 1757a)। पदार्थ आयतन $V(t)$, जो पदार्थ के साथ गतिमान पृष्ठ $S(t)$ से परिसीमित है, के लिए यह सिद्धांत इस प्रकार व्यक्त होता है:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0$$

जहाँ $\rho(\mathbf{x}, t)$ स्थिति $\mathbf{x}$ और समय t पर द्रव्यमान घनत्व है।

रेनॉल्ड्स परिवहन प्रमेय लागू करने और यह ध्यान देने पर कि किसी भी मनमाने पदार्थ आयतन के लिए समाकल शून्य होना चाहिए, स्थानीय रूप प्राप्त होता है:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

जहाँ $\mathbf{v}$ वेग क्षेत्र है। यह *सांतत्य समीकरण** है।

असंपीड्य पदार्थ ($\rho = \text{constant}$) के लिए यह सरल होकर बनता है:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

पदार्थ कणों का अनुसरण करने वाले लाग्रांजीय वर्णन में द्रव्यमान संरक्षण विशेष रूप से सुरुचिपूर्ण रूप ग्रहण करता है:

$$\rho_0 \, dV_0 = \rho \, dV$$

जहाँ अधोलिखित 0 निर्देश विन्यास की राशियाँ सूचित करता है, अथवा समतुल्य रूप से:

$$\rho_0 = \rho J$$

जहाँ $J = \det(\mathbf{F})$ विरूपण प्रवणता प्रदिश $\mathbf{F}$ का जैकोबियन है।

10.4.2 कॉशी (1789-1857) और रैखिक संवेग-संतुलन

रैखिक संवेग-संतुलन किसी संतति पर लागू न्यूटन के द्वितीय नियम का प्रतिनिधित्व करता है। पदार्थ आयतन के लिए संवेग-परिवर्तन की दर आरोपित बलों के योग के बराबर होती है:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \, dV = \int_{S(t)} \mathbf{t} \, dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \, dV$$

जहाँ $\mathbf{t}$ पृष्ठ पर कर्षण सदिश (प्रति एकक क्षेत्रफल बल) है और $\mathbf{b}$ प्रति एकक द्रव्यमान पिंड बलों (जैसे गुरुत्व) को निरूपित करता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कॉशी की मूलभूत अंतर्दृष्टि यह पहचानना था कि किसी बिंदु पर कर्षण सदिश पृष्ठ के बहिर्मुखी एकक अभिलंब $\mathbf{n}$ पर रैखिक रूप से निर्भर करता है:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

जहाँ $\boldsymbol{\sigma}$ कॉशी प्रतिबल प्रदिश है। *कॉशी प्रतिबल सिद्धांत* नामक यह संबंध संतति यांत्रिकी के आधार-स्तंभों में से एक है।

अपसरण प्रमेय लागू करने और समाकल रूप का स्थानीकरण करने से कॉशी के गति-समीकरण प्राप्त होते हैं:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}$$

जहाँ D/Dt पदार्थ काल-अवकलज को सूचित करता है। घटक रूप में (आइंस्टीन योग का उपयोग करते हुए):

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i$$

प्रत्यास्थ-स्थैतिकी समस्याओं (कोई त्वरण नहीं) के लिए यह घटकर बनता है:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

ये वे साम्य समीकरण हैं जिन्हें कॉशी, नावियर और उनके समकालीनों ने 1820s में व्युत्पन्न किया था।

10.4.3 कोणीय संवेग-संतुलन

कोणीय संवेग-संतुलन कहता है कि पदार्थ आयतन के कोणीय संवेग के परिवर्तन की दर आरोपित आघूर्णों के बराबर होती है:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}\, dV = \int_{S(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t}\, dS + \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}\, dV$$

वितरित युग्म-प्रतिबलों (पिंड युग्मों) की अनुपस्थिति में यह सिद्धांत उल्लेखनीय रूप से सरल, किंतु गहन परिणाम देता है: कॉशी प्रतिबल प्रदिश सममित होना चाहिए:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{T} \quad \text{or} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

प्रतिबल प्रदिश के नौ स्वतंत्र घटकों को घटाकर छह करने वाली यह सममिति शर्त कॉशी ने पहचानी थी और प्रत्यास्थता सिद्धांत के समस्त परवर्ती विकासों के लिए मूलभूत है। इसका तात्पर्य है कि किसी बिंदु पर प्रतिबल अवस्था को तीन अभिलंब प्रतिबलों और तीन अपरूपण प्रतिबलों द्वारा पूर्णतः वर्णित किया जा सकता है।

प्रतिबल प्रदिश की सममिति के गहन निहितार्थ हैं। यह प्रत्येक बिंदु पर तीन परस्पर लंबकोणीय प्रमुख प्रतिबल दिशाओं के अस्तित्व की प्रत्याभूति देती है, जो $\boldsymbol{\sigma}$ के आइगेन-सदिशों के साथ संरेखित होती हैं और जिनके अनुदिश केवल अभिलंब प्रतिबल कार्य करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

10.4.4 क्लाउसियस (1822-1888), थॉमसन (1824-1907) और ड्यूहेम (1861-1916) के ऊष्मागतिकीय नियम)

10.4.4.1 प्रथम नियम (ऊर्जा संतुलन):

रूडोल्फ क्लाउसियस (Clausius, 1850; Clausius, 1854; Clausius, 1879), विलियम थॉमसन (Thomson, 1848; Thomson, 1851; Thomson, 1855) और ड्यूहेम (Duhem, 1891; Duhem, 1911; Duhem, 1893)।

ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम तापीय प्रभावों को सम्मिलित करने के लिए यांत्रिक ऊर्जा संतुलन का विस्तार करता है। पदार्थ आयतन के लिए कुल ऊर्जा (गतिज और आंतरिक) के परिवर्तन की दर किए गए कार्य की दर तथा ऊष्मा आपूर्ति की दर के योग के बराबर होती है:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+e\right) dV = \int_{S(t)} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\, dS + \int_{V(t)} \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\, dV - \int_{S(t)} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS + \int_{V(t)} \rho r\, dV$$

जहाँ e प्रति एकक द्रव्यमान विशिष्ट आंतरिक ऊर्जा, $\mathbf{q}$ ऊष्मा अभिवाह सदिश और r प्रति एकक द्रव्यमान ऊष्मा आपूर्ति है।

कॉशी के प्रतिबल सिद्धांत का उपयोग और अपसरण प्रमेय लागू करने से स्थानीय रूप प्राप्त होता है:

$$\rho\frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla\cdot\mathbf{q} + \rho r$$

जहाँ $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)$ विरूपण-दर प्रदिश (वेग प्रवणता का सममित भाग) है।

पद $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ प्रतिबल शक्ति—वह दर जिस पर प्रतिबल प्रति एकक आयतन कार्य करते हैं—को निरूपित करता है। उत्क्रमणीय विरूपण से गुजरते प्रत्यास्थ पदार्थों के लिए यह कार्य प्रत्यास्थ विकृति ऊर्जा के रूप में संचित होता है और पूर्णतः पुनः प्राप्त किया जा सकता है।

विशुद्ध यांत्रिक समस्याओं में, जहाँ तापीय प्रभाव नगण्य हैं, प्रथम नियम यांत्रिक ऊर्जा संबंधी कथन में घट जाता है। प्रत्यास्थ-स्थैतिकी में, जहाँ गतिज ऊर्जा शून्य और प्रक्रियाएँ अर्ध-स्थैतिक हैं, बाह्य बलों द्वारा किया गया कार्य विकृति ऊर्जा के रूप में संचित होता है:

$$W_{\text{ext}} = U$$

यह ऊर्जा संतुलन क्लापेरों प्रमेय और संरचनात्मक विश्लेषण में केंद्रीय बने विचरणात्मक सिद्धांतों का आधार है।

10.4.5 द्वितीय नियम (एंट्रॉपी असमता):

क्लाउसियस ने ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम (एंट्रॉपी असमता) सूत्रबद्ध किया

ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम क्लाउसियस-ड्यूहेम असमता के माध्यम से पदार्थ व्यवहार पर मूलभूत प्रतिबंध लगाता है। अपने स्थानीय रूप में यह कहता है कि एंट्रॉपी उत्पादन की दर अनऋणात्मक होनी चाहिए:

$$\rho\frac{D\eta}{Dt} - \frac{\rho r}{\theta} + \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) \geq 0$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ η प्रति एकक द्रव्यमान विशिष्ट एंट्रॉपी और θ परम तापमान है।

r को विलोपित करने के लिए प्रथम नियम का उपयोग और पदों का विस्तार करने से अपव्यय असमता प्राप्त होती है:

$$\rho\left(\frac{D\psi}{Dt}+\eta\frac{D\theta}{Dt}\right)-\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}+\frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta\le 0$$

जहाँ $\psi=e-\theta\eta$ हेल्महोल्ट्ज मुक्त ऊर्जा है।

समतापी प्रक्रियाओं ($\theta=$ constant) से गुजरते प्रत्यास्थ पदार्थों के लिए द्वितीय नियम अपेक्षा करता है कि प्रतिबल कार्य मुक्त ऊर्जा के परिवर्तन की दर के बराबर हो:

$$\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}=\rho\frac{D\psi}{Dt}$$

यह ऊष्मागतिकीय प्रतिबंध ग्रीन के उस अभिगृहीत की सैद्धांतिक नींव प्रदान करता है कि प्रत्यास्थ पदार्थों के लिए विकृति-ऊर्जा घनत्व फलन विद्यमान होता है—ऐसा संबंध जिसे आणविक सिद्धांतकार प्रथम सिद्धांतों से व्युत्पन्न करने में संघर्षरत थे। ऊष्मागतिकीय उपागम आणविक-स्तरीय विवरणों को सुरुचिपूर्ण ढंग से दरकिनार करता है और कहता है कि विभव के अस्तित्व की प्रत्याभूति के लिए ऊर्जा संचय तथा उत्क्रमणीयता पर्याप्त हैं।

10.4.6 ऐतिहासिक विकास और आधुनिक संश्लेषण

इन संतुलन नियमों का सूत्रीकरण एक शताब्दी से अधिक अवधि में विकसित हुआ:

- **1820s (कॉशी, नावियर)**: प्रत्यास्थ ठोसों के लिए रैखिक संवेग-संतुलन स्थापित किया और प्रतिबल साम्य समीकरण व्युत्पन्न किए। प्रतिबल प्रदिश की सममिति पहचानी।
- **1840s-1850s (क्लाउसियस, थॉमसन, रैंकिन)**: आरंभ में ऊष्मा इंजनों और ऊष्मागतिकीय चक्रों के संदर्भ में स्थूलदर्शी निकायों के लिए ऊष्मागतिकी के प्रथम तथा द्वितीय नियम सूत्रबद्ध किए।
- **1850s-1860s (सेंट-वेनां, थॉमसन)**: ऊष्मागतिकीय अवधारणाओं को संतति यांत्रिकी में सम्मिलित करना आरंभ किया, यद्यपि मुख्यतः तरलों और ऊष्मा चालन के लिए।
- **1900s-1910s (ड्यूहेम)**: सतत माध्यमों की ऊष्मागतिकी व्यवस्थित रूप से सूत्रबद्ध की और अपव्ययी प्रक्रियाओं के लिए आंतरिक चरों की अवधारणा प्रस्तुत की।
- **1960s (ट्रूस्डेल, कोलमैन, नोल)**: आधुनिक ताप-यांत्रिक ढाँचा स्थापित किया और दिखाया कि क्लाउसियस-ड्यूहेम असमता तथा कोलमैन-नोल प्रक्रिया के माध्यम से द्वितीय नियम संघटनात्मक संबंधों को कैसे प्रतिबंधित करता है।

20वीं शताब्दी में विकसित आधुनिक संश्लेषण ने प्रदर्शित किया कि उचित रूप से सूत्रबद्ध संघटनात्मक संबंधों (अनुभाग 10.5) के साथ संयुक्त ये संतुलन नियम संतति यांत्रिकी के लिए पूर्ण और सुसंगत ढाँचा प्रदान करते हैं। संतुलन नियम सार्वत्रिक हैं—वे सभी सतत माध्यमों पर लागू होते हैं—जबकि संघटनात्मक संबंध पदार्थ-विशिष्ट व्यवहार ग्रहण करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रत्यास्थता सिद्धांत के लिए प्रमुख अंतर्दृष्टि यह है कि केवल संतुलन नियम किसी पिंड की प्रतिक्रिया निर्धारित करने के लिए अपर्याप्त हैं। संवेग-संतुलन के तीन समीकरण प्रतिबल के छह स्वतंत्र घटकों (सममिति के कारण) के लिए केवल तीन समीकरण देते हैं। इस अंतराल को प्रतिबल को विरूपण से जोड़ने वाले संघटनात्मक संबंधों द्वारा भरा जाता है, जो अगले अनुभाग का विषय है।

10.5 संघटनात्मक सिद्धांत: पदार्थ व्यवहार

पिछले अनुभाग में प्रस्तुत संतुलन नियम सभी सतत माध्यमों पर सार्वत्रिक रूप से लागू होते हैं—वे पदार्थ के प्रकार से परे मूलभूत भौतिक सिद्धांत व्यक्त करते हैं। फिर भी ये नियम अकेले यह पूर्वानुमान नहीं कर सकते कि कोई विशिष्ट पदार्थ आरोपित बलों के प्रति कैसे प्रतिक्रिया करेगा। इस्पात और रबर दोनों समान संवेग-संतुलन समीकरण संतुष्ट करते हैं, फिर भी समान भारण स्थितियों के अधीन उनका व्यवहार मूलतः भिन्न होता है। यह पदार्थ-विशिष्ट व्यवहार *संघटनात्मक संबंधों*—शुद्धगतिक राशियों (विरूपण, विकृति-दर) को गतिक राशियों (प्रतिबल, ऊष्मा अभिवाह) से जोड़ने वाले गणितीय व्यंजकों—द्वारा ग्रहण किया जाता है।

संघटनात्मक सिद्धांत का विकास संतति यांत्रिकी की महान बौद्धिक उपलब्धियों में से एक है। आणविक और परिघटनात्मक उपागमों के बीच 19वीं शताब्दी के वाद-विवाद ने अंततः सभी पदार्थों में संघटनात्मक प्रतिरूपण को निर्देशित करने वाले सामान्य सिद्धांत दिए। ये सिद्धांत—वस्तुनिष्ठता, पदार्थ सममिति, ऊष्मागतिकीय संगति—सैद्धांतिक तर्क और प्रायोगिक प्रेक्षण दोनों से क्रमशः उभरे (Truesdell and Noll, 1965)।

10.5.1 सामान्य ढाँचा

प्रत्यास्थ पदार्थ का संघटनात्मक संबंध प्रतिबल को विरूपण के फलन के रूप में व्यक्त करता है। अपने सर्वाधिक सामान्य रूप में:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$$

जहाँ $\mathbf{F}$ विरूपण प्रवणता प्रदिश, $\mathbf{X}$ पदार्थ बिंदु और $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ संघटनात्मक फलन को सूचित करता है।

यह देखने में सरल कथन गहन प्रश्नों को छिपाता है:

- फलन $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ को कौन-सा रूप ग्रहण करना चाहिए?
- भौतिकी इस फलन पर कौन-से प्रतिबंध लगाती है?
- पदार्थ सममिति प्रतिक्रिया को कैसे बाधित करती है?
- प्रतिबल को विभव (विकृति-ऊर्जा फलन) से कब व्युत्पन्न किया जा सकता है?

इन प्रश्नों के उत्तर सैद्धांतिक विश्लेषण, प्रायोगिक प्रेक्षण और ऊष्मागतिकीय तर्क के संयोजन से उभरे। अब हम संघटनात्मक संबंधों को शासित करने वाले प्रमुख सिद्धांतों का परीक्षण करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

10.5.2 नोल (1925-2017) और वस्तुनिष्ठता: पदार्थ निर्देश-तंत्र निरपेक्षता का सिद्धांत

किसी भी संघटनात्मक संबंध की मूलभूत आवश्यकता *वस्तुनिष्ठता* अथवा *पदार्थ निर्देश-तंत्र निरपेक्षता* है: पदार्थ की प्रतिक्रिया प्रेक्षक से स्वतंत्र होनी चाहिए। यदि हम प्रयोगशाला को घुमाएँ अथवा दृढ-पिंड गति अध्यारोपित करें, तो पदार्थ के भीतर आंतरिक बल नहीं बदलने चाहिए। 1958 में वाल्टर नोल द्वारा व्यवस्थित रूप से सूत्रबद्ध यह सिद्धांत (Noll, 1958) संघटनात्मक संबंधों के रूप पर आवश्यक प्रतिबंध प्रदान करता है।

गणितीय रूप से समय-निर्भर घूर्णन $\mathbf{Q}(t)$ और स्थानांतरण $\mathbf{c}(t)$ द्वारा संबंधित दो प्रेक्षकों पर विचार करें:

$$\mathbf{x}^{*} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t)$$

वस्तुनिष्ठता सिद्धांत अपेक्षा करता है कि कॉशी प्रतिबल इस प्रकार रूपांतरित हो:

$$\boldsymbol{\sigma}^{*} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^{T}$$

देखने में निरापद इस आवश्यकता के गहन निहितार्थ हैं। इसका तात्पर्य है कि प्रतिबल विरूपण प्रवणता $\mathbf{F}$ (जो वस्तुनिष्ठ नहीं है) पर प्रत्यक्षतः निर्भर नहीं हो सकता, बल्कि केवल विरूपण के वस्तुनिष्ठ मापों पर निर्भर हो सकता है। उचित माप दक्षिण कॉशी-ग्रीन विरूपण प्रदिश है:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{T}\mathbf{F}$$

अथवा उसका प्रतिलोम $\mathbf{C}^{-1}$, अथवा ग्रीन-लाग्रांज विकृति प्रदिश:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

लघु विरूपणों के लिए, जहाँ $\mathbf{F} \approx \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$, यह परिचित अत्यल्प विकृति प्रदिश में घट जाता है:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{T})$$

इस प्रकार वस्तुनिष्ठता सिद्धांत संघटनात्मक संबंधों के सूत्रीकरण के लिए मूलभूत दिशा देता है: केवल वस्तुनिष्ठ शुद्धगतिक मापों का उपयोग करें।

10.5.3 ग्रीन (1793-1841) और अतिप्रत्यास्थता

प्रत्यास्थ पदार्थ वह है जिसके लिए वर्तमान प्रतिबल केवल वर्तमान विरूपण पर निर्भर करता है और विरूपण इतिहास अथवा विरूपण-दर से स्वतंत्र होता है:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}) \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{C})$$

अधिक प्रतिबंधित वर्ग *अतिप्रत्यास्थ* अथवा *ग्रीन-प्रत्यास्थ पदार्थों* का है, जिनके लिए प्रतिबल अदिश विकृति-ऊर्जा घनत्व फलन W से व्युत्पन्न होता है:

$$W = W(\mathbf{C})$$

तब प्रतिबल इससे निर्धारित होता है:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{J}} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T$$

जहाँ $J = \det(\mathbf{F})$।

लघु विरूपणों के लिए यह अत्यधिक सरल हो जाता है। यदि $W = W(\boldsymbol{\varepsilon})$, तब:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

यह ठीक 1839 का ग्रीन का अभिगृहीत है (Green, 1839a)—कि प्रत्यास्थ प्रतिबल को विभव फलन से व्युत्पन्न किया जा सकता है। ग्रीन द्वारा परिघटनात्मक रूप से प्रस्तुत विचार को बाद में ऊष्मागतिकीय औचित्य मिला: समतापी प्रत्यास्थ विरूपणों के लिए हेल्महोल्ट्ज मुक्त ऊर्जा विकृति-ऊर्जा फलन के रूप में कार्य करती है और द्वितीय नियम उसके अस्तित्व की प्रत्याभूति देता है।

सामान्य प्रत्यास्थ और अतिप्रत्यास्थ पदार्थों का भेद निर्णायक है:

- **सामान्य प्रत्यास्थ**: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon})$, जहाँ $\mathbf{f}$ मनमाना है
- **अतिप्रत्यास्थ**: $\boldsymbol{\sigma} = \partial W / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$, जहाँ W अदिश फलन है

अतिप्रत्यास्थ पदार्थों का एक विशेष गुण है: प्रतिबल-विकृति संबंध सममित होते हैं। यदि हम लिखें:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

तब अतिप्रत्यास्थता अपेक्षा करती है:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij}$$

यह सममिति—*व्युत्क्रम संबंधों* के नाम से ज्ञात—स्वतंत्र प्रत्यास्थ स्थिरांकों की संख्या घटाती है। सामान्य विषमदैशिक प्रत्यास्थ पदार्थ के लिए $6 \times 6 = 36$ स्वतंत्र घटक हो सकते हैं, जिन्हें C_{ijkl} द्वारा निरूपित किया जाता है। प्रतिबल और विकृति दोनों की सममिति इसे घटाकर 21 करती है, किंतु अतिप्रत्यास्थता (W का अस्तित्व) सर्वाधिक सामान्य स्थिति के लिए इसे आगे घटाकर 21 स्वतंत्र स्थिरांक करती है।

10.5.4 फॉइग्ट (1850-1919) और पदार्थ सममिति

वास्तविक पदार्थों में प्रायः आंतरिक संरचना—स्फटिक जालक, तंतु अभिविन्यास, स्तरण—होती है जो उनकी प्रतिक्रिया को दिशा-निर्भर बनाती है। *पदार्थ सममिति* इस दिशात्मक निर्भरता को अभिलक्षित करती है। स्फटिक निकायों और उनकी प्रत्यास्थ सममितियों का व्यवस्थित वर्गीकरण वोल्डेमार फॉइग्ट ने स्फटिक भौतिकी पर अपने व्यापक ग्रंथ में स्थापित किया (Voigt, 1910)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पदार्थ सममिति निर्देश विन्यास का ऐसा घूर्णन $\mathbf{G}$ है जो पदार्थ प्रतिक्रिया को अपरिवर्तित छोड़ता है:

$$W(\mathbf{G}^T\mathbf{C}\mathbf{G}) = W(\mathbf{C})$$

ऐसे सभी घूर्णनों का समुच्चय पदार्थ *सममिति समूह* बनाता है। भिन्न सममिति समूह भिन्न पदार्थ वर्गों को अभिलक्षित करते हैं:

- **त्रिनतिक** (कोई सममिति नहीं): 21 स्वतंत्र स्थिरांक
- **एकनतिक** (एक सममिति तल): 13 स्वतंत्र स्थिरांक
- **लंबदिशिक** (तीन परस्पर अभिलंब सममिति तल): 9 स्वतंत्र स्थिरांक
- **अनुप्रस्थ समदैशिक** (घूर्णन सममिति का एक अक्ष): 5 स्वतंत्र स्थिरांक
- **समदैशिक** (सभी घूर्णन सममितियाँ हैं): 2 स्वतंत्र स्थिरांक

समदैशिक पदार्थों—जिनमें कोई अधिमान्य दिशा नहीं होती—के लिए W केवल $\mathbf{C}$ के निश्चर राशियों पर (अथवा समतुल्य रूप से $\boldsymbol{\varepsilon}$ के निश्चरों पर) निर्भर कर सकता है। लघु विरूपणों के लिए सर्वाधिक सामान्य रूप है:

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

जहाँ $I_1 = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$, $I_2 = \tfrac{1}{2}[(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)]$, $I_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon})$।

लघु विकृतियों वाली रैखिक प्रत्यास्थता के लिए विकृति में केवल द्विघाती पद रखने पर:

$$W = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$$

जिससे प्राप्त होता है:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$

यह ठीक सामान्यीकृत हुक नियम है, जिसमें लामे स्थिरांक λ और μ आते हैं—वह संघटनात्मक संबंध जिसे लामे ने 1852 में सूत्रबद्ध किया और जो रैखिक प्रत्यास्थता सिद्धांत पर प्रभावी है। दो स्वतंत्र स्थिरांक (λ, μ) अथवा समतुल्य रूप से (E, ν) समदैशिक प्रत्यास्थ प्रतिक्रिया के लिए न्यूनतम आवश्यक हैं; यह ठीक वह निष्कर्ष है जिसे आणविक सिद्धांत के प्रायोगिक खंडनों ने संतति संप्रदाय पर आरोपित किया।

10.5.5 कोलमैन (1930-1992) और नोल: ऊष्मागतिकीय प्रतिबंध

ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम वस्तुनिष्ठता और पदार्थ सममिति द्वारा आरोपित प्रतिबंधों के अतिरिक्त संघटनात्मक संबंधों पर मूलभूत प्रतिबंध लगाता है। समतापी विरूपणों से गुजरते प्रत्यास्थ पदार्थों पर लागू करने पर क्लाउसियस-ड्यूहेम असमता अनेक निर्णायक आवश्यकताएँ देती है। संघटनात्मक संबंधों को बाधित करने के लिए ऊष्मागतिकीय प्रतिबंधों का व्यवस्थित उपयोग कोलमैन और नोल ने अपने ऐतिहासिक 1963 के शोधपत्र में विकसित किया (Coleman and Noll, 1963)।

प्रति प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. विकृति ऊर्जा का अस्तित्व: समतापी प्रक्रियाओं के लिए द्वितीय नियम अपेक्षा करता है कि प्रतिबल कार्य पूर्ण अवकल हो। यह प्रतिबल को विभव से व्युत्पन्न करने की आवश्यकता के समतुल्य है—और ऊष्मागतिकीय सिद्धांतों से ग्रीन के अभिगृहीत का औचित्य सिद्ध करता है।

2. विकृति ऊर्जा की उत्तलता: पदार्थ स्थायित्व के लिए विकृति-ऊर्जा फलन $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ उत्तल होना चाहिए। गणितीय रूप से:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \xi_{ij} \xi_{kl} > 0 \quad \text{for all non-zero } \boldsymbol{\xi}$$

यह सुनिश्चित करता है कि स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह धनात्मक निश्चित हो, जो स्थायी साम्य विन्यासों के लिए आवश्यक शर्त है।

3. प्रत्यास्थ स्थिरांकों पर प्रतिबंध: समदैशिक रैखिक प्रत्यास्थता के लिए ऊष्मागतिकीय स्थायित्व अपेक्षा करता है:

$$\mu > 0 \tag{10.1}$$

$$3\lambda + 2\mu > 0 \tag{10.2}$$

ये परिचित अभियांत्रिक आवश्यकताओं में रूपांतरित होते हैं:

$$E > 0 \quad \text{(positive Young's modulus)} \tag{10.3}$$

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad \text{(bounds on Poisson's ratio)} \tag{10.4}$$

ऊपरी सीमा $\nu < 1/2$ असंपीड्यता सीमा के अनुरूप है, जबकि $\nu > -1$ धनात्मक विकृति ऊर्जा सुनिश्चित करती है। वास्तविक पदार्थ इन सीमाओं को संतुष्ट करते हैं और अधिकांश अभियांत्रिक पदार्थों के लिए $0 < \nu < 0.5$ होता है।

निम्न सीमा आणविक सिद्धांत के $\nu = 1/4$ को सार्वत्रिक मानने वाले पूर्वानुमान को अस्वीकार करती है—प्रयोग कॉर्क के लिए 0 के निकट मान दिखाते हैं, जबकि रबर 0.5 के निकट पहुँचता है। जहाँ आणविक सिद्धांत ऐसा नहीं कर सका, वहाँ ऊष्मागतिकीय ढाँचा इस भिन्नता को स्वाभाविक रूप से समायोजित करता है।

10.5.6 ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्य: अनुभववाद से सिद्धांत तक

संघटनात्मक सिद्धांत का विकास प्रयोग, सिद्धांत और गणितीय अमूर्तन के बीच अन्योन्यक्रिया दर्शाता है:

17वीं-18वीं शताब्दियाँ (हुक, ऑयलर): बल और विरूपण के बीच समानुपातिकता का अनुभवजन्य प्रेक्षण। स्प्रिंगों के लिए हुक नियम, ऑयलर द्वारा धरनों और स्तंभों तक सामान्यीकृत।

1820s-1840s (नावियर, कॉशी, पॉइसन): आणविक प्रतिरूपों से संघटनात्मक संबंध व्युत्पन्न करने के प्रयास। इनके परिणामस्वरूप गलत पूर्वानुमान (एकल प्रत्यास्थ स्थिरांक, $\nu = 1/4$) हुए, किंतु गणितीय ढाँचा स्थापित हुआ।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1837-1839 (ग्रीन): विकृति-ऊर्जा फलन का परिघटनात्मक अभिगृहीत। प्रयोग से मेल खाते दो प्रत्यास्थ स्थिरांकों का पूर्वानुमान। प्रथम-सिद्धांत व्युत्पत्ति चाहने वाले फ्रांसीसी यांत्रिकवादियों का प्रतिरोध।

1850s-1860s (सेंट-वेनां, थॉमसन, ब्रावे): यह मान्यता कि आणविक संरचना कल्पित संरचना से अधिक जटिल है। संतति उपागम की बढ़ती स्वीकृति।

1960s-1970s (ट्रूस्डेल, नोल, कोलमैन): आधुनिक तार्किक ताप-यांत्रिकी। वस्तुनिष्ठता, पदार्थ सममिति और ऊष्मागतिकीय प्रतिबंधों का व्यवस्थित सूत्रीकरण।

आधुनिक समझ इन ऐतिहासिक धाराओं का संश्लेषण करती है: संघटनात्मक संबंधों को वस्तुनिष्ठता (निर्देश-तंत्र निरपेक्षता) संतुष्ट करनी चाहिए, पदार्थ सममिति का सम्मान करना चाहिए, ऊष्मागतिकीय रूप से अनुमेय होना चाहिए और प्रत्यास्थ पदार्थों के लिए आदर्शतः विभव फलन से व्युत्पन्न होना चाहिए। आणविक विवरणों के स्थान पर ये सिद्धांत संघटनात्मक प्रतिरूपण को शासित करते हैं।

10.5.7 संरचनात्मक विश्लेषण से संबंध

19वीं शताब्दी के संरचनात्मक अभियंताओं के लिए संघटनात्मक सिद्धांत ने कॉशी के अमूर्त क्षेत्र समीकरणों और व्यावहारिक गणनाओं के बीच निर्णायक संबंध प्रदान किया। किसी पदार्थ का प्रतिबल-विकृति संबंध स्थापित हो जाने पर—चाहे ग्रीन के ऊर्जा फलन से अथवा लामे के स्थिरांकों से—अभियंता निम्नलिखित कर सकते थे:

1. शुद्धगतिक संबंधों को संयुक्त करना ($\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$)
2. संघटनात्मक संबंधों के साथ ($\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$)
3. और साम्य समीकरणों के साथ ($\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$)

ताकि विस्थापन के पदों में शासी अवकल समीकरण व्युत्पन्न किए जा सकें। प्रत्यास्थ गतिकी के लिए नावियर के समीकरण ठीक इसी संयोजन का प्रतिनिधित्व करते हैं। धरनों के लिए इसी उपागम ने परिचित समीकरण $EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$ दिया।

इस प्रकार संघटनात्मक संबंध अमूर्त संतति सिद्धांत और संरचनात्मक विश्लेषण की व्यावहारिक विधियों के बीच अंतराल को पाटते हैं—वे विधियाँ जिन्हें नावियर, क्लापेरों और उनके उत्तराधिकारी अनिर्धार्य संरचनाओं के विश्लेषण के लिए विकसित करने वाले थे, जो आगामी अध्यायों का विषय है।

10.5.8 नाम में क्या रखा है? यांत्रिकी और उसके साधकों का विकास

नाम में क्या रखा है? जिसे हम गुलाब कहते हैं / वह किसी अन्य नाम से भी उतना ही मधुर महकेगा—किंतु यांत्रिक विज्ञानों में नामों का गहन महत्त्व है। आधुनिक साहित्य में *संतति यांत्रिकी*, *प्रत्यास्थता*, *ठोसों की यांत्रिकी* और *पदार्थों की यांत्रिकी* पदों का प्रायः परस्पर-विनिमेय उपयोग होता है, जिससे पर्याप्त भ्रम उत्पन्न होता है। यह पारिभाषिक अस्पष्टता केवल बौद्धिक इतिहास नहीं, बल्कि व्यावसायिक पहचान के स्वयं रूपांतरण को प्रतिबिंबित करती है: सत्रहवीं शताब्दी के *प्राकृतिक दार्शनिकों* और *वास्तुकार-*

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अभियंताओं से, उन्नीसवीं शताब्दी में पेशेवर *अभियंता* और *यांत्रिकीविद्* के उद्भव से होकर, बीसवीं शताब्दी के विशिष्टीकृत अकादमिक विषयों तक।

10.5.8.1 संरचनात्मक विश्लेषक की बदलती पहचान

विषयगत नामों का विकास समझने से पहले हमें यह जानना होगा कि स्वयं उनके साधक कितने मूलतः रूपांतरित हुए।

सार्वभौमिक अध्ययन का युग (1600-1790) सत्रहवीं और आरंभिक अठारहवीं शताब्दी में संरचनाओं के सामर्थ्य का अध्ययन करने वालों की कोई एकीकृत व्यावसायिक पहचान नहीं थी। गैलीलियो गैलीली (1564-1642) *प्राकृतिक दार्शनिक* थे—ऐसा पद जो आज भौतिकी, खगोलविज्ञान, गणित और यांत्रिकी के रूप में अलग किए जाने वाले विषयों को समाहित करता था। धरन-सामर्थ्य के उनके अन्वेषण (देखें §7.2.2) खगोलीय प्रेक्षणों और गिरते पिंडों पर प्रयोगों के साथ आए, जो सभी प्रकृति के नियमों की समझ के अंतर्गत एकीकृत थे।

रॉबर्ट हुक (1635-1703) ने इस सार्वभौमिकता को और भी स्पष्ट रूप से मूर्त किया: वे एक साथ रॉयल सोसाइटी के प्रयोग-अधीक्षक, वास्तुकार (लंदन की महाअग्नि के बाद भवनों के अभिकल्पक), सूक्ष्म-दर्शीविद् और यांत्रिक सिद्धांतकार थे। उनका प्रसिद्ध *ut tensio sic vis* (देखें §6.6.6) संरचनात्मक यांत्रिकी के ग्रंथ में नहीं, बल्कि स्प्रिंगों और सभी प्रकार के प्रत्यास्थ पिंडों पर एक कृति में आया।

फ्रांस में निर्माण से संबंधित व्यक्तियों को *architecte* अथवा *ingénieur* की उपाधि मिलती थी, किंतु ये आज ज्ञात विशिष्टीकृत व्यवसाय अभी नहीं थे। एड्म मारियोट (1620-1684, देखें §7.3.2.3) ने समान दक्षता से जल-दाब, वनस्पति शरीरक्रिया और धरन-विभंग पर प्रयोग किए। फिलिप द ला ईर (1640-1718) Collège Royal में गणित के प्राध्यापक, वास्तुकार और सेतु निर्माण के परामर्शदाता पदों के बीच सहजता से विचरण करते रहे। शुद्ध गणित, अनुप्रयुक्त विज्ञान और अभियांत्रिक व्यवहार के बीच आधुनिक भेद अभी विद्यमान नहीं था।

यहाँ तक कि अठारहवीं शताब्दी के उत्तरार्ध में लिखने वाले शार्ल-अगस्तैं द कूलॉम (1736-1806, देखें §10.3.2.1) को *ingénieur militaire* की उपाधि प्राप्त थी—ऐसे सैन्य अभियंता जिनके कर्तव्यों में सैद्धांतिक अन्वेषणों के साथ दुर्ग-अभिकल्प, सर्वेक्षण और प्रशासनिक दायित्व सम्मिलित थे। मृदा दाब और धरन-सामर्थ्य पर उनका संस्मरण अकादमिक अभ्यास के रूप में नहीं, बल्कि सैन्य निर्माण के व्यावहारिक मार्गदर्शन के रूप में Académie des Sciences को प्रस्तुत किया गया था।

पदार्थों की यांत्रिकी अथवा *प्रत्यास्थता* नामक कोई क्षेत्र नहीं था—केवल व्यापक अर्थ वाला *यांत्रिकी* और निर्माण की व्यावहारिक समस्याओं में उसका अनुप्रयोग था। पुस्तकों के शीर्षक *La Science des Ingénieurs* (बेलिदोर, 1729) अथवा *Architecture Hydraulique* (बेलिदोर, 1737-1739) जैसे होते थे, जो सैद्धांतिक ज्ञान और व्यावहारिक कला के संलयन को प्रतिबिंबित करते थे।

पेशेवर अभियंता का जन्म (1790-1850) फ्रांसीसी क्रांति और नेपोलियनी युग ने निर्णायक रूपांतरण उत्पन्न किया। École Polytechnique (1794) और École des Ponts et Chaussées (1795 में पुनर्गठित) की स्थापना ने पहली बार अभियंताओं के लिए व्यवस्थित व्यावसायिक शिक्षा निर्मित की—अब शिक्षुता अथवा स्वाध्याय से नहीं, बल्कि कठोर गणितीय प्रशिक्षण से। इन संस्थानों के स्नातक *ingénieurs des ponts et chaussées* (सेतु और सड़क अभियंता) अथवा *ingénieurs militaires* थे, जिनके जीवनवृत्त-पथ, मानकीकृत ज्ञान और सामूहिक पहचान परिभाषित थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

महत्त्वपूर्ण यह है कि इस पीढ़ी ने संरचनात्मक समस्याओं में अभूतपूर्व गणितीय परिष्कार लाया। अभियंता के रूप में प्रशिक्षित क्लोद-लुई नाविय (1785-1836, देखें §6.7.3) की गणितीय क्षमता शुद्ध गणितज्ञों की प्रतिस्पर्धी थी। उनका 1826 का *Résumé des Leçons* नया संश्लेषण प्रस्तुत करता था: अभियांत्रिक अनुप्रयोग की सेवा में कठोर गणितीय व्युत्पत्ति। नाविय और उनके समकालीनों ने अपने क्षेत्र को *mécanique appliquée* (अनुप्रयुक्त यांत्रिकी) कहा और इसे लाग्रांज तथा अन्य द्वारा विकसित अमूर्त गणितीय सिद्धांत *mécanique rationnelle* (तार्किक यांत्रिकी) से अलग किया।

ठोसों में उत्क्रमणीय विरूपण के गणितीय सिद्धांत के वर्णन के लिए इस अवधि में *élasticité* (प्रत्यास्थता) पद उभरा। मुख्यतः गणितज्ञ अगस्तैं-लुई कॉशी (1789-1857, देखें §6.7.6 और §10.3.2.4) ने अपने आधारभूत संस्मरणों को *ठोस अथवा तरल प्रत्यास्थ पिंडों की साम्यावस्था और गति* का शीर्षक दिया। 1830s तक *प्रत्यास्थ पिंड* ने तकनीकी अर्थ ग्रहण कर लिया था: ऐसा सतत ठोस जिसका प्रतिबल निश्चित गणितीय संबंधों द्वारा विकृति पर निर्भर करता है।

फिर भी व्यावसायिक पहचान तरल बनी रही। अदेमार जाँ क्लोद बारे द सेंट-वेनां (1797-1886, देखें §6.7.8) को *ingénieur des ponts et chaussées* की उपाधि प्राप्त थी, किंतु उन्होंने अपना जीवनवृत्त मुख्यतः निर्माण परियोजनाओं के स्थान पर सैद्धांतिक अनुसंधान में बिताया। क्या वे अभियंता थे? यांत्रिकीविद्? गणितीय भौतिकविद्? उनके समकालीनों ने इन सभी पदों का उपयोग किया, जो इस तथ्य को प्रतिबिंबित करता है कि विषयगत सीमाएँ पारगम्य बनी हुई थीं।

विषयगत स्फटिकीकरण (1850-1900) उन्नीसवीं शताब्दी के मध्य में पृथक व्यावसायिक और विषयगत पहचानों का स्फटिकीकरण हुआ। ब्रिटेन में *सिविल अभियंता* मान्य व्यवसाय बना, जिसे Institution of Civil Engineers (1828 में चार्टर-प्राप्त) द्वारा संस्थागत रूप मिला। Institution of Mechanical Engineers (1847) के साथ *यांत्रिक अभियंता* पृथक पहचान के रूप में उभरा। *अनुप्रयुक्त यांत्रिकी* (कैंब्रिज, 1875) और *अभियांत्रिकी* (विभिन्न संस्थानों में) की विश्वविद्यालयी पीठें स्थापित हुईं।

प्रत्यास्थता सिद्धांत पद **जॉर्ज गैब्रियल स्टोक्स** (1819-1903) और विलियम थॉमसन, लॉर्ड केल्विन (1824-1907) के कार्य द्वारा अंग्रेज़ी में मानक बना; प्राकृतिक दर्शन के इन दोनों प्राध्यापकों ने प्रत्यास्थ सिद्धांत में व्यापक योगदान दिया। **ऑगस्टस एडवर्ड हफ लव** (1863-1940) ने अपने विराट *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (1892-1893) (Love, 1927 PDF) के साथ इस परंपरा को समेकित किया और *प्रत्यास्थता* को शुद्ध यांत्रिकी तथा अभियांत्रिक व्यवहार दोनों से पृथक मान्य गणितीय विषय के रूप में स्थापित किया।

जर्मनी में तकनीकी विश्वविद्यालयों (*Technische Hochschulen*) ने *Diplom-Ingenieure*—गहन सैद्धांतिक प्रशिक्षण वाले स्नातक अभियंता—उत्पन्न करने वाली समानांतर व्यवस्था विकसित की। ड्रेस्डेन Polytechnikum के प्राध्यापक क्रिश्चियन ओटो मोहर (1835-1918, देखें §11.4.2) ने इस परंपरा को मूर्त किया: उनकी पाठ्यपुस्तक *Technische Mechanik* (1860) ने सैद्धांतिक यांत्रिकी को अभियांत्रिक अनुप्रयोग से एकीकृत किया।

शताब्दी के अंत तक मोटी सहमति उभर चुकी थी: *यांत्रिकी* बलों और गति के सामान्य विज्ञान को; *प्रत्यास्थता सिद्धांत* अथवा केवल *प्रत्यास्थता* प्रत्यास्थ ठोसों के गणितीय सिद्धांत को; *पदार्थ-सामर्थ्य* (*résistance des matériaux*, *Festigkeitslehre*) अभियांत्रिक अनुप्रयोगों को; और *अनुप्रयुक्त यांत्रिकी* यांत्रिक सिद्धांतों के अभियांत्रिक समस्याओं में व्यापक अनुप्रयोग को सूचित करते थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बीसवीं शताब्दी का विशिष्टीकरण (1900-1970) बीसवीं शताब्दी ने बढ़ता विशिष्टीकरण और उपविषयगत नामों का बहुलीकरण लाया। रूस में प्रशिक्षित और संयुक्त राज्य अमेरिका में कार्यरत **स्टीफन पी. टिमोशेंको** (1878-1972) ने आधुनिक पारिभाषिकी परिभाषित करने वाली पाठ्यपुस्तकें वस्तुतः लिखीं। उनके *Strength of Materials* (1930) (Timoshenko and Gere, 1976) ने स्नातक शिक्षण के लिए वह पद स्थापित किया, जबकि उनके *Theory of Elasticity* (1934, जे.एन. गुडियर के साथ) (Timoshenko and Goodier, 1970 📄) ने स्नातकोत्तर अध्ययन के लिए *प्रत्यास्थता* को संहिताबद्ध किया। उनके परवर्ती *Theory of Elastic Stability* (1936) ने स्थायित्व को अर्ध-स्वायत्त क्षेत्र के रूप में निर्मित किया।

ठोस यांत्रिकी पद क्रमशः उभरा, संभवतः 1940s-1950s में अमेरिकी अभियांत्रिकी संस्थानों में सबसे पहले, ताकि प्रत्यास्थता, सुघट्यता, श्यानप्रत्यास्थता और अन्य अप्रत्यास्थ परिघटनाओं को एक छत्र के नीचे समाहित किया जा सके। American Society of Mechanical Engineers ने Division of Applied Mechanics (1927) स्थापित किया, जो बाद में विभिन्न विशेषज्ञताओं के पृथक प्रभागों में विकसित हुआ। शताब्दी के मध्य तक कोई स्वयं को *ठोस यांत्रिकीविद्* अथवा *प्रत्यास्थताविद्* के रूप में पहचान सकता था, जिनके अपने पृथक शोध-पत्रिकाएँ, सम्मेलन और अनुसंधान समुदाय थे।

बीसवीं शताब्दी का सर्वाधिक नाटकीय विकास अमूर्त गणितीय विषय के रूप में *संतति यांत्रिकी* का उद्भव था। जॉन्स हॉपकिन्स और बाद में इंडियाना विश्वविद्यालय में कार्यरत क्लिफर्ड ट्रूस्डेल (1919-2000) ने संतति यांत्रिकी को सभी पदार्थ व्यवहारों को समाहित करने वाले एकीकृत क्षेत्र सिद्धांत के रूप में बढ़ावा दिया। उनकी शोध-पत्रिका *Archive for Rational Mechanics and Analysis* (1957 में स्थापित) और वाल्टर नोल (1925-2017) के साथ उनका ग्रंथ *The Non-Linear Field Theories of Mechanics* (1965) (Truesdell and Noll, 1965) ने संतति यांत्रिकी को कठोर अभिगृहीतीय सिद्धांत के रूप में स्थापित किया, जो मुख्यतः अनुप्रयुक्त गणितज्ञों और सैद्धांतिक भौतिकविदों को आकर्षित करता था।

1970 तक आधुनिक विषयगत परिदृश्य मूलतः पूर्ण था। विश्वविद्यालयी विभागों में *पदार्थों की यांत्रिकी* (स्नातक), *उन्नत पदार्थ-सामर्थ्य* अथवा *प्रत्यास्थता सिद्धांत* (प्रथम-वर्ष स्नातकोत्तर), *संतति यांत्रिकी* (उन्नत स्नातकोत्तर) और *ठोस यांत्रिकी* के विभिन्न विशिष्ट विषयों में पाठ्यक्रम दिए जाते थे। व्यावसायिक पहचान क्रमशः इन विशिष्ट क्षेत्रों से बँधती गई: कोई संतति यांत्रिकीविद्, प्रत्यास्थताविद्, संरचनात्मक विश्लेषक अथवा अभिकलनात्मक यांत्रिकीविद् था।

10.5.8.2 व्यावसायिक पहचान से विषयगत अंतर्वस्तु तक

विकसित होती व्यावसायिक पहचान की इस पृष्ठभूमि में अब हम समझ सकते हैं कि संरचनात्मक यांत्रिकी की बौद्धिक अंतर्वस्तु और कार्यविधियाँ उन चार पृथक, किंतु अतिव्यापी क्षेत्रों में कैसे स्फटिकीकृत हुईं जो आज का पारिभाषिक भ्रम उत्पन्न करते हैं।

पदार्थों की यांत्रिकी: अभियांत्रिक अनुभववादी (1600-1790) जिसे आज हम *पदार्थों की यांत्रिकी* कहते हैं, वह गैलीलियो (धरन-सामर्थ्य, देखें §7.2.2), मारियोट (गैलीलियो की त्रुटियों का संशोधन, देखें §7.3.2.3) और कूलॉम (मृदा दाब, घर्षण, धरन सिद्धांत, देखें §10.3.2.1) के व्यावहारिक अन्वेषणों से उभरा। इन अग्रदूतों ने निम्नलिखित लक्षणों वाला अभियांत्रिक विषय स्थापित किया:

- सरलीकृत एकविमीय प्रतिरूप (धरन, स्तंभ, शैफ्ट)
- परीक्षण से परिघटनात्मक प्रेक्षण

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- बल-बहुभुजों और आघूर्ण-साम्य का उपयोग करने वाला ज्यामितीय तर्क
- अभिकल्प समस्याओं में प्रत्यक्ष प्रयोज्यता
- प्रारंभिक गणितीय साधन (अधिकतम मूल कलन)

यह उपागम मूलतः व्यवहारवादी था: प्रत्येक संरचनात्मक अवयव के लिए अपना विशिष्ट विवेचन आवश्यक था और सामान्य क्षेत्र सिद्धांत का कोई दावा नहीं था। यह कार्यविधि आज भी स्नातक अभियांत्रिकी शिक्षा में बनी हुई है, सामान्यतः *Mechanics of Materials*, *Strength of Materials* अथवा *Engineering Mechanics of Solids* जैसे शीर्षकों के अंतर्गत। बीयर & जॉनस्टन, हिबेलर, अथवा गेरे & टिमोशेंको की आधुनिक पाठ्यपुस्तकें मूलतः 300 वर्ष पूर्व स्थापित इसी शिक्षणशास्त्रीय उपागम का अनुसरण करती हैं, जिसे आधुनिक उदाहरणों और सुरक्षा गुणांकों से अद्यतन किया गया है।

प्रत्यास्थता: फ्रांसीसी गणितीय संप्रदाय (1820-1850) *प्रत्यास्थता* (*théorie de l'élasticité*) पद क्रांति के बाद के दशकों में फ्रांसीसी गणितीय भौतिकी के उल्लेखनीय प्रस्फुटन के दौरान स्फटिकीकृत हुआ। तीन व्यक्तियों ने क्षेत्र को परिभाषित किया:

नाविय़र (देखें §6.7.3) ने आणविक नींव से प्रत्यास्थता की ओर अग्रसर होकर कणों के बीच केंद्रीय बल अन्योन्यक्रियाओं से प्रत्यास्थ ठोसों के आंशिक अवकल समीकरण व्युत्पन्न किए। उनके 1821 के संस्मरण और 1826 के व्याख्यानों ने प्रत्यास्थता को गणितीय भौतिकी की शाखा के रूप में स्थापित किया।

कॉशी (देखें §6.7.6) ने पूरक मार्ग अपनाया और आणविक संरचना का संदर्भ दिए बिना प्रत्यास्थता को संतति क्षेत्र सिद्धांत के रूप में विकसित किया। प्रतिबल प्रदिश, विकृति-विस्थापन संबंधों और अवकल साम्य समीकरणों (1822-1828) के उनके प्रवर्तन ने आज भी प्रयुक्त गणितीय ढाँचा निर्मित किया।

सेंट-वेनां (देखें §10.3.2.8) ने इन उपागमों का संश्लेषण किया और प्रदर्शित किया कि व्यावहारिक अभियांत्रिक महत्त्व वाले पिंडों के लिए सीमा-मान समस्याओं को कैसे हल किया जा सकता है—उनके मरोड़ संस्मरण (1855) और नमन अध्ययनों ने प्रत्यास्थता की प्रामाणिक समस्याएँ स्थापित कीं।

फ्रांसीसी संप्रदाय ने *élasticité* को निम्नलिखित लक्षणों वाले गणितीय विषय के रूप में निर्मित किया:

- प्रदिश राशियों का उपयोग करने वाला त्रिविमीय संतति सूत्रीकरण
- रैखिक संघटनात्मक नियम (हुक नियम का 3D में सामान्यीकरण)
- परिसीमा प्रतिबंधों वाले आंशिक अवकल समीकरण
- जहाँ संभव हो, यथार्थ वैश्लेषिक समाधानों की प्रतिबद्धता
- उन्नत गणित का अनुप्रयोग (समिश्र चर, विभव सिद्धांत, अनंत श्रेणी)

यह परंपरा लव के *Mathematical Theory of Elasticity* (1892-1893) में अपनी पराकाष्ठा पर पहुँची, जो आधी शताब्दी से अधिक समय तक अंग्रेज़ी भाषा का निर्णायक संदर्भ बना रहा। आधुनिक प्रत्यास्थता पाठ्यपुस्तकें—टिमोशेंको & गुडियर, सोकोलनिकॉफ़, बार्बर—अब संख्यात्मक उपागमों द्वारा पूरित होते हुए भी वैश्लेषिक समाधान विधियों पर इसी बल को जारी रखती हैं।

ठोसों की यांत्रिकी: जर्मन-रूसी-अमेरिकी संश्लेषण (1850-1960) जर्मन तकनीकी विश्वविद्यालयों, रूसी पॉलिटेक्निक संस्थानों और अमेरिकी अभियांत्रिकी विद्यालयों ने निम्नलिखित पर बल देने वाली समानांतर परंपरा विकसित की:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- सैद्धांतिक विकास के साथ प्रायोगिक मान्यकरण
- अप्रत्यास्थ व्यवहार (सुघट्यता, विसर्पण, श्रांति) का समावेश
- व्यावहारिक अनुप्रयोग के लिए आलेखीय और सन्निकट विधियाँ
- स्थायित्व सिद्धांत और गतिक विश्लेषण
- ऊर्जा विधियाँ और विचरणात्मक सिद्धांत

प्रमुख व्यक्तियों में मोहर (आलेखीय विधियाँ, प्रतिबल वृत्त, देखें §11.4.2), ऑगस्ट फोप्ल (1854-1924) और उनके पुत्र लुडविग प्रांट्ल (1875-1953), जिन्होंने सुघट्यता सिद्धांत का प्रवर्तन किया, तथा निर्णायक रूप से टिमोशेंको सम्मिलित थे, जिनकी पाठ्यपुस्तकों ने पीढ़ियों के लिए क्षेत्र को परिभाषित किया।

व्यापक क्षेत्र को समाहित करने के लिए *ठोसों की यांत्रिकी* (अथवा *ठोस यांत्रिकी*) पद बीसवीं शताब्दी के मध्य में क्रमशः उभरा—प्रत्यास्थता को संरचनात्मक पदार्थों के किसी भी यांत्रिक व्यवहार तक विस्तारित किया गया। आधुनिक ठोस यांत्रिकी में सम्मिलित हैं:

- रैखिक और अरैखिक प्रत्यास्थता
- सुघट्यता और सीमा विश्लेषण
- श्यानप्रत्यास्थता और विसर्पण
- विभंग यांत्रिकी और क्षति
- स्थायित्व और व्याकुंचन
- संरचनात्मक गतिकी
- अभिकलनात्मक विधियाँ (FEM)

यह सिविल और यांत्रिक अभियांत्रिकी के आधुनिक स्नातकोत्तर कार्यक्रमों की अंतर्वस्तु है, जो फंग की *Foundations of Solid Mechanics*, मालवर्न की *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, अथवा बोरेसी & शिमट की *Advanced Mechanics of Materials* जैसी पाठ्यपुस्तकों में प्रतिबिंबित होती है।

अंततः *structural engineeirng* पद की व्युत्पत्ति पर §11.2 में चर्चा की गई है।

संतति यांत्रिकी: अभिगृहीतीय अमूर्तन (1945-1970) द्वितीय विश्वयुद्ध के बाद गणितज्ञों ने ठोस-तरल भेद से परे एकीकृत ढाँचा खोजा। **ट्रूस्डेल** और नोल ने अपने ग्रंथ *The Non-Linear Field Theories of Mechanics* (1965) में *संतति यांत्रिकी* को निम्नलिखित लक्षणों वाले अभिगृहीतीय क्षेत्र सिद्धांत के रूप में सूत्रबद्ध किया:

- सतत पिंडों की सामान्य शुद्धगतिकी (विरूपण, गति)
- संघटन से स्वतंत्र संतुलन नियम (द्रव्यमान, संवेग, ऊर्जा)
- सामान्य सिद्धांत संतुष्ट करने वाले फलनिकों के माध्यम से संघटनात्मक सिद्धांत
- अभिगृहीतों के रूप में निर्देश-तंत्र निरपेक्षता और पदार्थ सममिति
- संघटनात्मक प्रतिक्रिया पर ऊष्मागतिकीय प्रतिबंध

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- चरम गणितीय व्यापकता और अमूर्तन

इस ढाँचे के भीतर प्रत्यास्थता, श्यानता और सुघट्यता सभी संघटनात्मक सिद्धांत की विशिष्ट स्थितियाँ बन जाती हैं। गर्टिन की *An Introduction to Continuum Mechanics* अथवा होल्ज़ापफ़ेल की *Nonlinear Solid Mechanics* जैसी पाठ्यपुस्तकों में प्रस्तुत आधुनिक संतति यांत्रिकी अभिकलनात्मक यांत्रिकी और जटिल पदार्थों (जैविक ऊतक, बहुलक, कणिकामय माध्यम) के अध्ययन की सैद्धांतिक नींव प्रदान करती है।

तथापि इस व्यापकता की कीमत सुगमता में चुकानी पड़ी। ट्रूस्डेल-नोल परंपरा की संतति यांत्रिकी मुख्यतः अनुप्रयुक्त गणितज्ञों और सैद्धांतिक भौतिकविदों को आकर्षित करती है। अधिकांश अभियांत्रिकी पाठ्यचर्या प्रत्यास्थता और ठोस यांत्रिकी के पुराने, अधिक मूर्त सूत्रीकरणों का शिक्षण जारी रखती हैं और संतति यांत्रिकी को उन्नत स्नातकोत्तर अध्ययन अथवा विशिष्ट अनुसंधान के लिए सुरक्षित रखती हैं।

10.5.8.3 आज का विषयगत परिदृश्य

ये ऐतिहासिक प्रक्षेपपथ पृथक किंतु अतिव्यापी क्षेत्रों में स्फटिकीकृत हुए हैं, जिन्हें सारणी 10.4 में संक्षेपित किया गया है।

10.5.8.4 पारिभाषिक परिपाटियाँ और संबंध

इन क्षेत्रों के संबंधों को ऐतिहासिक वंश और तार्किक अंतर्वेशन दोनों के माध्यम से समझा जा सकता है:

ऐतिहासिक वंश:

$$\text{पदार्थों की यांत्रिकी} \;\longrightarrow\; \text{प्रत्यास्थता} \;\longrightarrow\; \text{ठोसों की यांत्रिकी} \;\longrightarrow\; \text{संतति यांत्रिकी}$$

प्रत्येक क्षेत्र अपने पूर्ववर्ती को सामान्यीकृत, गणितीय अथवा अमूर्त करके उभरा। प्रत्यास्थता ने पदार्थों की यांत्रिकी के प्रतिबल विश्लेषण को औपचारिक और सामान्यीकृत किया। ठोसों की यांत्रिकी ने बीसवीं शताब्दी के अनुसंधान द्वारा खोजी गई अप्रत्यास्थ परिघटनाओं (सुघट्यता, विसर्पण, विभंग) को सम्मिलित करने के लिए प्रत्यास्थता का विस्तार किया। संतति यांत्रिकी ने विरूपणीय पदार्थ के सभी क्षेत्र सिद्धांतों की सामान्य गणितीय संरचना का अमूर्तन किया।

तार्किक अंतर्वेशन:

$$\text{संतति यांत्रिकी} \;\supset\; \text{ठोसों की यांत्रिकी} \;\supset\; \text{प्रत्यास्थता} \;\supset\; \text{पदार्थों की यांत्रिकी}$$

कार्यक्षेत्र की दृष्टि से प्रत्येक क्षेत्र अपने उत्तरवर्ती का विशेषीकरण है। संतति यांत्रिकी समस्त सतत पदार्थ पर लागू होती है; ठोसों की यांत्रिकी ठोस पदार्थों तक प्रतिबंधित होती है; प्रत्यास्थता उत्क्रमणीय विरूपण तक और प्रतिबंधित होती है; पदार्थों की यांत्रिकी प्रतिबल-वितरण तथा समस्या-ज्यामिति संबंधी अतिरिक्त सरलीकरण मानती है।

पारिभाषिकी में भ्रम इस तथ्य से उत्पन्न होता है कि इन क्षेत्रों की समस्याएँ और विधियाँ अतिव्यापी हैं। धरन-बंकन समस्या का चार स्तरों पर विवेचन किया जा सकता है:

- **पदार्थों की यांत्रिकी**: $\sigma = My/I$ और प्रारंभिक धरन सिद्धांत का उपयोग करके

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 10.4: यांत्रिक सिद्धांतों की तुलना: ऐतिहासिक और तकनीकी परिप्रेक्ष्य

पक्ष	पदार्थों की यांत्रिकी	प्रत्यास्थता	ठोसों की यांत्रिकी	संतति यांत्रिकी
संस्थापक व्यक्तित्व	गैलीलियो, मारियोट, कूलॉम, पारॉ	नावियर, कॉशी, सेंट-वेनां, लव	टिमोशेंको, प्रागर, हिल, ड्रकर	ट्रूस्डेल, नोल, एरिक्सेन
ऐतिहासिक अवधि	1638-1850 (पूर्व-गणितीय)	1820-1900 (गणितीय सूत्रीकरण)	1900-1960 (अभियांत्रिक संश्लेषण)	1945-1970 (अभिगृहीतीय अमूर्तन)
राष्ट्रीय संप्रदाय	इतालवी, फ्रांसीसी अनुभवजन्य	फ्रांसीसी Polytechnique	जर्मन TH, रूसी, अमेरिकी	अमेरिकी, इतालवी
व्यावसायिक पहचान	वास्तुकार, सैन्य अभियंता	Ingénieur, प्राकृतिक दार्शनिक	अभियांत्रिकी प्राध्यापक	अनुप्रयुक्त गणितज्ञ
कार्यक्षेत्र	सरलीकृत संरचनात्मक अवयव (1D)	प्रत्यास्थ ठोस (3D संतति)	सभी ठोस व्यवहार	समस्त सतत पदार्थ
गणितीय स्तर	प्रारंभिक कलन, ज्यामिति	PDE, सदिश कलन, समिश्र चर	PDE, प्रदिश, विचरण-कलन	अमूर्त प्रदिश विश्लेषण, फलनिक विश्लेषण
संघटनात्मक नियम	रैखिक प्रत्यास्थ (अंतर्निहित)	रैखिक प्रत्यास्थ (स्पष्ट हुक नियम)	प्रत्यास्थ, सुघट्य, श्यानप्रत्यास्थ, क्षति	कोई भी संघटनात्मक फलनिक
विरूपण	केवल लघु विकृति	सामान्यतः लघु विकृति; कुछ बड़े	लघु अथवा बड़ा; अरैखिक	मनमाना; पूर्ण ज्यामितीय अरैखिकता
दर्शन	व्यवहारवादी अनुभववाद	गणितीय यथार्थता	अभियांत्रिक यथार्थवाद	अभिगृहीतीय कठोरता
विशिष्ट समस्याएँ	धरन-विक्षेप, स्तंभ-व्याकुंचन, शैफ़्ट-मरोड़	प्रतिबल-संकेंद्रण, संपर्क, स्थूल बेलन	संरचनात्मक विफलता, सुघट्य पतन, विभंग	सैद्धांतिक नींव, अस्तित्व प्रमेय
समाधान विधियाँ	निर्देशिका सूत्र, सारणियाँ	वैश्लेषिक (एरी प्रतिबल, समिश्र चर)	FEM, सीमा विश्लेषण, सन्निकट	सामान्य विचरणात्मक सिद्धांत
प्रमुख पाठ्यपुस्तकें	गेरे & टिमोशेंको; बीयर & जॉनस्टन; हिबेलर	लव; सोकोलनिकॉफ़; टिमोशेंको & गुडियर	टिमोशेंको (विविध); फंग; मालवर्न	ट्रूस्डेल & नोल; गरि्टन; होल्ज़ापूफ़ेल
शैक्षिक संदर्भ	द्वितीय/तृतीय-वर्ष स्नातक	अंतिम-वर्ष स्नातक/प्रथम-वर्ष स्नातकोत्तर	स्नातकोत्तर (MS/PhD)	उन्नत स्नातकोत्तर (PhD)
वर्तमान उपयोग	अभियांत्रिकी पाठ्यचर्या में सार्वत्रिक	US में घटता; यूरोप में प्रबल	अनुसंधान में प्रमुख	विशिष्टीकृत (अनुप्रयुक्त गणित, जैवयांत्रिकी)

- **प्रत्यास्थता**: उपयुक्त परिसीमा प्रतिबंधों सहित द्विहरमोनिक समीकरण $\nabla^4 \phi = 0$ हल करके

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **ठोसों की यांत्रिकी**: आधारों पर सुघट्यता, अवशिष्ट प्रतिबल अथवा समय-निर्भर प्रभाव सम्मिलित करके
- **संतति यांत्रिकी**: सामान्य सिद्धांत प्रदर्शित करने वाले बाधित सीमा-मान समस्या सूत्रीकरण के उदाहरण के रूप में

समान भौतिक स्थिति, गणितीय परिष्कार के भिन्न स्तर, भिन्न मान्यताएँ, भिन्न अंतर्दृष्टियाँ।

10.5.8.5 इस पुस्तक में अपनाई गई परिपाटियाँ

स्पष्टता और संगति के लिए हम इस कृति में निम्नलिखित पारिभाषिकी अपनाते हैं:

- **संतति यांत्रिकी**: सतत पदार्थ के लिए सामान्य गणितीय ढाँचा, जिसमें संघटनात्मक व्यवहार से स्वतंत्र मूलभूत अवधारणाएँ (प्रतिबल, विकृति, संतुलन नियम) सम्मिलित हैं। आधारभूत अवधारणाओं अथवा आधुनिक अमूर्त सूत्रीकरणों की चर्चा में प्रयुक्त।
- **प्रत्यास्थता** (अथवा *प्रत्यास्थता सिद्धांत*): रैखिक प्रत्यास्थ ठोसों का गणितीय सिद्धांत, जो सीमा-मान समस्याओं के यथार्थ अथवा अर्ध-वैश्लेषिक समाधानों पर बल देता है। उन्नीसवीं शताब्दी की फ्रांसीसी परंपरा और शास्त्रीय समाधान विधियों की चर्चा में प्रयुक्त।
- **ठोसों की यांत्रिकी** (अथवा *ठोस यांत्रिकी*): ठोस पदार्थ व्यवहार का व्यापक अभियांत्रिक विज्ञान, जिसमें सुघट्यता, श्यानप्रत्यास्थता, क्षति और विभंग सम्मिलित हैं। बीसवीं शताब्दी के विकासों और आधुनिक अनुसंधान की चर्चा में प्रयुक्त।
- **संरचनात्मक विश्लेषण** (अथवा *संरचना सिद्धांत*): वास्तविक संरचनात्मक निकायों (ढाँचे, कैंचियाँ, खोल) में ठोस यांत्रिकी का अनुप्रयोग, जिसमें वैश्लेषिक और संख्यात्मक दोनों विधियाँ सम्मिलित हैं। अभियांत्रिक व्यवहार और अभिकल्प की चर्चा में प्रयुक्त।
- **पदार्थों की यांत्रिकी** (अथवा *पदार्थ-सामर्थ्य*): परिचयात्मक पाठ्यक्रमों और प्रारंभिक अभिकल्प में प्रयुक्त सरलीकृत, एकविमीय अभियांत्रिक उपागम। प्रारंभिक विवेचनों अथवा कठोर संतति सूत्रीकरणों से पूर्ववर्ती ऐतिहासिक कृतियों की चर्चा में प्रयुक्त।

ऐतिहासिक विकासों की चर्चा करते समय हम विचाराधीन अवधि और लेखक की पारिभाषिकी का उपयोग करते हैं और स्वीकार करते हैं कि उन्नीसवीं शताब्दी के लेखकों ने जिसे *प्रत्यास्थता* कहा, उसे आज हम संतति यांत्रिकी के रूप में अलग कर सकते हैं; 1900 से पूर्व *पदार्थ-सामर्थ्य* लगभग सार्वत्रिक था; और *ठोस यांत्रिकी* मुख्यतः बीसवीं शताब्दी का गढा हुआ पद है। पाठक को ऐतिहासिक पारिभाषिकी की सदैव संदर्भ में व्याख्या करनी चाहिए और समझना चाहिए कि निर्माणकाल में विषयगत सीमाएँ आज की विशिष्टीकृत अकादमिक पाठ्यचर्या में दिखाई देने वाली सीमाओं की अपेक्षा कहीं कम कठोर थीं।

प्राकृतिक दार्शनिक से विशिष्टीकृत ठोस यांत्रिकीविद् तक का विकास—गैलीलियो के ज्यामितीय प्रदर्शनों से ट्रूस्डेल की अभिगृहीतीय कठोरता तक—केवल बौद्धिक प्रगति नहीं, बल्कि ज्ञान और व्यावसायिक पहचान को व्यवस्थित करने की हमारी विधि का मूलभूत रूपांतरण है। नाम में क्या रखा है? इस स्थिति में, हमने पदार्थ के यांत्रिक व्यवहार को कैसे समझा और उसके विश्लेषण का अपना उपागम कैसे संरचित किया, इसका संपूर्ण इतिहास।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

10.6 निष्कर्ष

इस अध्याय ने प्रत्यास्थता के आणविक सिद्धांतों से आधुनिक संरचनात्मक यांत्रिकी पर प्रभावी व्यापक संतति ढाँचे तक की उल्लेखनीय बौद्धिक यात्रा का अनुसरण किया है। यहाँ परीक्षित प्रतिमान-परिवर्तन—अंतराणविक बलों से पदार्थ व्यवहार व्युत्पन्न करने के अपचयवादी प्रयासों से क्षेत्र समीकरणों और ऊर्जा सिद्धांतों पर आधारित परिघटनात्मक सूत्रीकरणों तक—यांत्रिकी के इतिहास के निर्णायक क्षणों में से एक का प्रतिनिधित्व करता है।

पॉइसन अनुपात और अपर्याप्त प्रत्यास्थ स्थिरांकों के उनके गलत पूर्वानुमान द्वारा उदाहरणित आणविक सिद्धांतों की विफलता ने विरूपणीय ठोसों के हमारे प्रतिरूपण की मूलभूत पुनर्संकल्पना बाध्य की। फ्रांसीसी गणितीय संप्रदाय—विशेषतः कॉशी, नावियर, लामे और सेंट-वेनां—ने प्रतिबल प्रदिशों, विकृति मापों और संघटनात्मक संबंधों की वह गणितीय यंत्रावली स्थापित की जो संतति यांत्रिकी की नींव बनाती है। विकृति-ऊर्जा फलन का ग्रीन का साहसिक अभिगृहीत आरंभिक विरोध के बावजूद अंततः दूरदर्शी सिद्ध हुआ, जब 20वीं शताब्दी में उसे ऊष्मागतिकीय औचित्य मिला।

सार्वत्रिक संतुलन नियम—द्रवव्यमान, संवेग और ऊर्जा संरक्षण तथा एंट्रॉपी असमता—वह ढाँचा प्रदान करते हैं जिसके भीतर सभी संतति सिद्धांतों को कार्य करना चाहिए। ये नियम पदार्थ के प्रकार से परे तरलों, ठोसों और अधिक जटिल पदार्थों पर समान रूप से लागू होते हैं। फिर भी केवल संतुलन नियम पदार्थ प्रतिक्रिया का पूर्वानुमान नहीं कर सकते; उन्हें पदार्थ-विशिष्ट व्यवहार ग्रहण करने वाले संघटनात्मक संबंधों से पूरित करना आवश्यक है।

संघटनात्मक सूत्रीकरण को शासित करने वाले सिद्धांत—वस्तुनिष्ठता, पदार्थ सममिति, ऊष्मागतिकीय अनुमेयता—सैद्धांतिक तर्क और प्रायोगिक प्रेक्षण की अन्योन्यक्रिया से क्रमशः उभरे। प्रत्यास्थ पदार्थों के लिए विभव-आधारित सूत्रीकरण (अतिप्रत्यास्थता) विशेष रूप से शक्तिशाली सिद्ध हुआ, जिसने ऊर्जा संरक्षण की प्रत्याभूति दी और पदार्थ प्रतिरूपण के लिए व्यवस्थित ढाँचा प्रदान किया। समदैशिक पदार्थों के लिए आवश्यक दो स्वतंत्र प्रत्यास्थ स्थिरांक (लामे के λ और μ, अथवा समतुल्य रूप से यंग मापांक और पॉइसन अनुपात) प्रायोगिक यथार्थता द्वारा अपेक्षित न्यूनतम जटिलता को दर्शाते हैं—ऐसा निष्कर्ष जिसे आणविक सिद्धांतकार प्रथम सिद्धांतों से प्राप्त नहीं कर सके।

1860 तक प्राप्त संश्लेषण उल्लेखनीय था: मनमाने भारण और परिसीमा प्रतिबंधों के अधीन सतत प्रत्यास्थ माध्यमों के यांत्रिक व्यवहार का वर्णन करने में सक्षम पूर्ण गणितीय ढाँचा। कॉशी का प्रतिबल प्रदिश, शुद्धगतिक सुसंगति, संघटनात्मक संबंधों और साम्य समीकरणों के साथ संयुक्त होकर आंशिक अवकल समीकरणों के ऐसे निकाय देता था जो सिद्धांततः किसी भी प्रत्यास्थ पिंड की प्रतिक्रिया का पूर्वानुमान कर सकते थे।

फिर भी एक निर्णायक चुनौती शेष थी। प्रत्यास्थता का सामान्य सिद्धांत अपनी समस्त गणितीय सुरुचि के बावजूद सरल ज्यामिति वाले सतत पिंडों पर सर्वाधिक स्वाभाविक रूप से लागू होता था। वास्तविक संरचनाएँ—कैंचियाँ, ढाँचे, मेहराब, निलंबन सेतु—जोड़ों पर जुड़े पृथक अवयवों से निर्मित थीं और उनकी भारण स्थितियाँ वैश्लेषिक समाधान के अनुकूल स्थितियों से कहीं अधिक जटिल थीं। प्रत्येक बिंदु पर जटिल आंशिक अवकल समीकरण हल किए बिना अभियंता व्यावहारिक संरचनात्मक विश्लेषण के लिए संतति यांत्रिकी की शक्ति का उपयोग कैसे कर सकते थे?

उत्तर उन विशिष्ट विधियों में था जो संरचनात्मक अवयवों की विशिष्ट ज्यामिति और भारण का उपयोग

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करती थीं: धरन सिद्धांत, विस्थापन विधि, बल विधि, अनिर्धार्य संरचनाओं के लिए ऊर्जा सिद्धांत। नाविय़र ने संतत धरनों के अपने विश्लेषण से इस रूपांतरण का प्रवर्तन किया और सामान्य त्रिविमीय सिद्धांत से शासी समीकरण $EId^4y/dx^4 = q(x)$ व्युत्पन्न किया। क्लापेरों की ऊर्जा विधियाँ, त्रि-आघूर्ण प्रमेय और मैक्सवेल तथा कास्तिलियानो के परवर्ती विकास इस कार्यक्रम के क्रमिक परिष्कारों का प्रतिनिधित्व करते हैं: सामान्य संतति सिद्धांत से संरचनात्मक विश्लेषण के लिए अभियंताओं को आवश्यक विशिष्ट साधन निकालना।

अब हम इन व्यावहारिक विधियों—स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं पर नाविय़र के कार्य, क्लापेरों के प्रमेय और व्यवस्थित विश्लेषण प्रक्रियाओं के परवर्ती विकास—की ओर मुड़ते हैं। ये विधियाँ संरचनात्मक अभियंताओं के केंद्रीय महत्त्व वाली समस्याओं में संतति यांत्रिकी के प्रथम सफल अनुप्रयोगों का प्रतिनिधित्व करती हैं और अमूर्त क्षेत्र सिद्धांत तथा व्यावहारिक गणना के बीच अंतराल को पाटती हैं। इस अध्याय में स्थापित संतति ढाँचा कठोर नींव प्रदान करता है; अगले अध्याय की संरचनात्मक विधियाँ उसके अभियांत्रिक फलन को प्रदर्शित करती हैं।



कारवाज्जो, ईसा मसीह का समाधिस्थापन (1603-1604)

वितरित भार वहन करते पिंड, सतत संपर्क से स्थानांतरित भार—मानव रूप में प्रतिबल क्षेत्रों पर एक चिंतन।

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11 अंततः संरचनात्मक विश्लेषण: संश्लेषण & अनुप्रयोग

सारांश

यह अंतिम अध्याय संतति यांत्रिकी के व्यावहारिक संरचनात्मक विश्लेषण में संश्लेषण—अमूर्त प्रत्यास्थता सिद्धांत का वास्तविक अभियांत्रिक संरचनाओं के विश्लेषण की व्यवस्थित विधियों में रूपांतरण—का अनुसरण करता है। 1820s में स्थैतिकतः अनिर्धार्य धरनों के नावियर द्वारा किए गए विवेचन से आरंभ करके हम मैक्सवेल के व्युत्क्रम प्रमेय, मोहर की ज्यामितीय विधियों, कास्तिलियानो के ऊर्जा सिद्धांतों, म्यूलर-ब्रेसलाउ की बल विधि, मैनी और बेंडिक्सेन की विस्थापन विधियों तथा हार्डी क्रॉस के आघूर्ण-वितरण तक के विकास का अनुसरण करते हैं—ये विधियाँ एक शताब्दी से अधिक समय तक संरचनात्मक अभियांत्रिकी पर प्रभावी रहीं।

इसके बाद अध्याय परीक्षण करता है कि 1950s–1960s की अभिकलनात्मक क्रांति ने इन शास्त्रीय विधियों को आव्यूह सूत्रीकरणों में कैसे रूपांतरित किया। टर्नर और उनके सहकर्मियों की प्रत्यक्ष दृढता विधि तथा क्लफ की परिमित तत्त्व विधि शास्त्रीय सिद्धांत से विच्छेद के रूप में नहीं, बल्कि अंकीय अभिकलन द्वारा संभव स्थापित सिद्धांतों के व्यवस्थित कार्यान्वयन के रूप में उभरीं।

यह अध्याय सामर्थ्य और गति पर गैलीलियो के प्रयोगों से आरंभ ऐतिहासिक चाप को पूर्ण करता है और दर्शाता है कि दो शताब्दियों के सैद्धांतिक विकास ने उन विधियों में व्यावहारिक अभिव्यक्ति पाई जिन्होंने गणितीय सिद्धांत, अभिकलनात्मक क्षमता और अभियांत्रिक अभिकल्प के बीच संवरण प्राप्त किया।

11.1 परिचय 394
11.2 संरचनात्मक अभियांत्रिकी, व्युत्पत्ति . . 395
11.3 आरंभिक विकास: स्थैतिकतः अनिर्धार्य धरन 396
11.3.1 नावियर (1785–1836): प्रथम व्यवस्थित विवेचन 397
11.3.2 क्लापेरों (1799–1864): त्रिर-आघूर्ण समीकरण 397
11.4 सामान्य विधियों की ओर संक्रमण 398
11.4.1 मैक्सवेल (1831–1879): व्युत्क्रम प्रमेय 398
11.4.2 मोहर (1835–1918): ज्यामितीय विधियाँ और सादृश्य 399
11.4.3 कास्तिलियानो (1847–1884): ऊर्जा विधियाँ 400
11.4.4 म्यूलर-ब्रेसलाउ (1851–1925): व्यवस्थितीकरण और प्रभाव-रेखाएँ 401
11.4.5 बल विधि: सुसंगति और नम्यता . 401
11.4.6 मूलभूत अवधारणाएँ और प्रक्रिया 402
11.4.7 बल विधि: सारांश और विरासत . 404
11.5 विस्थापन विधि: सिद्धांत से व्यवहार तक 404
11.5.1 सैद्धांतिक नींव: आरंभिक दृढता सूत्रीकरण 404
11.5.2 प्रवणता-विक्षेप विधि: व्यवस्थित सूत्रीकरण 405
11.5.3 हार्डी क्रॉस (1885–1959): आघूर्ण-वितरण विधि 407
11.5.4 विस्तार और रूपांतर 409
11.5.5 विस्थापन विधि: सारांश और विरासत 411
11.6 प्रभाव-रेखाएँ और गतिमान भार 412
11.6.1 विंक्लर (1835–1888): आरंभिक विकास 412
11.6.2 म्यूलर-ब्रेसलाउ सिद्धांत 412
11.6.3 अनुप्रयोग और विरासत 413
11.7 आव्यूह सूत्रीकरण की ओर: अभिकलन तक वैचारिक सेतु 413
11.7.1 शास्त्रीय विधियों की आव्यूह संरचना 413
11.7.2 पुनरावृत्ति से आव्यूह समाधान तक 414
11.7.3 हस्त-गणना की सीमाएँ: अभिकलन के लिए मंच तैयार करना 414
11.7.4 निष्कर्ष: निरंतरता और रूपांतरण 415
11.8 संरचनात्मक विश्लेषण की मूलभूत आवश्यकताएँ 415
11.9 योगदानकर्ताओं का कालानुक्रमिक सारांश 418
11.9.1 निष्कर्ष 421

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11.1 परिचय

अभियांत्रिक ज्ञान अंकित करने वाली प्रथम कीलाक्षर पट्टिकाओं के सात सहस्र वर्ष बाद और संतति यांत्रिकी की नींव रखे जाने के दो शताब्दी बाद हम अपनी ऐतिहासिक यात्रा की परिणति पर पहुँचते हैं: आधुनिक अभिकलनात्मक विश्लेषण में गणितीय सिद्धांत और संरचनात्मक व्यवहार का संश्लेषण।

पूर्ववर्ती ग्रंथों ने गणितीय विज्ञान के रूप में संरचनात्मक यांत्रिकी के क्रमिक उद्भव का अनुसरण किया। हमने सामर्थ्य के मात्रात्मक होने और तार्किक नियमों द्वारा शासित होने की स्थापना करने वाले गैलीलियो के प्रयोग देखे। हमने न्यूटन द्वारा यांत्रिकी के गणितीय विषय में रूपांतरण का अनुसरण किया। हमने देखा कि संतति यांत्रिकी—कॉशी का प्रतिबल सिद्धांत, नावियर के क्षेत्र समीकरण—ने भार के प्रति पदार्थों की प्रतिक्रिया की हमारी समझ को रूपांतरित किया। प्रत्येक प्रगति ने गणना-योग्य विषयों का क्षेत्र बढाया, फिर भी एक निर्णायक चुनौती शेष रही: इन अमूर्त सिद्धांतों को उन वास्तविक संरचनाओं पर कैसे लागू किया जाए जिनकी जटिलता वैश्लेषिक समाधान की पहुँच से बाहर थी।

यह अध्याय परीक्षण करता है कि पृथक अभियांत्रिक विषय के रूप में संरचनात्मक विश्लेषण के विकास द्वारा इस चुनौती को कैसे पूरा किया गया। पिछले अध्याय में स्थापित प्रत्यास्थता सिद्धांत की गणितीय नींव पर निर्माण करते हुए यांत्रिकी एक नए और निर्णायक चरण में प्रविष्ट हुई—जो संरचनात्मक अभियांत्रिकी की आवश्यकताओं से क्रमशः अधिक प्रेरित था। प्रतिबल, विकृति और प्रत्यास्थता (अध्या. 10) के वे अमूर्त सूत्रीकरण, जो उन्नीसवीं शताब्दी के आरंभ में गणितज्ञों के कार्य द्वारा परिपक्व हुए थे, अब वास्तविक संरचनाओं के विश्लेषण में मूर्त अभिव्यक्ति पाने लगे: ऐसे सेतु, ढाँचे और मेहराब जिनकी जटिलता स्थैतिकतः निर्धार्य निकायों की सरलता से परे थी। चुनौती अब पदार्थ के नियमों को परिभाषित करना नहीं, बल्कि उन अवयव-समुच्चयों पर उन्हें व्यवस्थित रूप से लागू करना थी जिनके आंतरिक बलों को केवल साम्यावस्था से निर्धारित नहीं किया जा सकता था।

सतत से पृथक की ओर, प्रत्यास्थता के सामान्य सिद्धांत से संरचनाओं के विशिष्ट विज्ञान की ओर इस संक्रमण में विचारकों की नई पीढी उभरी। फ्रांसीसी अभियंताओं (नावियर और क्लापेरों), ब्रिटिश मैक्सवेल, इतालवी कास्तिलियानो और जर्मन प्राध्यापकों (मोहर और म्यूलर-ब्रेसलाउ) ने यांत्रिकी को संरचनात्मक विश्लेषण में रूपांतरित किया और ऊर्जा तथा सुसंगति के शक्तिशाली प्रमेय प्रस्तुत किए, जिन्होंने *अनिर्धार्य* को असमाधेय नहीं, बल्कि *सुरुचिपूर्ण रूप से परिमाण्य* बनाया।

यह रूपांतरण अंकीय अभिकलन द्वारा पृथक दो चरणों में हुआ। लगभग 1820 से 1950 तक फैले प्रथम चरण में हस्त-गणना विधियों का विकास हुआ: स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं के विश्लेषण की व्यवस्थित प्रक्रियाएँ। यह अध्याय उन वैश्लेषिक विधियों के विकास का अनुसरण करता है जिन्होंने प्रत्यास्थता सिद्धांत और संरचनात्मक अभिकल्प के बीच सेतु बनाया—ऐसी विधियाँ जो बाद में बीसवीं शताब्दी के संरचनात्मक विश्लेषण में केंद्रीय विस्थापन और दृढता उपागमों की नींव बनने वाली थीं। नावियर के संतत धरनों पर अग्रणी कार्य से क्लापेरों के त्रि-आघूर्ण समीकरण तक, मैक्सवेल के व्युत्क्रम प्रमेय से कास्तिलियानो के ऊर्जा सिद्धांतों तक, मोहर के आघूर्ण-क्षेत्रफल प्रमेयों से हार्डी क्रॉस के आघूर्ण-वितरण तक—यह आख्यान अनुसरण करता है कि वैचारिक अंतर्दृष्टि क्रमशः सामान्य विधियों में कैसे आसवित हुई और जटिल संरचनाओं के विश्लेषण के एकीकृत ढाँचे में परिणत हुई।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1950s में आरंभ दूसरे चरण ने इन शास्त्रीय विधियों को कंप्यूटर कार्यान्वयन के अनुकूल आव्यूह सूत्रीकरणों में विकसित होते देखा और यह परिमित तत्त्व विधि में परिणत हुआ। इस आख्यान को आकर्षक बनाने वाला तथ्य प्रत्यक्ष क्रांति के नीचे निरंतरता का प्रकटन है। परिमित तत्त्व विधि शास्त्रीय सिद्धांत से विच्छेद के रूप में नहीं, बल्कि उसके व्यवस्थित विस्तार के रूप में उभरी। तत्त्व दृढता आव्यूह, समुच्चयन प्रक्रियाएँ और ऊर्जा सिद्धांत मैक्सवेल, कास्तिलियानो और उनके समकालीनों द्वारा विकसित अवधारणाओं से सीधे उत्पन्न हुए। कंप्यूटर ने यह बदला कि क्या अभिकलित किया जा सकता था, यह नहीं कि क्या अभिकलित हो रहा था।

अतः अध्याय दो प्रमुख अनुभागों में आगे बढता है। प्रथम हस्त-गणना विधियों का परीक्षण करता है, नाविय के संतत धरनों से ऊर्जा सिद्धांतों और सुसंगति शर्तों के माध्यम से हार्डी क्रॉस के आघूर्ण-वितरण—हस्त-गणना की पराकाष्ठा—तक। दूसरा परीक्षण करता है कि अंकीय कंप्यूटरों ने आव्यूह विधियों में पुनर्सूत्रीकरण कैसे संभव बनाया: बोइंग में प्रत्यक्ष दृढता विधि, क्लफ द्वारा संतत माध्यमों तक परिमित तत्त्व विधि के रूप में उसका विस्तार और समकालीन व्यवहार के प्रभावी प्रतिमान के रूप में अभिकलनात्मक संरचनात्मक विश्लेषण की तीव्र परिपक्वता।

ऐसा करते हुए यह अध्याय सामर्थ्य और गति पर गैलीलियो के प्रयोगों से आरंभ, संतति यांत्रिकी के महान सूत्रीकरणों से गुजरकर, आधुनिक अभिकलनात्मक संरचनात्मक विश्लेषण के जन्म में परिणत ऐतिहासिक चाप को पूर्ण करता है—ऐसा विषय जिसने अंततः सिद्धांत, अभिकलन और अभिकल्प के बीच संवरण प्राप्त किया।

अब हम परीक्षण करें कि यह संश्लेषण कैसे संपन्न हुआ। किंतु पहले “structural engineering” पद की उत्पत्ति का परीक्षण करते हैं।

11.2 संरचनात्मक अभियांत्रिकी, व्युत्पत्ति

संरचनात्मक अभियांत्रिकी की आधुनिक तकनीकी अंतर्वस्तु आधुनिक नाम से बहुत पहले की है। अठारहवीं और आरंभिक उन्नीसवीं शताब्दी के अधिकांश भाग में जिसे आज हम “संरचनात्मक विश्लेषण” और “संरचनात्मक अभियांत्रिकी” के अंतर्गत रखते हैं, वह सिविल अभियांत्रिकी, वास्तुकला, स्थैतिकी, पदार्थ-सामर्थ्य और बाद में प्रत्यास्थता में वितरित था। उन्नीसवीं शताब्दी में बढते संरचनात्मक मापक्रम, नई सामग्रियों (लोहा, फिर इस्पात) और विस्तृत होती वैश्लेषिक साधनावली (स्थायित्व, प्रत्यास्थ सिद्धांत, ऊर्जा विधियाँ, आलेखीय स्थैतिकी और अंततः आव्यूह विधियाँ) ने सिविल अभियांत्रिकी के भीतर अधिक स्पष्ट विशिष्टीकरण को प्रोत्साहित किया। अंग्रेज़ी में यह विशिष्टीकरण किसी एक “पद-निर्माण” के कार्य से नहीं, बल्कि व्यावसायिक और प्रकाशित उपयोग में पारिभाषिकी के क्रमिक स्थिरीकरण से प्रतिबिंबित होता है।

अंग्रेज़ी उपयोग के लिए सर्वाधिक समर्थनीय निश्चित तिथियाँ Oxford English Dictionary से मिलती हैं। वह संज्ञा-पद *structural engineering* का आरंभिक प्रमाण 1859 में (*structural engineering, n.* n.d.) और व्यावसायिक संज्ञा *structural engineer* का आरंभिक प्रमाण 1867 में उसी प्रविष्टि में अंकित करता है। यह क्रम ऐतिहासिक रूप से विश्वसनीय है: व्यवसाय-सूचक उपाधि से पहले गतिविधि-सूचक नाम सामान्य होता है। बीसवीं शताब्दी के आरंभ तक उपाधि संस्थागत रूप से समेकित हो चुकी थी; यूनाइटेड किंगडम में आज Institution of Structural Engineers नामक संस्था अपनी उत्पत्ति 1908 से

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मानती है और 1922 में अपना वर्तमान नाम अपनाना बताती है (*Our history* 2026)। संस्थागत अंगीकरण शब्दों की पहली उपस्थिति नहीं, किंतु व्यावसायिक स्थिरीकरण का महत्त्वपूर्ण चिह्न है।

फ्रांसीसी और जर्मन व्यवहार समान अंतर्निहित विशिष्टीकरण किंतु भिन्न भाषिक मार्ग दिखाते हैं। फ्रांसीसी में जिसे अंग्रेज़ी बाद में "structural engineering" कहती, वह कार्य ऐतिहासिक रूप से "structural engineer" के ठीक समानांतर किसी एक व्यावसायिक उपाधि के स्थान पर *calcul des constructions*, *resistance des materiaux* और *theorie des constructions* जैसे पदों द्वारा विन्यस्त था। व्यावसायिक पहचान को संस्थागत संदर्भ (विशेषतः grandes ecoles और corps) ने भी दृढता से आकार दिया और अभियांत्रिक भूमिकाएँ सिविल-अभियांत्रिकी तथा निर्माण-उन्मुख उपाधियों द्वारा व्यक्त हुईं। जर्मन-भाषी संदर्भों में विशिष्ट और व्यापक रूप से प्रयुक्त पद *Baustatik* (शाब्दिक रूप से "भवन स्थैतिकी") है, जो सिद्धांत, गणना विधियों और वास्तविक भार-वहन संरचनाओं में उनके अनुप्रयोग तक विस्तृत छत्र-पद के रूप में कार्य करता है (Kurrer, 2008 PDF)। कुरर क्षेत्र की व्यापकता और भाषिक समस्या दोनों पर बल देते हैं: विभिन्न भाषाएँ सिद्धांत, अभिकलन और व्यवहार समाहित करने वाले क्षेत्र का कठोर और संक्षिप्त नामकरण करने में संघर्ष करती हैं; जर्मन में *Baustatik* व्यापक रूप से स्वीकृत पद बना (Kurrer, 2008 PDF)।

संरचनात्मक विश्लेषण पद को व्यावसायिक उपाधि के स्थान पर कार्यविधिगत नाम के रूप में समझना सर्वोत्तम है। ऐतिहासिक रूप से समान गतिविधि पुराने शीर्षकों (उदाहरणतः "स्थैतिकी" अथवा "संरचना सिद्धांत") के अंतर्गत दिखाई देती है और बाद में ही ऐसी मानकीकृत पदावली बनती है जो वैश्लेषिक क्रिया को स्पष्ट रूप से नाम देती है: भार-वहन निकायों के आंतरिक बल, विरूपण और स्थायित्व निर्धारित करना। अतः "structural engineer" और "structural analysis" को उन्नीसवीं तथा आरंभिक बीसवीं शताब्दी के व्यावसायिक विभेदीकरण के उत्पाद मानना चाहिए: पहला अंग्रेज़ी में साधक की पहचान और दूसरा क्रमशः औपचारिक होती वैश्लेषिक प्रक्रियाओं के समुच्चय का नाम है, जिसकी बौद्धिक जड़ें आधुनिक पारिभाषिकी से बहुत पुरानी हैं।

11.3 आरंभिक विकास: स्थैतिकतः अनिर्धार्य धरन

जहाँ अठारहवीं शताब्दी के वैज्ञानिक परिदृश्य पर नमन सिद्धांत प्रभावी थे (अध्या. 7), वहीं उन्नीसवीं शताब्दी पर स्थैतिकतः अनिर्धार्य धरनों का विश्लेषण प्रभावी था। इस विकास को रेलवे युग और धातु निर्माण के उद्भव ने सीधे प्रेरित किया, जिससे स्वाभाविक रूप से संतत धरनों और आबद्ध (encastré) आधारों का व्यापक उपयोग हुआ।

स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं की मूलभूत चुनौती यह है कि केवल साम्य समीकरण सभी अज्ञात बल और प्रतिक्रियाएँ निर्धारित करने के लिए अपर्याप्त होते हैं। अतिरिक्त समीकरण सुसंगति शर्तों—विरूपित संरचना के सतत और उचित रूप से आधारित रहने की आवश्यकताओं—से व्युत्पन्न किए जाने चाहिए। इस भेद की मान्यता और उसका उपयोग करने वाली विधियों का व्यवस्थित विकास उन्नीसवीं शताब्दी की संरचनात्मक यांत्रिकी की महान बौद्धिक उपलब्धियों में से एक है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11.3.1 नावियर (1785–1836): प्रथम व्यवस्थित विवेचन

लौह निर्माण के उद्भव और 1820s में रेलवे संजाल के विस्तार ने ऐसी अत्यावश्यक व्यावहारिक समस्याएँ उत्पन्न कीं जिन पर शास्त्रीय यांत्रिकी ने विचार नहीं किया था। लौह सेतु और रेलवे सेतु-पुल प्रायः अनेक आधारों पर विस्तृत संतत धरनों का उपयोग करते थे—ऐसे विन्यास जिनका विश्लेषण केवल साम्य समीकरणों से नहीं किया जा सकता था। इसी संदर्भ में École des Ponts et Chaussées के प्राध्यापक क्लोद लुई नावियर ने प्रत्यास्थ धरनों पर अपने पूर्व कार्य को संरचनात्मक अनिर्धार्यता के संभवतः प्रथम स्पष्ट विवेचन तक विस्तारित किया।

अपने *Leçons* के 1826 संस्करण (Navier, 1826, p. 33) में नावियर संभवतः स्थैतिकतः अनिर्धार्य धरन—विशेषतः तीन आधारों पर स्थित धरन—का व्यवस्थित विश्लेषण करने वाले प्रथम व्यक्ति बने। उनके 1833 के द्वितीय संस्करण (Navier, 1833) ने इस विवेचन को *encastré* (जकड़े हुए) और अधिक जटिल संतत धरन विन्यासों तक विस्तारित किया।

मूलभूत समस्या की नावियर की मान्यता उनके इस कथन में स्पष्ट है:

> जब कोई भार समान ऊर्ध्वाधर तल में स्थित दो से अधिक आनत छड़ों अथवा समान तल में न स्थित तीन से अधिक आनत छड़ों द्वारा वहन किया जाता है, तब साम्यावस्था की शर्तें निश्चित सीमाओं के बीच प्रत्येक छड़ की दिशा में आरोपित बलों को अनिर्धारित छोड़ देती हैं।
>
> Navier, 1826 *Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*

नावियर के उपागम ने साम्य समीकरणों को प्रत्यास्थ वक्र के अवकल समीकरण से व्युत्पन्न ज्यामितीय सुसंगति शर्तों के साथ जोड़ा। अनेक आधारों पर स्थित संतत धरन के लिए उन्होंने पहचाना कि प्रत्येक मध्यवर्ती आधार पर विक्षेप शून्य होना चाहिए, जिससे अतिरिक्त प्रतिक्रियाएँ निर्धारित करने के लिए आवश्यक अतिरिक्त समीकरण प्राप्त होते हैं। संतत धरनों के लिए विशिष्ट होते हुए भी उनकी विधि ने वह मूलभूत सिद्धांत स्थापित किया जो उन्नीसवीं शताब्दी के सभी परवर्ती विकासों का मार्गदर्शन करने वाला था: *स्थैतिक अनिर्धार्यता का समाधान विरूपण की सुसंगति लागू करके किया जाता है।*

11.3.2 क्लापेरों (1799–1864): त्रि-आघूर्ण समीकरण

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §25.3 देखें

.

1857 में बेनोआ क्लापेरों द्वारा अपना प्रसिद्ध "त्रि-आघूर्ण प्रमेय" प्रकाशित करने पर प्रमुख प्रगति हुई (Clapeyron, 1857)। इस सुरुचिपूर्ण परिणाम ने संतत धरन के तीन क्रमिक आधारों पर बंकन आघूर्णों के बीच प्रत्यक्ष संबंध प्रदान किया और प्रत्यास्थ वक्र के अवकल समीकरण के साथ सीधे कार्य करने की आवश्यकता समाप्त की।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तीन क्रमिक आधारों के बीच लंबाई ℓ_1 और ℓ_2 के विस्तृतियों तथा आघूर्ण M_1, M_2 और M_3 वाले संतत धरन के लिए क्लापेरों का समीकरण यह रूप ग्रहण करता है:

$$M_1\ell_1 + 2M_2(\ell_1 + \ell_2) + M_3\ell_2 = -6\left(\frac{A_1}{\ell_1} + \frac{A_2}{\ell_2}\right)$$

जहाँ A_1 और A_2 आरोपित भारण के अधीन सरलतः आधारित विस्तृतियों के M/EI आरेखों के क्षेत्रफलों को निरूपित करते हैं।

त्रि-आघूर्ण समीकरण एक वैचारिक सफलता था। अनेक परिसीमा प्रतिबंधों वाले अवकल समीकरण हल करने के स्थान पर अभियंता अब अज्ञात आधार आघूर्णों के लिए सीधे बीजीय समीकरण लिख सकते थे। n आधारों पर संतत धरन के लिए इससे $n-2$ युगपत रैखिक समीकरण प्राप्त होते थे—ऐसी समस्या जो उन्नीसवीं शताब्दी के मध्य में उपलब्ध अभिकलन विधियों से सरलता से हल की जा सकती थी (Timoshenko, 1953 PDF)।

क्लापेरों का प्रमेय संतत धरनों के विश्लेषण की मानक विधि बना और लगभग एक शताब्दी तक अभियांत्रिकी विद्यालयों में व्यापक रूप से पढ़ाया गया। उसका प्रभाव तात्कालिक अनुप्रयोग से कहीं आगे विस्तृत हुआ: उसने प्रदर्शित किया कि व्यवस्थित बीजीय विधियाँ प्रकरण-दर-प्रकरण विश्लेषण को प्रतिस्थापित कर सकती हैं और बीसवीं शताब्दी की सामान्य आव्यूह विधियों की दिशा इंगित की।

11.4 सामान्य विधियों की ओर संक्रमण

यद्यपि क्लापेरों के प्रमेय ने संतत धरन समस्या को सुरुचिपूर्ण ढंग से हल किया, वह उस संरचनात्मक प्रकार तक विशिष्ट रहा। व्यापक प्रश्न बना रहा: क्या विन्यास पर निर्भर हुए बिना किसी भी स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना—ढाँचे, मेहराब, कैंचियाँ—पर लागू सामान्य विधि विकसित की जा सकती है? उत्तर ऊर्जा विधियों और आभासी कार्य सिद्धांत के विकास से उभरने वाला था, ऐसी अवधारणाएँ जो अनिर्धार्य संरचनाओं के विवेचन को समान सैद्धांतिक ढाँचे के अंतर्गत एकीकृत करने वाली थीं।

11.4.1 मैक्सवेल (1831–1879): व्युत्क्रम प्रमेय

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §24.2.2 देखें

.

बल विधि की सैद्धांतिक नींव जेम्स क्लर्क मैक्सवेल ने अपने उल्लेखनीय 1864 के शोधपत्र *On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames* (Maxwell, 1864c PDF) में रखी। यद्यपि मैक्सवेल को मुख्यतः विद्युतचुंबकीय सिद्धांत में उनके क्रांतिकारी योगदानों के लिए याद किया जाता है, संरचनात्मक यांत्रिकी पर उनका कार्य समान रूप से गहन था। संरचनात्मक समस्याओं में उनकी रुचि उनके विशिष्ट उपागम से उत्पन्न हुई: प्रत्यक्षतः पृथक भौतिक परिघटनाओं में गणितीय एकता की खोज।

मैक्सवेल का व्युत्क्रम प्रमेय कहता है कि रैखिक प्रत्यास्थ संरचना के लिए बिंदु i का वह विस्थापन

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जो बिंदु j पर एकक भार के कारण होता है, बिंदु j के उस विस्थापन के बराबर होता है जो बिंदु i पर एकक भार के कारण होता है:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

देखने में सरल इस परिणाम के गहन निहितार्थ हैं। इसका तात्पर्य है कि नम्यता आव्यूह (बलों को विस्थापनों से संबंधित करने वाला) सममित होना चाहिए, ऐसा गुण जो संरचनात्मक विश्लेषण के लिए मूलभूत बना। मैक्सवेल ने इस सिद्धांत का उपयोग कैंचियों और ढाँचों में विकृषेपों की गणना की व्यवस्थित प्रक्रियाएँ व्युत्पन्न करने के लिए किया। उनके प्रमेय ने नम्यता गुणांकों की व्यवस्थित गणना संभव बनाई और अनिर्धार्य विश्लेषण को अंतर्ज्ञान पर निर्भर कला से विधि पर आधारित विज्ञान में रूपांतरित किया।

मैक्सवेल के 1864 के शोधपत्र ने काल्पनिक भारों का उपयोग करके विकृषेपों की गणना के लिए आज मैक्सवेल प्रमेय कहलाने वाला विचार भी प्रस्तुत किया—ऐसी तकनीक जिसे अन्य ने स्वतंत्र रूप से पुनः खोजा और सामान्यीकृत किया। उनके संकेतन और व्यवस्थित उपागम ने लगभग एक शताब्दी बाद उभरने वाली आव्यूह विधियों का पूर्वाभास दिया (Timoshenko, 1953 PDF; Charlton, 1982)।

11.4.2 मोहर (1835–1918): ज्यामितीय विधियाँ और सादृश्य

ड्रेस्डेन पॉलिटेक्निक और बाद में स्टुटगार्ट पॉलिटेक्निक के प्राध्यापक क्रिश्चियन ओटो मोहर ने 1868 और 1906 के बीच संरचनात्मक यांत्रिकी में अनेक मूलभूत योगदान दिए। आलेखीय विधियों और संरचनात्मक व्यवहार की ज्यामितीय व्याख्या पर उनके कार्य ने अभियंताओं को विश्लेषण के शक्तिशाली व्यावहारिक साधन प्रदान किए।

प्रतिबल के लिए मोहर वृत्त अनिर्धार्य संरचनाओं से सीधे संबंधित न होते हुए भी प्रतिबल अवस्थाओं के निरूपण के लिए मोहर वृत्त (1882) यांत्रिकी के सर्वाधिक व्यापक रूप से प्रयुक्त साधनों में से एक बना (Mohr, 1882a)। यह सुरुचिपूर्ण ज्यामितीय रचना प्रमुख प्रतिबलों और अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का तत्काल दृश्यीकरण संभव बनाती है—संरचनात्मक विफलता को समझने के लिए आवश्यक अवधारणाएँ।

आघूर्ण-क्षेत्रफल प्रमेय

> *विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §22.3.4 देखें*

मोहर के आघूर्ण-क्षेत्रफल प्रमेयों (1868) ने धरनों में प्रवणताओं और विकृषेपों की गणना के लिए ज्यामितीय विधि प्रदान की (Mohr, 1868):

प्रथम प्रमेय: प्रत्यास्थ वक्र पर दो बिंदुओं के बीच प्रवणता में परिवर्तन उन बिंदुओं के बीच M/EI आरेख के नीचे के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

द्वितीय प्रमेय: किसी बिंदु का दूसरे बिंदु पर स्पर्शरेखा से ऊर्ध्वाधर विचलन, प्रथम बिंदु के सापेक्ष M/EI आरेख क्षेत्रफल के प्रथम आघूर्ण के बराबर होता है।

मूलभूत धरन समीकरण $d^2y/dx^2 = M/EI$ से व्युत्पन्न इन प्रमेयों ने अभियंताओं को समाकलन दरकिनार करके क्षेत्रों और केंद्रकों के साथ सीधे कार्य करने दिया—ऐसी गणनाएँ जो आलेखीय रूप से अथवा सरल अंकगणित से सुगमता से की जा सकती थीं।

सादृश्य विधि

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §22.3.4.7 देखें

मोहर ने *प्रत्यास्थ भार* अथवा *संयुग्मी धरन* सादृश्य भी विकसित किया, जिसने विक्षेप समस्याओं को समतुल्य आघूर्ण समस्याओं में रूपांतरित किया। M/EI आरेख को संयुग्मी धरन पर भारण मानकर वास्तविक धरन के विक्षेप और प्रवणताएँ संयुग्मी धरन के अपरूपणों और आघूर्णों से ज्ञात की जा सकती थीं—ऐसा सुरुचिपूर्ण रूपांतरण जिसने गणनाओं को अत्यधिक सरल बनाया (Timoshenko, 1953 PDF)।

11.4.3 कास्तिलियानो (1847–1884): ऊर्जा विधियाँ

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §48.5 देखें

इतालवी रेलवे अभियंता अल्बेर्तो कास्तिलियानो ने तूरीन के पॉलिटेक्निक संस्थान में छात्र रहते हुए ही अपने मूलभूत योगदान दिए। 1873 में प्रकाशित और बाद में उनके 1879 के ग्रंथ (Castigliano, 1879 PDF) में विस्तारित उनके डॉक्टरेट शोधप्रबंध ने ऊर्जा विधियों को संरचनात्मक विश्लेषण के शक्तिशाली साधन के रूप में स्थापित किया। कास्तिलियानो का कार्य रेलवे सेतु अभिकल्प की व्यावहारिक आवश्यकताओं से सीधे प्रेरित था, जहाँ जटिल संरचनात्मक विन्यासों का तीव्र विश्लेषण आवश्यक था।

कास्तिलियानो का प्रथम प्रमेय कुल विकृति ऊर्जा का किसी विस्थापन के सापेक्ष आंशिक अवकलज संगत आरोपित बल के बराबर होता है:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i$$

सैद्धांतिक रूप से महत्त्वपूर्ण होते हुए भी इस प्रमेय का व्यावहारिक अनुप्रयोग उनके द्वितीय प्रमेय की अपेक्षा कम हुआ।

कास्तिलियानो का द्वितीय प्रमेय कुल विकृति ऊर्जा का किसी बल के सापेक्ष आंशिक अवकलज संगत विस्थापन के बराबर होता है:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i$$

कभी-कभी एकक भार प्रमेय कहलाने वाला यह परिणाम विक्षेप गणनाओं का प्रमुख साधन बना। विकृति ऊर्जा वाली संरचना के लिए

$$U = \int \frac{M^2}{2EI}\,dx + \int \frac{N^2}{2EA}\,dx + \int \frac{V^2}{2GA}\,dx$$

किसी भी दिशा में किसी बिंदु पर विक्षेप उस दिशा में आरोपित (अथवा काल्पनिक) भार के सापेक्ष अवकलन करके ज्ञात किया जा सकता था।

स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं के लिए कास्तिलियानो के प्रमेय ने प्रत्यक्ष विधि प्रदान की: अतिरिक्त बलों को अज्ञात माना जा सकता था और सुसंगति शर्तें (कि कुछ बिंदुओं पर विक्षेप शून्य

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

होने चाहिए) आवश्यक समीकरण प्रदान करती थीं। न्यूनतम कार्य विधि कहलाने वाला यह उपागम कहता था कि अतिरिक्त बल स्वयं को कुल विकृति ऊर्जा न्यूनतम करने के लिए वितरित करते हैं। रेलवे अभियंता जटिल सेतु विन्यासों में व्यवस्थित प्रयोज्यता के कारण इस विधि को विशेष महत्त्व देते थे (Charlton, 1982)।

11.4.4 म्यूलर-ब्रेसलाउ (1851–1925): व्यवस्थितीकरण और प्रभाव-रेखाएँ

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §28.3 देखें

बर्लिन शार्लोटेनबुर्ग की Technische Hochschule के प्राध्यापक हाइनरिख म्यूलर-ब्रेसलाउ ने अपने विराट ग्रंथ *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre* (Müller-Breslau, 1886) में अनिर्धार्य संरचनाओं के विविध उपागमों का संश्लेषण और व्यवस्थितीकरण किया।

सामान्य बल-विधि सूत्रीकरण म्यूलर-ब्रेसलाउ ने बल विधि को उसके सर्वाधिक सामान्य रूप में प्रस्तुत किया। स्थैतिक अनिर्धार्यता की n कोटि वाली संरचना के लिए प्रक्रिया है:

चरण 1: n अतिरिक्त बल $X_1, X_2, \dots, X_n$ चुनें और संगत प्रतिबंधों को हटाकर स्थैतिकतः निर्धार्य "प्राथमिक संरचना" बनाएँ।

चरण 2: विस्थापन δ_{ij} की गणना करें, जो अतिरिक्त i के स्थान पर अतिरिक्त j के एकक मान के कारण है, तथा आरोपित भारों के कारण विस्थापन δ_{i0} की गणना करें।

चरण 3: सुसंगति लागू करें—अतिरिक्त बलों के स्थानों पर विस्थापनों को वास्तविक आधार शर्तों से मेल खाना चाहिए:

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

जहाँ Δ_i ज्ञात आधार विस्थापन (प्रायः शून्य) हैं।

n अज्ञातों में n समीकरणों का यह निकाय सभी अतिरिक्त बल निर्धारित करता है। यह विधि व्यवस्थित, सामान्य और किसी भी संरचना पर लागू है।

प्रभाव-रेखाएँ म्यूलर-ब्रेसलाउ ने प्रभाव-रेखाओं का सिद्धांत भी विकसित किया—ऐसे आरेख जो दिखाते हैं कि किसी एकक भार के संरचना पर चलने से कोई विशिष्ट बल अथवा आघूर्ण कैसे बदलता है (Müller-Breslau, 1887)। प्रभाव-रेखा निर्माण का उनका सिद्धांत कहता था कि किसी विशिष्ट बल अथवा आघूर्ण की प्रभाव-रेखा उसी आकार की होती है जिस विक्षेप वक्र का परिणाम उस बल अथवा आघूर्ण को एकक मान देने और संरचना को विरूपित होने देने पर प्राप्त होता है।

इस ज्यामितीय व्याख्या ने अभियंताओं को गतिमान भारों के अधीन संरचनाओं के विश्लेषण की शक्तिशाली आलेखीय विधियाँ प्रदान कीं—जो उन्नीसवीं शताब्दी के उत्तरार्ध की प्रमुख अभियांत्रिक चुनौती, रेलवे सेतु अभिकल्प, के लिए निर्णायक थीं (Timoshenko, 1953 PDF; Charlton, 1982)।

11.4.5 बल विधि: सुसंगति और नम्यता

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, अध्याय 25 देखें

मैक्सवेल, मोहर, कास्तिलियानो और म्यूलर-ब्रेसलाउ के योगदान, यद्यपि कुछ स्वतंत्र रूप से विकसित हुए, उस एकीकृत वैश्लेषिक ढाँचे के आवश्यक घटक बने जो उभरने वाला था। मैक्सवेल ने व्युत्क्रम प्रमेय और नम्यता गुणांकों की अवधारणा स्थापित की थी; मोहर ने विक्षेपों की गणना की ज्यामितीय विधियाँ दी थीं; कास्तिलियानो ने विस्थापन और सुसंगति शर्तें निर्धारित करने में ऊर्जा सिद्धांतों की शक्ति प्रदर्शित की थी; और म्यूलर-ब्रेसलाउ ने व्यवस्थितीकरण का कार्य आरंभ किया था। इन विविध अंतर्दृष्टियों से किसी भी स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना पर लागू सामान्य विधि उभरी—जो बल विधि अथवा वैकल्पिक रूप से नम्यता विधि कहलाने वाली थी।

यह अनुभाग बल विधि को किसी एक व्यक्ति के आविष्कार के रूप में नहीं, बल्कि ऊपर वर्णित सैद्धांतिक विकासों के संश्लेषण के रूप में प्रस्तुत करता है। बीसवीं शताब्दी के आरंभ तक यह विधि प्रत्येक अभियांत्रिकी विद्यालय में पढ़ाई जाने वाली व्यवस्थित प्रक्रिया में स्फटिकीकृत हो चुकी थी। उसकी विरासत और सीमाओं का परीक्षण करने से पहले उन मूलभूत अवधारणाओं और तार्किक संरचना को समझना आवश्यक है जिन्होंने इन अग्रदूतों की अंतर्दृष्टियों को सुसंगत वैश्लेषिक ढाँचे में एकीकृत किया।

11.4.6 मूलभूत अवधारणाएँ और प्रक्रिया

ऐतिहासिक विकास का परीक्षण करने से पहले बल विधि के मूलभूत तर्क को समझना आवश्यक है, जो संरचनात्मक विश्लेषण के सामान्य क्रम को उलट देता है।

स्थैतिक अनिर्धार्यता की कोटियाँ

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §19.1.4 देखें

कोई संरचना स्थैतिकतः अनिर्धार्य होती है जब केवल साम्य समीकरण सभी अज्ञात बल निर्धारित करने के लिए अपर्याप्त हों। स्थैतिक अनिर्धार्यता की कोटि n साम्यावस्था के अतिरिक्त आवश्यक समीकरणों की संख्या निरूपित करती है। उदाहरणतः:

- सरलतः आधारित धरन: निर्धार्य ($n = 0$)
- दोनों सिरों पर आबद्ध धरन: $n = 3$ सहित अनिर्धार्य (दो आघूर्ण प्रतिक्रियाएँ और एक ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया अतिरिक्त हैं)
- m आधारों पर संतत धरन: $n = m - 2$ सहित अनिर्धार्य
- बंद ढाँचा अथवा कैंची: अनिर्धार्यता अवयवों, जोड़ो और आधार शर्तों की संख्या पर निर्भर करती है

बल-विधि प्रक्रिया बल विधि कुछ बलों अथवा प्रतिक्रियाओं को प्राथमिक अज्ञात मानती है—विशेषतः n अतिरिक्त बलों को। व्यवस्थित प्रक्रिया है:

चरण 1: अतिरिक्त बल चुनें। n बलों (प्रतिक्रियाओं अथवा आंतरिक बलों) को अतिरिक्त के रूप में चुनें।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चुनाव मनमाना है, किंतु अभिकलनात्मक दक्षता को प्रभावित करता है। इन्हें $X_1, X_2, \ldots, X_n$ से सूचित करें।

चरण 2: प्राथमिक संरचना बनाएँ। अतिरिक्त बलों के संगत प्रतिबंध हटाकर ऐसी स्थैतिकतः निर्धार्य प्राथमिक संरचना बनाएँ जिसका विश्लेषण केवल साम्यावस्था से किया जा सके। इसका अर्थ प्रायः आधार हटाना, अवयव काटना अथवा कब्ज़े प्रस्तुत करना होता है।

चरण 3: प्राथमिक संरचना का विश्लेषण करें। अतिरिक्त बलों के स्थानों पर निम्नलिखित के कारण विस्थापनों की गणना करें:

- आरोपित भार: विस्थापन δ_{i0}, अतिरिक्त स्थान i पर
- प्रत्येक अतिरिक्त का एकक मान: नम्यता गुणांक δ_{ij} = स्थान i पर वह विस्थापन जो स्थान j पर एकक बल के कारण होता है

चरण 4: सुसंगति लागू करें। वास्तविक संरचना सतत और उचित रूप से आधारित होनी चाहिए। अतः अतिरिक्त बलों के स्थानों पर विस्थापन (भार प्रभावों और अतिरिक्त प्रभावों के अध्यारोपण के रूप में अभिकलित) वास्तविक प्रतिबंध शर्तों के बराबर होने चाहिए:

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

जहाँ Δ_i ज्ञात आधार विस्थापन हैं (दृढ आधारों के लिए सामान्यतः शून्य)।

चरण 5: अतिरिक्त बलों के लिए हल करें। n अज्ञातों में n समीकरणों का यह निकाय सभी अतिरिक्त बल X_j निर्धारित करता है।

चरण 6: अध्यारोपण। अतिरिक्त बल ज्ञात हो जाने पर अन्य सभी बल और आघूर्ण प्राथमिक संरचना के समाधान तथा अतिरिक्त प्रभावों के अध्यारोपण से प्राप्त होते हैं।

क्यों 11नम्यता विधि"? विधि को नम्यता विधि कहा जाता है क्योंकि यह बलों को विस्थापनों से संबंधित करने वाले नम्यता गुणांकों δ_{ij} के साथ कार्य करती है। नम्यता आव्यूह $\mathbf{F} = [\delta_{ij}]$ सूत्रीकरण के केंद्र में है। रैखिक प्रत्यास्थ संरचनाओं के लिए यह आव्यूह सममित (जैसा मैक्सवेल सिद्ध करने वाले थे) और धनात्मक निश्चित होता है।

भौतिक व्याख्या बल विधि एक मूलभूत सिद्धांत को मूर्त करती है: *प्रकृति साम्य और सुसंगति दोनों संतुष्ट करने के लिए बल वितरित करती है।* साम्य प्रत्येक चरण पर संतुष्ट होता है (प्राथमिक संरचना के चुनाव द्वारा), जबकि सुसंगति वे अतिरिक्त प्रतिबंध प्रदान करती है जो निर्धारित करते हैं कि अतिरिक्त पथों में बल कैसे वितरित होते हैं। इस प्रकार विधि संरचनात्मक विश्लेषण की दो मूलभूत आवश्यकताओं—साम्य और सुसंगति—को पृथक करती है और उनका एक साथ नहीं, क्रमिक रूप से विवेचन करती है।

इस उपागम की सैद्धांतिक नींव मुख्यतः मैक्सवेल, मोहर, कास्तिलियानो और म्यूलर-ब्रेसलाउ के कार्य से स्थापित हुई, जिनके योगदानों का अब हम परीक्षण करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11.4.7 बल विधि: सारांश और विरासत

1900 तक बल विधि पूर्णतः विकसित और व्यापक रूप से पढाई जाने लगी थी। उसके लाभ स्पष्ट थे: व्यवस्थित और सामान्य (किसी भी स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना पर लागू), ठोस भौतिक सिद्धांतों (विरूपण की सुसंगति) पर आधारित, रैखिक प्रत्यास्थ संरचनाओं के लिए यथार्थ समाधान देने वाली और कंप्यूटर-पूर्व युग में उपलब्ध अभिकलन साधनों से कार्यान्वित की जा सकने वाली।

प्रमुख सीमा अभिकलनात्मक थी: नम्यता गुणांकों δ_{ij} के लिए व्यापक गणनाएँ आवश्यक थीं और कुछ से अधिक समीकरणों के निकाय हल करना कठिन था। अत्यधिक अतिरिक्तता वाली संरचनाओं (बड़े ढाँचे, अनेक विस्तृतियों वाले संतत धरन) के लिए विधि अव्यावहारिक बन जाती थी। दस आधारों पर स्थित संतत धरन के लिए आठ युगपत समीकरण हल करने आवश्यक थे; बहुमंजिला ढाँचा सरलता से बीस अथवा अधिक अज्ञात उत्पन्न कर सकता था।

इस व्यावहारिक प्रतिबंध ने वैकल्पिक उपागमों—विस्थापन विधि और उसकी उत्तरजा दृढता विधि—के विकास को प्रेरित किया, जो किन राशियों को अज्ञात माना जाना चाहिए इसकी मूलभूत पुनर्संकल्पना द्वारा बीसवीं शताब्दी के संरचनात्मक विश्लेषण पर प्रभावी होने वाले थे।

11.5 विस्थापन विधि: सिद्धांत से व्यवहार तक

विस्थापन विधि बल विधि से परिप्रेक्ष्य में मूलभूत परिवर्तन का प्रतिनिधित्व करती है। बलों को अज्ञात मानकर सुसंगति संतुष्ट करने के स्थान पर विस्थापन विधि विस्थापनों (विशेषतः जोड घूर्णन और स्थानांतरण) को अज्ञात मानती और साम्य संतुष्ट करती है। वैचारिक रूप से सूक्ष्म होते हुए भी यह उत्क्रमण अभिकलनात्मक रूप से क्रांतिकारी सिद्ध हुआ।

प्रमुख अंतर्दृष्टि यह थी कि अज्ञातों का चुनाव अभिकलनात्मक दक्षता को मूलतः प्रभावित करता है। एक सरल पोर्टल ढाँचे पर विचार करें: बल विधि आधारों पर अतिरिक्त प्रतिक्रियाओं (बाह्य बलों) के लिए हल करती है, जबकि विस्थापन विधि सीधे जोड घूर्णनों (आंतरिक विस्थापनों) के लिए हल करती है। दृढ जोडों वाले ढाँचे के लिए विस्थापन-आधारित इस उपागम में सामान्यतः कम अज्ञात होते हैं—प्रायः नाटकीय रूप से कम।

विस्थापन विधि का विकास 1860s से 1930s तक विस्तृत अनेक चरणों में हुआ और हार्डी क्रॉस की आघूर्ण-वितरण विधि में परिणत हुआ, जो तीन दशकों तक संरचनात्मक विश्लेषण पर प्रभावी रहने वाली थी।

11.5.1 सैद्धांतिक नींव: आरंभिक दृढता सूत्रीकरण

विस्थापन विधि के वैचारिक बीज उन्नीसवीं शताब्दी के मध्य की अनेक कृतियों में दिखाई दिए, यद्यपि वे बीसवीं शताब्दी के आरंभ तक पूर्णतः प्रस्फुटित नहीं हुए।

क्लेब्श (1862): दृढता द्वारा कैंची विश्लेषण 1862 में गोटिंगेन में सैद्धांतिक भौतिकी के प्राध्यापक अल्फ्रेड क्लेब्श ने अपने प्रभावशाली ग्रंथ *Theorie der Elasticität fester Körper* (Clebsch, 1862a) में त्रिविमीय कब्ज़ेदार-जोड कैंचियों के विश्लेषण की सुरुचिपूर्ण कलनविधि प्रस्तुत की। प्रत्येक जोड के लिए क्लेब्श ने तीन अज्ञात कार्तीय विस्थापन घटक प्रस्तुत किए। दो आसंधियों को

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जोड़ने वाली एक सामान्य छड़ छह विस्थापन घटकों को जोड़ती है और स्थायी संरचना के लिए समीकरणों का पूर्ण निकाय साम्य, ज्यामिति और हुक नियम से प्राप्त होता है।

क्लेब्श का सूत्रीकरण सारतः प्रत्यक्ष दृढता विधि का आरंभिक रूप था—उन्होंने नम्यताओं के स्थान पर अवयव दृढताओं के साथ कार्य किया और उन्हें ज्यामितीय सुसंगति तथा साम्य के माध्यम से समुच्चयित किया। जब बारे द सेंट-वेनां ने 1883 में व्यापक टिप्पणी सहित फ्रांसीसी अनुवाद प्रकाशित किया (Saint-Venant, 1855c), उन्होंने कहा कि यह उपागम नाविय़र के 1826 के व्याख्यान-टिप्पणों तक जाता है, जहाँ नाविय़र ने विरूपणों पर विचार करके तीन समतलीय छड़ों के अनुदिश किसी बल के अपघटन का विश्लेषण किया था (Navier, 1826, p. 33)।

सेंट-वेनां ने दावा किया कि 1838 के अपने व्याख्यान-टिप्पणों में उन्होंने *प्रतिक्रियाओं की तीव्रताओं और आघूर्णों के निर्धारण के लिए उस विधि का सामान्य सिद्धांत* प्रस्तुत किया था और 1843 में दिखाया था कि *जब संरचना के अवयव बंकित, विस्तारित अथवा संपीडित और मरोड़े जाते हैं, तब इन प्रकार की समस्याओं के लिए सदैव अज्ञातों के समान संख्या में समीकरण होते हैं।* यद्यपि ऐतिहासिक प्राथमिकता कुछ अस्पष्ट बनी हुई है, वैचारिक ढाँचा शताब्दी के मध्य तक स्पष्टतः उभर रहा था।

मांडरला (1880): पुनरावृत्तीय समाधान म्यूनिख के युवा सहायक हाइनरिख मांडरला ने 1880 में दृढ जोड़ों वाले ढाँचों के विश्लेषण की ऐसी विधि प्रस्तुत की जो अज्ञातों के रूप में सीधे जोड़ घूर्णनों के साथ कार्य करती थी (Kurrer, 2003)। मांडरला ने न केवल घूर्णनों के पदों में साम्य समीकरण सूत्रबद्ध किए, बल्कि पुनरावृत्तीय समाधान प्रक्रिया भी प्रस्तावित की—पचास वर्ष बाद संरचनात्मक विश्लेषण पर प्रभावी होने वाली विधियों का दूरदर्शी पूर्वाभास। उनके कार्य को तत्काल सीमित मान्यता मिली, किंतु उसने विकास में महत्त्वपूर्ण वैचारिक संबंध बनाया। अपने नवोन्मेषी योगदानों के लिए मांडरला को म्यूनिख पॉलिटेक्निक द्वारा विशेष पुरस्कार दिया गया।

मोहर (1892): प्रसार और विकास ओटो मोहर ने कैंचियों में द्वितीयक प्रतिबलों पर अपने 1892 के शोधपत्र (Mohr, 1892) में मांडरला के उपागम का संशोधित रूप प्रस्तुत किया, जिसने जर्मन अभियंताओं के बीच विधि को व्यापक ध्यान दिलाया। मोहर के विवेचन ने भौतिक व्याख्या स्पष्ट की: दृढ संयोजनों वाली संरचनाओं के लिए जोड़ घूर्णन स्वाभाविक स्वतंत्रता कोटियाँ थीं और जोड़ों पर साम्य शासी समीकरण प्रदान करता था। कैंचियों में द्वितीयक आघूर्णों की गणना ने विस्थापन-आधारित सूत्रीकरण की व्यावहारिक उपयोगिता प्रदर्शित की, यद्यपि वह एक सन्निकटन था (यह मानकर कि बंकन प्रभाव निर्देशांक दिशाओं में आसंधि विस्थापनों को उल्लेखनीय रूप से प्रभावित नहीं करते)।

11.5.2 प्रवणता-विक्षेप विधि: व्यवस्थित सूत्रीकरण

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §27.2 देखें

प्रवणता-विक्षेप विधि बीसवीं शताब्दी के आरंभ में संरचनात्मक विश्लेषण के प्रथम पूर्ण और व्यवस्थित विस्थापन-आधारित उपागम के रूप में उभरी। विधि ने अवयव अंत्य आघूर्णों को सीधे जोड़ घूर्णनों के पदों में व्यक्त किया और प्रत्येक जोड़ पर साम्य लागू किया, जिससे अज्ञात घूर्णनों के लिए समीकरणों का निकाय प्राप्त हुआ।

बेंडिक्सेन (1914): यूरोपीय विकास जर्मन अभियंता एक्सेल बेंडिक्सेन ने 1914 में प्रवणता-विक्षेप विधि बनने वाले विचार के आरंभिक व्यवस्थित प्रस्तुतीकरणों में से एक प्रकाशित किया (Bendixen, 1914)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

लंबाई L, अंत्य घूर्णनों θ_A और θ_B तथा सापेक्ष अंत्य विस्थापन Δ वाले प्रिज़्मीय धरन के लिए बेंडिक्सेन ने अंत्य आघूर्णों के व्यंजक व्युत्पन्न किए:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + M_{AB}^{FEM} \tag{11.1}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + M_{BA}^{FEM} \tag{11.2}$$

जहाँ $\psi = \Delta/L$ जीवा घूर्णन और M_{AB}^{FEM}, M_{BA}^{FEM} अवयव पर भारण के कारण आबद्ध अंत्य आघूर्ण हैं।

इन प्रवणता-विक्षेप समीकरणों ने अवयव अंत्य आघूर्णों (जिन्हें साम्य संतुष्ट करना चाहिए) और जोड़ विस्थापनों (अज्ञातों) के बीच प्रत्यक्ष संबंध प्रदान किया। प्रत्येक जोड़ पर साम्य समीकरण—कि किसी जोड़ पर मिलने वाले अवयव अंत्य आघूर्णों का योग किसी आरोपित जोड़ आघूर्ण के बराबर होना चाहिए—लिखने पर अज्ञात जोड़ घूर्णनों के लिए समीकरणों का निकाय प्राप्त हुआ।

मैनी (1915): अमेरिकी व्यवस्थितीकरण मिनेसोटा विश्वविद्यालय के प्राध्यापक जॉर्ज ए. मैनी ने अपने ऐतिहासिक 1915 के शोधपत्र (Maney, 1915) में प्रवणता-विक्षेप विधि स्वतंत्र रूप से विकसित और व्यवस्थित की। उनका कार्य व्यावहारिक आवश्यकता के स्पष्ट कथन के साथ आरंभ हुआ (चित्र 11.1):

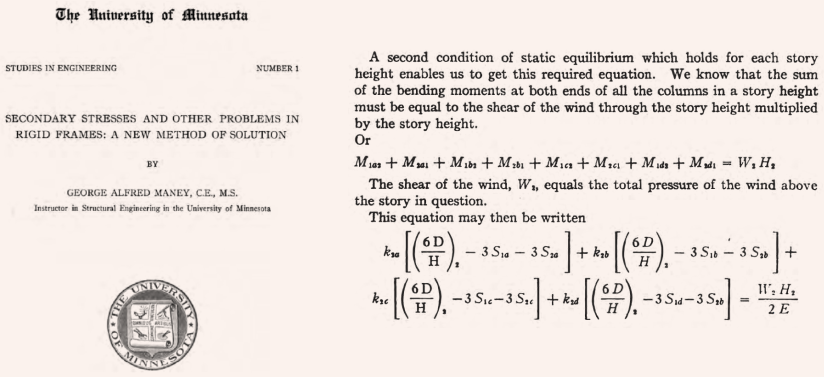
> इस्पात और कंक्रीट दोनों की आधुनिक संरचनाओं के बढ़ते आकार और जटिलता के साथ अनिर्धार्य प्रतिबलों के सिद्धांत का सापेक्ष व्यावहारिक महत्त्व बहुत बढ़ गया है और विशेष रूप से ऐसी कार्यक्षम विधियाँ विकसित करना महत्त्वपूर्ण हो गया है जो कार्यालयीन अभिकल्पक को स्वीकार्य हों। विशुद्ध सैद्धांतिक दृष्टिकोण से अनिर्धार्य प्रतिबलों का क्षेत्र अनेक वर्षों से पर्याप्त रूप से विकसित रहा है, किंतु विश्लेषण की अनेक मानक विधियाँ कार्यालयीन अभिकल्प की कार्य-विधियों के रूप में बहुत कुछ अपेक्षित छोड़ती हैं और यह विश्वास है कि विस्तृत श्रम को छोटा करने तथा विशुद्ध गणितीय कठिनाइयाँ घटाने वाली किसी भी आक्रमण-प्रणाली का व्यवसाय स्वागत करेगा।
>
> Maney, 1915 *"Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution"*

विधि किसी आधार के प्रत्येक ओर के आघूर्णों को निकटस्थ तत्त्व दृढ़ता और घूर्णन के (अज्ञात) कोणों के पदों में व्यक्त करती है। फिर प्रत्येक जोड़ के लिए साम्य समीकरण ("आबद्ध अंत्य क्रियाओं" सहित) लिखे जाते हैं, जिससे अज्ञात जोड़ घूर्णनों $\boldsymbol{\theta}$ के पदों में रैखिक समीकरणों का निकाय प्राप्त होता है। प्रत्येक अवयव का घूर्णन निर्धारित होने पर सरलता से प्रतिस्थापित करके आघूर्ण प्राप्त किए जा सकते हैं। यह स्पष्टतः विस्थापन विधि है, जो दशकों बाद उभरने वाले आव्यूह सूत्रीकरणों का पूर्वाभास देती है।

मैनी के स्पष्ट प्रस्तुतीकरण और समाधानयुक्त उदाहरणों ने विधि को व्यावहारिक अभियंताओं के लिए सुलभ बनाया। उन्होंने पहचाना कि अनेक संरचनाओं के लिए जोड़ स्थानांतरणों की उपेक्षा की जा सकती है अथवा उनका पृथक विवेचन किया जा सकता है, जिससे विश्लेषण केवल जोड़ घूर्णनों के समाधान तक सरल हो जाता है। इस *पार्श्व-सर्पण रहित प्रवणता-विक्षेप* संस्करण ने संतत धरनों और एकमंजिला ढाँचों के लिए विशेष दक्षता सिद्ध की (Maney, 1915)।

लाभ और सीमाएँ प्रवणता-विक्षेप विधि ने बल विधि पर महत्त्वपूर्ण लाभ दिए: सामान्य ढाँचों के लिए कम अज्ञात (सभी अतिरिक्त बलों के स्थान पर केवल जोड़ घूर्णन), व्यवस्थित सूत्रीकरण जिसमें अवयव गुणों को सुसंगति के स्थान पर साम्य द्वारा संयुक्त किया जाता है, दृढ़ जोड़ों वाली संरचनाओं तक स्वाभाविक विस्तार और सभी क्रांतिक स्थानों पर आघूर्णों का प्रत्यक्ष निर्धारण।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



The University of Minnesota

STUDIES IN ENGINEERING NUMBER 1

SECONDARY STRESSES AND OTHER PROBLEMS IN RIGID FRAMES: A NEW METHOD OF SOLUTION

BY

GEORGE ALFRED MANEY, C.E., M.S.
Instructor in Structural Engineering in the University of Minnesota

A second condition of static equilibrium which holds for each story height enables us to get this required equation. We know that the sum of the bending moments at both ends of all the columns in a story height must be equal to the shear of the wind through the story height multiplied by the story height.
Or

$$M_{1a2} + M_{2a1} + M_{1b2} + M_{2b1} + M_{1c2} + M_{2c1} + M_{1d2} + M_{2d1} = W_2 H_2$$

The shear of the wind, W_2, equals the total pressure of the wind above the story in question.
This equation may then be written

$$k_{2a}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1a} - 3S_{2a}\right] + k_{2b}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1b} - 3S_{2b}\right] +$$
$$k_{2c}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1c} - 3S_{2c}\right] + k_{2d}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1d} - 3S_{2b}\right] = \frac{W_2 H_2}{2E}$$

चित्र 11.1: मैनी का 1915 का प्रवणता-विक्षेप विधि का सूत्रीकरण (Maney, 1915 PDF)

तथापि इसमें अब भी युगपत समीकरणों का निकाय हल करना आवश्यक था—जो बड़ी संरचनाओं के लिए पर्याप्त अभिकलनात्मक भार था। पवन भारण के अधीन दस-मंजिला ढाँचे में अज्ञातों के रूप में 40-50 जोड़ घूर्णन आवश्यक हो सकते थे और कुशल अभियंता के लिए समाधान समय 2-3 दिन हो सकता था। इसने ऐसे पुनरावृत्तीय समाधान विधियों की खोज को प्रेरित किया जो स्पष्ट समीकरण-समाधान से बच सकें।

11.5.3 हार्डी क्रॉस (1885–1959): आघूर्ण-वितरण विधि

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §27.3 देखें

हार्डी क्रॉस द्वारा 1930 में प्रस्तुत आघूर्ण-वितरण विधि (Cross, 1932 PDF) ने संरचनात्मक विश्लेषण में क्रांति ला दी। उसने युगपत समीकरणों के समाधान को ऐसी पुनरावृत्तीय प्रक्रिया में रूपांतरित किया जिसे न्यूनतम गणना से—प्रायः कागज़ की एक शीट पर हाथ से—किया जा सकता था। मूल कार्यवाही देखने पर पाठकगण द्वारा प्रस्तुत टिप्पणियों की अत्यधिक बड़ी संख्या प्रभावशाली लगेगी[1]।

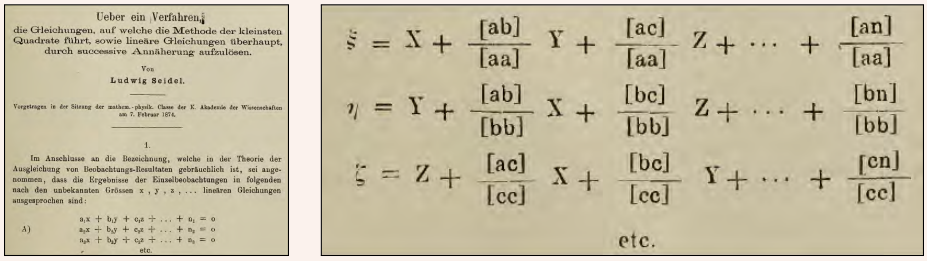
ऐतिहासिक संदर्भ: पुनरावृत्ति की खोज 1930 तक पार्श्व भारों (पवन अथवा भूकंपीय) के अधीन बहुमंजिला ढाँचों का विश्लेषण अत्यावश्यक व्यावहारिक समस्या बन चुका था, विशेषतः संयुक्त राज्य अमेरिका में, जहाँ दृढ संयोजनों वाले इस्पात ढाँचे मानक निर्माण थे। व्यवस्थित होते हुए भी प्रवणता-विक्षेप विधि में समीकरणों के बड़े निकाय हल करने आवश्यक थे। दृढ जोड़ों वाले दस-मंजिला ढाँचे के लिए इसमें तीस अथवा अधिक युगपत समीकरण हो सकते थे—इलेक्ट्रॉनिक कंप्यूटरों से पूर्व के युग में विकट अभिकलनात्मक कार्य।

रोचक है कि गणितज्ञों के पास रैखिक निकायों को हल करने की पुनरावृत्तीय विधियाँ लंबे समय से थीं। कार्ल फ्रेडरिक गाउस ने 1823 में अपने छात्र गेर्लिंग को पुनरावृत्तीय उपागम का वर्णन किया था और फिलिप लुडविग फॉन साइडेल ने 1873 में विधि को औपचारिक बनाया था (Seidel, 1873 PDF) (चित्र 11.2)। गाउस-साइडेल विधि ने अद्यतन मान उपलब्ध होते ही उनका उपयोग करते हुए बारंबार पुनरावृत्ति द्वारा

[1]आधुनिक समय के विपरीत आरंभिक अभियांत्रिकी पाठक तकनीकी लेखों का विस्तार से अध्ययन करते और लेखकों को नियमित रूप से टिप्पणियाँ तथा आलोचनाएँ भेजते थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

निकाय $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ हल किया। तथापि इन विधियों में अभिसरण निकषों पर सावधानीपूर्वक ध्यान आवश्यक था और उन्होंने अभियंताओं को विश्लेषित संरचनात्मक व्यवहार की बहुत कम भौतिक अंतर्दृष्टि दी।


Ueber ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen.

Von

Ludwig Seidel.

Vorgetragen in der Sitzung der mathem.-physik. Classe der K. Akademie der Wissenschaften am 7. Februar 1874.

1.

Im Anschlusse an die Bezeichnung, welche in der Theorie der Ausgleichung von Beobachtungs-Resultaten gebräuchlich ist, sei angenommen, dass die Ergebnisse der Einzelbeobachtungen in folgenden nach den unbekannten Grössen $x, y, z, \ldots$ linearen Gleichungen ausgesprochen sind:

A) $\quad a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + n_1 = o$
$\quad a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + n_2 = o$
$\quad a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + n_3 = o$
$\quad$ etc.

$$\xi = X + \frac{[ab]}{[aa]} Y + \frac{[ac]}{[aa]} Z + \cdots + \frac{[an]}{[aa]}$$
$$\eta = Y + \frac{[ab]}{[bb]} X + \frac{[bc]}{[bb]} Z + \cdots + \frac{[bn]}{[bb]}$$
$$\zeta = Z + \frac{[ac]}{[cc]} X + \frac{[bc]}{[cc]} Y + \cdots + \frac{[cn]}{[cc]}$$
etc.

चित्र 11.2: रैखिक निकायों के समाधान के लिए साइडेल की 1873 की क्रमिक सन्निकटन विधि (Seidel, 1873 PDF)। गणितीय रूप से ठोस होते हुए भी इसमें अभियंताओं द्वारा अपेक्षित भौतिक व्याख्या का अभाव था।

इलिनॉय विश्वविद्यालय में संरचनात्मक अभियांत्रिकी के प्राध्यापक हार्डी क्रॉस ने समस्या को अभियंता के परिप्रेक्ष्य से देखा। उनकी प्रमुख अंतर्दृष्टि गणितीय पुनरावृत्ति को भौतिक प्रक्रिया के रूप में पुनर्व्याख्यायित करना थी: सभी साम्य समीकरण एक साथ संतुष्ट करने के स्थान पर उन्हें जोड़-दर-जोड़ क्रमिक रूप से क्यों न लागू किया जाए? एक जोड़ को मुक्त करने से उत्पन्न अस्थायी असंतुलन निकटस्थ जोड़ों को मुक्त करने पर संशोधित होंगे—और प्रक्रिया सही समाधान की ओर अभिसरित होगी।

आघूर्ण-वितरण प्रक्रिया क्रॉस की विधि सभी जोड़ों को घूर्णन रोकते हुए कृत्रिम रूप से आबद्ध करके आरंभ होती है। भारण के कारण आबद्ध अंत्य आघूर्णों की गणना प्रत्येक अवयव के लिए की जाती है। फिर जोड़-दर-जोड़ प्रतिबंध *मुक्त* किए जाते हैं और प्रत्येक जोड़ पर असंतुलित आघूर्ण को वहाँ मिलने वाले अवयवों में उनकी दृढताओं के अनुपात में वितरित किया जाता है। यह वितरण निकटस्थ जोड़ों पर असंतुलन उत्पन्न करता है, जिन्हें फिर क्रमशः मुक्त और संतुलित किया जाता है। प्रक्रिया पुनरावृत्तीय रूप से दोहरती है और असंतुलन तीव्रता से घटकर नगण्य मानों तक पहुँचते हैं।

प्रमुख अवधारणाएँ हैं:

दृढता गुणक: जड़त्व आघूर्ण I और लंबाई L वाले, सुदूर सिरे पर आबद्ध अवयव के लिए:

$$K = \frac{4EI}{L}$$

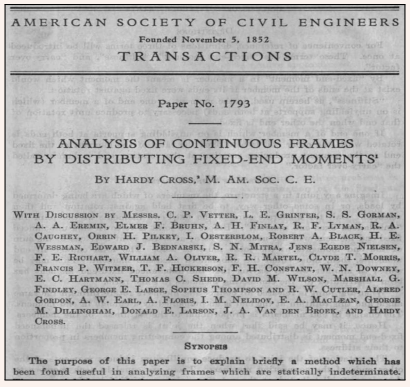
वितरण गुणक: अनेक मिलने वाले अवयवों वाले जोड़ के लिए, अवयव i को निर्दिष्ट असंतुलित आघूर्ण का अंश है:

$$DF_i = \frac{K_i}{\sum K}$$

वहन गुणक: दोनों सिरों पर आबद्ध धरन के एक सिरे पर आघूर्ण M आरोपित करने पर सुदूर सिरे पर $M/2$ का आघूर्ण प्रेरित होता है। 1/2 का यह वहन गुणक पुनरावृत्तीय प्रक्रिया के लिए मूलभूत है।

प्रभाव और अंगीकरण आघूर्ण-वितरण विधि को तत्काल रूपांतरणकारी माना गया। ASCE Proceedings में क्रॉस के शोधपत्र (Cross, 1932) (Cross and Morgan, 1932) संरचनात्मक अभियांत्रिकी के इतिहास में सर्वाधिक उद्धृत शोधपत्रों में सम्मिलित हुए। कुछ वर्षों के भीतर विधि विश्व के लगभग प्रत्येक अभियांत्रिकी विद्यालय में पढ़ाई जाने लगी। व्यावहारिक अभियंता उन संरचनाओं का विश्लेषण कर सकते थे जिनके लिए पहले विशेषज्ञों से परामर्श आवश्यक होता।

विधि की सफलता संरचनात्मक विश्लेषण से आगे विस्तृत हुई। क्रॉस ने स्वयं समान पुनरावृत्तीय दर्शन को पाइप संजालों और विद्युत परिपथों में प्रवाह-वितरण के विश्लेषण पर लागू करके उसकी व्यापक प्रयोज्यता प्रदर्शित की (Cross, 1936); उन्होंने पहचाना कि इन निकायों में संजाल साम्य की समान गणितीय संरचना थी, चित्र 11.3।


AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
Founded November 5, 1852
TRANSACTIONS

Paper No. 1793

ANALYSIS OF CONTINUOUS FRAMES BY DISTRIBUTING FIXED-END MOMENTS[1]

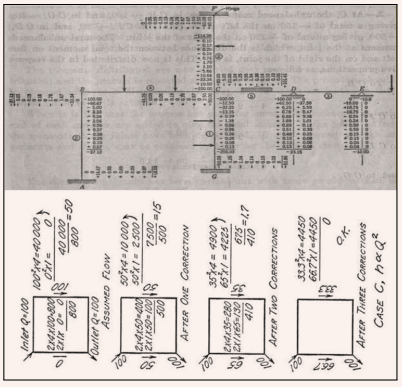
By Hardy Cross,[2] M. Am. Soc. C. E.

With Discussion by Messrs. C. P. Vetter, L. E. Grinter, S. S. Gorman, A. A. Eremin, Elmer F. Bruhn, A. H. Finlay, R. F. Lyman, R. A. Caughey, Orrin H. Pilkey, I. Oesterblom, Robert A. Black, H. E. Wessman, Edward J. Bednarski, S. N. Mitra, Jens Egede Nielsen, F. E. Richart, William A. Oliver, R. R. Martel, Clyde T. Morris, Francis P. Witmer, T. F. Hickerson, F. H. Constant, W. N. Downey, E. C. Hartmann, Thomas C. Shedd, David M. Wilson, Marshall G. Findley, George E. Large, Sophus Thompson and R. W. Cutler, Alfred Gordon, A. W. Earl, A. Floris, I. M. Nelidov, E. A. MacLean, George M. Dillingham, Donald E. Larson, J. A. Van den Broek, and Hardy Cross.

Synopsis

The purpose of this paper is to explain briefly a method which has been found useful in analyzing frames which are statically indeterminate.

(a) क्रॉस का ऐतिहासिक 1930 का शोध-पत्र (Cross, 1932)



(b) ढाँचों और पाइप संजालों में अनुप्रयोग (Cross, 1936)

चित्र 11.3: हार्डी क्रॉस के रूपांतरणकारी शोधपत्र

विधि की सफलता उसकी भौतिक स्पष्टता से उत्पन्न हुई—अभियंता समझते थे कि प्रत्येक चरण क्या संपन्न करता है। इसमें समीकरण हल किए बिना केवल अंकगणितीय संक्रियाएँ आवश्यक थीं, यह स्व-संशोधक थी (एक चक्र की त्रुटियाँ परवर्ती पुनरावृत्तियों में संशोधित होती थीं), लचीली बनी रहती थी (विश्लेषक किसी भी वांछित यथार्थता पर रुक सकता था) और छोटी अथवा बड़ी संरचनाओं पर समान रूप से लागू सिद्ध हुई।

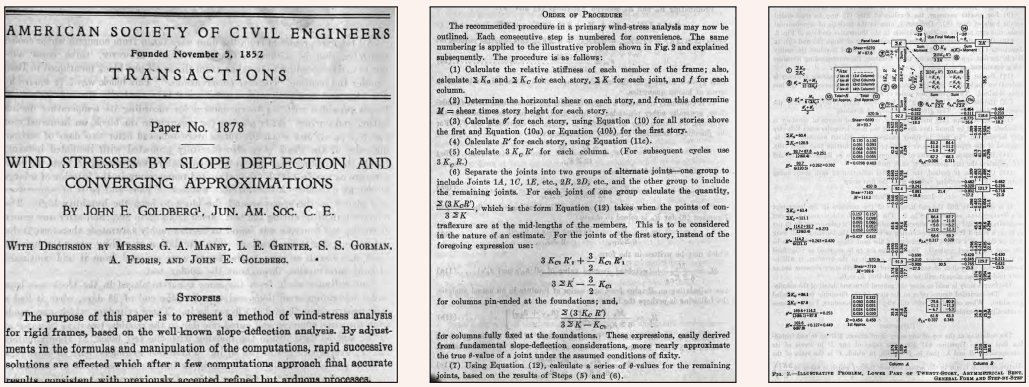
1930 से 1960 तक आघूर्ण-वितरण संरचनात्मक विश्लेषण पर प्रभावी रहा; इसके बाद अंकीय कंप्यूटरों ने इसे प्रतिस्थापित करने वाली आव्यूह विधियों को संभव बनाना आरंभ किया।

11.5.4 विस्तार और रूपांतर

गोल्डबर्ग (1934): पार्श्व भार विश्लेषण जहाँ क्रॉस के आघूर्ण-वितरण ने पार्श्व-सर्पण रहित ढाँचों के विश्लेषण में क्रांति की, पार्श्व भारण ने अधिक जटिल चुनौती प्रस्तुत की। क्रॉस के मूल सूत्रीकरण में पार्श्व-सर्पण विस्थापनों के निर्धारण के लिए ऐसी जटिल पुनरावृत्तीय प्रक्रिया आवश्यक थी जिसने अनेक अभियंताओं को निराश किया, विशेषतः कैलिफ़ोर्निया में, जहाँ विनाशकारी 1906 के सैन फ़्रांसिस्को भूकंप और उसके अनेक पराघातों के बाद भूकंपीय विश्लेषण निर्णायक बन गया था।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जोसेफ ई. गोल्डबर्ग ने 1934 में ऐसी विधि द्वारा इस चुनौती पर विचार किया (Goldberg, 1934) जो आघूर्णों के स्थान पर जोड़ प्रवणताओं (घूर्णनों) का वितरण करती थी। गोल्डबर्ग का उपागम क्रॉस की विधि के सदृश था, किंतु अज्ञात आघूर्णों के स्थान पर अज्ञात प्रवणताओं पर क्रमिक सन्निकटन करता था (चित्र 11.4)। पार्श्व-सर्पण वाले ढाँचों के लिए गोल्डबर्ग की विधि ने समाधान का अधिक प्रत्यक्ष मार्ग प्रदान किया और असंतुलन के स्वीकार्य रूप से छोटा होने तक ढाँचे के चारों ओर प्रवणताओं का वितरण किया। वितरण के बाद प्रत्येक तल के पार्श्व विक्षेप तीव्रता से ज्ञात किए जा सकते थे और फिर प्रत्येक धरन तथा स्तंभ में अंतिम आघूर्णों की गणना की जा सकती थी।


AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
Founded November 5, 1852
TRANSACTIONS

Paper No. 1878

WIND STRESSES BY SLOPE DEFLECTION AND CONVERGING APPROXIMATIONS

By John E. Goldberg[1], Jun. Am. Soc. C. E.

With Discussion by Messrs. G. A. Maney, L. E. Grinter, S. S. Gorman, A. Floris, and John E. Goldberg.

Synopsis

The purpose of this paper is to present a method of wind-stress analysis for rigid frames, based on the well-known slope deflection analysis. By adjustments in the formulas and manipulation of the computations, rapid successive solutions are effected which after a few computations approach final accurate

Order of Procedure

The recommended procedure in a primary wind-stress analysis may now be outlined. Each consecutive step is numbered for convenience. The same numbering is applied to the illustrative problem shown in Fig. 2 and explained subsequently. The procedure is as follows:

(1) Calculate the relative stiffness of each member of the frame; also, calculate ΣK_B and ΣK_C for each story, ΣK for each joint, and f for each column.

(2) Determine the horizontal shear on each story, and from this determine H = shear times story height for each story.

(3) Calculate S' for each story, using Equation (10) for all stories above the first and Equation (10a) or Equation (10b) for the first story.

(4) Calculate R' for each story, using Equation (11c).

(5) Calculate $3K_C R'$ for each column. (For subsequent cycles use $3K_C R$.)

(6) Separate the joints into two groups of alternate joints—one group to include Joints 1A, 1C, 1E, etc., 2B, 2D, etc., and the other group to include the remaining joints. For each joint of one group calculate the quantity, $\frac{\Sigma(3K_C R')}{3\Sigma K}$, which is the form Equation (12) takes when the points of contraflexure are at the mid-lengths of the members. This is to be considered in the nature of an estimate. For the joints of the first story, instead of the foregoing expression use:

$$\frac{3K_{C1}R'_1 + \frac{3}{2}K_{C1}R'_1}{3\Sigma K - \frac{3}{2}K_{C1}}$$

for columns pin-ended at the foundations; and,

$$\frac{\Sigma(3K_C R')}{3\Sigma K - K_{C1}}$$

for columns fully fixed at the foundations. These expressions, easily derived from fundamental slope-deflection considerations, more nearly approximate the true θ-value of a joint under the assumed conditions of fixity.

(7) Using Equation (12), calculate a series of θ-values for the remaining joints, based on the results of Steps (5) and (6).

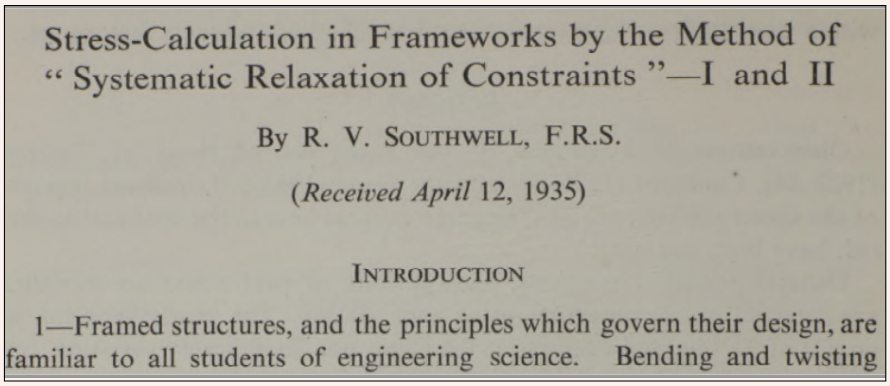
चित्र 11.4: पवन भार विश्लेषण के लिए गोल्डबर्ग का 1934 का प्रवणता-विक्षेप अनुकूलन (Goldberg, 1934)

गोल्डबर्ग के शोधपत्र ने संरचनात्मक अभियांत्रिकी के प्राध्यापकों के बीच व्यापक चर्चा उत्पन्न की, जिसमें वाद-विवाद अभिकलनात्मक दक्षता और भौतिक व्याख्या पर केंद्रित था। दस पृष्ठों की चर्चा में उस समय के अग्रणी शिक्षाविदों की टिप्पणियाँ सम्मिलित थीं। कुछ वाद-विवाद गणना समय पर केंद्रित था—बहुमंजिला ढाँचे के लिए हस्त-गणना के लगभग 500 मिनट बनाम 1800 मिनट। विचित्रतः कुछ टिप्पणीकारों ने प्रश्न किया कि क्या *तथाकथित आघूर्ण-वितरण विधि केवल संरचना के भौतिक विरूपणों की कल्पना के लिए आवश्यक मानस-तनाव को कम करने की विधि* थी। इसके विपरीत एक टिप्पणीकार ने मैनी-गोल्डबर्ग विधि की प्रशंसा की: *ढाँचे के विश्लेषण में प्राप्त की जा सकने वाली सरलता, तीव्रता और यथार्थता वास्तव में आश्चर्यजनक है।*

प्रमुख लाभ धरनों और स्तंभों में अंत्य घूर्णनों के प्रथम सन्निकटनों की तीव्र गणना और परिणामतः अंत्य आघूर्णों के यथार्थ आरंभिक आकलन थे। घूर्णनों का यह भौतिक सन्निकटन मैनी-गोल्डबर्ग विधि का केंद्र था और पवन भारों के अधीन भवनों के अभिकल्प में मूल्यवान सिद्ध हुआ। अपनी संभावना के बावजूद विधि शीघ्र ही क्रॉस के उपागम के परिष्कारों और बाद में कंप्यूटर विधियों से आच्छादित हो गई। MATLAB में आधुनिक कार्यान्वयन Saliklis and Parker, 2014 द्वारा दिया गया है।

साउथवेल (1935): शिथिलन विधि ऑक्सफ़ोर्ड में स्वतंत्र रूप से कार्यरत रिचर्ड साउथवेल ने 1935 में शिथिलन विधि विकसित की (Southwell, 1935)। साउथवेल की भौतिक व्याख्या सुरुचिपूर्ण थी: किसी आरंभतः अभारित ढाँचे की कल्पना करें जिसमें जोड़ प्रतिबंध किसी विस्थापन को रोकते हैं। बाह्य भार लगाने पर ढाँचा प्रतिबल-रहित रहता है—समस्त भार प्रतिबंधों द्वारा वहन किया जाता है। इन प्रतिबंधों को क्रमशः *शिथिल* करने से भार ढाँचे में अंतरित होता है। यदि प्रत्येक चरण पर सबसे बड़ा भार वहन

करने वाला प्रतिबंध शिथिल किया जाए, तो अवशिष्ट प्रतिबंध बल शून्य की ओर घटते हैं। भौतिक रूप से स्पष्ट है कि अधिक बाह्य भार ढाँचे में अंतरित होगा, जब तक अंततः प्रतिबंधों द्वारा वहन किए जाने वाले अवशिष्ट बल आरोपित भारों में chap:trustregion से कम न हो जाएँ (चित्र 11.5)।



Stress-Calculation in Frameworks by the Method of
" Systematic Relaxation of Constraints "—I and II

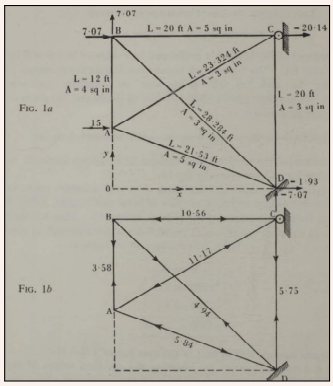
By R. V. SOUTHWELL, F.R.S.

(*Received April* 12, 1935)

INTRODUCTION

1—Framed structures, and the principles which govern their design, are familiar to all students of engineering science. Bending and twisting

(a) साउथवेल का 1935 का शोधपत्र



(b) कब्ज़ेदार-जोड कैंचियों में अनुप्रयोग

चित्र 11.5: साउथवेल की शिथिलन विधि (Southwell, 1935)

अपनी विधि विकसित करते समय क्रॉस के 1930 के शोधपत्र से अनभिज्ञ साउथवेल ने बाद में स्वीकार किया कि दोनों उपागम *सारतः पूर्णतः समतुल्य* थे। तथापि साउथवेल ने महत्त्वपूर्ण लाभ बताया: जहाँ आघूर्ण-वितरण दृढ ढाँचों (अमेरिकी व्यवहार में सामान्य) के लिए विशेष उपयुक्त था, शिथिलन विधि कब्ज़ेदार-जोड कैंचियों (ब्रिटिश व्यवहार में अधिक सामान्य) पर समान रूप से लागू होती थी। साउथवेल का अधिक सामान्य सूत्रीकरण बाद में समीकरणों के बड़े निकाय हल करने की संख्यात्मक विधियों के विकास को प्रभावित करने वाला था।

1960s में परिमित तत्त्व विधियों के आगमन तक आघूर्ण-वितरण विधि संरचनात्मक विश्लेषण के व्यवहार पर प्रभावी रही। संरचनात्मक विश्लेषण में कम प्रमुख होते हुए भी शिथिलन विधि को अभिकलनात्मक यांत्रिकी में व्यापक अनुप्रयोग मिला, जहाँ बड़े विरल समीकरण निकायों के समाधान के लिए शिथिलन-आधारित पुनरावृत्तीय साधक व्यापक रूप से प्रयुक्त हैं।

11.5.5 विस्थापन विधि: सारांश और विरासत

प्रवणता-विक्षेप और आघूर्ण-वितरण दोनों रूपों में विस्थापन विधि ने बल विधि से आगे वैचारिक प्रगति का प्रतिनिधित्व किया। विस्थापनों को प्राथमिक अज्ञात मानकर और साम्य संतुष्ट करके इसने सामान्य संरचनाओं के लिए अज्ञातों की संख्या घटाई, दृढ जोडों वाली संरचनाओं के लिए अधिक स्वाभाविक सूत्रीकरण दिया, दक्ष पुनरावृत्तीय समाधान प्रक्रियाएँ (विशेषतः आघूर्ण-वितरण) प्रस्तुत कीं और दृढता विधि के लिए बौद्धिक ढाँचा स्थापित किया।

सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण यह है कि विस्थापन विधि का दर्शन—अवयव दृढता संबंधों को समुच्चयित करना और साम्य लागू करना—आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण तथा अंततः परिमित तत्त्व विधि की नींव

बनने वाला था। क्रॉस, गोल्डबर्ग और साउथवेल के पुनरावृत्तीय उपागम बड़े-मापक्रमी अभिकलनात्मक विश्लेषण के लिए आधुनिक शिथिलन और पुनरावृत्तीय साधक विधियों में विकसित होने वाले थे।

11.6 प्रभाव-रेखाएँ और गतिमान भार

जहाँ विस्थापन विधि ने स्थिर भारण के अधीन स्थायी संरचनाओं के विश्लेषण को रूपांतरित किया, सिविल अभियंताओं के समक्ष एक अतिरिक्त चुनौती थी: गतिमान भारों के अधीन संरचनाएँ। विशेषतः रेलवे सेतुओं के लिए अभियंताओं को केवल किसी एक भार-स्थिति के अधीन बल नहीं, बल्कि रेलगाड़ी के संरचना पर चलने के दौरान अधिकतम संभव बल निर्धारित करना था। अभिकल्प के लिए निर्णायक प्रश्न था: किसी विशिष्ट स्थान पर अधिकतम आघूर्ण, अपरूपण अथवा प्रतिक्रिया उत्पन्न करने के लिए गतिमान भार कहाँ स्थित किया जाना चाहिए?

इस समस्या के लिए भिन्न वैश्लेषिक ढाँचे की आवश्यकता थी—जो यह ग्रहण करे कि किसी एकक भार के संरचना पर चलने के साथ संरचनात्मक राशि कैसे बदलती है। उत्तर प्रभाव-रेखा सिद्धांत के विकास से आया, जो उन्नीसवीं शताब्दी के उत्तरार्ध की संरचनात्मक अभियांत्रिकी की प्रमुख चुनौती, रेलवे सेतु अभिकल्प, के लिए अपरिहार्य बनने वाला था।

11.6.1 विंक्लर (1835–1888): आरंभिक विकास

प्राग के जर्मन पॉलिटेक्निक के प्राध्यापक एमिल विंक्लर ने गतिमान भारों के अधीन संरचनाओं के सिद्धांत में आरंभिक योगदान दिए। उनके 1868 के ग्रंथ (Winkler, 1875) ने किसी एकक भार के संरचना पर चलने के साथ संरचनात्मक राशि (प्रतिक्रिया, आघूर्ण, अपरूपण) के परिवर्तन को निरूपित करने की अवधारणा प्रस्तुत की।

विंक्लर ने पहचाना कि स्थैतिकतः निर्धार्य संरचना में किसी बल अथवा आघूर्ण के लिए प्रभाव-रेखा का निर्माण विशुद्धतः स्थैतिकी से, एकक भार-स्थिति को अज्ञात प्राचल मानकर किया जा सकता है। तथापि अनिर्धार्य संरचनाओं के लिए प्रभाव-रेखा में संरचनात्मक विरूपण सम्मिलित होते थे—जिसके लिए ऊर्जा विधियाँ अथवा मैक्सवेल तथा अन्य द्वारा विकसित नम्यता गुणांक आवश्यक थे (Timoshenko, 1953 PDF)।

11.6.2 म्यूलर-ब्रेसलाउ सिद्धांत

जैसा पहले उल्लेख किया गया (§11.4.4), म्यूलर-ब्रेसलाउ का मूलभूत योगदान यह पहचानना था कि प्रभाव-रेखाओं की प्रत्यक्ष ज्यामितीय व्याख्या होती है: *किसी विशिष्ट बल अथवा आघूर्ण की प्रभाव-रेखा उसी विक्षेप वक्र के आकार की होती है जो उस बल अथवा आघूर्ण को एकक विस्थापन अथवा घूर्णन देने और संरचना को तदनुसार विरूपित होने देने पर प्राप्त होता है* (Müller-Breslau, 1887)।

इस सिद्धांत ने प्रभाव-रेखा निर्माण को दुष्कर गणना से सुरुचिपूर्ण आलेखीय रचना में रूपांतरित किया। अभियंता विरूपित आकृति का गुणात्मक रेखाचित्र बनाकर यह निर्धारित कर सकता था कि गतिमान भार कहाँ अधिकतम प्रभाव उत्पन्न करता है—प्रारंभिक अभिकल्प और संरचनात्मक व्यवहार की समझ के लिए अमूल्य।

11.6.3 अनुप्रयोग और विरासत

गतिमान रेलगाड़ी भारों के अधीन अधिकतम बल निर्धारित करने, संकेंद्रित भारों (पहिया भारों) की श्रेणी का विश्लेषण करने, अधिकतम प्रभावों को न्यूनतम करने के लिए संरचनात्मक रूपों का इष्टतमीकरण करने और विभिन्न भार-स्थितियों के अधीन संरचनात्मक व्यवहार को समझने के लिए प्रभाव-रेखा सिद्धांत आवश्यक बना।

आधुनिक व्यवहार में कम प्रमुख होते हुए भी (जहाँ कंप्यूटर विश्लेषण अनेक भार प्रकरणों का दक्ष-तापूर्वक मूल्यांकन कर सकता है), प्रभाव-रेखाएँ संरचनात्मक व्यवहार को समझने के लिए वैचारिक रूप से महत्त्वपूर्ण बनी हुई हैं और अभी भी आवरण विश्लेषण तथा भार-स्थिति अध्ययनों के लिए प्रयुक्त होती हैं।

11.7 आव्यूह सूत्रीकरण की ओर: अभिकलन तक वैचारिक सेतु

1826 और 1930 के बीच विकसित हस्त-गणना विधियाँ—क्लापेरों के त्रि-आघूर्ण समीकरण से क्रॉस के आघूर्ण-वितरण तक—चतुर अभिकलनात्मक लघुपथों से अधिक थीं। उनमें प्रायः अंतर्निहित रूप से वह वैचारिक ढाँचा था जिसे बाद में आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण और परिमित तत्त्व विधियों के रूप में औपचारिक बनाया गया। इस संबंध की समझ प्रकाश डालती है कि संरचनात्मक विश्लेषण में कंप्यूटर क्रांति शास्त्रीय विधियों से विच्छेद नहीं, बल्कि उनका स्वाभाविक विस्तार कैसे थी।

11.7.1 शास्त्रीय विधियों की आव्यूह संरचना

संतत धरन अथवा ढाँचे के प्रवणता-विक्षेप समीकरणों पर विचार करें। जोड़ i और j को जोड़ने वाले प्रत्येक अवयव के लिए अंत्य आघूर्ण इस प्रकार व्यक्त किए जा सकते हैं:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_i^{FEM} \\ M_j^{FEM} \end{Bmatrix}$$

यह ठीक $\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e\mathbf{d}^e + \mathbf{f}_0^e$ रूप का अवयव दृढता संबंध है, जहाँ $\mathbf{k}^e$ अवयव दृढता आव्यूह, $\mathbf{d}^e$ अवयव विस्थापन सदिश और $\mathbf{f}_0^e$ आबद्ध अंत्य बल हैं।

जब मैनी ने प्रत्येक जोड़ पर साम्य लागू करके संपूर्ण संरचना के प्रवणता-विक्षेप समीकरणों को समुच्चयित किया:

$$\sum M_i = 0 \quad \text{at each joint}$$

तब वे अवयव दृढताओं के समुच्चयन द्वारा अंतर्निहित रूप से वैश्विक दृढता आव्यूह $\mathbf{K}$ निर्मित कर रहे थे, जिससे निकाय प्राप्त हुआ:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}$$

जहाँ $\boldsymbol{\theta}$ सभी जोड़ घूर्णनों और $\mathbf{M}$ सभी आरोपित आघूर्णों को निरूपित करता है। यह ठीक वह संरचना दृढता समीकरण है जिसे 1950s में औपचारिक बनाया जाने वाला था (Turner et al., 1956 PDF)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इसी प्रकार मोहर के नम्यता गुणांक δ_{ij}—स्थान i पर वह विस्थापन जो स्थान j पर एकक भार के कारण होता है—नम्यता आव्यूह $\mathbf{F}$ बनाते हैं। म्यूलर-ब्रेसलाउ की बल विधि ने इस नम्यता आव्यूह को व्यवस्थित रूप से समुच्चयित किया और अतिरिक्त बल ज्ञात करने के लिए उसका प्रतिलोमन किया (वैचारिक रूप से सुसंगति समीकरण हल करके)। इस प्रकार बल विधि अंतर्निहित रूप से इसके साथ कार्य कर रही थी:

$$\mathbf{F}\mathbf{X} = \boldsymbol{\Delta}$$

जो अतिरिक्त बलों $\mathbf{X}$ को सुसंगति विस्थापनों $\boldsymbol{\Delta}$ से संबंधित करता है।

बल और विस्थापन विधियों—नम्यता और दृढता सूत्रीकरणों—के बीच द्वैतता शास्त्रीय विधियों में अंतर्निहित थी, किंतु कंप्यूटर युग के आव्यूह सूत्रीकरणों के साथ ही पूर्णतः पहचानी और प्रयुक्त होने वाली थी।

11.7.2 पुनरावृत्ति से आव्यूह समाधान तक

हार्डी क्रॉस की आघूर्ण-वितरण विधि संभवतः शास्त्रीय से अभिकलनात्मक विधियों तक सर्वाधिक स्पष्ट सेतु प्रदान करती है। क्रॉस ने पहचाना कि प्रवणता-विक्षेप समीकरणों को इस रूप में लिखने पर:

$$\theta_i = \theta_i^0 + \sum_j C_{ij} M_j$$

उन्हें एक साथ नहीं, पुनरावृत्तीय रूप से हल किया जा सकता है। आव्यूह पदों में उनकी वितरण और वहन संक्रियाएँ निकाय $\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}$ पर लागू गाउस-साइडेल पुनरावृत्ति थीं।

क्रॉस की विधि को क्रांतिकारी बनाने वाला तत्व गणितीय सिद्धांत नहीं (गाउस-साइडेल पुनरावृत्ति ज्ञात थी), बल्कि भौतिक व्याख्या थी: अभियंता प्रत्येक पुनरावृत्ति को जोड़ों को मुक्त और प्रतिबंधित करने की भौतिक प्रक्रिया के रूप में देख सकते थे। इस भौतिक अंतर्दृष्टि ने विधि को सुलभ और विश्वसनीय बनाया।

कंप्यूटर युग में यही अंतर्दृष्टि बड़े परिमित तत्त्व निकायों के पुनरावृत्तीय साधकों को सूचित करने वाली थी। प्रत्यक्ष समाधान (प्रवणता-विक्षेप समीकरणों को हल करने के सदृश) और पुनरावृत्तीय समाधान (आघूर्ण-वितरण के सदृश) के बीच चुनाव समस्या के आकार, विरलता संरचना और आवश्यक यथार्थता पर निर्भर होने वाला था—ऐसे विचार जिनका शास्त्रीय विधियों ने पूर्वाभास दिया था।

11.7.3 हस्त-गणना की सीमाएँ: अभिकलन के लिए मंच तैयार करना

1950 तक हस्त-गणना विधियाँ अपनी व्यावहारिक सीमाओं तक पहुँच चुकी थीं। पवन भारण के अधीन दस-मंजिला ढाँचे के लिए अज्ञातों के रूप में 40–50 जोड़ घूर्णन (प्रवणता-विक्षेप विधि), सावधान लेखांकन सहित आघूर्ण-वितरण के 5–10 चक्र, कुशल अभियंता द्वारा 2–3 दिन की गणना और अंकगणितीय त्रुटियाँ पकड़ने के लिए स्वतंत्र पुनर्गणना द्वारा सत्यापन आवश्यक हो सकते थे।

और भी जटिल संरचनाओं त्रिविमीय ढाँचों, खोलों अथवा सैकड़ों अवयवों वाली संरचनाओं—के लिए हस्त-विधियाँ अव्यावहारिक बन गईं, चाहे सूत्रीकरण कितना भी चतुर हो।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सीमित करने वाला कारक वैचारिक नहीं, अभिकलनात्मक था: ऊर्जा विधियों, व्युत्क्रम प्रमेयों और पुनरावृत्तीय प्रक्रियाओं की समस्त अंतर्दृष्टियों के बावजूद समीकरणों के बड़े निकायों का निर्माण और समाधान व्यावहारिक अभियांत्रिक समयमानों के भीतर मानवीय क्षमता से परे था।

1950s में उभरने वाला अंकीय कंप्यूटर यह सीमा हटाने वाला था। किंतु महत्त्वपूर्ण रूप से वैचारिक ढाँचा तैयार था: पृथक अवयवों के दृढता संबंध, सुसंगति और साम्य द्वारा समुच्चयन, प्रत्यक्ष अथवा पुनरावृत्तीय विधियों द्वारा समाधान। हस्त-गणना से अभिकलनात्मक विश्लेषण का रूपांतरण मूलभूत कार्यविधि का नहीं, मापक्रम और गति का होने वाला था।

11.7.4 निष्कर्ष: निरंतरता और रूपांतरण

हस्त-गणना विधियों का इतिहास अभियांत्रिक विज्ञान के बारे में शक्तिशाली सत्य प्रकट करता है: प्रमुख प्रगतियाँ प्रायः क्रांतिकारी विच्छेदों के स्थान पर विद्यमान विचारों के परिष्कार और व्यवस्थितीकरण का प्रतिनिधित्व करती हैं। 1950s में उभरने पर परिमित तत्त्व विधि को कुछ लोगों ने मूलभूत नवोन्मेष के रूप में प्रस्तुत किया। फिर भी उसकी वैचारिक नींव—साम्य और सुसंगति द्वारा अवयव गुणों का समुच्चयन, ऊर्जा सिद्धांत तथा बल और विस्थापन सूत्रीकरणों की द्वैतता—सभी नावियर, मैक्सवेल, मोहर, कास्तिलियानो, म्यूलर-ब्रेसलाउ, मैनी और क्रॉस के कार्य में विद्यमान थीं।

जो बदला वह मापक्रम पर कार्य करने की क्षमता थी: सहस्रों तत्त्वों के दृढता आव्यूह समुच्चयित करना, सहस्रों समीकरणों के निकाय हल करना, जटिल त्रिविमीय संरचनाओं के परिणामों का दृश्यीकरण और पश्च-प्रक्रमण करना। कंप्यूटर ने अभियंताओं को अभूतपूर्व जटिलता की समस्याओं पर स्थापित सिद्धांत लागू करने में सक्षम बनाया।

इस प्रकार हस्त-गणना से परिमित तत्त्व विश्लेषण तक का सेतु किसी छलाँग की माँग करने वाली खाई नहीं, बल्कि विकास का सतत मार्ग था। अगला अनुभाग परीक्षण करता है कि यह मार्ग कैसे आगे बढ़ा—स्लाइड रूल और गणना-पत्रों के युग में परिष्कृत विधियाँ आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण को परिभाषित करने वाली अभिकलनात्मक विधियों में कैसे रूपांतरित हुईं।

11.8 संरचनात्मक विश्लेषण की मूलभूत आवश्यकताएँ

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §17.1.2.2 देखें

भौतिकी से क्षेत्र समीकरणों तक

नावियर के प्रथम व्यवस्थित विवेचन से बीसवीं शताब्दी के मध्य के आव्यूह सूत्रीकरणों तक संरचनात्मक विश्लेषण के ऐतिहासिक विकास का अनुसरण करने के बाद, अब हम उस आवश्यक सिद्धांत को आसवित करने के लिए रुकते हैं जो अब तक सामने आई और आगे आने वाली प्रत्येक विधि को एकीकृत करता है।[2] (§10.5.7):

[2] स्थैतिकतः निर्धार्य संरचनाओं में केवल साम्य समीकरण पूर्ण बल-वितरण प्रदान करते हैं। संघटनात्मक नियम और सुसंगति शर्तें केवल विस्थापन गणनाओं के लिए अथवा संरचना के स्थैतिकतः अनिर्धार्य होने पर आवश्यक होती हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. **साम्य**: आंतरिक बलों को बाह्य भारों का संतुलन करना चाहिए। संरचना का कोई तत्त्व असंतुलित बल अनुभव नहीं कर सकता; प्रत्येक बिंदु पर प्रतिबल क्षेत्र को स्थैतिक (अथवा गतिक) साम्य के समीकरण संतुष्ट करने चाहिए।
2. **संघटनात्मक नियम**: प्रतिबलों को पदार्थ के यांत्रिक गुणों के अनुसार विकृतियों से संबंधित होना चाहिए। पदार्थ बताता है कि बल और विरूपण कैसे जुड़े हैं—चाहे रैखिक प्रत्यास्थ, सुघट्य अथवा अन्य प्रकार से।
3. **विस्थापनों की सुसंगति**: विरूपण ज्यामितीय रूप से सुसंगत होने चाहिए। संरचना सतत रहती है; वह न तो फटती है, न स्वयं पर अतिव्याप्त होती है। विकृतियों को ऐसे एकल-मूल्यवान, सतत विस्थापन क्षेत्र से व्युत्पन्न होना चाहिए जो आधार शर्तों का सम्मान करे और अवयवों के बीच संयोजकता बनाए रखे।

इनमें से किसी एक आवश्यकता का उल्लंघन करने वाला समाधान केवल सन्निकट नहीं—गलत है। पूर्ण साम्य में स्थित प्रतिबल क्षेत्र अर्थहीन है यदि वह ऐसे पदार्थ को सूचित करता है जिसका अस्तित्व नहीं। पूर्णतः सतत विस्थापन क्षेत्र हमें कुछ नहीं बताता यदि परिणामी प्रतिबल साम्य का उल्लंघन करते हैं। तीनों आवश्यकताएँ स्वतंत्र विकल्प नहीं हैं जिनमें से हम चुन सकें; वे ऐसी युगपत माँगें हैं जिन्हें किसी भी भौतिक रूप से संभव समाधान को पूरा करना चाहिए। सुनने में सरल यह सिद्धांत वह कसौटी है जिस पर संरचनात्मक विश्लेषण की प्रत्येक विधि को परखा जाना चाहिए।

सूत्रीकरण के तीन स्तर

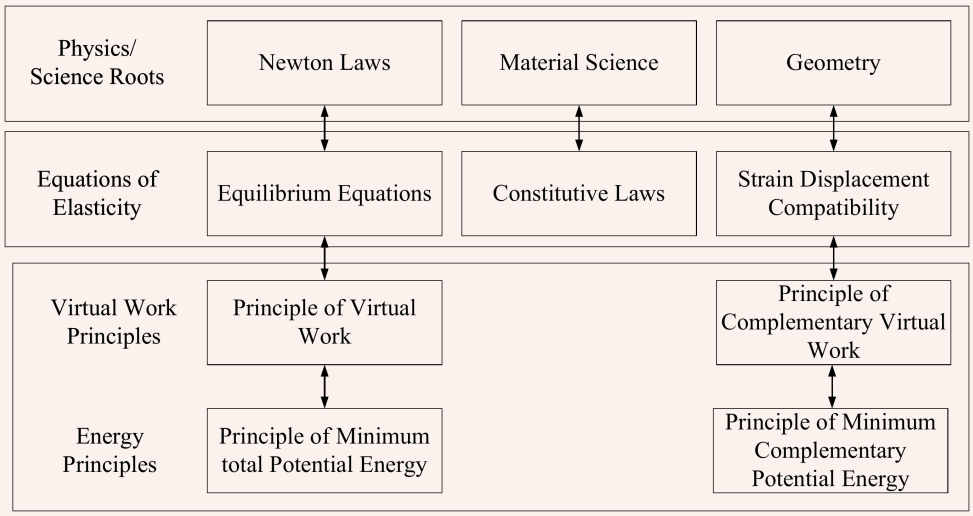
चित्र 11.6 संरचनात्मक यांत्रिकी की तार्किक संरचना को तीन अवरोही स्तरों में प्रदर्शित करता है, जिनमें प्रत्येक समान अंतर्निहित भौतिक यथार्थता को व्यक्त करने की पृथक विधा का प्रतिनिधित्व करता है।

सबसे ऊपर *भौतिक नींव* हैं—वह मूल विज्ञान जिससे अन्य सब कुछ व्युत्पन्न होता है। न्यूटन के नियम बलों की साम्यावस्था को शासित करते हैं; पदार्थ विज्ञान अभिलक्षित करता है कि पदार्थ भारण के प्रति कैसे प्रतिक्रिया करते हैं; और ज्यामिति बाधित करती है कि सतत पिंड कैसे विरूपित हो सकते हैं। ये गणितीय रचनाएँ नहीं, बल्कि भौतिक विश्व के अनुभवजन्य सत्य हैं, जो शताब्दियों के प्रेक्षण और प्रयोग से स्थापित हुए।

मध्य पंक्ति *न्यूटनीय अथवा सदिशीय सूत्रीकरण* का प्रतिनिधित्व करती है। यहाँ भौतिक नींव को अवकल समीकरणों और सदिश क्षेत्रों की भाषा में ढाला जाता है। साम्य समीकरण प्रतिबल प्रदिश के विलुप्त अपसरण के रूप में न्यूटन के नियम व्यक्त करते हैं—संतति के प्रत्येक स्थान पर बलों का बिंदुवार संतुलन। संघटनात्मक नियम पदार्थ व्यवहार को प्रतिबल और विकृति प्रदिशों के बीच बीजीय संबंधों में रूपांतरित करते हैं। विकृति-विस्थापन समीकरण विस्थापन सदिश क्षेत्र और विकृति प्रदिश के बीच अवकल संबंधों के रूप में ज्यामितीय सुसंगति को कूटबद्ध करते हैं। उन्नीसवीं शताब्दी में मुख्यतः कॉशी, नावियर और सेंट-वेनां द्वारा विकसित यह सूत्रीकरण बलों को प्राथमिक राशियाँ मानता है और सदिश संक्रियाओं तथा आंशिक अवकल समीकरणों के माध्यम से आगे बढ़ता है। यह प्रत्यास्थता का "प्रबल रूप" है—प्रत्यक्ष, अंतर्ज्ञानसम्मत और बल-साम्य की भौतिकी से स्पष्ट रूप से बँधा हुआ।

निचली पंक्तियाँ *लाग्रांजीय अथवा ऊर्जा सूत्रीकरण* का प्रतिनिधित्व करती हैं। यहाँ समान भौतिक

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 11.6: न्यूटनीय भौतिकी (ऊपर) से क्षेत्र समीकरणों (मध्य) के माध्यम से लाग्रांजीय विचरणात्मक सिद्धांतों (नीचे) तक।

अंतर्वस्तु को अदिश ऊर्जा फलनों और विचरणात्मक सिद्धांतों की भाषा में पुनः ढाला जाता है। अवकल समीकरणों द्वारा साम्य को बिंदुवार लागू करने के स्थान पर हम समाधान को कुल विभव ऊर्जा न्यूनतम करने वाले विन्यास के रूप में अभिलक्षित करते हैं—अथवा समतुल्य रूप से उस विन्यास के रूप में जिसके लिए आभासी कार्य विलुप्त होता है। लाग्रांज से उत्पन्न और ग्रीन, कास्तिलियानो तथा अन्य द्वारा परिष्कृत यह गहन पुनर्सूत्रीकरण सदिशों को अदिशों से, अवकल समीकरणों को समाकल कथनों से और बल-साम्य को ऊर्जा स्थैर्यता से प्रतिस्थापित करता है। लाग्रांजीय उपागम संरचनात्मक यांत्रिकी की गहन द्वैतता प्रकट करता है और सन्निकट तथा अभिकलनात्मक विधियों के लिए स्वाभाविक ढाँचा प्रदान करता है।

दोनों सूत्रीकरण—न्यूटनीय और लाग्रांजीय—गणितीय रूप से समतुल्य हैं। मध्य पंक्ति के अवकल समीकरण हल करके प्राप्त प्रत्येक समाधान निचली पंक्ति के ऊर्जा फलनिकों का चरमीकरण करके समान रूप से प्राप्त किया जा सकता है। फिर भी उनके स्वरूप में गहन अंतर है: न्यूटनीय सूत्रीकरण बलों और उनके संतुलन की बात करता है; लाग्रांजीय सूत्रीकरण ऊर्जा और उसके न्यूनतमीकरण की। संरचनात्मक विश्लेषण के ऐतिहासिक विकास को इस समतुल्यता की क्रमिक पहचान और विचाराधीन समस्या के लिए सर्वाधिक सुविधाजनक सिद्ध होने वाले सूत्रीकरण के उपयोग के रूप में पढ़ा जा सकता है।

लाग्रांजीय सूत्रीकरण की द्वैतता

लाग्रांजीय ढाँचे के भीतर ही एक और द्वैतता निहित है, जो चित्र 11.6 के नीचे के दो स्तंभों में प्रदर्शित है। यह द्वैतता विस्थापन और बल, शुद्धगतिक और स्थैतिक राशियों के बीच भेद को प्रतिबिंबित करती है।

बाईं ओर आभासी कार्य सिद्धांत—जिसे Lagrange, 1788 ने अपनी *Mécanique Analytique* में

Bernoulli, Johann, 1725 की स्थैतिकी तक खोजा—और उसका ऊर्जात्मक समकक्ष न्यूनतम कुल विभव ऊर्जा सिद्धांत, विस्थापन में निहित विचरणात्मक कथन प्रदान करते हैं। ये सिद्धांत कहते हैं कि सभी शुद्धगतिक रूप से अनुमेय विस्थापन क्षेत्रों में वास्तविक समाधान कुल विभव ऊर्जा को न्यूनतम करता है, अथवा समतुल्य रूप से किसी भी सुसंगत आभासी विस्थापन के लिए आभासी कार्य विलुप्त होता है। स्वतः सुसंगति संतुष्ट करने वाली विस्थापन मान्यताओं से आरंभ करके, प्रतिबल प्राप्त करने के लिए संघटनात्मक नियम लागू करके और फिर ऊर्जा न्यूनतमीकरण द्वारा साम्य लागू करके यह उपागम सुनिश्चित करता है कि तीनों आवश्यकताएँ पूरी हों। यह सूत्रीकरण विस्थापन विधि और अंततः आधुनिक परिमित तत्त्व विश्लेषण की सैद्धांतिक नींव बना।

दाईं ओर पूरक सूत्रीकरण है। पूरक आभासी कार्य सिद्धांत और न्यूनतम पूरक विभव ऊर्जा सिद्धांत बल में निहित विचरणात्मक कथन प्रदान करते हैं। Crotti, 1888 और Engesser, 1889 के कार्य द्वारा विकसित ये सिद्धांत कहते हैं कि सभी स्थैतिक रूप से अनुमेय प्रतिबल क्षेत्रों में वास्तविक समाधान पूरक ऊर्जा को न्यूनतम करता है। स्वतः साम्य संतुष्ट करने वाली प्रतिबल मान्यताओं से आरंभ करके, विकृतियाँ प्राप्त करने के लिए संघटनात्मक नियम लागू करके और फिर ऊर्जा न्यूनतमीकरण द्वारा सुसंगति लागू करके यह द्वैत उपागम समान रूप से सुनिश्चित करता है कि तीनों आवश्यकताएँ पूरी हों—किंतु उन्हें विपरीत क्रम में पार करता है। यह सूत्रीकरण कंप्यूटर युग से पूर्व संरचनात्मक विश्लेषण पर प्रभावी बल विधि और नम्यता उपागमों का आधार है। Castigliano, 1879 के प्रमेय, जो ऊर्जा अवकलजों को क्रमशः विस्थापनों और बलों से संबंधित करते हैं, वे व्यावहारिक साधन प्रदान करते हैं जिनसे अभियंताओं ने इन सिद्धांतों का उपयोग किया।

संघटनात्मक नियमों की केंद्रीय भूमिका

संघटनात्मक नियम इस संरचना के प्रत्येक स्तर पर केंद्रीय स्थान रखते हैं। न्यूटनीय सूत्रीकरण में वे प्रतिबल और विकृति प्रदिशों के बीच बीजीय संबंध प्रदान करते हैं। लाग्रांजीय सूत्रीकरण में वे वह विकृति-ऊर्जा घनत्व परिभाषित करते हैं जिससे सभी ऊर्जात्मक राशियाँ व्युत्पन्न होती हैं। बल और विरूपण को जोड़ने वाले पदार्थ व्यवहार के बिना किसी भी सूत्रीकरण के दोनों पक्ष असंबद्ध बने रहेंगे—साम्य विस्थापन के विषय में कुछ नहीं बताएगा और सुसंगति प्रतिबल के विषय में कुछ नहीं बताएगी।

लाग्रांजीय स्तर पर अपने द्वैत मार्गों सहित चित्र 11.6 की सममित संरचना बताती है कि सही रूप से लागू करने पर दृढता विधि और नम्यता विधि को समान परिणाम क्यों देने चाहिए। वे समान अंतर्निहित भौतिकी के भिन्न पारगमन हैं—एक विस्थापनों से आरंभ होकर (पहले सुसंगति संतुष्ट करते हुए) साम्य की ओर बढता है, दूसरा बलों से आरंभ होकर (पहले साम्य संतुष्ट करते हुए) सुसंगति की ओर। दोनों अंतराल पाटने के लिए संघटनात्मक नियम लागू करते हैं। कोई भी विधि तीन मूलभूत आवश्यकताओं से बच नहीं सकती; वे केवल उनके प्रवर्तन के क्रम में भिन्न होती हैं।

11.9 योगदानकर्ताओं का कालानुक्रमिक सारांश

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 11.1: संरचनात्मक विश्लेषण में योगदानकर्ता: एक कालानुक्रमिक सारांश

लेखक	तिथि	संदर्भ	मुख्य योगदान
परिवर्ती आधार			
Leonhard Euler (1707–1783)	1744		परिवर्तनों का कलन; परिमित तत्त्व विधि के आधारभूत परिवर्ती सिद्धांत
Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)	1788		विश्लेषणात्मक यांत्रिकी; यांत्रिकी का परिवर्ती सूत्रीकरण
Lord Rayleigh (1842–1919)	1870s		कंपन के लिए ऊर्जा विधियाँ; Rayleigh-Ritz विधि की पूर्ववर्ती पद्धति
Walther Ritz (1878–1909)	1909	(Ritz, 1909)	परिवर्ती सन्निकटन विधि; विस्थापन-आधारित परिमित तत्त्वों का संकल्पनात्मक प्रारूप
Boris Galerkin (1871–1945)	1915	(Galerkin, 1915)	भारित अवशेष विधि; परिमित तत्त्व विधि को परिवर्ती सिद्धांतों पर निर्भरता से मुक्त करना
Richard Courant (1888–1972)	1943	(Courant, 1943)	त्रिकोणीय उपक्षेत्रों पर खंडशः परीक्षण फलन; संहत आधार के माध्यम से विरल आव्यूह
हस्त-परिकलन विधियाँ: बल विधि			
Claude-Louis Navier (1785–1836)	1826	(Navier, 1826)	स्थैतिकतः अनिर्धार्य धरनों का प्रथम व्यवस्थित विवेचन
Benoît Clapeyron (1799–1864)	1857	(Clapeyron, 1857)	सतत धरनों के लिए त्रि-आघूर्ण समीकरण
Alfred Clebsch (1833–1872)	1862	(Clebsch, 1862a)	3D पिन-संधित कैंचियों के लिए आरंभिक विस्थापन विधि
James Clerk Maxwell (1831–1879)	1864	(Maxwell, 1864c)	व्युत्क्रमता प्रमेय; नम्यता गुणांक
Christian Otto Mohr (1835–1918)	1868	(Mohr, 1868)	आघूर्ण-क्षेत्रफल प्रमेय; संयुग्मी धरन सादृश्य; Mohr वृत्त
Emil Winkler (1835–1888)	1868	(Winkler, 1875)	गतिमान भारों के लिए आरंभिक प्रभाव-रेखा सिद्धांत
Philipp von Seidel (1821–1896)	1873	(Seidel, 1873)	रैखिक निकायों के लिए पुनरावृत्तीय विधि (Gauss-Seidel)

अगले पृष्ठ पर जारी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सारणी 11.1 पिछले पृष्ठ से जारी

लेखक	तिथि	संदर्भ	मुख्य योगदान
Alberto Castigliano (1847–1884)	1879	(Castigliano, 1879)	ऊर्जा विधियाँ; विकृति ऊर्जा को बलों और विस्थापनों से संबद्ध करने वाले प्रमेय
Heinrich Manderla	1880		संधि-घूर्णनों को अज्ञात राशियाँ मानकर पुनरावृत्तीय ढाँचा विश्लेषण
Barré de Saint-Venant (1797–1886)	1883	(Saint-Venant, 1855c)	Clebsch के कार्य को Navier के पूर्ववर्ती कार्य से जोड़ने वाली टिप्पणी
Heinrich Müller-Breslau (1851–1925)	1886	(Müller-Breslau, 1886)	बल विधि का व्यवस्थित रूप; प्रभाव-रेखा सिद्धांत
हस्त-परिकलन विधियाँ: विस्थापन विधि			
Axel Bendixen (1881–1946)	1914	(Bendixen, 1914)	प्रवणता-विक्षेप समीकरण (यूरोपीय विकास)
George A. Maney	1915	(Maney, 1915)	प्रवणता-विक्षेप विधि (अमेरिकी व्यवस्थापन)
Hardy Cross (1885–1959)	1930	(Cross, 1932)	आघूर्ण-वितरण विधि
Joseph E. Goldberg	1934	(Goldberg, 1934)	पार्श्व भार विश्लेषण के लिए प्रवणता-वितरण
Richard Southwell (1888–1970)	1935	(Southwell, 1935)	शिथिलन विधि
परिमित अंतर			
Karl Pearson (1857–1936)	1905	(Pearson, 1905)	बाँधों पर प्रायोगिक अन्वेषण
Lewis Fry Richardson (1881–1953)	1911	(Richardson, 1911)	प्रतिबल विश्लेषण के लिए परिमित अंतर विधि
आव्यूह विधियाँ और परिमित तत्त्व			
John Argyris (1913–2004)	1954	(Argyris and Kelsey, 1960)	आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण; ऊर्जा सिद्धांत; अरैखिक विश्लेषण के आधार
M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp	1956	(Turner et al., 1956)	प्रत्यक्ष दृढता विधि; त्रिकोणीय समतल-प्रतिबल तत्त्व

अगले पृष्ठ पर जारी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सारणी 11.1 पिछले पृष्ठ से जारी

लेखक	तिथि	संदर्भ	मुख्य योगदान
Michael J. Turner (1909–1985)	1959	(Turner, 1959)	प्रत्यक्ष दृढता विधि का औपचारिक निरूपण
Ray W. Clough (1920–2016)	1960	(Clough, 1960)	“finite element method” पद का निर्माण; सतत माध्यम तक विस्तार
Edward L. Wilson (1931–2024)	1960	(Wilson, 1960)	प्रथम अरैखिक परिमित तत्त्व विश्लेषण
Nathan M. Newmark (1910–1981)	1959		गतिक विश्लेषण के लिए काल-क्रमण विधि
E.L. Wilson & R.W. Clough	1962	(Wilson and Clough, 1962)	प्रथम गतिक परिमित तत्त्व विश्लेषण (Newmark विधि का आव्यूह सूत्रीकरण)
O.C. Zienkiewicz (1921–2009) & Y.K. Cheung	1965	(Zienkiewicz, 1967)	परिमित तत्त्व पर प्रथम पाठ्यपुस्तक
J.S. Przemieniecki (1924–2015)	1968	(Przemieniecki, 1968)	आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण पर व्यवस्थित पाठ्यपुस्तक
Gilbert Strang & George Fix	1973	(Strang and Fix, 1973)	परिमित तत्त्व विधि के लिए गणितीय अभिसरण सिद्धांत

11.9.1 निष्कर्ष

इस अध्याय में सतत धरनों पर Navier के अग्रणी कार्य से लेकर स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं की सामान्य विधियों के विकास तक संरचनात्मक विश्लेषण की प्रगति का अनुशीलन किया गया है, जिसका चरमोत्कर्ष समकालीन व्यवहार में प्रधान आव्यूह विधियों और परिमित तत्त्व विश्लेषण के रूप में हुआ।

इस ऐतिहासिक क्रम से अनेक विषय उभरते हैं:

विशिष्ट से सामान्य की ओर: आरंभिक विधियाँ (Navier के सतत धरन, Clapeyron के त्रि-आघूर्ण) विशिष्ट संरचनात्मक रूपों पर केंद्रित थीं। क्रमशः अधिक सामान्य विधियाँ सामने आईं—Maxwell का व्युत्क्रमता प्रमेय, Castigliano की ऊर्जा विधियाँ और Müller-Breslau की व्यवस्थित बल विधि। सामान्यता की ओर यह प्रगति आव्यूह विधियों में अपने चरम पर पहुँची, जिनमें सभी संरचनाओं (और अंततः सभी सातत्यकों) का एकीकृत ढाँचे में निरूपण होता है।

बल और विस्थापन विधियों की पूरकता: उन्नीसवीं शताब्दी में दोनों उपागम विकसित हुए—बल विधि (Maxwell, Mohr, Castigliano) और विस्थापन विधि (प्रवणता-विक्षेप, आघूर्ण-वितरण)। संरचना और विश्लेषक की प्राथमिकताओं के अनुसार प्रत्येक के अपने लाभ थे। आव्यूह विधियों ने विस्थापन विधि के अभिकलनीय लाभ बनाए रखते हुए इन उपागमों को एकीकृत किया।

सिद्धांत और अभिकलन: प्रत्येक प्रमुख उन्नति तत्कालीन उपलब्ध अभिकलनीय प्रौद्योगिकी से

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संभव हुई। Clapeyron के समीकरण हस्त-गणना से हल किए जा सकते थे। आघूर्ण-वितरण ने बहुमंजिला ढाँचों के विश्लेषण को व्यावहारिक बनाया। आव्यूह विधियों के लिए अंकीय संगणकों की आवश्यकता थी। सैद्धांतिक अंतर्दृष्टि और अभिकलनीय क्षमता की पारस्परिक क्रिया ने समूची प्रगति को प्रेरित किया।

भौतिक अंतर्दृष्टि और गणितीय कठोरता: सर्वोत्तम विधियों ने भौतिक समझ (Mohr की ज्यामितीय व्याख्याएँ, Cross का पुनरावृत्तीय संतुलन) को गणितीय कठोरता (Maxwell का व्युत्क्रमता प्रमेय, ऊर्जा सिद्धांत) के साथ संयोजित किया। इस संयोजन ने विधियों को विश्वसनीय और शिक्षणयोग्य, दोनों बनाया।

सातत्यक यांत्रिकी के साथ निरंतरता: संरचनात्मक विश्लेषण सदैव Cauchy, Navier और उनके समकालीनों द्वारा स्थापित सातत्यक यांत्रिकी पर आधारित रहा। ऊर्जा सिद्धांत, संगतता प्रतिबंध और संघटक संबंध—सभी का मूल उन्नीसवीं शताब्दी के आरंभ में विकसित आधारभूत सिद्धांत में था।

परिष्कृत परिमित तत्त्व सॉफ्टवेयर के साथ कार्यरत आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषक बौद्धिक विकास की एक दीर्घ शृंखला के अंतिम सिरे पर खड़ा है। सॉफ्टवेयर द्वारा स्वतः परिकलित तत्त्व दृढता आव्यूह प्रत्यास्थता के उन्हीं सिद्धांतों को मूर्त रूप देते हैं जिन्हें Navier ने प्रथम सिद्धांतों से व्युत्पन्न किया था। समुच्चयन प्रक्रिया Maxwell के व्युत्क्रमता प्रमेय की प्रतिध्वनि है। समाधान कलन-विधियाँ Bendixen, Maney और Cross द्वारा विकसित विस्थापन-विधि के दर्शन को कार्यान्वित करती हैं।

इस ऐतिहासिक विकास की समझ केवल ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्य ही नहीं देती; यह इस बात की अंतर्दृष्टि भी प्रदान करती है कि विधियाँ अपने वर्तमान रूप में क्यों कार्य करती हैं, कब उपयुक्त होती हैं और उनका विस्तार किस प्रकार किया जा सकता है। शास्त्रीय विधियाँ शिक्षण (भौतिक अंतर्बोध प्रदान करने), प्रारंभिक विश्लेषण (शीघ्र आकलन देने) और सत्यापन (संगणकीय परिणामों की हस्त-गणनाओं से जाँच करने) के लिए अभी भी मूल्यवान हैं।

जैसे-जैसे संरचनात्मक विश्लेषण अरैखिक विश्लेषण, गतिक अनुक्रिया, इष्टतमीकरण और chap:trustregion परिमाणीकरण की ओर विकसित होता है, वह दो शताब्दियों में निर्मित आधारों पर आगे बढ़ता है। उन्नीसवीं शताब्दी के अग्रदूतों ने सातत्यक यांत्रिकी के अमूर्त गणित को संरचनात्मक विश्लेषण की व्यावहारिक विधियों में रूपांतरित कर जो संश्लेषण साधा, उसने एक ऐसा अनुशासन निर्मित किया जो अपनी जड़ों के प्रति निष्ठावान रहते हुए निरंतर विकसित हो रहा है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Vermeer, The Astronomer (1668)

विद्वान का हाथ आकाशीय ग्लोब की ओर बढ़ता है: सिद्धांत अंततः यथार्थ की संरचना को ग्रहण कर रहा है।

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

12 अभिकलनीय विधियाँ

सारांश

यह अध्याय संरचनात्मक विश्लेषण में अभिकलनीय विधियों के विकास का अनुशीलन करता है—ऐसी विधियाँ जिनमें विविक्त समीकरण-निकायों का समाधान मूलतः आवश्यक है और जो इसीलिए अंकीय अभिकलन के आगमन के बाद ही व्यावहारिक बनीं। प्रतिबल विश्लेषण के लिए Richardson की परिमित अंतर विधि (1911) से आरंभ करके हम Argyris के ऊर्जा सूत्रीकरणों और प्रत्यक्ष दृढता विधि को जन्म देने वाले Boeing-Berkeley सहयोग के माध्यम से आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण के उद्भव का अनुसरण करते हैं। अध्याय का चरम Clough द्वारा परिमित तत्त्व विधि के नामकरण (1960), बाँध विश्लेषण में उसके प्रथम अनुप्रयोगों और अरैखिक तथा गतिक क्षमताओं के तीव्र विकास में है। बल विधि को त्यागने का NASTRAN निर्णय (1969) उन विस्थापन-आधारित सूत्रीकरणों की विजय को चिह्नित करता है जो आधुनिक संगणकीय यांत्रिकी को परिभाषित करते हैं।

12.1 सातत्यकों के लिए परिमित अंतर विधियाँ . 424
12.1.1 Pearson और Richardson: बाँध प्रतिबल विश्लेषण (1905–1911) 425
12.1.2 पुनरावृत्तीय समाधान विधियाँ . . 427
12.2 आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण 427
12.2.1 Kron: जालक्रम विश्लेषण और संरचनात्मक सादृश्य 428
12.2.2 Johann H. Argyris (1913–2004) 428
12.2.3 वांतरिक्ष (Delta wings) संदर्भ: 1950s 429
12.2.4 NBS/Navy; Samuel Levy . . 430
12.2.5 Boeing; Turner और प्रत्यक्ष दृढता विधि 431
12.3 परिमित तत्त्व विधि 435
12.3.1 गणितीय आधार 436
12.3.2 प्राथमिकता और पारिभाषिकी: परिमित तत्त्व विधि क्या है (और क्या नहीं है) 439
12.3.3 Ray Clough (1920–2016) . . 440
12.3.4 आरंभिक कंप्यूटर और Berkeley कार्यक्रम 441
12.3.5 Norfork बाँध: प्रथम प्रमुख अनुप्रयोग 442
12.3.6 अरैखिक और गतिक विश्लेषण (1960–1962) 443
12.4 समेकन और प्रसार 444
12.4.1 Oleg Zienkiewicz (1921–2009) 444
12.4.2 Wright-Patterson सम्मेलन (1965) 445
12.4.3 Richard Gallagher (1927–1997) 445
12.4.4 बल विधि बनाम दृढता विधि विवाद 445
12.4.5 NASTRAN निर्णय (1969) . . 446
12.4.6 सामान्यीकरण 447
12.4.7 पाठ्यपुस्तकें और विश्वव्यापी अंगीकरण 447
12.4.8 वर्तमान प्रभाव और अनुप्रयोग 448
12.5 सारांश और प्रमुख योगदान 449
12.6 निष्कर्ष 451

12.1 सातत्यकों के लिए परिमित अंतर विधियाँ

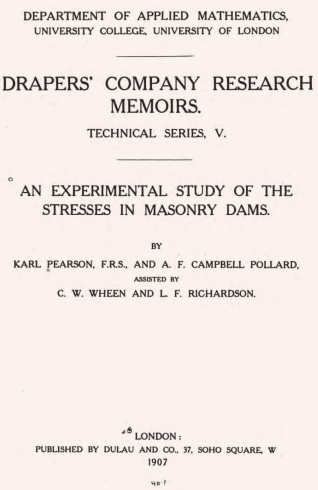
अध्याय 11 की हस्त-गणना विधियाँ विविक्त संरचनात्मक निकायों—ढाँचों, कैंचियों और सतत धरनों—पर केंद्रित थीं, किंतु अभिकलनीय मापक्रम की मूलभूत सीमाओं से बाधित थीं। एक साधारण बहुमंजिला ढाँचे में भी 40–50 विस्थापन अज्ञात हो सकते थे; समीकरणों के निर्माण और हस्त-विलोपन तथा पश्च-प्रतिस्थापन में कई दिनों का एकाग्र श्रम लग सकता था। पुनरावृत्तीय प्रक्रियाओं ने यह भार घटाया, किंतु वे श्रमसाध्य रहीं और स्वेच्छ जटिलता की समस्याओं के लिए कोई व्यवस्थित मार्ग नहीं देती थीं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के इन विकासों के समानांतर अन्वेषण की एक पृथक धारा सतत माध्यमों को नियंत्रित करने वाले आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने का प्रयास कर रही थी। परिमित अंतर विधि अवकलजों को जालक पर बीजीय अंतरों से प्रतिस्थापित करती है और इस प्रकार विश्लेषणात्मक साधनों से असाध्य प्रत्यास्थता समस्याओं के लिए अंकीय मार्ग प्रदान करती है—ऐसी संभावनाएँ खोलते हुए जिन्हें हस्त-विधियाँ कभी संबोधित नहीं कर सकती थीं।

12.1.1 Pearson और Richardson: बाँध प्रतिबल विश्लेषण (1905–1911)

Karl Pearson (1857–1936), University College London में प्राध्यापक और गणितीय सांख्यिकी के संस्थापक व्यक्तित्वों में से एक, को Todhunter and Pearson, 1893 के महत्त्वपूर्ण कार्य को पूर्ण करने का दायित्व तब सौंपा गया था जब उनकी आयु अभी 40 वर्ष भी नहीं थी। गणितज्ञ के लिए रोचक रूप से वे बाद में 1900s के आरंभ में अनुप्रयुक्त प्रत्यास्थता की समस्याओं की ओर आकर्षित हुए। इनमें चिनाई बाँधों में प्रतिबल और अपरूपण-वितरण सम्मिलित थे, जिनका उन्होंने प्रतिरूप प्रयोगों तथा संबद्ध सैद्धांतिक कार्य के माध्यम से अन्वेषण किया (Pearson, 1905; Pearson et al., 1907), चित्र 12.1।


DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS,
UNIVERSITY COLLEGE, UNIVERSITY OF LONDON

DRAPERS' COMPANY RESEARCH MEMOIRS.

TECHNICAL SERIES, V.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE STRESSES IN MASONRY DAMS.

BY
KARL PEARSON, F.R.S., AND A. F. CAMPBELL POLLARD,
ASSISTED BY
C. W. WHEEN AND L. F. RICHARDSON.

LONDON:
PUBLISHED BY DULAU AND CO., 37, SOHO SQUARE, W
1907

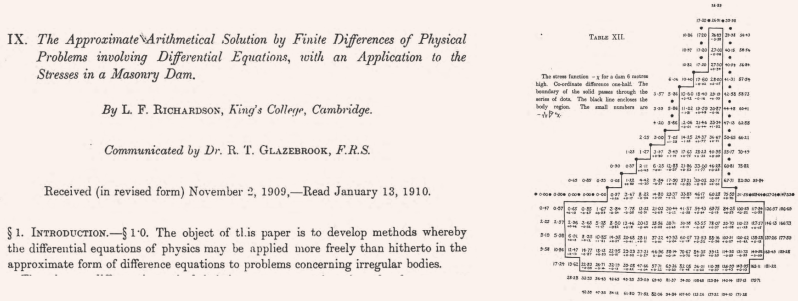
चित्र 12.1: बाँधों पर Pearson का प्रायोगिक कार्य (Pearson et al., 1907)

Pearson और उनके सहयोगियों ने अपनी उपलब्धियों की सीमाओं को स्पष्टतः स्वीकार किया। उनके 1907 के संस्मरण की प्रस्तावना इस बात पर बल देती है कि यथार्थपरक बाँध-परिरेखाओं के लिए सन्निकट समाधान खोजने में बहुत समय लगाया गया था:

> University College, London के अनुप्रयुक्त गणित विभाग में पिछले तीन वर्षों के दौरान प्रतिरूप बाँधों पर किए गए कार्य की प्रस्तुत रिपोर्ट में, जैसा कि ऐसे अन्वेषणों में प्रायः होता है, किए गए अथवा प्रयास किए गए प्रायोगिक और सैद्धांतिक अनुसंधानों के दसवें भाग का भी विवरण कठिनता से समाहित है। समीकरण (iii) के ऐसे यथातथ्य नहीं, बल्कि सन्निकट समाधान प्राप्त करने के प्रयास में कई सप्ताह—और कई महीने कहना भी अतिशयोक्ति न होगा—व्यतीत हुए हैं, जो (a) बाँध की वर्तमान प्रकार की परिरेखाओं और (b) आधार पर अपरूपण-वितरण के उस सामान्य रूप के

> अनुकूल हों जिसे हमने प्रयोगात्मक रूप से निर्धारित किया है। यदि अब तक इन प्रयासों में हमें सफलता नहीं मिली है, तो इससे यह निष्कर्ष नहीं निकलता कि आगे चलकर हमारे अथवा संभवतः दूसरों के प्रयास सफल नहीं होंगे।
>
> Pearson et al., 1907 *An experimental study of the stress in Masonry Dams*

इस कार्य में स्वीकृत सहायकों में Lewis Fry Richardson (1881–1953) भी थे। यद्यपि Pearson ने स्वीकार किया कि उनके विश्लेषणात्मक प्रयास असफल रहे, उन्होंने यह पहचाना कि बाद में अन्य लोग सफल हो सकते हैं—और वास्तव में कुछ वर्षों के भीतर स्वयं Richardson ने प्रत्यास्थता के नियंत्रक आंशिक अवकल समीकरणों को *जालक* पर *परिमित-अंतर समीकरणों* से प्रतिस्थापित करने के आरंभिक व्यवस्थित अभियांत्रिकी अनुप्रयोगों में से एक प्रस्तुत किया। इसमें *अनियमित परिसीमाओं* (“boundary points” बनाम “body points”) और परिणामी बीजीय निकाय को हल करने की अभिकलनीय वास्तविकता पर व्यावहारिक ध्यान दिया गया था (Richardson, 1911 PDF), चित्र 12.2।[1]



IX. *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam.*

By L. F. Richardson, *King's College, Cambridge.*

Communicated by Dr. R. T. Glazebrook, *F.R.S.*

Received (in revised form) November 2, 1909,—Read January 13, 1910.

§ 1. Introduction.—§ 1·0. The object of tl.is paper is to develop methods whereby the differential equations of physics may be applied more freely than hitherto in the approximate form of difference equations to problems concerning irregular bodies.

Table XII.

चित्र 12.2: बाँध-प्रतिबल समस्या के लिए Richardson का परिमित-अंतर विश्लेषण (Richardson, 1911 PDF)

इस संदर्भ में Richardson के योगदान का सार इस प्रकार दिया जा सकता है:

1. केंद्रीय अंतरों के माध्यम से सातत्यक समस्या को जालक-बिंदु समीकरणों के परिमित समुच्चय में रूपांतरित करना
2. परिसीमा-बिंदुओं के विशेष उपचार द्वारा ज्यामितीय जटिलता का प्रबंधन करना
3. परिणामी रैखिक निकाय को क्रमिक सन्निकटन द्वारा हल करना—एक अर्ध-पुनरावृत्तीय समाधान विधि जो अब व्यापक रूप से *Richardson!method* कहलाती है—और उसे जालक परिशोधन तथा बहिर्वेशन के उन विचारों से पूरित करना जो आगे चलकर उनके नाम से दृढतापूर्वक संबद्ध हुए

क्रमशः परिशोधित जालकों पर प्राप्त समाधानों से यथातथ्य समाधान का अनुमान लगाने की यह बहिर्वेशन तकनीक अब सार्वभौमिक रूप से *Richardson!extrapolation* कहलाती है और अंकीय विश्लेषण का आधारस्तंभ बनी हुई है।

[1] Richardson के शोधपत्र को प्रायः उसके पत्रिका-खंड वर्ष (1911) से उद्धृत किया जाता है; यह कार्य स्वयं 1909 में प्राप्त हुआ और 1910 के आरंभ में पढा गया था।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संरचनात्मक अभिकलन में स्थान। जटिल ज्यामितियों के स्थानिक विविक्तीकरण के लिए परिमित अंतरों को बाद में बड़े स्तर पर परिमित तत्त्व विधि ने प्रतिस्थापित कर दिया। तथापि, परिमित-अंतर *काल-क्रमण* (जैसे केंद्रीय-अंतर योजनाएँ, Newmark विधि) संरचनात्मक गतिकी में अत्यावश्यक बना हुआ है और अनेक परिमित तत्त्व कार्यान्वयन FEM द्वारा स्थानिक विविक्तीकरण को परिमित अंतरों द्वारा काल समाकलन के साथ संयोजित करते हैं।

12.1.2 पुनरावृत्तीय समाधान विधियाँ

दीर्घवृत्तीय PDEs के परिमित अंतर विविक्तीकरण से विरल और संरचित गुणांक आव्यूहों वाले विशाल रैखिक समीकरण-निकाय उत्पन्न होते हैं। Richardson ने पहचाना कि बड़े निकायों के लिए प्रत्यक्ष समाधान (Gaussian elimination) अव्यावहारिक था और उन्होंने पुनरावृत्तीय उपागम विकसित किए।

Gauss–Seidel संबंध। Richardson द्वारा प्रयुक्त पुनरावृत्तीय विधि उस विधि से निकटता से संबंधित थी जिसका वर्णन Philipp Ludwig von Seidel ने 1874 में (Seidel, 1873 PDF) न्यूनतम-वर्ग समस्याओं से उत्पन्न निकायों को हल करने के लिए किया था (§L.2.3.1)। अन्य सभी अज्ञातों के नवीनतम मानों का उपयोग करते हुए प्रत्येक अज्ञात को क्रम से अद्यतन करने वाली यह विधि संभवतः इससे पहले Gauss ने अपने छात्र Gerling (1823) को बताई थी, यद्यपि Seidel संभवतः इससे अनभिज्ञ थे। यह तकनीक *Gauss–Seidel विधि* के नाम से जानी गई। §27.4 आघूर्ण-वितरण विधि और Gauss–Seidel पुनरावृत्तीय विश्लेषण प्रक्रिया के निकट साम्य का उल्लेखनीय उदाहरण प्रस्तुत करता है।

क्रमिक अति-शिथिलन (SOR)। अति-शिथिलन प्राचल $\omega > 1$ प्रस्तुत करने से महत्त्वपूर्ण त्वरण प्राप्त हुआ:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

जहाँ $r_i^{(k)}$ iवें समीकरण का अवशेष है। ω का इष्टतम चयन समस्या के वर्णक्रमीय गुणों पर निर्भर करता है; अनुकूल प्रकरणों में SOR मूल Gauss–Seidel पुनरावृत्ति की तुलना में अभिसरण को नाटकीय रूप से तीव्र कर सकता है।

ये पुनरावृत्तीय तकनीकें न केवल परिमित अंतर समस्याओं के लिए, बल्कि बाद में परिमित तत्त्व विविक्तीकरणों से उत्पन्न होने वाले विशाल विरल निकायों के लिए भी अत्यावश्यक सिद्ध हुईं।

12.2 आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण

अध्याय 11 की हस्त-गणना विधियों—प्रवणता-विक्षेप और आघूर्ण-वितरण—में आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण के सभी अवयव अंतर्निहित थे। आवश्यकता थी: (1) परिकलनों को व्यवस्थित करने के लिए सुव्यवस्थित आव्यूह संकेतन और (2) परिणामी निकायों को सँभाल सकने वाली अभिकलन मशीनरी। दोनों द्वितीय विश्व युद्ध के बाद के दशक में सामने आए।

कंप्यूटर ने यह नहीं बदला कि संरचनात्मक विश्लेषण क्या परिकलित करता है; उसने यह बदला कि संरचनात्मक विश्लेषण क्या परिकलित कर सकता है।

12.2.1 Kron: जालक्रम विश्लेषण और संरचनात्मक सादृश्य

General Electric में कार्यरत Gabriel Kron (1901–1968) ने विद्युत जालक्रमों के विश्लेषण के लिए ऐसी प्रदिश विधियाँ विकसित कीं जिनका संरचनात्मक विश्लेषण पर गहरा प्रभाव पड़ा। “Tensorial Analysis and Equivalent Circuits of Elastic Structures” पर उनके 1944 के शोधपत्र (Kron, 1944) ने विद्युत जालक्रमों और संरचनात्मक निकायों के बीच गहन सादृश्य प्रदर्शित किए।

Kron की “method of tearing”—एक विशाल निकाय को उपनिकायों में विघटित करना, प्रत्येक का पृथक विश्लेषण करना और फिर संगतता प्रतिबंधों के माध्यम से उन्हें पुनः जोड़ना—ने परिमित तत्त्व विश्लेषण की आधुनिक उपसंरचन तकनीकों का पूर्वाभास दिया। आरंभ में संरचनात्मक अभियंताओं के लिए अपरिचित रहा उनका प्रदिश संकेतन निर्देशांक निकायों के बीच रूपांतरण के लिए गणितीय रूप से कठोर ढाँचा प्रदान करता था।

12.2.2 Johann H. Argyris (1913–2004)

John Argyris (1913–2004), चित्र 12.14a, ने 1954–1955 के दौरान *Aircraft Engineering* के चार अंकों में लेखों की एक शृंखला प्रकाशित की जो आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण के औपचारिक रूप देने में एक प्रमुख मील का पत्थर है। बाद में इन्हें Argyris and Kelsey, 1960 में संकलित और विस्तारित किया गया।

Argyris ने Castigliano के ऊर्जा प्रमेयों और Maxwell के व्युत्क्रमता सिद्धांतों को स्पष्ट रूप से आधार बनाया और उन्हें व्यवस्थित अभिकलन के अनुकूल आव्यूह संकेतन में व्यक्त किया। उन्होंने बल (नम्यता) और विस्थापन (दृढता) सूत्रीकरणों की द्वैतता पर बल दिया:

> नम्यताओं और दृढताओं के विकासों के बीच सादृश्य ... स्पष्ट रूप से दर्शाता है कि अज्ञात राशियों के रूप में बलों वाले संरचना-विश्लेषण के समानांतर अज्ञात राशियों के रूप में विरूपणों वाला संबद्ध सिद्धांत भी होना चाहिए।
>
> Argyris and Kelsey, 1960 *Energy theorems and structural analysis*

उनकी सारणी II (चित्र 12.7a) में साथ-साथ प्रस्तुति ने प्रदर्शित किया कि शास्त्रीय बल विधि और विस्थापन विधि पूर्णतः समरूप चरणों में आगे बढ़ती हैं—एक संकल्पनात्मक स्पष्टीकरण जिसने अभियंताओं को भिन्न उपागमों के आधार में निहित गणितीय एकता समझने में सहायता की।

Argyris के योगदानों में सम्मिलित थे:

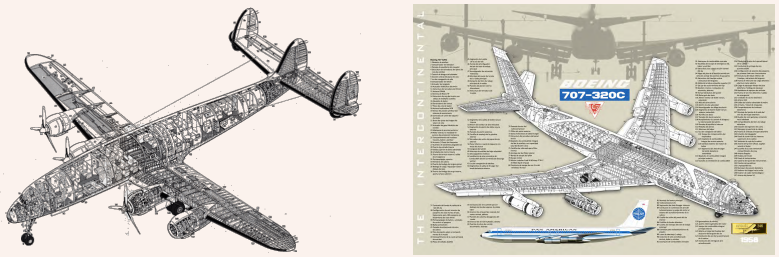
- संरचनात्मक विश्लेषण के लिए व्यवस्थित आव्यूह संकेतन
- आव्यूह रूप में ऊर्जा सिद्धांतों का स्पष्ट निरूपण
- शास्त्रीय विधियों को अभिकलनीय कार्यान्वयन से जोड़ने वाला ढाँचा
- वृद्धिशील सूत्रीकरणों के माध्यम से अरैखिक विश्लेषण का आधार

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

12.2.3 वांतरिक्ष (Delta wings) संदर्भ: 1950s

ऐतिहासिक संदर्भ 1940s के उत्तरार्ध और 1950s के आरंभ में पारंपरिक सीधे पंखों से पश्चकर्षित और delta-wing विन्यासों की ओर तीव्र संक्रमण ने ऐसी संरचनात्मक विश्लेषण समस्याएँ उत्पन्न कीं जिनके लिए शास्त्रीय धरन-आधारित विधियाँ अब पर्याप्त नहीं थीं। Delta wings में निम्न अभिमुखता अनुपात, पतली आवरण चादरें, असमांतर स्पार और अत्यधिक अतिरिक्त भार-पथ संयुक्त थे, जिससे पंख-विस्तार दिशा के नमन, जीवा दिशा के नमन और मरोड़ के बीच प्रबल युग्मन उत्पन्न होता था। परिणामी प्रतिबल और विरूपण प्रतिरूपों को सरलीकृत एकविमीय आदर्शीकरणों से विश्वसनीय रूप से निरूपित नहीं किया जा सकता था, विशेषतः मूल क्षेत्र और बहु-स्पार विन्यासों में। ये कमियाँ केवल सैद्धांतिक नहीं थीं: ऐसे समय में जब निष्पादन की गुंजाइश घट रही थी और प्रायोगिक पुनरावृत्ति महँगी थी, उन्होंने विमान अभिकल्प की यथार्थता और दक्षता को प्रत्यक्ष रूप से सीमित किया।

अभिकलनीय संरचनात्मक विश्लेषण को प्रेरणा मुख्यतः वांतरिक्ष उद्योग से मिली। 1950s के आरंभ तक दाबित वाणिज्यिक और सैन्य विमान (चित्र 12.3) पसलियों, स्पारों और पतले पटलों से बने जटिल समुच्चय बन चुके थे, जो अत्यधिक अतिरिक्त धरन-सदृश और खोल-सदृश विन्यास निर्मित करते थे।



(a) Lockheed Constellation (1943–1958)

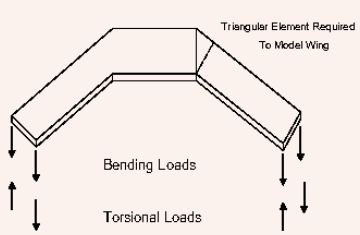
(b) Boeing 707 (1958–1979)

चित्र 12.3: 1950s के वाणिज्यिक विमान

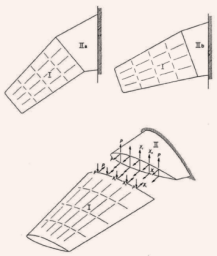
ऐसी संरचनाओं के लिए शास्त्रीय बल विधि—Maxwell, Mohr और Castigliano के कार्यों पर आधारित—तब सुयोग्य थी जब पटलों को रूढ़िवादी रूप से समतल-अपरूपण बल वहन करने वाला माना जा सकता था। अतिरिक्त बल-निकायों के विवेकपूर्ण चयन और प्रायोगिक सत्यापन के साथ उच्च अभिमुखता अनुपात वाले पश्चकर्षित पंखों को भी सँभाला जा सकता था (Felippa, 2001 PDF)। शास्त्रीय विस्थापन विधि (प्रवणता-विक्षेप) का अनुप्रयोग इसी प्रकार कंपन और वातप्रत्यास्थ विश्लेषण में हुआ, जहाँ यथार्थ विस्थापन परिकलन अत्यावश्यक थे।

किंतु सैन्य विमान की आवश्यकताएँ बदल रही थीं। पराध्वनिक उड़ान के लिए डेल्टा-आकृति पंखों को स्वेच्छ ज्यामिति के द्विविमीय पटल तत्त्वों—त्रिकोणीय और चतुर्भुजी—की आवश्यकता थी, जिन्हें अब एकविमीय सदस्यों के रूप में आदर्शीकृत नहीं किया जा सकता था (चित्र 12.4a)। इस “delta-wing challenge” ने नए विश्लेषणात्मक और अभिकलनीय उपागमों के विकास को प्रेरित किया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) पश्चकर्षित delta wing परीक्षण संरचना (Clough and Wilson, 1999)



(b) नम्यता-आधारित समाधान प्रयास (Argyris and Kelsey, 1960)

चित्र 12.4: Delta wing समस्या और आरंभिक समाधान प्रयास

12.2.4 NBS/Navy; Samuel Levy

आरंभिक शीत युद्ध काल में National Bureau of Standards (NBS, NIST का पूर्ववर्ती) ने U.S. Navy के Bureau of Aeronautics के साथ निकट और सतत अनुसंधान सहयोग बनाए रखा। उच्च-गति, पश्चकर्षित और delta-wing विन्यासों के लिए नौसैनिक आवश्यकताओं ने संरचनात्मक विश्लेषण विधियों पर अभूतपूर्व माँग रखी, विशेषतः अत्यधिक अतिरिक्त, पतली-भित्ति वाले वायुयानों में जहाँ शास्त्रीय सरलीकारी मान्यताएँ विफल हो गईं। NBS में संचालित और Navy द्वारा वित्तपोषित अनुसंधान कार्यक्रमों के माध्यम से Samuel Levy के नेतृत्व वाले Aircraft Structures Group जैसे विशिष्ट समूहों ने उभरते अंकीय अभिकलन उपकरणों के लिए स्पष्ट रूप से अभिकल्पित उन्नत विश्लेषणात्मक सूत्रीकरण विकसित किए।

Levy, 1953 एक मील का पत्थर है, किंतु दुर्भाग्य से वांतरिक्ष साहित्य के बाहर इसे विरल ही उद्धृत किया जाता है। यह delta-wing समस्या को अभिकलनीय रूप से सुगम, आव्यूह-उन्मुख ढंग से सूत्रबद्ध करने के आरंभिक व्यवस्थित प्रयासों में से एक है और नीचे विवेचित Boeing के कार्य से पहले का है।

> विश्लेषण की विधि संगत विरूपणों की है। पंख द्वारा वहन किए गए भार को (1) पंख-विस्तार दिशा के नमन में स्पारों और आवरण चादर द्वारा वहन किए गए भार, (2) जीवा दिशा के नमन में पसलियों और आवरण चादर द्वारा वहन किए गए भार तथा (3) मरोड में आवरण चादर द्वारा वहन किए गए भार का योग माना जाता है। इन तीनों क्रियाविधियों में से प्रत्येक द्वारा वहन किया गया भार पसलियों और स्पारों के संयोजन-बिंदुओं पर विक्षेपों के पदों में निर्धारित किया जाता है। विक्षेपों के पदों में व्यक्त इन भारों के योग को संयोजन-बिंदुओं पर प्रयुक्त बाह्य बलों के बराबर रखा जाता है। परिणामी समीकरणों को संयोजन-बिंदुओं के विक्षेपों के लिए हल किया जाता है। फिर विक्षेपों से नमन और मरोड प्रतिबल निर्धारित किए जाते हैं और इस प्रकार पंख का पूर्ण विरूपण तथा प्रतिबल विश्लेषण प्राप्त होता है।
>
> Levy, 1953 *"Structural analysis and influence coefficients for delta wings"*

यह विधि *संगत विरूपणों* के सिद्धांत पर आधारित है, जिसमें पंख की संरचनात्मक अनुक्रिया को विस्थापन चरों के सीमित समुच्चय—अर्थात् पसलियों और स्पारों के संयोजन-बिंदुओं पर विक्षेपों—के पदों में पूर्णतः व्यक्त किया जाता है। संकल्पनात्मक रूप से पंख को परस्पर क्रियाशील भार-वहन क्रियाविधियों में

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विघटित किया जाता है: स्पारों और आवरण चादरों का पंख-विस्तार दिशा में नमन, पसलियों और आवरण चादरों का जीवा दिशा में नमन तथा मुख्यतः आवरण चादरों द्वारा वहन किया गया मरोड़ (चित्र 12.5)। प्रत्येक क्रियाविधि उन्हीं संयोजन-बिंदु विक्षेपों के पदों में व्यक्त आंतरिक बलों का योगदान करती है और इस प्रकार शुद्धगतिक संगतता लागू करती है।

प्रत्येक संयोजन-बिंदु पर आंतरिक बलों के योग को बाह्यतः प्रयुक्त भारों के बराबर रखकर साम्य लागू किया जाता है,

$$P_r = L_r^S + L_r^R + L_r^T,$$

जो सभी संयोजन-बिंदुओं पर समुच्चयन करने पर सार्वत्रिक संबंध देता है

$$\{P\} = [A]\{y\},$$

जहाँ $[A]$ तीन क्रियाविधियों के अध्यारोपण से प्राप्त संयोजित दृढता आव्यूह है। तब विक्षेप इस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं

$$\{y\} = [A]^{-1}\{P\},$$

जिसके बाद आंतरिक बल और प्रतिबल पश्च-प्रतिस्थापन द्वारा पुनः प्राप्त किए जाते हैं।

व्यक्तिगत सदस्यों के स्तर पर Levy स्थानीय अनुपालन संबंध $\{y\} = [\delta]\{L\}$ और समतुल्य दृढता रूप $\{L\} = [\delta]^{-1}\{y\}$ भी लिखते हैं। ऐतिहासिक दृष्टि से Levy का सूत्रीकरण विस्थापन-केंद्रित और आव्यूह-आधारित है, किंतु समस्या-विशिष्ट बना रहता है: संरचनात्मक क्रियाविधियों में विघटन delta wings के अनुरूप है और तत्त्व-अमूर्तन अभी सार्वभौमिक नहीं है। अतः आधुनिक अर्थ में परिमित तत्त्व विधि के स्थान पर उनके कार्य को दृढता-आधारित विश्लेषण की ओर एक निर्णायक संक्रमण चरण के रूप में समझना अधिक उपयुक्त है।

Levy (1953): संगत विरूपण विधि

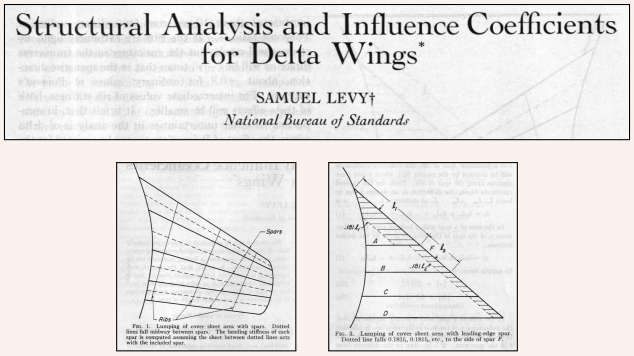
$$\{P\} = [A]\{y\}, \qquad \{y\} = [A]^{-1}\{P\},$$

जहाँ नोडीय साम्य सीधे संयोजन-बिंदु विक्षेपों के पदों में लिखा जाता है और संयोजित दृढता आव्यूह $[A]$ क्रियाविधि-आधारित दृढता योगदानों (स्पार नमन, पसली नमन, मरोड़) के अध्यारोपण से प्राप्त होता है।

12.2.5 Boeing; Turner और प्रत्यक्ष दृढता विधि

June 1952 में Ray W. Clough (1920–2016), जो उस समय UC Berkeley में युवा सहायक प्राध्यापक थे, M. Jonathan Turner के पर्यवेक्षण में Summer Faculty Fellow के रूप में Boeing से जुड़े (Clough, 2004 PDF)। Structural Dynamics Unit में नियुक्त Clough को एक विशाल delta-wing संरचनात्मक प्रतिरूप के कंपन और विक्षेप अभिलक्षणों के विश्लेषण का दायित्व दिया गया। पंख को एकविमीय धरन तत्त्वों के समुच्चय के रूप में निरूपित करने के आरंभिक प्रयास अपर्याप्त सिद्ध हुए और समकालीन delta-wing अनुसंधान में पहले ही पहचानी गई शास्त्रीय आदर्शीकरणों की सीमाओं की पुष्टि हुई।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।


Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings*

SAMUEL LEVY†

National Bureau of Standards

चित्र 12.5: Levy, 1953 का विवरण

Turner et al., 1956 में स्पष्ट रूप से व्यक्त Turner की प्रमुख संकल्पनात्मक उन्नति आंतरिक बलों के स्थान पर पूर्णतः नोडीय विस्थापनों के पदों में संरचनात्मक विश्लेषण को सूत्रबद्ध करना था। दो प्रतिबंधों को मूलभूत माना गया: बलों का साम्य और विरूपणों की संगतता। जब नोडीय विस्थापनों को अज्ञात राशियाँ माना जाता है, तब स्थैतिक निर्धार्यता अप्रासंगिक हो जाती है; सही विस्थापन क्षेत्र वह है जिसके लिए साम्य संतुष्ट होता है।

विधि का परिचय रैखिक प्रत्यास्थ स्प्रिंग के प्रारंभिक संबंध को स्मरण कराते हुए दिया जाता है,

$$F = k\,\delta,$$

और आव्यूह संकेतन का उपयोग करके उसे बहु-स्वतंत्रता-कोटि निकायों तक विस्तारित किया जाता है,

$$\{F\} = [K]\{\delta\}.$$

सार्वत्रिक दृढता आव्यूह $[K]$ व्यक्तिगत संरचनात्मक इकाइयों—धरनों, स्पारों, पसलियों, दृढकों और पट्टिकाओं—के दृढता आव्यूहों के प्रत्यक्ष योग से प्राप्त होता है, जिनमें से प्रत्येक को एक सामान्य नोडीय निर्देशांक निकाय में निर्दिष्ट किया जाता है।

प्रचालन की दृष्टि से Turner $[K]$ के स्तंभ-दर-स्तंभ निर्माण को परिभाषित करते हैं: सभी नोडीय स्वतंत्रता कोटियों को स्थिर रखते हुए एक नोड पर एकल विस्थापन घटक आरोपित किया जाता है; उस विस्थापन को लागू करने के लिए आवश्यक बल संबद्ध स्तंभ को भरते हैं। परिसीमा प्रतिबंधों को आरोपित करने से पहले आव्यूह एकवचनी होता है, जो दृढ-पिंड विधाओं को प्रतिबिंबित करता है। निर्दिष्ट विस्थापन घटकों को विलोपित करके अवलंब प्रतिबंध लागू किए जाते हैं और इस प्रकार एक अविलक्षण अपचित निकाय प्राप्त होता है।

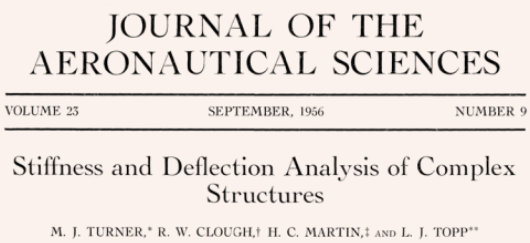
Turner (1956–1959): प्रत्यक्ष दृढता विधि

$$\{F\} = [K]\{\delta\}, \qquad [K] = \sum_{e} K^{e},$$

जहाँ प्रत्येक तत्त्व दृढता आव्यूह K^{e} अध्यारोपण द्वारा सार्वत्रिक दृढता में योगदान करता है। पहले विस्थापन हल किए जाते हैं; आंतरिक बल और प्रतिबल पश्च-प्रतिस्थापन से प्राप्त होते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Turner ने Aachen में AGARD Structures and Materials Panel की बैठक में इस प्रक्रिया का प्रथम औपचारिक निरूपण प्रस्तुत किया (Turner, 1959), जिसमें समुच्चयन की कलनविधिक प्रकृति और अंकीय अभिकलन के लिए उसकी उपयुक्तता पर बल दिया गया। उन्होंने आगे उल्लेख किया कि बड़े विक्षेपों अथवा तापीय प्रभावों से उत्पन्न अरैखिक समस्याओं का दृढता अद्यतनों के साथ वृद्धिशील रैखिकीकरण द्वारा उपचार किया जा सकता है, जिससे अरैखिक विश्लेषण के बाद के विकासों का पूर्वाभास हुआ।


JOURNAL OF THE
AERONAUTICAL SCIENCES

VOLUME 23 SEPTEMBER, 1956 NUMBER 9

Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures

M. J. TURNER,* R. W. CLOUGH,† H. C. MARTIN,‡ AND L. J. TOPP**

चित्र 12.6: आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण (Turner et al., 1956)

प्रत्यक्ष दृढता विधि का अंतिम समेकन किसी नई संकल्पनात्मक उन्नति से नहीं, बल्कि उसके व्यवस्थित संहिताकरण से हुआ। यह भूमिका Przemieniecki ने अपनी महत्त्वपूर्ण पाठ्यपुस्तक *Theory of Matrix Structural Analysis* (Przemieniecki, 1968) में निभाई। Boeing के विकासों और Turner के AGARD सूत्रीकरण पर सीधे आधारित होकर Przemieniecki ने दृढता विधि को कैंचियों, धरनों, ढाँचों, ग्रिडों और पट्टिकाओं पर लागू एकीकृत तत्त्व-आधारित ढाँचे के रूप में प्रस्तुत किया। संकेतन को मानकीकृत करके, आव्यूह विभाजन और प्रतिबंध विलोपन को स्पष्ट करके तथा कलनविधिक कार्यान्वयन पर बल देकर इस पुस्तक ने उन्नत अनुसंधान पद्धति को शिक्षणयोग्य और व्यापक रूप से अपनाए जा सकने वाले अभियांत्रिकी साधन में रूपांतरित कर दिया। इस कार्य के माध्यम से प्रत्यक्ष दृढता विधि आधुनिक आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण का आधार और परिमित तत्त्व सूत्रीकरणों की तात्कालिक पूर्ववर्ती बनी।

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §42.2.2 देखें

विधि के प्रमुख नवाचार थे:

- **तत्त्व दृढता आव्यूह:** प्रत्येक संरचनात्मक सदस्य का अभिलक्षण एक दृढता आव्यूह $[k]$ द्वारा किया जाता है जो तत्त्व-अंत बलों को अंत-विस्थापनों से संबद्ध करता है: $\{f\} = [k]\{d\}$
- **सार्वत्रिक निर्देशांकों में रूपांतरण:** स्थानीय निर्देशांकों में स्वाभाविक रूप से व्यक्त तत्त्व आव्यूहों को सामान्य सार्वत्रिक निर्देशांक निकाय में रूपांतरित किया जाता है
- **अध्यारोपण द्वारा समुच्चयन:** संयोजकता का पालन करते हुए सभी तत्त्वों के योगदानों को जोड़कर सार्वत्रिक संरचना दृढता आव्यूह $[K]$ समुच्चयित किया जाता है
- **विभाजन और समाधान:** मुख्य दृढता समीकरण $\{F\} = [K]\{D\}$ को ज्ञात और अज्ञात विस्थापनों को पृथक करने के लिए विभाजित किया जाता है और फिर अज्ञातों के लिए हल किया जाता है

- **पश्च-प्रतिस्थापन:** तत्त्व-अंत बल तत्त्व दृढता आव्यूहों और परिकलित विस्थापनों से पुनः प्राप्त किए जाते हैं

"direct" पद इस विधि को पहले की उन नम्यता (बल) विधियों से अलग करता है जिनमें यह निर्धारित करना आवश्यक था कि कौन-से बल अतिरिक्त थे। दृढता विधि अज्ञात राशियों के रूप में सीधे विस्थापनों के साथ कार्य करती है और अतिरिक्तताओं की पहचान आवश्यक नहीं होती। प्रत्येक संरचना—निर्धार्य अथवा अनिर्धार्य—का एकसमान उपचार किया जाता है (Przemieniecki, 1968)।

प्रत्यक्ष दृढता विधि की शक्ति उसके व्यवस्थित, कलनविधिक स्वरूप में निहित है:

1. तत्त्वों और नोडों को परिभाषित करना
2. तत्त्व दृढता आव्यूह उत्पन्न करना (मानक सूत्रों से)
3. सार्वत्रिक निर्देशांकों में रूपांतरित करना
4. सार्वत्रिक दृढता आव्यूह समुच्चयित करना
5. परिसीमा प्रतिबंध लागू करना
6. विस्थापनों के लिए $[K]\{D\} = \{F\}$ हल करना
7. तत्त्व बल पुनः प्राप्त करना

प्रत्येक चरण नियतात्मक नियमों का पालन करता है, जिससे यह विधि कंप्यूटर कार्यान्वयन के लिए आदर्श बनती है। 1960 तक इस उपागम को संरचनात्मक विश्लेषण प्रोग्रामों में कूटबद्ध किया जा रहा था।

12.2.5.1 नम्यता बनाम दृढता: एक सतत विवाद

1950s के मध्य से ही नम्यता विधि और दृढता विधि की श्रेष्ठता को लेकर सतत विवाद चलता रहा।

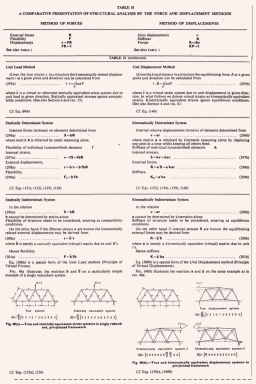
Argyris and Kelsey, 1960 की सारणी II, चित्र 12.7, की साथ-साथ प्रस्तुति ने यह दिखाने का प्रयास किया कि शास्त्रीय बल विधि और विस्थापन विधि चरणों के ठीक समान अनुक्रम से गुजरती हैं। बाद में Przemieniecki, 1968 [2] ने अनेक उदाहरणों के साथ दोनों विधियों की तुलना करने वाली अपनी मौलिक पुस्तक प्रकाशित की।

अंततः Fortran प्रोग्राम लिख सकने वाले कुछ अभियंताओं ने निष्कर्ष निकाला कि दोनों विधियों की क्षमताएँ समान थीं और किसी एक का चयन रुचि का विषय था। परंपरा का पालन करते हुए अधिकांश संरचना समूहों ने शास्त्रीय बल विधि अपनाई। किंतु दोनों को कार्यान्वित करने का प्रयास करने वाले थोड़े अभियंताओं ने महत्त्वपूर्ण अंतर देखा। और यह उस प्रत्यक्ष दृढता विधि के प्रकट होने से पहले की बात थी जिसका विघटन के अंतर्गत कोई द्वैत समकक्ष नहीं है (Felippa, 2001)।

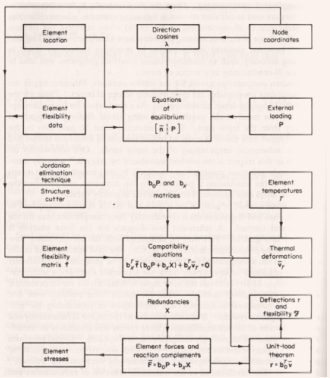
शास्त्रीय बल विधि के पुराने कूट अनेक वांतरिक्ष कंपनियों में प्रयुक्त होते रहे। यह विभाजन नई भौतिकी पर पुराने पक्ष की प्रतिक्रिया के विषय में पूछे जाने पर Einstein के उत्तर की स्मृति दिलाता है: "हमने उन्हें आश्वस्त नहीं किया; हम उनसे अधिक समय तक जीवित रहे।" 1940s और 1950s में नियुक्त

[2] इस पुस्तक ने आज प्रचलित अनेक अवधारणाओं और संकेतनों का परिचय दिया। यह इस विषय की सर्वोत्तम पुस्तकों में से एक बनी हुई है।

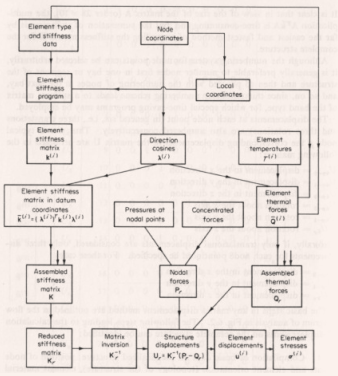
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) Argyris की सारणी-बद्ध तुलना



(b) बल विधि



(c) विस्थापन विधि

चित्र 12.7: बल और विस्थापन उपागमों की तुलना (Argyris and Kelsey, 1960; Przemieniecki, 1968)

संरचनात्मक अभियंता प्रायः 1960s में प्रबंधकीय पदों पर थे और शास्त्रीय बल विधि का पक्ष लेते थे। आखिरकार आवश्यकता केवल ऐसी कलनविधियों की थी जो कंप्यूटर को अच्छे अतिरिक्तों का स्वतः चयन करने दें। 1960s के दौरान उन “structural cutters” पर पर्याप्त प्रयास किया गया।

12.3 परिमित तत्त्व विधि

संक्रमण: प्रत्यक्ष दृढता से परिमित तत्त्वों तक। 1950s के अंत तक प्रत्यक्ष दृढता विधि परिपक्व और पूर्णतः सामान्य कलनविधिक रूप प्राप्त कर चुकी थी। संरचनाओं को विविक्त घटकों के समुच्चयों के रूप में आदर्शीकृत किया जाता था, तत्त्व दृढता आव्यूह सार्वत्रिक निकाय में समुच्चयित किए जाते थे, परिसीमा प्रतिबंध प्रतिबंध-विलोपन द्वारा लगाए जाते थे और पहले विस्थापन हल करके बल पश्च-प्रतिस्थापन से पुनः प्राप्त किए जाते थे। अनसुलझी बात अभिकलनीय प्रक्रिया नहीं, बल्कि उसकी व्याख्या और व्यापकता थी। विशेषतः प्रत्यक्ष दृढता विधि मुख्यतः कंकालीय और दृढित खोल संरचनाओं के संदर्भ में विकसित हुई थी, जहाँ तत्त्व स्वाभाविक रूप से पहचाने जाने योग्य भौतिक सदस्यों के अनुरूप होते थे।

परिमित तत्त्व विधि की ओर निर्णायक संकल्पनात्मक चरण यह पहचानना था कि अनुमानित विस्थापन क्षेत्रों से युक्त तत्त्वों में कृत्रिम उपविभाजन प्रस्तुत करके उसी दृढता-आधारित ढाँचे को *सतत माध्यमों* पर व्यवस्थित रूप से लागू किया जा सकता है। इस चरण ने आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण को गणित और यांत्रिकी में स्वतंत्र रूप से विकसित परिवर्ती तथा सन्निकटन सिद्धांतों के साथ एकीकृत किया। इस प्रकार परिमित तत्त्व विधि प्रत्यक्ष दृढता विधि के प्रतिस्थापन के रूप में नहीं, बल्कि विविक्त संरचनात्मक समुच्चयों से स्वेच्छ ज्यामिति वाले सातत्यकों तक उसके स्वाभाविक विस्तार के रूप में उभरी।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

12.3.1 गणितीय आधार

Boeing में विकसित आव्यूह विधियों में उस विधि के सभी अवयव थे जो आगे चलकर परिमित तत्त्व विधि बनी। अभियांत्रिकी व्यवहार को गणितीय सिद्धांत से जोड़ने वाले एकीकृत संकल्पनात्मक ढाँचे का अभाव था। यह ढाँचा गणितज्ञों के कार्य के माध्यम से समानांतर रूप से विकसित हो रहा था।

Ritz (1878–1909)। Walther Ritz (1878–1909) ने परिवर्ती समस्याओं के लिए एक सन्निकटन तकनीक विकसित की: अज्ञात फलन को ग्राह्य फलनों के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जाता है और गुणांक ऊर्जा-न्यूनतमीकरण से निर्धारित होते हैं (Ritz, 1909)।[3]

Galerkin (1871–1945)। Boris Galerkin (1871–1945) ने भारित अवशेष विधि के माध्यम से सन्निकटन विधियों को परिवर्ती समस्याओं से आगे विस्तारित किया (Galerkin, 1915): नियंत्रक समीकरण के अवशेष को चुने गए भार फलनों के लंबवत होना आवश्यक किया गया।

अभिकलनीय संरचनात्मक यांत्रिकी में Galerkin विधि केवल परिवर्ती तकनीकों का ऐतिहासिक सामान्यीकरण नहीं है; यह परिमित अंतरों, ऊर्जा विधियों और परिमित तत्त्वों को जोड़ने वाला एकीकृत सिद्धांत है। ग्राह्य विचरणों के समष्टि के प्रति अवशेष की लंबवतता के माध्यम से समाकल अर्थ में साम्य लागू करके Galerkin व्यवहार में प्रयुक्त दुर्बल रूप प्रदान करता है। जब परीक्षण और भार फलन समान चुने जाते हैं (Bubnov–Galerkin चयन), तब परिणामी सूत्रीकरण ठीक वही होता है जो मानक विस्थापन-आधारित परिमित तत्त्व विश्लेषण में प्रयुक्त होता है। इस अर्थ में परिमित तत्त्व विधि को पृथक आविष्कार के रूप में नहीं, बल्कि खंडशः बहुपदीय सन्निकटन समष्टियों पर लागू विशिष्ट Galerkin विविक्तीकरण के रूप में समझना सर्वोत्तम है।

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §52.3.4 देखें

Alexander Hrennikoff (1941)। रूसी-कनाडाई संरचनात्मक अभियंता Alexander Hrennikoff (1896–1984) ने प्रत्यास्थता समस्याओं को हल करने के लिए *lattice analogy* प्रस्तुत किया (Hrennikoff, 1941)। उनकी "framework method" ने सतत पट्टिका अथवा झिल्ली को एकविमीय छड़ तत्त्वों के समतुल्य जालक से प्रतिस्थापित किया, जिसका सामूहिक व्यवहार सातत्यक का सन्निकटन करता था। यद्यपि आयताकार प्रक्षेत्रों तक सीमित और स्वेच्छ ज्यामितियों को सँभालने में असमर्थ इस उपागम ने सतत प्रक्षेत्र को सरल तत्त्वों के समुच्चय में विविक्त करने की मूलभूत अवधारणा स्थापित की—जो परिमित तत्त्व विश्लेषण का संकल्पनात्मक केंद्र है।

Richard Courant (1888–1972)। Hrennikoff से स्वतंत्र रूप से कार्य करते हुए और समस्या को विशुद्ध गणितीय दृष्टिकोण से देखते हुए Richard Courant (1888–1972) ने American Mathematical Society में अपने 1943 के संबोधन में त्रिकोणीय उपक्षेत्रों पर परिभाषित खंडशः परीक्षण फलन प्रस्तुत किए (Courant, 1943 PDF)।

Courant ने शास्त्रीय Rayleigh-Ritz विधि की समीक्षा से आरंभ किया, जिसमें एक फलनिक $I(\phi)$ को निर्देशांक फलनों $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ के रैखिक संयोजनों द्वारा समाधान का सन्निकटन करके न्यूनतम करने का प्रयास किया जाता है, चित्र 12.8:

$$\phi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n \tag{12.1}$$

[3] Lord Rayleigh ने प्राथमिकता का दावा किया, जिससे "Rayleigh–Ritz method" नाम पड़ा।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

गुणांक c_i इस व्यंजक को परिवर्ती समस्या में प्रतिस्थापित करके और न्यूनतमीकरण प्रतिबंध से उत्पन्न रैखिक समीकरण-निकाय को हल करके निर्धारित किए जाते हैं:

$$I(\phi_n) = F(c_1, \ldots, c_n) = \min . \tag{12.2}$$

सैद्धांतिक रूप से सुदृढ होने पर भी Courant ने इस उपागम की व्यावहारिक सीमाएँ देखीं:

Ritz's construction proceeds as follows: We start with an arbitrarily chosen system of "*coordinate functions*"

(13) $$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots,$$

which should satisfy the two conditions:
(a) Any linear combination

(14) $$\phi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$$

of them is admissible in the variational problem.
(b) They should form a complete system of functions in the sense that *any* admissible function ϕ and its relevant derivatives may be approximated with any degree of accuracy by a linear combination of coordinate functions and of their corresponding derivatives, respectively.

If we begin with such a system of coordinate functions, it is clear that for n sufficiently large and for a suitable choice of the coefficients $c_1, c_2, \cdots, c_n$ of (14) we can find admissible functions ϕ_n for which $I(\phi_n)$ differs arbitrarily little from d. In other words, it is possible to find a minimizing sequence $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n, \cdots$ as a sequence of linear combinations of the coordinate functions. In order to obtain such a minimizing sequence we choose the c_i in the following manner. We consider any function ϕ_n defined by (14) and substitute it in our variational problem. $I(\phi_n)$ then becomes a function $F(c_1, \cdots, c_n)$ of the n parameters c_i which we may now determine from the ordinary minimum problem of the calculus

(15) $$I(\phi_n) = F(c_1, \cdots, c_n) = \min.$$

चित्र 12.8: Courant ने *trial funcrtions* प्रस्तुत किए (Courant, 1943)

> अनुप्रयुक्त गणितज्ञ की आविष्कारशील कुशलता को चुनौती देने वाली कठिनाई उपयुक्त निर्देशांक फलन खोजना और परिणाम की यथार्थता का आकलन करना है। व्यावहारिक दृष्टि से लगभग प्रत्येक सफलता निर्देशांक फलनों के चयन पर निर्भर करती है। यदि इन फलनों को समस्या की विशिष्टता का उचित ध्यान रखे बिना चुना जाए तो अभिकलन का कार्य निराशाजनक हो जाएगा।
>
> Courant, 1943 "*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*"

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §48.6 देखें

इसके बाद Courant ने परिमित अंतर विधियों की ओर ध्यान दिया और अनेक प्रकरणों में उनकी श्रेष्ठता का उल्लेख किया, क्योंकि "परिमित अंतर कमोबेश स्वेच्छ निर्देशांक फलनों जैसे किसी मध्यस्थ माध्यम के बिना सीधे फलन के मानों से जुडे होते हैं।" इस अवलोकन ने उन्हें वह निर्णायक पुनर्व्याख्या प्रस्तावित करने की ओर प्रेरित किया जो परिमित तत्त्व विधि का संकल्पनात्मक आधार बनने वाली थी:

> यदि परिवर्ती समस्याओं में प्रथम कोटि से उच्च अवकलज नहीं हैं तो जालक के वर्गों के विकर्णों से निर्मित त्रिभुजों में हमारे जाल के उपविभाजन पर केवल रैखिक फलनों ϕ को प्रतिस्पर्धा में लेकर परिमित अंतर विधि को Rayleigh-Ritz विधि के अधीन किया जा सकता है। ऐसे बहुफलकीय फलनों के लिए समाकल जालक-बिंदुओं पर ϕ के परिमित मानों द्वारा व्यक्त योग बन जाते हैं और न्यूनतम प्रतिबंध हमारे अंतर समीकरण बन जाते हैं।
>
> Courant, 1943 "*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*"

यहाँ प्रमुख अंतर्दृष्टि गहन है: संपूर्ण प्रक्षेत्र में विस्तृत सार्वत्रिक निर्देशांक फलनों के चयन के स्थान पर त्रिकोणीय उपक्षेत्रों पर स्थानीय रूप से परिभाषित सरल *खंडशः* रैखिक फलन प्रयुक्त किए जा सकते हैं। प्रत्येक त्रिभुज पर फलन ϕ रैखिक रूप से परिवर्तित होता है और संलग्न त्रिभुजों के

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

साझा किनारों पर सातत्य लागू किया जाता है। अज्ञात राशियाँ त्रिभुजीकरण के शीर्षों (जालक-बिंदुओं) पर केवल फलन-मान ϕ_i बन जाती हैं। जब ऐसे खंडशः रैखिक (बहुफलकीय) फलनों को Dirichlet समाकल जैसे परिवर्ती समाकल में प्रतिस्थापित किया जाता है

$$D(v) = \iint_B \left(v_x^2 + v_y^2 \right) dx\, dy, \tag{12.3}$$

तब समाकल केवल नोडीय मानों वाले परिमित योग में अपचित हो जाता है और परिवर्ती प्रतिबंध इन अज्ञातों के लिए रैखिक बीजीय समीकरण-निकाय देते हैं।

Courant ने इस व्याख्या से संभव सामान्यीकरण को तुरंत पहचाना:

> ऐसी व्याख्या एक व्यापक सामान्यीकरण का संकेत देती है जो अत्यधिक नम्यता प्रदान करता है और पर्याप्त व्यावहारिक मूल्य वाला प्रतीत होता है। द्विघाती अथवा आयताकार जालक से आरंभ करने के स्थान पर हम आरंभ से ही स्वेच्छ रूप से चुने गए (अधिमानतः त्रिकोणीय) जालक पर किनारों वाली किसी भी बहुफलकीय सतह पर विचार कर सकते हैं। हमारे समाकल पुनः परिमित योग बन जाते हैं और न्यूनतम प्रतिबंध जालक-बिंदुओं पर ϕ के मानों के लिए समीकरण होंगे। यद्यपि ये समीकरण मूल अंतर समीकरणों से कम सरल प्रतीत होते हैं, हमें समस्या के आँकड़ों के प्रति अधिक अनुकूलनीयता का अत्यधिक लाभ मिलता है और इस प्रकार हम प्रायः बहुत कम अंकीय अभिकलन से अच्छे परिणाम प्राप्त कर सकते हैं।
>
> Courant, 1943 *"Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations"*

अपने संबोधन के परिशिष्ट में Courant ने बहु-संबद्ध अनुप्रस्थ काट—वर्गाकार छिद्र वाला वर्गाकार ढाँचा—के लिए Saint-Venant मरोड समस्या पर विधि प्रदर्शित की। अनुप्रस्थ काट के आठवें भाग तक अभिकलनीय प्रक्षेत्र को घटाने के लिए सममिति का उपयोग करते हुए उन्होंने बहुपदीय परीक्षण फलनों वाली शास्त्रीय Rayleigh-Ritz विधि और अपने नए त्रिकोणीय जालक उपागम, दोनों को लागू किया। बाद वाले के लिए उन्होंने लिखा:

> जालक-त्रिभुजों में हमारे फलन रैखिक चुने गए थे, जिससे परिवर्ती समस्या u_i के लिए रैखिक समीकरण देती है।
>
> Courant, 1943 *"Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations"*

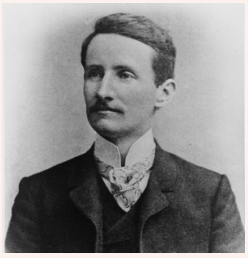
परिणामों ने मरोड-दृढता S का तीव्र अभिसरण दिखाया: दो अज्ञातों वाले प्रकरण (a) ने $S = 0.344$ दिया; तीन अज्ञातों वाले प्रकरण (b) ने $S = 0.352$ दिया; पाँच अज्ञातों वाले प्रकरण (c) ने $S = 0.353$ दिया; और साधारण परिमित अंतर विधि के अनुरूप नौ अज्ञातों वाले प्रकरण (d) ने भी $S = 0.353$ दिया। उल्लेखनीय रूप से केवल दो अज्ञात नोडीय मानों वाले स्थूलतम त्रिभुजीकरण ने भी अभिसरित परिणाम के 3% के भीतर दृढता प्राप्त की।

Courant ने विधि की व्यापक प्रयोज्यता के आकलन और भविष्याभिमुख कथन के साथ निष्कर्ष निकाला:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> ये परिणाम स्वयं और तुलना द्वारा दर्शाते हैं कि त्रिकोणीय जालकों की सामान्यीकृत विधि में लाभ प्रतीत होते हैं... यह सुपष्टतः किसी भी प्रकार के प्रक्षेत्र के अनुकूल है, Rayleigh-Ritz प्रक्रिया से कहीं अधिक, जिसमें ग्राह्य फलनों का निर्माण सामान्यतः निर्णायक बाधाएँ प्रस्तुत करता है। एक पृथक प्रकाशन में दिखाया जाएगा कि विधि को पट्टिकाओं की समस्याओं और उच्चतर अवकलजों वाली अन्य समस्याओं तक भी कैसे विस्तारित किया जा सकता है।
>
> Courant, 1943 "*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*"

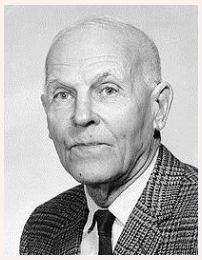
पट्टिका समस्याओं तक इस प्रस्तावित विस्तार—जिसमें चतुर्थ-कोटि समीकरणों के लिए C^1 सातत्य आवश्यक है—ने Courant की संभावित अपेक्षा से कहीं अधिक चुनौतीपूर्ण सिद्ध होना था और आने वाले दशकों तक परिमित तत्त्व शोधकर्ताओं को व्यस्त रखना था। फिर भी आवश्यक संकल्पनात्मक ढाँचा अब स्थापित था: प्रक्षेत्र को सरल ज्यामितीय तत्त्वों में उपविभाजित करके, इन तत्त्वों पर खंडशः बहुपदीय परीक्षण फलन परिभाषित करके और परिवर्ती सिद्धांत के माध्यम से अज्ञात नोडीय प्राचल निर्धारित करके सीमा-मान समस्याओं के सन्निकट समाधान बनाए जा सकते थे।



(a) Walther Ritz (1878–1909)



(b) Boris Galerkin (1871–1945)



(c) Hrennikoff (1896–1984)



(d) Richard Courant (1888–1972)

चित्र 12.9: परिमित तत्त्व विधि के गणितीय आधार

पृथक रूप से देखने पर Courant के सूत्रीकरण को प्रायः—पूर्वदृष्टि से—परिमित तत्त्व विचार का प्रथम प्रादुर्भाव कहा गया है। विभिन्न अनुशासनात्मक दृष्टिकोणों से अभी समीक्षित अनेक विकासों के लिए भी ऐसे ही दावे किए गए हैं। ऐसे पूर्वदृष्टिपरक नामकरण से उत्पन्न भ्रम से बचने के लिए यह सुपष्ट करना उपयोगी है कि वर्तमान ऐतिहासिक विवरण में पारिभाषिकी और प्राथमिकता का उपयोग किस प्रकार किया गया है।

12.3.2 प्राथमिकता और पारिभाषिकी: परिमित तत्त्व विधि क्या है (और क्या नहीं है)

ऐतिहासिक साहित्य में परिमित तत्त्व विधि से संबंधित प्राथमिकता-विवाद प्रायः अंतर्निहित गणित अथवा कलनविधियों पर वास्तविक असहमति के स्थान पर पारिभाषिकी के भिन्न उपयोगों से उत्पन्न होते हैं। "finite element" पद प्रस्तुत होने से बहुत पहले गणितज्ञ परिवर्ती सिद्धांतों (Ritz), भारित अवशेषों (Galerkin) और उपक्षेत्रों पर खंडशः परीक्षण फलनों (Courant) पर आधारित शक्तिशाली सन्निकटन तकनीकें विकसित कर चुके थे। ये योगदान अत्यावश्यक गणितीय आधार बनाते हैं, किंतु अपने आप में अभियांत्रिकी विश्लेषण की सामान्य अभिकलनीय विधि नहीं थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इसके विपरीत 1950s के दौरान वांतरिक्ष अभियांत्रिकी में विकसित आव्यूह दृढता सूत्रीकरणों ने साम्य समीकरणों के विशाल निकायों को समुच्चयित और हल करने की पूर्ण कलनविधिक प्रक्रिया प्रदान की, किंतु आरंभ में उन्हें विविक्त सातत्यकों के स्थान पर संरचनात्मक घटकों के पदों में व्यक्त किया गया था। परिमित तत्त्व विधि तब उभरी जब विकास की इन दोनों धाराओं को एकीकृत किया गया: सतत माध्यमों को अनुमानित विस्थापन क्षेत्रों से युक्त परिमित उपक्षेत्रों में विविक्त किया गया और उनका व्यवहार विविक्त संरचनाओं के लिए पहले प्रयुक्त उन्हीं दृढता-आधारित समुच्चयन सिद्धांतों द्वारा नियंत्रित हुआ।

अतः इस विवरण में परिमित तत्त्व विधि को किसी एक व्यक्ति के नाम से जुड़े एकल आविष्कार के रूप में नहीं, बल्कि गणितीय सन्निकटन सिद्धांत, आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण और अंकीय अभिकलन के अभिसरण के रूप में समझा गया है। प्राथमिकता के दावे इस पर निर्भर करते हैं कि गणितीय, कलनविधिक अथवा पारिभाषिक पक्ष में से किस पर बल दिया जाता है; इन भूमिकाओं को स्पष्ट रूप से अलग करने से सर्वोत्तम स्पष्टता प्राप्त होती है।

12.3.3 Ray Clough (1920–2016)

2nd ASCE Conference on Electronic Computation, जो Pittsburgh में September 1960 में आयोजित हुआ, ने Clough को सिविल अभियांत्रिकी समुदाय के समक्ष विधि प्रस्तुत करने का अवसर दिया। मुख्य चुनौती उपयुक्त नाम चुनना था। Boeing में “direct stiffness method” ने समुच्चयन प्रक्रिया का वर्णन किया, किंतु अनुमानित विस्थापन क्षेत्रों वाले तत्त्वों में सतत माध्यमों के विविक्तीकरण के आवश्यक नवाचार का नहीं।

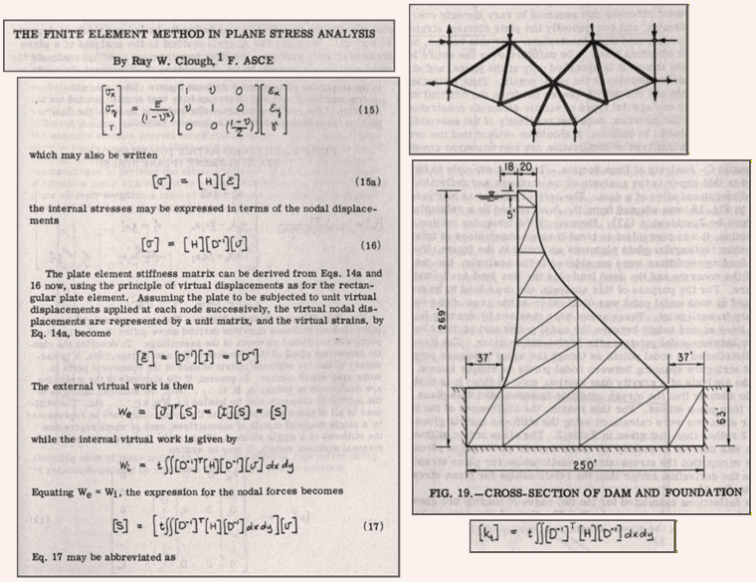
परिमित अंतरों के सादृश्य को देखते हुए—किंतु यह पहचानते हुए कि प्रत्यास्थता के समीकरण विविक्त क्षेत्रों में स्वतंत्र रूप से लागू किए गए थे—Clough ने निर्णय किया कि इन निर्माण-खंडों को “finite elements” कहा जाना चाहिए। उनके शोधपत्र का शीर्षक “The Finite Element Method in Plane Stress Analysis” था (Clough, 1960), चित्र 12.10।

शोधपत्र का निष्कर्ष आज भी प्रासंगिक अवलोकनों के साथ हुआ:

> पूर्ववर्ती उदाहरणों ने सामान्यतः समतल प्रतिबल समस्याओं के विश्लेषण में परिमित तत्त्व उपागम की प्रयोज्यता प्रदर्शित की है। परिणाम संकेत करते हैं कि जब तक तत्त्वों के भीतर माना गया रैखिक प्रतिबल-परिवर्तन वास्तविक प्रतिबल-परिवर्तन का यथोचित प्रतिनिधि है, विधि अत्यंत प्रभावी है। अतः जहाँ प्रतिबल वास्तव में अरैखिक रूप से परिवर्तित होते हैं, वहाँ तत्त्व इतने छोटे लिए जाने आवश्यक हैं कि अरैखिकता को संलग्न तत्त्वों में रैखिक परिवर्तनों द्वारा निरूपित किया जा सके। इस प्रतिबंध को छोड़कर ऐसा प्रतीत होता है कि अत्यंत स्थूल जालक सन्निकटन भी अनेक समस्याओं में अच्छे परिणाम दे सकता है।
>
> विश्लेषण की इस विधि का एक महत्त्वपूर्ण लाभ यह है कि यह ढाँचों, कैंचियों आदि जैसे अन्य प्रकार के संरचनात्मक निकायों के विश्लेषण के साथ पूर्णतः संगत है। अतः ऐसे तत्त्वों के संयोजनों से बने निकाय का विश्लेषण करना कोई समस्या नहीं है। केवल विभिन्न प्रकार के तत्त्वों के दृढता आव्यूह स्थापित करना आवश्यक है...
>
> Clough, 1960 *“The finite element method in plane stress analysis”*

प्रस्तुति के समय शोधपत्र का तत्काल प्रभाव बहुत कम था—विधि के लिए ऐसे “automatic digital computers” आवश्यक थे जो उस समय सामान्य संरचनात्मक अभियंताओं को उपलब्ध नहीं थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



THE FINITE ELEMENT METHOD IN PLANE STRESS ANALYSIS

By Ray W. Clough,[1] F. ASCE

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau\end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma\end{bmatrix} \quad (15)$$

which may also be written

$$[\sigma] = [H][\epsilon] \quad (15a)$$

the internal stresses may be expressed in terms of the nodal displacements

$$[\sigma] = [H][D']\{v\} \quad (16)$$

The plate element stiffness matrix can be derived from Eqs. 14a and 16 now, using the principle of virtual displacements as for the rectangular plate element. Assuming the plate to be subjected to unit virtual displacements applied at each node successively, the virtual nodal displacements are represented by a unit matrix, and the virtual strains, by Eq. 14a, become

$$[\bar{\epsilon}] = [D'][I] = [D']$$

The external virtual work is then

$$W_e = [\bar{v}]^T[S] = [I][S] = [S]$$

while the internal virtual work is given by

$$W_i = t\iint[D']^T[H][D'][v]\,dx\,dy$$

Equating $W_e = W_i$, the expression for the nodal forces becomes

$$[S] = \left[t\iint[D']^T[H][D']\,dx\,dy\right][v] \quad (17)$$

Eq. 17 may be abbreviated as

FIG. 19.—CROSS-SECTION OF DAM AND FOUNDATION

$$[k_i] = t\iint[D']^T[H][D']\,dx\,dy$$

चित्र 12.10: परिमित तत्त्व विधि का नामकरण करने वाला Clough का 1960 का शोधपत्र (Clough, 1960)

12.3.4 आरंभिक कंप्यूटर और Berkeley कार्यक्रम

1957 में Clough ने Berkeley में “Matrix Analysis of Structures” शीर्षक से एक पाठ्यक्रम आरंभ किया। College of Engineering में IBM 701, जिसमें 4K की 16-bit स्मृति थी, स्थापित किया गया था। वह अधिकतम 40 समीकरण हल कर सकता था; केवल स्थूल जालक संभव थे।

एक स्नातक छात्र Edward L. Wilson (1931–2024) उपलब्ध आव्यूह बीजगणित प्रोग्रामों द्वारा परिमित तत्त्व समस्याओं को हल करने में आवश्यक प्रयास से असंतुष्ट थे। 1958 में उन्होंने आयताकार समतल प्रतिबल तत्त्वों पर आधारित स्वचालित परिमित तत्त्व प्रोग्राम विकसित करना आरंभ किया। IBM 701 का प्रोग्रामन सीखने में कई महीने लगाने के बाद Wilson ने सीमित क्षमता वाला अर्ध-स्वचालित प्रोग्राम बनाया।

1959 में IBM 704 स्थापित किया गया—चल-बिंदु अंकगणित वाली 32K की 32-bit स्मृति और लगभग 100 गुनी गति, जिसकी तुलना IBM 701 से थी। इससे सूक्ष्म जालकों वाली व्यावहारिक संरचनाओं का विश्लेषण संभव हुआ और परिमित तत्त्व अनुसंधान की जिज्ञासा से व्यावहारिक अभियांत्रिकी साधन में रूपांतरित हो गए। Wilson के प्रोग्रामन प्रयासों की परिणति SAP (Structural Analysis Program) में हुई, जिसे उन्होंने विश्व भर के विश्वविद्यालयों और अभियांत्रिकी संस्थानों को निःशुल्क वितरित किया। इस मुक्त प्रसार रणनीति ने परिमित तत्त्व विधि के अंगीकरण को तीव्र किया और Berkeley में साझा सॉफ़्टवेयर विकास की ऐसी परंपरा स्थापित की जिसने संरचनात्मक विश्लेषण कूटों की पीढ़ियों को प्रभावित किया।

अप्रकाशित प्रति

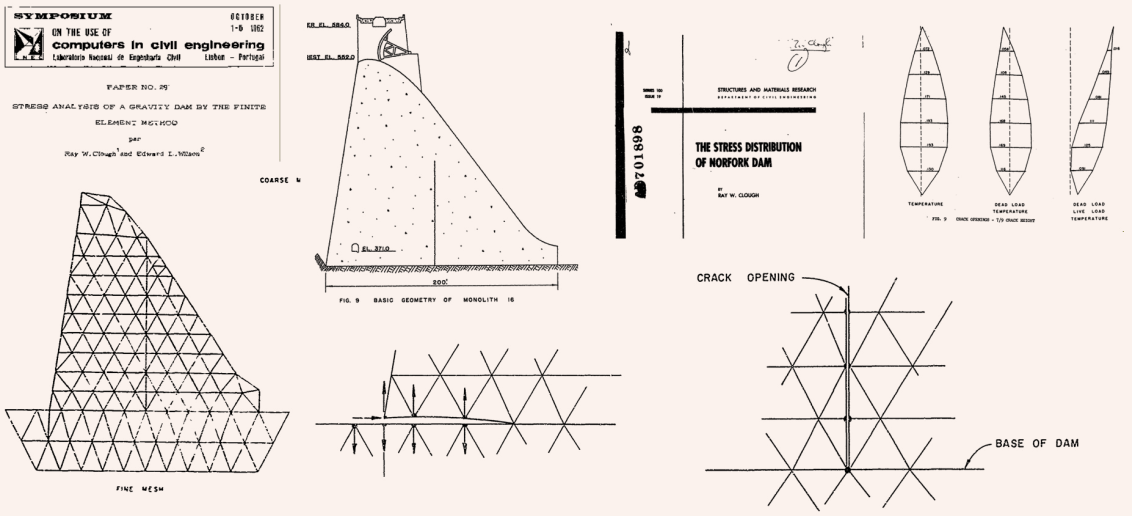
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

12.3.5 Norfork बाँध: प्रथम प्रमुख अनुप्रयोग

UC Berkeley में बाँध अनुसंधान की दीर्घ परंपरा थी। 1920s में Professor R.E. Davis ने Hoover Dam के लिए अध्ययन किए। 1950s के उत्तरार्ध में Professors Raphael, Eberhart और Pirtz ने Oroville Dam के लिए प्रतिरूप और सामग्री अध्ययन किए। यह स्वाभाविक था कि नवविकसित परिमित तत्त्व प्रोग्राम का प्रथम प्रमुख अनुप्रयोग किसी बाँध पर हो।

Corps of Engineers के Little Rock District के परामर्शदाता Dr. Roy Carlson की अनुशंसा पर Clough ने Norfork Dam—केंद्र के निकट तापमान-प्रेरित ऊर्ध्वाधर दरार वाला गुरुत्व बाँध—के विश्लेषण का प्रस्ताव प्रस्तुत किया। प्रस्ताव ने बाँध और नींव में भिन्न सामग्री गुणों के साथ स्वेच्छ ज्यामिति की संरचनाओं को प्रतिरूपित करने की विधि की क्षमता प्रदर्शित की।

Clough का प्रस्ताव Cal-Tech के Richard MacNeal के उस अनुरूप कंप्यूटर प्रस्ताव की अपेक्षा स्वीकार किया गया जिसे तब अत्याधुनिक माना जाता था। Norfork परियोजना ने द्रवस्थैतिक भारण के अधीन दरार बंद होने के अरैखिक विश्लेषण तक विधि का विस्तार करने का अवसर दिया। Wilson और स्नातक छात्र Ian King ने विस्तृत विश्लेषण किए। महत्त्वपूर्ण अभियांत्रिकी निष्कर्ष था: दरारयुक्त बाँध सुरक्षित था।



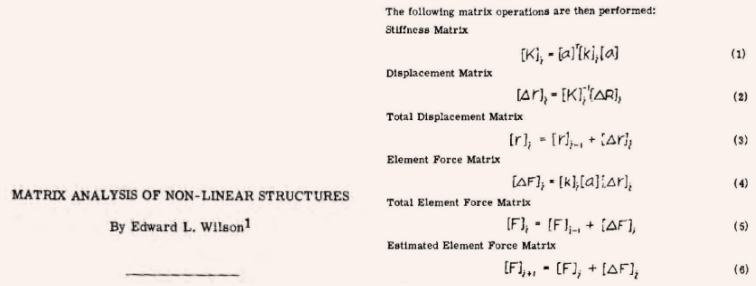
चित्र 12.11: Norfork बाँध का परिमित तत्त्व विश्लेषण (Clough, 1962; Clough and Wilson, 1962)

Corps of Engineers की रिपोर्ट (Clough, 1962) 1962 में प्रस्तुत की गई और संबद्ध शोधपत्र Lisbon में Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering में प्रस्तुत हुआ (Clough and Wilson, 1962)। Berkeley के बाहर शोधपत्र के शीर्षक में “finite element” का यह केवल दूसरा प्रादुर्भाव था।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

12.3.6 अरैखिक और गतिक विश्लेषण (1960–1962)

उसी वर्ष (1960) प्रथम अरैखिक परिमित तत्त्व विश्लेषण प्रकाशित हुआ। Clough के निर्देशन में NSF परियोजना पर कार्यरत Wilson ने Ramberg–Osgood समीकरण से परिभाषित अरैखिक आघूर्ण-वक्रता संबंध वाला द्विविमीय ढाँचा-विश्लेषण प्रोग्राम लिखा। भारों को वृद्धिशील रूप से लगाया गया, जिससे pushover-प्रकार का विश्लेषण प्राप्त हुआ (Wilson, 1960), चित्र 12.12।



MATRIX ANALYSIS OF NON-LINEAR STRUCTURES

By Edward L. Wilson[1]

The following matrix operations are then performed:

Stiffness Matrix

$$[K]_i = [a]^T[k]_i[a] \quad (1)$$

Displacement Matrix

$$[\Delta r]_i = [K]_i^{-1}[\Delta R]_i \quad (2)$$

Total Displacement Matrix

$$[r]_i = [r]_{i-1} + [\Delta r]_i \quad (3)$$

Element Force Matrix

$$[\Delta F]_i = [k]_i[a][\Delta r]_i \quad (4)$$

Total Element Force Matrix

$$[F]_i = [F]_{i-1} + [\Delta F]_i \quad (5)$$

Estimated Element Force Matrix

$$[F]_{i+1} = [F]_i + [\Delta F]_i \quad (6)$$

चित्र 12.12: प्रथम अरैखिक परिमित तत्त्व विश्लेषण (Wilson, 1960)

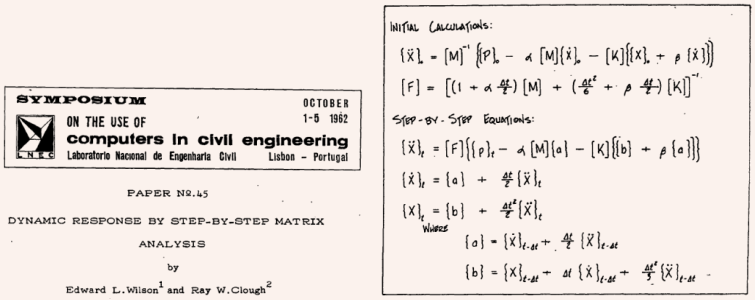
> इस शोधपत्र में प्रस्तुत वृद्धिशील भार उपागम अरैखिक सामग्री गुणों वाली संरचनाओं के विश्लेषण की सामान्य विधि प्रदान करता है। यह विधि किसी संरचना के विश्लेषण का सन्निकटन ऐसी संरचनाओं की शृंखला के विश्लेषणों के योग से करती है जिनमें से प्रत्येक बाह्य भार की छोटी वृद्धि के अधीन रैखिक रूप से कार्य करती है। इस सन्निकटन में सम्मिलित त्रुटियों को केवल भार-वृद्धि का परिमाण घटाकर इच्छानुसार छोटा किया जा सकता है।
>
> Wilson, 1960 *"Matrix Analysis of Nonlinear Structures"*

Wilson और Clough ने 1962 के Lisbon Symposium में चरण-दर-चरण गतिक अनुक्रिया विश्लेषण पर एक अन्य मील का पत्थर शोधपत्र प्रस्तुत किया[4] (Wilson and Clough, 1962)। इस शोधपत्र ने Nathan M. Newmark (1910–1981) द्वारा विकसित काल-क्रमण कलनविधि को आव्यूह रूप में सूत्रबद्ध किया। University of Illinois में संरचनात्मक अभियांत्रिकी के महान व्यक्तित्व Newmark ने 1959 में अपनी अप्रतिबंधित रूप से स्थिर समाकलन योजना प्रस्तुत की थी (Newmark, 1959)। Wilson-Clough कार्यान्वयन ने आरंभिक आव्यूह प्रतिलोमन के माध्यम से प्रत्येक काल-चरण पर पुनरावृत्ति की आवश्यकता समाप्त कर दी और Newmark विधि को विशाल परिमित तत्त्व निकायों के लिए व्यावहारिक बनाया, चित्र 12.13।

> इस शोधपत्र में प्रस्तुत चरण-दर-चरण विधि स्वेच्छ भारण के अधीन विविक्त द्रव्यमान निकायों की गतिक अनुक्रिया निर्धारित करने की व्यवस्थित प्रक्रिया प्रदान करती है। चरण-दर-चरण समीकरणों का आव्यूह रूप में सूत्रीकरण आव्यूह संक्रियाओं के पुनरावृत्त अनुक्रम द्वारा निकाय की अनुक्रिया निर्धारित करने देता है। इसके अतिरिक्त अन्य

[4] जब किसी संरचना पर प्रयुक्त भार (उत्तेजन) की आवृत्ति उसकी न्यूनतम प्राकृतिक कंपन आवृत्ति के लगभग एक-तिहाई से कम होती है, तब हम जड़त्व प्रभावों की उपेक्षा करके समस्या का अर्ध-स्थैतिक रूप में उपचार कर सकते हैं; अन्यथा गतिक विश्लेषण करना आवश्यक है। अत्यंत नम्य संरचना के लिए धीरे-धीरे लगाया गया भार भी गतिक विश्लेषण आवश्यक बना सकता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।


SYMPOSIUM
ON THE USE OF
computers in civil engineering
Laboratorio Nacional de Engenharia Civil Lisbon – Portugal
OCTOBER 1-5 1962

PAPER Nº.45

DYNAMIC RESPONSE BY STEP-BY-STEP MATRIX ANALYSIS

by

Edward L.Wilson[1] and Ray W.Clough[2]

INITIAL CALCULATIONS:

$$\{\ddot{X}\}_0 = [M]^{-1}\left(\{P\}_0 - \alpha[M]\{\dot{X}\}_0 - [K]\left(\{X\}_0 + \beta\{\dot{X}\}\right)\right)$$

$$[F] = \left[(1+\alpha\tfrac{\Delta t}{2})[M] + (\tfrac{\Delta t^2}{6} + \beta\tfrac{\Delta t}{2})[K]\right]^{-1}$$

STEP-BY-STEP EQUATIONS:

$$\{\ddot{X}\}_t = [F]\left\{\{P\}_t - \alpha[M]\{a\} - [K]\left(\{b\} + \beta\{a\}\right)\right\}$$

$$\{\dot{X}\}_t = \{a\} + \tfrac{\Delta t}{2}\{\ddot{X}\}_t$$

$$\{X\}_t = \{b\} + \tfrac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{X}\}_t$$

WHERE

$$\{a\} = \{\dot{X}\}_{t-\Delta t} + \tfrac{\Delta t}{2}\{\ddot{X}\}_{t-\Delta t}$$

$$\{b\} = \{X\}_{t-\Delta t} + \Delta t\{\dot{X}\}_{t-\Delta t} + \tfrac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{X}\}_{t-\Delta t}$$

चित्र 12.13: प्रथम गतिक परिमित तत्त्व विश्लेषण (Wilson and Clough, 1962 PDF)

> प्रक्रियाओं में आवश्यक प्रत्येक काल-वृद्धि पर पुनरावृत्ति को आरंभिक आव्यूह प्रतिलोमन द्वारा समाप्त कर दिया जाता है।
>
> Wilson and Clough, 1962 PDF *"Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis"*

यह कार्य भूकंप अभियांत्रिकी पर Clough के बढते ध्यान की भूमिका था, जिसकी परिणति उनकी शास्त्रीय पाठ्यपुस्तक (Clough and Penzien, 1975) में हुई।

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §53 देखें

12.4 समेकन और प्रसार

12.4.1 Oleg Zienkiewicz (1921–2009)

Polish पिता से England में जन्मे Olgierd Cecil Zienkiewicz (1921–2009), चित्र 12.14c, ने परिमित तत्त्व विधि को अभियांत्रिकी विश्लेषण के सार्वभौमिक साधन के रूप में स्थापित किया। University of Edinburgh में बाँध-प्रतिबल विश्लेषण पर आरंभिक कार्य के बाद वे 1957 में University of Wales, Swansea चले गए, जहाँ उन्होंने विश्व के अग्रणी संगणकीय यांत्रिकी समूहों में से एक बनाया। Y.K. Cheung के साथ उनकी 1967 की पाठ्यपुस्तक *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics* पूर्णतः इस विषय को समर्पित प्रथम पुस्तक थी और उसने विश्व भर में अभियंताओं की एक पीढ़ी को प्रशिक्षित किया। Zienkiewicz की विशिष्टता विधि को संरचनात्मक यांत्रिकी से आगे—तरल गतिकी, ऊष्मा अंतरण, विद्युतचुंबकत्व और युग्मित बहुभौतिकी समस्याओं तक—विस्तारित करने का उनका अथक प्रयास था, जिसने प्रदर्शित किया कि परिमित तत्त्व गणितीय भौतिकी के लगभग सभी क्षेत्र समीकरणों के लिए एकीकृत ढाँचा प्रदान करते हैं। उनकी पाठ्यपुस्तक के क्रमिक संस्करण अंततः तीन खंडों तक विस्तृत हुए और निर्णायक संदर्भ बने। Bruce Irons के साथ उनके सहयोग ने समप्राचलीय सूत्रीकरण उत्पन्न किया तथा Swansea में उनके समूह ने अनुकूली जालक परिशोधन, मिश्रित विधियों और काल-निर्भर विश्लेषण का अग्रणी कार्य किया। अपनी पुस्तकों, छात्रों और *International Journal for Numerical Methods in Engineering* के संपादकीय नेतृत्व के

माध्यम से Zienkiewicz ने परिमित तत्त्व विधि के अंतरराष्ट्रीय प्रसार के लिए किसी भी अन्य व्यक्ति से अधिक कार्य किया।

12.4.2 Wright-Patterson सम्मेलन (1965)

परिमित तत्त्व विधि के अंतरराष्ट्रीय समेकन की एक निर्णायक घटना October 1965 में Wright-Patterson Air Force Base में आयोजित Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics थी। इस सभा ने विश्व भर के प्रमुख संरचनात्मक विश्लेषण अनुसंधान समूहों को एकत्र किया और बड़े स्तर पर समानांतर विकसित हो रहे विचारों के आदान-प्रदान का मंच प्रदान किया।

12.4.3 Richard Gallagher (1927–1997)

Cornell University के Richard H. Gallagher[5] (1927–1997) ने विशेषतः Finite Element Method को समर्पित सत्र की अध्यक्षता की। Argyris ने ठोसों, पट्टिकाओं और खोलों के अनुप्रयोगों के साथ प्राकृतिक क्षेत्रफल निर्देशांकों में षट्-नोडीय त्रिकोणीय समतल तत्त्व तथा प्राकृतिक आयतन निर्देशांकों में दश-नोडीय ठोस चतुष्फलकीय तत्त्व सहित नए तत्त्व सूत्रीकरण प्रस्तुत किए। सम्मेलन ने प्रदर्शित किया कि विधि Boeing, Berkeley, Stuttgart और Swansea के पृथक विकासों से परिपक्व होकर सुसंगत अंतरराष्ट्रीय अनुशासन बन चुकी थी।

इससे पहले Gallagher ने AGARDograph 69, *A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis* (Gallagher, 1964 PDF), तैयार किया था जो AGARD Structures and Materials Panel द्वारा अधिकृत व्यापक सर्वेक्षण था। इस 1964 की रिपोर्ट ने वायुयान उद्योग में प्रचलित बल और विस्थापन उपागमों की व्यवस्थित तुलना की, प्रत्यक्षतः भिन्न प्रकाशित विधियों के बीच सहमति के क्षेत्रों को रेखांकित किया और बहु-जालक पंख संरचनाओं के व्यापक विश्लेषणों द्वारा तत्त्व सूत्रीकरणों का मूल्यांकन किया। आदर्शीकरणों की विस्तृत तुलना और त्रुटि-स्रोतों के स्पष्ट आकलन ने इस अध्ययन को प्रतिस्पर्धी उपागमों के बीच चयन करने वाले अभियंताओं के लिए अत्यावश्यक संदर्भ बनाया।

Gallagher स्वयं परिमित तत्त्व सिद्धांत, विशेषतः खोल संरचनाओं के लिए, प्रमुख योगदानकर्ता बने और उनकी पाठ्यपुस्तक (Gallagher, 1975) ने विधि के प्रसार का एक अन्य महत्त्वपूर्ण मार्ग प्रदान किया।

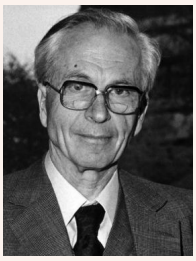
12.4.4 बल विधि बनाम दृढता विधि विवाद

1950s के उत्तरार्ध और 1960s के दौरान बल (नम्यता) और विस्थापन (दृढता) विधियों के सापेक्ष गुणों पर विवाद चलता रहा। Argyris की साथ-साथ तुलना (चित्र 12.7) ने विधियों को समरूप चरणों से आगे बढते दिखाया। Przemieniecki, 1968 PDF[6] ने अनेक उदाहरणों के साथ व्यवस्थित तुलना प्रदान की।

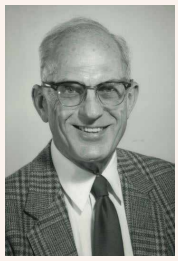
[5]Gallagher को इस महापुरुष-मंडल में इसलिए सम्मिलित किया गया है क्योंकि वे Cornell में स्नातक छात्र के रूप में लेखक के प्रिय प्राध्यापक थे, जहाँ उन्होंने परिमित तत्त्व, संरचनात्मक इष्टतमीकरण और खोलों पर पाठ्यक्रम पढाए। अंतिम पाठ्यक्रम में वे अपने टिप्पणों पर मुश्किल से दृष्टि डालते हुए सामान्य खोल सिद्धांत को नियंत्रित करने वाला अष्टम-कोटि अवकल समीकरण व्युत्पन्न कर सकते थे।

[6]इस पुस्तक ने आज भी प्रचलित अनेक अवधारणाओं और संकेतनों को प्रस्तुत किया। यह इस विषय के उत्कृष्टतम विवेचनों में से एक बनी हुई है।

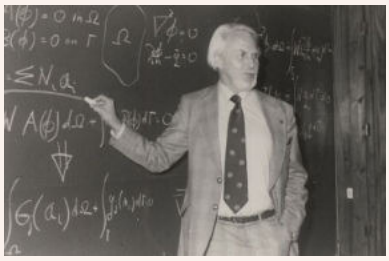
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



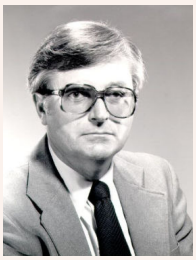
(a) Argyris (1913–2004)



(b) Clough (1920–2016)



(c) Zienkiewicz (1921–2009)



(d) Wilson (1931–2024)



(e) Gallagher (1927–1997)

चित्र 12.14: परिमित तत्त्व विधि के आधुनिक संस्थापक

Fortran प्रोग्राम लिख सकने वाले कुछ अभियंताओं ने निष्कर्ष निकाला कि विधियों की क्षमताएँ समान थीं; उनके बीच चयन रुचि का विषय था। परंपरा का पालन करते हुए अधिकांश वांतरिक्ष समूहों ने बल विधि को प्राथमिकता दी। किंतु दोनों को कार्यान्वित करने वाले अभियंताओं ने महत्त्वपूर्ण अंतर देखे। प्रत्यक्ष दृढता विधि का ऐसा कोई द्वैत समकक्ष नहीं था जो उसकी कलनविधिक सरलता से मेल खाता (Felippa, 2001 PDF)।

पुराने बल-विधि कूट अनेक वांतरिक्ष कंपनियों में चलते रहे। Felippa के अनुसार यह विभाजन नई भौतिकी पर पुराने पक्ष की प्रतिक्रिया के विषय में Einstein के उत्तर की स्मृति दिलाता है: “हमने उन्हें आश्वस्त नहीं किया; हम उनसे अधिक समय तक जीवित रहे।” 1940s–1950s में नियुक्त और अब प्रबंधन में कार्यरत अभियंताओं ने बल विधि का पक्ष लिया। 1960s के दौरान स्वचालित अतिरिक्त चयन की कलनविधियों—“structural cutters”—पर पर्याप्त प्रयास किया गया।

12.4.5 NASTRAN निर्णय (1969)

निर्णायक समाधान संस्थागत निर्णय से आया। 1965 में NASTRAN परिमित तत्त्व निकाय बनाने के लिए NASA के प्रस्ताव-आमंत्रण में गतिकी और कुंचन सहित समान क्षमताओं वाले Displacement और Force संस्करणों के समकालिक विकास की माँग की गई। दो अनुबंध दिए गए: MSC को (विस्थापन संस्करण) और Martin को (बल संस्करण)।

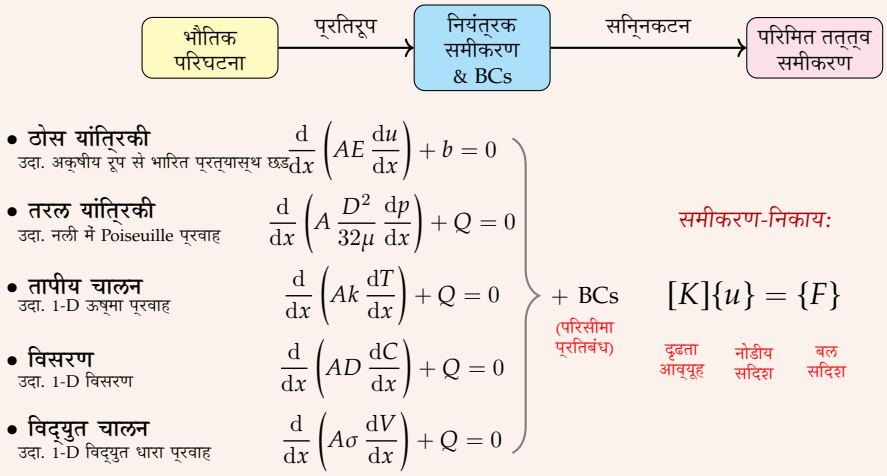
1969 तक Force संस्करण का विकास रद्द कर दिया गया। इसने सामान्य-प्रयोजन परिमित तत्त्व

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रोग्रामों के गंभीर प्रतिस्पर्धी के रूप में बल विधि का अंत चिह्नित किया। विस्थापन-आधारित सूत्रीकरण सार्वभौमिक मानक बन गया।

12.4.6 सामान्यीकरण

यद्यपि परिमित तत्त्व विधि संरचनात्मक यांत्रिकी में उत्पन्न हुई, उसका अंतर्निहित गणितीय ढाँचा—विविक्त प्रक्षेत्रों पर लागू परिवर्ती सिद्धांत और भारित अवशेष सूत्रीकरण—आंशिक अवकल समीकरणों से नियंत्रित किसी भी सीमा-मान समस्या पर लागू सिद्ध हुआ। जैसा कि चित्र 12.15 दर्शाता है, ठोस यांत्रिकी, तरल यांत्रिकी, तापीय चालन, विसरण और विद्युत चालन के नियंत्रक समीकरण समान गणितीय संरचना साझा करते हैं और केवल क्षेत्र चर तथा सामग्री गुणांकों के भौतिक अर्थ में भिन्न होते हैं।



चित्र 12.15: अनेक भौतिक अनुशासनों तक परिमित तत्त्व विधि का सामान्यीकरण: भिन्न नियंत्रक समीकरणों के बावजूद सभी समान बीजीय संरचना देते हैं

प्रत्येक प्रकरण में परिमित तत्त्व विविक्तीकरण परिचित रूप $[K]\{u\}=\{F\}$ का निकाय देता है, जहाँ दृढता आव्यूह, नोडीय अज्ञात और बल सदिश समस्या-विशिष्ट अर्थ ग्रहण करते हैं। Swansea में Zienkiewicz और उनके सहयोगियों ने इस सार्वभौमिकता को शीघ्र पहचाना और विधि को ऊष्मा अंतरण, रिसाव प्रवाह, विद्युतचुंबकत्व और अंततः युग्मित बहुभौतिकी समस्याओं तक व्यवस्थित रूप से विस्तारित किया। इस प्रकार परिमित तत्त्व विधि विमान प्रतिबल विश्लेषण के साधन के रूप में अपने उद्गम से आगे बढ़कर लगभग समूचे अभियांत्रिकी विज्ञान में प्रमुख अंकीय तकनीक बन गई।

सारणी 12.1 परिमित तत्त्व ढाँचे से एकीकृत प्रत्येक समस्या-वर्ग के क्षेत्र चरों और सामग्री नियतांकों की भौतिक व्याख्या का विवरण देती है।

12.4.7 पाठ्यपुस्तकें और विश्ववव्यापी अंगीकरण

परिमित तत्त्व विधि को समर्पित प्रथम पाठ्यपुस्तक Zienkiewicz, 1967 ने लिखी। विशेष उल्लेखनीय है कि इस आधारभूत ग्रंथ में भी बाँध-विश्लेषण उदाहरणों में सम्मिलित था (Zienkiewicz and Cheung,

तालिका 12.1: विभिन्न भौतिक समस्याओं का वर्गीकरण

भौतिक समस्या	संरक्षण सिद्धांत	अवस्था चर	अभिवाह	सामग्री नियतांक	स्रोत	संघटक समीकरण
प्रत्यास्थ पिंड का विरूपण	बलों का साम्य	विस्थापन अथवा बल	प्रतिबल अथवा विकृति	Young मापांक, Poisson अनुपात	पिंड बल अथवा कर्षण	Hooke नियम
विद्युत जालक्रम	धाराओं का साम्य	वोल्टता अथवा तीव्रता	विद्युत अभिवाह	विद्युत चालकता	बाह्य विद्युत आवेश	Kirchhoff नियम
मरोड	स्थितिज ऊर्जा का संरक्षण	प्रतिबल अथवा वार्पिंग फलन	ऐंठन की दर	अपरूपण मापांक	−2× ऐंठन कोण	Hooke नियम
ऊष्मा अंतरण	ऊर्जा का संरक्षण	तापमान	ऊष्मा अभिवाह	तापीय चालकता	आंतरिक अथवा बाह्य ऊष्मा	Fourier नियम
तरल प्रवाह	संवेग का संरक्षण	वेग	अपरूपण प्रतिबल	श्यानता	पिंड बल	Stokes नियम
सरंध्र माध्यम में प्रवाह	द्रव्यमान का संरक्षण	द्रवचालित शीर्ष	प्रवाह दर	पारगम्यता	तरल स्रोत	Darcy नियम
स्थिरवैद्युतिकी	विद्युत अभिवाह का संरक्षण	विद्युत विभव	विद्युत अभिवाह	वैद्युतशीलता	आवेश	Coulomb नियम
स्थिरचुंबकत्व	चुंबकीय विभव का संरक्षण	चुंबकीय विभव	चुंबकीय अभिवाह	चुंबकीय पारगम्यता	धारा	Maxwell नियम

1964; Zienkiewicz and Cheung, 1965)—विशाल, ज्यामितीय रूप से जटिल संरचनाओं के प्रति विधि की स्वाभाविक अनुरूपता का आरंभिक संकेत।

Zienkiewicz and Taylor, 2000 ने ऐसे व्यापक विवेचन तैयार किए जिन्होंने विश्व भर में अभियंताओं की पीढ़ियों को प्रशिक्षित किया और विविध भौतिकी के लिए तत्त्व सूत्रीकरण, समप्राचलीय तत्त्व, अंकीय समाकलन, अरैखिक तथा गतिक विश्लेषण और अनुकूली जालक परिशोधन को समाहित किया।

Swansea में Zienkiewicz के साथ कार्यरत Bruce Irons ने समप्राचलीय अवधारणा (1966) प्रस्तुत की—ज्यामिति और विस्थापन क्षेत्र, दोनों के लिए समान अंतर्वेशन फलनों का उपयोग (Irons, 1966)। इस सुरुचिपूर्ण सूत्रीकरण ने वक्र तत्त्व परिसीमाओं का यथातथ्य निरूपण संभव बनाया, मूल तत्त्व पर Gauss quadrature द्वारा व्यवस्थित अंकीय समाकलन को सुगम किया और विविध तत्त्व प्रकारों के उपचार को एकीकृत किया। समप्राचलीय अवधारणा लगभग सभी आधुनिक परिमित तत्त्व कार्यान्वयनों का आधार बनी।

Strang and Fix, 1973 ने कठोर अभिसरण सिद्धांत स्थापित करके गणितीय आधारों को सुदृढ़ किया और विधि को उसका सैद्धांतिक प्रमाणन दिया।

12.4.8 वर्तमान प्रभाव और अनुप्रयोग

1980 तक FEM अभियांत्रिकी विश्लेषण की प्रमुख अंकीय विधि बन चुकी थी। वाणिज्यिक कूटों (ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, ADINA, आदि) ने अभूतपूर्व जटिलता की संरचनाओं और निकायों का विश्लेषण संभव बनाया। आज FEM सर्वव्यापी है:

- **संरचनाएँ:** भवन, सेतु, विमान, अंतरिक्षयान, मोटरवाहन
- **विनिर्माण:** धातु रूपण, ढलाई, मशीनन अनुकरण
- **जैवयांत्रिकी:** अस्थि यांत्रिकी, कोमल ऊतक विश्लेषण, शल्य योजना
- **भूयांत्रिकी:** नींव अभिकल्प, सुरंग विश्लेषण, भूकंप अनुक्रिया

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **बहुभौतिकी:** युग्मित तापीय-संरचनात्मक विश्लेषण, तरल-संरचना अन्योन्यक्रिया

FEM ने अभियांत्रिकी अभिकल्प को अनुभव-आधारित कला से अनुकरण-प्रेरित विज्ञान में रूपांतरित कर दिया है। भौतिक निर्माण से पहले आदिप्ररूपों का आभासी परीक्षण किया जा सकता है। इष्टतमीकरण पहले से संभव अभिकल्प समष्टि से कई कोटि बड़े समष्टि का अन्वेषण कर सकता है।

फिर भी शास्त्रीय विधियों—बल विधि, विस्थापन विधि, ऊर्जा सिद्धांत—में FEM की जड़ें स्पष्ट हैं। तत्त्व दृढता आव्यूह सातत्यक दृढता संकारक का केवल विविक्त सादृश्य है। अध्यारोपण द्वारा समुच्चयन आभासी कार्य सिद्धांत की प्रतिध्वनि है। समाधान प्रक्रिया Maxwell, Castigliano और उनके समकालीनों द्वारा स्थापित उसी विस्थापन-बल साम्य तर्क का पालन करती है।

12.5 सारांश और प्रमुख योगदान

सारणी 12.2 संरचनात्मक विश्लेषण की अभिकलनीय विधियों के प्रमुख योगदानकर्ताओं को श्रेणीवार कालानुक्रमिक क्रम में सारांशित करती है।

तालिका 12.2: संरचनात्मक विश्लेषण की अभिकलनीय विधियों के प्रमुख योगदानकर्ता

योगदानकर्ता	वर्ष	संदर्भ	योगदान
परिमित अंतर विधियाँ			
Karl Pearson (1857–1936)	1905	(Pearson, 1905)	बाँध प्रतिबलों पर प्रायोगिक अन्वेषण
Lewis Fry Richardson (1881–1953)	1911	(Richardson, 1911 PDF)	प्रतिबल विश्लेषण के लिए परिमित अंतर विधि; Richardson बहिर्वेशन
पुनरावृत्तीय समाधान विधियाँ			
Philipp Ludwig von Seidel (1821–1896)	1874	(Seidel, 1873 PDF)	Gauss–Seidel पुनरावृत्तीय विधि
FEM के गणितीय आधार			
Walther Ritz (1878–1909)	1909	(Ritz, 1909)	परिवर्ती सन्निकटन विधि (Rayleigh–Ritz)
Boris Galerkin (1871–1945)	1915	(Galerkin, 1915)	भारित अवशेष विधि
Alexander Hrennikoff (1896–1984)	1941	(Hrennikoff, 1941)	जालक सादृश्य; प्रत्यास्थता के लिए ढाँचा विधि
Richard Courant (1888–1972)	1943	(Courant, 1943 PDF)	त्रिकोणीय उपक्षेत्रों पर खंडशः परीक्षण फलन

अगले पृष्ठ पर जारी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 12.2 – *जारी*

योगदानकर्ता	वर्ष	संदर्भ	योगदान
आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण			
Gabriel Kron (1901–1968)	1944	(Kron, 1944)	प्रदिश विधियाँ; जालक्रम विश्लेषण; उपसंरचन अवधारणाएँ
John Argyris (1913–2004)	1954–55	(Argyris and Kelsey, 1960)	ऊर्जा प्रमेयों का आव्यूह सूत्रीकरण; बल–विस्थापन द्वैतता
प्रत्यक्ष दृढता विधि और परिमित तत्त्व			
M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp	1956	(Turner et al., 1956)	प्रत्यक्ष दृढता विधि; त्रिकोणीय समतल प्रतिबल तत्त्व
M. Jonathan Turner (1909–1985)	1959	(Turner, 1959)	प्रत्यक्ष दृढता विधि का औपचारिक निरूपण; अरैखिक विस्तार
Nathan M. Newmark (1910–1981)	1959	(Newmark, 1959)	Newmark काल समाकलन विधि
Ray W. Clough (1920–2016)	1960	(Clough, 1960)	“finite element method” का नामकरण; सतत माध्यमों तक विस्तार
Berkeley के विकास			
Edward L. Wilson (1931–2024)	1960	(Wilson, 1960)	प्रथम अरैखिक परिमित तत्त्व विश्लेषण; SAP प्रोग्राम
R.W. Clough & E.L. Wilson	1962	(Clough, 1962)	Norfork बाँध विश्लेषण; प्रथम प्रमुख FEM अनुप्रयोग
E.L. Wilson & R.W. Clough	1962	(Wilson and Clough, 1962)	प्रथम गतिक FEM विश्लेषण; आव्यूह Newmark विधि
पाठ्यपुस्तकें और प्रसार			
Wright-Patterson Conference	1965		FEM अनुसंधान का अंतरराष्ट्रीय समेकन
Bruce M. Irons (1924–1983)	1966	(Irons, 1966)	समप्राचलीय तत्त्व अवधारणा
O.C. Zienkiewicz (1921–2009) & Y.K. Cheung	1967	(Zienkiewicz, 1967)	परिमित तत्त्व की प्रथम पाठ्यपुस्तक
J.S. Przemieniecki (1924–2015)	1968	(Przemieniecki, 1968)	आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण पर व्यवस्थित पाठ्यपुस्तक

अगले पृष्ठ पर जारी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 12.2 – *जारी*

योगदानकर्ता	वर्ष	संदर्भ	योगदान
Gilbert Strang & George Fix	1973	(Strang and Fix, 1973)	FEM के लिए गणितीय अभिसरण सिद्धांत
Richard H. Gallagher (1927–1997)	1975	(Gallagher, 1975)	परिमित तत्त्व पाठ्यपुस्तक; खोल तत्त्व विकास
सॉफ़्टवेयर विकास			
NASA / MSC / Martin	1965–69		NASTRAN विकास; बल संस्करण 1969 में रद्द

12.6 निष्कर्ष

इस अध्याय में अनुशीलित अभिकलनीय विधियाँ—Richardson के परिमित अंतरों से आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण के माध्यम से परिमित तत्त्व विधि तक—शास्त्रीय संरचनात्मक यांत्रिकी से विच्छेद नहीं, बल्कि अंकीय अभिकलन से संभव हुआ उसका व्यवस्थित विस्तार दर्शाती हैं।

प्रमुख विकास थे:

1911: प्रतिबल विश्लेषण के लिए Richardson की परिमित अंतर विधि—सातत्यक समस्याओं का प्रथम व्यवस्थित अंकीय उपागम

1954–1956: ऊर्जा सिद्धांतों का Argyris आव्यूह सूत्रीकरण; प्रत्यक्ष दृढता विधि उत्पन्न करने वाला Turner–Clough सहयोग

1959: प्रत्यक्ष दृढता विधि का Turner द्वारा औपचारिक निरूपण; Newmark की काल समाकलन योजना

1960: Clough द्वारा परिमित तत्त्व विधि का नामकरण; प्रथम अरैखिक FEM विश्लेषण

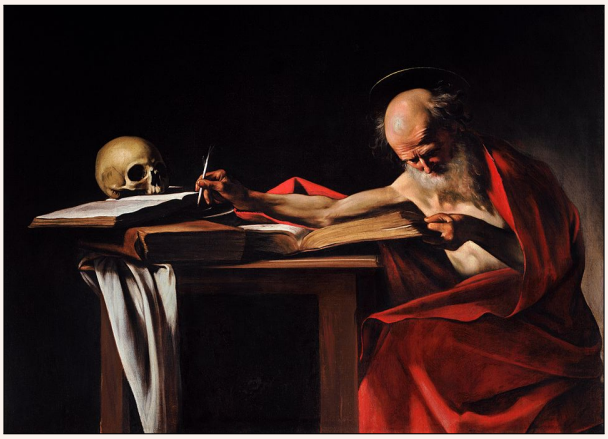
1962: प्रथम गतिक FEM विश्लेषण; व्यावहारिक अनुप्रयोग प्रदर्शित करने वाला Norfork बाँध विश्लेषण

1965–1969: NASTRAN विकास और विस्थापन-आधारित विधियों की विजय

आधुनिक परिमित तत्त्व विश्लेषण के तत्त्व दृढता आव्यूह, समुच्चयन प्रक्रियाएँ और ऊर्जा सिद्धांत सीधे Maxwell, Castigliano तथा उन्नीसवीं शताब्दी के उनके समकालीनों द्वारा विकसित अवधारणाओं से जुडे हैं। कंप्यूटर ने यह बदला कि क्या परिकलित किया जा सकता था, न कि यह कि क्या परिकलित किया जा रहा था।

लाखों स्वतंत्रता कोटियों वाले निकायों को हल करने में सक्षम परिष्कृत परिमित तत्त्व सॉफ़्टवेयर के साथ कार्यरत आज का संरचनात्मक विश्लेषक Navier द्वारा अनिर्धार्य धरनों के प्रथम विवेचन से आरंभ विकास-चाप के अंतिम सिरे पर खडा है। सिद्धांत वही हैं जो दो शताब्दी पूर्व स्थापित हुए थे; केवल अनुप्रयोग का मापक्रम बदला है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Caravaggio, Saint Jerome Writing (1605–1606)

विद्वान ज्ञान को लिपिबद्ध और संचारित करता है—पांडुलिपि से मुद्रण और कूट तक, विधि के संरक्षण और प्रसार का शाश्वत कार्य।

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

13 अबेकस से कलनविधियों तक: विज्ञान और अभियांत्रिकी में अभिकलन का ऐतिहासिक सर्वेक्षण

सारांश

अभिकलन का विकास गणित, अभियांत्रिकी और वैज्ञानिक तर्क के विकास से अविभाज्य है। आरंभिक हस्तचालित उपकरणों से आधुनिक अंकीय पारितंत्रों तक अभिकलन ने प्रतीकात्मक संक्रियाओं को क्रमशः स्वचालित किया है और मानव बुद्धि को पुनरावृत्त अंकगणित के स्थान पर संकल्पनात्मक अंतर्दृष्टि के लिए मुक्त किया है। यह अध्याय उस विकास का औपचारिक ऐतिहासिक अवलोकन प्रदान करता है और वैज्ञानिक तथा अभियांत्रिकी व्यवहार को आकार देने वाले साधनों पर विशेष बल देता है। इसमें दृढता विधि और परिमित तत्त्व सूत्रीकरणों का इतिहास जानबूझकर सम्मिलित नहीं किया गया है, क्योंकि उनका विवेचन बाद के अध्याय में है।

13.1 परिचय 453
13.2 प्राचीन और आरंभिक अभिकलनीय उपकरण 454
13.3 यांत्रिक स्वचालित यंत्र और आरंभिक गणना मशीनें 455
13.4 Babbage और Lovelace: प्रोग्रामन का संकल्पनात्मक उद्गम 457
13.5 अनुरूप वैज्ञानिक अभिकलन (1900–1945) 458
13.6 अंकीय क्रांति (1945–1960) 459
13.7 प्रोग्रामन भाषाएँ और आरंभिक वैज्ञानिक सॉफ्टवेयर 460
13.8 प्रमुख अभिकलनीय विकासों की समयरेखा 461
13.9 आरंभिक अभियांत्रिकी और संरचनात्मक सॉफ्टवेयर (1960–1980) 461
13.10 PC युग और अभियांत्रिकी अभिकलन का विस्तार (1980–2000) 462
13.11 आधुनिक अभिकलनीय पारितंत्र (2000–वर्तमान) 464
13.12 तकनीकी लेखन और प्रतिवेदन का विकास 465
13.13 निष्कर्ष 466

13.1 परिचय

यह अध्याय आधुनिक वैज्ञानिक अभिकलन को जन्म देने वाले दीर्घ बौद्धिक क्रम का अनुशीलन करता है, जो आरंभिक हस्तचालित उपकरणों से शुरू होकर आज अभियांत्रिकी व्यवहार को आधार देने वाले एकीकृत अंकीय पारितंत्रों तक पहुँचता है। अबेकस और लघुगणकीय सारणियों से Pascal तथा Leibniz की गणना मशीनों तक यह आख्यान दिखाता है कि यांत्रिक स्वचालन ने Babbage और Lovelace की संकल्पनात्मक उन्नतियों की नींव कैसे रखी। बीसवीं शताब्दी ने अनुरूप अवकल विश्लेषकों को प्रस्तुत किया, जिसके बाद ENIAC, EDSAC और आरंभिक संग्रहित-प्रोग्राम स्थापत्य से चिह्नित अंकीय क्रांति आई। प्रोग्रामन भाषाओं, विशेषतः FORTRAN, की परिपक्वता ने SAP और NASTRAN से ABAQUS तथा ANSYS तक अभियांत्रिकी सॉफ्टवेयर के विकास को उत्प्रेरित किया। व्यक्तिगत अभिकलन, MATLAB, Mathematica और अंततः Python ने वैज्ञानिक विश्लेषण की गति, मापक्रम और पुनरुत्पाद्यता को रूपांतरित कर दिया। अध्याय BIM, प्राचलीय प्रतिरूपण और मेघ-आधारित अनुकरण से संबंधित आधुनिक

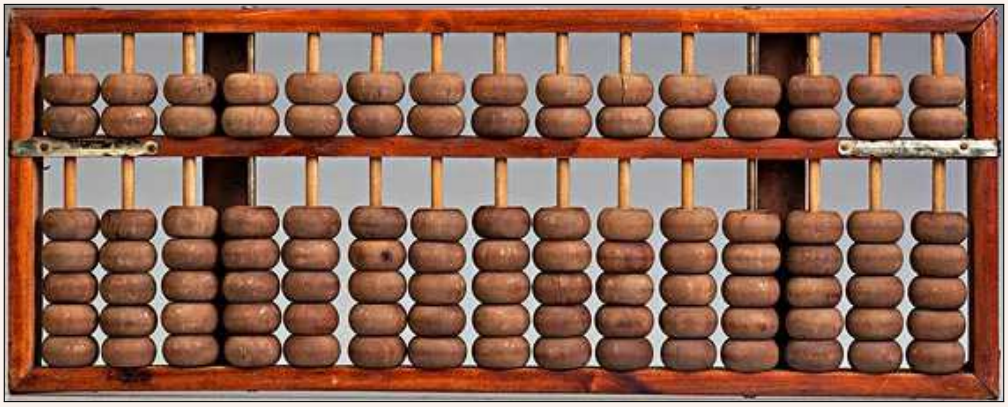
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कार्यप्रवाहों के साथ समाप्त होता है और ऐसे अनुशासन को प्रतिबिंबित करता है जिसमें अभिकलनीय क्षमताएँ अब अभियांत्रिकी सृजनशीलता और कठोरता से अविभाज्य हैं।

13.2 प्राचीन और आरंभिक अभिकलनीय उपकरण

अबेकस

सबसे आरंभिक व्यापक रूप से प्रयुक्त अभिकलनीय उपकरण अबेकस है, जिसका उद्गम स्थानिक अंकों से बहुत पहले का है। अपने विभिन्न रूपों में यह Mesopotamia, Greece, China और Japan में प्रकट हुआ। अबेकस दो केंद्रीय विचारों को मूर्त रूप देता है: स्थानिक संकेतन और अवस्था का स्पष्ट निरूपण, चित्र 13.1। प्रत्येक मनका अथवा गणक एक विविक्त मान के अनुरूप होता है और अंकगणित व्यवस्थित अवस्था-संक्रमणों से आगे बढ़ता है। औपचारिक विश्लेषण से बहुत पहले अबेकस ने व्यापारियों और प्रशासकों को यथार्थ, पुनरावृत्तिशील अंकगणित करने में सक्षम बनाया।



चित्र 13.1: पारंपरिक चीनी अबेकस (suanpan)

Napier के लघुगणक और Oughtred का स्लाइड रूल

Napier, 1614 ने 1614 में लघुगणक प्रस्तुत करके अंकीय अभिकलन को आमूल सरल बनाया। संख्याओं को उनके लघुगणकों से संबद्ध करके Napier ने दिखाया कि गुणन लघुगणकों को जोड़कर और विभाजन उन्हें घटाकर किया जा सकता है। उनके अपने शब्दों में:

> *"इन अनुपातों द्वारा कठिन गुणन योगों में और विभाजन व्यवकलनों में बदल जाते हैं।"*
> —John Napier, *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614)

इस रूपांतरण ने खगोलीय गणना, नौवहन, सर्वेक्षण और आरंभिक अभियांत्रिकी कार्य को अत्यधिक तीव्र किया। एक सरल आधुनिक उदाहरण Napier की अंतर्दृष्टि को स्पष्ट करता है[1]। Henry Briggs

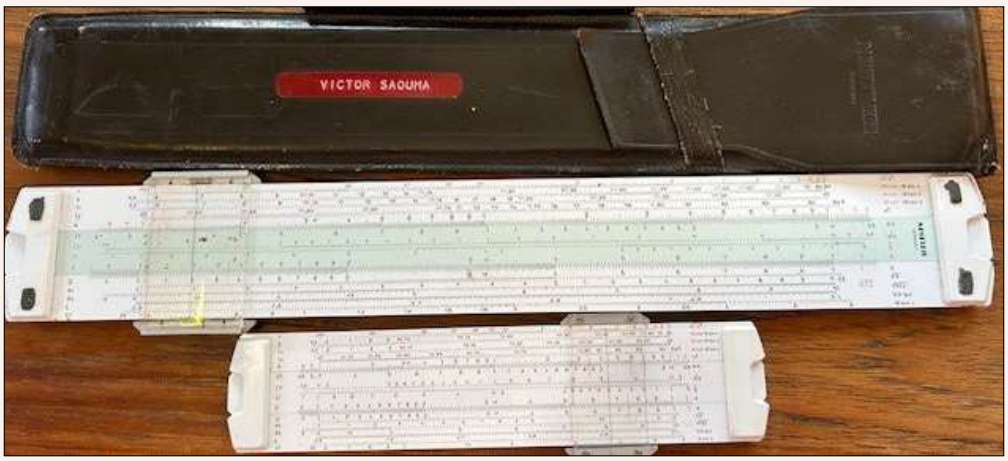
[1]उदाहरण के लिए, $\log(3 \times 4) = \log 3 + \log 4$। साधारण लघुगणकों का उपयोग करने पर, $\log 3 \approx 0.4771$ और $\log 4 \approx 0.6021$, अतः उनका योग 1.0792 से $10^{1.0792} \approx 12$, सही गुणनफल, प्राप्त होता है। विभाजन का उपचार भी इसी प्रकार होता है: $\log(12/3) = \log 12 - \log 3$।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ने शीघ्र ही आधार-10 लघुगणक प्रस्तुत करके और शताब्दियों तक मानक साधन बनी विस्तृत मुद्रित सारणियाँ प्रकाशित करके Napier के कार्य को पूरित किया।

Napier की संकल्पनात्मक उन्नति पर आधारित होकर Oughtred, 1632 ने लगभग 1632 में दो सर्पी लघुगणकीय मापक्रमों का उपयोग करने वाला स्लाइड रूल प्रस्तुत किया। तीन सौ से अधिक वर्षों तक स्लाइड रूल अभियंताओं का प्रमुख अभिकलनीय उपकरण था। उसने तीव्र गुणन, विभाजन, मूल निष्कर्षण और विशेष रूपों में त्रिकोणमितीय तथा चरघातांकीय संक्रियाएँ संभव कीं; चित्र 13.2 देखें।

उन्नीसवीं शताब्दी के उत्तरार्ध और बीसवीं शताब्दी के आरंभ तक अभियांत्रिकी स्लाइड रूल अत्यधिक परिष्कृत और अनुशासन-विशिष्ट हो चुके थे। संरचनात्मक अभियंता उनसे अनुप्रस्थ काट गुण, तनुता अनुपात, पवन दाब, अनुमेय प्रतिबल और आघूर्ण गुणांक परिकलित करते थे—प्रायः इस्पात अभिकल्प हस्तपुस्तिकाओं के साथ। आरंभिक गगनचुंबी भवनों का अभिकल्प ऐसे साधनों पर अत्यधिक निर्भर था।



चित्र 13.2: लेखक के महाविद्यालयीन स्लाइड रूल

इस संदर्भ में 1930 में प्रस्तुत Hardy Cross की आघूर्ण-वितरण विधि आंशिक रूप से इसलिए तीव्रता से फैली क्योंकि उसका पुनरावृत्तीय अंकगणित स्लाइड रूल अभिकलन के लिए आदर्श था। विधि में विशाल समीकरण-निकायों को एक साथ हल करना आवश्यक नहीं था; इसके स्थान पर सीधे संक्रियाओं के अनुक्रम से आघूर्णों का वहन और संतुलन किया जाता था, जिन्हें लघुगणकीय मापक्रमों पर दक्षता से निष्पादित किया जा सकता था।

13.3 यांत्रिक स्वचालित यंत्र और आरंभिक गणना मशीनें

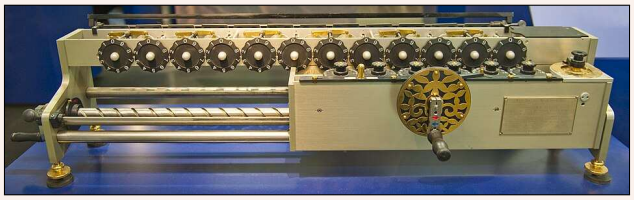
Pascal की योग मशीन

1642 में Pascal, 1645 ने योग और व्यवकलन को स्वचालित करने के लिए गियर-शृंखलाओं का उपयोग करने वाली यांत्रिक योग मशीन (“Pascaline”) बनाई। गियर तंत्र के माध्यम से हासिल यांत्रिक रूप से संचारित होते थे। महँगी और सीमित परास वाली होने पर भी Pascaline ने एक संकल्पनात्मक विच्छेद चिह्नित किया: नियमित अंकगणित किसी मशीन को सौंपा जा सकता था।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Leibniz का Stepped Reckoner

Gottfried Wilhelm Leibniz ने सोपानी ड्रम का आविष्कार करके यांत्रिक अभिकलन का विस्तार किया। उनका “Stepped Reckoner” (Leibniz, 1691b) पुनरावृत्त योग और व्यवकलन द्वारा गुणन तथा विभाजन कर सकता था। Leibniz ने प्रसिद्ध रूप से सुझाव दिया कि तार्किक विवादों का सिद्धांततः गणना द्वारा निपटारा किया जा सकता है, जिससे कलनविधिक तर्क के विचार का पूर्वाभास हुआ, चित्र 13.3।



चित्र 13.3: Leibniz का Stepped Reckoner

औद्योगिक युग के गणक

अठारहवीं और उन्नीसवीं शताब्दियों में बैंकिंग तथा बीमा के लिए अधिक सुदृढ गणना मशीनें विकसित हुईं, किंतु वे यांत्रिक रूप से जटिल और महँगी रहीं। अधिकांश संरचनात्मक और यांत्रिक परिकलनों के लिए अभियंता मुख्यतः स्लाइड रूल और सारणियों पर निर्भर रहे।

1970s के आरंभ में Casio जैसी कंपनियों के अग्रणी प्रतिरूपों से इलेक्ट्रॉनिक हस्तधृत गणक उभरे, चित्र 13.4; इन्होंने वाणिज्यिक बाजार में कुछ प्रथम संहत इलेक्ट्रॉनिक गणक प्रस्तुत किए। इन आरंभिक उपकरणों ने यांत्रिक अभिकलन को एकीकृत परिपथों और LED प्रदर्शों से प्रतिस्थापित किया तथा अभूतपूर्व गति और सुवाह्यता प्रदान की।



चित्र 13.4: आरंभिक Casio इलेक्ट्रॉनिक गणक (लगभग 1970)

Hewlett-Packard ने शीघ्र ही अधिक उन्नत वैज्ञानिक और प्रोग्रामनीय उपकरण प्रस्तुत किए और अभियंताओं के बीच प्रमुख स्थान स्थापित किया। 1970s के उत्तरार्ध और 1980s के आरंभ की

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

HP शृंखला—HP 10C, चित्र 13.5, HP 11C और HP 15C सहित—ने अनेक उपयोगकर्ताओं को *Reverse Polish Notation*[2] (RPN) से परिचित कराया, जिसमें संकार्य संकारकों से पहले आते हैं। RPN ने कोष्ठकों की आवश्यकता समाप्त की और कुंजी-दबाव घटाए, किंतु इसके लिए ऐसा संकल्पनात्मक परिवर्तन आवश्यक था जो प्रति-अंतर्बोधी हो सकता था; लेखक का अपना HP 10C इस बात की सजीव स्मृति है कि आरंभ में यह संक्रमण कितना दिशाभ्रमकारी हो सकता था।



चित्र 13.5: लेखक का प्रथम गणक

इन गणकों ने स्लाइड रूल अभिकलन और आधुनिक अंकीय साधनों के बीच निर्णायक सेतु का प्रतिनिधित्व किया: व्यक्तिगत कंप्यूटरों के सर्वव्यापी होने से बहुत पहले ही वे सुवाह्य, यथार्थ और प्रोग्रामनीय थे। आज के वैज्ञानिक और आलेखीय गणक—चाहे Casio, Texas Instruments अथवा HP के हों—इस परंपरा के उत्तराधिकारी हैं और प्रतीकात्मक संक्रिया, आव्यूह संक्रियाएँ तथा ऐसे अंकीय समाधानकर्ता प्रदान करते हैं जो लघुगणकीय मापक्रमों के युग में अकल्पनीय थे।

13.4 Babbage और Lovelace: प्रोग्रामन का संकल्पनात्मक उद्गम

Difference Engine और Analytical Engine

Charles Babbage ने परिमित अंतरों का उपयोग करके बहुपदीय सारणियों के अभिकलन को यंत्रीकृत करने के लिए Difference Engine प्रस्तावित किया। उनकी अधिक व्यापक दृष्टि Analytical Engine इससे बहुत आगे गई। उनके लेखन और बाद में Babbage, 1864 में वर्णित Analytical Engine में “store”

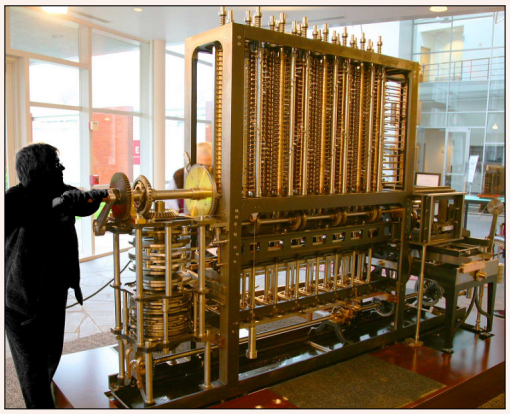
[2]Reverse Polish Notation (RPN) एक ढेरी-आधारित निवेश निकाय है जिसमें संकारक से पहले संकार्य प्रविष्ट किए जाते हैं। उदाहरणतः $3+4$ परिकलित करने के लिए RPN गणक में 3 4 + प्रविष्ट किया जाता है, जिससे 3 और 4 आंतरिक ढेरी पर रखे जाते हैं और फिर संकारक लागू होता है। कोष्ठकों की आवश्यकता नहीं होती (जैसे $(3+4)\times 5$ परिकलित करने के लिए 3 4 + 5 * प्रविष्ट किया जाता है)। RPN कुंजी-दबाव और पदच्छेद जटिलता घटाता है, किंतु मानक मध्यस्थ संकेतन के अभ्यस्त उपयोगकर्ताओं को यह प्रति-अंतर्बोधी लग सकता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(स्मृति), “mill” (अंकगणित इकाई), छिद्रित-पत्र निवेश, प्रतिबंधात्मक शाखन और निर्गम उपकरण सम्मिलित थे। संकल्पना में उसने आधुनिक संग्रहित-प्रोग्राम कंप्यूटरों के स्थापत्य का पूर्वाभास दिया।

Ada Lovelace और प्रतीकात्मक अभिकलन

Lovelace, 1843 ने Menabrea के शोधपत्र के अपने अनुवाद में Babbage के Analytical Engine पर विस्तृत टिप्पणियाँ दीं, 13.6। उन्होंने पहचाना कि मशीन केवल संख्याओं ही नहीं, सामान्य प्रतीकों पर भी संक्रिया कर सकती है और Bernoulli संख्याओं के अभिकलन के लिए वह प्रक्रिया सम्मिलित की जिसे प्रायः प्रथम प्रकाशित कलनविधि माना जाता है। इस प्रकार Lovelace ने किसी कार्यरत सामान्य-प्रयोजन कंप्यूटर के अस्तित्व से बहुत पहले प्रोग्रामन के विचार को व्यक्त किया।



चित्र 13.6: Babbage का Analytical Engine

अपनी संकल्पनात्मक प्रतिभा के बावजूद वित्तीय, राजनीतिक और विनिर्माण सीमाओं के कारण Babbage के इंजन उनके जीवनकाल में कभी पूर्ण नहीं हुए। किंतु बीसवीं शताब्दी के उत्तरार्ध में किए गए आंशिक पुनर्निर्माणों ने उनके अभिकल्पों की यांत्रिक व्यवहार्यता प्रदर्शित की है।

13.5 अनुरूप वैज्ञानिक अभिकलन (1900–1945)

यांत्रिक समाकलक और अनुरूप चिंतन

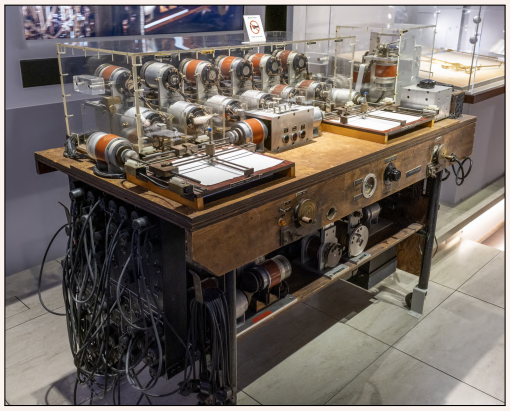
बीसवीं शताब्दी के आरंभ तक अभियंताओं ने ऐसी मशीनें अभिकल्पित करना आरंभ किया जो गणितीय समीकरणों की संरचना को प्रत्यक्ष रूप से मूर्त करती थीं। यांत्रिक समाकलकों ने घूर्णनशील चक्रिकाओं और बेलनों के माध्यम से सतत समाकलन कार्यान्वित किया; अवकल गियरों और संयोजनों ने योग और अंतर बनाए। इन उपकरणों ने अनुरूप अभिकलन कार्यान्वित किया: किसी भौतिक निकाय का व्यवहार समीकरण के समाधान का प्रतिनिधित्व करता था।

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Bush का Differential Analyzer

Bush, 1931 ने 1920s और 1930s में MIT में निर्मित अवकल विश्लेषक का वर्णन किया, चित्र 13.7। इस मशीन ने साधारण अवकल समीकरण-निकायों को हल करने के लिए शाफ्टों और बलाघूर्ण प्रवर्धकों से युग्मित अनेक यांत्रिक समाकलक इकाइयों का उपयोग किया। अंकीय अनुकरण के व्यवहार्य होने से बहुत पहले अभियंताओं ने इससे धरन-विक्षेप, कंपन और गतिक निकायों का अध्ययन किया।



चित्र 13.7: Bush का Differential Analyzer

अवकल विश्लेषकों और संबद्ध अनुरूप उपकरणों ने प्राक्षेपिकी, विमान अभिकल्प और आरंभिक नाभिकीय अनुसंधान में महत्त्वपूर्ण भूमिकाएँ निभाईं। उन्होंने वास्तविक-काल समाधान दिए, किंतु यांत्रिक यथार्थता, अपवाह और जटिलता से सीमित थे। इन सीमाओं ने इलेक्ट्रॉनिक अंकीय अभिकलन के अनुसरण को प्रबल प्रेरणा दी।

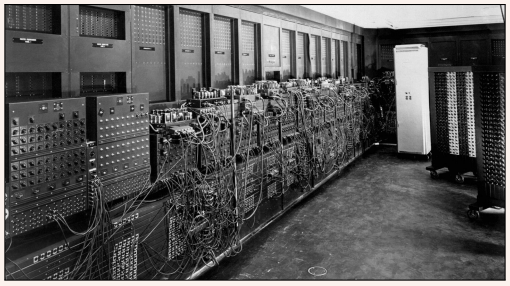
13.6 अंकीय क्रांति (1945–1960)

ENIAC

University of Pennsylvania में विकसित और 1946 में घोषित Electronic Numerical Integrator and Computer (ENIAC), चित्र 13.8, व्यापक रूप से प्रथम विशाल-स्तरीय इलेक्ट्रॉनिक अंकीय कंप्यूटर माना जाता है। इसमें लगभग 18,000 निर्वात नलिकाएँ थीं और यह प्रति सेकंड कई हजार संक्रियाएँ कर सकता था (Eckert and Mauchly, 1946)। प्रोग्रामन के लिए तारों को पुनः जोडना और प्लगबोर्ड स्थापित करना आवश्यक था, किंतु ENIAC ने प्रदर्शित किया कि पूर्णतः इलेक्ट्रॉनिक अभिकलन व्यावहारिक था।

Von Neumann स्थापत्य और संग्रहित प्रोग्राम

John von Neumann और उनके सहयोगियों ने संग्रहित-प्रोग्राम स्थापत्य प्रस्तावित किया, जिसमें प्रोग्राम निर्देश और आँकडे एक सामान्य स्मृति में रहते हैं। EDVAC अभिकल्प पर आरंभिक रिपोर्टों में



चित्र 13.8: ENIAC कंप्यूटर

व्यक्त यह संकल्पना लगभग सभी परवर्ती अंकीय कंप्यूटरों की रूपरेखा बनी। संग्रहित-प्रोग्राम विचार ने कलनविधि को हार्डवेयर से पृथक किया और भौतिक रूप से तार पुनः जोड़े बिना नम्य पुनर्प्रोग्रामन संभव बनाया।

EDSAC और UNIVAC

Cambridge में निर्मित और 1949 में प्रथम बार क्रियाशील Electronic Delay Storage Automatic Calculator (EDSAC) प्रथम व्यावहारिक संग्रहित-प्रोग्राम मशीनों में से एक था। Wilkes, 1951 ने उसके प्रचालन और उपयोग का प्रलेखन किया। लगभग उसी समय UNIVAC I को 1951 में U.S. Census Bureau को दिया गया और वह प्रथम वाणिज्यिक रूप से उपलब्ध संग्रहित-प्रोग्राम कंप्यूटर बना (Corporation, 1951)।

EDSAC और UNIVAC ने प्रायोगिक आदिप्ररूपों से व्यावहारिक वैज्ञानिक तथा प्रशासनिक अभिकलन की ओर संक्रमण चिह्नित किया। शीघ्र ही ऐसी मशीनों पर आरंभिक संरचनात्मक प्रोग्राम और विभिन्न क्षेत्रों के अंकीय विश्लेषण कार्यान्वित किए गए।

13.7 प्रोग्रामन भाषाएँ और आरंभिक वैज्ञानिक सॉफ्टवेयर

आरंभिक अंकीय कंप्यूटरों को मशीन कूट अथवा असेम्बली में प्रोग्रामित किया जाता था, जिससे व्यावहारिक वैज्ञानिक कूटों की जटिलता सीमित होती थी। उच्च-स्तरीय भाषाओं के आगमन ने इस स्थिति को रूपांतरित कर दिया।

FORTRAN और ALGOL

Backus, 1957 ने 1957 में IBM द्वारा जारी FORTRAN (FORmula TRANslation) का वर्णन किया। FORTRAN ने अभियंताओं को बीजीय संकेतन, सारणियों और पाशों का उपयोग करके अंकीय कलनविधियाँ व्यक्त करने दिया। संकलकों ने इन कथनों को दक्ष मशीन कूट में रूपांतरित किया। FORTRAN शीघ्र ही अंकीय अभिकलन की प्रमुख भाषा बनी और आज भी महत्त्वपूर्ण है।

1950s के उत्तरार्ध में प्रस्तुत ALGOL ने संरचित नियंत्रण-प्रवाह रचनाएँ और व्याप्ति नियम दिए,

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जिन्होंने C, Pascal तथा अनेक परवर्ती भाषाओं को प्रभावित किया। अभियांत्रिकी व्यवहार में FORTRAN से कम व्यापक रूप से प्रयुक्त होने पर भी ALGOL के संकल्पनात्मक योगदान महत्त्वपूर्ण थे।

अभिकलन केंद्र और बैच प्रक्रमण

विश्वविद्यालयों और प्रयोगशालाओं ने मेनफ्रेम से सुसज्जित केंद्रीकृत अभिकलन केंद्र स्थापित किए। अभियंता छिद्रित पत्रों पर FORTRAN कूट तैयार करते, प्रचालक को कार्य सौंपते और मुद्रित निर्गम की प्रतीक्षा करते थे। दोषमार्जन के लिए प्रायः अनेक प्रस्तुति चक्र आवश्यक होते थे। इस बैच-प्रक्रमण व्यवस्था ने आरंभिक अभिकलनीय कार्यप्रवाहों को आकार दिया और कलनविधिक दक्षता को प्रोत्साहित किया।

13.8 प्रमुख अभिकलनीय विकासों की समयरेखा

वर्ष	मील का पत्थर
लगभग 2000 BCE	अबेकस का व्यापक उपयोग
1614	Napier ने लघुगणक प्रस्तुत किए (Napier, 1614)
1632	Oughtred का स्लाइड रूल (Oughtred, 1632)
1642	Pascal की योग मशीन (Pascal, 1645)
1690s	Leibniz का Stepped Reckoner (Leibniz, 1691b)
1830s	Babbage की Analytical Engine संकल्पना (Babbage, 1864)
1843	Analytical Engine पर Lovelace की टिप्पणियाँ (Lovelace, 1843)
1925–1931	Bush का अवकल विश्लेषक (Bush, 1931)
1946	ENIAC क्रियाशील (Eckert and Mauchly, 1946)
1949	EDSAC क्रियाशील (Wilkes, 1951)
1951	UNIVAC I प्रदत्त (Corporation, 1951)
1957	FORTRAN जारी (Backus, 1957)
1960s	SAP, STRUDL, NASTRAN, आरंभिक ANSYS, आदि (Wilson, 1969; NASA, 1968)
1978	प्रथम ABAQUS संस्करण (*ABAQUS User's Manual* 1978)
1984	MATLAB प्रस्तुत (*MATLAB User's Guide* 1984)
1988	Mathematica प्रस्तुत (Wolfram, 1988)
2000s	Python वैज्ञानिक स्टैक, BIM, प्राचलीय साधन (Foundation, 2001)

तालिका 13.1: वैज्ञानिक और अभियांत्रिकी अभिकलन के प्रमुख मील के पत्थरों की समयरेखा

13.9 आरंभिक अभियांत्रिकी और संरचनात्मक सॉफ्टवेयर (1960–1980)

1960–1980 की अवधि में सामान्य-प्रयोजन अभियांत्रिकी सॉफ्टवेयर उभरे जिन्होंने संरचनात्मक विश्लेषण के अनेक कार्य स्वचालित किए।

SAP और STRUDL

University of California, Berkeley में Structural Analysis Program (SAP) को ढाँचा और परिमित तत्त्व विश्लेषण के लिए सामान्य-प्रयोजन दृढता-आधारित कूट के रूप में विकसित किया गया (Wilson, 1969)। समय के साथ SAP, SAP IV, SAP90 और अंततः SAP2000 तथा ETABS में विकसित हुआ।

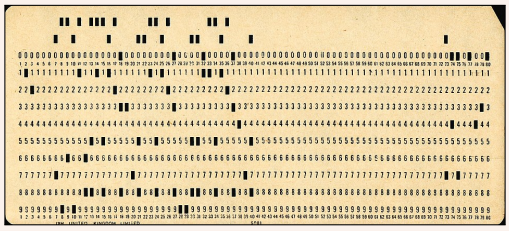
Georgia Tech में STRUDL (Structural Design Language) को विश्लेषण, अभिकल्प और आँकड़ा प्रबंधन को संयोजित करने वाले एकीकृत निकाय के रूप में विकसित किया गया। यह प्रक्षेत्र-विशिष्ट संरचनात्मक भाषा के आरंभिक उदाहरणों में से एक था।

NASTRAN, ANSYS और ABAQUS

NASA के प्रायोजन में 1960s में प्रथम बार विकसित NASTRAN (NASA Structural Analysis) ने मानकीकृत निवेश प्रारूप और परिमित तत्त्व क्षमताओं का व्यापक वर्णक्रम प्रदान किया (NASA, 1968)। यह वांतरिक्ष और यांत्रिक विश्लेषण का संदर्भ मंच बना।

ANSYS, जिसकी जड़ें 1970s के आरंभ की हैं, सामान्य बहुभौतिकी परिवेश में विकसित हुआ (Swanson, 1971)। 1978 में प्रथम बार जारी ABAQUS (*ABAQUS User's Manual* 1978) अरैखिक परिमित तत्त्व विश्लेषण में विशिष्ट था और बाद में सामग्री तथा भारण प्रतिबंधों की विस्तृत परास को समाहित करने के लिए विस्तारित हुआ।

इन सभी कूटों का आरंभिक उपयोग मेनफ्रेम कंप्यूटरों पर हुआ, जिनमें निवेश छिद्रित पत्रों पर तैयार किया जाता था और परिणाम पंक्ति-मुद्रकों पर मुद्रित होते थे।



चित्र 13.9: छिद्रित पत्र और बैच-प्रक्रमण कार्यप्रवाह

13.10 PC युग और अभियांत्रिकी अभिकलन का विस्तार (1980–2000)

1970s के उत्तरार्ध और 1980s के आरंभ में सूक्ष्मसंसाधकों तथा व्यक्तिगत कंप्यूटरों के आगमन ने अभिकलन का विकेंद्रीकरण किया। अभियंता अब केवल मेनफ्रेम पर निर्भर नहीं थे; वे डेस्कटॉप मशीनों पर पर्याप्त आकार के विश्लेषण चला सकते थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अन्योन्यक्रियात्मक अभिकलन

अन्योन्यक्रियात्मक अभिकलन ने बैच प्रस्तुति को प्रतिस्थापित किया और अन्वेषणात्मक प्रतिरूपण को प्रोत्साहित किया। विशेषतः स्मृति और आलेखीय क्षमताओं में सुधार के साथ आलेखीय अंतरापृष्ठों ने पाठ-आधारित निवेश फाइलों को पूरित अथवा प्रतिस्थापित करना आरंभ किया।

MATLAB

MATLAB , जो मूलतः 1970s के उत्तरार्ध में विकसित और 1984 में MathWorks द्वारा वाणिज्यीकृत हुआ, अंकीय रैखिक बीजगणित, संकेत प्रक्रमण, नियंत्रण और संरचनात्मक गतिकी का केंद्रीय साधन बना (*MATLAB User's Guide* 1984)। उसकी आव्यूह-उन्मुख भाषा, अंतर्निर्मित समाधानकर्ताओं और आलेखिकी ने उसे तीव्र आदिप्ररूपण तथा शिक्षण के लिए आदर्श बनाया।

Mathematica

Mathematica , जिसे Wolfram, 1988 ने प्रस्तुत किया, ने प्रतीकात्मक संक्रिया, अंकीय समाधानकर्ताओं और दृश्यीकरण को संयोजित किया। अभियंताओं के लिए उसने विश्लेषणात्मक व्यंजकों को व्युत्पन्न और सत्यापित करने, प्रतीकात्मक अवकल समीकरण हल करने और प्राचल निर्भरताओं का अन्वेषण करने का शक्तिशाली परिवेश प्रदान किया।

संरचनात्मक सॉफ़्टवेयर का प्रसार

PC क्षमता बढ़ने के साथ संरचनात्मक सॉफ़्टवेयर अधिक सुलभ हुए:

- SAP2000 और ETABS ने व्यापक भवन विश्लेषण तथा अभिकल्प साधन प्रदान किए।
- STAAD का सिविल और औद्योगिक बाजारों में विस्तार हुआ।
- ADINA ने उन्नत अरैखिक और बहु-भौतिकी क्षमताएँ प्रदान कीं।
- SAFE ने पट्टिकाओं और नींवों को संबोधित किया।

इन प्रोग्रामों ने अभियंताओं को विधा-आकृतियाँ, प्रतिबल समोच्च और काल-इतिहास अनुक्रियाएँ ऐसे ढंग से देखने दिया जो मेनफ्रेम युग में अव्यावहारिक होता।

जैसे-जैसे संरचनात्मक विश्लेषण सॉफ़्टवेयर सर्वव्यापी हुआ है, उसके दुरुपयोग के विषय में सुस्थापित चिंताएँ उभरी हैं (Powell, 2008 PDF)।

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

13.11 आधुनिक अभिकलनीय पारितंत्र (2000–वर्तमान)

Python और मुक्त-स्रोत वैज्ञानिक अभिकलन

2000s के आरंभ में Python , NumPy, SciPy और Matplotlib जैसे पुस्तकालयों से समर्थित, प्रमुख वैज्ञानिक अभिकलन मंच के रूप में विकसित हुआ। Python Software Foundation ने भाषा के विकास को औपचारिक रूप दिया (Foundation, 2001)। Jupyter Notebooks के आगमन के साथ Python पुनरुत्पाद्य अभिकलनीय अनुसंधान का मानक परिवेश बना।

संरचनात्मक अभियंताओं के लिए Python परिमित तत्त्व ढाँचों की पटकथा, संभाव्यता अनुकरण, संरचनात्मक स्वास्थ्य पर्यवेक्षण के आँकड़ा प्रक्रमण और बाह्य समाधानकर्ताओं के साथ युग्मन संभव बनाता है।

उच्च-निष्पादन अभिकलन

आधुनिक संरचनात्मक और भूकंपीय अनुकरणों के लिए प्रायः उच्च-निष्पादन अभिकलन (HPC) आवश्यक होता है। समानांतर समाधानकर्ता, GPU त्वरण और मेघ मंच निम्न को संभव बनाते हैं:

- विशाल-स्तरीय अरैखिक गतिक विश्लेषण,
- अनेक यथार्थनों वाले प्रसंभाव्य अनुकरण,
- युग्मित तरल-संरचना अथवा ताप-यांत्रिक प्रतिरूप।

HPC ने पहले केवल शैक्षणिक रहे सूत्रीकरणों को संकट और जोखिम आकलन के व्यावहारिक साधनों में बदल दिया है।

भवन सूचना प्रतिरूपण (BIM) और प्राचलीय अभिकल्प

Building Information Modeling (BIM) स्थापत्य, संरचनात्मक और निर्माण सूचना को एकल अंकीय प्रतिरूप में एकीकृत करता है। Revit और Tekla Structures जैसे सॉफ़्टवेयर ज्यामिति, सामग्री, भार और संयोजनों का समन्वय संभव बनाते हैं। Industry Foundation Classes (IFC) मानक विश्लेषण सॉफ़्टवेयर, BIM मंचों और संविरचन साधनों के बीच आँकड़ा विनिमय को सुगम करता है।

प्राचलीय और जनक अभिकल्प साधन (Grasshopper, Dynamo) नियमों अथवा इष्टतमीकरण निकषों से संचालित ज्यामिति और संस्थिति की अनुमति देकर प्रतिरूपण क्षमताओं को आगे विस्तारित करते हैं। प्रायः परिमित तत्त्व समाधानकर्ताओं के साथ प्रयुक्त ये साधन जटिल संरचनात्मक रूपों के निष्पादन-प्रेरित अभिकल्प को संभव बनाते हैं।

अप्रकाशित प्रति

13.12 तकनीकी लेखन और प्रतिवेदन का विकास

पांडुलिपियों से शब्द संसाधकों तक

ऐतिहासिक रूप से वैज्ञानिक संचार हस्तलिखित पांडुलिपियों और यांत्रिक अक्षरयोजन पर निर्भर था। संशोधन श्रमसाध्य थे और गणितीय संकेतन के लिए विशिष्ट अक्षरयोजकों की आवश्यकता होती थी। टंकणयंत्रों ने रूप को मानकीकृत किया, किंतु वे समीकरणों अथवा स्वचालित संदर्भन को समर्थन नहीं देते थे। आरंभिक शब्द संसाधकों ने संपादन को सरल बनाया, किंतु वे विशाल, समीकरण-सघन तकनीकी कृतियों के लिए अभिकल्पित नहीं थे।

Microsoft Word

Microsoft Word और समान साधनों ने प्रलेख निर्माण को व्यापक रूप से सुलभ बनाया, किंतु विशाल परियोजनाओं के लिए समीकरण संपादन, परस्पर-संदर्भन और संदर्भ-सूची प्रबंधन नाजुक बने रहे। सैकड़ों समीकरणों, चित्रों और उद्धरणों वाली पुस्तक के लिए ऐसे परिवेशों में संगति बनाए रखना कठिन है।

LaTeX

Leslie Lamport द्वारा विकसित LaTeX वैज्ञानिक अक्षरयोजन का निर्णायक मानक बन चुका है। उसकी गणितीय यथार्थता, संदर्भ-सूची संगति और प्रोग्रामनीयता इस मापक्रम तथा जटिलता की तकनीकी कृति के लिए उसे एकमात्र व्यवहार्य मंच बनाती है। LaTeXद्वारा प्रदान की गई नम्यता और स्वचालन—अतिसंपर्कों, परस्पर-संदर्भों, स्वनिर्धारित समष्टियों, चित्रों और विस्तृत उद्धरण जालक्रमों का उसका प्रबंधन—न होता तो इस पुस्तक का निर्माण संभव ही नहीं था। Microsoft Word सहित कोई पारंपरिक शब्द संसाधक यहाँ आवश्यक संरचनात्मक, गणितीय और संदर्भात्मक सुसंगति का प्रबंधन नहीं कर सकता था। इस खंड का लगभग प्रत्येक चित्र, समीकरण, सारणी और उद्धरण LaTeXसमष्टियों से उत्पन्न होता है, जो स्पष्टता, पुनरुत्पाद्यता और सुसंगत प्रस्तुति सुनिश्चित करता है।

MathCad

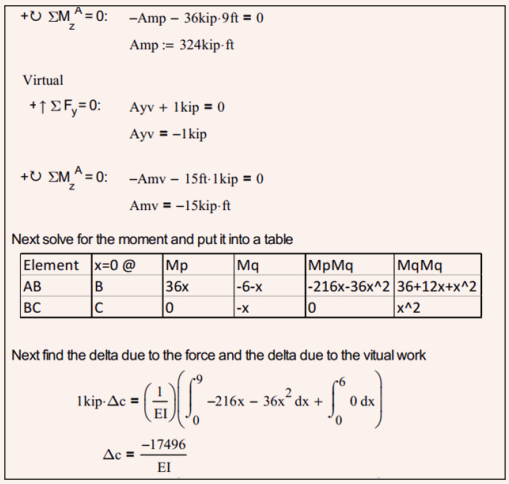
Mathcad एक अभियांत्रिकी गणना परिवेश है जो गणित, पाठ और आलेखिकी को एकल प्रलेख में एकीकृत करता है, चित्र 13.10। यह अभियंताओं को प्रोग्रामन वाक्यविन्यास के स्थान पर मानक गणितीय संकेतन का उपयोग करके प्रतीकात्मक और अंकीय अभिकलन करने देता है। उसकी परिभाषक विशेषताओं में से एक यह है कि गणनाएँ और व्याख्यात्मक पाठ निर्बाध रूप से साथ रहते हैं, जिससे स्वतः-प्रलेखित तकनीकी प्रतिवेदन बनाए जा सकते हैं।

इकाइयों का मूल रूप से प्रबंधन होता है, जिससे विमीय त्रुटियों का जोखिम उल्लेखनीय रूप से घटता है। अभियंता नियंत्रक समीकरणों के ठीक साथ आलेख, सारणियाँ और प्राचल अध्ययन रख सकते हैं।

उसका कार्यपत्रक प्रतिमान मान्यताओं, सूत्रों और परिणामों को तुरंत दृश्यमान तथा अनुरेखणीय बनाता है। Mathcad उसी अभिकलनीय फाइल के भीतर अंतःस्थापित प्रलेखन, अतिसंपर्क और प्रारूपित टिप्पणी को भी समर्थन देता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अपनी पारदर्शिता और पठनीयता के कारण यह यांत्रिक, सिविल, विद्युत और वांतरिक्ष अभियांत्रिकी में व्यापक रूप से प्रयुक्त होता है। यह अभिकल्प जाँचों, कूट अनुपालन गणनाओं और परिमित तत्त्व परिणामों के सत्यापन के लिए विशेष रूप से मूल्यवान है।



चित्र 13.10: MathCad का उदाहरण

आज Mathcad अनेक अभियांत्रिकी कार्यालयों में मानक साधन बन चुका है[3]; यह कठोर विश्लेषण और स्पष्ट तकनीकी संचार के बीच अंतराल को पाटता है।

परिशिष्ट J इस पुस्तक में हल की गई संरचनात्मक विश्लेषण समस्याओं के अनुरूप MathCad उदाहरणों का विस्तृत संग्रह प्रदान करता है।

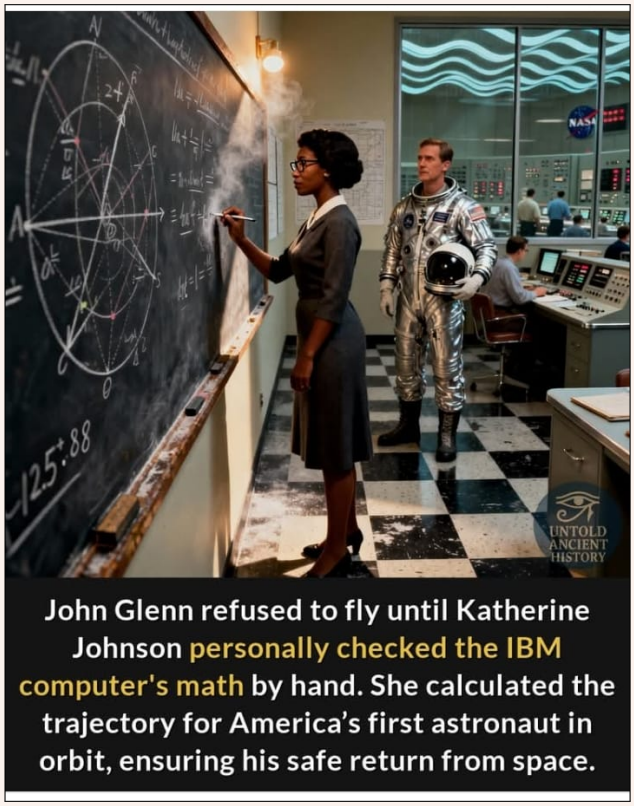
13.13 निष्कर्ष

अबेकस से आधुनिक कलनविधिक पारितंत्रों तक अभिकलन का विकास मानव तर्क को स्वचालित और विस्तारित करने के सतत प्रयास को प्रतिबिंबित करता है। प्रत्येक चरण—लघुगणक, स्लाइड रूल, यांत्रिक गणक, अनुरूप मशीनें, अंकीय कंप्यूटर, प्रोग्रामन भाषाएँ और एकीकृत सॉफ्टवेयर परिवेश—ने जटिल निकायों को प्रतिरूपित, विश्लेषित और अभिकल्पित करने की अभियंता की क्षमता बढ़ाई है।

आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण, अंकीय अनुकरण और आँकड़ा-प्रेरित अभिकल्प इसी परंपरा पर आधारित हैं। इस अध्याय में वर्णित विधियाँ और साधन वह अभिकलनीय आधार बनाते हैं जिस पर परवर्ती अध्यायों की अधिक उन्नत विश्लेषणात्मक तकनीकें निर्मित हैं।

[3]मैं लंबे समय से—अब तक असफल रूप से—यह समर्थन करता आया हूँ कि छात्रों के सभी गृहकार्य Mathcad में प्रस्तुत करना आवश्यक किया जाए, जिससे हमें हस्तलेख समझने की पीड़ा से मुक्ति मिले और छात्रों को व्यवहार में व्यापक रूप से प्रयुक्त सॉफ्टवेयर मंच का प्रशिक्षण मिले। इससे छल की पहचान भी सरल होगी, क्योंकि गणना कार्यप्रवाह पारदर्शी हो जाता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



स्वतः स्पष्ट

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

14 बल और आभासी सिद्धांतों का विकास

सारांश

यह अध्याय यांत्रिकी की दो आधारभूत अवधारणाओं के समानांतर और परस्पर गुंथे विकास का अनुशीलन करता है: बल की धारणा और आभासी कार्य सिद्धांत। प्राचीन Egypt और Mesopotamia में बल के दैवी मानवीकरण से आरंभ करके हम Greek प्राकृतिक दर्शन के माध्यम से यांत्रिक तर्क के क्रमिक उद्भव का अनुसरण करते हैं, जहाँ Aristotle का प्राकृतिक और हिंसक गति के बीच भेद लगभग दो सहस्राब्दियों तक प्रभावी रहा। आख्यान Islamic विद्वानों के मध्यकालीन योगदानों—जिन्होंने mayl (संवेग) की अवधारणा को परिष्कृत किया—और Latin आचार्यों तक आगे बढ़ता है, विशेषतः "स्थितीय गुरुत्व" के माध्यम से Jordanus de Nemore द्वारा आभासी विस्थापनों के अंतर्निहित उपयोग तक।

Renaissance और Scientific Revolution निर्णायक मोड़ चिह्नित करते हैं। Stevin के clootcrans प्रदर्शन (1586) ने साम्य के निकष के रूप में चिरगति की असंभाव्यता प्रस्तुत की, जबकि Galileo ने सरल मशीनों में बल और विस्थापन के बीच विनिमय को स्पष्ट किया। Descartes ने निर्णायक अंतर्दृष्टि दी कि अत्यल्प विस्थापन—"गति का आरंभ"—स्थैतिकी की उचित राशियाँ हैं और Torricelli ने साम्य को गुरुत्व-केंद्र पर परिवर्ती प्रतिबंध के रूप में पुनःसूत्रबद्ध किया। इन धाराओं को Johann Bernoulli ने एकीकृत किया, जिनके Varignon को 1715 के पत्र ने आभासी वेगों के सिद्धांत का प्रथम सामान्य कथन दिया: साम्य पर बलों और उनके आभासी विस्थापनों के गुणनफलों का योग शून्य होता है।

अध्याय का चरम अठारहवीं शताब्दी में d'Alembert के व्यवस्थापन में है, जिन्होंने अपने जड़त्वीय बल सिद्धांत द्वारा आभासी कार्य को गतिकी तक विस्तारित किया, और Lagrange में है, जिनकी Mécanique Analytique (1788) ने सिद्धांत को समस्त यांत्रिकी के आधार तक उन्नत किया—एक भी आरेख के बिना विशुद्ध बीजीय संक्रियाओं में व्यक्त। हम ज्यामितीय गतियों और मशीन सिद्धांत पर Lazare Carnot के योगदान तथा असमिका प्रतिबंधों तक Fourier के विस्तार का भी परीक्षण करते हैं। कालानुक्रमिक सारणी Aristotle से Mohr तक के प्रमुख विकासों को सारांशित करती है।

14.1 परिचय 469
14.2 प्राचीनता और दैवत्व 471
14.2.1 Egypt 471
14.2.2 Mesopotamia 472
14.2.3 India 473
14.3 शास्त्रीय प्राचीनता और प्राकृतिक दर्शन 474
14.3.1 Greeks 474
14.3.2 Romans, Plotinus (204–270) 481
14.3.3 Byzantine, Philoponus (490–570) 482
14.4 मध्ययुगीन काल और Scholasticism . . 483
14.4.1 Islamic विद्वान 483
14.4.2 Jordanus de Nemore (ca 1225-ca1260) और स्थितीय गुरुत्व 484
14.4.3 Middle Ages: University of Paris 485
14.5 Renaissance और Scientific Revolution 487
14.5.1 Leonardo da Vinci (1452-1519) 487
14.5.2 Benedetti (1530–1590) 488
14.5.3 Pardies (1636–1673) 489
14.5.4 Simon Stevin (1548–1620) . 489
14.5.5 Galileo (1564-1642) 494
14.5.6 Kepler (1571–1630) 497
14.5.7 Descartes (1596–1650) 499
14.5.8 Torricelli (1608–1647) 506
14.5.9 Wallis (1616–1703) 508
14.5.10 Leibniz (1646–1716) 508
14.5.11 Newton (1642–1726) 510
14.5.12 Bernoulli, Daniel (1700-1782) 512
14.5.13 Johann Bernoulli का 1715 का पत्र 513
14.5.14 Varignon (1654–1722) 515
14.5.15 D'Alembert (1717–1783) . . 516
14.5.16 Kant (1724–1804) 522
14.5.17 Lagrange (1736–1813) 522
14.5.18 Fourier (1768–1830) 526
14.5.19 Lazare Carnot (1753–1823) . 526
14.6 उपसंहार 528
14.7 निष्कर्ष 529

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

14.1 परिचय

अपनी पुस्तक “Science and Hypothesis” (La Science et l’Hypothèse) में Poincaré Poincaré, 1905 ने बल की अवधारणा के मानवरूपी उद्गम पर प्रसिद्ध रूप से विस्तार से चर्चा की है[1]।

वास्तव में बल और *आभासी कार्य* की अवधारणाएँ यांत्रिकी की सर्वाधिक आधारभूत अवधारणाओं में हैं, फिर भी उनके इतिहास विरल ही साथ कहे जाते हैं। यह एक न्यूनता है, क्योंकि दोनों विचार घनिष्ठ संवाद में विकसित हुए: बल की समझ में उन्नतियों ने बार-बार साम्य के नए सिद्धांतों की माँग की, जबकि आभासी-कार्य तर्क के परिशोधन ने बदले में यह स्पष्ट किया कि “बल” का अर्थ क्या होना चाहिए। वर्तमान अध्याय इस द्वैत विकास का एकीकृत आख्यान प्रस्तुत करता है, जो प्राचीनता के पौराणिक मानवीकरणों से आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण के आधारभूत विश्लेषणात्मक सूत्रीकरणों तक लगभग पच्चीस शताब्दियों में विस्तृत है।

हम बल को दैवी गुण—Egypt का *nht*, Mesopotamia का *Enlil*, Biblical *Shaddai*—मानने से आरंभ करते हैं और फिर Greeks की ओर मुडते हैं, जिनके लिए प्राकृतिक दर्शन ने भौतिक संसार को समझने के ढाँचे के रूप में धर्मशास्त्र को प्रतिस्थापित किया। Aristotle का प्राकृतिक और हिंसक गति के बीच भेद अंततः अशुद्ध होने पर भी उस संकल्पनात्मक शब्दावली को स्थापित करता है जो Scientific Revolution तक पाश्चात्य चिंतन पर प्रभावी रही। Peripatetic school में उनके अनुयायियों ने *Mechanica* तैयार की, संभवतः यांत्रिक लाभ की एकीकृत व्याख्या खोजने वाला प्रथम ग्रंथ, जिसने इसे वृत्त के “अद्भुत” गुणों में पाया। इसके विपरीत Archimedes ने उत्तोलक नियम के कठोर ज्यामितीय प्रमाण दिए, किंतु कोई सामान्य सिद्धांत नहीं—एक सीमा जिसे Descartes ने बाद में *क्या* होता है बताना, किंतु *क्यों* नहीं बताना कहा।

मध्यकाल में दो समानांतर विकास हुए। Islamic संसार में Avicenna और al-Baghdadi जैसे विद्वानों ने आरोपित बल की Aristotelian अवधारणा को *mayl* के सिद्धांत में परिष्कृत किया, ऐसी आंतरिक प्रवृत्ति जो प्रक्षेपयों को गतिशील रखती है और संवेग की परवर्ती अवधारणा का पूर्वाभास देती है। Latin Europe में Jordanus de Nemore ने “स्थितीय गुरुत्व”—आनत तल पर पिंड का प्रभावी भार—प्रस्तुत किया, ऐसा विचार जो आभासी विस्थापनों को अंतर्निहित रूप से प्रयुक्त करता है, यद्यपि उन्हें उस रूप में नहीं पहचानता। University of Paris में Buridan के संवेग सिद्धांत और Oresme की शुद्धगतिक अंतर्दृष्टियों ने आने वाली क्रांति के लिए आगे आधार तैयार किया।

Renaissance ने नई प्रायोगिक भावना प्रस्तुत की। Leonardo da Vinci ने सरल मशीनों के गुण सूचीबद्ध किए; Simon Stevin के *clootcrans* (1586) ने चिरगति की असंभाव्यता से आनत तल का नियम व्युत्पन्न किया, ऐसा तर्क जिसका स्वरूप स्पष्टतः “आभासी” है। Galileo ने मूलभूत विनिमय व्यक्त किया: बल में जो प्राप्त होता है वह वेग में खो जाता है। किंतु ये अंतर्दृष्टियाँ एकीकृत सिद्धांत के अभाव में बिखरी रहीं।

[1]उन्होंने लिखा:“किसी पिंड का त्वरण उस पर कार्य करने वाले बल को उसके द्रव्यमान से विभाजित करने के बराबर होता है। क्या इस नियम को प्रयोग द्वारा सत्यापित किया जा सकता है? यदि हाँ, तो हमें कथन में उल्लिखित तीन राशियों को मापना होगा: त्वरण, बल और द्रव्यमान। मैं स्वीकार करता हूँ कि त्वरण मापा जा सकता है, क्योंकि मैं काल के मापन से उत्पन्न कठिनाई को छोड देता हूँ। किंतु बल और द्रव्यमान को कैसे मापें? हम यह भी नहीं जानते कि वे क्या हैं। द्रव्यमान क्या है? Newton उत्तर देते हैं: “ आयतन और घनत्व का गुणनफल”... बल क्या है? Lagrange उत्तर देते हैं, “वह जो किसी पिंड को चलाता है अथवा चलाने की प्रवृत्ति रखता है”

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

निर्णायक संश्लेषण सत्रहवीं शताब्दी में आया। Descartes ने बल दिया कि साम्य परिमित गतियों पर नहीं, बल्कि अत्यल्प विस्थापनों—“गति के आरंभ”—पर निर्भर करता है और दिखाया कि स्पर्शरेखा रचना इस तर्क को वक्र प्रतिबंधों तक कैसे विस्तारित करती है। Torricelli ने साम्य को परिवर्ती प्रतिबंध के रूप में पुनःसूत्रबद्ध किया: भारी पिंडों का निकाय तभी और केवल तभी साम्य में है जब कोई ग्राह्य गति उनके सामान्य गुरुत्व-केंद्र को नीचे नहीं कर सकती। Wallis ने इन विचारों को स्वेच्छ बल दिशाओं तक सामान्यीकृत किया और Leibniz ने दार्शनिक गहराई (*vis viva* विवाद) तथा निर्देशित राशियों के अनुकूल प्रतीकात्मक कलन के आरंभ, दोनों का योगदान किया।

शिखर Johann Bernoulli ने स्थापित किया। 26 February 1715 के Varignon को लिखे पत्र में उन्होंने आभासी वेगों के सिद्धांत को उसके सामान्य रूप में कहा: साम्य में किसी भी निकाय के लिए प्रत्येक बल और उसकी दिशा में आभासी विस्थापन के गुणनफल का योग शून्य होता है। Varignon ने परिणाम को “इतना सामान्य और इतना सुंदर” माना कि उन्होंने तुरंत उसे प्रकाशित करने की अनुमति माँगी। इस एक कथन से दो सहस्राब्दियों की पृथक अंतर्दृष्टियाँ किसी भी यांत्रिक निकाय पर लागू एकल सिद्धांत में एकीकृत हो गईं।

अठारहवीं शताब्दी ने इस सिद्धांत को विश्लेषणात्मक यांत्रिकी के आधार में रूपांतरित किया। D’Alembert की *Traité de Dynamique* (1743) ने जड़त्वीय पदों को बल मानने के सरल उपाय से आभासी कार्य को गतिकी तक विस्तारित किया: त्वरणशील पिंड को आरोपित और जड़त्वीय बलों की संयुक्त क्रिया के अधीन साम्य में माना जा सकता है। Lagrange की *Mécanique Analytique* (1788) ने समूचे विषय को व्यवस्थित किया, सामान्यीकृत निर्देशांक प्रस्तुत किए और दिखाया कि प्रतिबंध बल परिवर्ती समस्या के Lagrange गुणकों के रूप में स्वाभाविक रूप से प्रकट होते हैं। उनका प्रसिद्ध गर्वोक्ति—कि कृति में एक भी आरेख नहीं है—विश्लेषणात्मक उपागम की शक्ति की साक्षी है। Lazare Carnot ने *ज्यामितीय गतियों* और *क्रियाशीलता आघूर्ण* की अवधारणाओं का योगदान किया और अमूर्त सिद्धांतों तथा मशीनों के व्यावहारिक विज्ञान के बीच अंतराल पाटा। Fourier ने ढाँचे को असमिका प्रतिबंधों तक विस्तारित करके आधुनिक संपर्क यांत्रिकी का मार्ग खोला।

इस आख्यान में दो विषय बार-बार आते हैं। प्रथम *क्या* और *क्यों* के बीच तनाव है—उन प्रदर्शनों के बीच जो बताते हैं कि कोई विशिष्ट साम्य प्रतिबंध लागू होता है (Archimedes) और उन सिद्धांतों के बीच जो बताते हैं कि उसे क्यों लागू होना चाहिए (Bernoulli, Lagrange)। दूसरा बल का दैवी गुण से गतिशील पिंडों के गुण और फिर आभासी विस्थापनों पर उसके प्रभावों से परिभाषित गणितीय राशि तक क्रमिक अमूर्तन है। हमारे आख्यान के अंत तक “बल” वह बन चुका है जो संरचनात्मक अभियंता इस पद से समझते हैं: कार्य व्यंजक में विस्थापन का द्वैत, जिसे Cauchy समाकल के माध्यम से प्रतिबल से पुनः प्राप्त किया जा सकता है।

इस अध्याय में बलों के समानांतर चतुर्भुज की अवधारणा को भी (अप्रत्यक्षतः) संबोधित किया गया है। वास्तव में सदिश[2] विश्लेषण में सर्वाधिक आधारभूत गणितीय विचारों में से एक सदिशों के योग का विचार है। समान उद्गम बिंदु वाले दो सदिशों का योग उसी बिंदु से आरंभ होकर मूल दोनों सदिशों द्वारा परिभाषित समानांतर चतुर्भुज के विपरीत कोने तक विस्तृत सदिश के रूप में परिभाषित होता है। वेग और

[2]रोचक रूप से “vector” की अवधारणा 19th century तक सामने नहीं आई; विश्लेषणात्मक ज्यामिति (अर्थात् “coordinate geometry”, अर्थात् “Cartesian geometry”) के जनक Descartes ने भी इसकी कल्पना नहीं की थी।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बल जैसी कुछ भौतिक राशियों को इसी प्रकार संयोजित किया जा सकता है और इस साम्य से सदिश विश्लेषण की अधिकांश उपयोगिता उत्पन्न होती है (Crowe, 1994)।

वेगों के समानांतर चतुर्भुज का विचार अनेक प्राचीन Greek लेखकों में मिलता है और बलों के समानांतर चतुर्भुज की अवधारणा सोलहवीं तथा सत्रहवीं शताब्दियों में असामान्य नहीं थी। उन्नीसवीं शताब्दी के आरंभ तक भौतिक राशियों के समानांतर चतुर्भुज ग्रंथों में प्रायः प्रकट होते थे और इस उपयोग ने अप्रत्यक्षतः सदिश विश्लेषण को जन्म दिया, क्योंकि इस विचार ने भौतिक अनुप्रयोगों में सदिश राशियों के उपयोग का उल्लेखनीय उदाहरण दिया (Crowe, 1994)। बलों के समानांतर चतुर्भुज का विवेचन आगे के आख्यान में गुंथा रहेगा।

सदिश की अवधारणा 19th century में William Rowan Hamilton [3] द्वारा (अपने *quaternion* बीजगणित पर कार्य करते हुए) प्रस्तुत की गई; इसे सदिश कलन से भ्रमित नहीं करना चाहिए[4]। अतः बलों के समानांतर चतुर्भुज में आगे आने वाले सभी योगदानकर्ताओं के लिए सदिशों की धारणा अनुपस्थित थी।

अध्याय भौतिकी के चार मूलभूत बलों पर उपसंहार के साथ समाप्त होता है—यह स्मरण कि हमारे संरचनात्मक "बल" अंततः विद्युतचुंबकीय उद्गम के हैं—और प्राचीनता से उन्नीसवीं शताब्दी तक के प्रमुख विकासों को सारांशित करने वाली कालानुक्रमिक सारणी देता है। हमें आशा है कि इस आख्यान का अनुसरण करने वाला पाठक न केवल ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्य, बल्कि इस बात की अधिक गहन समझ भी प्राप्त करेगा कि आभासी कार्य सिद्धांत संरचनात्मक यांत्रिकी में इतना केंद्रीय स्थान क्यों रखता है।

14.2 प्राचीनता और दैवत्व

यह खंड मुख्यतः *Concepts of Force*, जिसके लेखक Jammer, 1957 PDF हैं, पर आधारित है।

14.2.1 Egypt

F

जैसे-जैसे[5] आरंभिक समाज नगरीय सभ्यताओं में विकसित हुए, संसार को नियंत्रित करने वाले अप्रत्याशित बलों की धारणा प्राकृतिक बलों के संरचित पदानुक्रम के विचार में रूपांतरित हुई। क्रमशः इन बलों का शक्तिशाली आत्माओं अथवा देवताओं के रूप में मानवीकरण हुआ। आरंभिक काल की प्रमुख व्यवस्थित

[3] उन्होंने ही "scalar" और "tensor" पद भी सर्वप्रथम गढ़े (किंतु tensor से उनका आशय quaternion की लंबाई था। Voigt, 1898 ने 1898 में इस पद को आधुनिक अर्थ दिया)।

[4] Gibbs (American physicist) और Heaviside (British scientist) ने बाद में Maxwell समीकरणों की अधिक अच्छी व्याख्या के लिए स्वतंत्र रूप से सदिश कलन विकसित किया।

[5] यह अध्याय दो मुख्य विषयों को आपस में गूँथता है: *बल* और *आभासी सिद्धांत*। पाठक को क्रम बनाए रखने में सहायता के लिए मुख्यतः बलों से संबंधित सामग्री को हाशिए में F से; मुख्यतः आभासी सिद्धांतों से संबंधित सामग्री को V से; और दोनों को पर्याप्त रूप से संबोधित करने वाले खंडों को FV से चिह्नित किया गया है।
यदि यह अध्याय कुछ असंबद्ध—अथवा कहीं-कहीं पुनरावृत्त—लगे तो उसका कारण केवल यह है कि वह आरंभ में दो पृथक अध्यायों ("Force" और "Virtual Forces") के रूप में था, जिन्हें बाद में सावधानीपूर्वक संयोजित किया गया।

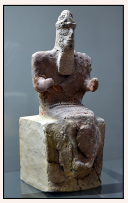
विश्वास-व्यवस्था के रूप में प्राचीन पौराणिकी ने ब्रह्मांड-विज्ञान और उस विषय, दोनों को समाहित किया जिसे पूर्व-वैज्ञानिक युग की "भौतिकी" माना जा सकता है। इस ढाँचे में बल की अवधारणा का प्रायः देवताओं अथवा आत्माओं के रूप में मानवीकरण हुआ।

दैवी सत्ता मानी गई बल की अमूर्त अवधारणा का स्रोत प्राचीन Egypt, विशेषतः उन्नीसवें राजवंश के ग्रंथों और परवर्ती demotic साहित्य में खोजा जा सकता है। "nht" के रूप में संदर्भित इसे किसी दानवी अथवा देवदूत मध्यस्थ के स्थान पर दैवी बल को मूर्त करने वाले व्यक्तिगत देवता के रूप में संकल्पित किया गया। दैवी बल की अवधारणा को sun-god Re द्वारा किसी अनुरोध की पूर्ति के लिए भेजी गई शक्तिशाली सत्ता के रूप में चित्रित किया गया है, जिससे स्पष्ट होता है कि "nht" में हिंसा और उग्रता ही नहीं, बल्कि आरंभिक निरूपणों में भी व्यवस्था तथा नैतिकता के तत्त्व सम्मिलित हैं।

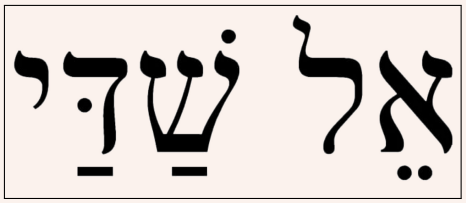
उदाहरणतः demotic नाम "Pn-n-nht-w" का चित्रलिपिक निरूपण चित्र 14.1a में है, जिसमें छुरी वाली आकृति दैवी बल की अवधारणा का प्रतिनिधित्व करती है।



(a) "Pn-n-nfit-w" (Jammer, 1957)



(b) Enlil



(c) El Shaddai

चित्र 14.1: प्राचीनता में बल से संबद्ध देवता

14.2.2 Mesopotamia

Mesopotamian सभ्यता में जनसमुदाय ने गर्जन-झंझा, पवन और बाढ़ जैसी बार-बार आने वाली अप्रत्याशित प्राकृतिक परिघटनाओं का सामना किया, जो विनाश लाती थीं। इन बलों का मानवीकरण तूफानों के देवता *Enlil* के रूप में हुआ, जो गतिशीलता और परिवर्तन के प्रतीक थे और स्थिरता तथा स्थायित्व का प्रतिनिधित्व करने वाले sky-god *Anu* के विपरीत थे। *Enlil* ने पाशविक बल और ब्रह्मांड में व्यवस्थापक सिद्धांत, दोनों को मूर्त किया और अव्यवस्था के विरुद्ध नियामक के रूप में कार्य किया।

बल की अवधारणा के साथ Biblical God का संबंध Bible में उनके नाम को सामर्थ्य, शक्ति और ओज सूचित करने वाले पदों से जोड़ने वाले अनेक संदर्भों से स्पष्ट है। उदाहरणतः "hail," "might" "power", "strength" और "vigor" जैसे शब्द दैवी गुणों के वर्णन में प्रायः प्रयुक्त होते हैं। कुछ विद्वानों के अनुसार "shaddai" नाम (जो Israel के Gods के नामों में से एक है) "महान शक्ति, महान बल" अर्थ वाली Semitic धातु से उत्पन्न हो सकता है और इस प्रकार God की सर्वशक्तिमत्ता पर और बल देता है। दैवी विशेषणों और बल की अवधारणाओं के बीच ऐसे ही संबंध अन्य प्राचीन भाषाओं में भी मिलते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

14.2.3 India

F

Jainas[6], जो Buddha के लगभग समकालीन Jina (*Vardhamana*) के अनुयायी थे, ने यथार्थवादी और सापेक्षवादी परमाणुवादी बहुलवाद (*anekantarada*) विकसित किया। उल्लेखनीय रूप से उन्होंने बल की अवधारणा को सम्मिलित नहीं किया, जो पाश्चात्य विज्ञान के विपरीत है जहाँ बल का विचार आधारभूत भूमिका निभाता है।

Jaina भौतिकी में *ajiva* श्रेणी अनेक घटकों में विभाजित है: पदार्थ (*pudgala*), आकाश (*akasha*), गति (*dharma*), विराम (*adharma*) और काल (*kala*)। *Dharma* और *adharma* क्रमशः गति और विराम की प्रतिबंधों को सूचित करते हैं। वे निराकार और निष्क्रिय हैं, केवल गति अथवा विराम को सुगम या बाधित करते हैं, जैसे जल मछली की गति को समर्थन देता है अथवा पृथ्वी विरामरत वस्तुओं को आधार प्रदान करती है। मुख्यतः "काल" ही पाश्चात्य बल-अवधारणा के समान गतिक अभिकर्ता की भूमिका ग्रहण किए बिना "क्रिया" (*kriya*) और "परिवर्तन" (*parinama*) आरंभ करता है।

Jainism में *Dharma* (गति) और *adharma* (विराम) karma से जटिल रूप से संबंधित हैं। कर्म की अवधारणा मुख्यतः किसी व्यक्ति के कर्मों के नैतिक परिणामों से संबंधित है, किंतु भौतिक क्षेत्र के लिए भी उसके निहितार्थ हैं।

Jainism में Karma साभिप्राय कर्मों से उत्पन्न नैतिक अवशेषों अथवा परिणामों के संचय को सूचित करता है। प्रत्येक कर्म, चाहे भौतिक, वाचिक अथवा मानसिक हो, आत्मा पर कर्म कहलाने वाली छाप छोड़ता है। ये कर्म-कण आत्मा से जुड़ते हैं और उसके भावी अनुभवों तथा परिस्थितियों को प्रभावित करते हैं।

गति और विराम सहित कर्म तथा भौतिक संसार के बीच संबंध को निम्न प्रकार समझा जा सकता है:

कर्म और क्रिया: Jaina दर्शन के अनुसार कर्म साभिप्राय क्रियाओं से उत्पन्न होता है। जब कोई व्यक्ति गति अथवा विराम वाली क्रियाओं में संलग्न होता है तो वह तदनुरूप कर्म-परिणाम संचित करता है। उदाहरणतः यदि कोई हिंसक कृत्य (गति सहित) करता है तो ऐसे कर्म-कण संचित होते हैं जो भविष्य में दुःख के अनुभव दे सकते हैं। इसी प्रकार संयम अथवा अहिंसा (विराम सहित) वाली क्रियाएँ भी कर्म-परिणाम उत्पन्न करती हैं।

कर्म और परिस्थितियाँ: माना जाता है कि कर्म व्यक्ति के जीवन की प्रतिबंधों और परिस्थितियों को, उसके भौतिक परिवेश तथा अनुभवों सहित, प्रभावित करता है। पूर्व कर्मों के परिणाम गति और विराम को सुगम अथवा बाधित करने वाली प्रतिबंधों को आकार दे सकते हैं। उदाहरणतः अनुकूल कर्म-परिणाम विश्राम के अनुकूल सुखद परिवेश दे सकते हैं, जबकि प्रतिकूल कर्म गति को बाधित करने वाली अड़चनें अथवा चुनौतियाँ उत्पन्न कर सकते हैं।

कर्म और मुक्ति: Jainism में परम लक्ष्य आत्मा को कर्म-बंधन से मुक्त करके जन्म-मरण के चक्र (*samsara*) से मुक्ति (*moksha*) प्राप्त करना है। यह मुक्ति आत्मा को शुद्ध करने और संचित कर्म छोड़ने के उद्देश्य वाली आध्यात्मिक साधनाओं से प्राप्त होती है। माना जाता है कि कर्म

[6]Jainas अहिंसा (कीटों को हानि न पहुँचाना), सत्य, अस्तेय, ब्रह्मचर्य और अपरिग्रह को मूल सिद्धांत मानते हैं (कुछ तपस्वी साधु और साध्वियाँ सांसारिक आसक्तियों, जैसे वस्त्र, का त्याग सहित तप के चरम रूप अपनाते हैं और इस प्रकार नग्नता का अभ्यास करते हैं)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के प्रभाव का अतिक्रमण करके व्यक्ति शाश्वत आनंद और गति तथा विराम से संबंधित सीमाओं सहित सांसारिक सीमाओं से मुक्ति की अवस्था प्राप्त करता है।

अतः कर्म मुख्यतः नैतिक परिणामों से संबंधित होते हुए भी जीवन के विभिन्न पक्षों, भौतिक क्षेत्र सहित, तक अपना प्रभाव विस्तारित करता है। कर्म का संचय और निराकरण व्यक्ति के गति, विराम और संसार में अस्तित्व की समग्र प्रतिबंधों के अनुभवों से जटिल रूप से जुडा है।

14.3 शास्त्रीय प्राचीनता और प्राकृतिक दर्शन

14.3.1 Greeks

यांत्रिकी के प्रति Greek उपागम दार्शनिक और व्यावहारिक, दोनों था। वे यांत्रिक सिद्धांतों की चर्चा प्राकृतिक दर्शन के संदर्भ में करते थे।

प्राचीन Greeks के लिए प्राकृतिक दर्शन मूलतः प्राकृतिक संसार और उसकी परिघटनाओं का अध्ययन था—जिसमें वे विषय सम्मिलित थे जिन्हें आज हम भौतिकी, जीवविज्ञान, रसायन और खगोल-विज्ञान जैसे पृथक अनुशासन मानते हैं। आधुनिक विज्ञान के विपरीत यह प्रयोग पर अत्यधिक निर्भर नहीं था, बल्कि अवलोकन, तार्किक तर्क और सैद्धांतिक अटकलबाजी से आकार लेता था। Greek प्राकृतिक दर्शन ने उन आधारभूत अवधारणाओं और विधियों को स्थापित किया जो पाश्चात्य संसार की बौद्धिक संस्कृति को परिभाषित करने वाली थीं और Roman तथा मध्यकालीन Islamic विद्वानों को प्रभावित किया। यह आरंभिक आधुनिक काल तक बना रहा और अंततः scientific revolution (§ 5.3) को स्थान दिया।

यह निरंतरता निर्णायक है, क्योंकि Mesopotamian अन्वेषण दीर्घकालीन अवलोकन पर व्यापक रूप से निर्भर था, जबकि Greek विज्ञान ने क्रमशः अमूर्त तर्क पर बल दिया। उनके अन्वेषण प्रायः सीमित—और कभी-कभी सतही—प्रायोगिक प्रमाण पर आधारित होते थे, जिसके बाद तार्किक निगमन और सैद्धांतिक तर्क आता था।

फिर भी हम प्रमुख प्रभावकों की रूपरेखा संक्षेप में प्रस्तुत करेंगे, चित्र 14.2।

14.3.1.1 Empedocles (494-434 B.C.)

F

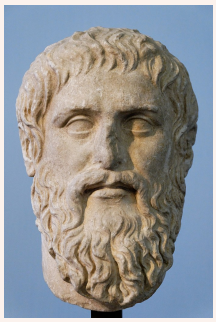
Empedocles , चित्र 14.2a, लगभग 5th century BCE में रहने वाले प्राचीन Greek दार्शनिक और कवि थे। उनका जन्म Sicily में Acragas (आधुनिक Agrigento) में हुआ, जो तब Greek उपनिवेश था। वे पूर्व-Socratic दर्शन और अपने ब्रह्मांडीय सिद्धांतों में योगदान के लिए सर्वाधिक प्रसिद्ध हैं।

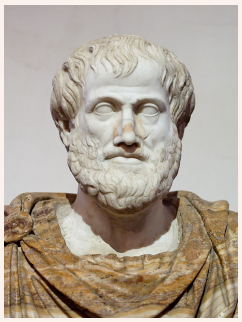
Empedocles ने दो विरोधी बलों, "प्रेम" (*philotes, philia*) और "कलह" (*neikos*), की आवश्यकता प्रतिपादित की, जिन्हें उन्होंने पृथ्वी, जल, वायु और अग्नि के चार तत्त्वों के साथ वर्गीकृत किया, चित्र 14.3। प्रेम ने अस्तित्व को सुसंगत रूप से बाँधने वाले संसंजक बल का कार्य किया, जबकि कलह ने तत्त्वों में विघटन और पृथक्करण उत्पन्न किया। जीव की श्वसन-क्रिया के समान प्रेम और कलह की यह चक्रीय अन्योन्यक्रिया Empedocles की चिकित्सकीय पृष्ठभूमि को प्रतिबिंबित करती थी और शरीरक्रिया-विज्ञान से ब्रह्मांड की उनकी समझ व्युत्पन्न करती थी। भौतिक आकर्षण के समान प्रेम

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

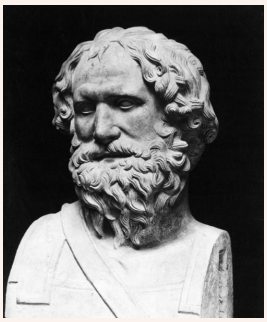


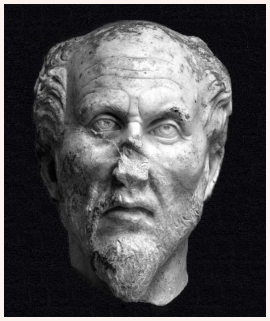
(a) Empedocles


(b) Plato


(c) Aristotle


(d) Posidonius


(e) Archemdis


(f) Plotinos


(g) Philoponus

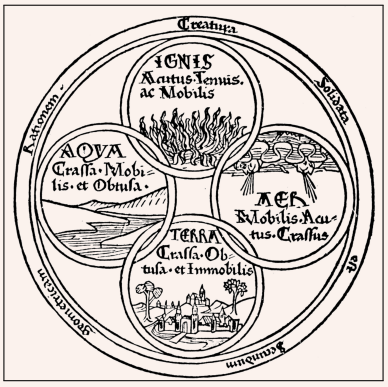

(h) Avicenna


(i) Baghdadi

चित्र 14.2: बल की अवधारणा के प्रमुख आरंभिक प्रभावक

का उद्गम शरीरक्रिया-विज्ञान में संयोग की अवधारणा से हुआ। Empedocles ने ब्रह्मांडीय प्रक्रियाओं की यांत्रिक व्याख्या नहीं खोजी, क्योंकि वे प्राणी-जीव को मानव-निर्मित तंत्रों से मूलतः सरल मानते थे और शरीर में रक्त के प्रवाह तथा प्रतिप्रवाह को अपने शरीरक्रियात्मक सादृश्य का आधार बनाते थे।


(a) Agrigento



(b) चार तत्त्वों का सिद्धांत (अग्नि, वायु, जल और पृथ्वी)

चित्र 14.3: Empedocles (लगभग)

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

उनके दार्शनिक विचार प्राचीन Greek चिंतन में प्रभावशाली थे और Aristotle तथा Stoics सहित परवर्ती दार्शनिकों द्वारा उनका अध्ययन और विमर्श जारी रहा।

14.3.1.2 Plato (427-348 B.C.)

Plato , 14.2b ने Empedocles के दो अभिकर्ताओं की व्याख्या आकर्षण और प्रतिकर्षण के रूप में की और सुझाव दिया कि वे वैकल्पिक अनुक्रमों में कार्य करते हैं, जबकि Heraclitus का विश्वास था कि ये बल एक साथ कार्य करते हैं। F

अपने तत्त्वमीमांसात्मक सिद्धांतों से प्रभावित Plato गति के उद्गम के प्रश्न से जूझते हैं। अपने संवाद "The Laws" (Book 10) में वे स्थानांतरण, घूर्णन और संयोजन जैसे गति के विभिन्न प्रकारों का अन्वेषण करते हैं और अंततः उन्हें स्वतःस्फूर्त गति—जीवन और आत्मा के आधारभूत सिद्धांत—तक ले जाते हैं[7]

> **Athenian Stranger**: तब हमें कहना चाहिए कि स्वतःगति सभी गतियों का उद्गम है और विरामरत तथा गतिशील वस्तुओं में सबसे पहले उत्पन्न होती है; वह परिवर्तन का प्राचीनतम और सर्वाधिक शक्तिशाली सिद्धांत है, जबकि जो किसी अन्य से परिवर्तित होता और फिर अन्य को चलाता है, वह द्वितीय है।
> **Cleinias, a Cretan**: पूर्णतः सत्य।
> **Ath.**: तर्क के इस चरण पर हम एक प्रश्न रखें।
> **Cie.**: कौन-सा प्रश्न? **Ath.**: यदि हम इस शक्ति को किसी पार्थिव, जलीय अथवा अग्निमय पदार्थ में, सरल अथवा संयोजित रूप में, विद्यमान देखें—तो उसका वर्णन कैसे करेंगे?
> **Cie.**: आपका आशय यह पूछना है कि क्या हमें ऐसी स्वयं-गतिशील शक्ति को जीवन कहना चाहिए?
> **Ath.**: हाँ।
> **Cie.**: निश्चय ही कहना चाहिए।
> **Ath.**: और जब हम किसी वस्तु में आत्मा देखें तो क्या हमें वही नहीं करना चाहिए, क्या यह स्वीकार नहीं करना चाहिए कि यही जीवन है?
> **Cie.**: करना चाहिए
>
> Plato, 350 BC *Laws*, Book X

किंतु Plato के लेखन वास्तविक गति की व्याख्या में बल की इस तत्त्वमीमांसात्मक अवधारणा को लागू नहीं करते। उदाहरणतः Plato की दृष्टि में पार्थिव वस्तुओं की पतन गति उत्पन्न करने वाला गुरुत्व बल की उनकी सामान्य अवधारणा से संबद्ध नहीं है। इसके स्थान पर एक अन्य अव्याख्यायित मान्यता प्रस्तुत की जाती है: समान वस्तुओं की साथ आने की प्रवृत्ति; इस प्रकार पृथ्वी पृथ्वी की ओर, जल जल की ओर और अग्नि अग्नि की ओर आकर्षित होती है।

इससे स्वाभाविक रूप से यह निहित होगा कि प्रत्येक तत्त्व का अंतरिक्ष में निर्दिष्ट क्षेत्र है। तत्त्वों के लिए अंतरिक्ष में निर्दिष्ट क्षेत्रों अथवा "प्राकृतिक स्थानों" की यह धारणा बाद में Aristotle ने भी अपनाई।

14.3.1.3 Aristotle (384-322 B.C.)

Aristotle , चित्र 14.2c, Plato के शिष्य और Alexander the Great के शिक्षक थे। किंतु गुरुत्व के V

[7] ध्यान दें कि बाद में Galileo ने अपने विचार आगे बढ़ाने के लिए इसी संवाद रूप का उपयोग किया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस ज्यामितीयकरण से "गुरुत्वीय आकर्षण का विचार शताब्दियों के लिए प्राकृतिक दर्शन से निष्कासित हो गया[8]

अपने वास्तविक यांत्रिकी-विवेचन में Aristotle स्वयं को केवल *खींचने अथवा धकेलने* में सम्मिलित अभिकरण के रूप में बल की अवधारणा तक सीमित रखते हैं और पदार्थ में अंतर्निहित बल की Platonic अवधारणा अथवा जिसे आज हम ऊर्जा कह सकते हैं, उसकी उपेक्षा करते हैं। वे आगे कहते हैं, "केवल तभी जब कोई बाह्य वस्तु किसी वस्तु को चलाती है अथवा उसकी अपनी आंतरिक प्रवृत्ति के विरुद्ध विराम में लाती है, हम कहते हैं कि यह बल द्वारा हुआ; अन्यथा हम नहीं कहते कि यह बल द्वारा हुआ"।

Aristotle उन इकाइयों का उल्लेख नहीं करते जिनमें उनके अनुसार बल मापा जाना चाहिए। माना जा सकता है कि इस उद्देश्य के लिए भार की इकाई प्रयुक्त हुई होगी, क्योंकि ऐतिहासिक रूप से भार मापा जाने वाला प्रथम बल था और आधुनिक काल तक अन्य बलों के लिए संदर्भ के रूप में प्रयुक्त हुआ। Greeks ने संभवतः तेल-दाबित्र जैसे उत्तोलकों के संचालन में भार का उपयोग करके बल मापा। किंतु Aristotle ने भार को धकेलने अथवा खींचने के बल के स्थान पर प्राकृतिक गति की अभिव्यक्ति माना। अतः Aristotle के अनुसार भार बलों को मापने की मानक इकाई नहीं हो सकता था।

उनके सिद्धांत उनके अवलोकनों पर आधारित थे। उन्होंने देखा कि बल हटने पर वस्तुएँ विराम में आ जाती हैं (इस प्रकार घोड़े के खींचना बंद करने पर गाड़ी रुक जाती है)। इसके अतिरिक्त यदि वस्तुएँ गिरती हैं तो वे वायु अथवा जल जैसे माध्यम से चलती हैं (पुनः, निर्वात में गति असंभव मानी जाती थी)। संक्षेप में Aristotle ने ऐसा संसार देखा जिसमें गति के विरुद्ध सदैव प्रतिरोध उपस्थित था: यही गति की वास्तविकता है। अतः Aristotle के ढाँचे में बल को किसी वस्तु पर धक्का अथवा खिंचाव मानकर उसे हिंसक गति कराने वाला माना गया, जिसे उन्होंने निम्न प्रकार वर्गीकृत किया

प्राकृतिक Aristotle के अनुसार प्राकृतिक गति वस्तुओं में अंतर्निहित थी और उनकी आवश्यक प्रकृति से संचालित होती थी। उदाहरणतः भारी वस्तुएँ नीचे गिरती हैं क्योंकि पृथ्वी के केंद्र पर अपना "प्राकृतिक स्थान" खोजने की उनकी स्वाभाविक प्रवृत्ति होती है।

हिंसक दूसरी ओर हिंसक गति वह थी जो किसी बाह्य बल द्वारा वस्तु पर आरोपित होती थी। Aristotle का विश्वास था कि अपनी प्राकृतिक प्रवृत्तियों के विपरीत गति बनाए रखने के लिए वस्तुओं को सतत बाह्य बल की आवश्यकता होती है। उदाहरणतः पत्थर को धकेलने से वह क्षैतिज रूप से चलेगा, किंतु बल हटने पर गति समाप्त हो जाएगी[9] क्योंकि पत्थर की स्वाभाविक प्रवृत्ति विराम में आने की थी

। हिंसक गति में जैसे ही अभिकर्ता उसे उत्पन्न करना बंद करता है, गति भी रुक जाती है: दूसरे शब्दों में वस्तु की प्राकृतिक अवस्था विराम है, क्योंकि Aristotle घर्षण को संबोधित नहीं करते, जिसे उनके ढाँचे में अभी बल का एक प्रकार नहीं माना गया था। यद्यपि Aristotle "किसी पिंड को उसकी अपनी आंतरिक प्रवृत्ति के विरुद्ध विराम में लाने वाले" बाह्य अभिकर्ता को बलों की श्रेणी में रखते हैं, उनके पास जड़त्व सिद्धांत नहीं है। फलतः अनिवार्य गति की निरंतरता को "आंतरिक प्रवृत्ति" नहीं माना जा सकता और इसलिए घर्षण को बल के रूप में पहचाना नहीं जा सकता।

प्रक्षेप्य की गति Aristotelian गति-सिद्धांत के लिए कठिन समस्या थी। उनके सिद्धांत के अनुसार

[8] Renaissance के दौरान वैज्ञानिक समझ की उन्नतियों और Galileo तथा Newton जैसे व्यक्तित्वों के कार्य के साथ ही बाद में गुरुत्वीय आकर्षण की अवधारणा स्वीकृत हुई और भौतिकी की हमारी आधुनिक समझ का अभिन्न भाग बनी।

[9] Poincaré, 1905 ने लिखा: "वे यह कैसे मान सकते थे कि गति अपने कारण के साथ समाप्त हो जाती है?"

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ऐसी गति की व्याख्या कठिन थी, क्योंकि हिंसक गति के रूप में प्रक्षेप्य गति को ऐसे विशिष्ट चालक की आवश्यकता थी जिसे चलित वस्तु के साथ निरंतर संपर्क में रहना पड़ता।

Aristotle ने Empedocles का वर्गीकरण अपनाया। उनके लिए पृथ्वी और जल भारी तत्त्व माने गए, जो पृथ्वी के केंद्र की ओर नीचे जाने की प्रवृत्ति रखते थे (*gravitas*, जबकि वायु और अग्नि हल्के तत्त्व माने गए, जो सघनतर तत्त्वों के ऊपर उठने की प्रवृत्ति रखते थे (*levitas*)। यह *भारीपन और हल्केपन का सिद्धांत* का आधार था। अतः निर्वात में गति बनाए रखने वाला कोई माध्यम नहीं होता और प्रतिरोध के अभाव में वस्तु अनंत वेग से चलेगी! (इस प्रकार *Nature abhors vacuum*)।

यह ध्यान रखना महत्त्वपूर्ण है कि जड़त्व की अवधारणा Aristotle की भौतिकी के लिए अपरिचित थी। Aristotle और उनके अनुयायियों का मत था कि कोई पिंड केवल सतत बाह्य बल की क्रिया से गति में बना रहता है। Aristotelian भौतिकी को *Peripatetic* मान्यता भी कहा जाता था, जो बल की अवधारणा के इतिहास में प्राकृतिक गति और प्राकृतिक तथा हिंसक गति के भेद को सूचित करने वाला पुनरावृत्त विषय है।

यह भी ध्यान देना चाहिए कि वैज्ञानिक दृष्टि से Aristotelian चिंतन में तत्त्वमीमांसा और भौतिकी का संलयन हानिकारक सिद्ध हुआ। लगभग 19 शताब्दियों तक उनके कार्य को ऐसा प्रामाणिक स्थान मिला जिसने आगे की प्रगति बाधित की। उदाहरणतः सरलरेखीय गति पर घूर्णी गति की प्राथमिकता पर उनके बल ने यांत्रिक नियमों के अन्वेषण और खोज को बाधित किया, जैसा Bache, Kepler और Newton जैसे व्यक्तित्वों की चुनौतियों से स्पष्ट है।

Aristotle ने बलों के समानांतर चतुर्भुज के विषय को संबोधित किया। Barnes, 1984 *Mechanica* को उद्धृत करते हैं

> अब यदि किसी पिंड के दो विस्थापन किसी नियत अनुपात में हों तो परिणामी विस्थापन अनिवार्यतः सरल रेखा होगा और यह रेखा इस अनुपात में खींची गई रेखाओं से बनी आकृति का विकर्ण होगी। . . . इसका विलोम भी सत्य है। स्पष्ट है कि यदि किसी बिंदु को दो विस्थापनों द्वारा विकर्ण के अनुदिश चलाया जाए तो वह अनिवार्यतः समानांतर चतुर्भुज की भुजाओं के अनुपात के अनुसार चलता है; अन्यथा वह विकर्ण के अनुदिश नहीं चलेगा[a]
>
> Aristotle, 2000 *Mechanica*, Mechanica 1: 848b. Cf. 23: 854b- 855a
>
> [a]Aristotle के संदर्भ मानक Bekker क्रमांकन का पालन करते हैं, जिसमें संख्याएँ Immanuel Bekker के 1831 के *Aristotelis Opera* संस्करण के पृष्ठ और स्तंभ विभाजनों को सूचित करती हैं (जैसे "848b" का अर्थ पृष्ठ 848, दायाँ स्तंभ है)।

14.3.1.4 Archimedes (287–212 B.C.): "क्या" का प्रदर्शन

Archimedes (287–212 BCE) ने अपनी *De Planorum Aequilibriis* (On the Equilibrium of Planes) (Archimedes, -250) में पूर्णतः भिन्न उपागम अपनाया। Benvenuto के अनुसार, "जहाँ Aristotle सार्वभौमिक संश्लेषण के उद्देश्य से यांत्रिकी को भौतिक सिद्धांत से जोड़ते हैं, Archimedes स्थैतिकी को लगभग स्वयंस्पष्ट अभिगृहीतों पर आधारित और कठोर गणितीय प्रदर्शनों पर निर्मित तर्कसंगत तथा स्वायत्त विज्ञान मानते हैं" (Benvenuto, 1991a)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Book I (Props. 6–7) में Archimedes उत्तोलक नियम को उसके सर्वाधिक सामान्य रूप में कहते हैं: “दो राशियाँ, चाहे सममाप्य हों अथवा असममाप्य, राशियों के व्युत्क्रमानुपाती दूरियों पर संतुलित होती हैं” (Archimedes, -250 PDF)। उनका प्रमाण *राशियों* (अभी “बल” नहीं) के पदों में है और स्पष्ट ज्यामितीय रचना से आगे बढ़ता है: बिंदु C को रेखा DE पर ऐसा चुनें कि आलंब के दोनों ओर के खंड व्युत्क्रम अनुपात को संतुष्ट करें (जैसे $A:B = DC:CE$), फिर दिखाएँ कि राशियों को D और E पर रखने से C के परितः साम्य प्राप्त होता है। सममाप्य प्रकरण में वे भुजाओं को समान भागों में विभाजित करके संतुलन को सममित समूहों में अपचित करते हैं; असममाप्य प्रकरण में वे सन्निकटन द्वारा तर्क का विस्तार करते हुए समान आनुपातिक निष्कर्ष बनाए रखते हैं (Archimedes, -250 PDF)।

समान तर्क को *दृश्यीकृत* करने का आधुनिक ढंग ऐसे चिंतन-प्रयोग द्वारा है जिसमें राशियों का प्रतिनिधित्व उत्तोलक पर समान रूप से वितरित अनेक समान छोटे “भारों” से किया जाता है (चित्र 14.4)। कुल लंबाई $(p+q)$ वाले उत्तोलक पर समान रूप से वितरित भार से आरंभ करें, जो (सममिति से) अपने मध्यबिंदु O के परितः संतुलित माना जाता है। उत्तोलक को $2p$ और $2q$ लंबाइयों के दो खंडों में विभाजित करें; उसी सममिति तर्क से प्रत्येक खंड को उसकी लंबाई के अनुपाती एकल परिणामी (अर्थात् $2p$ और $2q$) से प्रतिस्थापित किया जा सकता है जो उसके अपने मध्यबिंदु पर कार्य करता है। वे मध्यबिंदु q और p दूरियों पर O से स्थित हैं, अतः मूल वितरित निकाय का साम्य दो संकेंद्रित भारों $2p$ और $2q$, जिन्हें उत्तोलक भुजाओं q और p पर रखा गया है, का साम्य निहित करता है—अर्थात् व्युत्क्रम रूप में उत्तोलक नियम $2p\cdot q = 2q\cdot p$, अथवा $p:q = p:q$ (Archimedes के संकेतन में समतुल्य $A:B = DC:CE$)।

BOOK I. **मैं निम्न अभिगृहीत प्रस्तुत करता हूँ:**

1. समान दूरियों पर समान भार साम्य में होते हैं, और असमान दूरियों पर समान भार साम्य में नहीं होते, बल्कि अधिक दूरी वाले भार की ओर झुकते हैं।
2. यदि कुछ दूरियों पर भार साम्य में हों और किसी एक भार में कुछ जोड़ा जाए, तो वे साम्य में नहीं रहते, बल्कि उस भार की ओर झुकते हैं जिसमें वृद्धि की गई।
3. इसी प्रकार यदि किसी एक भार से कुछ हटाया जाए तो वे साम्य में नहीं रहते, बल्कि उस भार की ओर झुकते हैं जिससे कुछ नहीं हटाया गया।
4. जब समान और सदृश समतलीय आकृतियाँ एक-दूसरे पर रखे जाने पर संपाती होती हैं, तब उनके गुरुत्व-केंद्र भी उसी प्रकार संपाती होते हैं।
5. असमान किंतु सदृश आकृतियों में गुरुत्व-केंद्र समान प्रकार से स्थित होंगे। सदृश आकृतियों के संबंध में समान प्रकार से स्थित बिंदुओं से मेरा आशय ऐसे बिंदुओं से है कि यदि उनसे समान कोणों तक सरल रेखाएँ खींची जाएँ तो वे संबद्ध भुजाओं के साथ समान कोण बनाती हैं।

.....

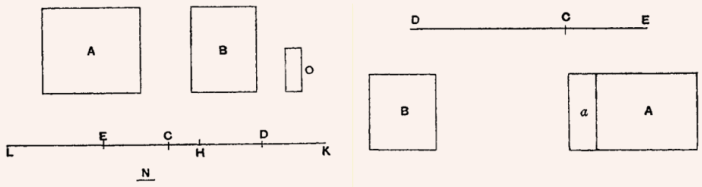
प्रतिज्ञप्तियाँ 6, 7।

दो राशियाँ, चाहे सममाप्य [Prop. 6] हों अथवा असममाप्य [Prop. 7], राशियों के व्युत्क्रमानुपाती दूरियों पर संतुलित होती हैं।

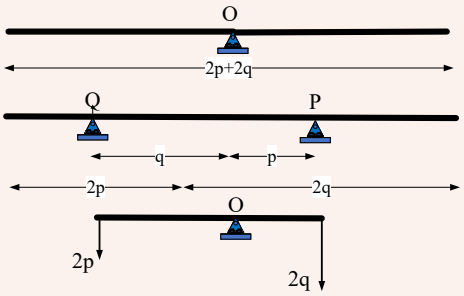
Archimedes, -250 PDF *De Planorum Æquilibriis (On the Equilibrium of Planes)*

यह प्रमाण गणितीय रूप से कठोर है, किंतु जैसा Descartes ने बाद में देखा, यह “स्पष्टतः *quod ita sit* को समझाता है, किंतु *cur ita sit* को नहीं”—यह दिखाता है कि *क्या* होता है, किंतु *क्यों* नहीं (Descartes,

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) मूल



(b) आधुनिक व्याख्या ((Salencon, 2017) से अनुकूलित)

चित्र 14.4: उत्तोलक नियम का Archimedes प्रमाण

1898)। Archimedes किसी सामान्य सिद्धांत का आह्वान नहीं करते; प्रत्येक मशीन को विशिष्ट अभिगृहीतों से अपना प्रदर्शन आवश्यक होता है।

यह मान लिया जा सकता है कि स्थैतिकी के जनक Archimedes को बल की अवधारणा की गहन समझ थी। किंतु ऐसा नहीं है। वास्तव में बल की अवधारणा में उनका योगदान न्यूनतम था। उनका उपागम मुख्यतः ज्यामितीय था और दूरी तथा भार पर केंद्रित था। यह ध्यान रखना महत्त्वपूर्ण है कि उनके समय में भार और बल पूर्णतः पृथक अवधारणाएँ माने जाते थे।

14.3.1.5 Posidonius (135–51 B.C.) और Stoics

पदार्थ से निकलने और विषय में स्थित होने वाले बल की Aristotle की दृष्टि के विपरीत Posidonius , चित्र 14.2d, बल को वस्तुओं के बीच संबंध में आधारभूत और अंतर्निहित मानते हैं। उनके लिए बल परस्पर अनुरूपता, अन्योन्यक्रियाशील वस्तुओं के बीच *sympathy* है, जो बल-निकाय द्वारा ब्रह्मांड को एकीकृत करती है।

बल की यह Stoic संकल्पना, जिसमें अभिकर्ता और प्रभावित अविभाज्य हैं, ब्रह्मांड की एकता में उनके विश्वास को प्रतिबिंबित करती है। Stoics इस विचार और चिकित्सा में "sympathy" की अवधारणा के बीच समानता देखते हैं, जहाँ शरीर के एक भाग की व्याधि समूचे शरीर को प्रभावित करती है, और इस धारणा को ब्रह्मांड तक विस्तारित करते हैं। "sympathy" की क्रिया समझाने के लिए भौतिक अथवा आध्यात्मिक आधार प्रस्तुत करना बल की Aristotelian धारणा के प्रति रियायत को प्रतिबिंबित करता है।

केवल Stoics के साथ बल की अवधारणा नई दिशा ग्रहण करती है। ज्वार और खगोलीय पिंडों की गतियों के बीच संबंध का अन्वेषण इस परिवर्तन को आरंभ करता है। यह अन्वेषण नया नहीं था; Aristotle ने पहले इसे संबोधित किया था और परिघटना की व्याख्या में खींचने तथा धकेलने वाले बलों पर बल दिया था। उनके अनुसार सूर्य की गति पवन उत्पन्न करती है, जो फिर समुद्री जल को धकेलकर ज्वार उत्पन्न करती है। किंतु Posidonius समस्या को भिन्न प्रकार से देखते हैं। वे ज्वार का प्रत्यक्ष अध्ययन करने और संबंधित तथ्य तथा आँकड़े एकत्र करने के लिए Gades जाते हैं। वे ज्वार की आवधिकता देखते हैं, जो खगोलीय चक्रों के अनुरूप है। Poseidonius इस परिघटना की व्याख्या सार्वभौमिक तनाव *tonos* की अवधारणा से करते हैं।

14.3.2 Romans, Plotinus (204–270)

F

बल के रूप में “sympathy” की अवधारणा ने Roman काल के वैज्ञानिक, दार्शनिक और रहस्यवादी साहित्य में भी महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाई। इस युग के प्रमुख दार्शनिक Plotinus , चित्र 14.2f, ने प्रायः दूरी पर क्रिया को इसका परिणाम माना।

Roman काल और Middle Ages, दोनों के बौद्धिक जीवन के केंद्रीय विषय जादू और ज्योतिष को Plotinus की बल-अवधारणा में तर्काधार मिलता प्रतीत हुआ। Plotinus के अनुसार जादू समान और असमान वस्तुओं के बीच सहानुभूतिपूर्ण संबंध के माध्यम से कार्य करता है। सहानुभूतिपूर्ण जादू में इस विश्वास के साथ ब्रह्मांड के एक भाग में कोई अवस्था उत्पन्न की जाती है कि अन्यत्र तदनुरूप अवस्था उत्पन्न होगी।

अतः Romans के लिए बल की अवधारणा Greeks सहित विभिन्न दार्शनिक परंपराओं से प्रभावित थी। Roman चिंतन पर महत्त्वपूर्ण प्रभाव रखने वाले Stoicism ने भी बल की उनकी समझ में योगदान किया। Stoic दर्शन में बल को प्रायः वस्तुओं की अन्योन्यक्रियाओं को नियंत्रित करने वाला ब्रह्मांड का अंतर्निहित पक्ष माना गया। यह भाग्य और नियतिवाद में Stoic विश्वास तथा प्रकृति के साथ सामंजस्य में जीने पर उनके बल से निकटता से जुड़ा था। इसके अतिरिक्त Roman अभियंताओं और सैन्य रणनीतिकारों ने आधारभूत संरचना निर्माण और युद्ध के अपने कार्य से बल की व्यावहारिक समझ विकसित की, यद्यपि उनका संबंध सैद्धांतिक आधारों के स्थान पर बल के अनुप्रयोग से अधिक था। समग्रतः Roman बल-अवधारणा दार्शनिक विचारों और व्यावहारिक विचारणाओं के संयोजन से आकार ग्रहण करती थी।

परवर्ती Latin साहित्य में भौतिक बल और गूढ अभिकरणों की अवधारणाएँ प्रायः बिना भेद के मिश्रित होती हैं। *virtus* पद सामान्यतः इन दोनों अवधारणाओं को समाहित करता है। इसके अतिरिक्त Vulgate अनुवाद प्रायः Greek *dynamis* को *virtus* के रूप में प्रस्तुत करता है, इसलिए भौतिक और धार्मिक, दोनों संदर्भों में बल सूचित करने के लिए समान पद प्रयुक्त होता है।

ज्योतिष को तार्किक समर्थन देने के लिए भी “sympathy” की अवधारणा प्रयुक्त हुई। Plotinus की भाँति चंद्रमा के ज्वार पर प्रभाव और जीवों पर उसके प्रभावों की व्याख्या “sympathy” द्वारा की गई। Proclus ने इस विचार का विस्तार करते हुए कहा कि खगोलीय गोले सांसारिक घटनाओं को प्रभावित करते हैं।

Plotinus ने प्रश्न रखा था: “क्या तारों का कोई प्रभाव होता है”? Plato की भाँति वे तारों को शाश्वत और दैवी सत्ताएँ, विश्वात्मा की सर्वज्ञता की अभिव्यक्तियाँ मानते थे। Ptolemy जैसे निष्ठावान

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Aristotelians के विपरीत, जो दूरी पर क्रियाओं को अस्वीकार करते और ज्वार की व्याख्या संपर्क-बलों (जैसे वायुमंडलीय धाराएँ, ऊष्मा और प्रकाश) से करने का प्रयास करते थे, Plotinus ने ब्रह्मांडीय तथा ज्योतिषीय प्रभावों को उस “sympathetic” संबंध का परिणाम माना जो उनकी दृष्टि में ब्रह्मांड के सभी भागों के बीच विद्यमान है।

14.3.3 Byzantine, Philoponus (490–570)

F

John Philoponus , चित्र 14.2g, जिन्हें Johannes Philoponus अथवा John the Grammarian भी कहा जाता है, 6वीं शताब्दी ईस्वी में रहने वाले Byzantine दार्शनिक, धर्मशास्त्री और वैज्ञानिक थे। उनका जन्म Alexandria, Egypt में हुआ था। Philoponus ने दर्शन, धर्मशास्त्र और प्राकृतिक विज्ञान सहित विभिन्न क्षेत्रों में महत्त्वपूर्ण योगदान दिए।

दर्शन में Philoponus को Aristotle के भौतिकी-विषयक विचारों की आलोचना के लिए विशेष रूप से जाना जाता है (Philoponus, 1993)। उन्होंने गति संबंधी Aristotelian विचारों को चुनौती दी; वस्तुओं के लिए विराम की प्राकृतिक अवस्था की अवधारणा का विरोध किया और प्रस्तावित किया कि किसी वस्तु को गतिमान बनाए रखने के लिए बाह्य बल आवश्यक है। इसने Aristotle की गति-अवधारणा को चुनौती दी और भौतिकी के परवर्ती विकासों, विशेषतः Renaissance और Scientific Revolution के समय, की आधारभूमि निर्मित की। Philoponus ने Aristotle के गति-सिद्धांत और बल-अवधारणा सहित अनेक Aristotelian संकल्पनाओं को चुनौती दी। Aristotle ने प्रस्तावित किया था कि किसी वस्तु को गतिमान बनाए रखने के लिए बाह्य बल आवश्यक है और बल हटते ही वस्तु विराम में आ जाएगी। किंतु Philoponus इस धारणा से असहमत थे।

Philoponus पहले Aristotle की उस व्याख्या के विरुद्ध स्पष्ट तर्क देते हैं कि फेंका गया पत्थर हाथ से छूटने के बाद अपने पीछे की वायु द्वारा आगे प्रणोदित नहीं किया जा सकता। फिर वे कहते हैं:

> इसके स्थान पर, प्रक्षेपक द्वारा प्रक्षेप्य को कोई अभौतिक गतिज बल प्रदान किया जाना चाहिए। इसमें धकेली गई वायु या तो कोई योगदान नहीं देती अथवा इस गति में अत्यल्प योगदान देती है। किंतु यदि गतिमान पिंड आवश्यकतः इसी प्रकार गतिमान किए जाते हैं, तो स्पष्ट है कि यही प्रक्रिया तब कहीं अधिक सरलता से होगी जब किसी बाण अथवा पत्थर को उसकी प्रवृत्ति के विरुद्ध निर्वात में फेंका जाए, और इसके लिए प्रक्षेपक के अतिरिक्त कुछ भी आवश्यक नहीं है
>
> Philoponus, 1993 *Philoponus: On Aristotle Physics 4.1–5*

।

इस अंतिम वाक्य का उद्देश्य यह दिखाना है कि निर्वात में—जिसे Aristotle अस्वीकार करते हैं—और Aristotle के मत के विपरीत, कोई गतिमान पिंड गतिमान बना रहेगा।

तर्क और प्रयोग, दोनों के आधार पर उन्होंने निष्कर्ष निकाला कि कोई निराकार अथवा *inclination* (किसी बल के प्रभाव में किसी विशिष्ट दिशा में गतिमान अथवा त्वरित होने की वस्तु की प्रवृत्ति) प्रेरक बल होना चाहिए, जिसे प्रक्षेप्य अवशोषित करता है और जो प्रतिरोध द्वारा व्यय हो जाने तक उसकी गति का कारण बनता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Philoponus के लिए inclination प्रक्षेपक द्वारा प्रक्षेप्य को प्रदान की जाती है" और उन्होंने आगे impetus की अवधारणा प्रस्तावित की। उनका सुझाव था कि गतिमान वस्तुओं में एक अंतर्जात बल अथवा impetus होता है जो बाह्य बल की अनुपस्थिति में भी उन्हें गतिमान बनाए रखता है। Philoponus के अनुसार यही impetus वस्तु की निरंतर गति के लिए उत्तरदायी था और प्रकृति में देखी जाने वाली विभिन्न परिघटनाओं की व्याख्या कर सकता था। दूसरे शब्दों में, गति पिंड के किसी ऐसे गुण द्वारा बनाए रखी जाती थी जो उसे गतिमान किए जाते समय प्रदान किया जाता था। ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि उनके लिए *incorporeal force* की अवधारणा पिंड के मुक्त पतन और आकाशीय पिंडों की गति जैसी प्राकृतिक गति की भी व्याख्या करती है। Renaissance में यह विषय पुनः उभरेगा। यह इंगित किया जाना चाहिए कि Philoponus impetus के लिए दो भिन्न अभिव्यक्तियाँ प्रयोग करते हैं: गतिज क्षमता (*dynamis*) और गतिज बल (*energeia*)। उनके सिद्धांत में दोनों अभिव्यक्तियाँ ऐसी अवधारणा सूचित करती हैं जो आज की ऊर्जा-अवधारणा के निकट है, किंतु संभाव्यता और वास्तविकता की Aristotelian संकल्पनाओं से बहुत दूर है।

इस प्रकार Philoponus को आधुनिक, अधिक आलोचनात्मक चिंतन और वैज्ञानिक विश्लेषण की कुछ नींव स्थापित करने तथा गुरुत्व के उनके सिद्धांत का खंडन करके Aristotelian और Platonic तर्क के कुछ अधिक त्रुटिपूर्ण पक्षों से विच्छेद करने का श्रेय दिया जाता है।

14.4 मध्ययुगीन काल और Scholasticism

मध्ययुगीन काल में Scholasticism के माध्यम से Christian धर्मशास्त्र और Aristotelian भौतिकी का समामेलन हुआ। Scholasticism ने प्राकृतिक परिघटनाओं को धार्मिक सिद्धांत के साथ तर्कसंगत बनाने का प्रयास किया, किंतु उसमें प्रायः अनुभवजन्य पुष्टिकरण का अभाव था। Renaissance ने प्रेक्षण और प्रयोग की ओर परिवर्तन आरंभ किया और Scientific Revolution की भूमिका तैयार की। Galileo और Newton जैसे व्यक्तित्व निर्णायक थे; Newton द्वारा गति के नियमों और सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण के सूत्रीकरण ने बल की अवधारणा को वैज्ञानिक संदर्भ में स्फटिकीकृत किया। आधुनिक भौतिकी ने इन विचारों को विद्युत्चुंबकत्व और क्वांटम यांत्रिकी जैसे अधिक व्यापक सिद्धांतों में विस्तारित करके बल की हमारी समझ को और परिष्कृत किया है।

14.4.1 Islamic विद्वान

F

14.4.1.1 Avicenna (980–1037)

Abu-Ali-al-Husayn ibn AbdAllah ibn Sina, चित्र 14.2h, (जो Avicenna के नाम से अधिक प्रसिद्ध हैं) (980-1037) ने Aristotle के कार्य का पुनर्विचार किया और गति का अधिक जटिल सिद्धांत विकसित किया। उन्होंने सुझाव दिया कि कोई प्रक्षेप्य अपने "प्रेरक" से *mayl* नामक ऐसी राशि प्राप्त करता है जो वस्तु के भारीपन (भार) से संबंधित होती है और उसकी गति वहन करने में सहायक होती है। अतः बाहर से "yielding की क्रिया" (*al-mayl*) स्वीकार करने वाली प्रत्येक वस्तु में कोई प्राकृतिक inclination *mayl tibaci* होना चाहिए, जिसे घर्षण कम करता है। यह वास्तव में स्पष्ट नहीं है कि

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

mayl में वेग भी सम्मिलित था या नहीं; यदि था तो यह वास्तव में Newton द्वारा बाद में विकसित संवेग-अवधारणा का आरंभिक पूर्वगामी होता। इस प्रकार Avicenna सहमत थे कि प्रक्षेपक द्वारा प्रक्षेप्य को impetus प्रदान किया जाता है, किंतु Philoponus के विपरीत—जो इसे निर्वात में भी क्षीण होने वाला अस्थायी गुण मानते थे—उन्होंने इसे स्थायी माना, जिसके क्षय के लिए वायु-प्रतिरोध जैसे बाह्य बल आवश्यक थे।

किंतु Avicenna के लिए inclination स्वयं बल नहीं, बल्कि गतिमान करने वाले बल का ऐसा *instrument of the force of the mover* है जो उसकी क्रिया को गतिमान वस्तु तक पहुँचाता है। *mayl* स्थायी किंतु विनाश्य है। Aristotle की भाँति Avicenna ने "natural mayl" (*mayl tabīʿī*), जो गिरते पिंडों की प्राकृतिक गति का कारण है, और "violent mayl" (*mayl qasrī*), जो प्रक्षेप्य गति का कारण है, में भेद किया। यदि mayl के प्रति कोई प्रतिरोध न हो, उदाहरणतः निर्वात में, तो वह अपने द्वारा उत्पन्न गति की भाँति अनंत रूप से बना रहेगा। उन्होंने यह भी कहा कि निर्वात में कोई प्रक्षेप्य तब तक नहीं रुकेगा जब तक उस पर कोई क्रिया न की जाए (जो Newton के प्रथम नियम के अनुरूप है)।

14.4.1.2 Baghdadi (1080–1165)

F

Aristotelian "impetus के सिद्धांत" के एक अन्य आलोचक Hibat Allah Abu'l-Barakat al-Baghdaadi[10] , चित्र 14.2i, ने *Kitab al-Mu'tabar* लिखा, जिसमें उन्होंने Aristotle के इस विचार का निषेध किया कि नियत बल एकसमान गति उत्पन्न करता है। उन्होंने वेग और त्वरण में भेद किया तथा दिखाया कि बल वेग के स्थान पर त्वरण के समानुपाती है, और इस प्रकार Newton के गति के द्वितीय नियम का पूर्वाभास दिया। उन्होंने कहा कि प्रेरक गतिमान वस्तु पर violent inclination (*mayl qasrī*) प्रदान करता है और गतिमान वस्तु के प्रेरक से दूर जाने पर यह घटती जाती है।

उन्होंने Avicenna के सिद्धांत को संशोधित करके कहा कि *mayl qasrī* स्वयं व्यय होती है; अतः निर्वात में violent गति हो सकती है, जो बाह्य प्रतिरोध के बिना भी समाप्त हो जाएगी।

14.4.2 Jordanus de Nemore (ca 1225-ca1260) और स्थितीय गुरुत्व

V

Jordanus de Nemore मध्ययुगीन काल के सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण यांत्रिकीविद् थे। भारों के विज्ञान पर अपने ग्रंथ *Elementa super demonstrationem ponderum* (जो परवर्ती *De ratione ponderis* से निकटता से संबंधित है) में उन्होंने भिन्न आनतियों वाले तलों पर भारों के "वेगों" (विस्थापनों) की तुलना करके आनत तल का विश्लेषण किया। उनका तर्क था कि अधिक तीव्र आनति वाले तल पर भार में अधिक "स्थितीय गुरुत्व" (*gravitas secundum situm*) होता है, क्योंकि तल के अनुदिश दिए गए विस्थापन के लिए वह अधिक नीचे उतरता है। यह तर्क, यद्यपि उन्हें इस रूप में पहचानता नहीं है, अंतर्निहित रूप से आभासी विस्थापनों का उपयोग करता है। स्थितीय गुरुत्व की यह अवधारणा, जो प्रभावी रूप से गुरुत्वीय बल को अवरोध की दिशा के अनुसार विघटित करती है, अत्यंत मौलिक योगदान था (कम-से-कम अपने

[10]Judaism से Islam में धर्मांतरित होने से पहले अपने Hebrew जन्म-नाम Baruch ben Malka से भी ज्ञात।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्पष्ट, व्यवस्थित रूप में) और अवरोधित यांत्रिक निकायों की आधुनिक समझ की दिशा में निर्णायक चरण का प्रतिनिधित्व करती है।

14.4.3 Middle Ages: University of Paris

F

मध्ययुगीन University of Paris मुख्यतः स्वायत्त समूहों से निर्मित निगम था। यह बात केवल arts, theology, canon law और medicine के चार पृथक संकायों में उसके विभाजन पर ही नहीं, बल्कि arts संकाय के चार nations पर भी लागू होती थी। इसी प्रतिष्ठित संस्था में Buridan और Oresme के कार्यकाल लगभग परस्पर व्याप्त थे।

Oresme प्राकृतिक दार्शनिक और धर्मशास्त्री, दोनों थे; Buridan की व्यावसायिक विशेषज्ञता प्राकृतिक दर्शन तक सीमित थी, जिसका अभ्यास उन्होंने Faculty of Arts में Master of Arts के रूप में अनेक वर्षों तक किया। Buridan ने लगभग केवल Aristotle पर भाष्य किया। Oresme की विरासत सर्वथा भिन्न है। उन्होंने न केवल Aristotle के कम-से-कम छह ग्रंथों पर भाष्य किया, बल्कि विविध विषयों पर उनसे लगभग दुगुने स्वतंत्र ग्रंथ भी लिखे।

14.4.3.1 Buridan (1295-1358)

Jean Buridan (Johannes Buridanus) ने *impetus* के सिद्धांत को परिष्कृत किया और सुझाव दिया F



(a) Buridan



(b) Oresme

चित्र 14.5: Buridan, Oresme

कि गतिमान वस्तु में कोई विशिष्ट बल अथवा impetus होता है जो उसे गतिमान बनाए रखता है। पारंपरिक Aristotelian दृष्टिकोण के विपरीत, जिसके अनुसार वस्तुएँ केवल तब तक गतिमान रहती हैं जब तक उन पर निरंतर बल लगाया जाता है, Buridan के सिद्धांत ने सुझाया कि बाह्य बल की क्रिया न होने पर वस्तु नियत चाल से गतिमान बनी रहेगी (Buridan, 1991)। दूसरे शब्दों में, Buridan ने जड़त्व का विचार प्रस्तुत किया, जिसके अनुसार कोई वस्तु बाह्य बल की क्रिया न होने तक अपनी गति की अवस्था बनाए रखती है।

उन्होंने यह भी सुझाया कि वायु-प्रतिरोध और गुरुत्व, दोनों के बल पिंड को रोकेंगे। Buridan ने यह भी कहा कि किसी पिंड को प्रदान किया गया impetus उस चाल और उसकी पदार्थ-मात्रा के साथ बढ़ता है

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जिससे उसे गतिमान किया गया था। स्पष्टतः हम अब संवेग की आधुनिक अवधारणा के अधिकाधिक निकट पहुँच रहे हैं। Newton के विपरीत यह अब भी गुणात्मक वर्णन था:

> ...प्रक्षेपक की भुजा से छूटने के बाद प्रक्षेप्य उसके द्वारा दिए गए impetus से गतिमान होगा और तब तक गतिमान बना रहेगा जब तक impetus प्रतिरोध से अधिक प्रबल रहे; और यदि उसका विरोध करने वाले किसी प्रतिकूल बल अथवा उसे विपरीत गति की ओर प्रवृत्त करने वाले किसी कारक द्वारा उसे घटाया और नष्ट न किया जाता, तो वह अनंत अवधि तक बना रहता।
>
> Buridan, 1991 *John Buridan: Questions on the Eight Books of Aristotle's Physics*

गोलों के आकाशीय impetus के संबंध में उन्होंने लिखा

> ईश्वर ने संसार की रचना करते समय प्रत्येक आकाशीय गोले को अपनी इच्छा के अनुसार गतिमान किया और उन्हें गतिमान करते हुए उनमें ऐसे impetus अंकित किए जिन्होंने उन्हें इस प्रकार गतिमान किया कि आगे ईश्वर को उन्हें गतिमान करने की आवश्यकता नहीं रही...और आकाशीय पिंडों में अंकित वे impetus बाद में घटे अथवा नष्ट नहीं हुए, क्योंकि आकाशीय पिंडों में अन्य गतियों की ओर कोई inclination नहीं थी। न ही ऐसा कोई प्रतिरोध था जो उस impetus को नष्ट अथवा दबा देता।
>
> Buridan, 1971 *John Buridan: Quaestiones super libros De caelo et mundo*

अतः आकाशीय पिंडों की गति के प्रकरण में impetus ईश्वर द्वारा अंकित वह बल है जो उनकी शाश्वत *circular* गति का कारण बनता है। impetus की यह अवधारणा सभी प्रकार की गति का वर्णन करने में सहायता करती है: स्थलीय और violent गति, भारी पिंडों की प्राकृतिक गति तथा आकाशीय, अभौतिक पिंडों की गति।

Buridan ने यह भी प्रतिपादित किया कि impetus ऐसा परिवर्ती गुण है जिसका बल विषय में गति और पदार्थ की मात्रा द्वारा निर्धारित होता है। इस प्रकार गिरते पिंड के त्वरण को impetus की इकाइयों के क्रमिक संचय के पदों में समझा जा सकता था। इस *impetus* सिद्धांत की एक प्रमुख त्रुटि यह है कि Buridan ने इसे गति का परिणाम नहीं, बल्कि कारण माना (यह एक प्रमुख अंतर है)। अपने क्रांतिकारी निहितार्थों के बावजूद Buridan ने यांत्रिकी के विज्ञान को रूपांतरित करने के लिए impetus की अवधारणा का प्रयोग नहीं किया। वे Galileo के अग्रदूत नहीं थे और अन्य अनेक पक्षों में बिना संकोच Aristotelian बने रहे।

फिर भी जड़त्व की अवधारणा प्रस्तुत करके और प्राकृतिक संसार को समझने में अनुभवजन्य प्रेक्षण की भूमिका पर बल देकर Buridan ने 16वीं और 17वीं शताब्दियों की वैज्ञानिक क्रांति का मार्ग प्रशस्त किया।

14.4.3.2 Oresme (1320-1382)

Oresme (§8.2.1) ने प्रक्षेप्य गति और impetus के संरक्षण संबंधी Buridan के विचारों का विस्तार किया तथा इस धारणा को और विकसित किया कि संघट्ट अथवा अन्योन्यक्रिया के समय impetus पिंडों के बीच स्थानांतरित हो सकता है। Oresme की गणितीय पृष्ठभूमि ने उन्हें गति के प्रश्नों को मात्रात्मक दृष्टिकोण से देखने में सक्षम बनाया। उन्होंने impetus और गति की चर्चाओं में गणितीय तर्क का

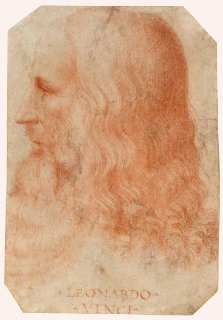
प्रारूप

उपयोग किया और Galileo तथा Newton जैसे व्यक्तियों द्वारा गतिकी के परवर्ती गणितीय निरूपण की आधारभूमि तैयार की।

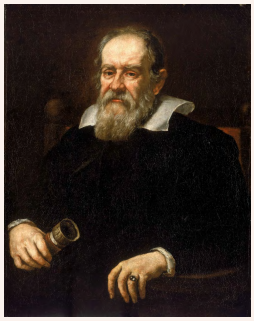
Aristotle पर उनके भाष्य और प्राकृतिक दर्शन पर उनके अपने ग्रंथ Middle Ages के उत्तरार्ध तथा Renaissance में व्यापक रूप से पढ़े गए और प्रभावशाली रहे। उनके कार्यों ने Buridan और अन्य मध्ययुगीन चिंतकों के विचारों—जिनमें impetus और गतिकी से संबंधित विचार भी सम्मिलित थे—के प्रसार और लोकप्रियकरण में सहायता की।

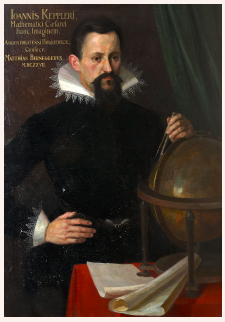
impetus के सिद्धांत में Buridan और Oresme के योगदानों ने 16वीं और 17वीं शताब्दियों की वैज्ञानिक क्रांति के लिए बौद्धिक आधार तैयार करने में निर्णायक भूमिका निभाई। Aristotelian भौतिकी से हटकर प्रकृति के अध्ययन के अधिक अनुभवजन्य और गणितीय रूप से कठोर उपागम की ओर परिवर्तन Buridan और Oresme जैसे व्यक्तियों की अंतर्दृष्टियों तथा तर्कों के प्रति बहुत ऋणी था।

14.5 Renaissance और Scientific Revolution


(a) Leonardo

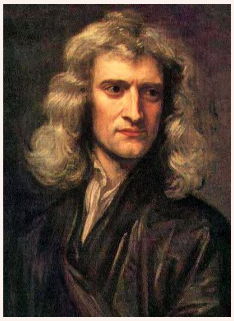

(b) Benedetti


(c) Galileo


(d) Kepler


(e) Descartes


(f) Leibniz


(g) Newton

चित्र 14.6: Leonardo, benedetti, galileo, kepler, descartes, leibniz, newton

14.5.1 Leonardo da Vinci (1452-1519)

निस्संदेह Leonardo, चित्र 14.6a, (§7.2.1) Buridan के सिद्धांत से भली-भाँति परिचित थे और F

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

निश्चित ही बल की अवधारणा के विषय में उनके पास लिखने के लिए कुछ था (Vinci, 1938 PDF)।

यह Leonardo की बल की परिभाषा है,

> मैं कहता हूँ कि बल एक आध्यात्मिक गुण, एक अदृश्य शक्ति है जो आकस्मिक हिंसा के माध्यम से गति द्वारा उत्पन्न होती है और उन पिंडों में प्रविष्ट तथा संचारित होती है जिन्हें उनकी प्राकृतिक अवस्था से खींचकर विचलित किया जाता है; यह उन्हें अद्भुत शक्ति का सक्रिय जीवन देती है। यह सभी सृजित वस्तुओं को आकार और स्थान बदलने के लिए बाध्य करती है; अपनी वांछित मृत्यु की ओर प्रचंड वेग से दौडती है और कारणों के अनुसार विविध रूप ग्रहण करती है। मंदता इसे महान बनाती है और वेग इसे दुर्बल करता है। यह हिंसा से जन्मती और स्वतंत्रता से मरती है। यह जितनी बडी होती है उतनी ही शीघ्र स्वयं को व्यय करती है। जो इसके विनाश का विरोध करता है, उसका यह प्रचंडता से पीछा करती है; जो इसे बाधित करता है, अपने उस कारण को पराजित और समाप्त करना चाहती है, और विजय पाकर स्वयं को समाप्त कर देती है; बडे अवरोध पाकर यह अधिक शक्तिशाली हो जाती है। प्रत्येक वस्तु अपनी मृत्यु की ओर प्रचंडता से भागती है। बाधित किए जाने पर यह प्रत्येक वस्तु को बाधित करती है। इसके बिना कुछ भी गतिमान नहीं होता। जिस पिंड में यह जन्मती है वह न बढता है, न उसका भार और न उसका आकार परिवर्तित होता है। इसके द्वारा उत्पन्न कोई गति स्थायी नहीं है। यह श्रम में बढती और विश्राम में लुप्त होती है। जिस पिंड में यह सीमित है उसे स्वतंत्रता नहीं होती। और प्रायः गति के माध्यम से यह नया बल उत्पन्न करती है।
>
> Vinci, 1938 PDF *The Notebooks of Leonardo da Vinci*

Leonardo ने जिसे परिभाषित किया है वह वस्तुतः impetus है, अथवा संभवतः वह जिसे आज हम गतिज ऊर्जा कहते हैं।

14.5.2 Benedetti (1530–1590)

Giovanni Benedetti, चित्र 14.6b, ने विकसित होते impetus-सिद्धांत को इस आग्रह द्वारा संशोधित किया कि अंकित बल केवल सरलरेखीय गति उत्पन्न करता है: F

> ...,[किसी] दैहिक पदार्थ का वह भाग जो किसी बाह्य प्रेरक बल द्वारा उसमें impetus अंकित किए जाने पर स्वयं गतिमान होता है, वक्र नहीं बल्कि सरलरेखीय पथ पर गतिमान होने की प्राकृतिक प्रवृत्ति रखता है।
>
> Benedetti, 1585 *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*

Benedetti गोफन में घुमाए गए पत्थर के परिचित उदाहरण से तर्क देते हैं कि वृत्तीय गति प्राकृतिक नहीं बल्कि आरोपित है और मुक्त किए जाने पर पिंड सरल पथ की "खोज" करता है।

किंतु पत्थर के स्पर्शरेखीय पथ का व्यापक रूप से उद्धृत वर्णन और यह कथन कि अंकित impetus क्रमशः तथा निरंतर घटता है, Benedetti का नहीं है। इसका उद्गम पहले के Parisian impetus school में, विशेषतः Albert of Saxony में है, जो अपने Quaestiones super Physicam में इसका प्रामाणिक रूप देते हैं। उनका सूत्रीकरण है:

> जब प्रक्षेप्य गोफन से मुक्त होता है तो वह प्रकृति के मार्गदर्शन में उस बिंदु से, जहाँ उसने गोफन छोडा था, उसके अंतिम वृत्त की स्पर्शरेखा के अनुदिश अपना पथ ग्रहण करता है,... अब यह सत्य है कि अंकित impetus क्रमशः और निरंतर घटता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> Saxony, 1988 *Quaestiones super libros Physicorum Aristotelis*

Albert का विवरण Benedetti में अनुपस्थित दो बिंदुओं पर बल देता है: मुक्ति की स्पर्शरेखा-ज्यामिति और प्रतिरोध के कारण impetus का क्षय—ये दोनों चौदहवीं शताब्दी के Paris school की विशिष्टताएँ हैं।

इसके विपरीत Benedetti (Drake, 1976) के लिए गति की चाल में वृद्धि बल की निरंतर क्रिया का परिणाम है, जबकि अधोमुखी प्राकृतिक प्रवृत्ति (*gravitas*) नियत रहती है। वायु-प्रतिरोध की अनुपस्थिति मानते हुए, किसी भारी पिंड की तिर्यक ऊर्ध्वमुखी गति में अंकित impetus पिंड को सरल रेखा में केवल तब तक चलाता है जब तक वह अंतर्निहित अधोमुखी प्रवृत्ति से अधिक प्रबल रहता है। अधोमुखी प्रवृत्ति नियत होने के कारण दोनों शक्तियों के बीच एक कल्पित संघर्ष उत्पन्न होता है; अंकित impetus के क्षीण होने पर अंततः दोनों संतुलित होते हैं और उस बिंदु पर प्राकृतिक प्रवृत्ति पिंड को पुनः पृथ्वी पर ले आती है। उपर्युक्त अवतरण की निरंतरता में वह विषय स्पष्ट होता है जिस पर Benedetti, Buridan से भिन्न थे:

> ...;अतः पिंड के भारीपन के कारण उत्पन्न उसकी अधोमुखी प्रवृत्ति तत्काल प्रवेश करती है और अंकित बल से मिलकर रेखा को अधिक समय तक सरल नहीं रहने देती, बल्कि शीघ्र ही उसे वक्र बना देती है। क्योंकि पिंड दो शक्तियों द्वारा गतिमान होता है, एक बल द्वारा अंकित और दूसरी प्रकृति द्वारा।
>
> Benedetti, 1585 *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*

14.5.3 Pardies (1636–1673)

F

Pardies बल-वियोजन और साम्य की अवधारणा के आरंभिक अग्रदूतों में से थे। उन्होंने संरचनाओं के स्थायित्व और यांत्रिक निकायों के भीतर बलों के वितरण के विश्लेषण हेतु गणितीय तकनीकें सूत्रबद्ध कीं। उन्होंने बलों के समांतर चतुर्भुज की समझ में भी महत्त्वपूर्ण योगदान दिया; यह अनेक बलों के अधीन किसी पिंड पर कार्यरत परिणामी बल निर्धारित करने की ज्यामितीय विधि है। उनके कार्य ने बलों के साम्य में अंतर्निहित गणितीय सिद्धांत स्थापित करने में सहायता की और स्थैतिकी के क्षेत्र में परवर्ती विकासों की नींव रखी, चित्र 14.7।

14.5.4 Simon Stevin (1548–1620)

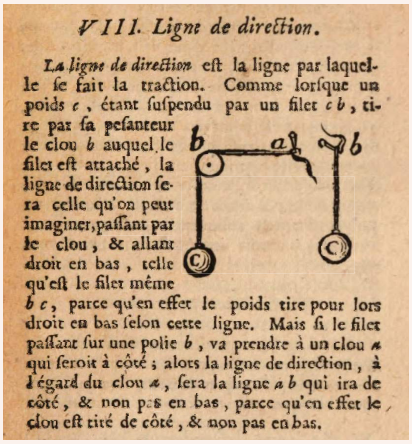
F/V

बल के विषय में

F

Simon Stevin, चित्र 14.8, hydrostatics के अनुशासन की स्थापना का श्रेय प्राप्त Dutch

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

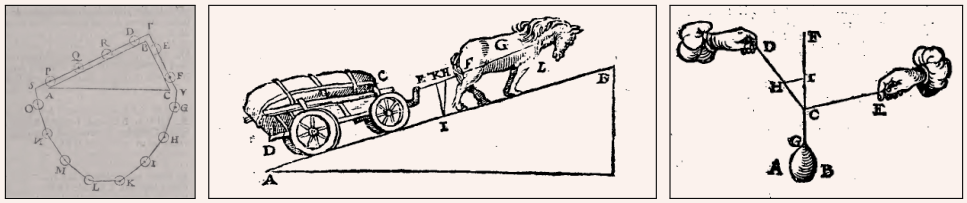


VIII. Ligne de direction.

La ligne de direction eſt la ligne par laquelle ſe fait la traction. Comme lorſque un poids *c*, étant ſuſpendu par un filet *c b*, tire par ſa peſanteur le clou *b* auquel le filet eſt attaché, la ligne de direction ſera celle qu'on peut imaginer, paſſant par le clou, & allant droit en bas, telle qu'eſt le filet même *b c*, parce qu'en effet le poids tire pour lors droit en bas ſelon cette ligne. Mais ſi le filet paſſant ſur une polie *b*, va prendre à un clou *a* qui ſeroit à côté; alors la ligne de direction, à l'égard du clou *a*, ſera la ligne *a b* qui ira de côté, & non pas en bas, parce qu'en effet le clou eſt tiré de côté, & non pas en bas.

चित्र 14.7: Pardies, 1710 द्वारा साम्य की अवधारणाएँ

गणितज्ञ, बलों के *equilibrium*[11] के सिद्धांत की पहचान करने वाले प्रथम व्यक्ति थे; इसे बलों के *parallelogram of forces* के नाम से भी जाना जाता है।



चित्र 14.8: Simon Stevin (1548–1620)

स्थैतिकी पर उनके ग्रंथ (Stevin, 1586) में गुरुत्व-केंद्रों का निर्धारण, स्थैतिक अनुप्रयोग (*De Weeghdaet*) और hydrostatic अनुप्रयोग (*De Waterwicht*) सम्मिलित थे, चित्र 14.9। रोचक है कि इस प्रकाशन में वे Germanic भाषाओं की उत्कृष्टता संबंधी अपना दृढ मत भी दोहराते हैं। उनके अनुसार वैज्ञानिक प्रयोजनों के लिए Dutch सर्वोत्तम भाषा है, क्योंकि उसमें संक्षिप्तता और स्पष्टता का संयोजन है[12]।

Stevin (Miller, 2017) किसी भार को सँभालने वाली दो रज्जुओं द्वारा लगाए गए बलों की तुलना उसे एकल ऊर्ध्वाधर रज्जु से सँभालने के लिए आवश्यक बल से करते हैं। उनके निरूपण, चित्र 14.10, में भार AB को या तो एकल रज्जु CF द्वारा, जहाँ C भार का गुरुत्व-केंद्र है, अथवा दो रज्जुओं CD और CE द्वारा सँभाला जा सकता है। बाद वाले प्रकरण में रज्जुओं द्वारा लगाए गए बल रज्जुओं से ऊर्ध्वाधर दिशा तक समांतर रेखाएँ खींचकर ज्ञात किए जा सकते हैं: यदि भार को एक रज्जु से सँभालने के लिए

[11] ध्यान दें कि प्रायः यह भ्रांति होती है कि Newton का तृतीय नियम—*प्रत्येक क्रिया के लिए समान और विपरीत प्रतिक्रिया होती है*—दो बलों, अर्थात् समान परिमाण और विपरीत दिशाओं वाली क्रिया और प्रतिक्रिया, का साम्य प्रदान करता है। किंतु नियम वास्तव में कहता है कि यदि पिंड A बल F_a को पिंड B पर लगाता है, तो पिंड B समान और विपरीत बल F_b को पिंड A पर लगाएगा। साम्य नहीं होता क्योंकि बल F_a और F_b अलग-अलग पिंडों पर लगते हैं—एक पिंड A पर और दूसरा पिंड B पर।

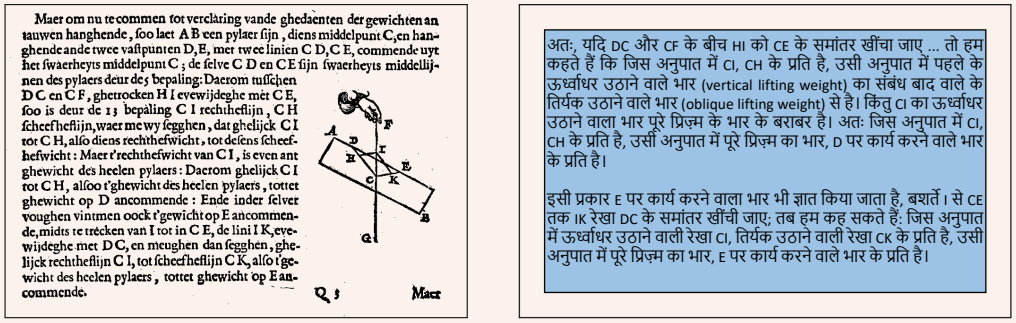
[12] वास्तव में United States में अनेक वर्षों तक स्नातकोत्तर विद्यार्थियों—विशेषतः chemistry और physics के विद्यार्थियों—के लिए German का अध्ययन आवश्यक था।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।


DIALECTIKE
OFTE
BEVVYSCONST.
Leerende van allen stercken recht ende
constelick Oordeelen, Oock opcnende
den weech tot de alderdiepste verbor-
genheden der Natueren.
Beschreven int Neerdaytsch door
SIMON STEVIN van Brugghe.
TOT LEYDEN,
By Christoffel Plantijn.
M. D. LXXXV.
Fig. 5
DE
BEGHINSELEN
DER WEEGHCONST
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.
TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
CIↃ. IↃ. LXXXVI.
Fig. 6
292
GEORGE SARTON

चित्र 14.9: Stevin का प्रमुख प्रकाशन (Stevin, 1586 PDF)

आवश्यक कुल बल (अर्थात् "संपूर्ण prism का भार") CI के समानुपाती है, तो D की ओर निर्देशित घटक बल CH के समानुपाती है, जहाँ H को रेखा HI खींचकर ज्ञात किया जाता है, जो E की ओर निर्देशित अन्य घटक बल के समानांतर है। इसी प्रकार अन्य समांतर IK खींचने से E की ओर निर्देशित बल के समानुपाती परिमाण, अर्थात् CK, प्राप्त होता है। समांतर चतुर्भुज की भुजाओं के समानुपाती दोनों घटक बल मिलकर विकर्ण CI के समानुपाती एकल बल के समतुल्य प्रभाव उत्पन्न करते हैं।


Maer om nu te commen tot verclaring vande ghedaenten der gewichten an tauwen hanghende, soo laet A B een pylaer sijn, diens middelpunt C, en hanghende ande twee vastpunten D, E, met twee linien C D, C E, commende uyt het swaerheyts middelpunt C; de selve C D en C E sijn swaerheyts middellijnen des pylaers deur de 5 bepaling: Daerom tusschen D C en C F, ghetrocken H I evewijdeghe met C E, soo is deur de 13 bepaling C I rechtheslijn, C H scheefheslijn, waer me wy segghen, dat ghelijck C I tot C H, also diens rechthefwicht, tot dess scheefhefwicht: Maer t'rechthefwicht van C I, is even ant ghewicht des heelen pylaers: Daerom ghelijck C I tot C H, also t'ghewicht des heelen pylaers, tottet ghewicht op D ancommende: Ende inder selver voughen vintmen oock t'gewicht op E ancommende, midts te trecken van I tot in C E, de lini I K, evewijdeghe met D C, en meughen dan segghen, ghelijck rechtheflijn C I, tot scheefheflijn C K, also t'gewicht des heelen pylaers, tottet ghewicht op E ancommende.
Q 3
Maer
अतः, यदि DC और CF के बीच HI को CE के समांतर खींचा जाए ... तो हम कहते हैं कि जिस अनुपात में CI, CH के प्रति है, उसी अनुपात में पहले के ऊर्ध्वाधर उठाने वाले भार (vertical lifting weight) का संबंध बाद वाले के तिर्यक उठाने वाले भार (oblique lifting weight) से है। किंतु CI का ऊर्ध्वाधर उठाने वाला भार पूरे प्रिज़्म के भार के बराबर है। अतः जिस अनुपात में CI, CH के प्रति है, उसी अनुपात में पूरे प्रिज़्म का भार, D पर कार्य करने वाले भार के प्रति है।

इसी प्रकार E पर कार्य करने वाला भार भी ज्ञात किया जाता है, बशर्ते। से CE तक IK रेखा DC के समांतर खींची जाए; तब हम कह सकते हैं: जिस अनुपात में ऊर्ध्वाधर उठाने वाली रेखा CI, तिर्यक उठाने वाली रेखा CK के प्रति है, उसी अनुपात में पूरे प्रिज़्म का भार, E पर कार्य करने वाले भार के प्रति है।

चित्र 14.10: एक अथवा दो रज्जुओं द्वारा सँभाले गए पिंड का Stevin का निरूपण; (Stevin, 1586 PDF) और (Miller, 2017 PDF)

किंतु प्रत्यक्षतः ऐसा दिखाई देने पर भी यह बलों के लिए वास्तविक Parallelogram Rule नहीं है। केवल राशियों के परिमाणों की गणना की जाती है; दिशाएँ *a priori* दी गई हैं। निर्णायक रूप से, Stevin यह नहीं दिखाते कि घटक बल अनिवार्यतः किसी विशिष्ट दिशा—ऊर्ध्वाधर—में परिणामी उत्पन्न करेंगे। वे केवल यह मान लेते हैं कि ऐसा होगा। दिशात्मक सूचना रचना में रखी जाती है, किंतु उससे निष्कर्षित नहीं की जाती। अतः अधिक-से-अधिक यह किसी दिए गए अदिश परिमाण को दो अन्य परिमाणों में विघटित करने का नियम है; बलों को निर्देशित परिमाण, अथवा *vectors*, नहीं माना जाता।

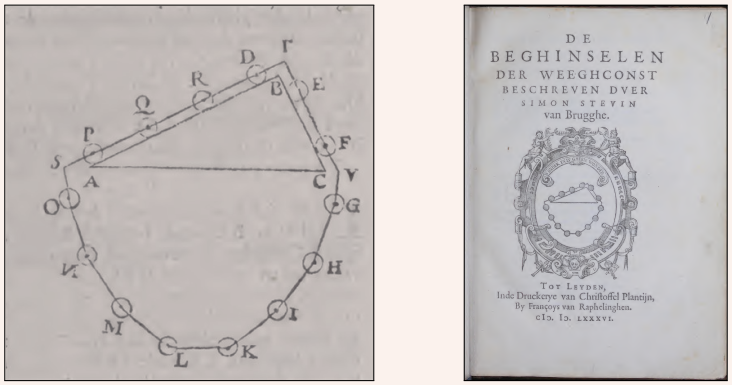
फिर भी Stevin ने प्रदर्शित किया कि किसी पिंड पर कार्यरत बलों को ज्यामितीय रूप से निरूपित किया जा सकता है और उनका परिणामी बल उनके योग द्वारा निर्धारित किया जा सकता है। इस सिद्धांत ने किसी पिंड पर कार्यरत अनेक बलों के प्रभावों के विश्लेषण हेतु गणितीय संरचना प्रदान की और Newton के गति-नियमों के परवर्ती विकास के लिए महत्त्वपूर्ण आधारभूमि तैयार की।

Stevin के महत्त्वपूर्ण ग्रंथ की अतिरिक्त चर्चा के लिए §14.5.4 भी देखें।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Clootcrans और आभासी कार्य

Stevin ने 1586 में अपने प्रसिद्ध *clootcrans* (गोलकों की माला) (गोलकों की माला) प्रदर्शन द्वारा निर्णायक योगदान दिया (Stevin, 1586 PDF)। त्रिकोणीय कील पर लपेटी गई समान अंतराल वाले गोलकों की शृंखला (चित्र 14.11) साम्य में होनी चाहिए, अन्यथा वह सतत गति में रहेगी—जिसे Stevin स्पष्टतः असंभव मानते थे। इससे उन्होंने आनत तल का नियम व्युत्पन्न किया। Stevin को इस प्रमाण पर इतना गर्व था कि यह आकृति उनकी पुस्तकों के आवरण पर “Wonder en is gheen wonder” (जादू कोई जादू नहीं है) आदर्श-वाक्य के साथ दिखाई देती है।



चित्र 14.11: Stevin का *clootcrans* प्रदर्शन।

Ghelijck des driehoucx rechter fijde tot de flincker, alfo t’ftaltwicht des cloots op de flincker fijde, tottet ftaltwicht des cloots op de rechter fijde.

Tghegeven. Laet ABC een driehouck wesen diens plat fy rechthouckich op den fichteinder, ende den grondt AC euewydich vanden fichteinder, ende op de fijde AB, die dobbel fy an BC, ligghe een cloot D, ende op de fijde BC een cloot E, euewichtich ende euegroot met den cloot D.

T’begeerde. Wy mocten bewyfen dat ghelijck de fijde AB 2, tot BC 1, alfoo t’ftaltwicht des cloots E, tottet ftaltwicht des cloots D.

Tbereytsel. Laet ons maecken rondtom den driehouck ABC eenen crans van veerthien clooten, euegroot, euewichtich, ende euewijt van malcandcren als E,F,G,H,I,K,L,M,N,O,P,Q,R,D, al ghefnoert an een lini, ftreckende door haer middelpunten, alfo dat fy op die middelpunten drayen mueghen...

Tbewys. Soo t’ftaltwicht der vier clooten D,R,Q,P, niet euen en waer met het ftaltwicht der twee clooten E,F, t’en of t’ander fal fwaerder fijn; laet wesen (foo mueghelick waer) de vier D,R,Q,P... de acht clooten fullen neerwaert rollen, ende d’ander fes rijfen.

Maer dit foo wefende, den crans der clooten ... de acht clooten ter flincker fijde wederom neer fallen rollen, ended’ander fes rijfen, welcke valling ter een der, ende rijfing ter ander, omdat de reden altijdt de felue is, altijdt ghedueren fal, ende de clooten fallen uyt haer feluen een eeuwich roerfel maken, t’welck valfch is.

Daerom ghelijck de lini AB, tot BC, alfoo den cloot D tot den cloot E.

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

त्रिभुज की दाहिनी भुजा का बाईं भुजा से जो अनुपात है, वही बाईं भुजा पर गोलक के "स्थित भार" का दाहिनी भुजा पर गोलक के स्थित भार से है।

दिया है: ABC ऐसा त्रिभुज हो जिसका तल क्षितिज के लंबवत और आधार AC क्षितिज के समांतर है। भुजा AB, जो BC की दुगुनी है, पर गोलक D रखा हो; और भुजा BC पर गोलक E रखा हो, जिसका भार और आकार D के समान है। सिद्ध करना है: जैसे AB (2) का BC (1) से अनुपात है, वैसे ही गोलक E के स्थित भार का गोलक D के स्थित भार से अनुपात है।

रचना: त्रिभुज ABC के चारों ओर समान आकार और भार वाले तथा समान अंतराल पर स्थित चौदह गोलकों की माला बनाएँ, जिन्हें E,F,G,H,I,K,L,M,N,O,P,Q,R,D नाम दिए गए हैं और जिनके केंद्रों से गुजरने वाली रेखा पर वे इस प्रकार पिरोए गए हैं कि वे उन केंद्रों के परितः घूम सकें...
प्रमाण: यदि चार गोलकों D,R,Q,P का स्थित भार दो गोलकों E,F के स्थित भार के समान न हो, तो एक अथवा दूसरी ओर अधिक भारी होगी... आठ गोलक नीचे की ओर लुढकेंगे और अन्य छह ऊपर उठेंगे।
किंतु यदि ऐसा हो, तो गोलकों की माला पुनः बाईं ओर नीचे लुढकेगी और दाईं ओर ऊपर उठेगी; और क्योंकि कारण सदैव समान रहेगा, यह अनंत काल तक चलता रहेगा तथा गोलक स्वयं शाश्वत गति उत्पन्न करेंगे, जो असत्य है।
अतः रेखा AB का BC से जो अनुपात है, वही गोलक D का गोलक E से है।

Stevin, 1586 *De Beghinselen der Weeghconst*

Stevin का आशय यह है:

- **आनत तल का नियम (यांत्रिक लाभ)।** घर्षणरहित संपर्क के लिए आनति के अनुदिश आवश्यक बल (अथवा "प्रभावी भार") आनति की लंबाई के समानुपाती है; Stevin के संकेतन में,

$$\frac{D}{E} = \frac{AB}{BC},$$

  अतः समान ऊँचाई के लिए ढाल जितनी लंबी होगी, आवश्यक खिंचाव उतना ही छोटा होगा।
- **आधुनिक समतुल्य सूत्र।** भार W के लिए, जो कोण θ, लंबाई L और ऊँचाई h की आनति पर स्थित है,

$$P = W \sin\theta = W\,\frac{h}{L},$$

  अतः समान ऊँचाई तक पहुँचने वाले दो भिन्न रैंपों के लिए आवश्यक बल उनकी लंबाइयों के व्युत्क्रमानुपाती होते हैं।
- **"आभासी" तर्क से वैचारिक संबंध।** Stevin विरोधाभास द्वारा तर्क देते हैं: यदि बल संतुलित न हों, तो निकाय बंद पथ के चारों ओर चलता रहेगा और सतत गति उत्पन्न करेगा। चूँकि यह असंभव है, साम्य में शुद्ध प्रेरक प्रवृत्ति निरस्त होनी चाहिए—यह परवर्ती आभासी-कार्य और आभासी-विस्थापन तर्कों का निकट पूर्वगामी है।

संभवतः Stevin ने इस व्युत्पत्ति को ग्रंथ की सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण व्युत्पत्तियों में माना, जिससे यह स्पष्ट होता है कि *clootcrans* शीर्षक-पृष्ठ की लघुचित्रिका में क्यों दिखाई देता है (चित्र 14.11)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

14.5.5 Galileo (1564-1642)

Galileo Galilei , चित्र 14.6c, यांत्रिकी के इतिहास में एक निर्णायक संधि-बिंदु पर स्थित हैं। उनके योगदान दो परस्पर संबद्ध क्षेत्रों में विस्तृत हैं: जड़त्व की नवजात अवधारणा, जो अंततः impetus सिद्धांत को विस्थापित करेगी, और आद्य-आभासी-कार्य तर्क, जो यांत्रिक साम्य के परवर्ती ऊर्जा-आधारित सूत्रीकरणों का पूर्वाभास देता है।

Impetus से जड़त्व तक

F

अपने *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali* (Galilei, 1638) में Galileo ने संवेग की आधुनिक संकल्पना आरंभ की; उन्होंने impetus को गति का प्रभाव और माप माना, जिसे भार और चाल के फलन के रूप में निरूपित किया गया। आनत तलों और गिरते पिंडों पर उनके प्रयोगों ने उन्हें जड़त्व का सिद्धांत सूत्रबद्ध करने की ओर अग्रसर किया, जिसके अनुसार बाह्य बल की क्रिया न होने तक कोई वस्तु अपनी गति की अवस्था में—या तो विराम में अथवा नियत वेग से गतिमान—बनी रहेगी। इस सिद्धांत ने उस Aristotelian दृष्टिकोण को चुनौती दी कि बाह्य प्रभावों के अधीन न होने पर वस्तुएँ स्वाभाविक रूप से विराम में आ जाती हैं, और Newton के गति के प्रथम नियम की नींव रखी।

स्मरण करें कि impetus सिद्धांत में निहित था कि बल की अनुपस्थिति में कोई वस्तु विराम में आ जाएगी; जड़त्व की अवधारणा ज्ञात नहीं थी। Galileo के अपने शब्द इस संक्रमण को चिह्नित करते हैं:

> मैंने देखा है कि भौतिक पिंडों में कुछ गति की ओर inclination होती है, जैसे भारी पिंडों में अधोमुखी गति की ओर; जब कोई अवरोध उन्हें बाधित नहीं करता, तो यह गति उनके द्वारा अंतर्निहित गुण के माध्यम से और किसी विशेष बाह्य प्रेरक की आवश्यकता के बिना संपन्न होती है। और किसी अन्य गति के प्रति उनमें प्रतिकूलता होती है, जैसे उन्हीं भारी पिंडों में ऊर्ध्वमुखी गति के प्रति; अतः किसी बाह्य प्रेरक द्वारा बलपूर्वक ऊपर फेंके जाने के अतिरिक्त वे कभी इस प्रकार गतिमान नहीं होते। अंततः कुछ गतियों के प्रति वे उदासीन होते हैं, जैसे भारी पिंड क्षैतिज गति[a] के प्रति होते हैं, जिसके प्रति उनमें न inclination होती है ... न प्रतिकूलता ...और इसलिए सभी बाह्य अवरोध हटा दिए जाने पर पृथ्वी के साथ संकेंद्रित गोलाकार पृष्ठ पर स्थित भारी पिंड विराम अथवा क्षितिज के किसी भाग की ओर गति, दोनों के प्रति उदासीन होगा। और वह उसी अवस्था में बना रहेगा जिसमें उसे एक बार रखा गया है; अर्थात् यदि विराम की अवस्था में रखा गया हो तो उसे बनाए रखेगा; और यदि, उदाहरणतः, पश्चिम की ओर गति में रखा गया हो तो उस गति को बनाए रखेगा। इस प्रकार शांत समुद्र में एक बार कुछ impetus प्राप्त कर चुका जहाज ... हमारे ग्लोब के चारों ओर बिना कभी रुके निरंतर चलता रहेगा ... यदि ... सभी बाह्य अवरोध हटाए जा सकें।
>
> Galilei and Drake, 1990 *"Discoveries and opinions of Galileo: including The starry messenger (1610), Letter to the Grand Duchess Christina (1615), and excerpts from Letters on sunspots (1613), The assayer (1623)"*
>
> [a]Galileo के लिए "horizontal" से आशय पिंड की ऐसी गति है जो पृथ्वी के केंद्र की ओर अथवा उससे दूर नहीं है।

Galileo यहाँ पहली बार जड़त्व की अवधारणा प्रस्तुत करते हैं।[13] हम देखते हैं कि यह *circular inertia*

[13]जड़त्वीय चिंतन के पूर्वगामी पहले की impetus परंपराओं में दिखाई देते हैं; यहाँ आशय यह है कि Galileo असाधारण रूप से स्पष्ट और भौतिक आधार वाला कथन देते हैं (पहले वृत्तीय/क्षैतिज रूप में) और उसका व्यवस्थित उपयोग करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(आकाशीय पिंडों की) से आरंभ होती है और फिर ग्लोब के *चारों ओर* जाने वाले जहाजों तक विस्तृत होती है। खेद है कि *linear inertia* का कोई प्रत्यक्ष, स्पष्ट उल्लेख नहीं है, यद्यपि जहाज के नौचालन (प्रेक्षक के लिए संभवतः सरल रेखा के अनुदिश) को देखकर इसका अनुमान निश्चित रूप से लगाया जा सकता था। इसके लिए Newton की प्रतीक्षा करनी पड़ी। सरल शब्दों में, Galileo ने *impetus mechanics* से *classical inertial* mechanics की ओर संक्रमण किया।

यह भी ध्यान देने योग्य है कि Galileo ने बाद में (1632 में) निष्कर्ष निकाला कि जड़त्व के इस आरंभिक आधार-वाक्य के आधार पर तुलना के लिए किसी बाह्य संदर्भ के बिना गतिमान और स्थिर वस्तु में अंतर बताना असंभव है—यह ऐसा सिद्धांत था जिसे Einstein ने बाद में अपनाया, यद्यपि इसकी अत्यंत कम संभावना है कि उन्हें प्रत्यक्ष प्रेरणा Galileo से मिली थी:

> SALV. तो हम अब भी इस पुरातन विचार पर अड़े हैं कि जब तक हमारे पैर हमें न चलाएँ, हम गतिमान नहीं होते।
>
> मेरे प्रिय Simplicio, आप जो कहते हैं वह सत्य है यदि आपके द्वारा देखी जा रही वस्तु गतिमान हो और आप उसका प्रेक्षण करने के लिए स्थिर रहें। किंतु यदि आप किसी कुएँ में हों और कुआँ तथा आप दोनों पृथ्वी के घूर्णन के साथ-साथ ले जाए जा रहे हों, तो क्या आप नहीं देखते कि न एक घंटे में, न एक हजार में, न समस्त अनंत काल में कुएँ का मुख कभी आपको पीछे छोड़ पाएगा? ऐसी स्थिति में पृथ्वी की गति अथवा विराम जिस प्रकार आप पर कार्य करता है, उसे कुएँ के मुख से नहीं, बल्कि उसी गति की अवस्था—अथवा कहना चाहिए, उसी विराम की अवस्था—में सहभागी न होने वाली किसी अन्य पृथक वस्तु से पहचाना जा सकता है।
>
> Galilei, 1632 *"Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"*

यांत्रिकी का स्वर्णिम नियम

जड़त्व पर अपने कार्य से आगे Galileo मशीनों की प्रभावशीलता को उन दूरियों से जोड़ते हैं जिनमें बल कार्य करते हैं, और ऐसा उस रीति से करते हैं जो परवर्ती आभासी-कार्य तर्क का पूर्वाभास देती है। *Le meccaniche* (Galilei, 1594) में वे यांत्रिक उपकरणों पर एक सामान्य प्रतिबंध कहते हैं: कोई युक्ति चाल में क्षतिपूरक हानि (और समतुल्यतः समय में वृद्धि) के बिना वास्तव में बल को गुणित नहीं कर सकती। उनका सूत्रीकरण स्पष्ट है:

> cioè, che quanto si guadagna di forza per mezo loro, altrettanto si scapita nel tempo e nella velocità.
>
> अर्थात्: उनके माध्यम से बल में जो कुछ प्राप्त किया जाता है, उतना ही समय और चाल (वेग) में खो दिया जाता है।
>
> Galilei, 1594 *Le meccaniche*

यह क्षतिपूर्ति सिद्धांत—जिसे बाद में पाठ्यपुस्तकों में *यांत्रिकी के स्वर्णिम नियम* के रूप में लोकप्रिय बनाया गया—कहता है कि बल में किसी भी लाभ का भुगतान चाल में तदनुरूप हानि (अथवा समतुल्यतः उस दूरी और समय में वृद्धि जिसमें प्रेरक बल कार्य करता है) से करना होगा।

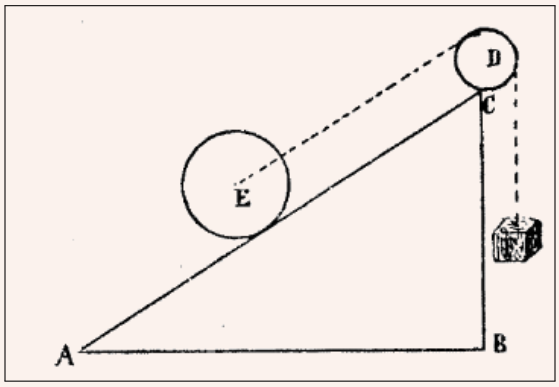
Galileo तत्काल देखते हैं कि यह कथन विरोधाभासी प्रतीत हो सकता है, क्योंकि screw (और संबंधित

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

व्यवस्थाएँ) प्रेरक से गतिमान पिंड की तुलना में अधिक दूरी तय कराए बिना बल को बढ़ाते हुए दिखाई दे सकती हैं:

> ... senza che il motore si muova per più lungo viaggio che il mobile.
>
> ... गतिमान पिंड की तुलना में प्रेरक के अधिक दूरी तक चले बिना।
>
> Galilei, 1594 *Le mecaniche*

दूसरे शब्दों में, उनका विश्लेषण आनत तल और सरल मशीनों को प्रेरक शक्ति तथा भार द्वारा तय की गई संबंधित "दूरियों" (*viaggi*) के पदों में प्रस्तुत करता है; फिर भी उनकी व्याख्या समय और वेग की भाषा में बनी रहती है।[14]



चित्र 14.12: Galileo का आनत-तल अध्ययन (Galilei, 1594)

विरोधाभास के आभास को दूर करने के लिए Galileo आनत तल पर लौटते हैं और ज्यामितीय रूप से नियंत्रित व्यवस्था में गतियों की तुलना करते हैं। महत्त्व केवल किसी मार्गदर्शक के अनुदिश तय की गई दूरी का नहीं, बल्कि गुरुत्व के विरुद्ध ऊर्ध्वाधर परिवर्तन का है। आधुनिक संकेतन में (आदर्शीकृत, घर्षणरहित), भार W को ऊँचाई h तक उठाने के लिए लंबाई L वाले तल के अनुदिश खींचने हेतु बल आवश्यक है

$$P = W\,\frac{h}{L} = W \sin\theta,$$

जिससे गुणनफल $P\,L$, $W\,h$ के समान होता है। मशीन आवश्यक बल को केवल उस दूरी (और इस प्रकार तुलनीय आवृत्ति पर समय) को बढ़ाकर कम करती है जिसमें अनुप्रयुक्त बल को कार्य करना चाहिए। Galileo इस विनिमय को "कार्य" के स्थान पर चाल और समय के पदों में व्यक्त करते हैं, किंतु आशय समान है: *गति में उसका मूल्य चुकाए बिना यांत्रिक लाभ प्राप्त नहीं किया जा सकता* (Galilei, 1594)।

यह विचारधारा Simon Stevin के पहले के *clootcrans*-आधारित आनत-तल तर्क के समानांतर चलती है: Stevin सतत गति की असंभाव्यता से साम्य का निष्कर्ष निकालते हैं और उस संतुलन से आनत तल को नियंत्रित करने वाली समानुपातिकता पुनः प्राप्त करते हैं। Galileo मशीनों के दृष्टिकोण से उसी

[14] परवर्ती कार्य-आधारित सूत्रीकरणों के विपरीत Galileo प्रायः चालों और समय की शुद्धगतिक तुलनाओं द्वारा तर्क देते हैं; यह संरचना गति की पहले की (pre-Newtonian) चर्चाओं के अधिक निकट रहती है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भौतिक प्रतिबंध तक पहुँचते हैं और बल तथा उस दूरी (अतः समय), जिसमें बल कार्य करता है, के बीच आवश्यक विनिमय पर बल देते हैं। Stevin और Galileo को साथ देखने पर वे उस सिद्धांत की ओर दो पूरक मार्ग दिखाते हैं जो बाद में आभासी कार्य की भाषा में मानक बनता है: कोई मशीन गति में यथार्थतः क्षतिपूरक “भुगतान” के बिना यांत्रिक लाभ उत्पन्न नहीं कर सकती (Stevin, 1586 PDF; Galilei, 1594 PDF)।

इस अर्थ में Galileo का “स्वरिणम नियम” परवर्ती आभासी-विस्थापन और आभासी-कार्य सूत्रीकरणों का निकट पूर्वगामी है: साम्य में किसी आदर्श मशीन के लिए प्रत्येक अनुमत लघु गति इस प्रकार अवरोधित होती है कि अनुप्रयुक्त बलों का शुद्ध कार्य निरस्त हो जाता है। परवर्ती लेखकों ने इसी अपरिवर्ती को अधिक व्यवस्थित विश्लेषणात्मक भाषा में पुनः सूत्रबद्ध किया, किंतु केंद्रीय अंतर्दृष्टि Galileo के यांत्रिक लेखन में पहले से उपस्थित है और *Discorsi* में सरल मशीनों तथा बल-संचरण के व्यापक संदर्भ में पुनः प्रतिध्वनित होती है (Galilei, 1638 PDF)।

गणितीय सीमाएँ और ऐतिहासिक संदर्भ

Galileo के पास Cartesian विश्लेषणात्मक ज्यामिति और calculus की वह गणितीय संरचना नहीं थी जिस पर Newton को बाद में अधिकार प्राप्त हुआ। यद्यपि उनके समकालीन Kepler ने अपने प्रसिद्ध तीन नियम सूत्रबद्ध किए, Galileo के गणितीय योगदान सीमित रहे और प्रायः अनुमानी अथवा सरल प्रकृति के थे। उदाहरणतः उदासीन अक्ष (§7.2.2) निर्धारित करने के Galileo के प्रयास इस सीमा को प्रदर्शित करते हैं। इसलिए यह आश्चर्यजनक नहीं कि Galileo ने जड़त्व से संबंधित कोई समीकरण विशेष रूप से सूत्रबद्ध नहीं किया—इसके लिए Newton की प्रतीक्षा करनी पड़ी।

Galileo, जिन्हें “भौतिकी का जनक” अथवा “प्रायोगिक यांत्रिकी का जनक” माना जाता है, Pope (जो Aristotelian भू-केंद्रीय दृष्टिकोण बनाए हुए थे) के भौतिक रूप से निकट रहते हुए Copernicanism का समर्थन करने में सफल रहे। अतः यह उल्लेखनीय है कि ब्रह्मांड के सूर्य-केंद्रीय दृष्टिकोण के समर्थन के लिए Galileo को जाँच का सामना करना पड़ा, जबकि उनके समकालीन Giordano Bruno (1548–1600) का भाग्य कहीं अधिक कठोर था। Galileo को Roman Catholic Church के समक्ष अपने सूर्य-केंद्रीय विश्वासों का प्रत्याख्यान करने के लिए बाध्य किया गया, जबकि Italian दार्शनिक और Dominican friar Bruno को धार्मिक प्राधिकारियों द्वारा विधर्मी माने गए सूर्य-केंद्रीय मत तथा अन्य ब्रह्मांड-विज्ञान संबंधी सिद्धांतों की अडिग पक्षधरता के लिए उत्पीड़न का सामना करना पड़ा और अंततः उन्हें मृत्युदंड दिया गया।

14.5.6 Kepler (1571–1630)

सूर्य-केंद्रीय ब्रह्मांड के उद्भव की चर्चा इस पुस्तक के क्षेत्र से परे है। किंतु भू-केंद्रीयता से हटने के परिवर्तन ने बल और impetus की अवधारणाओं के पुनर्परीक्षण को प्रेरित किया, जो इस अध्याय के केंद्रीय विषय हैं।

एक संक्षिप्त स्मरण: Bache के कार्य में प्रेक्षणों का व्यापक संग्रह, आकाशीय पिंडों की गतियों का सूक्ष्म अभिलेखन और आँकड़ों का सारणियों में संकलन सम्मिलित था। उनके अनुभवजन्य उपागम की

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संपूर्णता के बावजूद इन प्रेक्षणों में सुसंगत गणितीय संरचना अथवा भौतिक व्याख्या का अभाव था[15]। व्यापक सैद्धांतिक आधार की अनुपस्थिति का अर्थ था कि Bache के प्रेक्षण आकाशीय यांत्रिकी की अधिक गहन समझ से असंबद्ध रहे।

Johannes Kepler, चित्र 14.6d, ने अंततः ग्रहों की गति के अपने नियमों द्वारा इन प्रेक्षणों को अर्थ देने के लिए आवश्यक गणितीय प्रतिरूप प्रदान किया। किंतु अंतर्निहित सिद्धांतों की पूर्ण व्याख्या के लिए Newton के युगांतरकारी कार्य और उनके सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण-सिद्धांत की प्रतीक्षा करनी पड़ी (Kepler, 1609)। सरल शब्दों में, Kepler बल की *quantitative definition of force* खोजने वाले प्रथम व्यक्ति थे; देखें कैसे।

किंतु पहले यह ध्यान देना चाहिए कि Kepler संदिग्धार्थी थे: एक ही कार्य में बल की अवधारणा को कभी आत्मा और कभी भौतिक, लगभग यांत्रिक दैहिक राशि कहा गया। स्पष्टतः वे भी स्वयं को Aristotle से अलग करने के लिए संघर्ष कर रहे थे। अपने *Mysterium cosmographicum1* में Kepler अब भी बल की उस पारंपरिक आकाशीय संकल्पना को बनाए रखते हैं जिसमें बल पिंडों को चेतना देने और उनकी उपयुक्त गतियों को निर्देशित करने वाली आत्मा है।

Kepler गुरुत्वीय बलों की सार्वत्रिक प्रकृति की संकल्पना करते हैं और गुरुत्व को सक्रियता के स्थान पर "निष्क्रियता" कहते हैं। वे ज्वारों और चंद्रमा की कुछ स्थितियों की कालिक संपाती के निष्कर्ष पर पहुँचे। इन अन्वेषणों के परिणामस्वरूप कुछ लोगों ने यह सिद्धांत प्रस्तुत किया कि चंद्रमा ज्वार उत्पन्न करता है। Kepler चंद्र-सिद्धांत के इन समर्थकों से सहमत हैं, किंतु इन निष्कर्षों को एक महत्त्वपूर्ण अर्थ में सामान्यीकृत करते हैं: समुद्र चंद्रमा द्वारा उसी प्रकार आकर्षित होते हैं जैसे समुद्रों सहित सभी भारी वस्तुएँ पृथ्वी द्वारा आकर्षित होती हैं। चित्र 14.13।

Kepler ने अपने प्रथम खगोलीय ग्रंथ *Astronomia nova* में ग्रहों की गति की गतिकीय व्याख्या खोजी। पुस्तक की प्रस्तावना में वे लिखते हैं:

> यह गुरुत्व का सत्य सिद्धांत है। गुरुत्व संबंधित पिंडों के बीच पारस्परिक अनुराग है—मूल पाठ में wh1ch—जो उन्हें एकीकृत और संयुक्त करने की प्रवृत्ति रखता है (चुंबकीय क्षमता भी इसी प्रकार की है), जबकि पृथ्वी पत्थर को आकर्षित करती है, न कि पत्थर पृथ्वी की ओर प्रवृत्त होता है। यदि हम पृथ्वी के केंद्र को विश्व के केंद्र पर रख भी दें, तो भारी पिंड विश्व के इस केंद्र की ओर इस रूप में नहीं, बल्कि उस गोल पिंड के केंद्र की ओर जाएँगे जिससे वे संबंधित हैं, अर्थात् पृथ्वी के केंद्र की ओर। इस प्रकार पृथ्वी को चाहे जहाँ ले जाया जाए, भारी पिंड उसे चेतना देने वाली क्षमता के कारण सदैव उसी की ओर जाते हैं।
>
> Kepler, 1609 *Astronomia nova: Aitiologia, seu physica coelestis*

वास्तव में इसी *New Astronomy* (1609) में वे इस खोज का उल्लेख करते हैं कि किसी ग्रह का पथ "अंडाकार, पूर्णतः दीर्घवृत्तीय पथ" है। उन्होंने बताया कि यह परिणाम "अत्यंत श्रमसाध्य प्रमाणों और ... बहुत बड़ी संख्या में प्रेक्षणों पर गणनाओं" से प्राप्त हुआ। उन्होंने यह भी स्पष्ट किया कि उनकी सफलता Ptolemy के उपागम को त्यागने पर आधारित थी, जिन्होंने सूर्य की आभासी गति के स्थान पर उसकी माध्य गति पर विचार किया था। Kepler के अनुसार Ptolemy की धारणा थी कि दोनों गतियों में कोई प्रत्यक्ष अंतर नहीं होगा, इसलिए गणना की सरलता के लिए उन्होंने पहली विधि चुनी।

[15]यह अनेक पदार्थ-परीक्षण करने और स्वयं को उनके परिणाम किसी spreadsheet में सारणीबद्ध करने तक सीमित रखने के समान था। अंतर्निहित परिघटनाओं की व्याख्या करने वाले व्यापक गणितीय constitutive model का अभाव है

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Copernicus (1473–1543) और Brahe (1546–1601) ने Ptolemy का अनुसरण किया, किंतु Kepler के लिए यह उचित मार्ग नहीं था। अपने आरंभिक अध्ययन में ही उन्होंने संकेत किया था कि आभासी गति को ध्यान में रखना चाहिए, अर्थात् संदर्भ-बिंदु सूर्य का वास्तविक पिंड होना चाहिए। किंतु इतना पर्याप्त नहीं था। Kepler के लिए गणनाओं और प्रेक्षणों का सफल मिलान पर्याप्त नहीं है; प्रेक्षणों में छिपा प्रतिरूप भौतिक व्याख्या के लिए सुलभ होना चाहिए। ऐसा प्रतिरूप उन तीन पृथक क्षेत्रों के अनुरूप होना चाहिए जो मिलकर Kepler के लिए खगोल-विज्ञान के आवश्यक सुधार के निष्पादन की संरचना बनाते हैं: ज्यामिति, भौतिकी और प्रेक्षण (Hon and Zik, 2009)।

i) Quia nimirum incedebam vagis gressibus flexiloquorum verborum, non lege arithmetica. Vide hic jam utrumque processum: prior sic erat:

Periodus Martis 687.
Periodus Terrae 365 ¼.
Differentia 321 ¾.
Dimidium 160 ⅞.
Medium arithmeticum 526 ⅛.

526 ⅛ dat distantiam Martis 1000, quid 365 ¼?
Sequitur, distantia Telluris 694.

Posterior sic erat: Posito distantiam Telluris esse 694. Dico sic: Distantia Martis 1000 dat periodum 687, quid distantia Terrae 694? sequitur tanquam periodus Terrae 477. Pergo igitur per eversam proportionem.

Vera periodus 365 ¼ dat falsam 477, tanquam ex Marte, quid 1000, tanquam vis Martis? sequitur 1306, tanquam vis Telluris. Excessus igitur virtutis Telluris

चित्र 14.13: Kepler की गणनाएँ (Kepler, 1855)

ध्यान देना चाहिए कि Kepler ने अपने लेखन में जड़त्व की (आधुनिक) अवधारणा का कभी आह्वान नहीं किया। ग्रह का वेग perihelion पर अधिकतम और aphelion पर न्यूनतम देखते हुए Kepler को विश्वास हुआ कि इस परिघटना में सूर्य की भूमिका अनिवार्यतः भौतिक प्रकृति की और इस प्रकार *आध्यात्मिक* से *अधिक यांत्रिक* थी।

> यदि आप “आत्मा” शब्द के स्थान पर “बल” शब्द रखें, तो आपको वही सिद्धांत मिलता है जिस पर Mars आदि संबंधी ग्रंथ की आकाशीय भौतिकी आधारित है ... पहले मेरा विश्वास था कि ग्रहों की गति का कारण आत्मा है, क्योंकि प्रेरक बुद्धियों पर J. C. Scaliger की शिक्षाओं ने मुझे मोहित किया था। किंतु जब मैंने अनुभव किया कि ये प्रेरक कारण सूर्य से दूरी के साथ क्षीण होते हैं, तो मैंने निष्कर्ष निकाला कि यह बल कुछ दैहिक है—यदि ठीक इसी रूप में नहीं, तो कम-से-कम किसी विशिष्ट अर्थ में।
>
> Kepler, 1609 *Astronomia nova: Aitiologia, seu physica coelestis*

यही वह निष्कर्ष है!

अंततः उनके कार्य ने गुरुत्व के नियम की खोज का पूर्वाभास दिया, क्योंकि उन्होंने पहचाना कि ग्रहों पर कार्यरत बल सूर्य पर केंद्रित त्रिज्यीय आकर्षक बल होना चाहिए। यह Aristotle की स्पर्शरेखीय कर्षण के रूप में बल की धारणा से महत्त्वपूर्ण विचलन था।

14.5.7 Descartes (1596–1650)

René Descartes ने बल की अवधारणा और आभासी कार्य के सिद्धांत, दोनों में निर्णायक योगदान दिए। जहाँ Kepler प्रेक्षणों से निष्कर्ष (और समीकरण) निकालने वाले “यंत्रवादी” थे, Descartes—यह न भूलें

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कि वे प्रमुख दार्शनिक थे (*Cogito Ergo Sum*)—ने अधिक परिकल्पनात्मक उपागम अपनाया। उनकी अवधारणाओं ने दार्शनिक सिद्धांतों के आधार पर यह समझाया कि पिंड कैसे गतिमान और अन्योन्यक्रियाशील होते हैं, यद्यपि उनके उपागम में Kepler के कार्य के गणितीय औपचारिकतावाद और पूर्वानुमान-क्षमता का अभाव था।

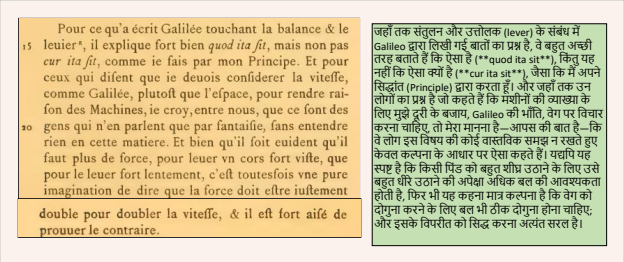
रोचक है कि अत्यंत Catholic Descartes ने अपने जीवन का अधिकांश भाग Dutch Republic में बिताया, जहाँ वे भाड़े के सैनिक के रूप में Protestant Dutch States Army में सम्मिलित हुए थे और Simon Stevin द्वारा स्थापित सैन्य अभियांत्रिकी का अध्ययन किया था। ये Dutch Golden Age के वर्ष थे, जो France के अधिक दमनकारी वातावरण के बिल्कुल विपरीत सांस्कृतिक खुलेपन से चिह्नित थे।

Descarts के विषय में अधिक जानकारी §6.6.3 में है।

बल और Impetus

F

बल की अवधारणा में Descartes का[16] योगदान ऐसी वैकल्पिक सत्तामीमांसात्मक[17] संरचना प्रस्तुत करना था जिसमें impetus की पारंपरिक not0f को अब कोई स्थान नहीं मिल सकता था, चित्र 14.14।


Pour ce qu'a écrit Galilée touchant la balance & le
15 leuier*, il explique fort bien *quod ita fit*, mais non pas
cur ita fit, comme ie fais par mon Principe. Et pour
ceux qui diſent que ie deuois conſiderer la viteſſe,
comme Galilée, plutoſt que l'eſpace, pour rendre rai-
ſon des Machines, ie croy, entre nous, que ce ſont des
20 gens qui n'en parlent que par fantaiſie, ſans entendre
rien en cette matiere. Et bien qu'il ſoit euident qu'il
faut plus de force, pour leuer vn cors fort viſte, que
pour le leuer fort lentement, c'eſt toutesfois vne pure
imagination de dire que la force doit eſtre iuſtement
double pour doubler la viteſſe, & il eſt fort aiſé de
prouuer le contraire.

जहाँ तक संतुलन और उत्तोलक (lever) के संबंध में Galileo द्वारा लिखी गई बातों का प्रश्न है, वे बहुत अच्छी तरह बताते हैं कि ऐसा है (**quod ita sit**), किंतु यह नहीं कि ऐसा क्यों है (**cur ita sit**), जैसा कि मैं अपने सिद्धांत (Principle) द्वारा करता हूँ। और जहाँ तक उन लोगों का प्रश्न है जो कहते हैं कि मशीनों की व्याख्या के लिए मुझे दूरी के बजाय, Galileo की भाँति, वेग पर विचार करना चाहिए, तो मेरा मानना है—आपस की बात है—कि वे लोग इस विषय की कोई वास्तविक समझ न रखते हुए केवल कल्पना के आधार पर ऐसा कहते हैं। यद्यपि यह स्पष्ट है कि किसी पिंड को बहुत शीघ्र उठाने के लिए उसे बहुत धीरे उठाने की अपेक्षा अधिक बल की आवश्यकता होती है, फिर भी यह कहना मात्र कल्पना है कि वेग को दोगुना करने के लिए बल भी ठीक दोगुना होना चाहिए; और इसके विपरीत को सिद्ध करना अत्यंत सरल है।

चित्र 14.14: René Descartes (1596–1650)

Descartes की impetus-अवधारणा मुख्यतः आकाशीय पिंडों के स्थान पर पृथ्वी पर स्थित पिंडों की गति पर केंद्रित थी। इसका संबंध ग्रहों की कक्षीय गति के स्थान पर प्रक्षेप्यों की गति जैसी स्थलीय गति की व्याख्या से अधिक था। उनका उपागम गुणात्मक था और किसी यथार्थ गणितीय सिद्धांत के स्थान पर गति की निरंतरता समझाने के लिए प्रयुक्त हुआ।

अपने *Principles of Philosophy* (1644) में Descartes कहते हैं कि ईश्वर "गति का सार्वत्रिक और प्राथमिक कारण" है, जहाँ तक वह गति और विराम की उस कुल मात्रा को अपने "ordinary concurrence" द्वारा संरक्षित रखता है जिसे उसने आरंभ में ब्रह्मांड में सृजित किया था। बाद में Descartes ने समझाया कि ईश्वर भौतिक संसार को "उसी क्रिया द्वारा और उन्हीं नियमों के अनुसार संरक्षित रखता है जिनके द्वारा उसने आरंभ में उसे सृजित किया था।" *Principles* में ईश्वर की सृजन-क्रिया और संरक्षण-क्रिया

[16] Descartes के विषय में अधिक जानकारी §6.6.3 में है

[17] Ontology: दर्शन की वह शाखा जो सत्ता, अस्तित्व अथवा वास्तविकता की प्रकृति से संबंधित है। सरल शब्दों में यह इन प्रश्नों पर विचार करती है कि वस्तुएँ मूलतः क्या हैं, उनका अस्तित्व कैसे है और किसी वस्तु के अस्तित्ववान होने का क्या अर्थ है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

की पहचान यह दिखाने में सहायक है कि ईश्वर संघट्टों से उत्पन्न गति के उन स्थानांतरणों को संपन्न करता है जो उसके द्वारा आरंभ में सृजित गति और विराम की कुल मात्रा को संरक्षित रखते हैं (Schmaltz, 2003)।

Descartes के अनुसार ब्रह्मांड “ether” नामक पदार्थ से भरा था और यह ether निरंतर गतिमान रहकर भँवर अथवा vortices बनाता था। सूर्य, ग्रहों और तारों सहित आकाशीय पिंड इन vortices द्वारा वैसे ही साथ ले जाए जाते थे जैसे धारा में तैरती वस्तुएँ:

> किंतु अब मैं चाहता हूँ कि आप विचार करें कि इस पृथ्वी का गुरुत्व क्या है, अर्थात् वह बल जो इसके सभी भागों को एकीकृत करता और उन सबको इसके केंद्र की ओर प्रवृत्त करता है—प्रत्येक को उसके अधिक अथवा कम विशाल और ठोस होने के अनुसार अधिक अथवा कम; यह और कुछ नहीं, बल्कि केवल इतना है कि इसके चारों ओर स्थित छोटे आकाश के भाग, इसके अपने भागों की अपेक्षा इसके केंद्र के चारों ओर कहीं अधिक तीव्रता से घूमते हुए, इससे कहीं अधिक बल से स्वयं को दूर करने की प्रवृत्ति रखते हैं और फलतः उन्हें पुनः वहाँ धकेलते हैं।
>
> Descartes, 1927 *Selections*

यहाँ Descartes यह दिखाने का प्रयास करते हैं कि जिस vortex के केंद्र में पृथ्वी स्थित है उसके अधिक आयतन वाले कण, अपने अधिक स्थूल आकार के कारण, निरंतर vortex की परिधि की ओर गतिमान होते हैं; बड़े पिंडों में संसक्त स्थलीय पदार्थ इस ethereal पदार्थ की भाँति बाह्य दाब के सम्मुख इतनी सरलता से नहीं झुक सकता (Jammer, 1957 PDF)।

आभासी विस्थापन और स्पर्शरेखा-रचना

V

Stevin की ज्यामितीय अंतर्दृष्टियों के बाद Descartes ने आभासी कार्य के सिद्धांत को अभूतपूर्व स्पष्टता प्रदान की और उसे समानुपात के नियम से समस्त स्थैतिकी के आधार में रूपांतरित किया। उनके व्यापक पत्राचार (Descartes, 1898 PDF) में संरक्षित उनके योगदान निर्णायक वैचारिक प्रगति का प्रतिनिधित्व करते हैं: यह पहचान कि केवल *infinitesimal* विस्थापन महत्त्व रखते हैं और यांत्रिक लाभ का उचित माप वेग नहीं, बल्कि *space* है।

मूलभूत सिद्धांत (1637)। Christiaan Huygens को October 5, 1637 के पत्र में, जो उनके लघु ग्रंथ *Explication des engins par l’aide desquels on peut avec une petite force lever un fardeau fort pesant* के साथ भेजा गया था, Descartes ने मूलभूत सिद्धांत को प्रशंसनीय सरलता से कहा:

> इन सभी मशीनों का आविष्कार एक सिद्धांत पर आधारित है: वही बल जो, उदाहरणतः, 100 pound के भार को दो foot तक उठा सकता है, 200 pound के भार को एक foot तक अथवा 400 pound के भार को आधे foot तक भी उठा सकता है, और इसी प्रकार आगे भी, बशर्ते वह उन पर लगाया जाए।
>
> Descartes, 1898 PDF *Correspondance, mars 1638 – decembre 1639*, Descartes to Huygens, 5 October 1637, AT I, 435–436

यह भार और ऊर्ध्वाधर विस्थापन के गुणनफल का संरक्षण व्यक्त करता है—जो सतही रूप से Aristotle के समानुपात-नियम के समान है, किंतु इसमें एक निर्णायक अंतर है: *समय अथवा वेग का कोई*

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संदर्भ नहीं है। Descartes जिस "बल" की बात करते हैं वह तात्कालिक प्रयास नहीं, बल्कि तय की गई ऊँचाई और भार के गुणनफल द्वारा मापी गई *action* है। जैसा वे बाद में समझाएँगे, केवल किसी भार को विराम में बनाए रखने के लिए आवश्यक बल के विपरीत इस action के "दो आयाम" हैं; उस बल का केवल एक आयाम है।

अतिसूक्ष्म विस्थापन की ज्यामिति (1638)। Descartes ने July 13, 1638 दिनांकित Mersenne को लिखे उल्लेखनीय पत्र में अपने सिद्धांत के संपूर्ण निहितार्थ विकसित किए। यहाँ उन्होंने *incipient motion*—"गति का आरंभ"—की निर्णायक अवधारणा प्रस्तुत की और दिखाया कि वक्र पथों पर गति के लिए अवरोधित पिंडों पर अपने सिद्धांत का अनुप्रयोग कैसे किया जाए।

प्रमुख अंतर्दृष्टि पत्र के आरंभ में आती है:

> इससे स्पष्टतः यह निष्कर्ष निकलता है कि प्रत्येक पिंड का सापेक्ष भारीपन, अथवा समानार्थतः वह बल जिसे किसी निश्चित स्थिति में उसे सहारा देने और नीचे उतरने से रोकने के लिए लगाना आवश्यक है, उस *गति के आरंभ* द्वारा मापा जाना चाहिए जिसे सहायक शक्ति को उसे उठाने के लिए, अथवा उसके उतरने पर उसका अनुसरण करने के लिए, करना होगा। इस प्रकार वह सरल रेखा जिसे यह गति निरूपित करेगी और वह रेखा जो यह चिह्नित करेगी कि उसी समय पिंड पृथ्वी के केंद्र के कितना निकट आएगा, के बीच वही अनुपात है जो उसके निरपेक्ष और सापेक्ष भारीपन के बीच है।
>
> Descartes, 1898 *Correspondance, mars 1638 – decembre 1639*, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 228–229

इस अवतरण की अनेक विशेषताएँ बल देने योग्य हैं। प्रथम, "गति का आरंभ" (*commencement du mouvement*) वाक्यांश संकेत करता है कि Descartes परिमित विस्थापनों से नहीं, बल्कि अतिसूक्ष्म विस्थापनों से संबंधित हैं—अर्थात् किसी मापनीय दूरी में तय किए गए पथ से नहीं, बल्कि किसी बिंदु पर अवरोध की ज्यामिति से। द्वितीय, conditional mood ("*करना होगा*," "*निरूपित करेगी*") का उनका उपयोग संकेत करता है कि हम वास्तविक विस्थापनों पर नहीं, बल्कि *potential* विस्थापनों पर विचार करते हैं। यह *virtuality* की उस अवधारणा का मार्ग खोलता है जिसे बाद में Johann Bernoulli ने स्पष्ट किया।

कुछ पंक्तियों के बाद Descartes ने अपने तर्क के अतिसूक्ष्म स्वरूप को स्पष्ट किया:

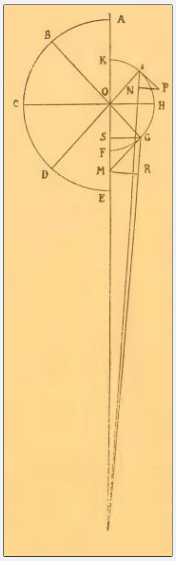
> ध्यान दें कि मैं केवल उतरना नहीं, बल्कि *उतरना आरंभ करना* कहता हूँ, क्योंकि केवल अवरोह के आरंभ को ध्यान में रखना चाहिए।
>
> Descartes, 1898 *Correspondance, mars 1638 – decembre 1639*, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 233

यह निर्णायक कथन है। महत्त्व परिमित गति का नहीं, बल्कि गति के अतिसूक्ष्म *आरंभ* का है।

उत्तोलक और स्पर्शरेखा-रचना। Descartes ने अपने सिद्धांत को तीन उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया: घिरनी, आनत तल और उत्तोलक। उत्तोलक का उदाहरण विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि वह दिखाता है कि वक्र पथों पर गति आरोपित करने वाले अवरोधों को कैसे निरूपित किया जाए। संपूर्ण अवतरण उद्धरण योग्य है, क्योंकि वह pre-Lagrangian स्थैतिकी की सर्वाधिक स्पष्ट व्याख्याओं में से एक है:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

उदाहरण 3 — उत्तोलक।



CH ऐसा उत्तोलक हो जिसे बिंदु O पर इस प्रकार आलंबित किया गया है कि ऊपर उठाने अथवा नीचे करने पर सिरा C अर्धवृत्त $ABCDE$ और सिरा H अर्धवृत्त $FGHIK$ निरूपित करे, जिनका केंद्र O है। इसके अतिरिक्त उसकी मोटाई अथवा भार को ध्यान में न रखें, बल्कि उसे ऐसी गणितीय सरल रेखा मानें जिसमें बिंदु O स्थित है। अब देखें कि उसे गतिमान करने वाला बल अथवा शक्ति संपूर्ण अर्धवृत्त $ABCDE$ निरूपित करती और उस रेखा $ABCDE$ के अनुदिश कार्य करती है; यद्यपि भार (जिसे मैं दूसरे सिरे पर मानता हूँ) इसी प्रकार अर्धवृत्त $FGHIK$ निरूपित करता है, फिर भी वह उस वक्र रेखा $FGHIK$ की लंबाई से नहीं, बल्कि केवल सरल रेखा FK की लंबाई से उठता है। अतः इस भार को गतिमान करने वाले बल और उसके भारीपन के बीच अनुपात इन वृत्तों के दो व्यासों अथवा उनकी दो परिधियों के बीच अनुपात से नहीं, बल्कि पहले की परिधि और दूसरे के व्यास के बीच अनुपात से मापा जाना चाहिए।

आगे विचार करें कि जब उत्तोलक A अथवा E के निकट हो, तब उसे गतिमान करने के लिए यह बल उतना अधिक आवश्यक नहीं जितना उसके B अथवा D के निकट होने पर; और जब वह B अथवा D के निकट हो तब उतना अधिक नहीं जितना C के निकट होने पर। कारण यह है कि उन स्थितियों में भार कम उठता है। इसे सरलता से देखा जा सकता है: रेखा COH को क्षितिज के समांतर और AOF को उसे समकोण पर काटने वाली मानकर बिंदु G को बिंदुओं F और H से समान दूरी पर तथा बिंदु B को बिंदुओं A और C से समान दूरी पर लें; GS को क्षितिज के समांतर खींचने पर देखें कि रेखा FS, जो रेखा AB के अनुदिश बल के कार्य करते समय भार के उठने की मात्रा चिह्नित करती है, रेखा SO से बहुत छोटी है, जो रेखा BC के अनुदिश बल के कार्य करते समय उसके उठने की मात्रा चिह्नित करती है।

अब वक्र रेखा $ABCDE$ के प्रत्येक बिंदु पर इस बल का यथार्थ परिमाण मापने के लिए यह सोचना चाहिए कि वह वहाँ ठीक उसी प्रकार कार्य करता है मानो किसी वृत्तीय आनत तल पर भार को खींच रहा हो; और इस वृत्तीय (अथवा गोलाकार) तल के प्रत्येक बिंदु पर आनति उस सरल रेखा की आनति से मापी जानी चाहिए जो उस बिंदु पर वृत्त को स्पर्श करती है। इस प्रकार, उदाहरणतः, जब शक्ति बिंदु B पर हो, तब बिंदु G पर स्थित भार के भारीपन से उसका अनुपात ज्ञात करने के लिए स्पर्शरेखा GM और बिंदु G से पृथ्वी के केंद्र की ओर सीधे जाने वाली अन्य रेखा, जैसे GR, खींचें; फिर बिंदु M को रेखा GM पर इच्छानुसार लेकर MR को GR के समकोण पर खींचें; और विचार करें कि बिंदु G पर इस भार के भारीपन का उस स्थान पर उसे सँभालने अथवा वृत्त FGH के अनुदिश गतिमान करने के लिए आवश्यक बल से वही अनुपात है जो रेखा GM का GR से है। अतः यदि रेखा BO को रेखा OG की दुगुनी माना जाए, तो बिंदु B पर बल का बिंदु G पर इस भार से केवल वही अनुपात होना चाहिए जो रेखा GR के आधे का संपूर्ण रेखा GM से है; और यदि BO तथा OG समान हों, तो इस बल का इस भार से वही अनुपात होना चाहिए जो संपूर्ण रेखा GR का संपूर्ण रेखा GM से है, आदि।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> इसी प्रकार, जब बल बिंदु D पर हो, तब बिंदु I पर स्थित भार का भारीपन ज्ञात करने के लिए स्पर्शरेखा IP और पृथ्वी के केंद्र की ओर सरल रेखा IN खींचें; तथा स्पर्शरेखा पर इच्छानुसार चुने गए बिंदु P से PN खींचें, जो IN के समकोण पर हो, ताकि रेखा IP और रेखा IN के आधे (यदि DO को OI की दुगुनी माना जाए) के बीच ऐसा अनुपात प्राप्त हो जो भार के भारीपन और उसे गतिमान करने के लिए बिंदु D पर आवश्यक बल के बीच अनुपात के अनुरूप हो। अन्य प्रकरणों के लिए भी इसी प्रकार।
>
> अब मुझे प्रतीत होता है कि ये तीन उदाहरण मेरे प्रस्तावित सिद्धांत की सत्यता सुनिश्चित करने और यह दिखाने के लिए पर्याप्त हैं कि स्थैतिकी में परंपरागत रूप से निरूपित प्रत्येक विषय इसी पर निर्भर है। क्योंकि wedge और screw केवल आनत तल हैं और जिन पहियों से मशीनें बनाई जाती हैं वे केवल उत्तोलक हैं ...
>
> Descartes, 1898 *Correspondance, mars 1638 – decembre 1639*, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 235–237

इस विश्लेषण में निर्णायक चरण विचाराधीन बिंदु पर वक्र पथ को उसकी *स्पर्शरेखा* से प्रतिस्थापित करना है। यह differential-geometric रचना है: स्पर्शरेखा अनुमत गति की तात्कालिक दिशा ग्रहण करती है और अनुपात $GM : GR$ उस यथार्थ विन्यास पर यांत्रिक लाभ देता है। आधुनिक भाषा में हम कहेंगे कि Descartes अवरोध की दिशा में गुरुत्वीय बल के घटक की गणना कर रहे हैं—अथवा समतुल्यतः स्पर्शरेखा के अनुदिश अतिसूक्ष्म विस्थापन के लिए आभासी कार्य का मूल्यांकन कर रहे हैं।

वेग नहीं, स्थान। Descartes पूर्णतः जानते थे कि उनका उपागम उनके पूर्ववर्तियों और समकालीनों से भिन्न था, जिनमें से अनेक ने यांत्रिक सिद्धांतों को वेगों के पदों में सूत्रबद्ध किया था। November 15, 1638 को Mersenne को लिखे पत्र में उन्होंने अपने उपागम की Galileo के उपागम से तुलना की:

> Pour ce qu'a écrit Galilée touchant la balance et le levier, il explique fort bien *quod ita sit*, mais non pas *cur ita sit*, comme je fais par mon Principe. Et pour ceux qui disent que je devois considérer la vitesse, comme Galilée, plutôt que l'espace, pour rendre raison des Machines, je croy, entre nous, que ce sont des gens qui n'en parlent que par fantaisie, sans entendre rien en cette matière...
>
> ---
>
> तुला और उत्तोलक के विषय में Galileo ने जो लिखा, उसमें वे *क्या होता* है बहुत अच्छी तरह समझाते हैं, किंतु वह *क्यों होता* है नहीं, जैसा मैं अपने सिद्धांत द्वारा समझाता हूँ। और जो लोग कहते हैं कि मशीनों की व्याख्या के लिए मुझे Galileo की भाँति स्थान के स्थान पर वेग पर विचार करना चाहिए, उनके संबंध में मेरा विश्वास है—हमारे बीच की बात है—कि वे इस विषय को बिना कुछ समझे केवल कल्पना से बोलते हैं...
>
> Descartes, 1898 *Correspondance, mars 1638 – decembre 1639*, Descartes to Mersenne, 15 November 1638, AT II, 433–434

यह अवतरण Descartes के इस विश्वास को प्रकट करता है कि उनका सिद्धांत केवल सही नियम नहीं, बल्कि वास्तविक *व्याख्या* प्रदान करता है। Galileo और अन्य लोग उत्तोलक का नियम व्युत्पन्न कर सकते थे, किंतु वेगों का उनका आह्वान यांत्रिक लाभ के वास्तविक कारण को अस्पष्ट करता था। September 12, 1638 के सहवर्ती पत्र में Descartes ने विस्तार से समझाया कि उन्होंने अपने सूत्रीकरण से वेग को जानबूझकर क्यों बाहर रखा:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> वेग का अंतर इन भारों में से एक को दूसरे का दुगुना बनाना आवश्यक नहीं करता, बल्कि स्थान का अंतर ऐसा करता है... और यदि मैंने स्थैतिकी पर इस लघु ग्रंथ के किसी भाग में कोई कौशल दिखाया है, तो मैं चाहूँगा कि यह ज्ञात हो कि वह अन्य सभी भागों की अपेक्षा केवल इसी में अधिक है। क्योंकि भारीपन वास्तव में क्या है और उसके साथ संसार की संपूर्ण व्यवस्था को समझाए बिना वेग के विषय में कोई अच्छी अथवा ठोस बात कहना असंभव है। अब क्योंकि मैं यह कार्य नहीं करना चाहता था, मैंने इस विचार को छोडने और अन्य विचारों को इससे पृथक करने का मार्ग खोजा, ताकि इसके बिना उनकी व्याख्या कर सकूँ।
>
> Descartes, 1898 *Correspondance, mars 1638 – decembre 1639*, Descartes to Mersenne, 12 September 1638, AT II, 353–355

यह उल्लेखनीय पद्धतिगत कथन है। Descartes ने पहचाना कि वेगों के पूर्ण निरूपण के लिए गतिकी के सिद्धांत—बल किस प्रकार त्वरण उत्पन्न करते हैं इसका विवरण—की आवश्यकता होगी, जिसके लिए स्वयं गुरुत्व की प्रकृति समझना आवश्यक होगा। स्थैतिकी को पूर्णतः स्थानिक विस्थापनों के पदों में सूत्रबद्ध करके उन्होंने ऐसा स्व-संपूर्ण सिद्धांत प्राप्त किया जो भौतिकी के अनसुलझे प्रश्नों पर निर्भर नहीं था। Descartes के हाथों में आभासी कार्य का सिद्धांत किसी गतिकीय परिकल्पना से स्वतंत्र, साम्य के विषय में पूर्णतः ज्यामितीय कथन बन गया।

Descartes की विरासत

आभासी कार्य के सिद्धांत में Descartes के योगदानों को चार बिंदुओं में संक्षेपित किया जा सकता है:

1. **मूलभूत सिद्धांत**: किसी भार को उठाने के लिए आवश्यक “बल” (action) भार और ऊँचाई के गुणनफल द्वारा मापा जाता है और यह गुणनफल सभी सरल मशीनों में संरक्षित रहता है। यह Stevin की अंतर्दृष्टियों को स्थैतिकी के सार्वत्रिक अभिगृहीत में सामान्यीकृत करता है।
2. **अतिसूक्ष्म दृष्टिकोण**: महत्त्व परिमित विस्थापन का नहीं, बल्कि “गति के आरंभ”—अवरोधों के अनुरूप अतिसूक्ष्म विस्थापन—का है। यह सिद्धांत को वास्तविक गतियों के कथन से *virtual* विस्थापनों के कथन में रूपांतरित करता है।
3. **स्पर्शरेखा-रचना**: वक्र अवरोधों के लिए प्रासंगिक विस्थापन अवरोध-वक्र की स्पर्शरेखा के अनुदिश मापा जाता है। यह ज्यामितीय रचना सिद्धांत को स्वेच्छ यांत्रिक निकायों पर लागू करने देती है।
4. **वेग के स्थान पर स्थान**: स्थैतिकी के उचित चर स्थानिक विस्थापन हैं, वेग नहीं। स्थैतिकी को गतिकी से पृथक करना सुविचारित पद्धतिगत चयन था जिसने सिद्धांत को उसकी विशिष्ट व्यापकता प्रदान की।

Descartes के सूत्रीकरण को शीघ्र ही John Wallis (1616–1703) ने सामान्यीकृत किया; उन्होंने अपने *Mechanica* (1670–1671) में सिद्धांत को स्वेच्छ बलों तक विस्तारित किया: “किसी भी प्रेरक बल की अग्र अथवा पश्च गतियाँ बलों और इन बलों की दिशाओं के अनुदिश मापी गई उनकी अग्र अथवा पश्च गतियों के गुणनफलों से प्राप्त होती हैं” (Wallis, 1670)। किंतु अगली शताब्दी में Johann Bernoulli ने सिद्धांत को उसका निश्चित सूत्रीकरण और नाम दिया: *virtual velocities* का सिद्धांत।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

14.5.8 Torricelli (1608–1647)

V

Evangelista Torricelli (1608–1647)[18] Galileo के अंतिम विद्यार्थी थे और January 1642 में Galileo की मृत्यु के बाद Florence में Grand Duke Ferdinando II de' Medici के गणितज्ञ के रूप में उनके उत्तराधिकारी बने। 1644 में उन्होंने अपना *Opera geometrica* (Torricelli, 1644 PDF) प्रकाशित किया, जो उनके जीवनकाल में प्रकाशित होने वाला एकमात्र कार्य था। इस ग्रंथ के दूसरे भाग, *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum*, में साम्य का ऐसा सिद्धांत है जो Archimedean स्थैतिकी और Bernoulli तथा Lagrange के आभासी-कार्य सिद्धांत के बीच निर्णायक कड़ी सिद्ध हुआ।

Praemittamus शीर्षक वाले संक्षिप्त आरंभिक खंड में Torricelli ने अपना मूलभूत अभिगृहीत कहा, चित्र 14.15:

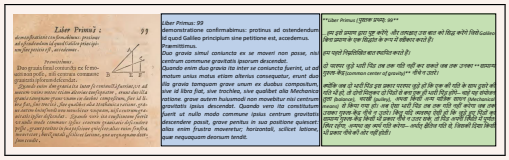
> *Praemittamus.*
> Duo grauia simul coniuncta ex se moueri non posse, nisi centrum commune grauitatis ipsorum descendat.
>
> Quando enim duo grauia ita inter se coniuncta fuerint, vt ad motum vnius motus etiam alterius consequatur, erunt duo illa grauia tamquam graue vnum ex duobus compositum, siue id libra sit, siue troclea, siue qualibet alia Mechanica ratione. graue autem huiusmodi non mouebitur vnquam, nisi centrum grauitatis ipsius descendat. Quando vero ita constitutum fuerit vt nullo modo commune ipsius centrum grauitatis descendere possit, graue penitus in sua positione quiescet: alias enim frustra moueretur; horizontali, scilicet latione, quae nequaquam deorsum tendit.
>
> ---
>
> हम इसे प्रदर्शन द्वारा पुष्ट करेंगे; अब हम तत्काल उस बात को प्रस्तुत करते हैं जो Galileo में सिद्धांत अथवा आधार-वाक्य है। *हम यह आधार मानते हैं।*
> परस्पर जुड़े दो भारी पिंड स्वयं गतिमान नहीं हो सकते जब तक उनका उभयनिष्ठ गुरुत्व-केंद्र नीचे न उतरे।
> क्योंकि जब दो भारी पिंड इस प्रकार परस्पर जुड़े हों कि एक की गति के साथ दूसरे की गति भी हो, तब वे दोनों भारी पिंड दो से निर्मित एक भारी पिंड के समान होंगे—चाहे वह तुला हो, घिरनी हो अथवा कोई अन्य यांत्रिक व्यवस्था। इस प्रकार का भार तब तक कभी गतिमान नहीं होगा जब तक उसका अपना गुरुत्व-केंद्र नीचे न उतरे। किंतु जब उसे इस प्रकार व्यवस्थित किया गया हो कि उसका उभयनिष्ठ गुरुत्व-केंद्र किसी भी रीति से नीचे न उतर सके, तो भार अपनी स्थिति में पूर्णतः विराम में रहेगा; अन्यथा वह व्यर्थ ही गतिमान होगा, अर्थात् ऐसे कृषैतिज स्थानांतरण द्वारा जिसकी प्रवृत्ति किसी प्रकार अधोमुखी नहीं है।
>
> Torricelli, 1644 PDF *Opera geometrica*

प्रतिधनात्मक कथन साम्य की कसौटी देता है: *परस्पर जुड़े भारी पिंडों का निकाय साम्य में होता है यदि और केवल यदि प्रत्येक संभावित गति के लिए उनका उभयनिष्ठ गुरुत्व-केंद्र नीचे नहीं उतर सकता।*

यह भ्रामक रूप से सरल कथन गहन सामान्यीकरण का प्रतिनिधित्व करता है। प्राचीन सिद्धांत—कि कोई *एकल* पिंड अपने गुरुत्व-केंद्र पर आलंबित होने पर साम्य में होता है—Archimedes से सुविख्यात था। Torricelli ने पहचाना कि परस्पर जुड़े दृढ़ पिंडों के किसी *समुच्चय* के लिए संपूर्ण निकाय का गुरुत्व-केंद्र

[18] Torricelli संभवतः barometer (1643) के अपने आविष्कार और किसी छिद्र से तरल के बहिर्वाह को नियंत्रित करने वाले "Torricelli के नियम" के लिए अधिक प्रसिद्ध हैं। किंतु यांत्रिकी में उनके योगदान, यद्यपि कम प्रसिद्ध हैं, आभासी कार्य के इतिहास के लिए मूलभूत महत्त्व रखते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 14.15: Torricelli का अभिगृहीत

(Archimedean नियमों के अनुसार परिकलित) समान भौतिक महत्त्व रखता है। यदि कोई आभासी गति इस बिंदु को नीचे नहीं ला सकती, तो निकाय साम्य में है।

आभासी कार्य से संबंध

यद्यपि Torricelli का सिद्धांत आभासी विस्थापनों अथवा आभासी कार्य का स्पष्ट उल्लेख नहीं करता, वह केवल गुरुत्व के अधीन निकायों के लिए आभासी कार्य के सिद्धांत के समतुल्य है। n भारी पिंडों के ऐसे निकाय पर विचार करें जिनके भार W_i हैं और जो किसी datum से ऊपर ऊँचाइयों z_i पर स्थित हैं। गुरुत्व-केंद्र की ऊँचाई है

$$\bar{z} = \frac{\sum_i W_i z_i}{\sum_i W_i}$$

किसी आभासी विस्थापन $\delta\mathbf{r}_i$ के लिए गुरुत्व-केंद्र की ऊँचाई में आभासी परिवर्तन है

$$\delta\bar{z} = \frac{\sum_i W_i \, \delta z_i}{\sum_i W_i}$$

Torricelli की यह शर्त कि गुरुत्व-केंद्र नीचे नहीं उतर सकता (सभी अनुमत गतियों के लिए $\delta\bar{z} \geq 0$, और प्रतिवर्ती विस्थापनों के लिए साम्य में समानता) यह आवश्यक करने के समतुल्य है कि गुरुत्व का आभासी कार्य शून्य हो:

$$\delta W = -\sum_i W_i \, \delta z_i = 0 \tag{14.1}$$

सभी अनुमत आभासी विस्थापनों के लिए। इस प्रकार गुरुत्व-केंद्र सिद्धांत गुरुत्वीय बलों तक सीमित आभासी कार्य के सिद्धांत का विशेष प्रकरण है।

Torricelli से Bernoulli तक

Torricelli ने अपने सिद्धांत का उपयोग यांत्रिकी के परिणामों के सुरुचिपूर्ण प्रमाण देने में किया, जिनमें आनत तल का नियम और भिन्न आनतियों वाले तलों पर निकायों का साम्य सम्मिलित हैं—इन परिणामों को Galileo ने अन्य विधियों से निरूपित किया था। उनके उपागम के स्पष्ट लाभ थे: उसमें बलों का वियोजन, “गति की प्रवृत्तियों” पर विचार अथवा गतिकीय तर्क का आह्वान आवश्यक नहीं था। गुरुत्व-केंद्र कसौटी ने साम्य की पूर्णतः ज्यामितीय और स्थैतिक जाँच प्रदान की।

इस सिद्धांत को परवर्ती यांत्रिकीविदों, विशेषतः Wallis और Huygens, ने अपनाया और वह सत्रहवीं शताब्दी में साम्य-शर्त के अनेक प्रतिस्पर्धी सूत्रीकरणों में से एक बना। जब Johann Bernoulli ने

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1715 में आभासी वेगों का सिद्धांत प्रतिपादित किया, तब उन्होंने Torricelli की अंतर्दृष्टि का pseudo-Aristotelian *Mechanica* से उत्पन्न पुरानी परंपरा के साथ संश्लेषण किया: Bernoulli का सिद्धांत केवल गुरुत्व पर नहीं, बल्कि *किसी भी* बल पर लागू था और उसने साम्य-शर्त को गुरुत्व-केंद्र की स्थिरता के स्थान पर आभासी कार्य के लुप्त होने के पदों में व्यक्त किया।

अपने *Mécanique analytique* के आरंभिक ऐतिहासिक सर्वेक्षण में Lagrange ने इस महत्त्वपूर्ण मध्यवर्ती चरण का पूर्ण श्रेय Torricelli को दिया:

> Torricelli fut le premier qui réduisit le principe des vitesses virtuelles à cette condition, que le centre de gravité des poids ne descende pas.
>
> Torricelli आभासी वेगों के सिद्धांत को इस शर्त में अपचित करने वाले प्रथम व्यक्ति थे: भारों का गुरुत्व-केंद्र नीचे न उतरे।

Mechanica से Lagrange तक विकास-क्रम में Torricelli का योगदान निर्णायक स्थान रखता है। उन्होंने दिखाया कि साम्य को बलों अथवा आघूर्णों के संतुलन के स्थान पर चरम गुण—गुरुत्व-केंद्र की न्यूनतम संभव स्थिति—द्वारा अभिलक्षित किया जा सकता है। गुरुत्व से आगे स्वेच्छ बल-निकायों तक सामान्यीकृत यह परिवर्तनात्मक दृष्टिकोण विश्लेषणात्मक यांत्रिकी की पहचान बना।

14.5.9 Wallis (1616–1703)

V

John Wallis ने अपने *Mechanica* (1670–1671) (Wallis, 1670) में आभासी कार्य के सिद्धांत को स्वेच्छ बल-दिशाओं तक विस्तारित किया। उन्होंने कहा कि “किसी भी प्रेरक बल की अग्र अथवा पश्च गतियाँ बलों और इन बलों की दिशाओं के अनुदिश मापी गई उनकी अग्र अथवा पश्च गतियों के गुणनफलों से प्राप्त होती हैं।” गुरुत्व से परे यह सामान्यीकरण उस पूर्णतः सामान्य सिद्धांत की दिशा में महत्त्वपूर्ण चरण था जिसे Bernoulli ने प्रतिपादित किया।

14.5.10 Leibniz (1646–1716)

F

Leibniz ने बल की अवधारणा और अंततः उसका वर्णन करने वाले गणितीय उपकरण, दोनों में योगदान दिया।

बल और Monadology

Leibniz के लिए, चित्र 14.6f, *Monadology* में बल को *monads* की अंतर्निहित सक्रियता अथवा appetition की अभिव्यक्ति समझा जा सकता है। जहाँ पारंपरिक यांत्रिक अर्थ में बल पिंडों पर बाह्य क्रिया से संबंधित है, Leibniz ने बल की संकल्पना सभी पदार्थों में अंतर्निहित आंतरिक सिद्धांत के रूप में की। *monads*[19] की अन्योन्यक्रियाएँ उनकी *inclination* द्वारा संचालित होती हैं और उनके फलस्वरूप

[19] Leibniz की दार्शनिक व्यवस्था में *monad* एक मूलभूत तत्त्वमीमांसात्मक अवधारणा है जो अविभाज्य, अभौतिक और स्व-संपूर्ण पदार्थ का प्रतिनिधित्व करती है

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अनुभूतियों अथवा अवस्थाओं के परिवर्तनों के रूप में बल अभिव्यक्त होता है। उस समय तक खंडित *impetus* सिद्धांत से समानता पर ध्यान दें।

स्थिति के Calculus की ओर

अब तक बलों को अनिवार्यतः अदिश माना जाता था: परिमाणों का अनुगमन किया जाता था, जबकि विन्यास की ज्यामिति दिशाएँ प्रदान करती थी।

Leibniz गणना और आकृति के बीच इस विभाजन से असंतुष्ट थे। वे "स्थिति" के प्रतीकात्मक calculus के वैचारिक अग्रदूत बने, जिसका संकेतन स्थिति, अभिविन्यास और यहाँ तक कि गति को भी परिमाण की भाँति प्रत्यक्ष रूप से कूटबद्ध करने के लिए था। 1679 में उन्होंने Huygens को लिखा (Leibniz and Loemker, 1956):

> मैंने एक नए characteristic के कुछ तत्त्व खोजे हैं जो algebra से पूर्णतः भिन्न हैं और जिनसे मन में, यथार्थतः तथा उनकी प्रकृति के प्रति निष्ठावान रीति से, आकृतियों के बिना भी, इंद्रिय-बोध पर निर्भर प्रत्येक वस्तु का निरूपण करने में बहुत लाभ होगा। Algebra केवल अनिर्धारित संख्याओं अथवा परिमाणों का characteristic है, किंतु वह स्थिति, कोणों और गति को प्रत्यक्षतः व्यक्त नहीं करता। अतः गणना द्वारा किसी आकृति के गुणों का विश्लेषण करना प्रायः कठिन होता है और algebraic गणना पूर्ण हो जाने पर भी अत्यंत सुविधाजनक ज्यामितीय प्रदर्शन तथा रचनाएँ ज्ञात करना और अधिक कठिन होता है। किंतु दृश्य आकृतियों का अनुसरण करने वाला यह नया characteristic समाधान, रचना और ज्यामितीय प्रदर्शन सभी को एक ही समय, प्राकृतिक रीति और एक ही विश्लेषण में, अर्थात् निर्धारित प्रक्रिया द्वारा, प्रदान करने में विफल नहीं हो सकता।
>
> Leibniz and Loemker, 1956 *Philosophical Papers and Letters*

प्रमुख बात उनका यह आग्रह है कि सफल यांत्रिकी को ऐसी भाषा चाहिए जो "कितना" के साथ "कहाँ" और "किस दिशा में" भी वहन करे—यह कार्यक्रम निर्देशित राशियों के परवर्ती व्यवस्थित निरूपणों का पूर्वाभास देता है।

Vis Viva विवाद

सत्रहवीं शताब्दी के उत्तरार्ध से अठारहवीं शताब्दी के अधिकांश भाग तक Continental यांत्रिकी एक भ्रामक रूप से सरल प्रश्न पर विभाजित थी: कौन-सी राशि प्रेरक शक्ति के "वास्तविक माप" को सर्वोत्तम रूप से ग्रहण करती है?(Descartes, 1644; Leibniz, 1686a) Cartesians (और भिन्न पदावली में अनेक Newtonians) ने mv के समानुपाती "गति की मात्रा" पर बल दिया,(Descartes, 1644; Newton, 1687) क्योंकि वह संघट्टों में विनिमय का अनुगमन करती है और गति-संतुलन के तर्कों में स्वाभाविक रूप से प्रकट होती है। इसके विपरीत Leibniz ने तर्क दिया कि "जीवंत बल" *vis viva*, mv^2 के समानुपाती है,(Leibniz, 1686a) और आग्रह किया कि अनेक यांत्रिक प्रक्रियाओं में प्रकृति इसी को संरक्षित रखती है और यही प्रभाव उत्पन्न करने की पिंड की क्षमता को मापता है।

संघट्ट और गतिमान भार के "प्रभाव" संबंधी प्रयोगों ने विवाद को तीव्र किया (Gravesande, 1722)। यदि पूछा जाए कि गतिमान पिंड गुरुत्व के विरुद्ध क्या कर सकता है, तो प्रासंगिक तुलना यह है कि वह किसी भार को कितनी ऊँचाई तक उठा सकता है। सरल प्रकरणों में वह ऊँचाई v^2 के साथ मापित होती है, v के साथ नहीं, जिसने Leibniz के माप का समर्थन किया। किंतु आवेगी अन्योन्यक्रियाओं (संघट्टों,

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आकस्मिक परिवर्तनों) में पिंडों के बीच संतुलित होने वाली राशि संवेग-सदृश और mv के अधिक निकट होती है। विवाद का अधिकांश भाग इसलिए बना रहा क्योंकि दोनों पक्षों ने अपनी वरीय राशि को बल की एकमात्र परिभाषा बनाने का प्रयास किया, जबकि अंतर्निहित प्रश्न भिन्न थे: एक समय में आवेग और विनिमय से संबंधित है, दूसरा कार्य और विन्यास में परिवर्तन उत्पन्न करने की क्षमता से।(d'Alembert, 1743)

आधुनिक पाठक अंतिम समाधान देख सकता है: mv और mv^2 प्रतिस्पर्धी नहीं, बल्कि भिन्न सिद्धांतों से जुड़े (भिन्न शर्तों के अधीन) पृथक अपरिवर्ती हैं। संवेग आवेग और गति के समीकरणों की प्राकृतिक मुद्रा है; $\frac{1}{2}mv^2$ कार्य और ऊर्जा की प्राकृतिक मुद्रा है।

14.5.11 Newton (1642–1726)

F

अंततः Isaac Newton का प्रवेश होता है, चित्र 14.6g। एक प्रतिभाशाली व्यक्ति (§6.6.7) और alchemist (6.6.7)! हाँ, वही व्यक्ति जिसने अब तक की सर्वाधिक प्रभावशाली पुस्तकों में से एक *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* लिखी, उसने alchemy[20] में भी गहन अध्ययन किया। यद्यपि हम इसे कुछ उपेक्षा से देख सकते हैं, यह पहचानना महत्त्वपूर्ण है कि उनके काल में ऐसे प्रयास असामान्य नहीं थे (यद्यपि प्रायः गुप्त रखे जाते थे)।

इस समय तक Galileo और Kepler जैसे पूर्ववर्तियों ने Newton के लिए आधारभूमि तैयार कर दी थी। Newton अभूतपूर्व स्पष्टता और परिशुद्धता से बल की परिभाषा प्रतिपादित करने वाले प्रथम व्यक्ति थे और उन्होंने तब तक बनी रही संदिग्धताओं का समाधान किया। उदाहरणतः निस्संदेह Newton, Kepler के उस नियम से प्रभावित थे जो *संकेत करता प्रतीत होता* है कि सूर्य द्वारा ग्रहों पर लगाया गया बल दूरी के साथ घटता है।

गुरुत्व की अपनी खोज (Newton, 1687) द्वारा Newton ने Kepler द्वारा स्थापित आकाशीय सिद्धांतों को Galileo और Descartes के स्थलीय प्रेक्षणों से एकीकृत कर व्यापक सिद्धांत बनाया। यह एकता उनकी इस अनुभूति में स्पष्ट थी कि सेब को गिराने वाला बल वही है जो चंद्रमा की कक्षा के लिए उत्तरदायी है।

Newton ने भार और द्रव्यमान, अथवा जिसे उन्होंने "पदार्थ की मात्रा" कहा, में स्पष्ट भेद किया; यह धारणा Buridan, Kepler और Galileo पहले ही प्रस्तुत कर चुके थे, किंतु Newton से पहले इसे यांत्रिकी की मूल अवधारणा के रूप में कभी सचेत और स्पष्टतः नहीं पहचाना गया था। "बल" पद Newton के *Principia* की Definition III में पहली बार दिखाई देता है:

> '*vis insita*[a] , अथवा पदार्थ का अंतर्जात बल, प्रतिरोध करने की वह शक्ति है जिसके द्वारा प्रत्येक पिंड, जहाँ तक उसमें निहित है, अपनी वर्तमान अवस्था में बना रहता है, चाहे वह विराम की हो अथवा सरल रेखा में एकसमान अग्र गति की।

[20]Newton के लिए Alchemy केवल निम्न धातुओं को स्वर्ण में रूपांतरित करने हेतु पौराणिक "philosopher's stone" बनाने का प्रयास नहीं था। यह भौतिक संसार का अधिक गहन अनुभवजन्य ज्ञान प्राप्त करने और प्रकृति पर अधिकार पाने का माध्यम भी था।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Newton, 1687 *Mathematical principles of natural philosophy*

[a]इसे Leibniz के *vis viva* ("जीवंत बल"), जो mv^2 के समानुपाती है (बाद में नियत गुणक तक गतिज ऊर्जा), से भ्रमित न करें। Newton का *vis insita* जड़त्व है: अवस्था-परिवर्तनों का प्रतिरोध करने की अंतर्निहित शक्ति।

यहाँ पदार्थ की जड़ प्रकृति की संकल्पना निष्क्रियता के बल के रूप में की गई है। Newton के मत में जड़त्व है

... पदार्थ में अंतर्निहित (*insita*) और तब तक अप्रकट रहने वाला कोई बल जब तक पिंड पर अंकित कोई अन्य बल "उसकी अवस्था बदलने का प्रयास" न करे... जहाँ तक पिंड अपनी वर्तमान अवस्था बनाए रखने के लिए अंकित बल का विरोध करता है, यह प्रतिरोध है; जहाँ तक पिंड किसी अन्य के अंकित बल के सम्मुख सरलता से न झुककर उस दूसरे की अवस्था बदलने का प्रयास करता है, यह आवेग है।

Newton, 1687 *Mathematical principles of natural philosophy*

स्पष्टतः इस परिभाषा में बल की संकल्पना (अभी तक) गति अथवा त्वरण के कारण के रूप में नहीं की गई है। किंतु बाद में Definition IV में उन्होंने *impressed force* को परिभाषित किया

अंकित बल किसी पिंड की अवस्था—चाहे विराम की हो अथवा सरल रेखा में एकसमान गति की—बदलने के लिए उस पर लगाई गई क्रिया है।

Newton, 1687 *Mathematical principles of natural philosophy*

आवेगी बलों की क्रिया से सतत बलों की क्रिया की ओर Newton का संक्रमण *Principia* की प्रथम प्रतिज्ञप्ति में होता है। Newton ने गुरुत्व खोजा होगा, किंतु उन्हें यह ज्ञात नहीं था कि वह कार्य कैसे करता है। उन्होंने माना कि वह तात्कालिक रूप से कार्य करता है। इसके लिए Einstein की प्रतीक्षा करनी पड़ी, जिन्होंने space और time को वक्र ताने-बाने में परस्पर गुँथा देखा; पदार्थ इस space को विकृत करता है और इसी space-time का विकृत अथवा वक्र होना वह प्रभाव उत्पन्न करता है जिसे हम गुरुत्व अनुभव करते हैं। यही *general relativity theory* का सार है[21] Newton ने बलों के समांतर चतुर्भुज के नियम को भी पूर्णतः गतिकीय विचारणाओं द्वारा संबोधित किया (Dugas, 1988):

Corrolary I (द्वितीय नियम का)... दो संयुक्त बलों द्वारा कोई पिंड समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उतने ही समय में निरूपित करेगा जितने समय में उन बलों द्वारा पृथक रूप से उसकी भुजाएँ निरूपित करता। यदि किसी दिए गए समय में

स्थान A पर पृथक रूप से अंकित बल M द्वारा कोई पिंड एकसमान गति से A से B तक ले जाया जाए; और उसी स्थान पर पृथक रूप से अंकित बल N द्वारा A से C तक ले जाया जाए; तो समांतर चतुर्भुज $ABCD$ पूरा करें, और दोनों बलों के साथ कार्य करने पर वह उतने ही समय में विकर्ण के अनुदिश A से D तक ले जाया जाएगा। क्योंकि बल N, रेखा AC की दिशा में और BD के समांतर कार्य करता है, इसलिए यह बल (द्वितीय नियम के अनुसार) दूसरे बल M द्वारा उत्पन्न वेग को बिल्कुल परिवर्तित नहीं करेगा, जिसके द्वारा पिंड रेखा BD की ओर ले जाया जाता है। अतः पिंड रेखा BD पर समान समय में पहुँचेगा, चाहे बल N अंकित हो अथवा न हो; और उस समय के अंत में वह रेखा

[21]Special relativity वह सिद्धांत है जिसने $e = mc^2$ दिया और जड़त्वीय संदर्भ-तंत्र (कोई त्वरण नहीं) मानता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> *BD* में कहीं पाया जाएगा। उसी तर्क से समान समय के अंत में वह रेखा CD में कहीं पाया जाएगा। अतः वह उस बिंदु *D* पर पाया जाएगा जहाँ दोनों रेखाएँ मिलती हैं। किंतु Law I के अनुसार वह सरल रेखा में *A* से *D* तक गतिमान होगा।
>
> Newton, 1687 *Mathematical principles of natural philosophy*, Book I, Cor. I to Law II

यहाँ Newton किसी दिए गए बल के परिणामस्वरूप एकसमान गति की स्पष्ट बात करते हैं, जबकि गति का परिवर्तन, अर्थात् द्रव्यमान गुणा त्वरण, गति के द्वितीय नियम के अनुसार अंकित बल के समानुपाती है। इन दो प्रत्यक्षतः विरोधाभासी विचारों का Newton के मन में केवल एक शर्त के अधीन सामंजस्य हो सकता था: Newton ने बल की त्वरणकारी क्रिया की संकल्पना क्रमिक क्रियाओं की ऐसी शृंखला के रूप में की जो गतिमान वस्तु को वेग की क्रमिक वृद्धियाँ प्रदान करती है (Jammer, 1957)।

14.5.12 Bernoulli, Daniel (1700-1782)

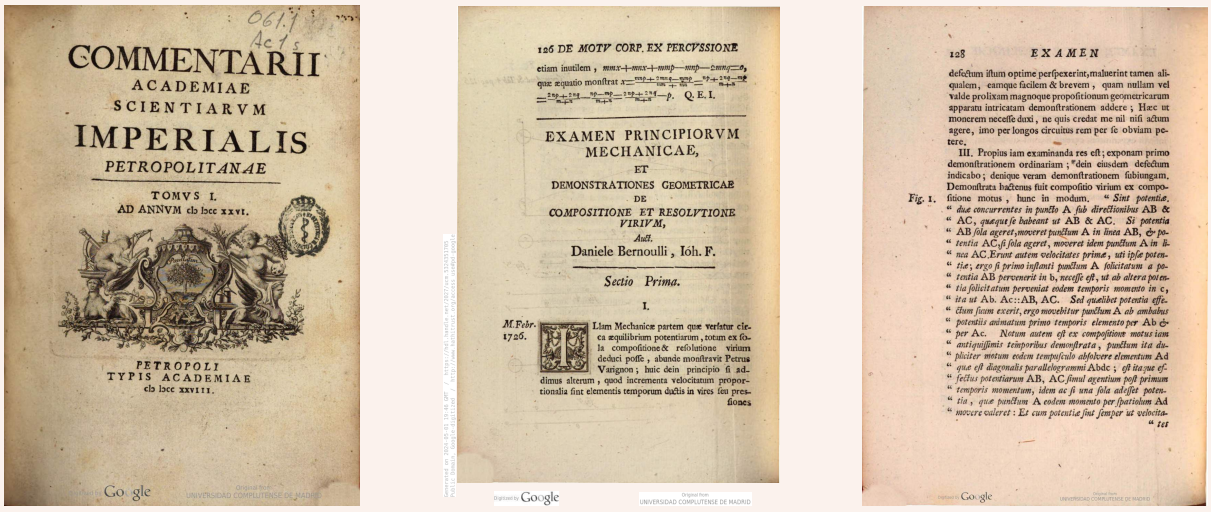
अपने अन्य कार्यों की प्रसिद्धि से आच्छादित Daniel Bernoulli ने बलों के समांतर चतुर्भुज से संबंधित सिद्धांतों पर भी कार्य किया। F

स्थैतिक व्याख्या के आरंभिक समर्थकों ने प्रायः कहा कि बलों का समांतर चतुर्भुज Newton के द्वितीय नियम पर निर्भर नहीं करता। उनका तर्क था कि बल और गति के बीच संबंध Newton के द्वितीय नियम द्वारा वर्णित संबंध से भिन्न होने पर भी बल समांतर चतुर्भुज के प्रतिरूप में ही संयोजित होंगे।

इस संदर्भ में Bernoulli, Daniel, 1726 ने बलों के समांतर चतुर्भुज की स्थैतिक व्याख्या देने का अग्रणी प्रयास किया। इसे प्रेरित करने के लिए उन्होंने सुझाव दिया कि Newton के द्वितीय नियम के अनेक विकल्प सत्य हो सकते थे, किंतु नहीं थे। इन "counterfactual" विकल्पों में परिणामी बल का परिणामी त्वरण के वर्गमूल, घनमूल अथवा वर्ग के समानुपाती होना सम्मिलित है। किंतु उनका कहना था कि इन counterfactual संभावनाओं में से कोई भी सत्य होती, तब भी बलों का समांतर चतुर्भुज मान्य रहता।

> बिंदु A पर दिशाओं AB & AC में दो संगामी बल हों, जो AB & AC के समानुपाती हैं। यदि बल AB अकेले कार्य करे तो वह बिंदु A को रेखा AB के अनुदिश गतिमान करेगा, और यदि बल AC अकेले कार्य करे तो वही बिंदु A को रेखा AC के अनुदिश गतिमान करेगा। किंतु आरंभिक वेग स्वयं बलों के समानुपाती होंगे; अतः यदि प्रथम क्षण में बल AB द्वारा प्रेरित बिंदु A, o तक पहुँचता है, तो आवश्यक है कि दूसरे बल द्वारा प्रेरित होकर वह उसी क्षण c तक पहुँचे, जिससे Ab. Ac::AB, AC। किंतु प्रत्येक बल अपना प्रभाव उत्पन्न करता है, इसलिए दोनों बलों से प्रेरित बिंदु A समय के प्रथम क्षण में Ab & Ac के अनुदिश गतिमान होगा। गति के संयोजन से, जिसका प्रदर्शन अत्यंत प्राचीन काल से ज्ञात है, विदित है कि इसी लघु क्षण में इस प्रकार द्विगुणित गति करने वाला बिंदु तत्तुव Ad पूरा करेगा, जो समांतर चतुर्भुज Abdc का विकर्ण है; अतः समय के प्रथम क्षण के बाद साथ कार्यरत बलों AB, AC का प्रभाव वही है मानो कोई एकल बल उपस्थित हो जो बिंदु A को उसी क्षण स्थान Ad के अनुदिश गतिमान कर सके: और चूँकि बल सदैव वेगों के समानुपाती हैं...
>
> Bernoulli, Daniel, 1726 *"1726. em Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1, 126-142"*

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 14.16: बलों के समांतर चतुर्भुज पर Bernoulli (Bernoulli, Daniel, 1726)

14.5.13 Johann Bernoulli का 1715 का पत्र

V

अपने आधुनिक विश्लेषणात्मक रूप में आभासी वेगों का सिद्धांत पहली बार Johann Bernoulli (1667–1748) द्वारा Pierre Varignon (1654–1722) को 26 February 1715 दिनांकित पत्र में प्रकट हुआ।[22] Varignon की मरणोपरांत *Nouvelle Mécanique ou Statique* (Varignon, 1725) में संरक्षित यह पत्र यांत्रिकी के इतिहास में निर्णायक मोड़ है—यह उस सिद्धांत का प्रथम स्पष्ट, सामान्य कथन है जो विश्लेषणात्मक स्थैतिकी की नींव बना।

Varignon, Volume 2 के Section IX के आरंभ में Bernoulli का योगदान प्रस्तुत करते हैं:

> Dans une Lettre écrite de Bâle le 26. Janvier 1717, M. (Jean) Bernoulli, après y avoir défini ce qu'il entendoit par le mot d'*Energie*, de la maniere qu'on le va voir dans la définition suivante, m'annonça qu'*en tout équilibre de forces quelconques, en quelque maniere qu'elles soient appliquées les unes sur les autres, ou médiatement ou immédiatement, la somme des Energies affirmatives sera égale à la somme des Energies negatives, prises affirmativement.*
>
> Basel से 26 January 1717 को लिखे पत्र में M. (Jean) Bernoulli ने, निम्नलिखित परिभाषा में दिखाई गई रीति से *Energy* शब्द से अपना आशय परिभाषित करने के बाद, मुझे सूचित किया कि *किसी भी प्रकार के बलों के प्रत्येक साम्य में, चाहे वे परस्पर जिस किसी रीति से, मध्यस्थ अथवा प्रत्यक्ष रूप से, लगाए गए हों, धनात्मक Energies का योग ऋणात्मक Energies के धनात्मक रूप में लिए गए योग के समान होगा।*
>
> Varignon in Bernoulli, Johann, 1725 *"Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717"*

(ध्यान दें कि Varignon के प्रकाशित पाठ में दिया दिनांक ऊपर चर्चित मुद्रण-त्रुटि रखता है।)

[22] साहित्य में दिनांक सामान्यतः "26 January 1717" दिया जाता है; यह Varignon की मरणोपरांत *Nouvelle Mécanique* (1725) की मुद्रण-त्रुटि का अनुसरण करता है। आधुनिक विद्वत्ता द्वारा स्थापित सही दिनांक 26 February 1715 है; *Complete Dictionary of Scientific Biography*, s.v. "Bernoulli, Johann" देखें।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Varignon की प्रतिक्रिया इस सिद्धांत को उनके द्वारा दिए गए महत्त्व को प्रकट करती है:

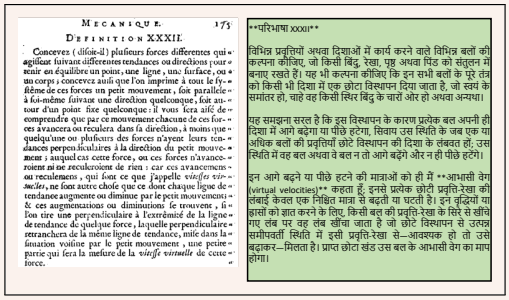
> Cette proposition me parut si generale & si belle, que, voyant que je la pouvois aisément déduire de la Théorie précédente, je lui demandai la permission qu'il m'accorda, de l'ajouter ici avec la démonstration que cette Théorie m'en fournissoit, & qu'il ne m'envoyoit pas.
>
> यह प्रतिज्ञप्ति मुझे इतनी सामान्य और सुंदर प्रतीत हुई कि जब मैंने देखा कि मैं इसे पूर्ववर्ती Theory से सरलता से व्युत्पन्न कर सकता हूँ, तब मैंने यहाँ उस प्रदर्शन के साथ इसे जोड़ने की उनकी अनुमति माँगी—जो उन्होंने दे दी—जिसे इस Theory ने मुझे प्रदान किया और जिसे उन्होंने मुझे नहीं भेजा था।
>
> Varignon in Bernoulli, Johann, 1725 *"Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717"*

इसके बाद Bernoulli के अपने शब्दों में प्रमुख परिभाषा आती है, चित्र 14.17:

> **DEFINITION XXXII** Concevez (disoit-il) plusieurs forces differentes qui agissent suivant differentes tendances ou directions pour tenir en equilibre un point, une ligne, une surface, ou un corps; concevez aussi que l'on imprime a tout le systeme de ces forces un petit mouvement, soit parallele a soi-meme suivant une direction quelconque, soit autour d'un point fixe quelconque: il vous sera aise de comprendre que par ce mouvement chacune de ces forces avancera ou reculera dans sa direction, a moins que quelqu'une ou plusieurs des forces n'ayent leurs tendances perpendiculaires a la direction du petit mouvement; auquel cas cette force, ou ces forces n'avanceroient ni ne reculeroient de rien: car ces avancements ou reculements, qui sont ce que j'appelle vitesses virtuelles, ne font autre chose que ce dont chaque ligne de tendance augmente ou diminue par le petit mouvement; & ces augmentations ou diminutions se trouvent, si l'on tire une perpendiculaire a l'extremite de la ligne de tendance de quelque force, laquelle perpendiculaire retranchera de la meme ligne de tendance, mise dans la situation voisine par le petit mouvement, une petite partie qui sera la mesure de la vitesse virtuelle de cette force.
>
> **DEFINITION XXXII** ऐसे अनेक भिन्न बलों की संकल्पना करें (उन्होंने कहा) जो किसी बिंदु, रेखा, पृष्ठ अथवा पिंड को साम्य में रखने के लिए भिन्न प्रवृत्तियों अथवा दिशाओं में कार्य करते हैं; यह भी मानें कि इन बलों के संपूर्ण निकाय को कोई लघु गति प्रदान की जाती है, चाहे किसी दिशा में स्वयं के समांतर स्थानांतरण हो अथवा किसी नियत बिंदु के परितः घूर्णन। सरलता से समझा जा सकता है कि इस गति द्वारा प्रत्येक बल अपनी दिशा में आगे बढ़ेगा अथवा पीछे हटेगा, जब तक एक अथवा अनेक बलों की प्रवृत्तियाँ लघु गति की दिशा के लंबवत न हों; उस प्रकरण में वह बल अथवा वे बल तनिक भी आगे अथवा पीछे नहीं जाएँगे। क्योंकि ये अग्र अथवा पश्च गतियाँ—जिन्हें मैं आभासी वेग कहता हूँ—उस मात्रा के अतिरिक्त कुछ नहीं हैं जिससे प्रवृत्ति की प्रत्येक रेखा लघु गति के अधीन बढ़ती अथवा घटती है; और ये वृद्धियाँ अथवा हानियाँ किसी बल की प्रवृत्ति-रेखा के अंत पर लंब खींचकर ज्ञात होती हैं, जो लघु गति द्वारा निकटवर्ती स्थिति में रखी उसी प्रवृत्ति-रेखा से एक लघु भाग काटेगा और वही इस बल के आभासी वेग का माप होगा।
>
> Bernoulli, Johann, 1725 *"Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717"*

Bernoulli के सूत्रीकरण की अनेक विशेषताएँ बल देने योग्य हैं:

- सिद्धांत *किसी भी* निकाय—बिंदु, रेखा, पृष्ठ अथवा पिंड—पर लागू होता है, जिसे बलों के *किसी भी* विन्यास द्वारा साम्य में रखा गया हो, चाहे वे प्रत्यक्षतः अथवा मध्यवर्ती तंत्रों द्वारा लगाए गए हों।
- निकाय को प्रदान की गई "लघु गति" पूर्णतः स्वेच्छ है: वह किसी दिशा में स्थानांतरण अथवा



MECANIQUE. 175

DEFINITION XXXII.

Conceves (diſoit-il) pluſieurs forces differentes qui agiſſent ſuivant differentes tendances ou directions pour tenir en équilibre un point, une ligne, une ſurface, ou un corps ; conceves auſſi que l'on imprime à tous le ſyſtême de ces forces un petit mouvement, ſoit parallele à ſoi-même ſuivant une direction quelconque, ſoit autour d'un point fixe quelconque : il vous ſera aiſé de comprendre que par ce mouvement chacune de ces forces avancera ou reculera dans ſa direction, à moins que quelqu'une ou pluſieurs des forces n'ayent leurs tendances perpendiculaires à la direction du petit mouvement ; auquel cas cette force, ou ces forces n'avanceroient ni ne reculeroient de rien : car ces avancemens ou reculemens, qui ſont ce que j'appelle *viteſſes virtuelles*, ne ſont autre choſe que ce dont chaque ligne de tendance augmente ou diminue par le petit mouvement ; & ces augmentations ou diminutions ſe trouvent, ſi l'on tire une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne de tendance de quelque force, laquelle perpendiculaire retranchera de la même ligne de tendance, miſe dans la ſituation voiſine par le petit mouvement, une petite partie qui ſera la meſure de la *viteſſe virtuelle* de cette force.

परिभाषा XXXII

विभिन्न प्रवृत्तियों अथवा दिशाओं में कार्य करने वाले विभिन्न बलों की कल्पना कीजिए, जो किसी बिंदु, रेखा, पृष्ठ अथवा पिंड को संतुलन में बनाए रखते हैं। यह भी कल्पना कीजिए कि इन सभी बलों के पूरे तंत्र को किसी भी दिशा में एक छोटा विस्थापन दिया जाता है, जो स्वयं के समांतर हो, चाहे वह किसी स्थिर बिंदु के चारों ओर हो अथवा अन्यथा।

यह समझना सरल है कि इस विस्थापन के कारण प्रत्येक बल अपनी ही दिशा में आगे बढ़ेगा या पीछे हटेगा, सिवाय उस स्थिति के जब एक या अधिक बलों की प्रवृत्तियाँ छोटे विस्थापन की दिशा के लंबवत हों; उस स्थिति में वह बल अथवा वे बल न तो आगे बढ़ेंगे और न ही पीछे हटेंगे।

इन आगे बढ़ने या पीछे हटने की मात्राओं को ही मैं **आभासी वेग (virtual velocities)** कहता हूँ; इनसे प्रत्येक छोटी प्रवृत्ति-रेखा की लंबाई केवल एक निश्चित मात्रा से बढ़ती या घटती है। इन वृद्धियों या ह्रासों को ज्ञात करने के लिए, किसी बल की प्रवृत्ति-रेखा के सिरे से खींचे गए लंब पर वह लंब खींचा जाता है जो छोटे विस्थापन से उत्पन्न समीपवर्ती स्थिति में इसी प्रवृत्ति-रेखा से—आवश्यक हो तो उसे बढ़ाकर—मिलता है। प्राप्त छोटा खंड उस बल के आभासी वेग का माप होगा।

चित्र 14.17: Johann Bernoulli के ज्यामितीय वेग, (Bernoulli, Johann, 1725 PDF)

किसी नियत बिंदु के परितः घूर्णन हो सकती है। ठीक यही स्वेच्छता सिद्धांत को उसकी शक्ति देती है।

- "आभासी वेग" ज्यामितीय राशियाँ हैं—संबंधित बलों की क्रिया-रेखाओं पर लघु विस्थापनों के प्रक्षेप—शुद्धगतिक अर्थ में वास्तविक वेग नहीं।

Bernoulli की "Energy" वह है जिसे अब हम *virtual work* कहते हैं: बल और उसके आभासी वेग का गुणनफल (अर्थात् बल की क्रिया-रेखा के अनुदिश आभासी विस्थापन का घटक)। स्वयं प्रमेय (Théorème XL, p. 176) आधुनिक संकेतन में इस प्रकार कहा जा सकता है:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad \text{(साम्य के लिए)}$$

यह सूत्रीकरण pseudo-Aristotelian *Mechanica* की सहज अंतर्दृष्टियों से आरंभ होकर Jordanus के *gravitas secundum situm*, Stevin के *clootcrans*, Galileo के "Golden Rule" और Descartes के संरक्षण-सिद्धांत से होते हुए Bernoulli के पूर्णतः सामान्य विश्लेषणात्मक कथन तक लगभग दो सहस्राब्दियों के विकास की परिणति का प्रतिनिधित्व करता है। Lagrange की *Mécanique Analytique* (1788) द्वारा सिद्धांत को यांत्रिकी में अपना निश्चित स्थान मिला, जहाँ वह विश्लेषणात्मक यांत्रिकी के संपूर्ण भवन की नींव है।

14.5.14 Varignon (1654–1722)

F

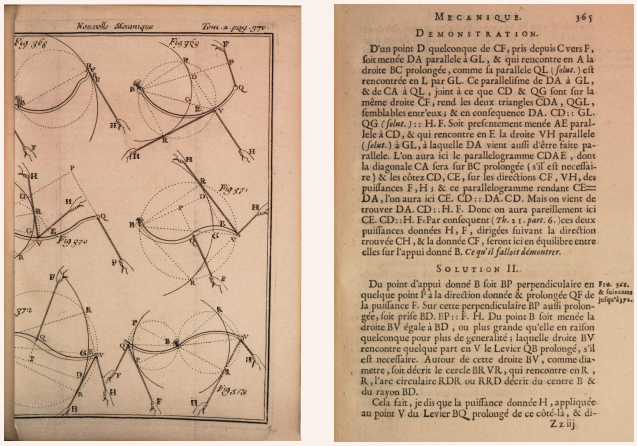
1687 में, *Principia* के प्रकाशन-वर्ष में, Varignon ने *Nouvelle Mécanique ou Statique* (Varignon, 1725 PDF) प्रकाशित की, जिसमें अधिकतर Aristotelian दृष्टिकोण से निष्कर्षित बलों के समांतर चतुर्भुज का सिद्धांत उन समस्याओं के एक वर्ग के समाधान पर लागू किया गया जिसे Newton ने नहीं छुआ था।

> **Lemma III:** यदि भारहीन बिंदु A को दो बलों [*puissances*] E और F द्वारा रेखाओं AC और AB [Fig. 221 में] के अनुदिश एकसमान रूप से और एक ही समय में धकेला जाए, जो परस्पर कोई कोण CAB बनाती हैं, और बल E की

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

क्रिया का बल F की क्रिया से वही अनुपात हो जो AC का AB से है, [तब] यह बिंदु A विकर्ण AD का अनुसरण करेगा, जो इन दोनों रेखाओं द्वारा निर्मित समांतर चतुर्भुज BC का है।

Varignon, 1725 *Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII*



MECANIQUE. 365

DEMONSTRATION.

D'un point D quelconque de CF, pris depuis C vers F, soit menée DA parallele à GL, & qui rencontre en A la droite BC prolongée, comme fa parallele QL (*folut.*) eſt rencontrée en L par GL. Ce parallelifme de DA à GL, & de CA à QL, joint à ce que CD & QG ſont ſur la même droite CF, rend les deux triangles CDA, QGL, ſemblables entr'eux, & en conſequence DA. CD :: GL. QG (*folut.*) :: H. F. Soit preſentement menée AE parallele à CD, & qui rencontre en E la droite VH parallele (*folut.*) à GL, à laquelle DA vient auſſi d'être faite parallele. L'on aura ici le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA fera ſur BC prolongée (s'il eſt neceſſaire) & les côtez CD, CE, ſur les directions CF, VH, des puiſſances F, H; & ce parallelogramme rendant CE = DA, l'on aura ici CE. CD :: DA. CD. Mais on vient de trouver DA. CD :: H. F. Donc on aura pareillement ici CE. CD :: H. F. Par conſequent (*Th.* 11. *part.* 6.) ces deux puiſſances données H, F, dirigées ſuivant la direction trouvée CH, & la donnée CF, ſeront ici en équilibre entre elles ſur l'appui donné B, *Ce qu'il falloit démontrer.*

SOLUTION II.

Du point d'appui donné B ſoit BP perpendiculaire en quelque point P à la direction donnée & prolongée QF de la puiſſance F. Sur cette perpendiculaire BP auſſi prolongée, ſoit priſe BD. BP :: F. H. Du point B ſoit menée la droite BV égale à BD, ou plus grande qu'elle en raiſon quelconque pour plus de generalité; laquelle droite BV rencontre quelque part en V le Levier QB prolongé, s'il eſt neceſſaire. Autour de cette droite BV, comme diametre, ſoit décrit le cercle BKVR, qui rencontre en K, R, l'arc circulaire RDK ou RKD décrit du centre B & du rayon BD.

Cela fait, je dis que la puiſſance donnée H, appliquée au point V du Levier BQ prolongé de ce côté-là, & di-

Z z ij.

चित्र 14.18: Varignon, 1725 द्वारा साम्य की अवधारणाएँ

चूँकि यहाँ हम बलों के समांतर चतुर्भुज को संबोधित कर रहे हैं, प्रसिद्ध Varignon प्रमेय का भी प्रसंगवश उल्लेख करना चाहिए:

किसी बिंदु के परितः अनेक संगामी बलों के आघूर्णों का योग उन बलों के परिणामी के आघूर्ण के समान होता है; अथवा वैकल्पिक रूप से, किसी बिंदु के परितः किसी बल का आघूर्ण उसके घटकों के आघूर्णों के योग के समान होता है।

Varignon, 1725 *Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII*

14.5.15 D'Alembert (1717–1783)

Jean le Rond d'Alembert की *Traité de Dynamique* (1743) (d'Alembert, 1743) ने आभासी वेगों के सिद्धांत को स्थैतिकी से गतिकी तक विस्तारित किया और इस प्रक्रिया में यांत्रिकी के विज्ञान को एकीकृत किया। F/V

D'Alembert का दार्शनिक दृष्टिकोण विशिष्ट था। उन्होंने यांत्रिकी से अस्पष्ट धारणाएँ हटाने का प्रयास किया:

J'ai, pour ainsi dire, détourné les yeux des causes motrices, pour n'envisager uniquement que le mouvement qu'elles produisent; j'ai entièrement proscrit les forces inhérentes au corps en mouvement, êtres obscurs & Métaphysiques, qui ne sont capables que de répandre les ténèbres sur une Science claire par elle-même.

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> कह सकते हैं कि मैंने प्रेरक कारणों से दृष्टि हटाकर केवल उनके द्वारा उत्पन्न गति पर विचार किया है; मैंने गतिमान पिंडों में अंतर्निहित बलों—अस्पष्ट और तत्त्वमीमांसात्मक सत्ताओं—को पूर्णतः निषिद्ध किया है, जो स्वयं में स्पष्ट विज्ञान पर केवल अंधकार डाल सकती हैं।
>
> d'Alembert, 1743 *Traite de dynamique*

इसने उन्हें उस *vis viva* विवाद के मध्य ला खड़ा किया जिसने Leibniz के समय से Continental यांत्रिकीविदों को विभाजित किया था।

> Cette question ... consiste à savoir, si la force des Corps en Mouvement est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse, ou au produit de la masse par le quarré de la vitesse ... Malgré les disputes que cette question a causées, l'inutilité parfaite dont elle est pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui.
>
> यह प्रश्न पूछता है कि क्या गतिमान पिंडों का बल द्रव्यमान गुणा चाल के समानुपाती है अथवा द्रव्यमान गुणा चाल के वर्ग के ... इसके कारण उत्पन्न विवादों के बावजूद यांत्रिकी के लिए इसकी पूर्ण अनुपयोगिता ने मुझे आज प्रकाशित कार्य में इसका कोई उल्लेख न करने को प्रेरित किया।
>
> d'Alembert, 1743 *Traite de dynamique*

गतिकी को साम्य की समस्या के रूप में पुनः सूत्रबद्ध करके d'Alembert ने बल के "वास्तविक माप" के विवादों को टाल दिया।

उनकी प्रमुख अंतर्दृष्टि भ्रामक रूप से सरल थी। Newton का द्वितीय नियम, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

यह अनुप्रयुक्त बल $\mathbf{F}$ और d'Alembert द्वारा कहे गए "जड़त्व-बल," $-m\mathbf{a}$, के बीच साम्य का कथन है। त्वरित पिंड को इस प्रकार माना जा सकता है मानो वह अंकित और जड़त्वीय बलों की संयुक्त क्रिया के अधीन स्थैतिक साम्य में हो, चित्र 14.19।

ध्यान दें कि इस पाठ में d'Alembert द्वारा संदर्भित "अपनी बुद्धि और विद्वत्ता से विशिष्ट महिला" Emilie du Châtelet (1706–1749) हैं, जिनके लेखन—विशेषतः उनकी *Institutions de physique* (1740) और vis viva विवाद में उनके हस्तक्षेप—ने विवाद को व्यापक जनसमुदाय तक पहुँचाने में सहायता की।

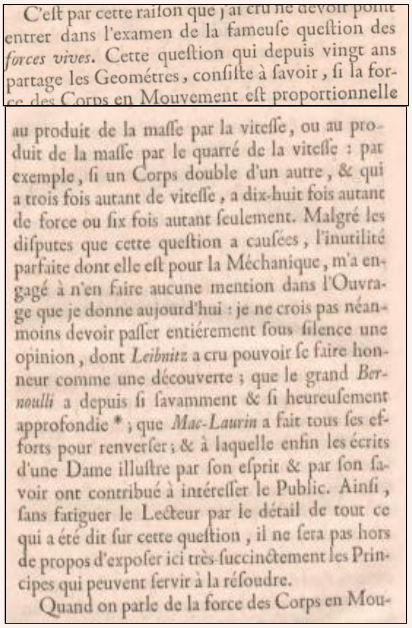
तब आभासी वेगों का सिद्धांत प्रत्यक्षतः लागू होता है। कणों के निकाय के लिए d'Alembert का सिद्धांत कहता है:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

जहाँ $\delta\mathbf{r}_i$ अवरोधों के अनुरूप आभासी विस्थापन हैं।

यह स्थैतिकी में अपचित गतिकी है। जड़त्वीय पदों को बल मानकर d'Alembert ने यांत्रिकी को एकीकृत किया और आभासी कार्य की असाधारण व्यापकता प्रदर्शित की। गतिकी की प्रत्येक समस्या, चाहे पिंडों और अवरोधों का निकाय कितना भी जटिल हो, अब उसी परिवर्तनात्मक संरचना द्वारा निरूपित की जा

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



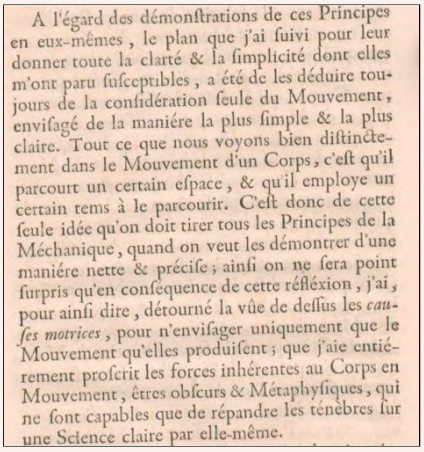
C'eſt par cette raiſon que j'ai cru ne devoir point entrer dans l'examen de la fameuſe queſtion des *forces vives*. Cette queſtion qui depuis vingt ans partage les Geométres, conſiſte à ſavoir, ſi la force des Corps en Mouvement eſt proportionnelle au produit de la maſſe par la viteſſe, ou au produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe : par exemple, ſi un Corps double d'un autre, & qui a trois fois autant de viteſſe, a dix-huit fois autant de force ou ſix fois autant ſeulement. Malgré les diſputes que cette queſtion a cauſées, l'inutilité parfaite dont elle eſt pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui : je ne crois pas néanmoins devoir paſſer entiérement ſous ſilence une opinion, dont *Leibnitz* a cru pouvoir ſe faire honneur comme une découverte ; que le grand *Bernoulli* a depuis ſi ſavamment & ſi heureuſement approfondie * ; que *Mac-Laurin* a fait tous ſes efforts pour renverſer ; & à laquelle enfin les écrits d'une Dame illuſtre par ſon eſprit & par ſon ſavoir ont contribué à intéreſſer le Public. Ainſi, ſans fatiguer le Lecteur par le détail de tout ce qui a été dit ſur cette queſtion, il ne ſera pas hors de propos d'expoſer ici très-ſuccinctement les Principes qui peuvent ſervir à la réſoudre.

Quand on parle de la force des Corps en Mou-

इसी कारण मैंने प्रसिद्ध Vis viva (जीवित बल) प्रश्न की जाँच में बिल्कुल प्रवेश नहीं करना चाहा। यह प्रश्न, जिसने बीस वर्षों से ज्यामितिविदों को विभाजित कर रखा है, इसमें यह निर्धारित करना है कि गतिमान पिंडों का बल द्रव्यमान और वेग के गुणनफल के समानुपाती है, अथवा द्रव्यमान और वेग के वर्ग के गुणनफल के; उदाहरणार्थ, क्या दूसरे पिंड से दुगुने द्रव्यमान वाला और तीन गुना वेग वाला पिंड अठारह गुना बल रखता है, या केवल छह गुना। इस प्रश्न से उत्पन्न विवादों के बावजूद, यांत्रिकी (Mechanics) के लिए इसकी पूर्ण निरुपयोगिता ने मुझे आज प्रस्तुत किए जा रहे इस ग्रंथ में इसका कोई भी उल्लेख न करने के लिए प्रेरित किया है। फिर भी, मैं नहीं मानता कि मुझे उस मत को पूर्णतः मौन में छोड़ देना चाहिए, जिसे Leibniz ने खोज के रूप में अपने नाम का गौरव पाने योग्य समझा; जिसकी महान Bernoulli ने बाद में अत्यंत विद्वत्तापूर्वक और सफलतापूर्वक गहन जाँच की; जिसे Mac-Laurin ने उलटने का हर संभव प्रयास किया; और जिसकी ओर, अंततः, अपनी बुद्धि और विद्वत्ता से विशिष्ट एक प्रतिष्ठित महिला के लेखन ने जनता का ध्यान आकर्षित किया। अतः, इस प्रश्न पर कही गई सभी बातों के विवरण से पाठक को थकाए बिना, यहाँ अत्यंत संक्षेप में उन सिद्धांतों को प्रस्तुत करना अनुचित न होगा जो इसके समाधान में सहायक हो सकते हैं।

चित्र 14.19: vis viva विवाद पर D'Alembert: ऐसा विवाद जिसे वे अनुपयोगी मानते हैं, किंतु संक्षेप में संबोधित करते हैं (d'Alembert, 1743 PDF)

सकती थी जिसे Bernoulli ने स्थैतिकी के लिए स्थापित किया था। इस प्रकार उन्होंने कठोर व्युत्पत्ति के लिए यांत्रिकी के सभी सिद्धांतों को प्रमुख भूमिका दी, चित्र 14.20।



A l'égard des démonſtrations de ces Principes en eux-mêmes, le plan que j'ai ſuivi pour leur donner toute la clarté & la ſimplicité dont elles m'ont paru ſuſceptibles, a été de les déduire toujours de la conſidération ſeule du Mouvement, enviſagé de la maniére la plus ſimple & la plus claire. Tout ce que nous voyons bien diſtinctement dans le Mouvement d'un Corps, c'eſt qu'il parcourt un certain eſpace, & qu'il employe un certain tems à le parcourir. C'eſt donc de cette ſeule idée qu'on doit tirer tous les Principes de la Méchanique, quand on veut les démontrer d'une maniére nette & préciſe ; ainſi on ne ſera point ſurpris qu'en conſéquence de cette réfléxion, j'ai, pour ainſi dire, détourné la vûe de deſſus les *cauſes motrices*, pour n'enviſager uniquement que le Mouvement qu'elles produiſent ; que j'aie entiérement proſcrit les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obſcurs & Métaphyſiques, qui ne ſont capables que de répandre les ténébres ſur une Science claire par elle-même.

जहाँ तक इन सिद्धांतों के स्वयं के प्रमाणों का प्रश्न है, उन्हें यथासंभव स्पष्ट और सरल बनाने के लिए मैंने सदैव उन्हें केवल गति (Motion) के विचार से व्युत्पन्न करने की योजना अपनाई, जिसे उसके सबसे सरल और स्पष्ट रूप में देखा गया है। किसी पिंड की गति में हम स्पष्ट रूप से केवल इतना देखते हैं कि वह एक निश्चित दूरी तय करता है और उसे तय करने में एक निश्चित समय लेता है। अतः इसी एकमात्र विचार से यांत्रिकी (Mechanics) के सभी सिद्धांत व्युत्पन्न किए जाने चाहिए, जब उन्हें सुव्यवस्थित और सटीक रूप से सिद्ध करना हो; इसलिए यह आश्चर्यजनक नहीं होगा कि इस विचार के परिणामस्वरूप मैंने, मानो, गति उत्पन्न करने वाले कारणों से अपना ध्यान हटाकर केवल उनके द्वारा उत्पन्न गति पर विचार किया है; और गतिमान पिंड में निहित बलों को पूर्णतः त्याग दिया है—वे अस्पष्ट और तत्त्वमीमांसात्मक अवधारणाएँ, जो स्वयं में स्पष्ट विज्ञान पर केवल अंधकार फैलाने में सक्षम हैं।

चित्र 14.20: यांत्रिकी की एकमात्र नींव के रूप में गति पर D'Alembert (d'Alembert, 1743 PDF)

अंततः D'Alembert में उन विवादों के प्रति बहुत कम धैर्य था जो "बल" को छिपे हुए तत्त्वमीमांसात्मक कारण अथवा केवल पारिभाषिक रणभूमि मानते थे। वे स्पष्टतः कहते हैं कि उन्होंने प्रेरक कारणों से "दृष्ट

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हटाकर" केवल उनके द्वारा उत्पन्न गति पर विचार किया और vis viva विवाद को यांत्रिकी के लिए अधिकांशतः अनुपयोगी कहकर खारिज किया—वे गति और गणना पर आधारित स्पष्ट, परिचालनात्मक सिद्धांतों को वरीयता देते थे, चित्र 14.20।

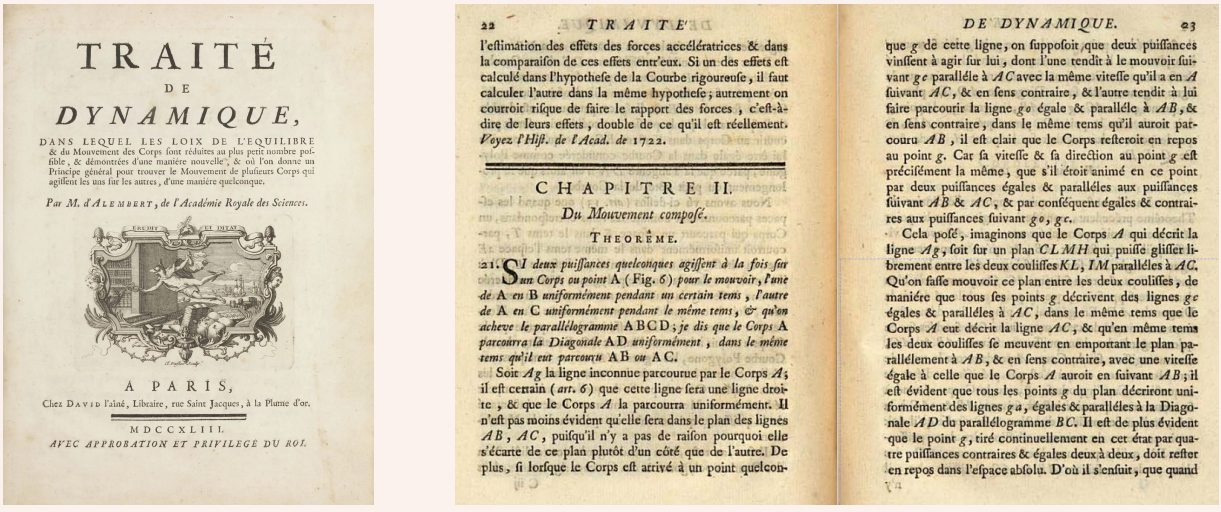
ध्यान देना चाहिए कि d'Alembert ने स्वयं इसे "d'Alembert का सिद्धांत" नहीं कहा; यह नाम बाद में आया। *Traite* में उन्होंने इसे नामित सिद्धांत के रूप में नहीं, बल्कि अवरोधित गति की समस्याएँ हल करने की सामान्य विधि के रूप में प्रस्तुत किया। इसका नामकरण उन परवर्ती पीढ़ियों ने किया जिन्होंने उनकी अंतर्दृष्टि के मूलभूत स्वरूप को पहचाना।

बल और समांतर चतुर्भुज के विषय में

Traité de Dynamique में d'Alembert ने किसी पिंड पर एक साथ कार्यरत बलों के परिणाम का विश्लेषण करने हेतु ज्यामितीय विधि का उपयोग करके बलों के समांतर चतुर्भुज की समस्या संबोधित की। वे उस परिदृश्य का अन्वेषण करते हैं जिसमें दो बल किसी बिंदु पर साथ-साथ कार्य करते हैं और प्रत्येक समान समयावधि में बिंदु को क्रमशः दो पथों, AB और AC, के अनुदिश निर्देशित करता है। ऐसा समांतर चतुर्भुज बनाकर जिसमें AB और AC संलग्न भुजाओं का प्रतिनिधित्व करते हैं, A से विकर्ण दोनों बलों के संयुक्त प्रभाव से उत्पन्न परिणामी पथ का प्रतिनिधित्व करता है:

F

> Theorem 2. यदि दो स्वेच्छ शक्तियाँ किसी पिंड अथवा बिंदु A को गतिमान करने के लिए एक ही समय पर कार्य करें, एक उसे किसी निश्चित समय में एकसमान रूप से A से B तक और दूसरी समान समय में एकसमान रूप से A से C तक ले जाए, और यदि समांतर चतुर्भुज $ABCD$ बनाया जाए; तो मेरा कथन है कि पिंड A विकर्ण AD के अनुदिश उसी समय में एकसमान रूप से गतिमान होगा जिसमें वह AB अथवा AC के अनुदिश गतिमान होता।
>
> d'Alembert, 1743 *Traite de dynamique*


TRAITÉ
DE
DYNAMIQUE,
DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE & du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une manière nouvelle; & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque.
Par M. d'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.
A PARIS,
Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.
M. DCC. XLIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

22 TRAITÉ
l'estimation des effets des forces accélératrices & dans la comparaison de ces effets entr'eux. Si un des effets est calculé dans l'hypothese de la Courbe rigoureuse, il faut calculer l'autre dans la même hypothese; autrement on courroit risque de faire le rapport des forces, c'est-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il est réellement. *Voyez l'Hist. de l'Acad. de 1722.*

CHAPITRE II.
Du Mouvement composé.
THEORÊME.
21. *Si deux puissances quelconques agissent à la fois sur un Corps ou point* A (Fig. 6) *pour le mouvoir, l'une de* A *en* B *uniformément pendant un certain tems, l'autre de* A *en* C *uniformément pendant le même tems, & qu'on acheve le parallélogramme* ABCD; *je dis que le Corps* A *parcourra la Diagonale* AD *uniformément, dans le même tems qu'il eut parcouru* AB *ou* AC.
Soit Ag la ligne inconnue parcourue par le Corps A; il est certain (*art.* 6) que cette ligne sera une ligne droite, & que le Corps A la parcourra uniformément. Il n'est pas moins évident qu'elle sera dans le plan des lignes AB, AC, puisqu'il n'y a pas de raison pourquoi elle s'écarte de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre. De plus, si lorsque le Corps est arrivé à un point quelcon-

DE DYNAMIQUE. 23
que g de cette ligne, on supposoit que deux puissances vinssent à agir sur lui, dont l'une tendît à le mouvoir suivant ge parallèle à AC avec la même vitesse qu'il a en A suivant AC, & en sens contraire, & l'autre tendît à lui faire parcourir la ligne go égale & parallèle à AB, & en sens contraire, dans le même tems qu'il auroit parcouru AB, il est clair que le Corps resteroit en repos au point g. Car sa vitesse & sa direction au point g est précisément la même, que s'il étoit animé en ce point par deux puissances égales & parallèles aux puissances suivant AB & AC, & par conséquent égales & contraires aux puissances suivant go, gc.
Cela posé, imaginons que le Corps A qui décrit la ligne Ag, soit sur un plan $CLMH$ qui puisse glisser librement entre les deux coulisses KL, IM parallèles à AC. Qu'on fasse mouvoir ce plan entre les deux coulisses, de maniére que tous ses points g décrivent des lignes ge égales & parallèles à AC, dans le même tems que le Corps A eut décrit la ligne AC, & qu'en même tems les deux coulisses se meuvent en emportant le plan parallélement à AB, & en sens contraire, avec une vitesse égale à celle que le Corps A auroit en suivant AB; il est évident que tous les points g du plan décriront uniformément des lignes ga, égales & parallèles à la Diagonale AD du parallélogramme BC. Il est de plus évident que le point g, tiré continuellement en cet état par quatre puissances contraires & égales deux à deux, doit rester en repos dans l'espace absolu. D'où il s'ensuit, que quand

चित्र 14.21: बलों के समांतर चतुर्भुज पर D'Alembert (d'Alembert, 1743)

एक परवर्ती कार्य में d'Alembert ने लिखा:

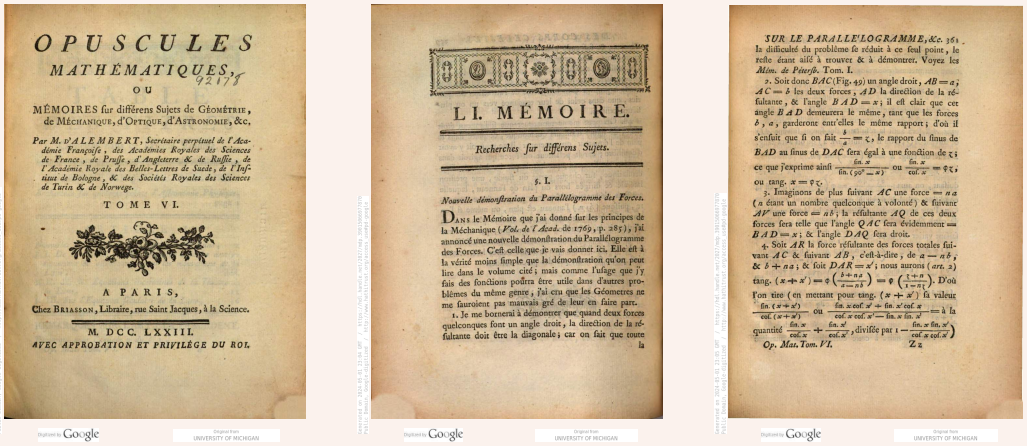
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> **Proposition 1.** परस्पर कोई भी कोण बनाने वाली दो समान शक्तियाँ $\alpha\beta$ और $\alpha\xi$ सदैव विकर्ण $\alpha\delta$ को परिणामी के रूप में उत्पन्न करेंगी।
>
> d'Alembert, 1761 *"Démonstration du principe de la composition des forces"*, p. 177

ध्यान देना चाहिए कि d'Alembert प्रतिज्ञप्ति के कथन और संस्मरण के पाठ, दोनों में "power" शब्द का उपयोग करते हैं, यद्यपि शीर्षक में "force" शब्द आता है; यह उस स्वतंत्रता को दिखाता है जिससे वे दोनों पदों को परस्पर बदलते थे।

D'Alembert इस विषय पर पुनः लौटे। *Nouvelle démonstration du Parallélogramme des Forces* शीर्षक के अंतर्गत, चित्र 14.22, उन्होंने लिखा:

> यांत्रिकी के सिद्धांतों पर प्रस्तुत अपने संस्मरण में मैंने बलों के समांतर चतुर्भुज के एक नए प्रमाण की घोषणा की थी। यही प्रमाण मैं यहाँ दूँगा। वास्तव में यह उद्धृत खंड में पढ़े जा सकने वाले प्रमाण से कम सरल है; किंतु क्योंकि कुछ फलनों का मेरा उपयोग इसी प्रकार की अन्य समस्याएँ हल करने में उपयोगी हो सकता है, मुझे विश्वास है कि इसे साझा करने पर Geometers मुझसे अप्रसन्न नहीं होंगे।
>
> d'Alembert, 1773 *"Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces"*



चित्र 14.22: बलों के समांतर चतुर्भुज पर D'Alembert की अंतिम टिप्पणियाँ (d'Alembert, 1773)

गतिकी और आभासी कार्य तक विस्तार

D'Alembert की प्रेरणा आंशिक रूप से दार्शनिक थी। उन्होंने "बल" को तत्त्वमीमांसात्मक कारण के रूप में समाप्त करने का प्रयास किया, क्योंकि वे इस धारणा को अस्पष्ट मानते थे, और यांत्रिकी को पूर्णतः ज्यामितीय तथा शुद्धगतिक पदों में पुनः सूत्रबद्ध करना चाहा:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> J'ai, pour ainsi dire, détourné la vue de dessus les causes motrices, pour n'en envisager uniquement que le Mouvement qu'elles produisent; j'ai entièrement proscrit les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obscurs & Métaphysiques, qui ne sont capables que de répandre les ténèbres sur une Science claire par elle-même.
>
> कह सकते हैं कि मैंने प्रेरक कारणों से दृष्टि हटाकर केवल उनके द्वारा उत्पन्न गति पर विचार किया है; मैंने गतिमान पिंडों में अंतर्निहित बलों—अस्पष्ट और तत्त्वमीमांसात्मक सत्ताओं—को पूर्णतः निषिद्ध किया है, जो स्वयं में स्पष्ट विज्ञान पर केवल अंधकार डाल सकती हैं।
>
> d'Alembert, 1743 *Traite de dynamique*

इसने उन्हें उस *vis viva*[23] विवाद के मध्य ला खड़ा किया जिसने Leibniz के समय से Continental यांत्रिकीविदों को विभाजित किया था:

> Cette question ... consiste à savoir, si la force des Corps en Mouvement est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse, ou au produit de la masse par le quarré de la vitesse ... Malgré les disputes que cette question a causées, l'inutilité parfaite dont elle est pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui.
>
> यह प्रश्न पूछता है कि क्या गतिमान पिंडों का बल द्रव्यमान गुणा चाल के समानुपाती है अथवा द्रव्यमान गुणा चाल के वर्ग के ... इसके कारण उत्पन्न विवादों के बावजूद यांत्रिकी के लिए इसकी पूर्ण अनुपयोगिता ने मुझे आज प्रकाशित कार्य में इसका कोई उल्लेख न करने को प्रेरित किया।
>
> d'Alembert, 1743 *Traite de dynamique*

गतिकी को साम्य की समस्या के रूप में पुनः सूत्रबद्ध करके d'Alembert ने बल के "वास्तविक माप" के विवादों को टाल दिया।

उनकी प्रमुख अंतर्दृष्टि भ्रामक रूप से सरल थी। Newton का द्वितीय नियम, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

यह अनुप्रयुक्त बल $\mathbf{F}$ और d'Alembert द्वारा कहे गए "जड़त्व-बल," $-m\mathbf{a}$, के बीच साम्य का कथन है। त्वरित पिंड को इस प्रकार माना जा सकता है मानो वह अंकित और जड़त्वीय बलों की संयुक्त क्रिया के अधीन स्थैतिक साम्य में हो।

तब आभासी वेगों का सिद्धांत प्रत्यक्षतः लागू होता है। कणों के निकाय के लिए d'Alembert का सिद्धांत कहता है:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

जहाँ $\delta\mathbf{r}_i$ अवरोधों के अनुरूप आभासी विस्थापन हैं।

यह स्थैतिकी में अपचित गतिकी है। जड़त्वीय पदों को बल मानकर d'Alembert ने यांत्रिकी को एकीकृत किया और आभासी कार्य की असाधारण व्यापकता प्रदर्शित की। गतिकी की प्रत्येक समस्या, चाहे पिंडों

[23] Leibniz के *vis viva* ("जीवंत बल"), जो mv^2 के समानुपाती है (बाद में नियत गुणक तक गतिज ऊर्जा), को Newton के *vis insita* ("अंतर्जात बल"), अर्थात् जड़त्व अथवा अवस्था-परिवर्तन के प्रतिरोध, से भ्रमित नहीं करना चाहिए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और अवरोधों का निकाय कितना भी जटिल हो, अब उसी परिवर्तनात्मक संरचना द्वारा निरूपित की जा सकती थी जिसे Bernoulli ने स्थैतिकी के लिए स्थापित किया था।

ध्यान देना चाहिए कि d'Alembert ने स्वयं इसे "d'Alembert का सिद्धांत" नहीं कहा; यह नाम बाद में आया। *Traité* में उन्होंने इसे नामित सिद्धांत के रूप में नहीं, बल्कि अवरोधित गति की समस्याएँ हल करने की सामान्य विधि के रूप में प्रस्तुत किया। इसका नामकरण उन परवर्ती पीढ़ियों ने किया जिन्होंने उनकी अंतर्दृष्टि के मूलभूत स्वरूप को पहचाना।

14.5.16 Kant (1724–1804)

यह खंड दार्शनिक समापन के साथ समाप्त होगा। F

अपने "Metaphysical Foundations of Natural Science" में Kant, 2023 ने गतियों के संयोजन की चर्चा की, जो बलों के समांतर चतुर्भुज से संबंधित है।

Phoronomy (पिंडों की गतियों के अध्ययन के लिए Kant द्वारा गढ़ा गया पद, जिसमें बलों अथवा स्वयं पिंडों की प्रकृति पर विचार नहीं किया जाता: kinematics) में Kant किसी एक बिंदु की भिन्न गतियों के संयोजन के विचार का अन्वेषण करते हैं ताकि यह समझा जा सके कि वे किस प्रकार एकीकृत होकर परिणामी गति बनाती हैं। उनका दार्शनिक उपागम इन अवधारणाओं को तत्त्वमीमांसात्मक आधार देने का उद्देश्य रखता है और स्पष्ट करता है कि एक ही बिंदु पर भिन्न गतियों को केवल प्रभाव उत्पन्न करने वाले कारणों के स्थान पर एकीकृत समग्र के रूप में कैसे समझा जा सकता है। Kant ने स्वयं कोई विशिष्ट गणितीय नियम विकसित नहीं किया।

> **Proposition** एक ही बिंदु की दो गतियों के संयोजन की संकल्पना केवल इस प्रकार की जा सकती है कि उनमें से एक को निरपेक्ष space में प्रस्तुत किया जाए, किंतु दूसरी के स्थान पर सापेक्ष space की विपरीत दिशा में समान वेग वाली गति को उसके समान माना जाए।
>
> Kant, 2023 *Metaphysical foundations of natural science*

यह स्पष्ट नहीं कि इसका क्या अर्थ है। फिर भी Immanuel Kant भौतिकी को संबोधित करने वाले महान दार्शनिकों में से एक थे।

14.5.17 Lagrange (1736–1813)

V

Joseph-Louis Lagrange की *Mécanique Analytique*, जो पहली बार 1788 में प्रकाशित हुई (Lagrange, 1788), आभासी-कार्य परंपरा की परिणति का प्रतिनिधित्व करती है। इस स्मारकीय ग्रंथ में Lagrange ने आभासी वेगों के सिद्धांत को *समस्त* यांत्रिकी—स्थैतिकी, गतिकी, दृढ़ पिंड, तरल—की नींव तक उन्नत किया और संपूर्ण विषय को पूर्णतः विश्लेषणात्मक रूप दिया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इतिहासकार के रूप में Lagrange

Lagrange उन विचारों के ऐतिहासिक विकास से अत्यंत सजग थे जिन्हें वे व्यवस्थित कर रहे थे। *Mécanique Analytique* एक व्यापक ऐतिहासिक सर्वेक्षण से आरंभ होती है जो प्राचीन काल से उनके अपने समय तक यांत्रिकी के विकास का अनुगमन करता है। वे Archimedes, Stevin, Galileo, Torricelli, Descartes, Wallis, Huygens, Bernoullis और d'Alembert की चर्चा करते हैं और इस विषय का ऐसा ऐतिहासिक विवरण प्रदान करते हैं जो किसी अभ्यासकर्ता द्वारा लिखे गए सर्वश्रेष्ठ विवरणों में आज भी सम्मिलित है। यह ऐतिहासिक चेतना—गणितज्ञों में दुर्लभ—उनके कार्य को ऐसी बौद्धिक वंशावली का बोध देती है जो पाठक को आभासी वेगों के सिद्धांत तक ले जाने वाली खोजों की दीर्घ शृंखला से जोड़ती है।

विश्लेषणात्मक कार्यक्रम

प्रस्तावना में Lagrange ने अपना क्रांतिकारी आशय स्पष्ट किया:

> On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche réguliere et uniforme.
>
> इस कार्य में कोई आरेख नहीं मिलेगा। मेरे द्वारा प्रस्तुत विधियों के लिए न रचनाओं, न ज्यामितीय अथवा यांत्रिक तर्कों, बल्कि केवल नियमित और एकसमान प्रक्रिया के अधीन algebraic संक्रियाओं की आवश्यकता है।
>
> Lagrange, 1788 *Mécanique Analytique*

यह केवल डींग नहीं थी। *Mécanique Analytique* में एक भी आकृति नहीं है—यांत्रिकी के ग्रंथ के लिए उल्लेखनीय उपलब्धि और Lagrange द्वारा विकसित विश्लेषणात्मक विधियों की शक्ति का प्रमाण।

सामान्यीकृत निर्देशांक

Lagrange के सर्वाधिक परिणामी नवाचारों में से एक *generalized coordinates* का प्रस्तुतीकरण था। यांत्रिक निकाय का वर्णन प्रत्येक कण के Cartesian निर्देशांकों—जो अवरोधों के कारण सामान्यतः स्वतंत्र नहीं होते—के पदों में करने के स्थान पर Lagrange ने स्वतंत्र चरों के न्यूनतम समुच्चय $q_1, q_2, \dots, q_n$ द्वारा निकाय को प्राचलीकृत किया, जहाँ n स्वतंत्रता की कोटियों की संख्या है।

यह अमूर्तन क्रांतिकारी था। दोहरा लोलक, लुढकता पहिया, घूमता लट्टू, कंपित डोरी—निर्देशांकों की भौतिक प्रकृति से स्वतंत्र होकर सभी को समान औपचारिकतावाद से निरूपित किया जा सकता था। q_j कोणों, लंबाइयों अथवा समस्या के उपयुक्त किसी अन्य राशि का प्रतिनिधित्व कर सकते थे। इन सामान्यीकृत निर्देशांकों के पदों में व्यक्त आभासी वेगों का सिद्धांत स्वेच्छ जटिलता वाले निकायों पर लागू सार्वत्रिक उपकरण बना।

आभासी वेगों का सिद्धांत

Lagrange का सिद्धांत का सामान्यीकृत कथन है:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> Si un système quelconque de tant de corps ou points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, & qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcoure un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle; la somme des puissances, multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zéro.
>
> यदि पिंडों अथवा बिंदुओं की किसी भी संख्या वाला कोई निकाय, जिसके प्रत्येक पिंड अथवा बिंदु को किन्हीं बलों द्वारा खींचा जाता है, साम्य में हो और यदि इस निकाय को कोई लघु गति दी जाए, जिसके कारण प्रत्येक बिंदु अपने आभासी वेग को व्यक्त करने वाला अतिसूक्ष्म स्थान तय करे; तो बलों में से प्रत्येक और उस स्थान, जिसे उसका अनुप्रयोग-बिंदु उसी बल की दिशा में तय करता है, के गुणनफलों का योग सदैव शून्य होगा।
>
> Lagrange, 1788 *Mécanique Analytique*, Part I, Section I, §1

फिर भी परवर्ती संस्करणों में Lagrange ने सिद्धांत को स्वयंसिद्ध मानने के विषय में आरक्षण व्यक्त किया:

> Quant à la nature du principe des vitesses virtuelles, il faut convenir qu'il n'est pas assez évident par lui-même pour pouvoir être érigé en principe primitif.
>
> आभासी वेगों के सिद्धांत की प्रकृति के संबंध में यह स्वीकार करना चाहिए कि वह आदिम सिद्धांत के रूप में स्थापित होने के लिए अपने आप में पर्याप्त स्पष्ट नहीं है।
>
> Lagrange, 1788 *Mécanique Analytique*, Part I, Section I, §18

द्वितीय संस्करण (1811–1815) में जोड़ा गया यह अवतरण, जिसे Lagrange अपनी मृत्यु के समय संशोधित कर रहे थे, उनके परिपक्व मत को प्रतिबिंबित करता है कि इतने शक्तिशाली सिद्धांत के लिए अधिक सरल नींवों से प्रदर्शन आवश्यक था।

Pulley Blocks द्वारा Lagrange का प्रमाण

Journal de l'École Polytechnique में प्रकाशित शोधपत्र (Lagrange, 1798) में Lagrange ने pulley blocks के साम्य पर आधारित सिद्धांत का चतुर प्रमाण दिया (चित्र 14.23)।

विचार यह कल्पित करना है कि निकाय पर सभी बल एकल अविस्तार्य डोरी से जुड़े घिरनी-निकायों के माध्यम से कार्यरत भारों द्वारा लगाए जाते हैं। यदि निकाय में स्थितियों पर पिंड बलों P, Q, R, S, T, आदि के अधीन हैं, तो ये बल क्रमशः P, Q, R, S, T के समानुपाती यांत्रिक लाभ वाले pulley blocks द्वारा उत्पन्न किए जाते हैं, जो सभी उसी डोरी द्वारा एकल भार से जुड़े हैं।

यदि पिंड ऐसे अतिसूक्ष्म विस्थापन करते हैं जो घिरनी-निकायों की दूरियाँ α, β, γ, δ, ε, ...राशियों से बदलते हैं, तो डोरी का मुक्त सिरा इस राशि से गतिमान होता है:

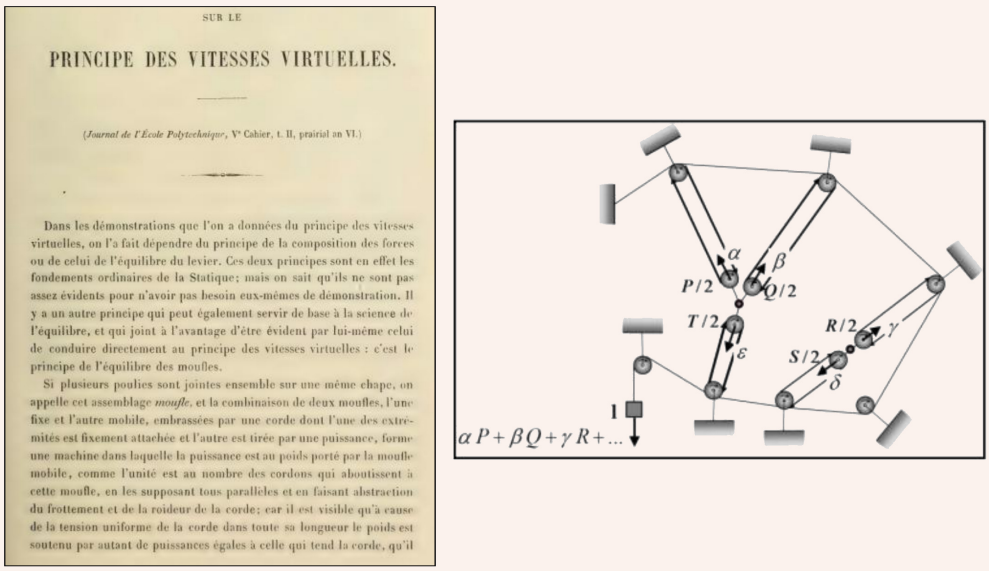
$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + S\delta + T\varepsilon + \cdots$$

साम्य के लिए यह विस्थापन लुप्त होना चाहिए (अन्यथा भार नीचे उतरेगा और साम्य का उल्लंघन करेगा)। अतः:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \cdots = 0$$

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

“जो आभासी वेगों के सामान्य सिद्धांत की ठीक विश्लेषणात्मक अभिव्यक्ति है।”



SUR LE

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

(*Journal de l'École Polytechnique*, V^e^ Cahier, t. II, prairial an VI.)

Dans les démonstrations que l'on a données du principe des vitesses virtuelles, on l'a fait dépendre du principe de la composition des forces ou de celui de l'équilibre du levier. Ces deux principes sont en effet les fondements ordinaires de la Statique; mais on sait qu'ils ne sont pas assez évidents pour n'avoir pas besoin eux-mêmes de démonstration. Il y a un autre principe qui peut également servir de base à la science de l'équilibre, et qui joint à l'avantage d'être évident par lui-même celui de conduire directement au principe des vitesses virtuelles : c'est le principe de l'équilibre des moufles.

Si plusieurs poulies sont jointes ensemble sur une même chape, on appelle cet assemblage *moufle*, et la combinaison de deux moufles, l'une fixe et l'autre mobile, embrassées par une corde dont l'une des extrémités est fixement attachée et l'autre est tirée par une puissance, forme une machine dans laquelle la puissance est au poids porté par la moufle mobile, comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent à cette moufle, en les supposant tous parallèles et en faisant abstraction du frottement et de la roideur de la corde; car il est visible qu'à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde, qu'il

चित्र 14.23: pulley blocks द्वारा आभासी वेगों के सिद्धांत का Lagrange का प्रमाण ((Salençon, 2018) के अनुसार)

Lagrange Multipliers और अवरोध-बल

यांत्रिकी के उपकरणों में Lagrange का संभवतः सर्वाधिक गहन योगदान अवरोधों का उनका निरूपण था। यदि निकाय इन रूपों में व्यक्त ज्यामितीय अवरोधों के अधीन है:

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \quad \dots$$

तो इन अवरोधों के अधीन आभासी-कार्य समीकरण इसके समतुल्य है:

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \cdots + \lambda\,dL + \mu\,dM + \nu\,dN + \cdots = 0$$

स्वेच्छ विचरणों के लिए, जहाँ λ, μ, ν अनिर्धारित अदिश हैं—प्रसिद्ध *Lagrange multipliers*।

तब Lagrange ने निर्णायक प्रेक्षण किया कि पद $\lambda\,dL$, $\mu\,dM$, आदि का गणितीय रूप बल-पदों $P\,dp$, $Q\,dq$, आदि के ठीक समान है। इससे गहन भौतिक व्याख्या प्राप्त होती है: Lagrange multipliers ही *अवरोध-बल*—प्रतिक्रियाएँ—हैं। प्रत्येक ज्यामितीय अवरोध-समीकरण निकाय पर कार्यरत एक अथवा अनेक बलों के समतुल्य है; इसके विपरीत इन बलों को ज्यामितीय अवरोध-समीकरणों के स्थान पर प्रतिस्थापित किया जा सकता है, जिससे घटक पिंडों को पूर्णतः मुक्त माना जा सके। multipliers ठीक उन प्रतिरोधों का प्रतिनिधित्व करते हैं जिनका पिंड अपने संबंधों के कारण सामना करते हैं, अथवा उन प्रतिक्रियाओं का जो पिंडों द्वारा लगाए गए दाबों के समान और विपरीत होनी चाहिए।

यह अंतर्दृष्टि—कि बल और अवरोध द्वैत अवधारणाएँ हैं—आधुनिक संरचनात्मक यांत्रिकी के केंद्र में है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Lagrange के गति-समीकरण

Mécanique Analytique की शिखर उपलब्धि किसी भी यांत्रिक निकाय के लिए गति के सामान्य समीकरणों की व्युत्पत्ति है। d'Alembert के सिद्धांत को सामान्यीकृत निर्देशांकों के औपचारिकतावाद से संयोजित करके Lagrange ने दिखाया कि n स्वतंत्रता-कोटियों वाले निकाय की गति n द्वितीय-कोटि अवकल समीकरणों द्वारा नियंत्रित होती है:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{14.2}$$

जहाँ T गतिज ऊर्जा है और Q_j सामान्यीकृत बल हैं।

जब बल स्थितिज ऊर्जा $V(q_1, \ldots, q_n)$ से व्युत्पन्न किए जा सकें, जिससे $Q_j = -\partial V/\partial q_j$, तब समीकरण यह सुरुचिपूर्ण रूप ग्रहण करते हैं:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{14.3}$$

जहाँ $L = T - V$ निकाय का *Lagrangian* है।

ये *Euler–Lagrange equations*, विश्लेषणात्मक यांत्रिकी के मूलभूत समीकरण हैं। गतिकी की प्रत्येक समस्या—ग्रहों की गति से प्रत्यास्थ पिंडों के कंपन तक—Lagrangian लिखने और इन समीकरणों को हल करने में अपचित हो जाती है। शास्त्रीय यांत्रिकी का संपूर्ण भवन, जिसे दो शताब्दियों में Galileo, Newton, Bernoullis, Euler और d'Alembert ने खंड-खंड निर्मित किया था, यहाँ एकल, एकसमान प्रक्रिया में अपचित हुआ।

14.5.18 Fourier (1768–1830)

Fourier (Fourier, 1798) ने Lagrange की संरचना को *inequality constraints* तक विस्तारित किया और देखा कि "यदि प्रतिरोधों को बल माना जाए... तो पिंड को मुक्त माना जा सकता है और सभी संभावित विस्थापनों के लिए आघूर्णों का योग शून्य है।" यह विस्तार तनावरहित संपर्क जैसे *unilateral constraints* के निरूपण को संभव बनाता है—उदाहरणतः किसी पृष्ठ पर रखा पिंड, जो धकेल सकता है किंतु खींच नहीं सकता। आभासी कार्य का सिद्धांत *असमानता* बन जाता है:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \le 0$$

अवरोध के अनुरूप सभी आभासी विस्थापनों के लिए। इस सूत्रीकरण ने परिवर्तनात्मक असमानताओं के आधुनिक सिद्धांत और संपर्क-समस्याओं की यांत्रिकी का मार्ग खोला।

14.5.19 Lazare Carnot (1753–1823)

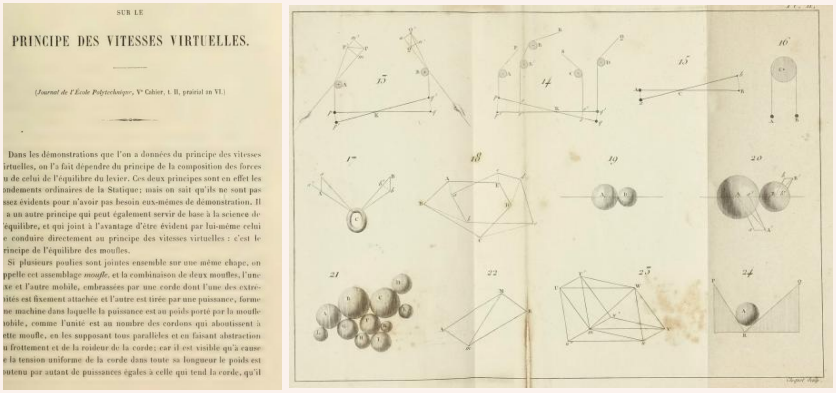
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753–1823) को मुख्यतः “l’organisateur de la victoire”—French Revolutionary सेनाओं को व्यवस्थित करने वाले सैन्य अभियंता और राजनेता—के रूप में स्मरण किया जाता है। किंतु अपनी राजनीतिक जीवन-वृत्ति में पूर्णतः व्यस्त होने से पहले और 1797 में सत्ता से पतन के बाद पुनः, Carnot ने यांत्रिकी में ऐसे मूलभूत योगदान दिए जो Lagrange के विश्लेषणात्मक सूत्रीकरण और मशीनों के व्यावहारिक विज्ञान के बीच की दूरी पाटते हैं।

Carnot की *Essai sur les machines en général* पहली बार 1783 में प्रकाशित हुई (Carnot, 1783), जब वे Corps Royal du Génie में अज्ञात captain थे। उस समय इसने बहुत कम ध्यान आकर्षित किया। बीस वर्ष बाद अपने राजनीतिक ग्रहण के पश्चात Carnot ने इसका पर्याप्त संशोधित संस्करण *Principes fondamentaux de l’équilibre et du mouvement* (Carnot, 1803) के रूप में प्रकाशित किया। ये कार्य मशीनों के सामान्य विज्ञान पर प्रथम वास्तविक सैद्धांतिक ग्रंथ बनाते हैं।

Carnot की *Essai* के उत्कृष्ट अध्ययन और English अनुवाद के लिए Pisano, Coopersmith, and Peake, 2021 देखें।

Carnot का केंद्रीय नवाचार *mouvement géométrique*—geometric motion, (Carnot, 1803)—की अवधारणा था। उन्होंने इन्हें ऐसी गतियों के रूप में परिभाषित किया जो केवल यांत्रिक निकाय की ज्यामिति पर निर्भर होती हैं, उसकी गतिकी पर नहीं: ऐसी गतियाँ जिनमें “विपरीत गति सदैव संभव है।” आधुनिक पदावली में geometric motions वे हैं जिन्हें हम *अवरोधों के अनुरूप आभासी विस्थापन* कहेंगे, जिन पर प्रतिवर्त्यता की अतिरिक्त आवश्यकता है (चित्र 14.24)।


SUR LE

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

(Journal de l’École Polytechnique, V^e Cahier, t. II, prairial an VI.)

Dans les démonstrations que l’on a données du principe des vitesses virtuelles, on l’a fait dépendre du principe de la composition des forces ou de celui de l’équilibre du levier. Ces deux principes sont en effet les fondements ordinaires de la Statique; mais on sait qu’ils ne sont pas assez évidents pour n’avoir pas besoin eux-mêmes de démonstration. Il y a un autre principe qui peut également servir de base à la science de l’équilibre, et qui joint à l’avantage d’être évident par lui-même celui de conduire directement au principe des vitesses virtuelles : c’est le principe de l’équilibre des moufles.

Si plusieurs poulies sont jointes ensemble sur une même chape, on appelle cet assemblage *moufle*, et la combinaison de deux moufles, l’une fixe et l’autre mobile, embrassées par une corde dont l’une des extrémités est fixement attachée et l’autre est tirée par une puissance, forme une machine dans laquelle la puissance est au poids porté par la moufle mobile, comme l’unité est au nombre des cordons qui aboutissent à cette moufle, en les supposant tous parallèles et en faisant abstraction du frottement et de la roideur de la corde; car il est visible qu’à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde, qu’il

चित्र 14.24: पिंडों के निकाय, geometric motions और संघट्ट-यांत्रिकी को स्पष्ट करते Carnot (Carnot, 1803)

Carnot ने उसे *moment d’activité* पद दिया जिसे अब हम *work* कहते हैं—बल और बल की दिशा में विस्थापन का गुणनफल। geometric motions और moment of activity का उपयोग करके Carnot ने सामान्यीकृत सिद्धांत सूत्रबद्ध किया: अवरोधों के अधीन पिंडों के किसी निकाय में geometric motions ठीक वे गतियाँ हैं जिनके लिए activity का कुल moment लुप्त होता है। यह Lagrange के अमूर्त औपचारिकतावाद के स्थान पर तंत्रों के विश्लेषण के अनुकूल भाषा में व्यक्त आभासी कार्य के सिद्धांत का एक रूप है।

Carnot की यांत्रिकी की विशिष्ट विशेषता *corps durs*—संघट्ट पर अथवा अवरोधों के अचानक लगाए

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जाने पर वेग में तात्कालिक परिवर्तन करने वाले कठोर पिंडों—का उनका निरूपण है। ऐसे निकायों के लिए Carnot ने अप्रत्यास्थ संघट्ट में *vis viva* की हानि पर अपना प्रमेय व्युत्पन्न किया: लुप्त *vis viva*, "लुप्त वेगों" द्वारा उत्पन्न होने वाली *vis viva* के समान है:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i U_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i|^2 \tag{14.4}$$

जहाँ $\mathbf{U}_i$ और $\mathbf{V}_i$ संघट्ट के पूर्व और पश्च वेग हैं। यह परिणाम, जिसे कभी-कभी Carnot का प्रमेय कहते हैं, दिखाता है कि अवरोधों के अनुरूप सभी गतियों में संघट्ट के बाद वास्तविक गति गतिज ऊर्जा की हानि को न्यूनतम करती है।

क्रमशः परिवर्तित बलों के लिए Carnot ने अपने विश्लेषण को निरंतरता के सिद्धांत तक विस्तारित किया: कोई मशीन अधिकतम दक्षता पर तब कार्य करती है जब गति का संचरण वेग के आकस्मिक परिवर्तनों के बिना होता है। इस अंतर्दृष्टि के मशीन-डिज़ाइन के लिए तात्कालिक व्यावहारिक निहितार्थ और ऐसे गहन सैद्धांतिक निहितार्थ थे जिनका Carnot के पुत्र Sadi ने बाद में उपयोग किया: प्रतिवर्ती प्रक्रिया की अवधारणा Lazare के geometric motion की प्रत्यक्ष वंशज है।[24]

यदि Lagrange ने आभासी कार्य को शुद्ध विश्लेषण की शाखा में रूपांतरित किया, तो Carnot ने उसे अभियांत्रिकी के उपकरण में रूपांतरित किया। geometric motion की उनकी अवधारणा ने आभासी विस्थापन को Lagrange की पूर्णतः विश्लेषणात्मक परिभाषा से अधिक मूर्त भौतिक व्याख्या दी और मशीन-विश्लेषण में मूलभूत राशि के रूप में कार्य पर उनके बल ने उस ऊर्जा-आधारित उपागम का पूर्वाभास दिया जो उन्नीसवीं शताब्दी की भौतिकी पर प्रभुत्व स्थापित करेगा।

14.6 उपसंहार

उपसंहार के रूप में अपने Physics सहयोगियों की ओर एक संक्षिप्त संकेत करते हुए इस अध्याय को उनके द्वारा बलों के चार प्रकारों की परिभाषाओं से समाप्त करें।

गुरुत्वीय बल दो द्रव्यमानों के बीच आकर्षण-बल है। यह वह बल है जो द्रव्यमानयुक्त वस्तुओं द्वारा परस्पर लगाए गए गुरुत्वीय आकर्षण के लिए उत्तरदायी है। Newton के सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण-नियम के अनुसार दो द्रव्यमानों के बीच गुरुत्वीय बल का परिमाण उनके द्रव्यमानों के गुणनफल के समानुपाती और उनके केंद्रों के बीच दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है।

विद्युत्चुंबकीय बल विद्युत्-आवेशित कणों के बीच कार्य करने वाला बल है। इसमें विद्युत् बल (आवेशित कणों के बीच आकर्षण अथवा प्रतिकर्षण) और चुंबकीय बल (गतिमान आवेशों के बीच अन्योन्य-क्रिया), दोनों सम्मिलित हैं। यही बल किसी पुस्तक को मेज के आर-पार गिरने से रोकता है, क्योंकि परमाणु-स्तर पर पुस्तक और मेज, दोनों परमाणुओं से बने हैं जिनमें electrons से घिरा nucleus (जिसमें protons और neutrons होते हैं) होता है। पुस्तक के electrons और मेज के पृष्ठ के electrons अपने ऋणात्मक आवेशों के कारण परस्पर प्रतिकर्षित होते हैं। इसी प्रकार पुस्तक के

[24] Sadi Carnot (1796–1832) ने अपनी *Réflexions sur la puissance motrice du feu* (1824) द्वारा thermodynamics की स्थापना की। अपने पिता से विरासत में प्राप्त वैचारिक उपकरण, विशेषतः प्रतिवर्ती प्रक्रियाओं की धारणा, ने उस कार्य में निर्णायक भूमिका निभाई।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परमाणुओं और मेज के पृष्ठ के परमाणुओं के electrons भी परस्पर प्रतिकर्षित होते हैं। ऋणात्मक आवेशित electrons के बीच यही प्रतिकर्षण-बल आपके हाथ को मेज के आर-पार जाने से रोकता है।

दुर्बल नाभिकीय बल कुछ प्रकार के radioactive decay और मूल कणों से संबंधित अन्योन्यक्रियाओं के लिए उत्तरदायी है।

प्रबल नाभिकीय बल किसी परमाणु के nucleus में protons और neutrons को एक साथ बाँधने वाला बल है। यह चार मूलभूत बलों में सबसे प्रबल है, किंतु इसकी परास अत्यल्प है और यह केवल परमाणु-नाभिकों के आकार से तुलनीय दूरियों पर कार्य करता है। प्रबल नाभिकीय बल धनात्मक आवेशित protons के बीच electrostatic प्रतिकर्षण के बावजूद परमाणु-नाभिकों को एक साथ बनाए रखने के लिए उत्तरदायी है।

14.7 निष्कर्ष

भौतिकी और यांत्रिकी की हमारी वर्तमान समझ पर विचार करने पर यह देखना वास्तव में आकर्षक है कि मानवता ने बल की अवधारणा समझने में कितनी व्यापक प्रगति की है। आरंभ में दैवी हस्तक्षेप और अमूर्त दर्शन से अंतर्गुंफित ये प्रारंभिक विचार अब हमारी प्रत्यक्ष, अनुभवजन्य चर्चाओं से दूर प्रतीत होते हैं। वास्तव में बल को दैवी इच्छा की अभिव्यक्ति मानने से आधुनिक भौतिकी/यांत्रिकी के स्पष्ट, परिशुद्ध दृष्टिकोण से समझने तक की यात्रा महत्त्वपूर्ण विकास को चिह्नित करती है।

16वीं शताब्दी के उत्तरार्ध में आरंभ Scientific Revolution द्वारा उत्प्रेरित यह रूपांतरण ज्ञान के हमारे अथक अनुसरण और रहस्यवादी व्याख्याओं से अनुभवजन्य ("bottom up") तथा सैद्धांतिक ("top-down") विज्ञान की ओर गहन परिवर्तन को रेखांकित करता है।

अतः मैं quantum mechanics और quantum electrodynamics के संस्थापकों में से एक Paul Dirac से संबद्ध उद्धरण के साथ उचित रूप से निष्कर्ष दूँगा[25]

> यह स्पष्ट प्रतीत होता है कि dinosaurs की वर्तमान लोकप्रियता और आदिम धर्मों में लोगों की ऐतिहासिक रुचि एक ही कारण से उत्पन्न होती है—यह समझने की इच्छा कि आदिम लोगों ने संसार का सामना कैसे किया। पुराने धर्म प्रकृति के बलों को व्यक्तिरूप देकर समझने के प्रयास थे।
>
> Dirac, 1963 *"The Evolution of the Physicist's Picture of Nature"*

कालानुक्रमिक सारांश

[25] https://freethoughtblogs.com/singham/2013/03/24/paul-dirac-on-religion/

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 14.1: बल और आभासी सिद्धांतों का कालानुक्रमिक विकास।

वर्ष	लेखक	संदर्भ	प्रमुख योगदान
c. 450 BCE	Empedocles	n/a	गति के विरोधी कारणों के रूप में “Love” और “strife” (आरंभिक बल-सदृश आद्य अवधारणाएँ)
c. 350 BCE	Plato	Plato, 350 BC	प्राथमिक कारण के रूप में स्व-गति; गति में अभिकरण की आरंभिक तत्त्वमीमांसात्मक संरचना
c. 350 BCE	Aristotle	Aristotle, 2000	वृत्तीय वेगों द्वारा उत्तोलक की व्याख्या; “power” की अवधारणा
c. 250 BCE	Archimedes	Archimedes, -250	उत्तोलक नियम का कठोर प्रमाण; कोई सामान्य परिवर्तनात्मक सिद्धांत नहीं
c. 100 BCE	Posidonius / Stoics	n/a	सक्रिय “tension” के रूप में बल; धक्का/खिंचाव पर स्पष्ट बल; अभिकर्ता/प्रभावित द्वैत
c. 530	Philoponus	Philoponus, 1993	Aristotle की आलोचना; संपर्क के बाद अंकित impetus बना रहता है (आद्य-जडत्व)
c. 1020	Avicenna	n/a	अंकित प्रवृत्ति के रूप में *mayl* (inclination/impetus); निरंतर प्रेरक के बिना गति बनी रहती है
c. 1120	al-Baghdadi	n/a	गति के परिवर्तन से संबद्ध बल (त्वरण और वेग में भेद; आद्य-$F \propto a$)
c. 1250	Jordanus de Nemore	Nemore, 1250	“स्थितीय गुरुत्व”; अवरोधित निकायों में अंतर्निहित आभासी विस्थापन
c. 1340	Jean Buridan	Buridan, 1991	परिष्कृत impetus सिद्धांत; जडत्व-सदृश कथन (प्रतिरोध न होने पर गति बनी रहती है)
c. 1500	Leonardo da Vinci	Vinci, 1881	सरल मशीनों पर पांडुलिपियाँ; समानुपात-नियम; व्यावहारिक संश्लेषण
1586	Simon Stevin	Stevin, 1586	*clootcrans*; सतत गति की असंभाव्यता; बलों का समांतर चतुर्भुज
1594	Galileo Galilei	Galilei, 1594	“बल में लाभ, वेग में हानि” (बल और गति के बीच विनिमय)
1615	Salomon de Caus	Caus, 1615	*Les raisons des forces mouvantes*; “travail” (कार्य) पद का प्रस्तुतीकरण
1637	René Descartes	Descartes, 1898	अतिसूक्ष्म विस्थापन; स्पर्शरेखा-रचना; स्थान (समय/वेग नहीं)
1644	Evangelista Torricelli	Torricelli, 1644	गुरुत्व-केंद्र कसौटी: साम्य यदि और केवल यदि उभयनिष्ठ C.G. नीचे नहीं उतर सकता
1670	John Wallis	Wallis, 1670	विशेष दिशाओं से परे सामान्यीकृत संयोजन; व्यापक बल-वियोजन
1686	G. W. Leibniz	Leibniz, 1686a	*vis viva* (mv^2) बनाम संवेग (mv): कार्य/ऊर्जा से संबद्ध “बल”
1687	Isaac Newton	Newton, 1687	गति के नियम; गतिकी से बलों का समांतर चतुर्भुज
1717	Johann Bernoulli	Bernoulli, Johann, 1725	आभासी वेगों का प्रथम सामान्य कथन (Varignon को पत्र)
1725	Pierre Varignon	Varignon, 1725	आघूर्णों पर Varignon का प्रमेय; पूर्ववर्ती परिणामों का प्रसार/व्यवस्थापन
1726	Daniel Bernoulli	Bernoulli, Daniel, 1726	बलों के समांतर चतुर्भुज की स्थैतिक व्याख्या; संयोजन का सुदृढीकरण
1743	Jean d’Alembert	d’Alembert, 1743	जडत्वीय बलों द्वारा गतिकी तक विस्तार; आभासी-कार्य-सदृश पुनःसूत्रीकरण
1783	Lazare Carnot	Carnot, 1783	“Geometric motions”; *moment d’activité*; मशीनों का सिद्धांत
1786	Immanuel Kant	Kant, 2023	गतियों के संयोजन का दार्शनिक निरूपण (निरपेक्ष/सापेक्ष space)
1788	Joseph Lagrange	Lagrange, 1788	व्यवस्थापन; अवरोध-बलों के रूप में multipliers; विश्लेषणात्मक यांत्रिकी
1798	Joseph Fourier	Fourier, 1798	असमानता (एकपक्षीय) अवरोध; बलों के रूप में मानी गई प्रतिक्रियाएँ
1864	James Maxwell	Maxwell, 1864c	इकाई-भार विधि; व्युत्क्रम प्रमेय
1868	Otto Mohr	Mohr, 1868	frames के लिए व्यवस्थित इकाई-भार विधि

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Caravaggio, Saint Paul का धर्मांतरण (1601)

एक अदृश्य बल Paul को उसके घोड़े से गिराता है—कारण अदृश्य है, प्रभाव निर्विवाद। बल स्वयं रहस्यमय बना रहता है, जबकि उसके परिणाम अभिव्यक्त होते हैं।

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंतराल III: जहाँ विद्वत्ता और अनुराग का संगम होता है

अगले दो अध्याय विशुद्ध ऐतिहासिक अथवा विषयगत प्रस्तुति से हटकर उन दो विषयों पर विचार करते हैं जिनमें मेरी गहरी व्यक्तिगत रुचि है। इनमें सबसे महत्त्वपूर्ण अध्याय 15 है, जिसमें संरचना और वास्तुकला के सूक्ष्म अंतर्संबंध का परीक्षण किया गया है। इसके बाद अध्याय 16 एक भिन्न अंतर्संबंध—भूकंप और मिथक के बीच संबंध—का अन्वेषण करता है।

कड़ाई से देखा जाए तो इनमें से कोई भी विषय इस पुस्तक के कार्यक्षेत्र में पूर्णतः नहीं आता; तथापि, ये मेरी उन चिरस्थायी व्यक्तिगत अभिरुचियों को प्रतिबिंबित करते हैं जो स्वाभाविक रूप से इन दो समापन अध्यायों में अभिव्यक्त हुई हैं।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15 वास्तुकला & संरचना

सारांश

यह अध्याय वास्तुकला और संरचनात्मक अभियांत्रिकी—इन दो विधाओं के बीच जटिल एवं विकसित होते संबंध का परीक्षण करता है। ये विधाएँ कभी प्रधान शिल्पी के व्यक्तित्व में एकीकृत थीं, किंतु अठारहवीं शताब्दी के बाद से उत्तरोत्तर पृथक होती गईं। विट्रुवियस द्वारा अपने De Architectura में प्रतिपादित आधारभूत सिद्धांतों—firmitas, utilitas, और venustas (सुदृढता, उपयोगिता और सौंदर्य)—से आरंभ करते हुए हम देखते हैं कि ये आदर्श अल्बेर्ती और पल्लादियो के पुनर्जागरणकालीन ग्रंथों के माध्यम से कैसे आगे पहुँचे, एफिल और मायार जैसे अभियंताओं ने इन्हें औद्योगिक युग की सामग्रियों के अनुरूप कैसे ढाला, और अंततः बिलिंग्टन ने बीसवीं शताब्दी में इन्हें "संरचनात्मक कला" की संकल्पना के रूप में कैसे पुनः सूत्रबद्ध किया। अध्याय महान progettisti—ऐसे अभिकल्पक-निर्माताओं—का परिचय प्रस्तुत करता है जिन्होंने संरचनात्मक तर्क और सौंदर्यपरक अभिव्यक्ति का वह एकीकरण साधा जो हमारे व्यवसाय की सर्वोच्च साधना का प्रतिनिधित्व करता है; साथ ही यह संरचनात्मक अभियांत्रिकी की वर्तमान प्रथा से जुडे असुविधाजनक सत्यों का भी सामना करता है। ऐसे युग में, जब संगणकीय उपकरणों ने अनेक अभियंताओं को "वास्तुशिल्पीय विचारों के तकनीशियन और समर्थक" मात्र बना दिया है, हम इस बात का परीक्षण करते हैं कि सीमाओं को निरंतर आगे बढाने वाले सृजनशील "पाँच प्रतिशत" को क्या विशिष्ट बनाता है। बिलिंग्टन की विवादास्पद "संरचनात्मक कला" शब्दावली का समर्थन करने के स्थान पर हम अधिक सटीक पद "संरचनात्मक वास्तुकला" का प्रतिपादन करते हैं और सुझाव देते हैं कि आगे का मार्ग प्रौद्योगिकी को अस्वीकार करने में नहीं, बल्कि उन मूलभूत सिद्धांतों को पुनः खोजने में निहित है जिन्होंने हमारे पूर्ववर्तियों की उपलब्धियों को संभव बनाया।

15.1 परिचय 534
15.1.1 अध्याय की संरचना 535
15.2 विट्रुवियसी परंपरा 536
15.2.1 मार्कस विट्रुवियस पोलियो: प्रथम वास्तुशिल्पीय प्रभावक . 536
15.2.2 पुनर्जागरण के दौरान विट्रुवियस की पुनर्खोज 544
15.2.3 मानवमिति और मापक्रम का प्रश्न 552
15.3 अंतराल: वास्तुकार और अभियंता — कला और विज्ञान? 565
15.4 अग्रदूत 568
15.4.1 उडता पुश्ता: संरचनात्मक तर्क का दृश्य रूप 569
15.4.2 गुस्ताव एफिल (1832–1923) . . 572
15.4.3 लुई हेनरी सुलिवन (1856-1924) . 574
15.4.4 रॉबर्ट मायार (1872–1940) . . . 576
15.4.5 ऑगुस्त पेरे (1874–1954) 577
15.4.6 एदुआर्दो तोरोहा ई मिरेत (1899–1961) 579
15.4.7 पियर लुइजी नेर्वी (1891–1979) 582
15.4.8 रिक्कार्दो मोरांदी (1902–1989) . 588
15.4.9 क्रिश्चियन मेन (1927–2018) . . 590
15.4.10 फ़ज़लुर रहमान ख़ान (1929–1982) 591
15.4.11 Progettisti की तुलना: अभिकल्पक-निर्माता और उनकी सामग्रियाँ 595
15.5 संरचनात्मक रूपजनन: प्रमुख व्यक्तित्व . 597
15.5.1 कैटेनरी 598
15.5.2 कवच और झिल्लियाँ 601
15.5.3 पारस्परिक संरचनाएँ 604
15.5.4 गणितीय इष्टतमीकरण: मैक्सवेल, मिशेल, बेकर और बेगिनी 607
15.5.5 उपसंहार: जब वास्तुकार और अभियंता टकराए 613
15.6 कंप्यूटर पीढी 616
15.6.1 "असाधारण" वास्तुकार 616
15.6.2 संरचनात्मक अभियंता: पाँच प्रतिशत वर्ग 619
15.7 विट्रुवियस पर पुनर्विचार 629
15.7.1 संरचनात्मक कला का विखंडन . 630
15.7.2 कला क्या है? 631
15.7.3 संरचनात्मक वास्तुकला: लुंजी का घोषणापत्र 633
15.8 निष्कर्ष 634

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15.1 परिचय

वास्तुकला और अभियांत्रिकी का संबंध स्वयं निर्माण जितना ही प्राचीन है[1]। अठारहवीं शताब्दी में इन विधाओं के व्यवसायीकरण से पूर्व, एक ही व्यक्ति—प्रधान शिल्पी—प्राचीन काल और मध्ययुग की महान संरचनाओं की संकल्पना, अभिकल्पना और निर्माण करता था। गॉथिक गिरजाघरों के उडते पुश्ते, बाइजेंटाइन चर्चों के गुंबद और रोमन मार्गों के पुल विशेषज्ञों के सहयोग से नहीं, बल्कि ऐसे व्यक्तियों के प्रयासों से अस्तित्व में आए जिनमें व्यावहारिक निर्माण-ज्ञान और सौंदर्यपरक संवेदनशीलता समान मात्रा में विद्यमान थे।

परिमेय यांत्रिकी के उद्भव और विशिष्ट शैक्षणिक संस्थानों—*École des Ponts et Chaussées* (1747), *École Polytechnique* (1794), तथा पूरे यूरोप में उनकी समकक्ष संस्थाओं—की स्थापना के साथ यह एकता विखंडित होने लगी। गणित और यांत्रिकी में प्रशिक्षित *ingénieur*, संयोजन, रेखांकन और इतिहास में प्रशिक्षित *architecte* से पृथक हो गया। जो कभी एक ही वृत्ति थी, वह दो व्यवसायों में विभाजित हो गई; प्रत्येक के अपने मूल्य, विधियाँ और संस्थागत संरचनाएँ थीं।

इस पुस्तक के अन्य अध्यायों के विपरीत, जिनकी संरचना मुख्यतः कालानुक्रमिक है, यह अध्याय विषयगत दृष्टिकोण अपनाता है। विशुद्ध कालानुक्रमिक विवेचन न केवल श्रमसाध्य सिद्ध होता, बल्कि वास्तुकला-संरचना संबंध को आकार देने वाले विभिन्न व्यक्तियों और विचारों के जटिल अंतर्संबंधों को समुचित रूप से ग्रहण भी नहीं कर पाता। परिणामी सामग्री विषमजातीय प्रतीत हो सकती है—और निस्संदेह उसमें लेखक की विशिष्ट रुचियाँ और उत्साह प्रतिबिंबित होते हैं—किंतु यह विविधतापूर्ण संगठन इस बात को समझने के हमारे उद्देश्य को बेहतर ढंग से पूरा करता है कि तकनीकी नवोन्मेष, सौंदर्यपरक दृष्टि और सैद्धांतिक चिंतन ने शताब्दियों और महाद्वीपों के आर-पार एक-दूसरे को कैसे प्रभावित किया है। वास्तव में, अध्याय 9[2] के साथ यह अध्याय लेखन के लिए मेरे प्रिय अध्यायों में था, क्योंकि इन दोनों ने उन व्यक्तिगत रुचियों और पूर्वाग्रहों को व्यक्त करने का अवसर दिया जो अन्यथा इस कृति के शेष भाग में प्रधान तकनीकी विवेचन के नीचे छिपे रह सकते थे।

इन विधाओं के बीच का तनाव—और यह प्रश्न कि उनका पृथक्करण प्रगति का द्योतक है अथवा क्षति का—इस अध्याय की प्रेरक शक्ति है। एक ओर, वैज्ञानिक विधा के रूप में संरचनात्मक अभियांत्रिकी के उद्भव ने अभूतपूर्व उपलब्धियों को संभव बनाया: ऐसे अंतरालों को पार करते पुल जो मध्ययुगीन निर्माताओं को असंभव प्रतीत होते, विट्रुवियसी समानुपात के नियमों को चुनौती देती ऊँचाइयों तक उठती मीनारें, और इतनी पतली कवच संरचनाएँ कि वे सामग्री-व्यवहार की सैद्धांतिक सीमाओं के निकट पहुँच गईं। दूसरी ओर, इस विशिष्टीकरण ने ऐसा श्रम-विभाजन उत्पन्न किया जिसने प्रायः संरचनात्मक अभियंता को तकनीकी परामर्शदाता की भूमिका तक सीमित कर दिया—अर्थात् भवनों की प्रारंभिक संकल्पना को आकार देने के बजाय दूसरों द्वारा परिभाषित समस्याओं का समाधान करने वाला व्यक्ति।

इस अध्याय में विचारित व्यक्तित्व—विट्रुवियस से लेकर पुनर्जागरण के आचार्यों और उन्नीसवीं तथा बीसवीं शताब्दी के महान अभियंता-निर्माताओं तक—इस मूलभूत तनाव के प्रति भिन्न प्रतिक्रियाओं का प्रतिनिधित्व करते हैं। नेर्वी और तोरोहा जैसे कुछ व्यक्तियों ने तकनीकी प्रवीणता और सौंदर्यपरक दृष्टि का ऐसा संश्लेषण साधा जो किसी भी विशुद्ध “कलात्मक” उपलब्धि की बराबरी करता है। गेहरी

[1]यह अध्याय वास्तुकार पत्रित्सिया गालिदएरी के साथ हुई अनेक वार्ताओं से विकसित हुआ, जिनकी वास्तुकला और संरचनात्मक अभियांत्रिकी के बीच की सीमा के प्रति जिज्ञासा ने मेरी अपनी जिज्ञासा को पुनः जागृत किया।

[2]महान चुनौतियाँ: कैटेनरी, इलास्टिका और वैश्लेषिक यांत्रिकी का जन्म।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और कालात्रावा जैसे अन्य व्यक्तियों ने संरचनात्मक अभियंताओं को ऐसी ज्यामितीय जटिलता वाले रूपों का विश्लेषण करने की चुनौती दी कि उन्हें साकार करने के लिए नए संगणकीय उपकरण विकसित करने पड़े। और बिलिंग्टन जैसे कुछ अन्य लोगों ने ऐसा सैद्धांतिक ढाँचा प्रतिपादित करने का प्रयास किया जो संरचनात्मक अभियांत्रिकी को वास्तुकला की अनुचर के बजाय एक स्वायत्त सृजनशील विधा के रूप में स्थापित कर सके।

यह अध्याय इन तनावों का कोई सरल समाधान प्रस्तुत नहीं करता। इसके स्थान पर यह विचारशील संरचनात्मक अभियंता को इनके बीच अपना मार्ग निर्धारित करने के लिए आवश्यक ऐतिहासिक और संकल्पनात्मक संदर्भ प्रदान करता है। विट्रुवियसी त्रयी—सुदृढता, उपयोगिता और सौंदर्य—आज भी उतनी ही प्रासंगिक है जितनी दो सहस्राब्दी पूर्व थी, यद्यपि इन लक्ष्यों को प्राप्त करने के साधन पहचान से परे परिवर्तित हो चुके हैं। इस परंपरा और इसे साकार करने वाले महान व्यवसायियों को समझना प्रत्येक उस व्यक्ति के लिए आवश्यक है जो संरचनात्मक अभियांत्रिकी का अभ्यास मात्र तकनीकी विशेषज्ञता के रूप में नहीं, बल्कि अपने नाम के योग्य सृजनशील विधा के रूप में करना चाहता है।

15.1.1 अध्याय की संरचना

यह अध्याय सात प्रमुख खंडों में संगठित है, जिनमें से प्रत्येक वास्तुकला-संरचना संबंध के एक विशिष्ट पक्ष पर विचार करता है:

- **§15.2: विट्रुवियसी परंपरा** हम पाश्चात्य वास्तुशिल्पीय सिद्धांत के आधारभूत ग्रंथ से आरंभ करते हैं और इसे तीन उपखंडों में देखते हैं: §15.2.1 मार्कस विट्रुवियस पोलियो और उनके व्यापक ग्रंथ *De Architectura* का परीक्षण करते हुए *firmitas*, *utilitas*, तथा *venustas* की प्रसिद्ध त्रयी स्थापित करता है; §3.2.4.1 अल्बेर्ती और पल्लादियो के पुनर्जागरणकालीन ग्रंथों के माध्यम से विट्रुवियसी सिद्धांतों के संचार का अनुशीलन करता है; और §15.2.3 विट्रुवियस से लियोनार्दो होते हुए ले कोर्बुज़िए के *Modulor* तक मानवमितीय परंपरा का अन्वेषण करता है।
- **§15.3: अंतराल—वास्तुकार और अभियंता** अठारहवीं शताब्दी में वास्तुकार और अभियंता की भूमिकाएँ कैसे पृथक हुईं और आज तक बने हुए व्यावसायिक तनाव कैसे उत्पन्न हुए—इसका आलोचनात्मक परीक्षण; साथ ही इन विधाओं के समुचित संबंध पर एडा लुईस हक्स्टेबल, एदुआर्दो तोरोहा और ले कोर्बुज़िए के दृष्टिकोण।
- **§15.4: अग्रदूत** अध्याय का केंद्रीय भाग महान *progettisti*—ऐसे अभियंताओं—का परिचय प्रस्तुत करता है जिन्होंने तकनीकी प्रवीणता और सौंदर्यपरक दृष्टि के एकीकरण द्वारा संरचनात्मक कला साधी। इसमें गॉथिक उडते पुश्तों से लेकर एफिल के लौह निर्माण, मायार के कंक्रीट मेहराबों, तोरोहा के कवचों, नेर्वी के फेरोसीमेंट, मोरांदी के पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट, मेन के पुलों और ख़ान के नलिकाकार गगनचुंबी भवनों तक की यात्रा सम्मिलित है।
- **§15.5: संरचनात्मक रूपजनन** रूप-निर्धारण की वह परंपरा जिसमें संरचनात्मक रूप मनमानी सौंदर्यपरक प्राथमिकता के बजाय भार, सामग्री और निर्माण की माँगों से उद्भूत होता है—कैटेनरी अध्ययनों से लेकर झिल्ली प्रयोगों और गणितीय इष्टतमीकरण पद्धतियों तक।
- **§15.5.5: वास्तुकारों और अभियंताओं के बीच 19वीं शताब्दी की प्रतिस्पर्धा** औद्योगिक युग में वा-

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्तुकारों और अभियंताओं के बीच व्यावसायिक प्रतिद्वंद्विता का ऐतिहासिक परीक्षण, जिसमें एफिल टावर प्रतियोगिता, क्रिस्टल पैलेस और ब्रुकलिन ब्रिज के प्रकरण-अध्ययन सम्मिलित हैं।

§15.6: संगणक पीढ़ी संगणकीय उपकरणों के माध्यम से संरचनात्मक अभियांत्रिकी की प्रथा में हुए रूपांतरण का सामना करते हुए, मात्र तकनीकी गणना से आगे बढ़ने वाले सृजनशील "पाँच प्रतिशत" का परिचय—रॉबर्टसन के वर्ल्ड ट्रेड सेंटर से लेकर बेकर के सांस्थिति-अनुकूलित गगनचुंबी भवनों और विर्लोज़्यू के परिष्कृत पुल-अभिकल्पों तक—और साथ ही कंदेला, गेहरी तथा कालात्रावा जैसे "असाधारण वास्तुकारों" के कार्य का परीक्षण।

§15.7: विट्रुवियस का पुनरवलोकन बिलिंग्टन की "संरचनात्मक कला" की संकल्पना का आलोचनात्मक परीक्षण तथा अधिक सटीक पद "संरचनात्मक वास्तुकला" का समर्थन; यह तर्क देते हुए कि संगणकीय युग में संरचनात्मक उपलब्धि के मूल्यांकन के लिए विट्रुवियसी त्रयी आज भी सर्वाधिक पर्याप्त रूपरेखा है।

15.2 विट्रुवियसी परंपरा

15.2.1 मार्कस विट्रुवियस पोलियो: प्रथम वास्तुशिल्पीय प्रभावक

किसी भी वास्तुशिल्पीय *सिद्धांतकार* का प्रभाव मार्कस विट्रुवियस पोलियो (अर्थात् विट्रुवियस), अथवा अधिक सटीक रूप से उनकी पुस्तक *De Architectura, libri decem*, जिसे आज *Ten Books on Architecture* के नाम से जाना जाता है (Vitruvius and Morgan, 1914), जितना महत्त्वपूर्ण और दीर्घस्थायी नहीं रहा। रोचक रूप से, इस पुस्तक के संदर्भ में उन्हें प्रायः रोमन वास्तुकार और सैन्य अभियंता कहा जाता है। ऑगस्टस के शासनकाल में लिखी और सम्राट को समर्पित *De Architectura* दस पुस्तकों से बनी है, जिनमें वास्तुकारों की शिक्षा, निर्माण-सामग्री, मंदिर-निर्माण, सार्वजनिक और निजी भवन, फर्श एवं पलस्तर, जलापूर्ति, खगोलविद्या एवं कालमापन, तथा असैनिक और सैन्य यंत्र सम्मिलित हैं। यह संभवतः अपने विषय का पहला व्यापक अध्ययन है, जिसमें न केवल भवन-निर्माण बल्कि यांत्रिक अभियांत्रिकी के अनेक पक्ष—निर्माण प्रबंधन, सिविल अभियांत्रिकी, सामग्री अभियांत्रिकी, सैन्य अभियांत्रिकी और नगर नियोजन सहित—समाहित हैं।

15.2.1.1 शिक्षा पर विट्रुवियस

अपने शोध-प्रबंध की समितियों के प्रति आभार व्यक्त करने वाले अनेक स्नातक छात्रों की भाँति विट्रुवियस अपने माता-पिता के प्रति कृतज्ञता व्यक्त करते हैं और दावा करते हैं कि वे आर्थिक विचारों से प्रेरित नहीं हैं।[3]

> अतः, इस एथेनियाई विधि को स्वीकार करने और इस बात का ध्यान रखने के लिए कि मुझे ऐसी कला सिखाई जाए जिसे अध्ययन तथा शिक्षा की सभी शाखाओं में उदार शिक्षण के बिना पूर्णता तक नहीं पहुँचाया जा सकता, मैं अपने माता-पिता का अत्यंत ऋणी और उनके प्रति अनंत रूप से कृतज्ञ हूँ। इस प्रकार अपने माता-पिता के ध्यान और शिक्षकों द्वारा दी गई शिक्षा के कारण मैंने व्यापक ज्ञान प्राप्त किया; और साहित्यिक तथा कलात्मक विषयों एवं

[3]आधुनिक शब्दावली में कहें तो उन्होंने प्रसिद्धि के ऊपर प्रामाणिकता को वरीयता दी।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> ग्रंथ-लेखन में मुझे जो आनंद मिलता है, उससे मैंने ऐसी बौद्धिक संपदा अर्जित की है जिसके प्रमुख फल ये विचार हैं: अतिरेक निरर्थक है, और किसी वस्तु का अभाव अनुभव न करना ही वास्तविक संपदा है। तथापि, कुछ लोग इन सबको महत्त्वहीन मान सकते हैं और सोच सकते हैं कि जिनके पास बहुत धन है, वही बुद्धिमान हैं। इसी कारण अनेक लोग उस लक्ष्य का पीछा करते हुए निर्लज्ज आत्मविश्वास धारण कर लेते हैं और एक ही समय में ख्याति तथा संपत्ति प्राप्त कर लेते हैं। किंतु जहाँ तक मेरा संबंध है, सीज़र, मैं अपनी कला से धन कमाने के लिए कभी उत्सुक नहीं रहा; बल्कि इस सिद्धांत पर चलता रहा कि अल्प साधन और अच्छी प्रतिष्ठा, संपत्ति तथा अपयश से श्रेष्ठ हैं।
>
> Vitruvius, 1960

विट्रुवियस ने इस विचार का समर्थन किया कि वास्तुकार की शिक्षा व्यापक होनी चाहिए और उसे आरंभिक अवस्था में विशेषज्ञता ग्रहण नहीं करनी चाहिए—यह भावना अत्यधिक संकीर्ण तकनीकी प्रशिक्षण के विषय में आधुनिक चिंताओं से मेल खाती है:

> 1. वास्तुकार को अध्ययन की अनेक शाखाओं और विविध प्रकार के ज्ञान से सुसज्जित होना चाहिए, क्योंकि उसके nर्णय द्वारा ही अन्य कलाओं में किए गए समस्त कार्य की परीक्षा होती है। यह ज्ञान व्यवहार और सिद्धांत की संतान है। ... 4. ... वास्तुकार शिक्षित व्यक्ति होना चाहिए ताकि अपने ग्रंथों में अधिक स्थायी स्मृति छोड सके। दूसरे, उसे रेखांकन का ज्ञान होना चाहिए जिससे वह प्रस्तावित कार्य का स्वरूप दर्शाने के लिए सरलता से रेखाचित्र बना सके। ज्यामिति भी वास्तुकला में अत्यंत सहायक है; विशेषतः वह हमें पटरी और परकार का उपयोग सिखाती है, जिनसे हम स्थल पर भवनों की योजनाएँ बनाने तथा गुनिया, तलमापी और साहुल का सही प्रयोग करने में विशेष दक्षता प्राप्त करते हैं। 5. इतिहास का व्यापक ज्ञान आवश्यक है ... 6. दर्शन वास्तुकार को उदात्त-चित्त और आत्माभिमान-रहित बनाता है; अपितु उसे विनम्र, न्यायप्रिय और लोभ-रहित ईमानदार बनाता है। ... 8. वास्तुकार को संगीत भी समझना चाहिए ताकि उसे प्रामाणिक और गणितीय सिद्धांत का ज्ञान हो। ... 9. इसी प्रकार रंगशालाओं में कांस्य पात्र होते हैं। 10. जलवायु संबंधी प्रश्नों के कारण वास्तुकार को चिकित्सा-विज्ञान के अध्ययन का भी ज्ञान होना चाहिए। मेरा विचार है कि लोगों को बाल्यकाल से इन अध्ययनों की सीढ़ियाँ चढे बिना और इस प्रकार अनेक कलाओं तथा विज्ञानों के ज्ञान से पोषित होकर वास्तुकला की पवित्र भूमि की ऊँचाइयों तक पहुँचे बिना स्वयं को उतावली में वास्तुकार कहने का अधिकार नहीं है।
>
> Vitruvius, 1960

हम वैज्ञानिकों में से अनेक की भाँति विट्रुवियस भी अपनी लेखन-कुशलता को लेकर चिंतित थे और उन्होंने सीज़र से क्षमा माँगी कि “यदि कहीं व्याकरण के नियम का पर्याप्त ध्यान रखे बिना कोई बात प्रस्तुत की गई हो।”

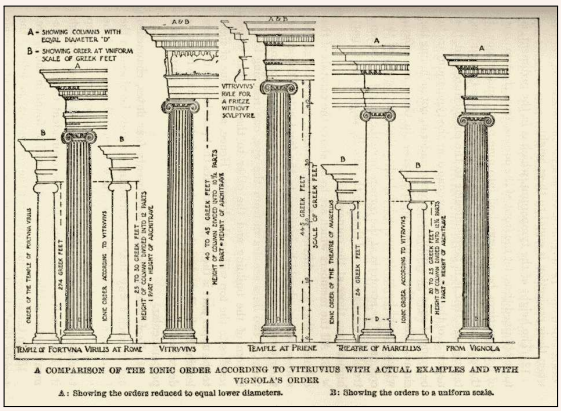
15.2.1.2 अभियंता विट्रुवियस

सैन्य अभियंता के रूप में विट्रुवियस ने संरचनात्मक अभिकल्प के लिए सरल नियम बनाए। उनका *De Architectura* (Vitruvius, 1960) वास्तव में संरचनाओं के लिए नियमों का पहला अभिलिखित संहिताबद्ध समूह था; इसमें वास्तुकला, अभियांत्रिकी, स्वच्छता, व्यावहारिक द्रवचालिती, ध्वनिक पात्र आदि से संबंधित अत्यंत विविध विषयों पर विवेचन सम्मिलित थे। प्रतीत होता है कि सामग्री का बड़ा भाग यूनानी वास्तुकारों के अब लुप्त हो चुके पूर्ववर्ती ग्रंथों से लिया गया था। पुनर्जागरण के समय से इन लेखों का अध्ययन शास्त्रीय रोमन वास्तुकला की कला के ज्ञानकोश के रूप में किया जाता रहा है, चित्र 15.1b। सभी व्यावहारिक प्रयोजनों के लिए इसे भवन-परियोजनाओं की मार्गदर्शिका माना जा सकता है।

De Architectura की व्यावहारिक सामग्री विस्तृत है: विट्रुवियस निर्माण-सामग्रियों (चूना, बालू,



(a) विट्रुवियस द्वारा सीज़र ऑगस्टस को *De Architectura* प्रस्तुत करते हुए



(b) विट्रुवियस के समानुपात के नियम, (Vitruvius, 1960 PDF)

चित्र 15.1: विट्रुवियस

पत्थर, काष्ठ) के गुणों, नींव के अभिकल्प, दीवार-निर्माण और विभिन्न भवन-प्रकारों के लिए उपयुक्त समानुपातों पर चर्चा करते हैं। वे शास्त्रीय क्रमों (डोरिक, आयोनिक, कोरिंथियन) और उनके उचित अनुप्रयोग का वर्णन करते हैं; वास्तुशिल्पीय समानुपात को मानव शरीर—वह प्रसिद्ध विट्रुवियसी मानव जिसे बाद में लियोनार्दो चित्रित करते और जिसका हम §15.2.3 में आगे परीक्षण करते हैं—से संबद्ध करते हैं; तथा क्रेन, उच्चालक और जल-उत्थापक युक्तियों सहित निर्माण-मशीनों का विस्तृत विवरण प्रस्तुत करते हैं।

इस पुस्तक की सर्वाधिक उल्लेखनीय सामग्री समानुपात के नियम हैं। उनमें से एक इस प्रकार है:

> यदि चौड़ाई चालीस फुट से अधिक होनी हो, तो अंताओं के बीच स्थित स्तंभों के भीतर और उनके सामने स्तंभ लगाए जाएँ। उनकी ऊँचाई सामने वाले स्तंभों के समान होनी चाहिए, किंतु उनकी मोटाई समानुपातिक रूप से घटाई जानी चाहिए: अतः यदि सामने वाले स्तंभों की मोटाई उनकी ऊँचाई का आठवाँ भाग है, तो इनकी दसवाँ भाग हो; यदि पूर्ववर्ती नौवाँ अथवा दसवाँ भाग हों, तो इन्हें भी उसी समानुपात में घटाया जाए। चूँकि उनके चारों ओर वायु स्वतंत्र रूप से प्रवाहित नहीं होती, इसलिए उनका यह क्षीणीकरण दिखाई नहीं देगा। फिर भी, यदि वे अत्यधिक पतले प्रतीत हों, तो जहाँ बाहरी स्तंभों में बीस अथवा चौबीस नालियाँ हों, वहाँ इनमें अट्ठाईस अथवा बत्तीस नालियाँ हो सकती हैं। इस प्रकार नालियों की अतिरिक्त संख्या स्तंभ-दंड के आकार में हुई कमी की समानुपातिक पूर्ति करेगी, उसे दिखाई देने से रोकेगी, और इस भिन्न उपाय से स्तंभ समान मोटाई के प्रतीत होंगे।
>
> Vitruvius, 1960 PDF, p. 4.4.2

ये अनुभवजन्य नियम इसलिए लागू हो सकते थे क्योंकि इस प्रकार अभिकल्पित स्तंभ अनुभव से संतोषजनक पाया गया था—वह बिना व्याकुंचित अथवा संदलित हुए भवन का भाग बन सकता था। इसके अतिरिक्त, अनुभव ने दर्शाया था कि "आधुनिक" अंतर्बोध के विपरीत स्तंभ किसी भी मापक्रम पर बनाया जा सकता है (Heyman, 2003 PDF)। ये नियम शताब्दियों तक इसलिए कारगर रहे क्योंकि प्राचीन निर्माण में प्रयुक्त सामग्रियाँ—पत्थर और कुछ सीमा तक काष्ठ—पूर्ण संरचनाओं में अत्यंत अल्प प्रतिबलित होती हैं। बहुत बड़े विस्तृति वाले पत्थर के पुल बनाए जा सकते थे और विस्मयकारी ऊँचाई तक गिरजाघर

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

निर्मित किए जा सकते थे; केवल इतना आवश्यक था कि आकार (मेहराब-वलय अथवा उडते पुश्ते का) सही हो, और यह एक ज्यामितीय आवश्यकता थी जिसे समानुपात के नियमों का पालन करके पूरा किया जाता था। निस्संदेह कोई नहीं जानता था कि संरचना कितनी सुरक्षित है, अतः यह प्रक्रिया अवश्य ही प्रयास और त्रुटि (विफलताओं) की रही होगी।

इस प्रकार विट्रुवियस का दृष्टिकोण—समानुपात के नियम—शताब्दियों तक प्रमुख अभिकल्प-पद्धति बना रहा, क्योंकि रूप सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण उद्देश्य था। सामर्थ्य अप्रासंगिक था (पत्थर पर्याप्त दृढ होते हैं), दृढता को निर्माताओं ने संभवतः कभी समस्या के रूप में सोचा ही नहीं, और स्थिरता का समाधान ज्यामितीय रूप से किया जाता था (उदाहरणतः किसी मेहराब को ऐसा आकार कैसे दिया जाए कि तनन प्रतिबलों से बचा जा सके, जो दरारें उत्पन्न करते और अंततः विफलता का कारण बनते)।

समानुपात की सीमाएँ: पुल-अभिकल्प भवनों के लिए समानुपातिक नियम पर्याप्त बने रहे, किंतु गैलीलियो की सैद्धांतिक चुनौती से भी पहले पुल-अभिकल्प ने उनकी सीमाएँ प्रकट कर दीं। जैसा कि Huerta, 2018 ने दर्शाया है, मेहराबी पुल के अभिकल्प की समस्या मूलतः असमानुपातिक है: किसी दिए हुए यातायात भार के लिए छोटे पुल बड़े पुलों की अपेक्षा "दुर्बल"—गुजरते भारों की क्रिया के प्रति अधिक संवेदनशील—होते हैं। फिर भी अठारहवीं शताब्दी तक ज्ञात नियम समानुपातिक थे। अल्बेर्ती के *De Re Aedificatoria* (Alberti, 1485) ने निर्धारित किया था कि स्तंभाधार की चौडाई विस्तृति की एक-तिहाई और मेहराब की मोटाई एक-पंद्रहवीं होनी चाहिए—ये नियम रोमन पूर्वोदाहरणों से प्राप्त हुए और तीन शताब्दियों तक वास्तुशिल्पीय ग्रंथों में उद्धृत किए गए।

फ्रांसीसी अभियंता उबेर गोतिए (1660–1737) ने पुलों को पूर्णतः समर्पित प्रथम ग्रंथ, अपने *Traité des ponts* (1716) (Gautier, 1765) में यह पहचाना कि छोटे मेहराबों के लिए समानुपातिक नियम विफल होते हैं। उन्होंने देखा कि एक-*toise* (6-फुट) मेहराब को अल्बेर्ती के विस्तृति/15 नियम से अभिकल्पित करने पर उसकी मोटाई 6 इंच से कम होगी, जो अनुभव से आवश्यक 1.5 फुट की तुलना में स्पष्टतः अपर्याप्त थी। गोतिए ने इस विसंगति की व्याख्या की:

> Il est certain qu'un grand Pont qui porte une grande voiture, est bien moins chargé qu'un Ponceau qui porte la meme voiture
>
> एक भारी गाडी वहन करने वाला बडा पुल, उसी गाडी को वहन करने वाले छोटे पुल की तुलना में बहुत कम भारित होता है।
>
> Gautier, 1765 *Traité des ponts*

गोतिए के कथन को स्पष्ट करने की आवश्यकता है: उनका आशय है कि यातायात भार और पुल के स्वयं के भार का *अनुपात* बडे पुल के लिए छोटे पुल की अपेक्षा बहुत कम होता है। भारी होने के कारण बडे पुल पर उसके स्वभार का प्रभुत्व होता है; गुजरती गाडी कुल भार का नगण्य अंश होती है। हल्का होने के कारण छोटे पुल पर वही गाडी समानुपातिक रूप से अधिक बडा विक्षोभ उत्पन्न करती है। यही कारण है कि समानुपातिक नियम ($t/s = \text{const.}$) छोटी विस्तृतियों के लिए विफल होते हैं: चल भार का निरपेक्ष परिमाण संरचना के साथ मापक्रमित नहीं होता, यद्यपि मृत भार होता है। यह पहली स्पष्ट पहचान थी कि मेहराबी पुल का अभिकल्प *असमानुपातिक* है।

निर्णायक समाधान जाँ रोदोल्फ पेरोने (1708–1794), एकोल दे पों ए शोसे के संस्थापक और प्रथम

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

निदेशक, से प्राप्त हुआ, जिनके कुछ प्रकाशित और अप्रकाशित संस्मरण थे। इनमें सर्वाधिक उल्लेखनीय उनका अप्रकाशित *Mémoire sur l'epaisseur que doivent avoir les voussoirs à la clef, dans les differentes voûtes des Ponts* (पुलों की विभिन्न मेहराबों में शिखर-खंड पर पच्चराकार खंडों की आवश्यक मोटाई पर संस्मरण) है।[4] इस अप्रकाशित 1748 के संस्मरण में पेरोने ने दो सौ से अधिक विद्यमान पुलों के आँकड़े संकलित किए और एक असमानुपातिक नियम व्युत्पन्न किया: अर्धवृत्ताकार मेहराबों के लिए शिखर-खंड की मोटाई t (फुट में) $t = s/24 + 1 - s/144$ होनी चाहिए, जहाँ s विस्तृति है। इस नियम ने छोटे पुलों के लिए पर्याप्त मोटाई प्रदान करते हुए बड़े पुलों के लिए अल्बेर्ती-गोतिए द्वारा निर्धारित मोटाई को लगभग आधा कर दिया। पेरोने ने अपने दृष्टिकोण को अनुभव के आधार पर उचित ठहराया:

> निर्माण के विषय में केवल परिकल्पना अनुभव पर वरीयता नहीं पा सकती।
>
> पेरोने, Huerta, 2018 "*Arch Bridge Design in Eighteenth-Century France: The Rule of Perronet*" में उद्धृत

उनका नियम एक शताब्दी से अधिक समय तक उपयोग में रहा; सफल पूर्वोदाहरणों के आँकड़ा-संग्रहों से प्रस्तावित अभिकल्पों की तुलना करने वाला यह अनुभवजन्य दृष्टिकोण आधुनिक निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी का पूर्वाभास देता है।

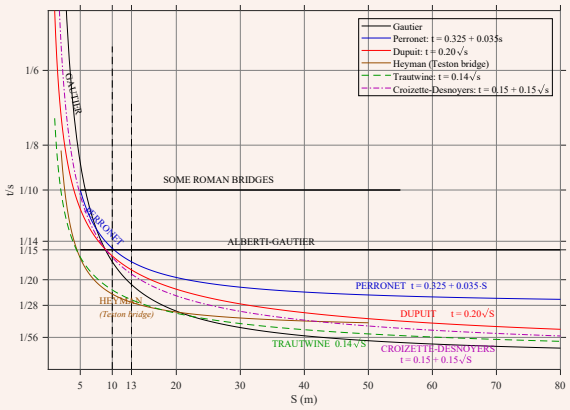
विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §63.3.2.3 देखें

चित्र 15.2 प्राचीन काल से उन्नीसवीं शताब्दी तक मेहराबी पुलों के अभिकल्प के अनुभवजन्य नियमों के विकास को दर्शाता है; इसमें मेहराब की मोटाई t और विस्तृति s के अनुपात को विस्तृति के फलन के रूप में आलेखित किया गया है। शीर्ष पर क्षैतिज पट्टी रोमन पुलों के सामान्य समानुपातों ($t/s \approx 1/10$ से $1/12$) को निरूपित करती है, जबकि शास्त्रीय स्रोतों से प्राप्त और पुनर्जागरणकालीन ग्रंथों में संहिताबद्ध अल्बेर्ती-गोतिए नियम $t/s = 1/15$ तीन शताब्दियों तक मानक समानुपातिक नियम बना रहा। गोतिए का 1717 का योगदान यह पहचानना था कि छोटी विस्तृतियों के लिए यह समानुपातिक नियम विफल होता है, जहाँ यातायात भार सापेक्षतः अधिक महत्त्वपूर्ण हो जाते हैं; छोटे मेहराबों ($s < 40$ फुट) के लिए उनका तीव्र वक्र प्रथम असमानुपातिक दृष्टिकोण था। पेरोने का 1748 का नियम, $t = 0.325 + 0.035s$ (मीटर में), एक निर्णायक प्रगति था: दो सौ से अधिक विद्यमान पुलों का अध्ययन करके उन्होंने दर्शाया कि बड़े मेहराब अल्बेर्ती के निर्धारण की अपेक्षा कहीं अधिक तनु बनाए जा सकते हैं—30 मीटर से अधिक विस्तृति के लिए आवश्यक मोटाई लगभग आधी। 1850 के बाद अभियंताओं ने पहचाना कि विस्तृति के वर्गमूल को सम्मिलित करने वाले नियम आकार और आवश्यक मोटाई के बीच अरैखिक संबंध को बेहतर व्यक्त करते हैं; इससे ड्यूपुई के $t = 0.2\sqrt{s}$ और ट्रॉटवाइन के $t = 0.14\sqrt{s}$ जैसे सूत्र विकसित हुए। $t/s \approx 1/56$ पर खंडित रेखा उस व्यावहारिक निम्न सीमा को निरूपित करती है जिसे Heyman, 1982 ने मध्ययुगीन टेस्टन पुल के अपने विश्लेषण से पहचाना था—यह इस बात का उल्लेखनीय प्रदर्शन है कि आधुनिक विश्लेषण के आगमन से पहले अनुभवजन्य अभिकल्प संरचनात्मक तनुता को कितनी दूर तक ले

[4] मैं इस दस्तावेज का pdf संस्करण नहीं खोज सका; मूल पांडुलिपि (Ms. 2202) पेरिस की *Bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées* में सुरक्षित है। पेरोने की पुल अभियांत्रिकी में रुचि रखने वाले पाठक उनकी बाद में प्रकाशित कृति (Perronet, 1782–1788) अथवा (Perronet, 1782) देख सकते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जा सकता था। इन वक्रों का क्रमिक अवरोह संचित अनुभव के माध्यम से सामग्री घटाने में अभियंताओं के बढ़ते आत्मविश्वास को प्रतिबिंबित करता है और अनुभवजन्य ज्यामितीय नियमों से यांत्रिकी-आधारित विश्लेषण की ओर उस संक्रमण का पूर्वाभास देता है जो अंततः उनका स्थान लेने वाला था।



चित्र 15.2: मेहराबी पुल के अभिकल्प के अनुभवजन्य नियमों का विकास ((Huerta, 2018 PDF) के आधार पर)।

इस प्रकार पुल-अभिकल्प के नियमों का विकास ज्यामितीय चिंतन से यांत्रिक चिंतन की ओर अधिक व्यापक संक्रमण का पूर्वाभास था। जहाँ केवल ज्यामिति पर निर्भर स्थिरता वाले भवनों के लिए विट्रुवियसी समानुपात पर्याप्त था, वहीं पुलों में बलों के निरपेक्ष परिमाण पर ध्यान देना आवश्यक था—एक ऐसा संकल्पनात्मक परिवर्तन जिसे गैलीलियो सैद्धांतिक रूप से व्यक्त करते और जो अंततः समस्त संरचनात्मक अभियांत्रिकी को रूपांतरित कर देता।

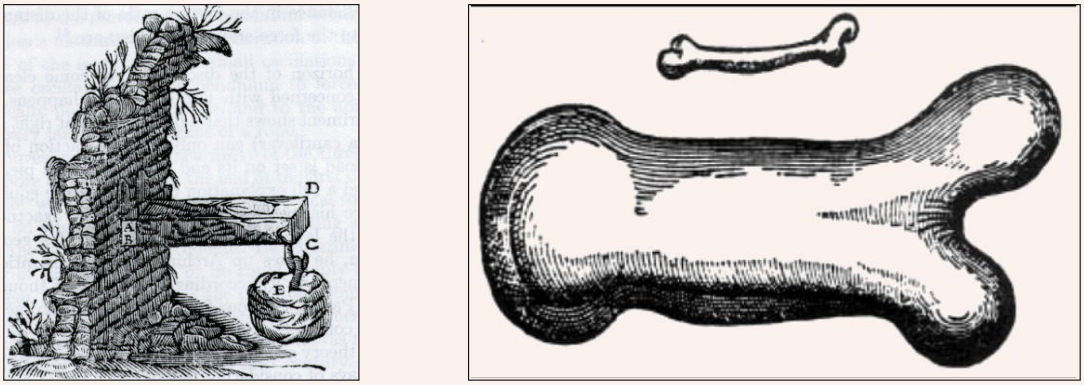
गैलीलियो की चुनौती समानुपात की यह सुविधाजनक व्यवस्था लगभग दो सहस्राब्दियों तक बनी रही, जब तक कि नई सामग्रियों और नई महत्त्वाकांक्षाओं ने भिन्न दृष्टिकोण की माँग नहीं की। Galilei, 1632 PDF ने ही उन दो आधारभूत धारणाओं को चुनौती दी: प्रथम, उन्होंने प्रतिबल की संकल्पना, §7.2.2 (एक धरन में, चित्र 15.3a) को ज्यामिति से स्वतंत्र अभिकल्प-विचार के रूप में प्रस्तुत किया; और द्वितीय, उन्होंने कहा कि मापक्रमण की एक सीमा होती है—कोई संरचना अपने समानुपातों को बनाए रखते हुए अनिश्चित सीमा तक केवल बड़ी नहीं की जा सकती[5], चित्र 15.3b। गैलीलियो के साथ विशुद्ध ज्यामितीय अभिकल्प का युग यांत्रिकी के युग के सम्मुख स्थान छोड़ने लगा। किंतु इस परिवर्तन के पूर्ण निहितार्थ प्रकट होने में शताब्दियाँ लगीं और पारंपरिक सामग्रियों के भवनों के लिए विट्रुवियसी समानुपात आधुनिक युग तक एक उपयोगी मार्गदर्शक बना रहा।

> मैंने एक बार एक अस्थि का आकार बनाया, उसकी लंबाई तीन गुना की और फिर उसे ऐसे समानुपात में मोटा किया कि वह बड़े प्राणी में उसी प्रकार कार्य कर सके जैसे छोटी अस्थि छोटे प्राणी के लिए करती है: ये चित्र देखिए; आप देखते हैं कि बड़ी की गई अस्थि का आकार कितना असमानुपातिक हो जाता है। इससे स्पष्ट है कि यदि कोई विशालकाय दैत्य में सामान्य मनुष्य के अंगों के समानुपात बनाए रखना चाहे, तो या तो उसकी अस्थियाँ बनाने के लिए कहीं अधिक कठोर और प्रतिरोधी सामग्री खोजनी होगी, अथवा उसकी सुदृढ़ता को औसत कद के मनुष्यों की अपेक्षा समानुपातिक

[5]लेखक ने इस विषय पर (Saouma and Fava, 2006 PDF) में विचार किया है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> रूप से कम होने देना होगा; अन्यथा अनुचित ऊँचाई तक बढने पर वह अपने ही भार से कुचला हुआ और गिरा हुआ दिखाई देगा।
>
> Galilei, 1632 *"Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"*



(a) प्रतिबल महत्त्वपूर्ण हैं (b) मापक्रमण की सीमाएँ

चित्र 15.3: गैलीलियो ने विट्रुवियस को चुनौती दी (Galilei, 1632)

15.2.1.3 वास्तुकार विट्रुवियस: चिरस्थायी त्रयी

यद्यपि *De Architectura* में प्राचीन सामग्रियों और तकनीकों पर पर्याप्त उपयोगी जानकारी थी, तथापि यांत्रिकी और आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण के उद्भव ने उन व्यावहारिक नियमों का बहुत पहले स्थान ले लिया। विट्रुवियस की जीवित विरासत वास्तुकला का उनका अधिक अमूर्त विश्लेषण है, जिसमें उन्होंने वास्तुशिल्पीय पूर्णता को तीन अविभाज्य गुणों—अपनी प्रसिद्ध *विट्रुवियसी त्रयी*—के रूप में परिभाषित किया:

विट्रुवियस वास्तुकला की चिरस्थायी त्रयी प्रस्तुत करते हैं: *firmitas* (संरचनात्मक सुदृढता), *utilitas* (कार्यात्मक पर्याप्तता), और *venustas* (सौंदर्यपरक आकर्षण)—एक ऐसी रूपरेखा जो संरचनात्मक अखंडता, सेवायोग्यता और वास्तुशिल्पीय अभिव्यक्ति पर आधुनिक चर्चाओं का पूर्वाभास देती है। विट्रुवियस का आग्रह है कि उत्तम निर्माण टिकाऊ, कार्यात्मक और सुंदर होना चाहिए; ये गुण स्वतंत्र नहीं, बल्कि परस्पर सुदृढकारी हैं। उनका ग्रंथ संरचनात्मक तर्क, सौंदर्यशास्त्र और निर्माण-विधियों की उस समग्र एकता को प्रदर्शित करता है जो रोमन अभियांत्रिकी के सर्वोत्तम रूप की विशेषता थी (Vitruvius, 1960, Book III, Chap III)।

Firmitas सामर्थ्य[6] (पुस्तकें II और III)

Utilitas उपयोगिता[7] (पुस्तकें IV और V)।

[6]आधुनिक शब्दावली में: सामर्थ्य, दृढता और स्थिरता की आवश्यकताओं को पूरा करना।
[7]इसने नीरो को बाद में बिना किसी वास्तविक उपयोगिता वाले भव्य भवन बनाने से नहीं रोका।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Venustas सौंदर्य (पुस्तकें VI–IX); सामाजिक अभिरुचियों के संदर्भ में यह स्वयं छह मूल संकल्पनाओं में विभाजित है (Vitruvius, 1960, Book I Chap. II):

समानुपातिक सिद्धांत: क्रम (*Ordinatio*), विन्यास (*dispositio*), मितव्ययिता (*distributio*)

सौंदर्यपरक गुण: सुरुचिपूर्ण समानुपात (*eurythmia*), सममिति (*symmetria*), औचित्य (*decor*)

इन परिभाषाओं से विट्रुवियस ने नियोजन और पूर्णता को नियंत्रित करने वाले निश्चित नियम व्युत्पन्न किए।

रोचक रूप से, इन तीनों उपदेशों को एक साथ रखने पर वे *De Architectura* में दस से भी कम पंक्तियाँ घेरते हैं और पुस्तक की किसी भूमिका में रेखांकित नहीं किए गए—मानो बाद में आया विचार हों:

> इन सभी का निर्माण *स्थायित्व, सुविधा और सौंदर्य* का समुचित ध्यान रखते हुए किया जाना चाहिए। स्थायित्व तब सुनिश्चित होगा जब नींव ठोस भूमि तक पहुँचाई जाए और सामग्रियों का विवेकपूर्ण तथा पर्याप्त चयन किया जाए; सुविधा तब, जब कक्षों की व्यवस्था निर्दोष हो और उपयोग में कोई बाधा न प्रस्तुत करे तथा जब भवन की प्रत्येक श्रेणी को उसके उपयुक्त और समुचित अभिविन्यास में रखा जाए; और सौंदर्य तब, जब कृति का स्वरूप मनोहर एवं सुरुचिपूर्ण हो और उसके अवयव सममिति के सही सिद्धांतों के अनुसार उचित समानुपात में हों।
>
> (Vitruvius, 1960) पुस्तक I अध्याय III

ये तीन पद केवल एक बार पुनः एक साथ आते हैं—"अब यूस्टाइल का विवरण देना आवश्यक है, जो सर्वाधिक अनुमोदित वर्ग है और सुविधा, सौंदर्य तथा सामर्थ्य को ध्यान में रखकर विकसित सिद्धांतों पर व्यवस्थित है"—पुस्तक III अध्याय III में, जहाँ स्तंभांतरों और स्तंभों के समानुपातों पर विचार किया गया है।

इन नियमों का विट्रुवियस के अपने समय की वास्तुकला पर बहुत कम प्रभाव पड़ा, किंतु पुनर्जागरण में इन्हें सत्य सिद्धांत के रूप में अपनाया गया। विट्रुवियसी त्रयी आज भी वास्तुशिल्पीय और अभियांत्रिकी शिक्षा की कसौटी है और व्यवसायियों को स्मरण कराती है कि संरचनाओं को एक साथ अनेक मानदंड पूरे करने चाहिए। यह त्रयी—सामर्थ्य, उपयोगिता, सौंदर्य—अल्बेर्ती से पल्लादियो तक सभी परवर्ती वास्तुशिल्पीय सिद्धांतों में प्रतिध्वनित होगी। जैसा कि हम §15.7.1 में देखेंगे, दक्षता, मितव्ययिता और सुरुचि के तीन स्तंभों वाली बिलिंग्टन की बीसवीं शताब्दी की "संरचनात्मक कला" की संकल्पना भी मूलतः उसी का पुनःसूत्रीकरण है जिसे विट्रुवियस ने दो सहस्राब्दी पूर्व व्यक्त किया था।

15.2.1.4 क्रीडकों और विद्वानों पर विट्रुवियस

विट्रुवियस के लेखन का एक कम ज्ञात किंतु आनंददायक पक्ष ओलंपिक क्रीडकों को उनके प्रशिक्षण से सुदृढ हुए शरीर के लिए पुरस्कृत करने, परंतु विद्वानों की *अपनी पुस्तकों में स्थापित शिक्षाओं* की उपेक्षा करने के अन्याय पर विचार करता है। यह शिकायत हमारे आधुनिक समाज में निश्चित रूप से प्रतिध्वनित होगी, जहाँ क्रीडा प्रशिक्षकों को साधारण नश्वर विद्वानों की तुलना में असंगत रूप से अधिक वेतन मिलता है:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> यूनानियों के पूर्वजों ने ओलंपिक, पाइथियन, इस्थमियन और नीमियन खेलों में विजयी प्रसिद्ध क्रीडकों के लिए इतने महान सम्मान निर्धारित किए कि सभा में ताड-पत्र और मुकुट धारण किए खडे होने पर उनका केवल करतल-ध्वनि से अभिवादन ही नहीं होता, बल्कि विजयोल्लास में अपने-अपने राज्यों को लौटते समय वे चार घोडों के रथों पर अपने नगरों और पैतृक गृहों में प्रवेश करते और सार्वजनिक व्यय पर जीवन भर निश्चित आय प्राप्त करते हैं। जब मैं इस पर विचार करता हूँ तो मुझे आश्चर्य होता है कि उन लेखकों को वही, बल्कि उससे भी बडे सम्मान क्यों नहीं दिए जाते जिनकी असीम सेवाएँ सभी कालों और सभी राष्ट्रों के लिए की जाती हैं। ऐसी प्रथा स्थापित करना और भी अधिक उचित होता, क्योंकि क्रीडकों के मामले में प्रशिक्षण से केवल उनका अपना शरीर सुदृढ होता है, जबकि लेखकों के मामले में उनकी पुस्तकों में ज्ञानार्जन और बुद्धि को तीक्ष्ण करने के लिए दी गई शिक्षाओं से न केवल उनका अपना, बल्कि सामान्यतः मनुष्य का मन सुदृढ होता है।
>
> (Vitruvius, 1960)

15.2.2 पुनर्जागरण के दौरान विट्रुवियस की पुनर्खोज

1414 में सेंट गैलेन के मठ में पुनः खोजी गई *De Architectura* पुनर्जागरणकालीन वास्तुकला का सैद्धांतिक आधार बनी। व्यापक रूप से माना जाता है कि *De Architectura* की "पुनर्खोज" पोज्जो ब्राच्चोलिनी ने की, जिन्होंने इसे स्विट्जरलैंड में सेंट गाल के ऐबी पुस्तकालय में पाया था[8]—किंतु यह खोज वास्तव में कितनी भी नवीन रही हो, इसने विट्रुवियस में नवीकृत रुचि के लिए उत्प्रेरक का कार्य किया। समय उपयुक्त था, क्योंकि यह पुनर्जागरण के आरंभिक वर्षों के अनुरूप था।

पुनर्जागरण के दौरान विट्रुवियस ने अनेक वास्तुकारों पर बडा प्रभाव डाला; इनमें विशेषतः अल्बेर्ती और पल्लादियो, किंतु साथ ही सेर्लियो और विग्नोला भी थे, जिन्होंने विट्रुवियस से प्रेरणा लेते हुए उनके सिद्धांतों को समकालीन प्रथा के अनुरूप ढाला। सारणी 15.1 तीन सर्वाधिक प्रतिष्ठित वास्तुशिल्पीय ग्रंथों—विट्रुवियस, अल्बेर्ती और पल्लादियो की कृतियों—की विषयवस्तु के साथ उनके संबंधित लेखकों द्वारा समर्थित वास्तुशिल्पीय सद्गुणों का सार प्रस्तुत करती है। आधी सहस्राब्दी अथवा दो सहस्राब्दी पूर्व लिखे जाने के समय की भाँति ये कृतियाँ आज भी प्रासंगिक हैं।

15.2.2.1 लियोन बत्तिस्ता अल्बेर्ती (1404–1472)

लियोन बत्तिस्ता अल्बेर्ती[9] (1404–1472) (Alberti, 1485) ने पुनर्जागरण का पहला व्यापक वास्तुशिल्पीय ग्रंथ लिखा और वास्तुकला को मध्ययुगीन शिल्प से मानवतावादी बौद्धिक विधा में रूपांतरित किया। उनका *De Re Aedificatoria* (निर्माण-कला पर) (Alberti, 1988), जो लगभग 1452 में पूर्ण और 1485 में मरणोपरांत प्रकाशित हुआ, कार्यक्षेत्र और महत्त्वाकांक्षा में विट्रुवियस की बराबरी करने वाली पहली कृति थी। लैटिन में लिखी और विट्रुवियस पर आधारित—यद्यपि कहीं अधिक व्यवस्थित और मौलिक—इस कृति में स्थल-चयन, निर्माण-सामग्री, निर्माण-विधियाँ, पवित्र और धर्मनिरपेक्ष भवन, अलंकरण तथा पुनरुद्धार से संबंधित दस पुस्तकें हैं। अल्बेर्ती ने पांडुलिपि पोप निकोलस V को प्रस्तुत की;[10] 1485 में

[8] इस दावे को Krinsky, 1967 ने चुनौती दी; उन्होंने दर्शाया कि उस समय विभिन्न यूरोपीय पुस्तकालयों में इसकी कम-से-कम अठहत्तर प्रतियाँ थीं।

[9] अल्बेर्ती के आरंभिक जीवन का अधिक विवरण §6.4.1 में पाया जा सकता है।

[10] जहाँ विट्रुवियस ने अपनी दस पुस्तकें सम्राट सीज़र ऑगस्टस को समर्पित कीं, वहीं अल्बेर्ती ने अपनी पुस्तकें पोप निकोलस V को समर्पित कीं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 15.1: विट्रुवियस, अल्बेर्ती और पल्लादियो के ग्रंथों की विषयवस्तु

पुस्तक	विट्रुवियस	अल्बेर्ती	पल्लादियो
एक	नगर नियोजन, सामान्यतः वास्तु-कला अथवा सिविल अभियांत्रिकी	रेखांकन-सिद्धांत	निर्माण-सामग्री और तकनीकें
दो	निर्माण-सामग्री	सामग्रियाँ	निजी नगरीय आवासों और ग्रामीण विला का अभिकल्प
तीन	मंदिर और वास्तुशिल्पीय क्रम	निर्माण	नगर नियोजन
चार	पुस्तक III की निरंतरता	सार्वजनिक निर्माण	प्राचीन काल के विशिष्ट रोमन मंदिरों के अभिकल्प और केवल एक समकालीन चर्च का अभिकल्प
[2pt] पाँच	असैनिक भवन	व्यक्तियों की कृतियाँ	
छह	घरेलू भवन	अलंकरण	
सात	फर्श और सजावटी पलस्तर-कार्य	पवित्र भवनों का अलंकरण	
आठ	जलापूर्ति और जलसेतु	सार्वजनिक धर्मनिरपेक्ष भवनों का अलंकरण	
नौ	वास्तुकला को प्रभावित करने वाले विज्ञान: ज्यामिति, मापन, खगोल-विद्या, सूर्यघडियाँ	निजी भवनों का अलंकरण	
दस	यंत्रों का उपयोग और निर्माण—रोमन घेराबंदी यंत्र, जलचक्कियाँ, जलनिकासी यंत्र, उच्चालन, वायवीय यंत्र	भवनों का पुनरुद्धार	

इसके प्रथम मुद्रित संस्करण से पहले यह पांडुलिपि के रूप में प्रसारित हुई। रोचक रूप से, विट्रुवियस का प्रथम मुद्रित संस्करण 1486 में आया और इसके बाद दोनों कृतियों ने पुनर्जागरणकालीन पाठकों पर परस्पर प्रभाव डाला।

सैद्धांतिक आधार और *Concinnitas* व्यवसायी वास्तुकार के रूप में लिखने वाले विट्रुवियस के विपरीत, अल्बेर्ती ने वास्तुकला को ऐसे सिद्धांतकार और बुद्धिजीवी की दृष्टि से देखा जिसने स्वयं शास्त्रीय भवनों का अध्ययन किया था और प्राचीन प्रामाणिकता पर आलोचनात्मक निर्णय लागू किया था। उन्होंने गणितीय समानुपातों और समानुपात के सार्वभौमिक सिद्धांतों पर आधारित *concinnitas*—अवयवों और समग्र के बीच सामंजस्यपूर्ण अनुरूपता—पर आधारित सौंदर्य का सिद्धांत विकसित किया[11] और सामंजस्य। सामंजस्यपूर्ण एकीकरण का यह सिद्धांत सुनिश्चित करता है कि समग्र को क्षीण किए बिना कुछ भी जोड़ा, हटाया अथवा परिवर्तित नहीं किया जा सकता; यह सौंदर्यपरक संयोजन और संरचनात्मक सुसंगति दोनों पर समान रूप से लागू होता है: सुअभिकल्पित भवन सुंदर, कार्यात्मक और सुदृढ होना चाहिए तथा ये गुण उन्हीं अंतर्निहित ज्यामितीय संबंधों से उद्भूत होने चाहिए।

अल्बेर्ती का आग्रह था कि वास्तुकार की उचित भूमिका रेखाचित्रों और प्रतिरूपों के माध्यम से

[11]जापानी सौंदर्यशास्त्र में एक समांतर संकल्पना विद्यमान है: *shibusa*, वह संयत सुरुचि का गुण जिसमें कोई अनावश्यक वस्तु शेष नहीं रहती। यह सिद्धांत—कि पूर्णता तब प्राप्त होती है जब और कुछ हटाया न जा सके—दक्षता की खोज में संरचनात्मक अभियंता और सौंदर्य की खोज में वास्तुकार, दोनों पर समान रूप से लागू होता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अभिकल्प करना तथा निष्पादन निर्माताओं पर छोड़ना है—इस विभेद ने वास्तुशिल्पीय अभ्यास को उदार कला का दर्जा दिया। भौतिक निर्माण की तुलना में *lineamenta* (अभिकल्प की अमूर्त ज्यामितीय रूपरेखा) की प्रधानता पर उनके बल ने अभिकल्प और निर्माण के बीच वह संकल्पनात्मक पृथक्करण स्थापित किया जो आधुनिक व्यावसायिक प्रथा की विशेषता है। इस ग्रंथ ने वास्तुकला को विद्वत्तापूर्ण ध्यान के योग्य उदार कला के रूप में स्थापित किया, बौद्धिक अभिकल्प को हस्तचालित निर्माण से पृथक किया और वास्तुकार को शिल्पी से विद्वान व्यवसायी तक उन्नत किया।

संरचनात्मक बोध और सामग्री के गुण *De Re Aedificatoria* इस परिष्कृत बोध के माध्यम से संरचनात्मक विषयों को सीधे संबोधित करता है कि भवन भारों का प्रतिरोध कैसे करते और कुछ रूप दूसरों से अधिक स्थिर क्यों होते हैं। अल्बेर्ती निर्माण-सामग्रियों—पत्थर, ईंट, काष्ठ और चूने—के गुणों तथा उनके उचित उपयोगों की चर्चा करते हैं। वे प्राचीन स्रोतों और रोमन भग्नावशेषों के अपने प्रेक्षणों, दोनों के आधार पर दीवार-निर्माण, नींव-अभिकल्प और मेहराबों के व्यवहार का विश्लेषण करते हैं। मेहराबी छतों का उनका विवेचन विभिन्न संरचनात्मक प्रकारों और उनके उचित अनुप्रयोगों में विभेद करता है। पूरे विवेचन में अल्बेर्ती इस बात पर बल देते हैं कि संरचनात्मक पर्याप्तता और सौंदर्यपरक गुणवत्ता अविभाज्य हैं: संरचनात्मक रूप से विफल भवन सुंदर नहीं हो सकता और समानुपातिक सामंजस्य का उल्लंघन करने वाला भवन वास्तव में सुदृढ नहीं हो सकता।

अलंकरण और आवश्यकता अल्बेर्ती संभवतः सुलिवन के अग्रदूत थे, क्योंकि उन्होंने उस विचार का समर्थन किया जिसे न्यूनतावादी दृष्टिकोण कहा जा सकता है—अलंकरण मनमाने ढंग से आरोपित होने के बजाय आवश्यकता से उद्भूत होना चाहिए:

> किसी भी वस्तु का प्रमुख और प्रथम अलंकरण सभी अनुचितताओं से मुक्त होना है। अतः विभाजन तभी न्यायसंगत और उचित होगा जब वह न तो भ्रमित हो, न खंडित; न अत्यधिक फैला हुआ हो, न अनुपयुक्त भागों से बना हो; और जब उसके अवयव न बहुत अधिक हों, न बहुत कम, न बहुत छोटे, न बहुत बड़े, न बेमेल अथवा कुरूप और न ही मानो शेष शरीर से पृथक एवं विभाजित हों। बल्कि प्रत्येक वस्तु प्रकृति, सुविधा और संरचना के अभिप्रेत उपयोगों के अनुसार ऐसे क्रम, संख्या, आकार, स्थिति और रूप में व्यवस्थित हो कि हमें विश्वास हो जाए कि संपूर्ण भवन में कुछ भी ऐसा नहीं है जिसकी संकल्पना किसी उपयोग अथवा सुविधा के लिए न की गई हो और सभी भागों का संयोजन सर्वाधिक सुंदर न हो .... अतः अवयवों का संपूर्ण संयोजन पूर्णतः आवश्यकता और सुविधा द्वारा निर्मित एवं निर्देशित प्रतीत होना चाहिए; जिससे भवन में अमुक-अमुक भाग होने की अपेक्षा इस बात से अधिक संतोष मिले कि वे ऐसी स्थिति, क्रम और संबद्धता में व्यवस्थित तथा विन्यस्त हैं।
>
> Alberti, 1485

स्थायी प्रभाव *De Re Aedificatoria* का प्रभाव गहरा और स्थायी था। इसने पुनर्जागरणकालीन वास्तुकला का सैद्धांतिक आधार स्थापित किया और ब्रामांते, राफेल तथा माइकेलएंजेलो को प्रभावित किया। 1550 में इतालवी में अनूदित इसने शताब्दियों तक वास्तुशिल्पीय शिक्षा को आकार दिया। अल्बेर्ती के इस आग्रह ने—कि वास्तुकला गणितीय, सौंदर्यपरक और संरचनात्मक परिमेय सिद्धांतों पर आधारित होनी चाहिए—शास्त्रीय प्राचीनता और आधुनिक अभियांत्रिकी विज्ञान के उद्भव के बीच महत्त्वपूर्ण सेतु प्रदान किया। इस अर्थ में *De Re Aedificatoria* वास्तुकला पर पहला "आधुनिक" ग्रंथ था और इसे रोमन तथा पुनर्जागरणकालीन वास्तुकला के बीच सेतु माना जाता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15.2.2.2 आंद्रेआ पल्लादियो (1508–1580)

उनके आरंभिक जीवन का विवरण §6.4.3 में पाया जा सकता है।

I Quattro Libri dell'Architettura चार पुस्तकें क्रमशः इन विषयों पर विचार करती हैं: मूलभूत सिद्धांत, सामग्रियाँ और तकनीकें (पुस्तक I); पल्लादियो के अपने विला और महलों सहित घरेलू वास्तुकला (पुस्तक II); सार्वजनिक भवन, मार्ग और नगरीय अभिकल्प (पुस्तक III); तथा प्राचीन रोमन मंदिर (पुस्तक IV)। यह संगठन सिद्धांतों से व्यवहार और फिर पूर्वोदाहरण की ओर बढ़ता है और सैद्धांतिक आधार तथा व्यावहारिक प्रतिरूप दोनों प्रदान करता है। पूर्ववर्ती वास्तुशिल्पीय ग्रंथों के विपरीत पल्लादियो ने सैद्धांतिक सिद्धांतों को सटीक निर्माण-विवरणों और मापित रेखाचित्रों—विमाओं सहित तल-योजनाओं, उन्नयनों तथा अनुप्रस्थ काटों—से जोड़ा और वास्तुशिल्पीय प्रलेखन का ऐसा मानक स्थापित किया जो व्यावसायिक प्रथा के लिए आज भी मूलभूत है। ऐसा करके पल्लादियो ने वास्तुकला को समानुपात, ज्यामिति और निर्माणात्मक तर्क द्वारा नियंत्रित परिमेय विधा के रूप में स्थापित किया।

समानुपातिक तंत्र और संरचनात्मक स्पष्टता पल्लादियो के समानुपातिक तंत्र उनकी पद्धति के केंद्र में हैं। उन्होंने संगीतात्मक व्यंजनों के अनुरूप सामंजस्यपूर्ण अनुपातों से कक्षों की विमाएँ व्युत्पन्न कीं और संबंधित समानुपातों से आगे बढ़ने वाले स्थानिक अनुक्रम बनाए। किसी विला के कक्ष 1:1, 1:$\sqrt{2}$, 2:3 और 3:4 के अनुपातों का अनुसरण कर सकते थे, जिससे सौंदर्यपरक सामंजस्य के रूप में बोधगम्य गणितीय संबंध स्थापित होते थे। ये समानुपात केवल तल-योजना की विमाओं को ही नहीं, बल्कि छत की ऊँचाइयों, खिड़कियों के आकारों और अग्रभाग के संयोजनों को भी नियंत्रित करते हैं और प्रत्येक मापक्रम पर ज्यामितीय संबंधों से एकीकृत भवन बनाते हैं।

सौंदर्यशास्त्र से आगे पल्लादियो ने संरचनात्मक स्पष्टता पर व्यवस्थित ध्यान दिया। उनके विला स्पष्ट संरचनात्मक पदानुक्रम अपनाते हैं: भारवाही दीवारें प्रमुख स्थानों को परिभाषित करती हैं, स्तंभ और प्रस्तरपाद परिसंचरण को स्पष्ट करते हैं तथा छत की संरचनाएँ परिमेय और सुपाठ्य प्रतिरूपों में अवलंबों के बीच विस्तृत होती हैं। उनके पुल-अभिकल्प—रियाल्टो के प्रसिद्ध किंतु अनिर्मित परियोजना सहित—काष्ठ और पत्थर की संरचनाओं में बलों के प्रवाह का परिष्कृत बोध प्रदर्शित करते हैं। पुस्तक I में विस्तृत निर्माण-विनिर्देश नींव, दीवार-निर्माण और निर्माण-सामग्रियों के गुणों पर व्यावहारिक विशेषज्ञता के साथ विचार करते हैं।

विट्रुवियसी सिद्धांत और वास्तुशिल्पीय सिद्धांत पल्लादियो ने इस बात पर बल दिया कि अपनी पुस्तक तैयार करते समय उन्होंने वास्तुकला पर लिखने वाले पूर्ववर्तियों की कृतियों का अध्ययन किया था और एक से अधिक अवसरों पर वे अल्बेर्ती के महत्त्व को रेखांकित करते हैं। किंतु सभी आधुनिक पुस्तकों से ऊपर वे विट्रुवियस को रखते हैं, जिन्हें उन्होंने *per maestro, e guida* (गुरु और मार्गदर्शक के रूप में) चुना। वे संभवतः किसी भी अन्य समकालीन वास्तुकार की तुलना में विट्रुवियस से अधिक परिचित थे (Wittkower, 1944 PDF)। अपने *Quattro Libri* में पल्लादियो विट्रुवियस के प्रति पुनर्जागरण के ऋण को स्वीकार करते और त्रयी का अपना रूपांतर प्रस्तावित करते हैं: उपयोगिता, सुविधा, स्थायित्व और सौंदर्य (Palladio, 1570 PDF)। इन गुणों के संबंध में पल्लादियो ने लिखा:

> सौंदर्य मनोहर आकार तथा समग्र का भागों से और भागों का परस्पर तथा समग्र से संबंध होने के कारण उत्पन्न होगा, क्योंकि भवनों को पूर्ण और सुपरिभाषित शरीरों के समान दिखाई देना चाहिए जिनका एक अवयव दूसरे से मेल खाता हो और जिनमें सभी अवयव अपेक्षित प्रयोजन के लिए आवश्यक हों।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Palladio, 1570 *I quattro libri dell'architettura*, pp. I, I, 7

वैश्विक प्रभाव और वास्तुशिल्पीय विरासत पल्लादियो का प्रभाव इटली से बहुत दूर तक फैला। इनिगो जोन्स ने सत्रहवीं शताब्दी के आरंभ में पल्लादियावाद को इंग्लैंड पहुँचाया; लॉर्ड बर्लिंगटन ने अठारहवीं शताब्दी में उसे पुनर्जीवित किया; और उसने अटलांटिक पार करके जेफरसन के वर्जीनिया से लेकर गृहयुद्ध-पूर्व दक्षिण तक अमेरिकी वास्तुकला को आकार दिया। उनके महलों और विला का चार सौ वर्षों तक अनुकरण हुआ; वे घर की योजना को व्यवस्थित करने और प्राचीन यूनानी-रोमन मंदिर के अग्रभाग को निरंतर मंडप के रूप में उपयोग करने वाले प्रथम वास्तुकार थे। मंदिर-अग्रभाग वाले मंडपों, सममित योजनाओं और सामंजस्यपूर्ण समानुपातों से युक्त उनके विला-अभिकल्पों ने ऐसी शब्दावली परिभाषित की जो इटली से बहुत दूर तक फैली। प्रतिरूपक समानुपातिक तंत्रों के उनके उपयोग ने वास्तुशिल्पीय रूप, संरचनात्मक अभिन्यास और स्थानिक संगठन को सुसंगत रूप से ग्रहण करना संभव बनाया। अठारहवीं शताब्दी में इसने अंग्रेजी वास्तुकला पर प्रभुत्व स्थापित किया और बाद में थॉमस जेफरसन के मॉन्टिचेलो से लेकर असंख्य न्यायालयों, बागानों और संस्थागत भवनों तक अमेरिकी सार्वजनिक और घरेलू भवनों को गहराई से प्रभावित किया। इन संदर्भों में पल्लादियाई वास्तुकला परिमेयता, स्थिरता और नागरिक व्यवस्था से संबद्ध हो गई।

संरचनात्मक चिंतन के इतिहास में स्थान संरचनात्मक तर्क के इतिहास में पल्लादियो का स्थान अद्वितीय है। यद्यपि उन्होंने यांत्रिकी का सिद्धांत सूत्रबद्ध नहीं किया अथवा बलों और प्रतिबलों का स्पष्ट विश्लेषण नहीं किया, तथापि उनका कार्य दर्शाता है कि वास्तुशिल्पीय रूप संरचनात्मक तर्क के अनुकूल परिमेय सिद्धांतों को कैसे मूर्त कर सकता है। उनके भवन भार-पथों, सममिति और निर्माणात्मक स्पष्टता का अंतर्बोध प्रकट करते हैं—ऐसे गुण जिन्हें परवर्ती संरचनात्मक विश्लेषण गणितीय रूप से औपचारिक बनाता। समानुपात, संतुलन और नियमितता पर उनके आग्रह ने भवनों पर अंतर्निहित संरचनात्मक क्रम आरोपित किया और वास्तुशिल्पीय रूप को निर्माण-साध्यता के अनुरूप किया।

पल्लादियाई अभिकल्प की स्पष्टता, परिमेयता और व्यवस्थापन ने शास्त्रीय वास्तुकला तथा आधुनिक संरचनात्मक चिंतन के बीच महत्त्वपूर्ण सेतु प्रदान किया। इस अर्थ में पल्लादियो आरंभिक यांत्रिकी के समानांतर धारा का प्रतिनिधित्व करते हैं: ऐसी परंपरा जिसमें ज्यामिति, समानुपात और निर्माण-प्रथा ने संरचनाओं के परवर्ती वैश्लेषिक विवेचन का पूर्वाभास दिया। वास्तुशिल्पीय रूप पर उनके प्रभाव ने वह स्थिर रूपरेखा प्रदान की जिसके भीतर संरचनात्मक यांत्रिकी का उभरता विज्ञान बाद में कार्य कर सका।

15.2.2.3 त्रयी का पुनर्क्रमण

जहाँ विट्रुवियस ने लैटिन अनुक्रम *firmitas, utilitas, venustas* गढ़ा, वहीं अल्बेर्ती और पल्लादियो दोनों ने पदों को इतालवी *comodità* (उपयोगिता), *perpetuità* (स्थायित्व), *bellezza* (सौंदर्य) के रूप में पुनःक्रमित किया। दोनों सूत्रणों में *venustas* (अथवा *bellezza*) का अंत में आना संकेत करता है कि सौंदर्य केवल पहली दो आवश्यकताओं की पूर्ति के माध्यम से प्राप्त किया जा सकता है—अर्थात् सौंदर्यपरक गुणवत्ता कार्यात्मक और संरचनात्मक पर्याप्तता पर आरोपित होने के बजाय उनसे उद्भूत होती है। यह एक महत्त्वपूर्ण बिंदु है और §15.7.1 में बिलिंगटन द्वारा इन्हीं सिद्धांतों के बीसवीं शताब्दी के पुनःसूत्रीकरण का परीक्षण करते समय हम इस पर लौटेंगे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जैसा कि Wittkower, 1944 ने अल्बेर्ती के ग्रंथ के विषय में कहा:

> अल्बेर्ती की भूमिका के प्रमुख विषयों में से एक मानवजाति के लिए वास्तुकला की कला की सेवा है। भूमिका कहती है कि वास्तुकला "सभी दृष्टियों से मानवजाति के लिए सर्वाधिक सुविधाजनक" होनी चाहिए। जिस भवन में इस सार्वजनिक और निजी उपयोगिता के अतिरिक्त कोई अन्य गुण न हो, वह भी देखने में आनंददायक होगा। प्रयोजन की भिन्नता के अनुसार प्रत्येक भवन के लिए भिन्न प्रकार का सौंदर्य उचित है; इस प्रकार अल्बेर्ती ने सापेक्ष सौंदर्य के अरस्तूवादी सिद्धांत का पालन किया, जो बाद में अठारहवीं शताब्दी के वास्तुशिल्पीय आलोचकों में लोकप्रिय हुआ। अल्बेर्ती ने बार-बार इस विचार पर बल दिया कि वास्तुकला मुख्यतः आवश्यकता और सुविधा से विकसित होती है; केवल अंत में और गौण रूप से ही वह आनंद तथा मनोरंजन के अधीन होती है। वास्तुकला के अध्ययन का उचित मार्ग निर्माण के सामान्य विवेक से आरंभ करना है। यही उनके ग्रंथ का प्रमुख स्वर है।
>
> Wittkower, 1944 *"Principles of Palladio's Architecture"*

दूसरे शब्दों में, शताब्दियों के दौरान सर्वाधिक प्रतिष्ठित पुनर्जागरणकालीन वास्तुकार विट्रुवियसी सद्गुणों (अथवा त्रयी) का अनेक बार पुनरवलोकन कर चुके हैं; अतः किसी कथित नवीन परिभाषा के पक्ष में उनकी उपेक्षा नहीं की जा सकती। अल्बेर्ती के समय से वास्तुकला की संकल्पना अनुप्रयुक्त गणित के रूप में की गई, क्योंकि तब तक तार्किक विश्लेषण द्वारा उसका परीक्षण लगभग नहीं हुआ था (Wittkower, 1944)।

15.2.2.4 अभियंता के रूप में अल्बेर्ती और पल्लादियो

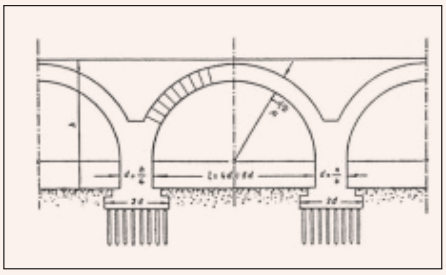
संरचनात्मक अभियंता की रुचि उस बात में हो सकती है जो मूलतः सीमेंट के निर्माण और उसके बाद कंक्रीट मिश्रण बनाने के लिए अल्बेर्ती का मार्गदर्शन है:

> ... जो पत्थर खदान से अभी-अभी निकाला गया हो, वह लंबे समय तक रखे गए पत्थर से उत्तम है; और जिसे एक बार गारे से जोड़ा जा चुका हो, वह दूसरी बार अच्छी तरह नहीं जुड़ेगा। पत्थर के विषय में इतना पर्याप्त है। जहाँ तक चूने का संबंध है, वे उस चूने को अनुपयुक्त मानते हैं जो भट्ठे से निकलते समय साबुत ढेलों में न होकर टूटे टुकड़ों और मानो चूर्ण के रूप में हो, और कहते हैं कि वह कभी उपयोगी सिद्ध नहीं होगा। वे उस चूने की प्रशंसा करते हैं जो अग्नि में शुद्ध और श्वेत होता है, हल्का तथा ध्वन्यात्मक होता है, और जिस पर जल डालने से वह फटता तथा गाढ़े धुएँ का प्रबल गुबार वायु में ऊपर छोड़ता है। पहला दुर्बल होने के कारण स्वाभाविक रूप से कम बालू माँगता है; किंतु दूसरा सुदृढ होने के कारण अधिक बालू माँगता है। केटो निर्देश देते हैं कि प्रत्येक दो फुट कार्य के लिए एक बुशल चूना और दो बुशल बालू रखा जाए; अन्य लोग भिन्न समानुपात निर्धारित करते हैं। विट्रुवियस और प्लिनी बालू को इस प्रकार मिलाने के पक्ष में हैं: प्रत्येक बुशल चूने में तीन बुशल खदान की बालू अथवा दो बुशल नदी या समुद्र की बालू। अंत में, जब पत्थर की गुणवत्ता और प्रकृति के कारण गारे को अधिक तरल अथवा नम्य रखना आवश्यक हो (जिसकी चर्चा हम नीचे अधिक स्पष्टता से करेंगे), तो बालू को छलनी से छाना जाना चाहिए; किंतु जब उसे अधिक कठोर रखना हो, तब उसमें आधी बजरी और पत्थर के टूटे टुकड़े मिलाएँ। सभी सहमत हैं कि यदि उसमें एक-तिहाई टूटी अथवा पीसी हुई खपरैल या ईंट मिलाई जाए तो वह कहीं अधिक संसंजक होगा। किंतु आप उसे जैसे भी मिलाएँ, बार-बार चलाना आवश्यक है, जब तक कि छोटे-से-छोटे कण समाहित न हो जाएँ; और कुछ लोग इसी प्रयोजन से, तथा उसे अच्छी तरह मिलाने के लिए, गारे के पात्र में उसे लंबे समय तक चलाते और कूटते हैं। यहाँ सीमेंट के विषय में हम और कुछ नहीं कहेंगे, केवल इतना कि चूना किसी अपरिचित पत्थर की अपेक्षा अपनी ही जाति के पत्थर, विशेषतः उसी खदान के पत्थर, को अधिक अच्छी तरह बाँधता है।
>
> (Alberti, 1485)

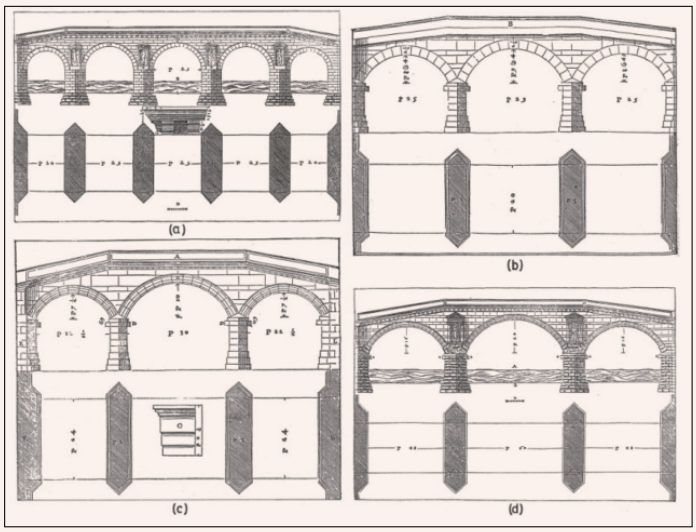
सामग्रियों से आगे अल्बेर्ती ने संभवतः पुनर्जागरण में पुल-अभिकल्प का पहला व्यवस्थित विवेचन

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रस्तुत किया। उनके *De re aedificatoria* (Alberti, 1485) ने पुस्तक चार और आठ में पुलों पर पर्याप्त ध्यान दिया तथा ऐसे सटीक ज्यामितीय नियम दिए जो तीन शताब्दियों तक पुल-निर्माताओं को प्रभावित करने वाले थे (Huerta, 2018)। स्तंभाधारों के लिए अल्बेर्ती ने विस्तृति की एक-तिहाई चौड़ाई निर्धारित की—यह नियम मध्ययुगीन प्रथा तक खोजा जा सकता है और सारागोसा के पाषाण पुल से संबंधित 1401 की एक पांडुलिपि में मिलता है (Huerta, 2004)। मुकुट पर मेहराब की मोटाई के लिए उन्होंने विस्तृति की एक-पंद्रहवीं से अधिक न होने का विनिर्देश दिया: “किसी बड़े पुल में उन्हें कुल विवर के एक-पंद्रहवें से अधिक स्थान नहीं लेना चाहिए।” उन्होंने मुखावरण मेहराबों के लिए विस्तृति के कम-से-कम एक-दसवें का वैकल्पिक नियम भी दिया। ये नियम इतने सटीक थे कि केवल उन्हीं से पुल की संपूर्ण ज्यामिति पुनर्निर्मित की जा सकती थी (चित्र 15.4a)।



(a) मेहराबी पुल के अभिकल्प के लिए अल्बेर्ती के नियम, Straub, 1952 के आधार पर



(b) पल्लादियो द्वारा वर्णित पुल (1570): (a) रिमिनी का रोमन पुल; (b) रेरोने पर मध्ययुगीन पुल; (c) विसेंज़ा में पल्लादियो का पुल; (d) नए पुल का अभिकल्प (Palladio, 1570)

चित्र 15.4: पुनर्जागरणकालीन पुल-अभिकल्प: अल्बेर्ती के ज्यामितीय नियम और पल्लादियो के प्रलेखित उदाहरण (Huerta, 2018)

वास्तविक पुल-अभिकल्प और निर्माण की जटिलता की तुलना में ये नियम स्थूल प्रतीत हो सकते हैं, किंतु उन्होंने उस प्रधान शिल्पी को अभिविन्यास दिया जिसके पास उन्हें लागू करने—और आवश्यक होने पर उनसे विचलित होने—का विवेक था। जैसा कि Huerta, 2018 कहते हैं, पुलों पर अल्बेर्ती का खंड उनकी सार्वजनिक निर्माण पर पुस्तक छह का पूरा एक-चौथाई भाग घेरता है और स्थल-चयन से लेकर नींव-निर्माण तथा सामग्रियों तक प्रत्येक पक्ष पर विचार करता है; इसमें डैन्यूब पर जूलियस सीज़र के पुल और मेम्फिस में राजा मेनेस के पुल जैसे ऐतिहासिक उदाहरण अंतर्गुंफित हैं। नियम रूढ़िवादी थे: रोमन पुलों में सामान्यतः मोटाई-विस्तृति अनुपात 1/10 और 1/12 के बीच थे, यद्यपि असाधारण संरचनाओं ने कहीं अधिक तनुता प्राप्त की। नार्नी के रोमन पुल के मुख्य मेहराब (21 m विस्तृति) ने 1/17 प्राप्त किया; टोलेडो के रोमन आलकांतारा पुल (28.8 m) ने 1/16 प्राप्त किया (Fernández Casado, 1980)।

पल्लादियो ने अपनी विशेष शैली में स्पष्ट नियमों के बजाय मापित उदाहरणों से शिक्षा दी—एक ऐसी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

शिक्षण-पद्धति जिसने प्रलेखित पूर्वोदाहरणों के भीतर सुरक्षित समानुपात समाहित किए। उनकी तीसरी पुस्तक (Palladio, 1570) चार पुलों को उनकी विमाओं सहित प्रस्तुत करती है (सारणी 15.2): रिमिनी का रोमन पुल, रेरोने पर मध्ययुगीन पुल, विसेंज़ा में उनका अपना पुल और एक असाकारित अभिकल्प। यह प्रगति शिक्षाप्रद है: जहाँ रोमन और मध्ययुगीन प्रथा 1/10 से 1/12 तक के अनुपातों पर बनी रही, पल्लादियो की अपनी कृति 1/12 पर मध्ययुगीन पूर्वोदाहरण के समान थी, जबकि उनका कल्पित अभिकल्प 1/17 की ओर बढ़ा—सर्वाधिक साहसिक रोमन संरचनाओं की तनुता के निकट और अठारहवीं शताब्दी की फ्रांसीसी पुल अभियांत्रिकी की विशेषता बनने वाले क्रमिक कृशीकरण का पूर्वाभास।

तालिका 15.2: पल्लादियो (1570) में पुलों के समानुपात, Huerta, 2018 के आधार पर

पुल	मेहराब की मोटाई/विस्तृति
(a) रोमन पुल (रिमिनी)	1/10
(b) मध्ययुगीन पुल (रेरोने)	1/12
(c) पल्लादियो का पुल (विसेंज़ा)	1/12
(d) पल्लादियो का अभिकल्प	1/17

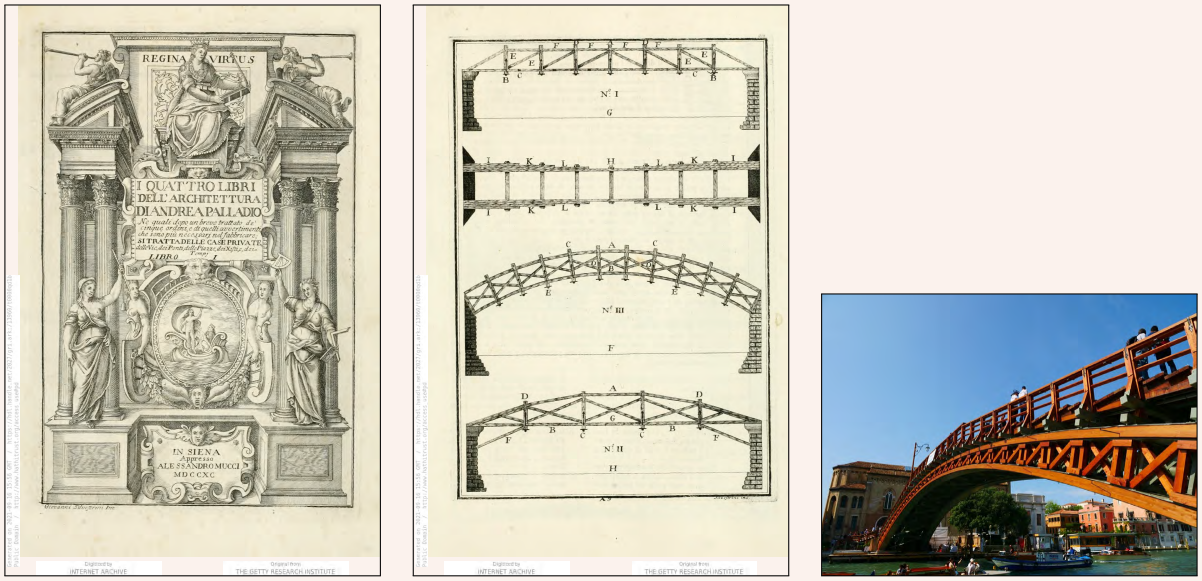
समानुपातिक नियमों की अल्बेर्ती-पल्लादियो परंपरा एक मूलभूत अंतर्दृष्टि पर आधारित थी: चिनाई संरचनाओं की स्थिरता निरपेक्ष आकार के बजाय ज्यामिति पर निर्भर करती है। किसी एक मापक्रम पर खड़ा रहने वाला मेहराब अपने समानुपात बनाए रखने पर किसी भी मापक्रम पर खड़ा रहेगा। भवनों के लिए मूलतः सही यह सिद्धांत पुलों के लिए अपर्याप्त सिद्ध होने वाला था। जैसा कि उबेर गोतिए ने पहली बार 1716 में पहचाना, पुलों को भारी यातायात भारों के आवागमन का वहन करना चाहिए और यह समस्या मूलतः असमानुपातिक है: किसी दिए हुए भार के लिए छोटे पुल "दुर्बल"—गुजरते वाहनों की क्रिया के प्रति अधिक संवेदनशील—होते हैं। जो गाड़ी किसी विशाल पुल को कठिनाई से प्रभावित करती है, वह छोटे पुल पर गंभीर प्रतिबल उत्पन्न कर सकती है। इस पहचान ने अंततः जाँ-रोदोल्फ पेरोने को अपने अप्रकाशित 1748 के संस्मरण में ऐसे नियम प्रस्तावित करने की ओर अग्रसर किया जिन्होंने बड़ी विस्तृतियों के लिए अल्बेर्ती-गोतिए द्वारा निर्धारित मोटाई को लगभग आधा कर दिया—ये नियम सैद्धांतिक यांत्रिकी (जिसे पेरोने ने समस्या की जटिलता के लिए अपर्याप्त माना) से नहीं, बल्कि दो सौ से अधिक विद्यमान पुलों के व्यवस्थित अध्ययन से व्युत्पन्न थे। पेरोने ने लिखा, "निर्माण के विषय में केवल परिकल्पना अनुभव पर वरीयता नहीं पा सकती" (Huerta, 2018)।

किंतु पल्लादियो की रुचि चिनाई मेहराबों से आगे तक विस्तृत थी। उनकी तीसरी पुस्तक के अध्याय 8 का शीर्षक *Dì tre altre invenzioni secondo le quali si ponno fare i ponti di legno senza porre altrimenti pali nel fiume* है—यह उन अन्य आविष्कारों के विषय में है जिनसे नदी में स्तंभाधार लगाए बिना काष्ठ-पुल बनाए जा सकते हैं। जैसा चित्र 15.5b में दिखाया गया है, यह उस संरचनात्मक रूप के प्रथम अभिलिखित चित्रणों में था जिसे बाद में कैंची कहा गया। वास्तव में कैंची मेहराबी पुल से अधिक परिष्कृत संरचनात्मक रूप है: इसमें भारी पत्थरों की नहीं, केवल काष्ठ-अवयवों की आवश्यकता होती है; और यद्यपि दर्शाए गए कुछ रूप आधुनिक संरचनात्मक बोध की दृष्टि से अपरंपरागत हैं (मूल पट्ट में चित्र III), अन्य पूर्णतः पर्याप्त अभिकल्प हैं जो परवर्ती विकासों का पूर्वाभास देते हैं।

वेनिस का प्रसिद्ध *Ponte dell'Accademia* पल्लादियो के मेहराबी पुल-अभिकल्प (पट्ट में चित्र III)

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

से उल्लेखनीय समानता रखता है, यद्यपि इसका निर्माण 1854 में हुआ और मूलतः यह लोहे का था; इसके बाद इसे ध्वस्त करके 1933 में काष्ठ से पुनर्निर्मित किया गया। संभवतः यह केवल संयोग हो—अथवा पल्लादियो की संरचनात्मक कल्पना के स्थायी प्रभाव का प्रमाण।



(a) आवरण पृष्ठ (b) कैंचियाँ (c) वेनिस का *Ponte dell'Accademia*

चित्र 15.5: पल्लादियो की *Four Books of Architecture* (Palladio, 1570)

यहाँ हम एक ऐसा उदाहरण देखते हैं जिसमें वास्तुकार संरचनात्मक रूप का नवोन्मेषक था।[12] बाद में इटली में संरचनात्मक अभियंताओं के अभिकल्प वास्तुशिल्पीय उत्कृष्ट कृतियाँ बनने वाले थे—जैसे पियर लुइजी नेर्वी का *Palazzetto dello Sport*, जिसका परीक्षण हम §19.2.12 में करेंगे।

15.2.3 मानवमिति और मापक्रम का प्रश्न

शरीर का वास्तुकला से संबंध और शारीरिकता की जटिल परिघटना वास्तुशिल्पीय संस्कृति में सदैव उपस्थित रहे हैं। प्राचीन काल से बीसवीं शताब्दी तक वास्तुकारों और सिद्धांतकारों ने वास्तुशिल्पीय समानुपात को मानव रूप के मापों और अनुपातों पर आधारित करने का प्रयास किया—यह प्रथा *मानवमिति* कहलाती है। अंतर्निहित धारणा थी कि मानव शरीर से व्युत्पन्न समानुपातों में सहज सामंजस्य होता है, जो भवनों पर लागू किए जाने पर वैसा ही सामंजस्यपूर्ण परिणाम देगा—और ये समानुपात किसी भी मापक्रम पर लागू किए जा सकते हैं।

[12] वास्तव में आज भी इतालवी विश्वविद्यालयों में वास्तुकला के छात्र संरचनात्मक विश्लेषण के अनेक पाठ्यक्रम पढ़ते हैं, न कि अधिकांश अन्य देशों की भाँति केवल एक "परिचयात्मक" पाठ्यक्रम।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15.2.3.1 विट्रुवियस: आधारभूत पाठ

विट्रुवियस ने मानव समानुपात को वास्तुकला से जोड़ने वाला आधारभूत प्रेरक्षण प्रस्तुत किया:

> प्रकृति ने मानव शरीर को इस प्रकार अभिकल्पित किया है कि ठोड़ी से ललाट के शीर्ष और केशों की निम्नतम जड़ों तक मुख की लंबाई संपूर्ण ऊँचाई का दसवाँ भाग है; कलाई से मध्यमा के सिरे तक खुला हाथ भी ठीक उतना ही है; ठोड़ी से शिखर तक सिर आठवाँ भाग है, और वक्ष के शीर्ष से केशों की निम्नतम जड़ों तक गर्दन तथा कंधे सहित छठा भाग है; वक्ष के मध्य से सिर के शिखर तक चौथा भाग है। यदि हम स्वयं मुख की ऊँचाई लें, तो ठोड़ी के निचले भाग से नासाछिद्रों के अधोभाग तक की दूरी उसका एक-तिहाई है; नासाछिद्रों के अधोभाग से भौंहों के बीच की रेखा तक नासिका भी इतनी ही है; वहाँ से केशों की निम्नतम जड़ों तक ललाट सहित दूरी भी एक-तिहाई है। पाद की लंबाई शरीर की ऊँचाई का एक-छठा भाग, अग्रबाहु एक-चौथाई और वक्ष की चौड़ाई भी एक-चौथाई है। अन्य अंगों के भी अपने सममित समानुपात हैं और उन्हीं का उपयोग करके प्राचीन काल के प्रसिद्ध चित्रकारों तथा मूर्तिकारों ने महान और चिरस्थायी ख्याति प्राप्त की।
>
> इसी प्रकार मंदिर के अवयवों में विभिन्न भागों के संपूर्ण परिमाण के साथ सममित संबंधों में सर्वाधिक सामंजस्य होना चाहिए....
>
> Vitruvius, 1960 *The Ten Books on Architecture*, Book III, Chapter I

विट्रुवियस के लिए सुगठित मानव शरीर में *symmetria*—भागों की समग्र से सहमाप्यता—विद्यमान थी, जिसका वास्तुकला को अनुकरण करना चाहिए। उन्होंने कहा कि नाभि फैले हुए अंगों को परिबद्ध करने वाले वृत्त का केंद्र निर्धारित करती है, जबकि भुजाओं को क्षैतिज फैलाने पर एक वर्ग आकृति को अंतर्विष्ट करता है: इन प्रेरक्षणों ने पुनर्जागरण के कलाकारों और वास्तुकारों को मोहित किया।

15.2.3.2 मध्ययुगीन संचार

ऐसे समानुपातों को संहिताबद्ध करने के आरंभिक मध्ययुगीन प्रयासों में से एक विलार द ओन्नकूर (fl. c. 1225–1250) का था, जिनके पोर्टफोलियो में मानव और पशु रूपों पर ज्यामितीय आकृतियाँ अध्यारोपित करने वाले योजनाबद्ध रेखाचित्र हैं, चित्र 15.7a (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858)। परवर्ती मानकों की दृष्टि से स्थूल होते हुए भी ये रेखाचित्र जैविक रूप को निर्माणयोग्य ज्यामिति में परिवर्तित करने का प्रयास दर्शाते हैं—यह उस युग में कार्यरत प्रधान राजगीर के लिए व्यावहारिक चिंता थी, जब अभिकल्प-ज्ञान मुद्रित ग्रंथों के बजाय रेखाचित्रों और कार्यशाला-प्रथा के माध्यम से संचारित होता था।

15.2.3.3 पुनर्जागरणकालीन पुनरुत्थान

विट्रुवियसी आदर्शों के पुनर्जागरणकालीन पुनरुत्थान ने अधिक कठोर अन्वेषणों को प्रेरित किया। लियोन बत्तिस्ता अल्बेर्ती (1404–1472) ने अपने लघु ग्रंथ *De Statua*[13] (Alberti and Tiraboschi, 1804) में समानुपातिक अनुपातों से आगे बढ़कर शारीरिक विमाओं के सटीक मापन और अंतरण के उपकरण विकसित किए। उनकी *exempeda* ने ऐसी मापन-प्रणाली स्थापित की जिसमें मानव ऊँचाई को छह फुट (*pedes*), प्रत्येक फुट को दस इंच (*unceolae*) और प्रत्येक इंच को दस सूक्ष्मांशों (*minuta*) में

[13]उनके अन्य उल्लेखनीय योगदानों में *De Pictura* (*De Statua* के साथ प्रकाशित), 1435, और *De Re Aedificatoria*, 1452—पुनर्जागरण का प्रथम वास्तुशिल्पीय ग्रंथ—सम्मिलित हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विभाजित किया गया था—यह दशमलव उपविभाजन परवर्ती मापविज्ञानी सुधारों का पूर्वाभास था। इससे अधिक कौशलपूर्ण उनका *definitor* अथवा *finitorium*, चित्र 15.7b, था, जिसमें एक घूर्णी भुजा वाली वृत्ताकार अंशांकित चकती थी और उस भुजा से साहुल-रेखा लटकती थी। इसकी सहायता से किसी प्रतिरूप के प्रत्येक बिंदु को ध्रुवीय कोण और ऊर्ध्वाधर निर्देशांक के संयोजन द्वारा अभिलिखित किया जा सकता था, जिससे मृत्तिका प्रतिरूप से संगमरमर खंड तक अभूतपूर्व सटीकता के साथ यांत्रिक अंतरण संभव होता था।

उर्बिनो के ड्यूक के वास्तुकार और अभियंता फ्रांचेस्को दी जॉर्जियो मार्तिनी (1439–1501) ने मानवमितीय चिंतन को अधिक प्रत्यक्ष रूप से वास्तुकला में विस्तारित किया। अपने *Trattati di architettura, ingegneria e arte militare* (Giorgio Martini, ca. 1480 PDF) में उन्होंने चर्च की तल-योजनाओं, दुर्ग-विन्यासों और स्तंभ-परिच्छेदों पर मानव आकृति अध्यारोपित करने वाले उल्लेखनीय रेखाचित्र बनाए। फ्रांचेस्को के लिए यह अनुरूपता मात्र रूपक नहीं थी: मध्यभाग धड, अनुप्रस्थ भाग भुजाएँ और अर्धगोलाकार छोर सिर बन गया। इस शारीरिक प्रतिचित्रण ने स्थानों के उनके समानुपात-निर्धारण और दुर्ग-अभिकल्प के उनके दृष्टिकोण को प्रभावित किया।

लियोनार्दो दा विंची का प्रसिद्ध *Vitruvian Man* (c. 1490), चित्र 15.7c, विट्रुवियसी पाठ के सर्वाधिक परिष्कृत पुनर्जागरणकालीन संश्लेषण का प्रतिनिधित्व करता है।[14] लियोनार्दो का नवोन्मेष विट्रुवियस में निहित एक ज्यामितीय पहेली के समाधान में था: एक ही आकृति को वृत्त और वर्ग दोनों में कैसे अंतर्लिखित किया जा सकता है? अंगों की स्थिति को थोड़ा समायोजित करके और वृत्त का केंद्र नाभि पर स्थानांतरित करते हुए, जबकि वर्ग का आधार पादों पर रखा गया, लियोनार्दो ने दर्शाया कि दोनों रचनाएँ सह-अस्तित्व रख सकती हैं—वृत्त ब्रह्मांडीय अथवा दिव्य ज्यामिति और वर्ग पार्थिव तथा निर्माणयोग्य ज्यामिति का प्रतिनिधित्व करता है।

ये पुनर्जागरणकालीन अन्वेषण मात्र कलात्मक अभ्यास नहीं थे। मानव समानुपातों द्वारा किसी दिव्य अथवा प्राकृतिक व्यवस्था को प्रतिबिंबित करने के विश्वास ने वास्तुशिल्पीय नियमों के लिए सैद्धांतिक औचित्य प्रदान किया। जब अल्बेर्ती अथवा पल्लादियो कक्ष की विमाओं अथवा स्तंभांतरों के लिए विशिष्ट अनुपात निर्धारित करते थे, तब वे अंतर्निहित रूप से इसी मानवमितीय आधार का आह्वान करते थे: मानव शरीर के समान समानुपातित भवनों में वही सहज सामंजस्य होगा।

15.2.3.4 बीसवीं शताब्दी: मोड्यूलर & शार्ल-एदुआर जनेरे ले कोर्बुज़िए (1887–1965)

शार्ल-एदुआर जनेरे का जन्म 1887 में स्विट्ज़रलैंड के ला शो-द-फों में हुआ, जो घड़ी-निर्माण उद्योग और उसकी परिशुद्ध शिल्पकारी की संस्कृति से आकार पाया नगर था। स्थानीय कला विद्यालय में उन्हें आरंभतः उत्कीर्णक और सजावटी कलाकार के रूप में प्रशिक्षित किया गया, जहाँ वे शार्ल लेप्लातेनिये के प्रभाव में आए; उन्होंने जनेरे को वास्तुकला की ओर मोड़ा और संरचना तथा रूप के व्यवस्थित प्रेक्षण को प्रोत्साहित किया। इटली, जर्मनी और बाल्कन की आरंभिक यात्राओं ने जनेरे को शास्त्रीय वास्तुकला, देशज निर्माण और उभरती औद्योगिक विधियों से परिचित कराया तथा ऐसी विश्वदृष्टि को आकार दिया

[14] लोकप्रिय विश्वास के विपरीत इस रेखाचित्र का स्वर्ण अनुपात से कोई संबंध नहीं है; लियोनार्दो विट्रुवियस के विशिष्ट समानुपातिक दावों को चित्रित कर रहे थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जिसमें ऐतिहासिक चेतना और आधुनिक प्रौद्योगिकी के प्रति आकर्षण का संयोजन था[15] 1917 में वे स्थायी रूप से पेरिस में बस गए और ले कोर्बुज़िए नाम अपनाया, जो शैक्षणिक परंपरा से निर्णायक विच्छेद का प्रतीक था।

वे 20वीं शताब्दी के सर्वाधिक प्रभावशाली वास्तुकार और ऐसे विवादात्मक लेखक थे जिनके लेखन ने वास्तुशिल्पीय विमर्श को उतनी ही गहराई से आकार दिया जितना उनके भवनों ने नगरों को।[16] उनके घोषणापत्र *Towards a New Architecture* (Le Corbusier, 1931 PDF), जो 1923 में प्रकाशित हुआ, ने भवन को "रहने की मशीन" मानने की उत्तेजक संकल्पना प्रस्तुत की[17]—इस सूत्रण ने आधुनिक आंदोलन के प्रकार्यवादी कार्यक्रम को सघन रूप दिया और माँग की कि वास्तुकला अभियांत्रिकी की परिमेय स्पष्टता को अपनाए।

यह पुस्तक निबंधों, छायाचित्रों और विवादात्मक लेखों का कोलाज है, जिसमें अनाज-भंडारों, मोटरगाड़ियों और समुद्री जहाजों के चित्रों को पार्थेनन तथा रोमन वास्तुकला के साथ रखा गया है। ले कोर्बुज़िए ने तर्क दिया कि गणना और मितव्ययिता के आधार पर कार्यरत अभियंताओं ने ऐसा सामंजस्य तथा सौंदर्य प्राप्त किया था जिसकी बराबरी शैक्षणिक इतिहासवाद में फँसे समकालीन वास्तुकार नहीं कर सकते थे। उन्होंने घोषणा की, "अभियंता का सौंदर्यशास्त्र और वास्तुकला—ये दो वस्तुएँ साथ चलती और एक-दूसरे से उत्पन्न होती हैं।" अभियांत्रिकीय तर्क का यह उत्सव—संरचना की सत्यनिष्ठ अभिव्यक्ति, प्रकार्य का अनुसरण करता रूप और हटाया गया अलंकरण—आधुनिकतावाद का मूलमंत्र बन गया।

ले कोर्बुज़िए के "नई वास्तुकला के पाँच बिंदुओं" (*Les cinq points d'une architecture nouvelle*) (Corbusier and Jeanneret, 1929 PDF), जिन्हें 1927 में सूत्रबद्ध किया गया, ने आधुनिकतावादी अभिकल्प के मूलभूत सिद्धांत स्थापित किए:

1) **पायलोटी** —प्रबलित कंक्रीट के स्तंभ जो भारवाही दीवारों का स्थान लेते और भवन को भूमि से ऊपर उठाते हैं, जिससे भू-तल परिसंचरण के लिए मुक्त होता और संरचनात्मक स्पष्टता पर आधारित नया सौंदर्यशास्त्र बनता है;

2) **मुक्त योजना** —संरचना को दीवारों से पृथक करने पर नम्य आंतरिक विन्यास संभव होते हैं, जिनमें स्थानों को स्थायी विभाजकों के बजाय चलायमान पर्दों से विभाजित किया जाता है;

3) **मुक्त अग्रभाग** —तलों को बालकनी की भाँति अवलंबी स्तंभों से बाहर प्रक्षेपित करने पर अग्रभाग

[15] ले कोर्बुज़िए उपनाम अपनाने से पहले युवा जनेरे ने ऑगुस्त पेरे के पेरिस स्थित आटेलिए (1908–1910) में कार्य किया, जिनसे उन्होंने प्रबलित कंक्रीट में संरचनात्मक सत्यनिष्ठा का सिद्धांत ग्रहण किया—और बाद में उसके विरुद्ध प्रतिक्रिया भी की। §15.4.5 देखें।

[16] 1927 में उन्होंने और उनके चचेरे भाई पियर जनेरे ने जिनेवा में राष्ट्र संघ भवन की प्रतियोगिता के लिए अभूतपूर्व अभिकल्प प्रस्तुत किया। उनकी परियोजना को इस तकनीकी आधार पर अयोग्य घोषित किया गया कि रेखाचित्र प्रतियोगिता के नियमानुसार भारतीय स्याही में हस्तनिर्मित होने के बजाय मशीन से मुद्रित थे। इस निर्णय को व्यापक रूप से रूढ़िवादी निर्णायकों द्वारा उस उग्र आधुनिक अभिकल्प को बाहर करने का बहाना माना गया जिसने "भवन" की पारंपरिक धारणाओं को तोड़ा था। इस विवाद ने अंतरराष्ट्रीय आधुनिक आंदोलन को प्रेरित किया और सीधे 1928 में Congrès Internationaux d'Architecture Moderne (CIAM) की स्थापना का कारण बना।

[17] ले कोर्बुज़िए के राजनीतिक संबंधों पर विद्वानों ने व्यापक विमर्श किया है। यद्यपि उन्होंने मुसोलिनी सहित अधिनायकवादी नेताओं से काम माँगा और कुछ समय विची फ्रांस (1940-41) के साथ कार्य किया, अधिकांश इतिहासकार निष्कर्ष निकालते हैं कि वे वैचारिक फासीवादी के बजाय अवसरवादी प्रौद्योगिकीविद् थे। उनकी प्रमुख प्रतिबद्धता किसी भी उपलब्ध राजनीतिक व्यवस्था के माध्यम से अपनी वास्तुशिल्पीय दृष्टि को कार्यान्वित करना थी। Fishman, 1982*Urban Utopias in the Twentieth Century* (1977) देखें।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अपना संरचनात्मक प्रकार्य खो देता है और खिड़कियाँ आंतरिक विभाजनों से किसी संबंध के बिना किसी भी लंबाई तक विस्तृत हो सकती हैं;

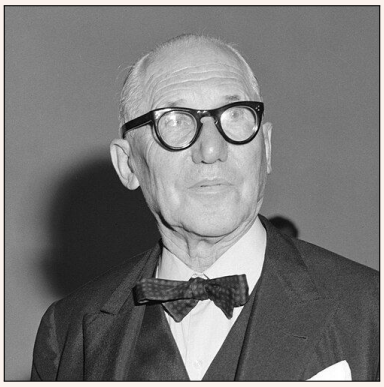
4) **क्षैतिज खिड़कियाँ** —पट्टीनुमा खिड़कियाँ जो समतुल्य ऊर्ध्वाधर विवरों की तुलना में आठ गुना अधिक प्रबल प्रकाश देती हैं, साथ ही विहंगम दृश्य बनाती और भवन की रैखिक ज्यामिति पर बल देती हैं;

5) **छत उद्यान** —समतल छतों को रोपित वेदिकाओं में परिवर्तित किया जाता है, जो निर्माण के कारण खोए हरित क्षेत्र को पुनःस्थापित करते हुए ऊष्मारोधन और बाह्य निवास-स्थान प्रदान करती हैं। विला सावोआ (1929–1931) में प्रत्यक्ष ये सिद्धांत वह रचना बनाते हैं जिसे ले कोर्बुज़िए ने “रहने की मशीन” कहा—ऐसी वास्तुकला जिसने स्थानिक अभिकल्प को मूलतः पुनर्गठित करने के लिए औद्योगिक तर्क और आधुनिक सामग्रियाँ अपनाईं।

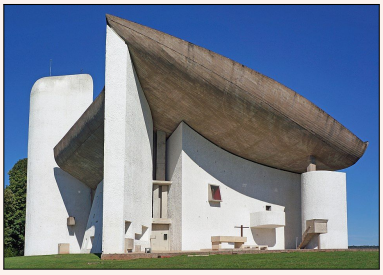
उनकी निर्मित कृतियाँ—यूनिते दाबितासियों[18] (Cité de l’architecture & du patrimoine, 2015 PDF) (चित्र 15.6a), रोंशाँ का प्रार्थनालय (चित्र 15.6c) और चंडीगढ़ के भवन—उनके चिंतन का शुद्धतावादी परिमेयवाद से मूर्तिकला-सदृश अभिव्यक्तिवाद तक विकास दर्शाते हैं, फिर भी सभी में संरचनात्मक स्पष्टता और सामग्रियों की सत्यनिष्ठ अभिव्यक्ति के प्रति प्रतिबद्धता समान है। ले कोर्बुज़िए द्वारा संरचनात्मक दक्षता और वास्तुशिल्पीय सौंदर्यशास्त्र का एकीकरण, उनका आग्रह कि सौंदर्य आरोपित सजावट के बजाय परिमेय अभिकल्प से उद्भूत होता है, तथा नई सामग्रियों और निर्माण-विधियों का उनका आलिंगन—इन सबने ऐसे प्रतिमान स्थापित किए जो वास्तुशिल्पीय शिक्षा और प्रथा को निरंतर आकार दे रहे हैं।



(a) Unité d’Habitation



(b) 1964 में शार्ल-एदुआर



(c) Chapelle Notre-Dame-du-Haut

चित्र 15.6: शार्ल-एदुआर जनेरे ले कोर्बुज़िए

मोड्यूलर तंत्र वास्तुशिल्पीय समानुपात की परंपरा ले कोर्बुज़िए के *Modulor* (1948, संशोधित 1955), चित्र 15.7d (Corbusier, 1954 PDF; Corbusier, 1955) के साथ रूपांतरित स्वरूप में बीसवीं शताब्दी तक

[18]मार्सेय की Unité d’Habitation (1947–1952), जिसे Cité Radieuse भी कहा जाता है, ऊर्ध्वाधर आवासीय समुदायों की अपनी संकल्पना का ले कोर्बुज़िए द्वारा पहला और सर्वाधिक प्रसिद्ध साकार रूप था। पायलोटी पर स्थित 337 आवासों वाला यह भवन, आंतरिक विपणन मार्ग, छत की सुविधाओं और मोड्यूलर समानुपातिक तंत्र के अनुप्रयोग सहित, नांत-रेज़े, बर्लिन, ब्रिए-ऑं-फोरे तथा फिर्मिनी में निर्मित चार अतिरिक्त Unités d’Habitation का आदिप्ररूप बना।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जारी रही। द्वितीय विश्व युद्ध के दौरान विकसित और उसके बाद के वर्षों में परिष्कृत यह समानुपातिक तंत्र मानव शरीरक्रिया को वास्तुशिल्पीय तथा संरचनात्मक विमाओं से जोड़ने वाला सार्वभौमिक मापक्रम बनाने का स्पष्ट प्रयास था। मानव शरीर की विमाओं, स्वर्ण अनुपात और फिबोनाची अनुक्रम पर आधारित मोड्यूलर की संकल्पना मानवमिति, गणित और निर्माण के बीच सेतु के रूप में की गई थी, जो संरचनात्मक अवयवों, स्थानिक प्रतिरूपकों और भवन-घटकों के आकार निर्धारण के लिए सुसंगत संख्यात्मक रूपरेखा प्रदान करता था। यद्यपि इसकी मानकीय धारणाओं और सीमित अनुकूलनशीलता के लिए प्रायः आलोचना की गई, मोड्यूलर ने ऐतिहासिक पूर्वोदाहरण अथवा मनमाने सौंदर्यपरक नियमों के बजाय मापनीय, अर्ध-अभियांत्रिकीय सिद्धांतों पर वास्तुशिल्पीय समानुपात को आधारित करने के गंभीर प्रयास का प्रतिनिधित्व किया और मानव मापक्रम को औद्योगिक परिमेयता से समन्वित करने की ले कोर्बुज़िए की चिरस्थायी महत्त्वाकांक्षा को प्रतिबिंबित किया।

ले कोर्बुज़िए ने इसे इस प्रकार परिभाषित किया:

> ‘मोड्यूलर’ गणित और मानव मापक्रम पर आधारित माप है: यह संख्याओं की दो श्रेणियों—लाल श्रेणी और नीली श्रेणी—से निर्मित है।
>
> Corbusier, 1954 *The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics*, p. 60

ले कोर्बुज़िए का तंत्र 1.83 m (छह फुट) की मानक मानव ऊँचाई से आरंभ हुआ, जिसे आंशिक रूप से मीटरी और इंपीरियल मापों में समन्वय के लिए चुना गया था—यह महत्त्वाकांक्षा उन्होंने उल्लेखनीय दृढता से अपनाई। इस ऊँचाई से प्रमुख बिंदु स्थापित किए गए: सौर जालक 1.13 m पर और उठी भुजा का शीर्ष 2.26 m (सौर जालक की ऊँचाई का दोगुना)। जैसा उन्होंने लिखा, सभी माप “एक ही स्रोत, माप 113, छह फुट ऊँचे मनुष्य के सौर जालक से उत्पन्न होते हैं” (Corbusier, 1954)। फिर इन विमाओं को फिबोनाची पर आधारित दो परस्पर संबद्ध श्रेणियों—“लाल श्रेणी” और “नीली श्रेणी”—के माध्यम से विस्तृत किया गया, जिनमें प्रत्येक पद अपने समीपवर्ती पदों के साथ लगभग स्वर्ण अनुपात में है।

सौर जालक की ऊँचाई (1.13 m) पर आधारित लाल श्रेणी ने यह उत्पन्न किया:

$$\ldots,\ 27,\ 43,\ 70,\ 113,\ 183,\ 296,\ \ldots \text{ cm}$$

सौर जालक की ऊँचाई के दोगुने (2.26 m) पर आधारित नीली श्रेणी ने यह उत्पन्न किया:

$$\ldots,\ 33,\ 53,\ 86,\ 140,\ 226,\ 366,\ \ldots \text{ cm}$$

इन दोनों श्रेणियों ने विमाओं की वह परास प्रदान की जिसे ले कोर्बुज़िए ने अपने युद्धोत्तर भवनों में प्रयुक्त किया; विशेषतः मार्सेय की Unité d’Habitation (1947–1952) में लगभग प्रत्येक विमा—आवास की चौड़ाई, छत की ऊँचाई, ब्रिज-सोलेय का अंतराल—मोड्यूलर मानों से व्युत्पन्न थी।

ले कोर्बुज़िए ने अपने कार्य को स्थिर विट्रुवियसी परंपरा से विचलन के रूप में स्पष्टतः प्रस्तुत किया:

> लियोनार्दो और उनके समकालीनों ने—विट्रुवियस को ध्यान में रखते हुए—मनुष्य के शरीर को खुली भुजाओं सहित वृत्त के भीतर रखकर उसके समानुपात दर्शाए थे। वह स्थिर मनुष्य है, जो स्थिर वास्तुकला के अनुरूप है.... [ले कोर्बुज़िए] अपने तंत्र को ऊपर उठी भुजा वाले मनुष्य से उदाहरणित करते हैं। वह गतिशील मनुष्य है, जो गतिशील वास्तुकला के अनुरूप है।
>
> Corbusier, 1954 *The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics*, p. 75

जहाँ विट्रुवियस और लियोनार्दो ने निष्क्रिय संतुलन में फैली भुजाओं वाले विश्रामरत मनुष्य को चित्रित किया, वहीं ले कोर्बुज़िए की आकृति ऊपर की ओर पहुँचती है—एक सक्रिय संकेत जो निवासयोग्य स्थान की ऊर्ध्वाधर विमा स्थापित करता है।

मोड्यूलर ने प्रशंसा और आलोचना दोनों आकर्षित कीं। 1946 में प्रिंसटन में इस तंत्र को दिखाए जाने पर अल्बर्ट आइंस्टाइन ने ऐसा आकलन दिया जिसे ले कोर्बुज़िए जीवन भर उद्धृत करते रहे:

> उसी संध्या मुझे लिखे पत्र में आइंस्टाइन ने 'मोड्यूलर' के विषय में यह कहने की कृपा की: *यह समानुपातों का ऐसा मापक्रम है जो बुरे को कठिन और अच्छे को सरल बनाता है।*
>
> Corbusier, 1954 *The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics*, p. 58

ले कोर्बुज़िए ने इसे विज्ञान से प्राप्त मान्यता माना, यद्यपि आलोचकों ने कहा कि यह तंत्र आदर्शीकृत पुरुष शरीर के अनुसार अंशांकित था और अधिक लंबे व्यक्तियों को इसके स्थान संकुचित लग सकते थे। अधिक मूलभूत रूप से, गणितीय सार्वभौमिकता का मोड्यूलर का दावा संरचनात्मक अथवा कार्यात्मक आवश्यकता के बजाय सौंदर्यपरक प्राथमिकताओं पर आधारित था।

15.2.3.5 समानुपात से श्रमदक्षता-विज्ञान तक

मोड्यूलर ने वास्तुशिल्पीय समानुपात को मानवमितीय सिद्धांतों पर आधारित करने के अंतिम प्रमुख प्रयास का प्रतिनिधित्व किया। बीसवीं शताब्दी के परवर्ती विकासों—विशेषतः अर्न्स्ट नॉयफर्ट की *Bauentwurfslehre* (Architects' Data, 1936) (Neufert, 1970) और हेनरी ड्रेफस की *The Measure of Man* (1960) (Dreyfuss, 1960)—ने समानुपातिक सामंजस्य से श्रमदक्ष कार्यात्मकता की ओर परिवर्तन किया: चिंता ब्रह्मांडीय व्यवस्था नहीं, बल्कि फर्नीचर, उपकरणों और स्थानिक अंतरालों के अभिकल्प में मानव शरीर के आकारों की परास को समायोजित करने वाली व्यावहारिक अनुरूपता बन गई।

15.2.3.6 अंतर्निहित धारणा: मापक्रम-स्वतंत्रता

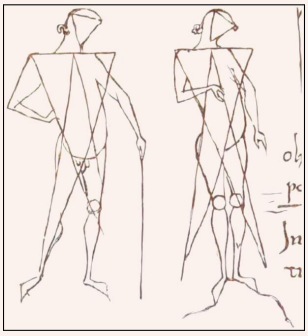
विट्रुवियस से ले कोर्बुज़िए तक दो सहस्राब्दी की इस संपूर्ण परंपरा में मानवमितीय समानुपात के साथ एक अंतर्निहित धारणा जुड़ी थी: मानव शरीर से व्युत्पन्न अनुपात किसी भी मापक्रम पर लागू किए जा सकते हैं। कोई मंदिर छोटे पूजास्थल के समान समानुपात अपना सकता था; कोई गिरजाघर मात्र बड़े रूप में लिखा गया प्रार्थनालय हो सकता था। चिनाई संरचनाओं के लिए यह धारणा अधिकांशतः वैध सिद्ध

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हुई—जैसा §15.2.1 में कहा गया है, पत्थर इतना अल्प प्रतिबलित होता है कि अभिकल्प को सामर्थ्य नहीं, ज्यामिति नियंत्रित करती है।

किंतु इस धारणा की सीमाएँ हैं। जैसा गैलीलियो ने अपने *Discorsi* में प्रदर्शित किया (जिसकी चर्चा §15.2.1 में की गई है), कोई संरचना अपने समानुपात बनाए रखते हुए अनिश्चित सीमा तक केवल बड़ी नहीं की जा सकती। अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल और आयतन का अनुपात मापक्रम के साथ बदलता है: रैखिक विमाएँ दोगुनी करने पर क्षेत्रफल चार गुना, जबकि आयतन (और इसलिए भार) आठ गुना बढ़ता है। प्रतिबल बढ़ते हैं और अंततः सामग्री विफल हो जाती है। यही कारण है कि हाथियों के पैर चूहों की तुलना में समानुपातिक रूप से अधिक मोटे होते हैं और गॉथिक गिरजाघर अपनी ऊँची महत्त्वाकांक्षाओं के बावजूद ऐसी व्यावहारिक सीमाओं तक पहुँचे जिन्हें कितना भी ज्यामितीय परिष्कार पार नहीं कर सकता था।

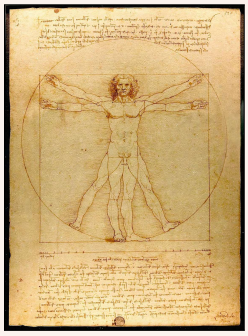
इस प्रकार मानवमितीय परंपरा एक उल्लेखनीय बौद्धिक उपलब्धि का प्रतिनिधित्व करती है—किंतु वह उन भौतिक वास्तविकताओं से सीमित है जिन्हें गैलीलियो ने पहली बार व्यक्त किया और आधुनिक संरचनात्मक विश्लेषण ने सटीक बनाया। केवल समानुपात यांत्रिकी का स्थान नहीं ले सकता।



(a) विलार द ओन्नकूर, ca. 1240 (De Honnecourt, 1858)



(b) अल्बेर्ती का *Definitor* (Alberti and Tiraboschi, 1804)



(c) लियोनार्दो का *Vitruvian Man*, c. 1490



(d) ले कोर्बुज़िए का *Modulor* (Corbusier, 1954)

चित्र 15.7: मानवमितीय समानुपात तंत्र: मध्ययुगीन ज्यामिति से पुनर्जागरणकालीन मानवतावाद होते हुए बीसवीं शताब्दी के आधुनिकतावाद तक

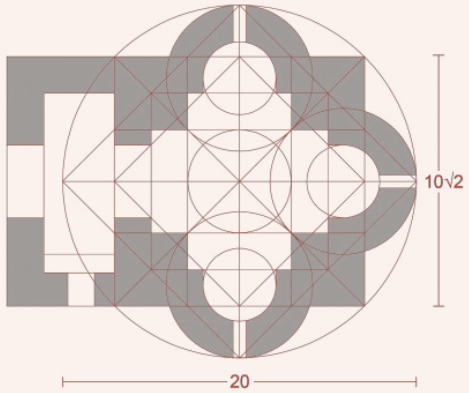
15.2.3.7 क्रियात्मक ज्यामिति: प्रधान शिल्पी वास्तव में अपने भवनों का अनुरेखण कैसे करते थे

ऊपर परीक्षण की गई मानवमितीय परंपरा बताती है कि वास्तुकार समानुपात के विषय में कैसे *सोचते* थे। एक पूरक प्रश्न—प्रधान शिल्पी निर्माण-स्थल पर इन सिद्धांतों को कैसे *लागू* करते थे—उतनी ही समृद्ध और आश्चर्यजनक रूप से व्यवस्थित प्रथा प्रकट करता है। हाल के शोध (Oikonomou, 2022) ने प्राचीन मिस्र से अठारहवीं शताब्दी तक प्रयुक्त क्रियात्मक ज्यामिति का पुनर्निर्माण किया है और प्रदर्शित किया है कि विभिन्न संस्कृतियों तथा सहस्राब्दियों में दो पृथक निर्माणात्मक विधियाँ निरंतर प्रयुक्त होती थीं।

पहली विधि, *ad quadratum*, वृत्त में अंतर्लिखित वर्गों के घूर्णन पर आधारित है। वृत्त में अंतर्लिखित वर्ग को 45° घुमाने पर दूसरा वर्ग बनता है, जिसकी भुजा का पहले वर्ग से अनुपात $1 : \sqrt{2}$ होता है—यह अपरिमेय संबंध विशुद्ध व्यावहारिक ज्यामितीय संक्रिया से स्वाभाविक रूप से उत्पन्न होता है। दूसरी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विधि, *ad triangulum*, नियंत्रक वृत्त के भीतर समबाहु त्रिभुज अंतर्लिखित करती है और $\sqrt{3}$ द्वारा नियंत्रित ऊँचाई-चौड़ाई अनुपात उत्पन्न करती है। ये दोनों संक्रियाएँ—किसी भी मापक्रम पर परकार और रस्सी से सरलता से निष्पादित—मिस्री पिरामिडों से गॉथिक गिरजाघरों तक ऐतिहासिक संरचनाओं में पाए जाने वाले प्रमुख समानुपातिक संबंध उत्पन्न करती थीं। चित्र 15.8 बाइजेंटाइन त्रिशंखी चर्च की योजना पर लागू दोनों विधियों को दर्शाता है; मूल वृत्त का व्यास ठीक 20 बाइजेंटाइन फुट है[19]; सभी संरचनात्मक अवयव उसके भीतर अंतर्लिखित दो घूर्णित वर्गों के प्रतिच्छेद से व्युत्पन्न हैं।



चित्र 15.8: *ad quadratum* अनुरेखण सहित पानागिया कूम्बेलिदिकी (कास्तोरिया, 10वीं शताब्दी) की योजना (Oikonomou, 2022)

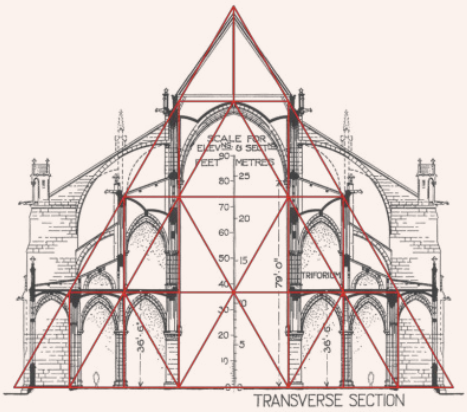
पाइथागोरीय त्रिभुजों की भूमिका इन वृत्त-आधारित विधियों के साथ प्रधान शिल्पी उपकरणों के दूसरे समूह—पाइथागोरीय समकोण त्रिभुज बनाने वाली गाँठदार रस्सियों—पर निर्भर थे। 3-4-5 त्रिभुज, जिसका समकोण रस्सी की तीन लंबाइयों के अतिरिक्त किसी उपकरण की माँग नहीं करता, प्राचीन काल और मध्ययुग में लंबवतता स्थापित करने तथा भवन-परिमाप के आयताकार अनुरेखण को नियंत्रित करने के लिए प्रयुक्त होता था। किंतु 3-4-5 ही ऐसा एकमात्र उपकरण नहीं था: 5–12–13, 8–15–17 और 12–35–37 त्रिभुज भी समान रूप से ज्ञात थे; प्रत्येक विशिष्ट भवन-प्रकारों के उपयुक्त भिन्न आकृति-अनुपात प्रदान करता था। प्रस्तरकार संघों ने यह ज्ञान पाठ के बजाय अभ्यास द्वारा संचारित किया, जो आंशिक रूप से बताता है कि ये निर्माणात्मक विधियाँ वास्तुशिल्पीय ग्रंथ-परंपरा में अधिकांशतः अदृश्य क्यों रहीं—विट्रुवियस, अल्बेर्ती और पल्लादियो ने समानुपात के विषय में लिखा; भूमि पर उसे प्राप्त करने का क्रियात्मक ज्ञान निर्माण करने वालों के पास था।

वृत्तों से गिरजाघरों तक दोनों तंत्र—*ad quadratum* और *ad triangulum*—प्रतिस्पर्धी नहीं, पूरक थे। गॉथिक प्रधान शिल्पियों ने परिमेय अनुक्रमों (जैसे खंड-चौड़ाइयों के लिए 1:2:4:2:1) और अपरिमेय अनुपातों (वर्ग के विकर्ण से $\sqrt{2}$, समबाहु त्रिभुज से $\sqrt{3}$) दोनों का एक साथ उपयोग किया और स्वीकार किया कि प्रतिरूपक तथा ज्यामितीय आकृतियों का पूर्ण समन्वय नहीं हो सकता। जैसा जॉन जेम्स ने शार्त्र के राजगीरों के विषय में कहा, उन्होंने “जानबूझकर दोनों का उपयोग चुना और फिर उन्हें एक साथ

[19]बाइजेंटाइन फुट, रोमन *pes* से व्युत्पन्न, पूरे बाइजेंटाइन साम्राज्य में प्रयुक्त लंबाई की इकाई थी। इसका मान सामान्यतः लगभग 0.312 m (31.2 cm) माना जाता है। वास्तुशिल्पीय विश्लेषण में यह प्रायः उस अंतर्निहित प्रतिरूपक के रूप में दिखाई देता है जिससे ज्यामितीय रचनाएँ (वर्ग, त्रिभुज, वृत्त) उत्पन्न की जाती थीं और इस प्रकार यह परिमेय मापन इकाई तथा $\sqrt{2}$ अथवा $\sqrt{3}$ जैसे ज्यामितीय अनुपातों के ऐतिहासिक सह-अस्तित्व को दर्शाता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

लाने के लिए आवश्यक संघर्ष स्वीकार किया" (James, 1982, p. 98)। नोत्र-दाम द पेरिस (स्थापना 1163) का अनुप्रस्थ काट *ad triangulum* विधि को स्पष्ट रूप से दर्शाता है: मध्यभाग और पार्श्व भागों की कुल चौड़ाई से निर्धारित एक समबाहु त्रिभुज कुल आंतरिक ऊँचाई परिभाषित करता है और तीन से विभाजित किए जाने पर ट्राइफोरियम का आधार निर्धारित करता है, जैसा चित्र 15.9 में दिखाया गया है, जहाँ पूर्ण आंतरिक चौड़ाई से निर्धारित एक समबाहु त्रिभुज कुल ऊँचाई परिभाषित करता है; तीन से उपविभाजन ट्राइफोरियम का आधार निर्धारित करता है।



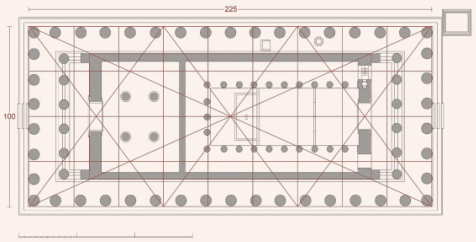
चित्र 15.9: *ad triangulum* अनुरेखण सहित नोत्र-दाम द पेरिस का अनुप्रस्थ काट (Oikonomou, 2022)

प्रतिरूपक तंत्र और मापीय मानक ज्यामितीय विधियाँ मापविज्ञानी मानकों के साथ मिलकर कार्य करती थीं। प्राचीन यूनानी मंदिरों का अभिकल्प अत्तिकी फुट (30.85 cm) में व्यक्त प्रतिरूपक जालों पर किया गया था; बाइजेंटाइन चर्च बाइजेंटाइन फुट (31.2 cm) अथवा स्पिथामी (23.4 cm) का उपयोग करते थे; गॉथिक गिरजाघर *pied de roi*[20] अथवा स्थानीय ब्राच्चो का उपयोग करते थे। पार्थेनन का स्तंभाधार 25×25 अत्तिकी फुट के जाल पर स्थित है, जबकि उसका मध्यभाग (सेकोस) 5:12 समानुपात दर्शाता है जो सीधे 5–12–13 पाइथागोरीय त्रिभुज के अनुरूप है (Oikonomou, 2022)। इस प्रकार पूर्ण भवन में विशुद्ध ज्यामितीय सामंजस्य के रूप में दिखाई देने वाला परिणाम स्थानीय मापन इकाई, पाइथागोरीय त्रिभुज और प्रतिरूपक जाल की अंतःक्रिया से उत्पन्न हुआ—एक ऐसा तंत्र जो जितना सुरुचिपूर्ण था उतना ही व्यावहारिक भी; जैसा चित्र 15.10 में दर्शाया गया है, जहाँ सेकोस का 5:12 समानुपात और 5–12–13 पाइथागोरीय त्रिभुज से उसकी अनुरूपता 25×25 अत्तिकी-फुट प्रतिरूपक जाल पर अध्यारोपित है।

संदर्भ के लिए सारणी 15.3 विभिन्न संस्कृतियों और कालों में प्रयुक्त लंबाई की प्रमुख इकाइयों को तुलना हेतु मीटर में व्यक्त करके संकलित करती है।

[20] *pied de roi* ("राजा का फुट") मापीय प्रणाली अपनाए जाने से पहले लंबाई की मानक फ्रांसीसी इकाई थी। इसका मान लगभग 0.32484 m था और इसे 12 *pouces* (इंच) में उपविभाजित किया जाता था, जिनमें से प्रत्येक 12 *lignes* में विभाजित था। अनेक फ्रांसीसी वास्तुशिल्पीय और अभियांत्रिकीय कृतियों की विमाएँ इसी प्रतिरूपक से निर्धारित की गई थीं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 15.10: पार्थेनन की योजना का विश्लेषण (Oikonomou, 2022)

तालिका 15.3: वास्तुकला और निर्माण में प्रयुक्त लंबाई तथा ढाल-मापन की ऐतिहासिक इकाइयाँ

इकाई	सभ्यता / काल	उपयोग का संदर्भ	मापीय समतुल्य
		मिस्री	
डिजिट (*db*)	प्राचीन मिस्र	सबसे छोटा मानक उपविभाजन	18.75 mm
पाम (*šsp*)	प्राचीन मिस्र	4 डिजिट; मूल समानुपातिक प्रतिरूपक	75 mm
साधारण क्यूबिट (*mh*)	प्राचीन मिस्र	6 पाम; दैनिक निर्माण	450 mm
राजकीय क्यूबिट (*mh nsw*)	प्राचीन मिस्र	7 पाम; स्मारकीय निर्माण	525 mm
रॉड (*h3yt*)	प्राचीन मिस्र	10 राजकीय क्यूबिट; भूमि सर्वेक्षण	5.25 m
सेकेड†	प्राचीन मिस्र	पिरामिड की ढाल: प्रति राजकीय क्यूबिट उन्नयन पर पाम	विमाहीन
		मेसोपोटामियाई	
क्यूबिट (*kus*)	बेबीलोनिया / सुमेर	मानक लंबाई प्रतिरूपक	500 mm
		मेसोअमेरिकी	
Tlacxitli	एज़्टेक	नाभि से भूमि तक; शरीर-आधारित प्रतिरूपक	≈ 1.00 m
Tlalcuahuitl	एज़्टेक	भूमि-रॉड; मानक सर्वेक्षण इकाई	≈ 2.50 m
		यूनानी	
अत्तिकी फुट	प्राचीन यूनान	मंदिर-नियोजन जाल	308.5 mm
		बाइज़ेंटाइन	
बाइज़ेंटाइन फुट	बाइज़ेंटाइन साम्राज्य	चर्च और सार्वजनिक निर्माण	312 mm
स्पिथामी	बाइज़ेंटाइन साम्राज्य	फैलाव (अँगूठे से छोटी उँगली तक)	234 mm
		इतालवी — नगरानुसार ब्राच्चो (एकीकरण-पूर्व, 1861 से पहले)	

अगले पृष्ठ पर जारी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 15.3 — *पिछले पृष्ठ से जारी*

इकाई	सभ्यता / काल	उपयोग का संदर्भ	मापीय समतुल्य
ब्राच्चो (फ्लोरेंस)	टस्कनी, 13वीं–18वीं शताब्दी	वास्तुशिल्पीय और वस्त्र माप; 2 पाम	583 mm
ब्राच्चो (वेनिस, da seta)	वेनिस गणराज्य	रेशम और समुद्री व्यापार	639 mm
ब्राच्चो (वेनिस, da panno)	वेनिस गणराज्य	वस्त्र माप	595 mm
ब्राच्चो (मिलान)	लोम्बार्डी का डची / राज्य	सामान्य निर्माण और वस्त्र	595 mm
ब्राच्चो (रोम)	पोपीय राज्य	वास्तुशिल्पीय माप (*da fabbrica*)	634 mm
ब्राच्चो (नेपल्स)	दो सिसिलियों का राज्य	वस्त्र माप; ≈2.67 पाम	700 mm
ब्राच्चो (बोलोन्या)	पोपीय राज्य / एमीलिया	सामान्य माप	640 mm
ब्राच्चो (तूरिन / पीडमोंट)	सार्डिनिया का राज्य	सामान्य निर्माण; 2 *piedi liprandi*	683 mm
ब्राच्चो (जेनोआ)	जेनोआ गणराज्य	वाणिज्यिक और निर्माण माप	595 mm
ब्राच्चो (वेरोना)	लोम्बार्डी–वेनेत्सिया	निर्माण और वस्त्र	642 mm
ब्राच्चो (मांतुआ)	लोम्बार्डी–वेनेत्सिया	स्थानीय निर्माण मानक	467 mm
ब्राच्चो (क्रेमोना, da fabbrica)	लोम्बार्डी	विनिर्माण और निर्माण	483 mm
		मध्ययुगीन और पुनर्जागरणकालीन (अन्य)	
Pied de roi	फ्रांस, मापीय-प्रणाली पूर्व	मानक फ्रांसीसी फुट; वास्तुशिल्पीय और अभियांत्रिकीय कृतियाँ	324.84 mm
		ऑटोमन	
Arşin	ऑटोमन साम्राज्य	भवन प्रतिरूपक; स्नानगृह अनुरेखण	757.7 mm

† *seked* लंबाई नहीं, बल्कि ढाल का माप है: ऊर्ध्वाधर उन्नयन के प्रति एक राजकीय क्यूबिट पर क्षैतिज पामों की संख्या, जो फलक-कोण के आधुनिक कोटैंजेंट के समतुल्य है। गीज़ा के महान पिरामिड का सेकेड $5\frac{1}{2}$ (अर्थात् 5 पाम और 2 डिजिट) है, जो 51.84° के फलक-कोण के अनुरूप है।

टिप्पणी: ब्राच्चो के मान 1861-पूर्व के पारंपरिक मानक हैं। फ्लोरेंटाइन ब्राच्चो को $\frac{17}{16}$ (6.25%) अनुपात में 2 जुलाई 1782 के विधि द्वारा बढाया गया था; यहाँ 583 mm का पहले का (ऐतिहासिक) मान उद्धृत है। नेपल्स के मानों को भी इसी प्रकार $\approx 0.33\%$ बढाया गया था, 1840 के बाद।

एकीकरण-पूर्व इटली में *braccio*, सारणी 15.4, का उल्लेखनीय परिवर्तन—मांतुआ में 467 mm से नेपल्स में 700 mm तक, लगभग 3:2 का अनुपात— अपरिशुद्धता की आकस्मिकता नहीं, बल्कि संप्रभुता की जानबूझकर की गई अभिव्यक्ति थी। प्रत्येक इतालवी राज्य अपने भार और माप के मानकों को अत्यंत सतर्कता से बनाए रखता था, क्योंकि मापन पर नियंत्रण वाणिज्य, कराधान और निर्माण अनुबंधों पर नियंत्रण से अविभाज्य था। अतः *braccio* का मानकीकरण रिसोर्जिमेंटो के सुपष्ट राजनीतिक कृत्यों में से

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

एक था: 28 जुलाई 1861 का विधि, जिसने नव-एकीकृत इटली राज्य में मापीय प्रणाली लागू की, व्यावहारिक सुधार जितना ही राष्ट्रीय संप्रभुता की घोषणा भी था। वेनिस के दो ब्राच्चो—रेशम व्यापार के लिए *da seta* (639 mm) और वस्त्र के लिए *da panno* (595 mm)—जटिलता की एक और परत दर्शाते हैं: एक ही नगर-राज्य के भीतर भी प्रतिद्वंद्वी शिल्प-संघ विभिन्न वस्तुओं के लिए भिन्न मानक बनाए रखते थे।

तालिका 15.4: एकीकरण-पूर्व इतालवी राज्यों में *braccio*

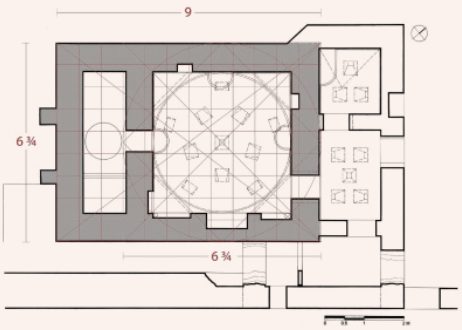
नगर	राजनीतिक इकाई	शासक वंश / प्राधिकरण	मान
फ्लोरेंस	टस्कनी का ग्रैंड डची	मेदिची; 1737 के बाद हैब्सबर्ग-लोरेन	583 mm
वेनिस	वेनिस गणराज्य	सेरेनिसिमा (1797 तक स्वतंत्र)	595–639 mm
मिलान	लोम्बार्डी का डची / राज्य	स्पेनी, फिर ऑस्ट्रियाई हैब्सबर्ग	595 mm
रोम	पोपीय राज्य	होली सी	634 mm
नेपल्स	दो सिसिलियों का राज्य	बूर्बों राजतंत्र	700 mm
बोलोन्या	पोपीय राज्य (बोलोन्या का लेगेशन)	होली सी (अर्ध-स्वायत्त)	640 mm
तूरिन	सार्डिनिया का राज्य	सावोय वंश	683 mm
जेनोआ	जेनोआ गणराज्य	सेरेनिसिमा (1797 तक स्वतंत्र)	595 mm
वेरोना	वेनिस गणराज्य → लोम्बार्डी–वेनेत्सिया	वेनिसी, फिर 1797 के बाद ऑस्ट्रियाई	642 mm
मांतुआ	मांतुआ का डची → लोम्बार्डी–वेनेत्सिया	गोंज़ागा, फिर ऑस्ट्रियाई हैब्सबर्ग	467 mm
क्रेमोना	मिलान का डची → लोम्बार्डी–वेनेत्सिया	स्पेनी, फिर ऑस्ट्रियाई हैब्सबर्ग	483 mm

टिप्पणी: वेनिस एक साथ दो पृथक ब्राच्चो बनाए रखता था— रेशम व्यापार के लिए *braccio da seta* (639 mm) और सामान्य वस्त्र के लिए *braccio da panno* (595 mm)—जो मापन मानकों पर केवल राज्य-स्तरीय नहीं, बल्कि शिल्प-संघ-स्तरीय नियंत्रण को प्रतिबिंबित करता है। सभी मान 1861-पूर्व के पारंपरिक मानक हैं; मापीय प्रणाली 28 जुलाई 1861 के विधि द्वारा संपूर्ण एकीकृत इटली में लागू की गई थी।

प्राचीन काल से ऑटोमन काल तक निरंतरता यह क्रियात्मक परंपरा उल्लेखनीय निरंतरता दर्शाती है। वही मूल उपकरण—गाँठदार रस्सियाँ, साहुल, घूर्णित वर्ग और अंतर्लिखित त्रिभुज—लगभग 2500 BC के मिस्री निर्माण, दसवीं शताब्दी की बाइजेंटाइन चर्च-योजना और अठारहवीं शताब्दी की ऑटोमन घरेलू वास्तुकला में दिखाई देते हैं (Oikonomou, 2022)। ऑटोमन निर्माता *arşın* जाल (75.77 cm) पर कार्य करते थे; वे बड़े किए गए 3-4-5 त्रिभुजों से स्नानगृह के परिमाप का अनुरेखण करते और *ad quadratum* संक्रियाओं से अष्टकोणीय आंतरिक विन्यास निर्धारित करते थे—वही ज्यामितीय तर्क जिसने एक सहस्राब्दी पूर्व बाइजेंटाइन त्रिशंखी चर्चों को संगठित किया था। जब अल्बानिया के बढ़ई ने बताया कि छत की ऊँचाई “घर की चौड़ाई के एक-चौथाई तक एक साधारण रस्सी” से प्राप्त की जाती थी, तब वह ऐसी प्रथा का वर्णन कर रहा था जिसकी वंशावली नील घाटी के हार्पेडोनैप्ट तक पहुँचती थी। चित्र 15.11 दर्शाता है कि इस ज्यामितीय उपकरण-समूह को उत्तरी यूनान के एक ऑटोमन स्नानगृह में कैसे लागू किया गया। *arşın* जाल और 3-4-5 पाइथागोरीय त्रिभुज अनुरेखण। परिमाप 4×3 *arşın* जाल पर निर्धारित है; अष्टकोणीय आंतरिक भाग *ad quadratum* संक्रिया से व्युत्पन्न है।

यह क्रियात्मक ज्यामिति विट्रुवियस, अल्बेर्ती और पल्लादियो की सैद्धांतिक इमारत के नीचे का व्यावहारिक आधार है। ग्रंथ-लेखकों ने यह संहिताबद्ध किया कि *कौन-सा* समानुपात प्राप्त करना है; प्रधान शिल्पी जानते थे कि ज्यामितीय संक्रियाओं के ऐसे उपकरण-समूह के माध्यम से उसे *कैसे* प्राप्त

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 15.11: फ्लोरिना में ऑटोमन स्नानगृह (18वीं शताब्दी) Oikonomou, 2022 के आधार पर पुनःरेखित

करना है जिसने कोई लिखित अभिलेख नहीं छोड़ा, किंतु पाश्चात्य संसार की प्रत्येक प्रमुख संरचना को आकार दिया।

15.3 अंतराल: वास्तुकार और अभियंता — कला और विज्ञान?

पूर्ववर्ती खंडों से स्पष्ट होता है कि वास्तुकार, निर्माता, राजगीर और अभियंता की भूमिकाएँ सदैव पृथक नहीं थीं। अठारहवीं शताब्दी के मध्य तक ये सभी प्रकार्य एक ही व्यक्ति—प्रधान शिल्पी—में निहित थे। निर्माता पहले प्रयास और त्रुटि—अर्थात् विफलताओं—पर और फिर पीढ़ियों से हस्तांतरित अनुभव से व्युत्पन्न व्यवहारगत नियमों तथा समानुपात के नियमों पर निर्भर थे।[21]

वास्तुशिल्पीय आलोचक एडा लुईस हक्स्टेबल ने इस ऐतिहासिक एकता को अच्छी तरह व्यक्त किया है:

> वास्तुकला की प्रकृति पर शताब्दियों से विमर्श होता रहा है। वह कला है अथवा संरचना, सौंदर्यशास्त्र है अथवा अभियांत्रिकी—या यदि दोनों का संयोजन है, तो किस समानुपात में—यह एक स्थायी चुनौती और निरंतर विमर्श का विषय है।
>
> सदैव ऐसा नहीं था। यद्यपि प्रश्न स्वयं कालातीत हैं, उनके विषय में भ्रम वास्तव में तुलनात्मक रूप से हाल का है। रोम में वास्तुकार की भूमिका में अभियंता की सभी गतिविधियाँ निर्विवाद रूप से समाहित थीं। विट्रुवियस ने 25 और 23 B.C. के बीच लिखी अपनी कृति *On Architecture* में कहा कि वास्तुकार के उत्तरदायित्वों में निर्माण, यांत्रिकी और—उस समय की यांत्रिक कलाओं में किंचित भी कम नहीं—घड़ी-निर्माण सम्मिलित थे; साथ ही यह विशेष निर्देश था कि निर्माण में सामर्थ्य (संरचना), उपयोगिता (प्रकार्य) और माधुर्य (कला) का समान रूप से ध्यान रखा जाना चाहिए।
>
> 1235 के विलार द ओन्नकूर के कार्यालयी अभिलेख स्पष्ट करते हैं कि मध्ययुग का "प्रधान शिल्पी" तब भी वास्तुकार और अभियंता दोनों था, और लियोन बत्तिस्ता अल्बेर्ती के 1451–52 के निर्णायक वास्तुशिल्पीय ग्रंथ से हमें ज्ञात होता है कि पुनर्जागरण ने श्रम-विभाजन नहीं किया। वास्तव में बहुमुखी पुनर्जागरणकालीन मनुष्य समस्त कला को अपना क्षेत्र और समस्त अभियांत्रिकी को कला का भाग मानता था।

[21] आज हम जीवित बची प्राचीन संरचनाओं पर विस्मय कर सकते हैं, किंतु हमें कभी नहीं भूलना चाहिए कि वे निर्मित संरचनाओं का अत्यंत सूक्ष्म अंश हैं और आधुनिक मानकों से लगभग सभी का अभिकल्प आवश्यकता से अधिक सुरक्षित है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(Huxtable, 2017, p. 11)

पृथक्करण अठारहवीं शताब्दी में परिमेय यांत्रिकी के उद्भव और तकनीकी शिक्षा के संस्थानीकरण से प्रेरित होकर आया। फ्रांस में *École des Ponts et Chaussées* (1747) और बाद में *École Polytechnique* (1794) की स्थापना ने एक नया व्यक्तित्व बनाया: गणित और यांत्रिकी में प्रशिक्षित *ingénieur*, जो *École des Beaux-Arts* में संयोजन, रेखांकन तथा इतिहास में प्रशिक्षित *architecte* से पृथक था। ब्रिटेन में जॉन स्मीटन का स्वयं को "सिविल अभियंता" (1768) कहना और इंस्टीट्यूशन ऑफ सिविल इंजीनियर्स (1818) की स्थापना ने इसी विभाजन को औपचारिक बनाया। शिक्षण के साथ विशुद्ध शोध पर बल देने वाली उन्नीसवीं शताब्दी की जर्मन विश्वविद्यालय प्रणाली ने दोनों विधाओं को और अधिक व्यवसायीकृत किया (Graham and Diamond, 2004)।

उस समय से वास्तुकला और अभियांत्रिकी के बीच टकराव की संभावना वास्तविक हो गई। पियर लुइजी नेर्वी ने अपने प्रशिक्षण पर विचार करते हुए इस विभाजन का अपनी विशिष्ट स्पष्टवादिता से वर्णन किया:

> जब मैंने बोलोन्या के उत्कृष्ट सिविल अभियांत्रिकी विद्यालय में अध्ययन किया, तब वास्तुकला शब्द केवल अग्रभागों और उनके विवरणों के अध्ययन को संदर्भित करता था। हमारे प्राध्यापकों को, यहाँ तक कि हमें भी, कभी यह विचार नहीं आया कि कोई पुल, कोई भारवाही संरचना अथवा नगरीय योजना भी वास्तुकला की कृति हो सकती है.... विशाल पुलों और एफिल टावर के पहले से विद्यमान उदाहरणों के बावजूद प्रबलित कंक्रीट अथवा लोहे की संरचनाओं को ऐसे क्षेत्रों में विकसित तकनीकी उपलब्धियाँ माना जाता था जिनका वास्तुकला से कोई संबंध नहीं था.... इन अभिकल्पों को भवन के संयोजन की अपेक्षा उसके दिखाई देने के स्वरूप की अधिक चिंता थी; यह मिथ्या रूपवाद पर आधारित ऐसा दृष्टिकोण था जो "तत्त्व और रूप के बीच विभाजन... सज्जाकार की मानसिकता, जिसके लिए ढलाई तथा रूपात्मक और चित्रात्मक सजावट के क्षेत्र में सब कुछ संभव है... वास्तुकला की भौतिक सत्ता की अज्ञानता, जो किसी जीवित प्राणी की भाँति सौंदर्य को शरीर के शारीरिक स्वास्थ्य से पृथक नहीं कर सकती" पर बल देता था।
>
> (Huxtable, 2017, p. 21)

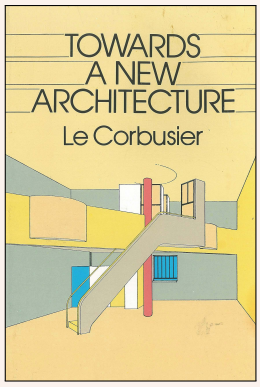
विडंबना यह है कि एक महान वास्तुकार ने अभियंताओं की सृजनशील भूमिका को पर्याप्त विश्वसनीयता दी। ले कोर्बुज़िए ने *Vers une architecture* (1923) में लिखा, चित्र 15.12a:

> अभियंता का सौंदर्यशास्त्र और वास्तुकला—ये दो वस्तुएँ साथ चलती और एक-दूसरे से उत्पन्न होती हैं: पहली इस समय अपनी पूर्ण ऊँचाई पर है, दूसरी प्रतिगमन की दुर्भाग्यपूर्ण अवस्था में।
>
> मितव्ययिता के नियम से प्रेरित और गणितीय गणना से नियंत्रित अभियंता हमें सार्वभौमिक नियम के अनुरूप करता है। वह सामंजस्य प्राप्त करता है।
>
> वास्तुकार रूपों की अपनी व्यवस्था द्वारा ऐसा क्रम साकार करता है जो उसकी चेतना की विशुद्ध सृष्टि है; रूप और आकृतियों द्वारा वह हमारी इंद्रियों को तीव्रता से प्रभावित करता और रूपात्मक भावनाएँ उत्पन्न करता है।
>
> (Le Corbusier, 1931)

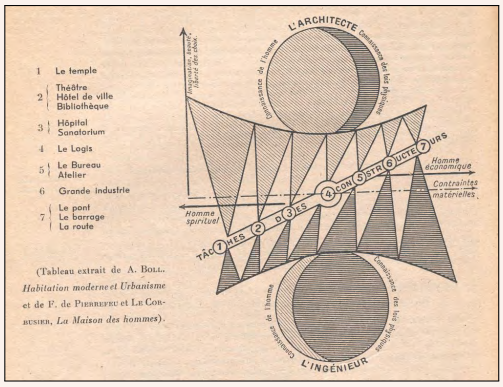
ले कोर्बुज़िए की *ingénieur-architecte* की दृष्टि—उनके प्रसिद्ध चित्रचिह्न (चित्र 15.12b) में अभिव्यक्त—अभियंताओं से वास्तुकार बनने अथवा वास्तुकारों से अभियंता बनने का आह्वान नहीं थी,

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बल्कि दोनों के लिए यह पहचानने का आह्वान थी कि महान निर्माण संरचनात्मक तर्क और स्थानिक कला का संश्लेषण माँगता है।



(a) Le Corbusier, 1931



(Tableau extrait de A. Boll. *Habitation moderne et Urbanisme* et de F. de Pierrefeu et Le Corbusier, *La Maison des hommes*).

(b) ले कोर्बुज़िए का *ingénieur-architecte* चित्रचिह्न (Pierrefeu and Corbusier, 1942)

चित्र 15.12: ले कोर्बुज़िए का *ingénieur-architecte* चित्रचिह्न (Pierrefeu and Corbusier, 1942)।

इस दृष्टि की प्रतिध्वनि स्पेनी अभियंता एदुआर्दो तोरोहा में मिली:

> संरचनात्मक अभिकल्प का संबंध विज्ञान और तकनीकों से कहीं अधिक से है: उसका कला, सामान्य विवेक, भावना, योग्यता और ऐसे उपयुक्त रूपरेखा बनाने के कार्य के आनंद से भी गहरा संबंध है, जिन्हें वैज्ञानिक गणनाएँ अंतिम रूप देंगी और आवश्यकताओं के अनुरूप संरचना के सुरक्षित तथा सुदृढ होने को प्रमाणित करेंगी।
>
> गणित मात्र एक सुविधाजनक उपकरण है जिसके द्वारा अभिकल्पक अपनी योजनाबद्ध संरचना के भौतिक समानुपात और विवरण निर्धारित करता है, जिससे उसके विचार किसी नीलप्रति की रेखाओं से पूर्ण संरचना की वास्तविकता में रूपांतरित हो सकें।
>
> (Torroja, Polivka, and Polivka, 1958)

फिर भी व्यावसायिक विभाजन बना हुआ है। जैसा हेनरी पेत्रोस्की ने कहा, अभियंता उन वास्तुकारों को कोसते हैं जो ऐसे भवनों की संकल्पना करते हैं जिन्हें साकार करने के लिए भारी कंक्रीट और इस्पात-कार्य को असाधारण विकृतियों से गुजरना पड़ता है; वास्तुकार उन अभियंताओं को तुच्छ समझते हैं जिन पर वे संरचनात्मक सृजनशीलता अथवा अपनी कल्पना को उड़ने देने की इच्छा के अभाव का आरोप लगाते हैं (Petroski, 1997)।

इतालवी भाषा में इस विभाजन से आगे बढ़ने वालों के लिए एक शब्द है: *progettista*—वह जो अभिकल्प और निष्पादन, रूप तथा संरचना को एकीकृत करके किसी परियोजना की समग्र संकल्पना और साकार रूप देता है। अगले खंडों में विचारित व्यक्तित्व—गॉथिक गिरजाघरों के अज्ञात आचार्यों से मायार, नेर्वी, कंदेला और ख़ान तक—अपनी-अपनी भिन्न रीति से सभी *progettisti* हैं। वे प्रदर्शित करते हैं कि विट्रुवियसी त्रयी कभी ऐसा विकल्प-संग्रह नहीं थी जिसमें से चयन किया जाए, बल्कि प्राप्त की जाने वाली एकता थी।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15.4 अग्रदूत

यद्यपि वास्तुकला और अभियांत्रिकी के बीच ऐतिहासिक रूप से सम्मिश्रण रहा है, एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है: क्या संरचनात्मक अभियांत्रिकी के वैज्ञानिक विधा के रूप में उद्भव के बाद भी यह जारी रहा? इस अन्वेषण को दो प्रश्न रूप देते हैं:

1. क्या हमारे पास ऐसे आधुनिक अभियंता हैं जिनके अभिकल्प स्वयं में सुंदर संरचनाओं को जन्म देते हैं—ऐसी कृतियाँ जो किसी वास्तुकार की संवेदनशीलता को स्पर्श करें?
2. क्या हमारे पास ऐसे आधुनिक वास्तुकार हैं जिनके साहसिक अथवा नवोन्मेषी अभिकल्प संरचनात्मक अभियंता को स्वयं से श्रेष्ठ निष्पादन की चुनौती देते हैं?[22]

यह खंड संगणकों के उद्भव से पहले अभिकल्प में अग्रणी रहे “सच्चे अभियंताओं” पर ध्यान केंद्रित करके पहले प्रश्न पर विचार करता है।

जब संरचना कला बन जाती है: आवश्यकता का सौंदर्यशास्त्र

वास्तुकला को प्रायः उसकी दृश्य अभिव्यक्ति के लिए सराहा जाता है, किंतु ऐसी अभिव्यक्ति को संभव बनाने वाली अंतर्निहित संरचना है। कुछ असाधारण कृतियों में संरचनात्मक आवश्यकता स्वयं दृश्य शक्ति का प्रमुख स्रोत बन जाती है। ये ऐसे भवन नहीं जिनमें प्रकार्य पर रूप लपेट दिया गया हो, बल्कि ऐसे भवन हैं जिनमें रूप ही प्रकार्य है—जो बलों के स्थान में प्रवाह को छिपाने के बजाय प्रकट करता है। इन संरचनाओं की सुरुचि अलंकरण में नहीं, बल्कि उनके रूपों की स्पष्टता और अनिवार्यता में निहित है। जब अभियांत्रिकीय चुनौतियों का सामना परिशुद्धता और कल्पना से किया जाता है, तो परिणाम गहन रूप से सुंदर हो सकता है: एक ऐसी संरचना जो एक साथ परिमेय और अभिव्यंजक हो।

यह खंड संरचनात्मक अभियंताओं द्वारा संकल्पित प्रतिष्ठित संरचनाओं—ऐसे अभिकल्पों—को समर्पित है जो न केवल कठिन तकनीकी चुनौतियों का समाधान करते हैं बल्कि आँख और कल्पना को भी मुग्ध करते हैं। लगभग प्रत्येक मामले में इन अभिकल्पों की ज्यामिति, समानुपात और लय सीधे उन बलों तथा भारों से उत्पन्न होते हैं जिनका उन्हें प्रतिरोध और वहन करना है। फिर भी अपनी संरचनात्मक भूमिका पूरी करते हुए वे एक प्रकार की कलात्मकता प्राप्त करते हैं—आवश्यकता की ऐसी भाषा में चापों, कैंचियों, केबलों और कवचों के माध्यम से बोलते हुए जो स्थान में काव्य बन जाती है (Pedreschi, 2008)।

प्रारंभ में ही ले कोर्बुज़िए ने उस प्रश्न पर विचार किया जो इस खंड के केंद्र में है:

> हमारे अभियंता वास्तुकला उत्पन्न करते हैं, क्योंकि वे प्राकृतिक नियम से व्युत्पन्न गणितीय गणना का उपयोग करते हैं और उनकी कृतियाँ हमें सामंजस्य का अनुभव देती हैं। अतः अभियंता का अपना सौंदर्यशास्त्र है, क्योंकि अपनी गणनाएँ करते समय उसे अपने समीकरण के कुछ पदों को गुणित करना पड़ता है; और यहीं अभिरुचि हस्तक्षेप करती है। अब गणितीय समस्या को ग्रहण करते समय मनुष्य उसे विशुद्ध अमूर्त दृष्टि से देखता है और ऐसी अवस्था में उसकी अभिरुचि को सुनिश्चित तथा निश्चित मार्ग का अनुसरण करना चाहिए।

[22] ज़ाहा हदीद (1950–2016), जिन्होंने बेरूत के अमेरिकन विश्वविद्यालय में स्नातक स्तर पर गणित का अध्ययन किया और इसलिए संभवतः वक्ररेखीय संरचनाओं का अभिकल्प करने में सहज रही होंगी, तक ये सभी विख्यात वास्तुकार पुरुष थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(Le Corbusier, 1931)

इतालवियों ने अभियंता-वास्तुकार की भूमिका को *progettista* पद से सर्वोत्तम रूप में व्यक्त किया—वह जो अभिकल्प-प्रक्रिया द्वारा वास्तुशिल्पीय अथवा तकनीकी प्रकृति की परियोजना तैयार करता है: ऐसा व्यवसायी जो सांस्कृतिक पृष्ठभूमि और पर्याप्त तकनीकी अनुभव के साथ निर्मित होने वाली वस्तु की पहली संकल्पना करता है। अगले खंड *progettisti* द्वारा अभिकल्पित प्रतिष्ठित संरचनाओं पर संक्षेप में प्रकाश डालते हैं।

15.4.1 उडता पुश्ता: संरचनात्मक तर्क का दृश्य रूप

उडता पुश्ता अत्यंत प्रभावशाली परिणामों सहित प्रकार्य का अनुसरण करते रूप के आरंभिक और सर्वाधिक प्रतिष्ठित उदाहरणों में है। गॉथिक काल में आवश्यकता से जन्मे इस रूप ने एक मूलभूत संरचनात्मक चुनौती का समाधान किया: विशाल गिरजाघरों में पसलीदार मेहराबी छतों और भारी पाषाण छतों द्वारा उत्पन्न पार्श्व प्रणोद। इन बलों का प्रतिरोध केवल विशाल दीवारों पर छोडने के बजाय निर्माताओं ने साहसिक बाह्य समाधान—मेहराबी अवलंबों—की संकल्पना की, जो क्षैतिज भारों को बाहर और नीचे दूरस्थ स्तंभाधारों तक पहुँचाते हैं।

अभियांत्रिकीय सीमाओं के व्यावहारिक उत्तर के रूप में आरंभ हुआ यह रूप शीघ्र ही वास्तुकला का परिभाषक लक्षण बन गया। उडते पुश्तों के तनु और आकाश की ओर उठते चापों ने न केवल रंगीन काँच की खिडकियों तथा ऊर्ध्वाधर अभिव्यक्ति के लिए आंतरिक स्थान मुक्त किया; वे अपने आप में सौंदर्यपरक संकेत बन गए। उनमें संरचनात्मक स्पष्टता का मूर्तिकला-सदृश माधुर्य से मिलन हुआ और ऐसी दीर्घ परंपरा आरंभ हुई जिसमें संरचनात्मक अभियंता का कार्य कला की कृति भी हो सकता था।

वास्तव में गॉथिक गिरजाघरों का उल्लेख किए बिना संरचनात्मक विश्लेषण के सिद्धांत का अवलोकन लिखना असंभव होगा। ये ऐसे साहसिक संरचनात्मक प्रयोगों के परिणाम थे जो उन्नीसवीं शताब्दी के उत्तरार्ध में दीर्घ-विस्तृति पुलों और धातु-ढाँचा भवनों के निर्माण तक फिर दिखाई नहीं दिए (Mark, 1978)।

इन संरचनाओं की भव्यता के बावजूद—पूर्ववर्ती रोमनेस्क चर्चों के विपरीत अधिकतम प्रकाश सहित ईश्वर की महिमा के लिए ऊँचाई तक उठती हुई—गॉथिक गिरजाघरों ने अपेक्षा से कम तकनीकी चुनौतियाँ प्रस्तुत कीं। उनका अभिकल्प तब भी पीढियों से परिष्कृत व्यवहारगत नियमों द्वारा होता था—अर्थात् मार्ग में अनेक प्राणघातक दुर्घटनाएँ हुई होंगी।

संरचनात्मक अभियंता की रुचि के अनेक विषय गॉथिक वास्तुकला से संबंधित हैं: गुंबद, पसलीदार मेहराबी छतें, मेहराब और अन्य। किंतु यह खंड स्वयं को उडते पुश्तों की संरचनात्मक प्रासंगिकता तक सीमित रखता है।

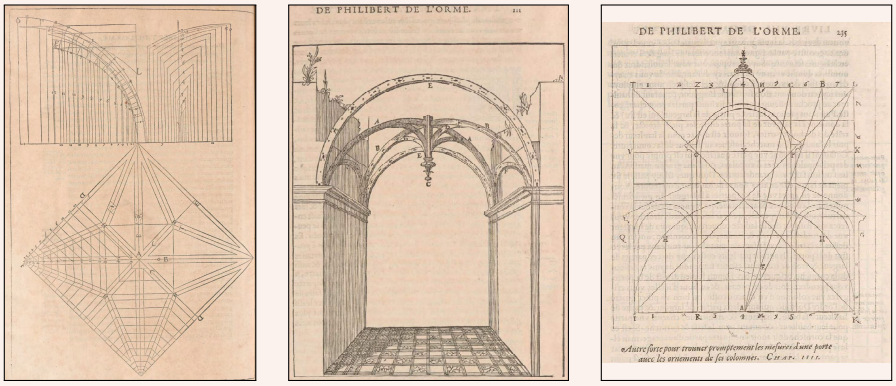
किसी गॉथिक गिरजाघर को देखते ही उडते पुश्ते तुरंत उभरकर दिखाई देते हैं। उनका पहली बार उपयोग नोत्र-दाम द पेरिस के मध्यभाग की ऊपरी खिडकीदार दीवार को स्थिरता प्रदान करने के लिए हुआ था (Murray, 1998), 1180 से कुछ पहले। फिर भी उस काल के जीवित अभिलेख ऐसी उल्लेखनीय तकनीकी उपलब्धि के लिए प्रयुक्त अभिकल्प-तकनीकों के विषय में लगभग कुछ नहीं बताते। अतः किसी वैज्ञानिक पद्धति के उपयोग को अस्वीकार करना उचित है। संरचनात्मक सिद्धांत का अभाव छोटे मापक्रम पर

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिमाणात्मक प्रतिरूपण की संभावना भी समाप्त करता है; निर्माता निश्चित रूप से यह पूर्वानुमान नहीं कर सकते थे कि छोटे भवनों में मान्य संरचनात्मक अवयव नए निर्माण के बड़े मापक्रम पर विश्वसनीय निष्पादन करेंगे अथवा नहीं।

तथापि एक महत्त्वपूर्ण अपवाद मृत-भार के अधीन उलटने के विरुद्ध समग्र स्थिरता है, जो मापक्रम पर निर्भर नहीं होती। मेज पर रखे जाने योग्य आकार का प्रतिरूप पूर्ण-मापक्रम भवन की समग्र स्थिरता का संकेत दे सकता था। संरचनात्मक व्यवहार के इस तथ्य ने नए, बड़े-मापक्रम अभिकल्प की कुछ समस्याओं की क्षतिपूर्ति की—यद्यपि मध्ययुगीन निर्माता संभवतः इसे नहीं समझते थे (Mark, 1978 PDF)।

वास्तुकला पर एक महत्त्वपूर्ण ग्रंथ 1568 में पेरिस में फिलिबेर द लोर्म द्वारा प्रकाशित किया गया था (De l'Orme, 1561 PDF)। यह पहली कृति है जिसमें चिनाई प्रक्षेपण की कला प्रस्तुत की गई; इसमें *les traicts geometriques qui montrent comme[nt] il fault tailler et coupper les pierres*—पत्थरों को काटने और आकार देने की ज्यामितीय विधियाँ, अथवा अधिक साधारण शब्दों में: प्रस्तावित भवन के निर्माण के लिए राजगीर को सुविधाजनक रूप में अलग-अलग पत्थरों की आकृतियाँ योजनाओं और अभिकल्पों से प्राप्त करने की कला—का वर्णन करने वाला अत्यंत पूर्ण निबंध है।



चित्र 15.13: द लोर्म के चित्रण (De l'Orme, 1561 PDF)

बाद में उन्नीसवीं शताब्दी में यूजेन वियोले-ल-द्यूक ने अपना प्रसिद्ध *Dictionnaire Raisonné* लिखा (Viollet-le-Duc, 1854 PDF)।[23] किंतु उनका सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण सैद्धांतिक योगदान *Discourses on Architecture* (Viollet-le-Duc, 1875 PDF) के माध्यम से आया, जिसमें उन्होंने संरचनात्मक स्पष्टता और गॉथिक अभिकल्प के अंतर्निहित सिद्धांतों का व्यापक दर्शन व्यक्त किया—यह कार्य मध्ययुगीन अनुभवजन्य परंपरा और आधुनिक संरचनात्मक सिद्धांत के बीच सेतु है। (गॉथिक संरचनात्मक सिद्धांतों को समझने में उनकी आधारभूत भूमिका के लिए §4.3 देखें।) उन्होंने फ्रांसीसी क्रांति के दौरान क्षतिग्रस्त अनेक मध्ययुगीन भवनों का पुनरुद्धार—अथवा कुछ आधुनिक इतिहासकारों के अनुसार "विध्वंस"—भी किया।[24]

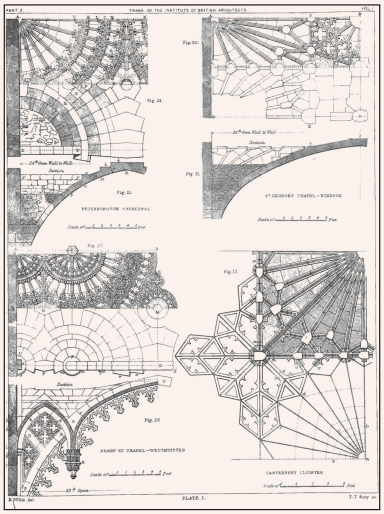
एक अन्य विशाल ग्रंथ Willis, 1910 PDF ने लिखा, जो यह कहते हुए आरंभ करते हैं:

[23]यह सभी वास्तुशिल्पीय पदों का नौ खंडों वाला विशाल व्यापक वर्णक्रमिक शब्दकोश है, जिसमें सैकड़ों अत्यंत सटीक और सुंदर चित्रण हैं।

[24]उदाहरणार्थ उन्होंने नोत्र-दाम द पेरिस (जिसमें हाल ही में आग लगी थी) के केंद्रीय मध्यभाग पर एक शिखर जोड़ने की स्वतंत्रता ली, यद्यपि उनके हस्तक्षेप से पहले वह कभी विद्यमान नहीं था।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> मध्ययुग की पसलीदार मेहराबी छत ...रोमन मेहराबी छतों से पूर्णतः भिन्न है। उसमें ...पसलियों अथवा पाषाण मेहराबों का ढाँचा होता है, जिस पर वास्तविक मेहराबी छतें अथवा कक्ष के वास्तविक आवरण टिकते हैं। ये मेहराबी छतें सामान्यतः उन पसलियों की अपेक्षा हल्की सामग्री और अधिक स्थूल कारीगरी से बनाई जाती हैं जिन पर वे टिकी होती हैं और जिनके बीच वे वास्तव में एक प्रकार का पतला फलक बनाती हैं। इन पसलियों का निर्माण पाषाण-कटाई में कोई कठिनाई प्रस्तुत नहीं करता, क्योंकि प्रत्येक को अलग से देखने पर वह सरल मेहराब है; फिर भी उसके पच्चराकार खंडों की आकृतियाँ भूमि पर इस मेहराब की पूर्ण आकार वाली आकृति का अनुरेखण किए बिना कठिनाई से प्राप्त हुई होंगी, जिससे पच्चराकार खंडों के फलक-साँचों को प्राप्त किया जा सके।
>
> Willis, 1910 *On the construction of the vaults of the Middle Ages*



चित्र 15.14: Willis, 1910 के चित्रण

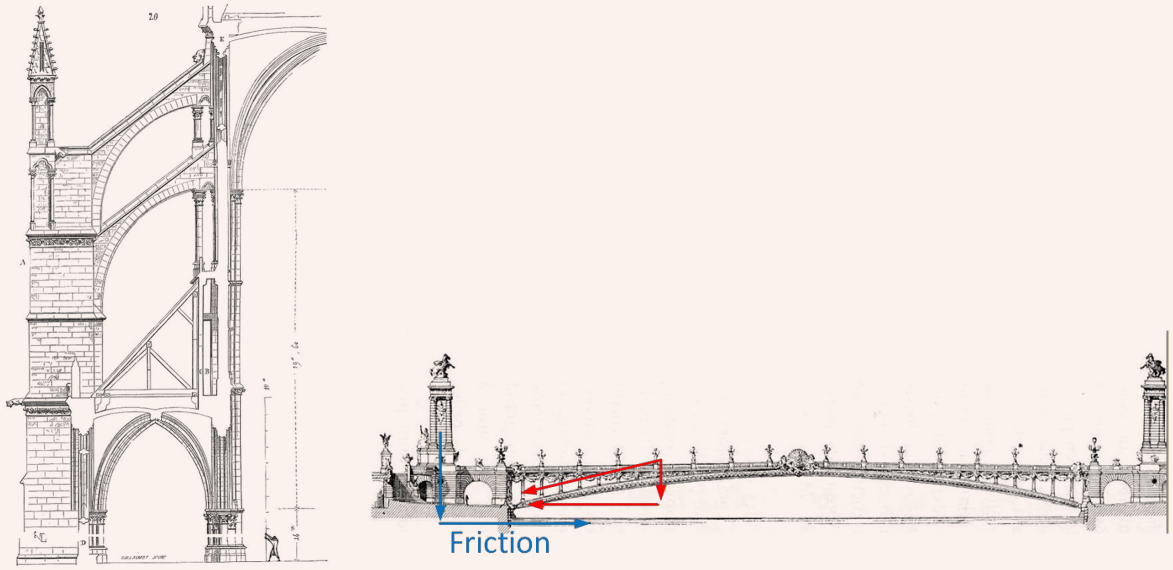
अंततः Mark and Prentke, 1968 ने एक युगांतरकारी शोधपत्र में अनेक प्रमुख गॉथिक चर्चों के विस्तृत विश्लेषणों (प्रकाश-प्रत्यास्थता तकनीकों का उपयोग करते हुए) के माध्यम से और अंतर्दृष्टि प्राप्त करने का प्रयास किया। उनके विश्लेषणों ने प्रकट किया कि स्तंभ-पुश्तों—चर्च के परिमाप के साथ स्थित मीनार-सदृश संरचनाएँ जो उडते पुश्तों के बाह्य प्रणोद का प्रतिरोध करती हैं—के बाहरी किनारों के ऊपर रखा शिखर मृत-भार और पवन-भार के संयोजन से उत्पन्न स्थानीय तनन को निष्प्रभावी करके स्तंभ-पुश्ते की अखंडता बनाए रखने में सहायक था: शिखर का भार स्तंभ-पुश्ते में संपीडन उत्पन्न करता है जो तनन को निरस्त कर देता है। शिखर पूर्वप्रतिबलन अवयव के रूप में कार्य करता है।

यह निष्कर्ष चकित करने वाला था क्योंकि शिखर का तकनीकी प्रकार्य उसकी प्रबल सजावटी भूमिका से छिप जाता है और क्योंकि समग्र स्थिरता के विचारों के अनुसार शिखर को स्तंभ-पुश्ते के बाहरी किनारे के बजाय भीतरी किनारे पर रखा जाना चाहिए था।

शिखर की संरचनात्मक भूमिका पेरिस के अत्यंत उथले पों अलेक्सांद्र III (चित्र 15.15b) का अभिकल्प करने वाले अभियंताओं की दृष्टि से नहीं छूटी; इसका निर्माण 1892 के फ्रांसीसी-रूसी गठबंधन के सम्मान में हुआ था।

गॉथिक गिरजाघरों के अंतर्निहित विज्ञान की अधिक गहन समझ के लिए पाठक को Heyman et al., 1992 और Heyman, 1998b देखना चाहिए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) उडता पुश्ता (Viollet-le-Duc, 1854)

(b) अलेक्सांद्र III पुल, पेरिस

चित्र 15.15: मेहराबों में प्रणोद भार का अंतरण

15.4.2 गुस्ताव एफिल (1832–1923)

गुस्ताव एफिल आदर्शरूप फ्रांसीसी अभियंता थे, जो उनकी अभिजात्य *Grandes Écoles* के विशुद्ध उत्पाद थे।[25] संभवतः वे ऐसे अभियंता का सर्वाधिक उल्लेखनीय उदाहरण हैं जिसने बिल्कुल कोई प्रयोजन न निभाने वाली "संरचना" का अभिकल्प किया[26], सिवाय 1889 की विश्व प्रदर्शनी के लिए पिटवाँ लोहे की संरचनाओं पर अधिकार पाने की फ्रांसीसी *prouesse* के कलात्मक प्रमाण के; इस परियोजना को एफिल ने स्वयं अगले दशक में प्रकाशित दो खंडों वाले भव्य प्रबंध में प्रलेखित किया (Lemoine, 2002)।[27]

यद्यपि अंतिम अभिकल्प के लिए एफिल उत्तरदायी थे, मूल संकल्पनात्मक अभिकल्प उनकी संस्था के दो अन्य अभियंताओं, मॉरिस केशलाँ और एमील नूगिए, ने बनाया था। केशलाँ को बहुत कम मान्यता मिली, जबकि वे अन्य संरचनाओं के साथ एफिल टावर और गाराबी जलसेतु दोनों के अभिकल्प में गहराई से सम्मिलित थे।

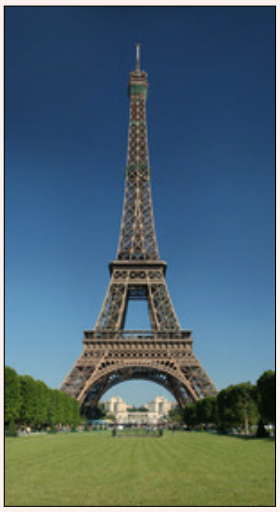
इससे पहले एफिल ने मूर्तिकार ऑगुस्त बार्तोल्दी के लिए स्टैच्यू ऑफ लिबर्टी के आंतरिक लौह कंकाल का अभिकल्प किया था। बाद में उन्होंने अनेक देशों में कई जलसेतुओं और रेलवे स्टेशनों का अभिकल्प किया। चित्र 15.16b उनका प्रसिद्ध द्विकीलक मेहराबी पुल, पोंते मारिया पिया, दिखाता है।

[25]यद्यपि आश्चर्यजनक रूप से उन्होंने कहीं अधिक प्रतिष्ठित *École Polytechnique* के बजाय *École Centrale des Arts et Manufactures* को चुना।

[26]तीसरे तल पर भोजनालय के संभावित अपवाद सहित।

[27]एफिल ने जूल बूर्दे के प्रतिस्पर्धी अभिकल्प को पराजित किया, जिन्होंने विद्युत प्रकाश सहित ग्रेनाइट-आवृत "सूर्य मीनार" प्रस्तावित की थी—एक सौंदर्यपरक और संरचनात्मक रूप से निम्नतर संकल्पना जो कहीं अधिक महँगी तथा कम नवोन्मेषी होती (Bourdais, 1881)। इस प्रतियोगिता के अधिक पूर्ण विवरण के लिए §15.5.5 देखें।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) कला: मीनार



(b) अभियांत्रिकी: पुल

चित्र 15.16: गुस्ताव एफिल: मीनार और पुल

मीनार की क्रमशः तनु होती रूपरेखा की प्रायः विशुद्ध सौंदर्यपरक चयन के रूप में प्रशंसा की जाती है, किंतु उसका परिच्छेद वास्तव में अभियांत्रिकीय आवश्यकता से व्युत्पन्न था: एफिल ने प्रत्येक खंड को इस प्रकार आकार दिया कि किसी भी क्षैतिज काट के ऊपर की संरचना पर पवन-दाब का परिणामी बल मीनार के किनारों की स्पर्शरेखा बना रहे और इस प्रकार पवन-भार से उत्पन्न बंकन प्रतिबल न्यूनतम हों। मीनार के वक्र के अंतर्निहित इस पवन-प्रेरित तर्क का बाद में आधुनिक वायुमंडलीय परिसीमा-स्तर पवन-परिच्छेद प्रतिरूपों के सापेक्ष विश्लेषण किया गया, जिसने पुष्टि की कि एफिल का अनुभव से व्युत्पन्न आकार परवर्ती वायुगतिकीय सिद्धांत का कितना निकट पूर्वाभास था (Weidman, 2009)।

जिस प्रकार नेर्वी बाद में अपने कवचों के लिए *ferrocemento* के निर्माण में सम्मिलित होते, उसी प्रकार एफिल स्वयं *Eiffel Constructions Métalliques* के माध्यम से विनिर्माण में सम्मिलित थे। और जिस प्रकार बाद में मोरांदी का अपना "विशिष्ट" पुल-प्रकार होता, उसी प्रकार एफिल के अपने "विशिष्ट" द्विकीलक मेहराबी पुल थे:[28] मारिया पिया पुल (Thrall, Billington, and Bréa, 2012), गाराबी जलसेतु, पोंते दोम लुईस, पोंते रोदो-फेरोवियारिया दे वियाना दो कास्तेलो और अन्य।

एफिल की कंपनी, *Compagnie des Établissements Eiffel*, पूर्वनिर्मित लौह ढाँचों में अग्रणी थी (Établissements Eiffel, 19th Century)। इस औद्योगीकृत दृष्टिकोण ने पुलों, मीनारों और अन्य संरचनाओं का तीव्र तथा लागत-प्रभावी निर्माण संभव किया। उन्होंने अनेक प्रमुख रूपों में प्रतिरूपकता पर बल दिया; इस दृष्टिकोण के अंतर्निहित संरचनात्मक इष्टतमीकरण सिद्धांतों का बाद में विस्तार से विश्लेषण हुआ है (Sundaram and Ananthasuresh, 2009):

पूर्वनिर्माण: घटकों का उच्च परिशुद्धता से कार्यशालाओं में विनिर्माण किया जाता और फिर संयोजन

[28] जैसा अध्याय 32 में दिखाया गया है, द्विकीलक मेहराबों का विश्लेषण त्रिकीलक मेहराबों की अपेक्षा कहीं अधिक जटिल है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के लिए स्थल पर पहुँचाया जाता था, जिससे स्थल पर निर्माण का समय घटता और गुणवत्ता नियंत्रण सुनिश्चित होता था।

मानकीकृत घटक: एफिल ने ऐसे मानकीकृत लौह और इस्पात घटकों का उपयोग किया जिनका व्यापक उत्पादन और अनेक परियोजनाओं में पुनः उपयोग हो सकता था—लागत-प्रभावी और मापक्रमणीय।

काबला और रिवेटित जोड: उन्होंने पारंपरिक चिनाई अथवा वेल्डिंग तकनीकों की अपेक्षा काबला और रिवेटित संयोजनों को वरीयता दी, जिससे संयोजन और विघटन सरल हुआ।

हल्की किंतु सुदृढ संरचनाएँ: उन्होंने सामग्री-उपयोग को इष्टतम बनाने के लिए जाली और कैंची अभिकल्पों का उपयोग किया, जिससे सामर्थ्य बनाए रखते हुए संरचनाएँ हल्की बनीं।

अनुकूलनशीलता: प्रतिरूपक दृष्टिकोण ने उनके अभिकल्पों को गाराबी जलसेतु और अन्य रेलवे पुलों में दिखाई देने वाले तीव्र खड्डों तथा नदियों जैसे जटिल भूभागों के अनुकूल बनने दिया।

प्रतिरूपकता के इन सिद्धांतों ने बड़े मापक्रम के निर्माण में क्रांति की और वास्तुकला तथा अभियांत्रिकी में आधुनिक पूर्वनिर्माण और प्रतिरूपक अभिकल्प तकनीकों को प्रेरित किया।

पनामा नहर कांड में एफिल की संलिप्तता ने अस्थायी रूप से उनकी प्रतिष्ठा धूमिल की, यद्यपि बाद में वे दोषमुक्त कर दिए गए (Charle, 2004)। धातु-निर्माण में उनकी विरासत अप्रतिम है और उसने आधुनिक गगनचुंबी भवनों तथा दीर्घ-विस्तृति पुलों की नींव रखी।

15.4.3 लुई हेनरी सुलिवन (1856-1924)

1856 में जन्मे सुलिवन ने सोलह वर्ष की आयु में MIT में प्रवेश किया। शिकागो में संक्षिप्त रूप से कार्य करने के बाद उन्होंने पेरिस के *École des Beaux-Arts* में प्रवेश लिया और फिर कुछ समय रोम तथा फ्लोरेंस की यात्रा में बिताया।

सुलिवन की वास्तुशिल्पीय शैली में जटिल अलंकरण के विपरीत विशाल आयतन थे। सुलिवन के लिए यह अलंकरण अन्यथा सरल इस्पात-ढाँचा भवनों को संवर्धित करने वाला भाग था।

अभियांत्रिकी और वास्तुकला दोनों में प्रशिक्षित (अत्यंत थोड़े व्यक्तियों में से) होने के कारण यह आश्चर्यजनक नहीं कि संरचनाओं के लिए (वास्तुकला के विपरीत) नीचे दिया प्रसिद्ध सूक्ति-वाक्य उन्होंने ही गढ़ा (Sullivan, 1896 PDF):

> फिर भी वस्तुओं के तट पर खड़े व्यक्ति की स्थिर दृष्टि के लिए, जो मुख्यतः और अत्यंत प्रेम से उस ओर देखता है जहाँ सूर्य चमकता और जिसे हम आनंदपूर्वक जीवन मानते हैं, हृदय उस सौंदर्य और उत्कृष्ट सहजता से सदैव प्रसन्न होता है जिसके साथ जीवन अपनी आवश्यकताओं के पूर्ण अनुरूप अपने रूप खोजता और धारण करता है। ऐसा सदैव प्रतीत होता है मानो जीवन और रूप पूर्णतः एक तथा अविभाज्य हों—परिपूरित की अनुभूति इतनी पर्याप्त है। चाहे वह उड़ान भरता गरुड़ हो, खुला सेब-पुष्प, श्रमरत घोड़ा, प्रसन्न हंस, शाखायुक्त ओक, उसके आधार पर बलखाती धारा, बहते बादल, और सबसे ऊपर दौड़ती नन—रूप सदैव प्रकार्य का अनुसरण करता है, और यही नियम है। यह सभी जैव और अजैव वस्तुओं, सभी भौतिक और तत्त्वमीमांसात्मक वस्तुओं, सभी मानवीय और अतिमानवीय वस्तुओं तथा मस्तिष्क, हृदय और आत्मा की सभी सत्य अभिव्यक्तियों का व्यापक नियम है कि जीवन अपनी अभिव्यक्ति में पहचाना जाता है, कि रूप *सदैव प्रकार्य का अनुसरण करता* है। यही नियम है। जहाँ प्रकार्य नहीं बदलता, वहाँ रूप नहीं

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बदलता। ग्रेनाइट शिलाएँ और सदैव चिंतनमग्न पहाड़ियाँ युगों तक बनी रहती हैं; बिजली एक क्षण में जीवित होती, रूप लेती और मर जाती है। ... और इस प्रकार,

- जब सहज प्रवृत्ति और संवेदनशीलता हमारी प्रिय कला के अभ्यास को नियंत्रित करेंगी;
- जब ज्ञात और सम्मानित नियम यह होगा कि रूप सदैव प्रकार्य का अनुसरण करता है;
- जब हमारे वास्तुकार किसी विदेशी विद्यालय के आश्रय में हथकड़ी लगे दंभी बनकर अकड़ना और बकवास करना छोड़ देंगे;
- जब यह वास्तव में अनुभव और प्रसन्नतापूर्वक स्वीकार किया जाएगा कि यह नियम हरे मैदानों की हवादार धूप खोलता और हमें ऐसी स्वतंत्रता देता है कि प्रकृति में प्रदर्शित स्वयं इस नियम के कार्यान्वयन का सौंदर्य तथा वैभव किसी भी विवेकी और संवेदनशील व्यक्ति को उस स्वतंत्रता को स्वेच्छाचार में बदलने से रोक देगा;
- जब यह स्पष्ट हो जाएगा कि हम केवल ध्यान देने योग्य अमेरिकी उच्चारण में विदेशी भाषा बोल रहे हैं, जबकि देश का प्रत्येक वास्तुकार इस नियम के सौम्य प्रभाव में उस बात को, जो उसे कहनी है, सरलतम, अत्यंत विनम्र और सर्वाधिक स्वाभाविक रूप से व्यक्त कर सकता है: कि वह वास्तव में अपनी विशिष्ट वैयक्तिकता विकसित कर सकता और निश्चित रूप से करेगा, तथा उसके साथ वास्तुशिल्पीय कला निश्चय ही वाणी का जीवित रूप, कथन का स्वाभाविक रूप बन जाएगी, जो उसे राहत देगी और उसके देश की विकसित होती कला में छोटी-बड़ी निधियाँ जोड़ेगी;
- जब हम जानेंगे और अनुभव करेंगे कि प्रकृति हमारी मित्र है, अटल शत्रु नहीं—कि ग्रामीण क्षेत्र की एक दोपहर, समुद्र के किनारे एक घंटा, प्रभात, दोपहर और संध्या तक किसी एक पूरे दिन का खुला दृश्य हमें वास्तुकला की विशाल कला में लयात्मक, गहन और शाश्वत का इतना कुछ सुझाएगा, कुछ इतना गहरा और सत्य कि सभी संकीर्ण औपचारिकताएँ, कठोर नियम और विद्यालयों के गला घोंटने वाले बंधन उसे हमारे भीतर दबा नहीं सकेंगे,

—तब यह घोषित किया जा सकता है कि हम स्वाभाविक और संतोषजनक कला के राजमार्ग पर हैं, ऐसी वास्तुकला की ओर जो शीघ्र ही शब्द के सत्य और सर्वोत्तम अर्थ में ललित कला बनेगी—ऐसी कला जो जीवित रहेगी क्योंकि वह जनता की, जनता के लिए और जनता द्वारा होगी।

(Sullivan, 1896)

टिप्पणी: सुलिवन का रैखिक सूत्रण स्थान और रूप के संबंध को अत्यधिक सरलीकृत कर सकता है। जैसा रूसी दार्शनिक पावेल फ्लोरेंस्की ने कहा:

'यदि हम यह स्थापित करने का प्रयास करें कि पहले क्या आता है—स्थानिकता अथवा वस्तुता—तो हम वृत्तों में ही घूमते रहेंगे।

Florensky, 1996 *Beyond Vision: Essays on the Perception of Art*

यह सुझाता है कि वास्तुशिल्पीय स्थान संरचनात्मक रूप को उतना ही प्रभावित कर सकता है जितना कार्यात्मक आवश्यकताएँ स्थानिक अनुभव को आकार देती हैं—एक पारस्परिक संबंध जिसे नेर्वी से तोरोहा तक महानतम संरचनात्मक अभियंताओं ने अपने कार्य में अंतर्बोध से समझा।

दूसरा भाग अत्यंत पुष्पित और किपलिंग-सदृश है। स्पष्टतः उनकी लेखन-कुशलता उस सरलता के अनुरूप नहीं है जिसका वे संरचनाओं के लिए समर्थन करते हैं। यद्यपि सुलिवन मानते थे कि भवनों को

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अपना प्रकार्य व्यक्त करना चाहिए, उनकी संरचनाएँ विशाल थीं[29]। ऊँचे भवनों के अभिकल्प में नवोन्मेषी माने जाने के बावजूद वे उस समय आधुनिक वास्तुकला के आरंभ में अमेरिका के महानतम योगदान—इस्पात संरचनात्मक तंत्र—में सजावटी तत्त्वों से स्वयं को रोक नहीं सके।

सुलिवन युवा फ्रैंक लॉयड राइट के मार्गदर्शक थे। दुर्भाग्यवश उनके अंतिम बीस वर्ष तीव्र पतन, कार्यादेशों की कमी, आर्थिक कठिनाइयों और मद्यपान से चिह्नित थे।

15.4.4 रॉबर्ट मायार (1872–1940)

बिलिंग्टन के कार्य (Billington, Mark, and Abel, 1972; Billington, 1979) के कारण मायार को आदर्शरूप "संरचनात्मक कलाकार" के रूप में "महिमामंडित" किया गया है।

रॉबर्ट मायार (चित्र 15.17a) स्विस अभियंता थे, जिन्होंने ज्यूरिख के स्विस फेडरल इंस्टीट्यूट ऑफ टेक्नोलॉजी (ETH) के पूर्ववर्ती संस्थान में प्रशिक्षण प्राप्त किया; वहाँ उन्होंने विल्हेल्म रिटर (जो स्वयं कुलमान के छात्र थे) के अधीन अध्ययन किया और आलेखीय स्थैतिकी के दृढ अनुयायी बने।

मायार को अत्यधिक सिद्धांत अप्रिय था और वे धारणाएँ बनाने तथा संरचनात्मक व्यवहार का मानसदर्शन करने की आवश्यकता समझते थे।[30] रोचक रूप से बहुत बाद में दो अन्य प्रतिष्ठित स्विस अभियंताओं ने समान दृष्टिकोण अपनाए: बाँधों के अपने अभिकल्प में जियोवानी लोम्बार्दी और क्रिश्चियन मेन, जो प्रारंभिक अभिकल्प पूर्ण करने के *बाद* उन्हें परिष्कृत करने के लिए संगणन पर निर्भर होते थे।

प्रबलित कंक्रीट के उपयोग में अग्रणी मायार ने अनेक त्रिकीलक मेहराबों का अभिकल्प किया (जैसा §32.1.1.2.3 में दिखाया गया है, उनका विश्लेषण अत्यंत सरल है), जिसमें उनका मार्गदर्शन तीव्र सौंदर्यबोध ने किया।

नागरिक परियोजनाओं के चयन के लिए खुली प्रतियोगिताएँ आयोजित करने की परंपरा स्विट्जरलैंड में थी—और आज भी है—जिसमें चयन केवल लागत नहीं, अनेक मानदंडों पर आधारित होता है। अच्छे बोध (संरचनात्मक प्रतिक्रिया के "अनुभव") के साथ सरल गणना पर निर्भर रहने की देश की परंपरा के कारण मौलिक अभिकल्प विकसित हो सकते थे। यह उस समय की जर्मन अथवा फ्रांसीसी संस्कृतियों जैसी उन संस्कृतियों के विपरीत था जो गणित से संवर्धित पूर्ववर्ती अभिकल्पों की प्रेरणा पर अत्यधिक निर्भर थीं—ऐसे दृष्टिकोण जो सृजनशीलता को दबाते थे।

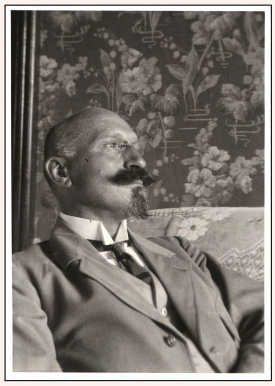
एक अतिरिक्त टिप्पणी के रूप में, तथाकथित खुली प्रतियोगिता सदैव उतनी पारदर्शी और न्यायपूर्ण नहीं थी जितनी स्विट्जरलैंड में अपेक्षित हो सकती है। प्रसिद्ध रूप से राष्ट्र संघ के मुख्यालय की प्रतियोगिता बिगाड़ दी गई, जिसके परिणामस्वरूप युवा स्विस वास्तुकार ले कोर्बुज़िए ने अपना सामान बाँधा और फ्रांस चले गए; आयोग ने एक "समिति द्वारा अभिकल्प" अपनाया था (मुख्यतः उनकी संकल्पना पर आधारित), किंतु उनके कार्य को मान्यता नहीं मिली—यह आंशिक रूप से इस तथ्य से उचित ठहराया गया कि युवा वास्तुकार ने अपने रेखाचित्र भारतीय स्याही में प्रस्तुत न करने का दुस्साहस किया था। स्विट्जरलैंड ने एक महान व्यक्तित्व फ्रांस को खो दिया, यद्यपि अब उनका मुख 10 CHF के नोट को सुशोभित करता है।

[29] यह बताता है कि मुझे उनकी किसी संरचना का चित्र सम्मिलित करने की आवश्यकता क्यों नहीं लगी।

[30] आजकल बहुत कम अभियंताओं में संरचनात्मक व्यवहार की ऐसी गहरी समझ है, जिसके कारण सुंदर (और विश्वसनीय) आलेखीय चित्र उत्पन्न करने वाले संगणक प्रतिरूपों पर अत्यधिक निर्भरता होती है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः जब स्विट्ज़रलैंड के अल्प यातायात वाले किसी दूरस्थ भाग में पुल बनाने का समय आया, मायार ने अपनी सर्वाधिक प्रतिष्ठित संरचना बनाई: साल्गिनाटोबेल पुल, जो विश्वभर में प्रसिद्ध है (चित्र 15.17b)। मायार के एक अन्य अभिकल्प, मागात्सीनी जेनराली भंडारगृह, पर अध्याय 39.3 में चर्चा की गई है (बिलिंग्टन की टिप्पणियों पर आधारित)।



(a) महोदय मायार



(b) साल्गिनाटोबेल पुल

चित्र 15.17: रॉबर्ट मायार

जहाँ एफिल पिटवाँ लोहे के पुलों के लिए द्विकीलक मेहराब को वरीयता देते थे, वहीं मायार को त्रिकीलक कंक्रीट मेहराबों में सौंदर्य मिला।

15.4.5 ऑगुस्त पेरे (1874–1954)

ऑगुस्त पेरे (ब्रसेल्स, 1874–पेरिस, 1954) फ्रांसीसी वास्तुकार और निर्माता थे, जिन्होंने प्रबलित कंक्रीट के लिए वही किया जो मायार ने पुल के लिए किया था: उन्होंने प्रदर्शित किया कि सामग्री को पाषाण आवरण अथवा सजावटी पलस्तर के पीछे छिपाने की आवश्यकता नहीं है, बल्कि वह भवन की संरचना की सत्यनिष्ठ अभिव्यक्ति के रूप में अनावृत खड़ी हो सकती है। जहाँ उनके समकालीन कंक्रीट को आवरण पहनाए जाने वाले उपयोगितावादी कंकाल के रूप में देखते थे, वहीं पेरे ने उसे स्वयं वास्तुकला माना—उसी सावधानी से आकार दिया, समानुपातित और विस्तृत किया, जैसी सावधानी कोई शास्त्रीय राजगीर कटे हुए पत्थर पर करता[31]।

पेरे ने पेरिस के *École des Beaux-Arts* में प्रशिक्षण लिया, किंतु कभी उपाधि नहीं ली; उन्होंने अपने पिता की निर्माण संस्था, पेरे फ्रेरे, के व्यावहारिक संसार को वरीयता दी और अंततः उसका नेतृत्व किया। इस दोहरी पहचान—शास्त्रीय संयोजन में शिक्षित और निर्माण की वास्तविकता में आधारित—ने उनकी

[31]पश्चदृष्टि में पेरे को उसका अनजाना अग्रदूत माना जा सकता है जिसे स्मिथसन और रेनर बैनम बाद में *brutalism* कहते—कच्चे कंक्रीट (*béton brut*) को परिष्कृत पृष्ठ के रूप में जानबूझकर अनावृत करना। विडंबना पर्याप्त है: पेरे का अनावृत कंक्रीट सदैव परिष्कृत, शास्त्रीय रूप से समानुपातित और सूक्ष्मता से विस्तृत था, जबकि जिस ब्रूटलिज़्म को उसने प्रेरित करने में सहायता की वह प्रायः अपरिष्कृतता को स्वयं में सौंदर्यशास्त्र मानता था। ले कोर्बुज़िए की *Unité d'Habitation* (1952)—जिसके तख्ता-चिह्नित कंक्रीट पृष्ठ ने ब्रूटलिज़्म को उसका नाम दिया—का अभिकल्प उस व्यक्ति ने किया था जिसने पेरे के आटेलिए में दो वर्ष ठीक विपरीत पाठ ग्रहण करते हुए बिताए थे: अनावृत कंक्रीट सर्वोच्च शिल्प की माँग करता है, उससे छूट नहीं देता।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रत्येक कृति को आकार दिया। पेरिस के 25 bis rue Franklin स्थित उनका युगांतरकारी आवासीय भवन (1903) उन प्रथम संरचनाओं में था जिन्होंने अग्रभाग पर प्रबलित कंक्रीट ढाँचा अनावृत किया; मृत्तिका-टाइल के अंतर्भरण फलक सत्यनिष्ठ रूप से असंरचनात्मक दिखाई देते थे। उनका *Notre-Dame du Raincy* (1923) उनकी उत्कृष्ट कृति है: ऐसा चर्च जिसमें तनु कंक्रीट स्तंभ पतली कवच मेहराबी छत को सहारा देते हैं, जबकि दीवारें पूर्णतः पूर्वढलित कंक्रीट की जाली में विलीन हैं जिसमें मॉरिस दनी द्वारा निर्मित रंगीन काँच भरा है—औद्योगिक सामग्री में गॉथिक तर्क का पुनर्जन्म, चित्र 15.18। उनका सबसे बड़ा कार्यानुदेश युद्धकालीन विनाश के बाद ले आव्र का पुनर्निर्माण (1945–1954) था, जिसने इन सिद्धांतों को नगरीय मापक्रम पर लागू किया: समानुपात में शास्त्रीय किंतु स्पष्टतः आधुनिक, कंक्रीट का एकीकृत नगर-केंद्र, जिसे आज UNESCO विश्व विरासत स्थल के रूप में मान्यता प्राप्त है।



चित्र 15.18: पेरे का नोत्र दाम रैंसी (1923)

अभिकल्प-दर्शन पेरे का मार्गदर्शक विश्वास था कि संरचना और वास्तुकला अविभाज्य हैं।

> Celui qui dissimule une partie quelconque de la charpente se prive du seul légitime et plus bel ornement de l'architecture. Celui qui dissimule un poteau commet une faute. Celui qui fait un faux poteau commet un crime.
>
> जो संरचना के किसी भाग को छिपाता है, वह स्वयं को वास्तुकला के एकमात्र वैध और सबसे सुंदर अलंकरण से वंचित करता है। जो स्तंभ छिपाता है, वह त्रुटि करता है। जो मिथ्या स्तंभ बनाता है, वह अपराध करता है।
>
> Perret, 1952 *Contribution à une théorie de l'architecture*

उन्होंने लिखा—एक ऐसा कथन जिस पर नेर्वी अथवा तोरोहा भी समान रूप से हस्ताक्षर कर सकते थे। उन्होंने संरचना को अलंकरण में विलीन करने की *Art Nouveau* प्रवृत्ति अस्वीकार की और उस नवोदित आधुनिकतावाद को भी समान रूप से अस्वीकार किया जिसने भवनों को सामग्री तथा शिल्प के प्रति उदासीन अमूर्त आयतनों में सीमित कर दिया। पेरे के लिए स्तंभ, धरन और ढाँचा सौंदर्य में बाधाएँ नहीं, बल्कि उसका मूल स्रोत थे, यदि उन्हें कठोरता से समानुपातित और परिशुद्धता से निष्पादित किया जाए। इसने उन्हें विट्रुवियस से वियोले-ल-द्यूक होते हुए बीसवीं शताब्दी के संरचनात्मक कलाकारों तक फैली वंशावली में रखा—ऐसा निर्माता-सिद्धांतकार जिसने समझा कि *firmitas, utilitas, venustas* की त्रयी पदानुक्रम नहीं, एकता थी।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अगली पीढ़ी पर उनका प्रभाव प्रत्यक्ष और व्यक्तिगत था। उनके पेरिस आटेलिए से गुजरने वाले युवा वास्तुकारों में शार्ल-Édुआर जनेरे—बाद में ले कोर्बुज़िए—थे, जिन्होंने वहाँ 1908 से 1910 तक कार्य किया और पेरे के संरचनात्मक सत्यनिष्ठा के आग्रह को ग्रहण किया, भले ही बाद में उसके विरुद्ध प्रतिक्रिया की।[32] जहाँ पेरे स्तंभ और समकोण के प्रति निष्ठावान रहे, वहीं उनके छात्र ने दीवार को पूर्णतः विलीन कर दिया; किंतु दोनों सहमत थे कि संरचना को असत्य नहीं बोलना चाहिए।

15.4.6 एदुआर्दो तोरोहा ई मिरेत (1899–1961)

एदुआर्दो तोरोहा ई मिरेत (मैड्रिरड, 1899–1961) स्पेनी संरचनात्मक अभियंता थे, जिन्हें रॉबर्ट मायार, यूजेन फ्रेसिने और पियर लुइजी नेर्वी के साथ बीसवीं शताब्दी के पूर्वार्ध में प्रबलित कंक्रीट के तकनीकी तथा सौंदर्यपरक विकास के चार सर्वाधिक प्रभावशाली व्यक्तियों में व्यापक रूप से माना जाता है। वे बीसवीं शताब्दी के महानतम संरचनात्मक अभियंताओं में थे, कवच संरचनाओं और पतले कंक्रीट रूपों के आचार्य, जिनकी कृतियों ने संरचनात्मक तर्क तथा वास्तुशिल्पीय सौंदर्य का ऐसा एकीकरण साधा जिसकी बराबरी पहले अथवा बाद में विरले ही हुई।

तोरोहा ने मैड्रिरड के *Escuela de Ingenieros de Caminos*[33] में अध्ययन किया, जहाँ उन्होंने प्रबलित कंक्रीट के उभरते क्षेत्र के विख्यात शोधकर्ता हुआन मानुएल दे साफ्रा ई एस्तेबान और स्पेन में एनेबिक की संस्था का नेतृत्व करने वाले होसे रिबेरा के अधीन शिक्षा प्राप्त की। इन दोनों व्यक्तियों के मार्गदर्शन ने तोरोहा के परवर्ती विकास में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाई। 1923 में Escuela de Ingenieros de Caminos से स्नातक होने के बाद उन्होंने 1927 में अपना तकनीकी कार्यालय (*Oficina Técnica Eduardo Torroja*) स्थापित किया (Winchurch, 2007 PDF)।

आरंभ में उन्होंने भवनों के अभिकल्प और विश्लेषण पर ध्यान दिया; फिर लगभग 1933 में पतले कवचों तथा बेलनाकार मेहराबी छतों को सम्मिलित करने वाली अनेक परियोजनाएँ पूर्ण कीं (Winchurch, 2007 PDF)। उनकी आरंभिक कृतियाँ और वे अल्हेसीरास मार्केट हॉल (1933), मैड्रिरड में सार्सुएला हिप्पोड्रोम की कैंटिलीवर छत (1935), तथा फ्रोंतोन रेकोलेतोस क्रीड़ा भवन (1935) सहित प्रतिष्ठित पतले-कवच वाली कंक्रीट संरचनाओं का अभिकल्प करते गए—इन कृतियों ने प्रबलित कंक्रीट कवच-निर्माण पर असाधारण अधिकार प्रदर्शित किया। स्पेनी गृहयुद्ध में नष्ट फ्रोंतोन रेकोलेतोस में काचित अर्धचंद्राकार खिड़कियों वाले प्रतिच्छेदी बेलनाकार कवच थे जो आंतरिक भाग को प्रकाश से भर देते थे—संरचना, स्थान और प्रकाश का संश्लेषण।

तोरोहा ने मैड्रिरड के नए सार्सुएला हिप्पोड्रोम के अभिकल्प की प्रतियोगिता में भाग लिया; उनका अभिकल्प (#3) नौ अंतिम अभिकल्पों में चुना गया (चित्र 15.19a)। यह *magnum opus* संरचनात्मक और सौंदर्यपरक रूप से सर्वाधिक सिद्ध प्रस्तुति थी, जो तथाकथित *Madrilenian Rationalism* से ओत-प्रोत थी।[34] वे केवल 36 वर्ष के थे।

[32]यह संबंध आजीवन और कभी-कभी कटु था: क्रांतिकारी ले कोर्बुज़िए और शास्त्रीयतावादी पेरे लगभग प्रत्येक विषय पर सार्वजनिक रूप से असहमत थे, फिर भी पेरे की छाप—पायलोटी, मुक्त अग्रभाग, अनावृत ढाँचा—ले कोर्बुज़िए के आरंभिक कार्य में सर्वत्र दिखाई देती है।

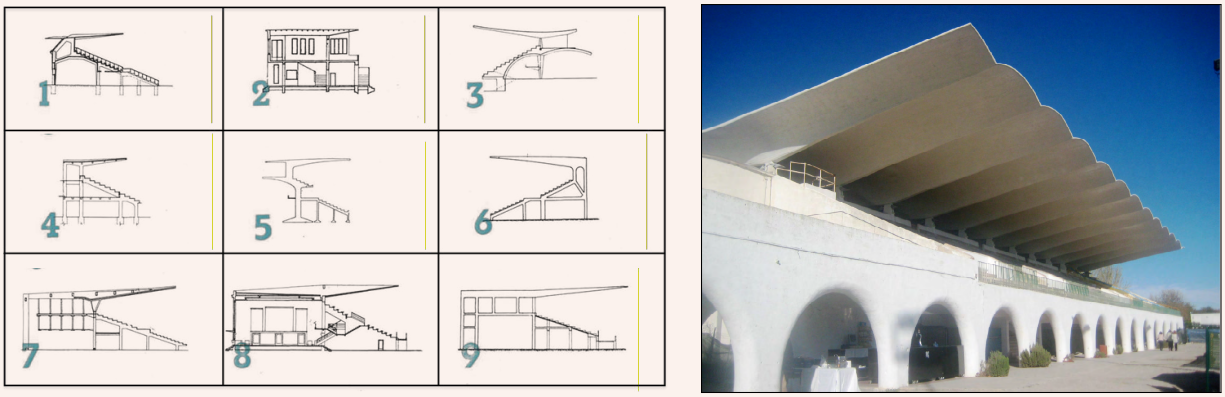
[33]मानो यह संस्था के लिए पर्याप्त असामान्य नाम न हो, बाद में यह (प्रसिद्ध) *Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos* (Universidad Politécnica de Madrid) बन गई। शीर्षक में सिविल अथवा संरचनात्मक अभियांत्रिकी का कोई उल्लेख नहीं।

[34]मद्रिलेनीय परिमेयवाद की विशेषता ऐसी वास्तुकला है जो अपने रूपों और अवयवों तथा प्रयुक्त सामग्रियों—प्रबलित

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> प्रथम पुरस्कार वास्तुकार सी. अर्नीचेस और एम. दोमिंगेस तथा अभियंता ई. तोरोहा के प्रस्तावित समाधान को दिया गया, जिसमें कवच आवरण की मौलिकता—अपने समय में पूर्णतः नई संरचना, और जो आज भी सत्ताईस वर्ष की आयु में तोरोहा की प्रतिभा की अभिव्यंजक मौलिकता दर्शाती है—विद्यमान थी; इस कृति से उन्हें किसी प्रतियोगिता में पहली विजय मिली।
>
> Torroja, 1962a

सार्सुएला की छत, 12.8 मीटर कैंटिलीवर और किनारे पर केवल 5 सेंटीमीटर मोटाई वाला अतिपरवलयज कवच , संरचनात्मक सुरुचि का प्रतीक बनी हुई है। वास्तव में पचास वर्ष से अधिक बाद सार्सुएला हिप्पोड्रोम स्पेन का “ऐतिहासिक-कलात्मक” स्मारक बना। तोरोहा की वास्तुकला का उत्कृष्ट विश्लेषण Antuña Bernardo, 2003 ने दिया है।



(a) प्रस्तुतियाँ (Torroja, 1962a)

(b) तोरोहा का अभिकल्प

चित्र 15.19: तोरोहा, सार्सुएला हिप्पोड्रोम

1936 तक तोरोहा ने स्वीकार किया कि आगे बढ़ने के लिए अधिक ज्ञान प्राप्त करना आवश्यक था। 1940 में उन्हें *Laboratorio Central de Ensayos de Materiales* का निदेशक नियुक्त किया गया, जहाँ उन्होंने प्रतिरूप और सामग्री-परीक्षण पर बल दिया। बाद में उन्होंने मैड्रिड में Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento (अब Instituto Eduardo Torroja) की स्थापना की, जो कंक्रीट प्रौद्योगिकी और संरचनात्मक अभियांत्रिकी में शोध का अग्रणी केंद्र बना। उन्होंने *Comité Européen du Béton* (CEB) की सह-स्थापना भी की और *Fédération Internationale de la Précontrainte* (FIP) के अध्यक्ष रहे। उन्होंने मैड्रिड स्कूल ऑफ सिविल इंजीनियरिंग में प्राध्यापक पद संभाले और प्रिंसटन, हार्वर्ड तथा MIT में आगंतुक प्राध्यापक रहे।

अभिकल्प-दर्शन और संरचनात्मक अंतर्बोध तोरोहा के अभिकल्प-दर्शन ने रूप के मनमाने आरोपण और गणना के यांत्रिक अनुप्रयोग दोनों को अस्वीकार किया। उन्होंने लिखा, “संरचनात्मक अभिकल्पक में सृजनशील अंतर्बोध और भागों से पहले समग्र को देखने की क्षमता होनी चाहिए।” उन्होंने ऐसे रूपों का समर्थन किया जो रूप के माध्यम से बलों के प्रवाह से स्वाभाविक रूप से उद्भूत हों—झिल्ली क्रिया द्वारा

कंक्रीट, अनावृत ईंट, बड़ी क्षैतिज खिड़कियाँ और अलंकरण-रहित चिकने अग्रभाग—दोनों में उभरती है। यह आंशिक रूप से उस समय भी निर्धन देश में सामग्रियों की कमी से प्रेरित था, जो स्पेन को झकझोर देने वाले क्रूर गृहयुद्ध के बाद की स्थिति थी।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भार वहन करते कवच, प्रणोद-रेखाओं का अनुसरण करते मेहराब, और रज्जुरेखीय आकार ग्रहण करते केबल। इस दृष्टिकोण, जिसे उन्होंने “संरचनात्मक अंतर्बोध” कहा, के लिए सामग्रियों के व्यवहार और संरचनाओं में बलों द्वारा अपना पथ खोजने की गहरी समझ आवश्यक थी। उन्होंने अभिकल्पों को अंतिम रूप देने से पहले जटिल कवच संरचनाओं के व्यवहार को सत्यापित करने के लिए पूर्ण-मापक्रम परीक्षण के उपयोग में अग्रणी भूमिका निभाई और जब उस समय की वैश्लेषिक विधियाँ अपर्याप्त सिद्ध हुईं, तब अंतर्बोध को अनुभवजन्य सत्यापन से जोड़ा।

हार्डी क्रॉस की भाँति तोरोहा मानते थे कि विस्तृत विश्लेषण प्रारंभिक अभिकल्प के बाद ही होना चाहिए। वे गणनाओं को लगभग बाद में आए विचार के रूप में देखते थे, जो अंतर्बोध से पहले ही संकल्पित अभिकल्प की व्यवहार्यता का आकलन करने के लिए आवश्यक थीं।[35]

> सामान्य अभिकल्प पूर्ण होने के बाद किसी संरचना अथवा अलग संरचनात्मक अवयवों में प्रतिबलों की गणना अधिक तकनीकी और विशिष्ट कार्य है; इसलिए यह इस पुस्तक के कार्यक्षेत्र से बाहर का विषय है और केवल सामान्य टिप्पणियाँ की जाएँगी। प्रतिबलों की गणना केवल अभिकल्पक के अंतर्बोध से संकल्पित तथा प्रस्तावित संरचनात्मक अवयवों के आकार जाँचने और सुधारने का कार्य कर सकती है। कृति स्वयं गणना से कभी जन्म नहीं लेती। गणना संकल्पित और अपनाए गए अभिकल्प को संदर्भित करती है: सामान्यतः संरचना की स्थिरता और सामर्थ्य सुनिश्चित करने के लिए वह सामान्य अभिकल्प के बाद की जाती है। यदि गणना संरचना की आवश्यक सुरक्षा प्रमाणित नहीं करती, तो अभिकल्पक को अपनी कृति संशोधित करनी और अंतिम अनुमोदन के लिए गणनाएँ दोहरानी चाहिए। गणनाओं को निर्माण के सामर्थ्य के साथ उसकी प्रत्यास्थता और स्थैतिक स्थिरता भी जाँचनी चाहिए। संरचना का सामर्थ्य प्रायः स्पष्ट होता है और उसे गणना की आवश्यकता नहीं होती। किंतु इसका यह अर्थ नहीं होना चाहिए कि अन्य स्थितियों में पर्याप्त औचित्य के बिना सटीक जाँच छोड़ी जा सकती है।
>
> (Torroja, Polivka, and Polivka, 1958)

Razón y Ser de los Tipos Estructurales अपने परवर्ती वर्षों में तोरोहा ने प्रकाशनों पर ध्यान केंद्रित किया। उनकी पुस्तक *Razón y Ser de los Tipos Estructurales* (अंग्रेजी में Philosophy of Structures, 1958 के रूप में प्रकाशित) (Torroja, 2008; Torroja, 1962b; Torroja and Miret, 1958) विश्वभर में संरचनात्मक अभिकल्प पर सर्वाधिक प्रभावशाली पाठों में से एक बनी और रूप के माध्यम से बल-प्रवाह की स्वाभाविक अभिव्यक्ति पर केंद्रित अभिकल्प-दर्शन प्रतिपादित करती है। तोरोहा ने यह पुस्तक उन लोगों के विरुद्ध तर्क के रूप में लिखी जो संरचनाओं को मात्र गणना के प्रश्न तक सीमित करना चाहते थे; उनके लिए प्रतिरोध आवश्यक था, किंतु निर्माण का एकमात्र अथवा प्रमुख तर्क कभी नहीं। पुस्तक उस मानसिक प्रक्रिया—परिमेय और भावनात्मक दोनों—पर उनके विचार प्रस्तुत करती है जिसका उपयोग संरचनात्मक अभिकल्पक किसी नई परियोजना का सामना करते समय करता है। गणना पर संकल्पनात्मक अभिकल्प की प्रधानता के विषय में तोरोहा ने भूमिका में स्पष्टतः लिखा: *सभी गणनाओं से पहले और ऊपर विचार होता है, जो सामग्री को उसका ध्येय पूरा करने के लिए प्रतिरोधी रूप में ढालता है।* यह कथन पुष्टि करता है कि तोरोहा वास्तव में मानते थे कि संरचनात्मक विश्लेषण किसी संरचना के प्रारंभिक संकल्पनात्मक अभिकल्प के बाद—न कि पहले—होना चाहिए।

उनकी *Philosophy of Structures* तकनीकी ग्रंथ और संरचनात्मक अभिकल्प की कला पर चिंतन दोनों है। जहाँ (Torroja and Miret, 1958) उनकी अनेक व्यक्तिगत उपलब्धियों का परिप्रेक्ष्य प्रस्तुत

[35] इसी प्रकार मैंने छात्रों से सदैव कहा है कि किसी समस्या का परिमित अवयव कोड द्वारा विश्लेषण किए जाने से पहले उन्हें उसका “अनुभव” अथवा अनुमानित उत्तर होना चाहिए। संरचनात्मक विश्लेषण को *Fermi Problem* के रूप में देखा जाना चाहिए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करती है, वहीं (Torroja, Polivka, and Polivka, 1958) कहीं अधिक रोचक है: उसमें वे संरचनात्मक अभियांत्रिकी के व्यवसाय पर विचार करते हैं और फिर सरल शब्दों में (एक भी समीकरण के बिना) मेहराबों, गुंबदों, कवचों, बाँधों और अन्य विभिन्न संरचनाओं के संरचनात्मक व्यवहार का वर्णन करते हैं। तोरोहा संरचनात्मक प्रकारों—धरन, मेहराब, कैंची, ढाँचे, कवच—का विश्लेषण केवल गणितीय अमूर्तन के रूप में नहीं, बल्कि भौतिक और स्थानिक आवश्यकताओं के प्रत्युत्तर के रूप में करते हैं। वे बल देते हैं कि संरचनात्मक इष्टतमीकरण और वास्तुशिल्पीय सौंदर्य प्रतिस्पर्धी उद्देश्य नहीं, बल्कि अच्छे अभिकल्प के पूरक पक्ष हैं: भारों का दक्षतापूर्वक प्रतिरोध करने वाली संरचनाएँ प्रायः सुरुचिपूर्ण भी होती हैं, क्योंकि दक्षता और सौंदर्य दोनों संरचनात्मक क्रिया की स्पष्ट अभिव्यक्ति से उद्भूत होते हैं।

तोरोहा का प्रभाव समस्त स्पेनी-भाषी संसार और उससे आगे तक फैला तथा उसने तकनीकी कौशल को रूपात्मक सौंदर्य से एकीकृत करने का प्रयास करने वाले अभियंताओं को प्रेरित किया। निष्पादन में कठिन होते हुए भी उनके कवचों ने प्रदर्शित किया कि प्रबलित कंक्रीट सर्वोत्तम गॉथिक मेहराबी छतों की बराबरी करने वाली लघुता और माधुर्य प्राप्त कर सकता है।

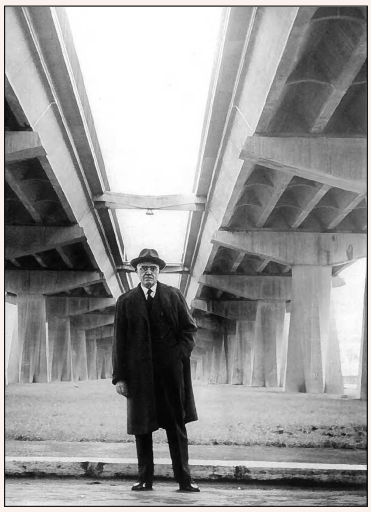
15.4.7 पियर लुइजी नेर्वी (1891–1979)

चित्र 15.20 में दिखाए गए पियर लुइजी नेर्वी (सोंद्रियो, 1891–रोम, 1979) इतालवी संरचनात्मक अभियंता और वास्तुकार थे, जिन्हें रॉबर्ट मायार, यूजेन फ्रेसिने तथा एदुआर्दो तोरोहा के साथ बीसवीं शताब्दी में प्रबलित कंक्रीट निर्माण के विकास के सर्वाधिक प्रभावशाली व्यक्तियों में व्यापक रूप से माना जाता है। वास्तुकला इतिहासकार निकोलाउस पेव्सनर ने उन्हें “हमारे समय का प्रबलित कंक्रीट में सर्वाधिक प्रतिभाशाली कलाकार” कहा। वे बीसवीं शताब्दी के सर्वाधिक सृजनशील और प्रभावशाली अभियंताओं में थे (Nervi, 1956a); बोलोन्या विश्वविद्यालय में *ingegnere edile* (“भवन अभियंता”) के रूप में शिक्षित और कार्यरत थे। 1913 में बोलोन्या विश्वविद्यालय से सिविल अभियांत्रिकी में स्नातक होने के बाद नेर्वी ने *Società Anonima per Costruzioni Cementizie* के लिए कार्य किया, फिर 1920 में अपनी ठेकेदारी संस्था स्थापित की, 1923 में अपनी संस्था की स्थापना की और बाद में *Società Ingg. Nervi & Bartoli* (1932) बनाई; इसके माध्यम से उन्होंने अभिकल्पक और निर्माता दोनों के रूप में कार्य किया—यह असामान्य संयोजन उन्हें अपने नवोन्मेषी विचारों को सीधे स्थल पर जाँचने तथा परिष्कृत करने देता और मितव्ययी नवोन्मेषी अभिकल्प प्राप्त करने का अंतर्बोध तथा कौशल देता था। वे वास्तव में *progettista par excellence* थे। अभिकल्प और निर्माण का यह एकीकरण उनके दर्शन के केंद्र में था: उनका आग्रह था कि संरचनात्मक रूप सामग्री और निर्माण की वास्तविकताओं से उद्भूत होना चाहिए, निर्माणयोग्यता की उपेक्षा करते हुए आरोपित अमूर्त ज्यामिति से नहीं।

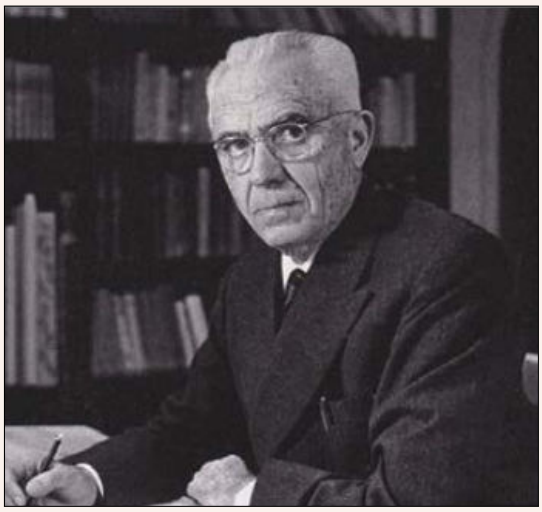
इतालवी संस्कृति में किसी व्यक्ति के नाम से पहले उसकी उपाधि (*Dottore, Avvocato, Ragioniere, Architetto, Ingegnere*, आदि) लगाना सामान्य प्रथा है। जब लोग नेर्वी को *Architetto Nervi* कहते, तो वे सदैव सुधारते: “*No, Ingegnere Nervi*” (Maier, 2007)।

उनकी प्रमुख कृतियों में फ्लोरेंस का बेर्ता स्टेडियम (Stadio Artemio Franchi) (1930–32), ओरिवएतो और ओर्बेतेल्लो के विमानशाला (1935–42), तूरिन प्रदर्शनी भवन (1947–50), पेरिस में UNESCO मुख्यालय (ब्रॉयर और ज़ेर्फूस के साथ, 1950), मिलान में पिरेली टावर (जियो पोंती के साथ, 1955–59) और 1960 के रोम ओलंपिक के क्रीड़ा भवन, जिनमें *Palazzetto dello Sport* और (जिससे भ्रमित न हों)

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) (Lori, 2009)



(b) (Nervi, Neri, et al., 2014)

चित्र 15.20: *L'Ingegnere* पियर लुइजी नेर्वी

Palazzo dello Sport, सम्मिलित हैं। उन्होंने 1946 से 1961 तक रोम के वास्तुकला संकाय में अध्यापन किया और 1961–62 में हार्वर्ड में चार्ल्स एलियट नॉर्टन व्याख्यान दिए।

वक्र रूप और आकाश की ओर उठते मेहराब उनके विशिष्ट चिह्न थे। किंतु उनके भवन मूलतः परिमेय और संयमपूर्ण थे। उन्हें ऐसे आडंबरपूर्ण भवन स्वीकार नहीं थे जिनकी संरचनाएँ अपेक्षित कार्य से अत्यधिक विस्तृत हों; इसके स्थान पर वे सरलता और मितव्ययिता की आभा वाले तर्कसंगत तथा सहज भवन बनाना चाहते थे। उन्होंने कहा, "सौंदर्य सजावट से नहीं, संरचनात्मक सुसंगति से आता है" (The Baltimore Sun, 1979)।

तकनीकी नवोन्मेष और व्यावसायिक एकीकरण नेर्वी ने व्यवसाय के तीन पक्षों का कुशलतापूर्वक संयोजन किया: संरचना में बलों के प्रवाह का संरचनात्मक बोध, विशेषतः जटिल संरचनाओं के लिए भी *समस्थैतिक* रेखाएँ निर्धारित करना[36]; *ferrocemento* का नवोन्मेषी सामग्री-विकास, जिसने उनके कवचों के निर्माण में प्रमुख भूमिका निभाई; और सौंदर्य अथवा सुरक्षा को संकट में डाले बिना लागत घटाने की निर्माण-तकनीकें।

नेर्वी के योगदान अभिकल्प से आगे निर्माण प्रौद्योगिकी में मूलभूत नवोन्मेषों तक विस्तृत थे। उन्होंने *ferrocemento* (फेरोसीमेंट) विकसित और पेटेंट किया—सीमेंट गारे से लेपित सूक्ष्म इस्पात जाली की अनेक परतों का उपयोग करने वाला पतला सीमेंटी सम्मिश्र—जिसने उल्लेखनीय सामर्थ्य और सुघट्यता सहित न्यूनतम मोटाई के अवयव बनाना संभव किया। पहले भंडारगृह की दीवारों और नाव के ढाँचों, तथा बाद में बड़े-मापक्रम वास्तुशिल्पीय अवयवों के लिए प्रयुक्त यह तकनीक उनके युद्धोत्तर कार्य की पहचान बन गई और जटिल वक्र रूपों का पूर्वनिर्माण संभव किया जिन्हें स्थल पर संयोजित किया जा सकता था। उन्होंने पूर्वढलित संरचनात्मक अवयवों और चलायमान साँचाकारी तंत्रों के उपयोग में भी अग्रणी

[36]समस्थैतिक रेखाएँ कोटि 2 के प्रदिश (जैसे σ_{ij} अथवा M_{ij}) के किसी प्रमुख मान की दिशाएँ परिभाषित करती हैं, जिससे धरनों, पट्टों अथवा अन्य अवयवों में उसके प्रक्षेप-पथ का मानसदर्शन किया जा सके।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भूमिका निभाई, जिससे संरचनात्मक सुरुचि के उच्चतम मानक बनाए रखते हुए निर्माण समय और लागत में अत्यधिक कमी आई।

अभियंता: समस्थैतिक रेखाएँ और संरचनात्मक बोध नेर्वी के समय अभियंता परीक्षण से पूरित यांत्रिकी की ठोस समझ पर निर्भर थे। संगणक तब तक उपलब्ध नहीं थे और गणनाएँ (आधुनिक मानकों से) अपेक्षाकृत प्रारंभिक थीं।

1949 में पेटेंट किए गए उनके *isostatic ribbing* तंत्र ने कंक्रीट पसलियों को प्रमुख बंकन आघूर्णों की रेखाओं के साथ संरेखित किया, जिससे सामग्री-उपयोग इष्टतम हुआ और साथ ही गात्ती वूल फैक्टरी तथा पालात्सेत्तो देल्लो स्पोर्ट जैसी कृतियों में दिखाई देने वाले विशिष्ट कोष्ठित प्रतिरूप बने। नेर्वी ने अपनी नेर्वी और बार्तोली अभिकल्प संस्था के अभियंताओं में से एक, आल्दो आर्कांजेली, को श्रेय दिया, जिन्होंने सुझाव दिया था कि पट्ट की पसलियों को उसके प्रमुख बंकन आघूर्णों की समस्थैतिक रेखाओं का अनुसरण करना चाहिए। ये रेखाएँ केवल संरचना की भारण अवस्थाओं पर निर्भर करती हैं और नेर्वी यह जानकर चकित हुए कि विशुद्ध भौतिक परिघटना की व्याख्या तक अपना कार्य सीमित रखकर वे अप्रत्याशित तथा अभिव्यंजक नए रूप खोज सकते थे। आघूर्णों की समस्थैतिक रेखाओं के साथ रखी पट्ट की पसलियाँ योजना में सुंदर वक्र बनाती हैं (Nervi, 1956b).

The isostatic lines (not to be confused with contour lines) can be readily constructed through the following algorithm:

```
procedure ISOSTATIC                                   ▷ PLOT ISOSTATIC LINES
    Initialize Γ, h, L, nLines, frac, vect, i         ▷ Initialize constants
    for Line ← 0 to nLines do                         ▷ Loop on the number of lines
        x0 = −L/2 + Line × L/frac;  y0 = 0.99 × h/2   ▷ Initialize first point
        x(1) = x0; y(1) = y0                          ▷ Initialize array
        Inside ← true
        k = 1                                         ▷ Initialize counter for Line
        while Inside = True do
            Compute σxx; σyy; τxy                     ▷ Compute tensor components
            T = Tensor(σxx τxy)                       ▷ Set up stress/moment tensor
            [Vect, D] = eig(Tensor)                   ▷ Compute normalize/sorted eigenvectors
            V(:) = Vect(:, i)                         ▷ Extract vector (1st or 2nd eigenvector (C or T)
            k = k + 1                                 ▷ Increment counter for Line
            x(k) = x(k − 1) + vect × V(1)             ▷ determine next point
            y(k) = y(k − 1) + vect × V(2)             ▷ by an arc length=vect
            if x, y, outside Γ then                   ▷ Check that we stay inside the surface
                Inside ← false
            end if
        end while
        Plot(x,y)                                     ▷ Plot this line
    end for
end procedure
```

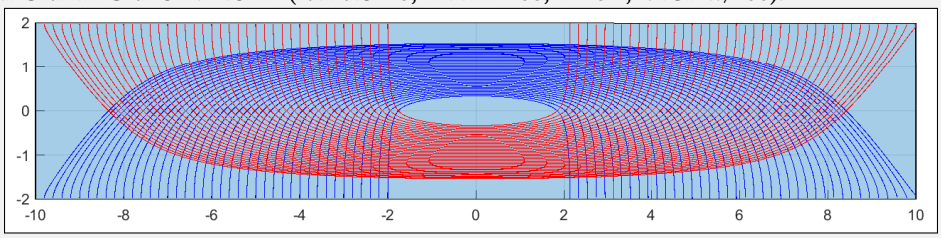
where

Γ	Volume of body ($h \times L$)
h	Height
L	Length
nLines	Number of isostatic lines

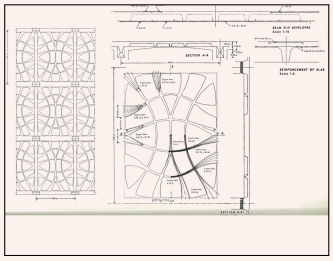
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

frac large number to avoid starting at $x = \pm L/2$
vect Incremental arc length of the isostatic line
i compression ($i = 1$) or tension ($i = 2$)

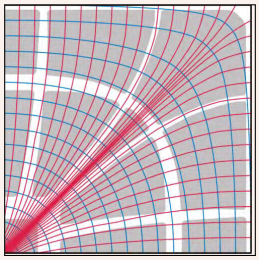
USING THIS ALGORITHM (MATLAB CODE LISTED IN §I.2.10) ONE CAN READILY PLOT THE ISOSTATIC LINES OF A BEAM UNDER UNIFORM LOAD (NLINES=40, DELTA=100, I=1&2, VECT=h/100).



चित्र 15.21b में लाल रेखाएँ अधिकतम प्रमुख बंकन आघूर्णों के अनुरूप समस्थैतिकों को और नीली रेखाएँ न्यूनतम प्रमुख बंकन आघूर्णों के अनुरूप गौण समस्थैतिकों को निरूपित करती हैं (Halpern, Billington, and Adriaenssens, 2013)। इस स्थिति में दोनों रेखा-युग्म चारों परिसीमाओं के आरंभिक नोडों से उत्पन्न किए गए। रेखाओं का संकेंद्रण प्रमुख बंकन आघूर्ण दिशाओं के अभिसरण को इंगित करता है। धूसर और श्वेत रूपरेखा गात्ती वूल फैक्टरी के तल की अनुमानित योजना दिखाती है, जिससे सैद्धांतिक समस्थैतिकों और निर्मित पसली-प्रतिरूप के बीच सहसंबंध स्पष्ट हो। चतुर्थांश पट्ट के नीचे बाईं ओर स्तंभ-अवलंब के चारों ओर उत्पन्न संकेंद्री गौण समस्थैतिक स्तंभ-शीर्ष के चारों ओर प्रबलन के संकेंद्री वक्र रखने का तर्क प्रतिबिंबित करते और स्तंभ को घेरने वाली पसली के नेर्वी के स्थानन को सत्यापित करते हैं। केंद्रीय स्तंभ से निकलने वाली पसलियाँ भी उत्पन्न प्रमुख समस्थैतिकों से निकट सहसंबंध दर्शाती हैं। नेर्वी के समस्थैतिक-प्रेरित छत-अभिकल्प के अनेक उदाहरण (Vitalis, 2021) में पाए जा सकते हैं।



(a) समस्थैतिक पसलियों का उपयोग करती तल-पट्ट (Nervi, 1956b)





(b) गात्ती वूल फैक्टरी की समस्थैतिक रेखाएँ (Halpern, Billington, and Adriaenssens, 2013)

चित्र 15.21: समस्थैतिक रेखाओं के उदाहरण

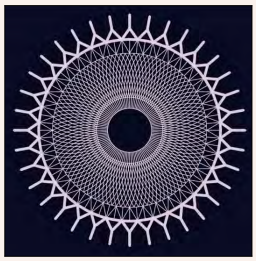
अपनी पीढ़ी के अधिकांश इतालवियों की भाँति और अभी विकसित होने वाली परिमित अवयव विधि के अभाव में, नेर्वी ने सिद्धांत के अपने नवोन्मेषी अभिकल्पों को समर्थन देने में अपर्याप्त सिद्ध होने पर उसके अनुप्रयोग अथवा उसकी सीमाओं के परीक्षण के लिए प्रयोग को सदैव सर्वोत्तम विधि माना।[37] लघु-

[37]नेर्वी के अनेक परीक्षण (अब निष्क्रिय) ISMES (*Istituto Sperimentale Modelli e Strutture*) में किए गए, जिसने बाँधों (मुख्यतः) और नवोन्मेषी संरचनाओं के परीक्षण में अग्रणी भूमिका निभाई।

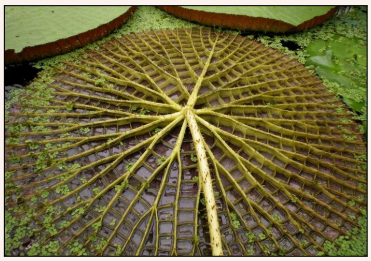
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मापक्रम परीक्षण प्रतिरूपों के साथ कार्य उनके अभिकल्प-कार्य में स्थायी था; उन्होंने अपनी अप्रमाणित धारणाओं को "जाँचने" और "समायोजित करने" के लिए उनका उपयोग किया। चित्र 15.23a ओरिवएतो विमानशाला (चित्र 15.24b) के प्रतिरूप का परीक्षण दिखाता है। नेर्वी ने निर्माण से पहले संरचनात्मक व्यवहार सत्यापित करने के लिए प्रयोगशाला अवस्थाओं में जाँचे गए लघु-मापक्रम प्रतिरूपों का निरंतर उपयोग किया—इस प्रथा ने उनके सैद्धांतिक विश्लेषण को अनुभवजन्य सत्यापन से पूरित किया। नेर्वी विकृति प्रमापियों सहित प्रतिरूप-परीक्षण के साथ प्रकाश-प्रत्यास्थता और गणितीय सिद्धांत पर भी निर्भर थे।

यह उल्लेखनीय है कि कुछ लोगों ने नेर्वी के कार्य में *जीव-अनुकरणात्मक वास्तुकला* का उभरता विज्ञान देखा है और समस्थैतिक रेखाओं तथा पत्तियों की प्राकृतिक शिराओं अथवा वृक्षों की शाखाओं *Victoria Amazonica* के बीच प्रबल समानता बताई है (Vitalis, 2021 PDF) (चित्र 15.22)।



(a) *Palazzetto dello Sport* का गुंबद



(b) *Victoria Amazonica*

चित्र 15.22: नेर्वी और जीव-अनुकरणात्मक वास्तुकला

सामग्री वैज्ञानिक: फेरोसीमेंट नवोन्मेष नेर्वी का नाम *ferrocemento* से गहराई से जुड़ा है, जिसके कवच-निर्माण साँचाकारी की व्यवहार्य सामग्री के रूप में उपयोग में वे अग्रणी रहे[38]। यह निकट अंतराल वाली सतत तंतु-जालियों अथवा जालों (जैसे "मुर्गी-जाली") की परतों से प्रबलित पोर्टलैंड सीमेंट गारे से अधिक कुछ नहीं है, जैसा चित्र 15.23b में दिखाया गया है।

साँचाकारी के स्थान पर कंक्रीट को किसी भी आकार की तार-जाली पर करणी से लगाया जाता था, जिसे सहायक छड़ों से बाँधा गया होता था। इस प्रकार प्रबलित कंक्रीट न केवल रैखिक कंकाल-रूप, बल्कि अपनी साँचाकारी की कठोर ज्यामिति से भी मुक्त हो गया। ढाला गया कंक्रीट संधिरहित और आकार में पूर्णतः स्वतंत्र था। नेर्वी ने इन अत्यंत तनु, विशेष आकार वाले अवयवों का परिष्कृत अवयव, साँचाकारी अथवा स्थायी साँचाकारी के रूप में अत्यंत लागत-प्रभावी उपयोग किया। फेरोसीमेंट अनेक आकारों (नाव के ढाँचे, कवच छतें, जल-टंकियाँ) में अपेक्षाकृत पतली, कठोर और सुदृढ सतहों तथा संरचनाओं के निर्माण के लिए विशेष रूप से उपयुक्त है। फेरोसीमेंट से नाव बनाने के लिए भी नेर्वी की प्रशंसा हुई है, यद्यपि उन्नीसवीं शताब्दी में फ्रांस के लांबो और संयुक्त राज्य अमेरिका के हॉलिस्टर निश्चय ही उनसे पहले थे।

इस प्रकार हम देखते हैं कि नेर्वी की प्रतिभा ने सामग्री, रूप, निर्माण और वास्तुशिल्पीय अभिव्यक्ति को मितव्ययिता से संयोजित किया। उनके दक्ष संरचनात्मक रूपों—प्रमुख प्रतिबल की रेखाओं का अनुसरण

[38]वास्तव में फेरोसीमेंट का आविष्कार दो फ्रांसीसियों, जोसेफ मोनिए और जोसेफ-लुई लांबो (जिन्होंने 1848 में इस तंत्र से नाव बनाई थी), ने किया था। यह बाद में फ्रांस्वा एनेबिक द्वारा "आविष्कृत" प्रबलित कंक्रीट का अग्रदूत था।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करती पसलियाँ, झिलमिली क्रिया से आकार पाते कवच, आघूर्ण घटने के साथ तनु होते कैंटिलीवर—ने प्रदर्शित किया कि प्रौद्योगिकीय नवोन्मेष वास्तुशिल्पीय अभिव्यक्ति को कैसे प्रेरित कर सकता है।

निर्माता: प्रमुख कृतियाँ और निर्माण-नवोन्मेष द्वितीय विश्व युद्ध के बाद इटली ने व्यापक पुनर्निर्माण किया। कंक्रीट सस्ता था, इस्पात दुर्लभ, श्रम प्रचुर और ऐतिहासिक रूप से कुशल था। कुछ प्रमुख व्यक्तियों की सृजनशीलता और प्रतिभा के साथ इस संयोजन ने बीसवीं शताब्दी की कुछ सर्वाधिक प्रतिष्ठित संरचनाएँ उत्पन्न कीं। इस युग का अच्छा चित्रण (Desideri et al., 2013) में है।

फ्लोरेंस के उनके आरंभिक नगरपालिका स्टेडियम (1930–1932), जो चित्रों 15.24c और 15.24d में दिखाए गए हैं, ने प्रभावशाली कैंटिलीवर और अभिव्यंजक रूप के लिए प्रबलित कंक्रीट की क्षमता प्रदर्शित की। किंतु नेर्वी के परिपक्व कार्य ने फेरोसीमेंट के विकास और व्यापक उत्पादन तथा स्थल पर संयोजन योग्य पूर्वनिर्मित पसलीदार अवयवों के माध्यम से अपना विशिष्ट चरित्र प्राप्त किया। इन तकनीकों ने उल्लेखनीय मितव्ययिता के साथ जटिल वक्र पृष्ठों का निर्माण संभव किया।

तूरिन के प्रदर्शनी भवन (1948–1950), पेरिस में UNESCO मुख्यालय (1953–1958, ब्रॉयर और ज़ेर्फूस के साथ), मिलान में पिरेली टावर (1956–1958, पोंती के साथ), 1960 के रोम ओलंपिक के पालात्सेत्तो देल्लो स्पोर्ट और पालात्सो देल्लो स्पोर्ट तथा वैटिकन का सभागार (1971) नेर्वी की व्यापकता और कौशल प्रदर्शित करते हैं। तूरिन भवनों में पूर्वनिर्मित इकाइयों से संयोजित प्रभावशाली वलित मेहराबी छत-पृष्ठ हैं; पालात्सेत्तो देल्लो स्पोर्ट पूर्वढलित अवयवों के पसलीदार कवच द्वारा 60 मीटर विस्तृति वाला गुंबद प्राप्त करता है, जिसका आंतरिक भाग संरचनात्मक अभिव्यक्ति का अद्वितीय प्रदर्शन है।[39]

नेर्वी ने प्रतिरूपक निर्माण, प्रबलित कंक्रीट और संरचनात्मक सुरुचि के सहक्रियात्मक संबंध का समर्थन किया। उन्होंने तर्क दिया कि शैलीगत पूर्वधारणाओं से मुक्त अभियंता ऐसी “संरचनात्मक सत्यता” प्राप्त कर सकते हैं जो स्वभावतः सुंदर हो—आरोपित सजावट द्वारा नहीं, बल्कि सामग्री में बलों के प्रवाह की स्पष्ट अभिव्यक्ति द्वारा। नेर्वी के कार्य ने प्रमाणित किया कि जब अभिकल्प सामग्री और बलों के साथ सत्यनिष्ठ जुड़ाव से आगे बढ़ता है, तब मितव्ययिता, संरचनात्मक दक्षता और सौंदर्य प्रतिस्पर्धी उद्देश्य नहीं, बल्कि स्वाभाविक सहयोगी होते हैं।

अभिकल्प-दर्शन और सैद्धांतिक लेखन नेर्वी के सैद्धांतिक लेखन उनकी निर्मित कृतियों जितने ही महत्त्वपूर्ण हैं। उनकी सर्वाधिक प्रसिद्ध पुस्तक, *Scienza o arte del costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento armato* (1945) (Nervi, Neri, et al., 2014), ने संरचनात्मक अभिकल्प की प्रकृति पर मूलभूत प्रश्न उठाया और निर्माण के तकनीकी-वैज्ञानिक तथा अंतर्बोधात्मक-कलात्मक दृष्टिकोणों के बीच ऐतिहासिक विभाजन का समन्वय खोजा। वास्तुकार आल्दो रोस्सी की पहल पर 1997 में पुनर्प्रकाशित इस पुस्तक को उन्होंने “उन थोड़ी पुस्तकों में से एक कहा जिन्हें मैंने सदैव अपने छात्रों को सुझाया है”; कृति ने समानुपात-निर्धारण, गणना, प्रायोगिक प्रेक्षण और सौंदर्यपरक संवेदनशीलता के बीच परिमेय किंतु संवेदनशील संतुलन का तर्क दिया।

[39]लेखक को रोम में उच्च विद्यालय में पढ़ते समय पालात्सेत्तो देल्लो स्पोर्ट के भीतर हैंडबॉल प्रतियोगिताओं में भाग लेने का सौभाग्य मिला। उस क्रीड़ांगण में नेर्वी के आकाश की ओर उठते पसलीदार गुंबद के नीचे खड़े होकर संरचना को जीवित उपस्थिति के रूप में अनुभव किए बिना नहीं रहा जा सकता था—पसलियाँ किसी भविष्यवादी गिरजाघर की मेहराबी छतों की भाँति ऊपर की ओर विकीर्ण होतीं, काचित परिमाप से प्रकाश छनता, और संपूर्ण स्थान किसी प्रकार एक साथ स्मारकीय तथा आत्मीय था। उस युवा अनुभव ने अमिट छाप छोड़ी: यहाँ प्रमाण था कि अभियांत्रिकी कला की आकांक्षा कर सकती है, कि संरचना किसी मूर्त अथवा संगीत-रचना की भाँति निश्चित रूप से आत्मा को आंदोलित कर सकती है। लेखक के लिए पालात्सेत्तो वह भवन बना हुआ है जिसके सापेक्ष अन्य सभी को मापा जाता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हार्वर्ड में उनके 1961 के नॉर्टन व्याख्यान, जो बाद में *Aesthetics and Technology in Building* (Nervi, 2018) के रूप में प्रकाशित हुए, ने इन विचारों का विस्तार किया और अपनी परियोजनाओं के माध्यम से प्रदर्शित किया कि पूर्वढलित तथा स्थल-ढलित कंक्रीट मितव्ययिता, तकनीकी शुद्धता और सौंदर्यपरक संतुष्टि की उनकी त्रिविध माँग कैसे पूरी कर सकते हैं। संरचनात्मक संकल्पना में अंतर्बोध और गणना की भूमिका के विषय में नेर्वी ने 1931 में लिखा कि सूत्रों से प्राप्त संख्यात्मक परिणामों को “केवल मार्गदर्शक प्राचलों के रूप में माना जा सकता है, जिनकी व्याख्या और मूल्यांकन भावना तथा अंतर्बोध द्वारा किया जाना है—वे ही क्षमताएँ जो उस वस्तु का मूल्यांकन कर सकती हैं जिसका पटरी और तराजू से मूल्यांकन नहीं हो सकता” (Nervi, 2018, p. 16)। उन्होंने आगे आग्रह किया कि संरचनात्मक अभिकल्पक का कार्य पहले किसी संरचना का “आविष्कार” करना—स्थान में रूप के रूप में उसकी पूर्वाकृति बनाना—और उसके बाद ही गणना करना है। गणितीय सत्यापन से पहले अंतर्बोधात्मक संकल्पना आने के इस विश्वास ने नेर्वी को अभियंता-कलाकारों की उस परंपरा में तोरोहा के ठीक साथ रखा जो विश्लेषण को संरचनात्मक रूप उत्पन्न करने के बजाय उसके परिष्कार का उपकरण मानती थी।

> ...मैं वास्तुकारों, अभियंताओं, आलोचकों—और वास्तुकला के अद्भुत क्षेत्र के सभी अनुयायियों—का ध्यान एक ऐसी वस्तुनिष्ठ वास्तविकता की ओर आकर्षित करना चाहता हूँ जिसकी प्रायः उपेक्षा और उससे भी अधिक वास्तुशिल्पीय तथ्य के भ्रामक रूपात्मक तथा सांस्कृतिक आदर्शीकरण द्वारा अस्वीकृति होती है: सामग्री, स्थैतिकी, निर्माण की प्रौद्योगिकी, आर्थिक दक्षता और कार्यात्मक आवश्यकताएँ वास्तुशिल्पीय वाणी की शब्दावली हैं।
>
> इस शब्दावली और उन व्याकरण तथा वाक्यविन्यास (तकनीक) के नियमों की पूर्ण समझ के बिना, जिनसे उसे संयोजित किया जाना चाहिए, ऐसी वाणी को काव्य (वास्तुकला) अथवा शुद्ध गद्य (उत्तम निर्माण) के स्तर तक उठाना असंभव है।
>
> (Nervi, 1963)

गणनाओं के विषय में दुर्भाग्यवश बहुत कुछ जीवित नहीं बचा; तथापि अनेक लेखकों ने उनके कार्य का व्यापक चित्रण किया है (Nervi, 1956b; Greco, 2008; Nervi, 2018; Lori, 2009; Nervi, 1963; Chiorino and Olmo, 2010), और उनके अभिलेख रोम के MAXXI संग्रहालय तथा पार्मा विश्वविद्यालय (CSAC, *Centro Studi e Archivio della Comunicazione*) में विभाजित हैं।

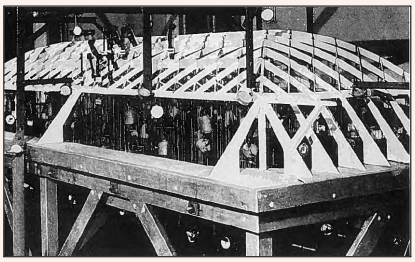
नेर्वी की कुछ सर्वाधिक प्रतिष्ठित संरचनाएँ चित्र 15.24 में दिखाई गई हैं। उनकी पुस्तकें *Structures* (1956) और *Aesthetics and Technology in Building* (1965) ऐसा दर्शन प्रतिपादित करती हैं जिसमें सौंदर्य संरचनात्मक तर्क और निर्माण-प्रक्रिया की सत्यनिष्ठ अभिव्यक्ति से स्वाभाविक रूप से उद्भूत होता है।

15.4.8 रिक्कार्दो मोरांदी (1902–1989)

द्वितीय विश्व युद्ध के बाद इटली पुनर्निर्माण के उन्माद में चला गया। इतालवियों की ऐतिहासिक सृजनशीलता और सौंदर्यबोध से मिलकर इस प्रयास ने कुछ प्रतिष्ठित संरचनाएँ उत्पन्न कीं—अधिकांशतः, यदि केवल नहीं, कंक्रीट में, क्योंकि वह इस्पात से बहुत सस्ता था और अपेक्षाकृत सस्ता श्रम प्रचुर था।

रिक्कार्दो मोरांदी प्रबलित और पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट तथा केबल-अवलंबित पुलों के अपने नवोन्मेषी उपयोग के लिए सर्वाधिक प्रसिद्ध हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

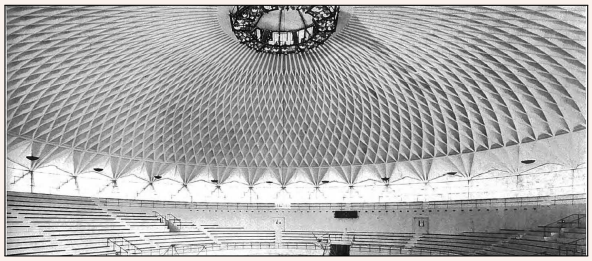


(a) ओरि्वएतो विमानशाला का प्रतिरूप-परीक्षण (Lori, 2009)

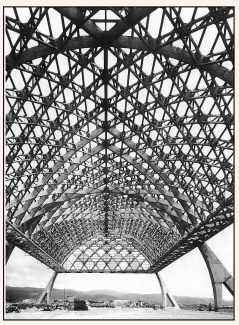


(b) फेरोसीमेंट

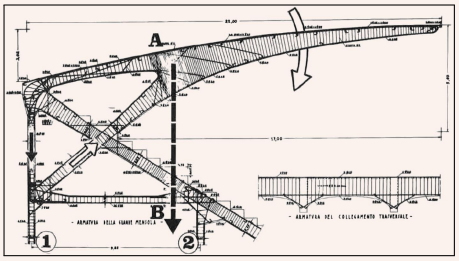
चित्र 15.23: नेर्वी: संरचनात्मक और सामग्री अभियंता



(a) *Palazzetto dello Sport* का आंतरिक भाग (Nervi, 1963)



(b) ओरि्वएतो विमान-शाला (Lori, 2009)



(c) फ्लोरेंस स्टेडियम (Nervi, 2018)



(d) फ्लोरेंस स्टेडियम (Nervi, 2018)

चित्र 15.24: नेर्वी की प्रतिष्ठित संरचनाएँ

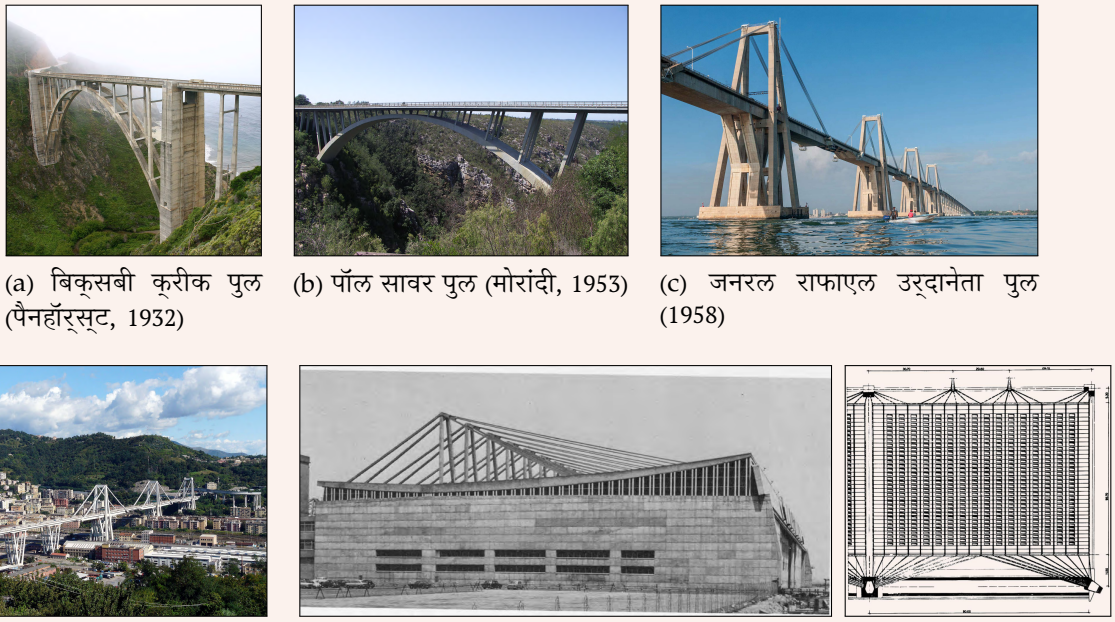
संभवतः बिक्सबी क्रीक पुल (चित्र 15.25a) से प्रेरित होकर मोरांदी ने दक्षिण अफ्रीका के पॉल सावर पुल (चित्र 15.25b) का अभिकल्प किया। दोनों अपने-अपने देशों में प्रतिष्ठित संरचनाएँ मानी जाती हैं।

बाद में मोरांदी ने केबल-अवलंबित संरचनाओं का अभिकल्प अपनाया और उनका नाम लगभग समान अभिकल्प वाले तीन पुलों से दृढता से जुडा है: वेनेज़ुएला का जनरल राफाएल उर्दानेता पुल, जेनोआ नगर को पार करता वियादोत्तो पोल्चेवेरा और लीबिया का वादी अल कुफ पुल। ये पुल संभवतः "सौंदर्यपरक" रूप से आकर्षक थे (सभी सहमत नहीं), किंतु इनमें अतिरेक का अभाव था और केबलों का संक्षारण रोकने के

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

लिए सतत अनुरक्षण आवश्यक था। जेनोआ पुल (वास्तव में जलसेतु) अगस्त 2018 में ढह गया, जिससे 43 लोगों की मृत्यु हुई। विडंबना यह है कि प्रतिस्थापन जलसेतु का अभिकल्प पोंपिदू केंद्र के सह-अभिकल्पक, प्रसिद्ध जेनोवी वास्तुकार रेन्जो पियानो, ने किया।

मोरांदी की एक अन्य प्रसिद्ध (यद्यपि संभवतः “प्रतिष्ठित” नहीं) संरचना रोम के फ्यूमिचीनो हवाई अड्डे पर अलीतालिया विमानशालाओं की जोड़ी है, जो सभी यात्रियों को दिखाई देती है। प्रत्येक विमानशाला में छत को सहारा देने वाले 19 पूर्वप्रतिबलित कैटेनरी केबल हैं। प्रत्येक सिरे पर एक पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट धरन इन केबलों को सहारा देती है। अंततः ये अवयव स्तंभों से बाहर की ओर पंखे की भाँति फैलती पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट कंडराओं की दो श्रेणियों द्वारा दीवारों से जुड़े हैं (Morandi and Piccarreta, 1972)। यह विमानशाला ईरो सारिनेन द्वारा संकल्पित डलेस हवाई अड्डे की कैटेनरी छत से अत्यधिक समानता रखती है (अध्याय 39.1 देखें)। संयोगवश मोरांदी अभियंता और सारिनेन वास्तुकार थे।



(a) बिक्सबी क्रीक पुल (पैनहॉर्स्ट, 1932)

(b) पॉल सावर पुल (मोरांदी, 1953)

(c) जनरल राफाएल उर्दानेता पुल (1958)

(d) वियादोत्तो पोल्चेवेरा, जेनोआ (मोरांदी, 1963)

(e) अलीतालिया विमानशाला, फ्यूमिचीनो (मोरांदी, 1962)

चित्र 15.25: रिक्कार्दो मोरांदी

15.4.9 क्रिश्चियन मेन (1927–2018)

मायार के माध्यम से हम पहले ही देख चुके हैं कि कोई स्विस अभियंता संरचनात्मक दक्षता को सौंदर्य से कितनी प्रभावशाली रीति से जोड़ सकता है। उनके बाद दो उल्लेखनीय देशवासी हुए: क्रिश्चियन मेन और ओथमार आमान।[40]

मेन निस्संदेह बीसवीं शताब्दी के मध्य के सर्वाधिक प्रतिष्ठित पुल अभियंता हैं। पचास से अधिक वर्षों

[40] ओथमार आमान ने जॉर्ज वॉशिंगटन पुल (§39.4), वेराज़ानो-नैरोज़ पुल और बेयोन पुल का अभिकल्प किया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

में उन्होंने नवोन्मेष, कल्पना, सुदृढ संरचनात्मक अभियांत्रिकीय "अंतःप्रेरणा" और सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण सौंदर्यपरक संवेदनशीलता का उपयोग किया। वे ETH (जहाँ पहले मायार ने अध्ययन किया था) में अध्यापन के साथ अभ्यास भी करते थे। उनके कार्य का सर्वेक्षण (Brühwiler, 2010) में संक्षेपित है।

संरचनात्मक (पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट पुल) विश्लेषण में मेन का अधिकार उनकी पुस्तक (Menn, 1990) में प्रदर्शित है। उसमें मेन संकेत करते हैं कि मितव्ययिता, जीवन-चक्र लागत और निर्माण लागत का ध्यान रखने वाला समुचित अभिकल्पित पुल *de facto* सौंदर्यपरक होगा।[41] उनके प्रसिद्ध सुन्नीबेर्ग पुल (चित्र 15.26) का रोचक अध्ययन Honigmann and Billington, 2003 ने प्रस्तुत किया है।

मेन (Menn, 1996) में सौंदर्यशास्त्र की भूमिका पर चर्चा करते हैं:

> पुलों को विशिष्ट कार्यात्मक आवश्यकताएँ और परिसीमाएँ, जैसे अवकाश तथा निर्माण-अनुसूची, पूरी करनी चाहिए। इन आवश्यकताओं के अतिरिक्त सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण अभिकल्प उद्देश्य हैं: संरचनात्मक सुरक्षा, सेवायोग्यता, मितव्ययिता और सुरुचि।
>
> संरचनात्मक सुरक्षा और सेवायोग्यता परिभाषित करने वाले मानदंड अभिकल्प मानकों में विनिर्दिष्ट हैं, जो पुल-अभिकल्प के तकनीकी पक्षों की वर्तमान कला-अवस्था प्रतिबिंबित करते हैं। अभियंता मुख्यतः शिल्पी के रूप में कार्य करके, अर्थात् सुस्थापित सिद्धांतों के तार्किक अनुप्रयोग द्वारा, संरचनात्मक सुरक्षा और सेवायोग्यता प्राप्त करते हैं। किसी दिए पुल की लागत का अनुमान अनुभव और वैकल्पिक संकल्पनाओं के अध्ययनों पर लगाया जा सकता है। मितव्ययिता मुख्यतः अभिकल्प-संकल्पना पर निर्भर करती है। सुरुचि मुख्यतः पर्यावरण पर प्रभाव और स्वयं संरचनाओं के सौंदर्य से संबंधित है। यद्यपि सुरुचि का परिमेय रूप से परिमाणीकरण असंभव है, पुल-अभिकल्प के तकनीकी तथा दृश्य पक्षों की अंतःक्रिया संकेत करती है कि सुरुचि भी कुछ मानदंडों द्वारा नियंत्रित होती है। विशेषतः दृश्य रूप के सुशिक्षित संवेदन के साथ सुरुचि का वस्तुनिष्ठ निर्णय किया जा सकता है।
>
> ...
>
> पुल-अभिकल्प के सौंदर्यपरक पक्ष सामान्यतः स्वीकार किए जाने से अधिक महत्त्वपूर्ण हैं। अभियांत्रिकीय संरचनाएँ प्रायः प्राकृतिक और मानवीय पर्यावरण पर महत्त्वपूर्ण प्रभाव उत्पन्न करती हैं। पुलों के उपयोगकर्ता भी पर्यावरण पर नए और सामान्यतः अप्रिय प्रभाव, जैसे ध्वनि तथा निर्वात गैसें, उत्पन्न करते हैं। इन कारणों से समाज में पुलों को प्रायः नकारात्मक दृष्टि से देखा जाता है।
>
> (Menn, 1996)

15.4.10 फ़ज़लुर रहमान ख़ान (1929–1982)

ढाका (तत्कालीन ब्रिटिश भारत, अब बांग्लादेश) में जन्मे फ़ज़लुर रहमान ख़ान (1929–1982) बांग्लादेशी-अमेरिकी संरचनात्मक अभियंता और वास्तुकार थे, जो संभवतः नेर्वी के बाद बीसवीं शताब्दी के उत्तरार्ध के महानतम संरचनात्मक अभियंता थे। व्यापक रूप से "नलिकाकार अभिकल्पों के जनक" और "संरचनात्मक अभियांत्रिकी के आइंस्टाइन" कहे जाने वाले ख़ान ने बीसवीं शताब्दी के उत्तरार्ध में गगनचुंबी भवनों के अभिकल्प और निर्माण तथा ऊँचे भवन-अभिकल्प में क्रांति की। उन्होंने ढाँचित नलिका, कैंचीदार नलिका और गुच्छित नलिका सहित नवोन्मेषी संरचनात्मक तंत्र विकसित किए—इनसे अधिक सामग्री-दक्षता तथा वास्तुशिल्पीय नम्यता सहित अभूतपूर्व भवन-ऊँचाइयाँ संभव हुईं, अति-ऊँचे भवन आर्थिक रूप से व्यवहार्य बने, ये आज भी ऊँचे भवनों के निर्माण के लिए मूलभूत हैं, इन्होंने गगनचुंबी भवनों का संरचनात्मक

[41] विट्रुवियस के अनुसार यदि *firmitas* और *utilitas* की आवश्यकताएँ पूरी हों, तो *venustas* उनका अनुसरण करेगी।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=85195985

चित्र 15.26: मेन का सुनीबेर्ग पुल

तर्क रूपांतरित किया और समकालीन नगरीय क्षितिज परिभाषित करने वाले अति-ऊँचे भवन संभव बनाए (चित्र 15.27)।

ढाका के अहसानुल्लाह इंजीनियरिंग कॉलेज (अब बांग्लादेश यूनिवर्सिटी ऑफ इंजीनियरिंग एंड टेक्नोलॉजी) से सिविल अभियांत्रिकी स्नातक की उपाधि प्राप्त करने के बाद वे फुलब्राइट छात्रवृत्ति पर 1952 में संयुक्त राज्य अमेरिका गए। अर्बाना-शैंपेन स्थित इलिनॉय विश्वविद्यालय में उन्होंने केवल तीन वर्षों में दो स्नातकोत्तर उपाधियाँ (संरचनात्मक अभियांत्रिकी तथा सैद्धांतिक और अनुप्रयुक्त यांत्रिकी में) और संरचनात्मक अभियांत्रिकी में Ph.D. प्राप्त की। कराची विकास प्राधिकरण में कार्यकारी अभियंता के रूप में पाकिस्तान की संक्षिप्त वापसी के बाद ख़ान 1955 में स्किडमोर, ओविंग्स & मेरिल (SOM) के शिकागो कार्यालय में सम्मिलित हुए, जहाँ उन्होंने अपना संपूर्ण कार्यजीवन बिताया; 1966 में साझेदार और 1967 में देशीकृत U.S. नागरिक बने। गगनचुंबी भवन के जन्मस्थान शिकागो ने ऊँचे भवनों के निर्माण में पारंपरिक रूप से न्यूयॉर्क से प्रतिस्पर्धा की है और ख़ान के नवोन्मेषों के लिए आदर्श परिवेश प्रदान किया। पहले विचारित अधिकांश अभियंताओं (एफिल के अपवाद सहित) के विपरीत ख़ान ने मुख्यतः इस्पात में अभिकल्प किया।

उनकी प्रमुख कृतियों में 100-मंजिला जॉन हैनकॉक केंद्र (1969) और 110-मंजिला सियर्स टावर (अब विलिस टावर, 1973) सम्मिलित हैं—दूसरे ने दो दशकों से अधिक समय तक संसार के सर्वाधिक ऊँचे भवन की उपाधि धारण की। ख़ान 1973 में नेशनल एकेडमी ऑफ इंजीनियरिंग के लिए चुने गए, नॉर्थवेस्टर्न विश्वविद्यालय, लेहाइ विश्वविद्यालय और ETH ज़्यूरिख से मानद डॉक्टरेट प्राप्त किए, और 1972 में *Engineering News-Record* के मैन ऑफ द ईयर नामित हुए।

ऊँचाई का अधिमूल्य और नलिकाकार नवोन्मेष जब ख़ान ने 1950 के दशक के उत्तरार्ध में SOM में अपना कार्यजीवन आरंभ किया, तब ऊँचे भवनों के अभिकल्पकों के लिए उपलब्ध विकल्प आश्चर्यजनक रूप से सीमित थे। ऊँचे भवनों की मूलभूत चुनौती पार्श्व भार-प्रतिरोध है—पवन और भूकंप से उत्पन्न उलटने वाले आघूर्णों तथा मंजिला अपरूपणों का प्रतिरोध। पारंपरिक दृढ इस्पात ढाँचे—जिसमें पूरी तल-योजना में अंतराल पर स्थित स्तंभ गुरुत्वीय और पार्श्व दोनों भार वहन करते हैं—ने उन्नीसवीं शताब्दी के उत्तरार्ध से गगनचुंबी भवन-निर्माण पर प्रभुत्व रखा था। स्तंभों और धरनों के बीच आघूर्ण-प्रतिरोधी संयोजनों

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

वाला पारंपरिक दृढ ढाँचा-निर्माण भवनों के ऊँचे होने पर उत्तरोत्तर अदक्ष हो जाता है: अवयवों के आकार तीव्रता से बढते और आंतरिक स्तंभ बहुगुणित होते हैं। किंतु भवनों के ऊँचे होने के साथ पवन-बलों का प्रतिरोध करने के लिए आवश्यक इस्पात की मात्रा असमानुपातिक रूप से बढी, जिससे वह उत्पन्न हुआ जिसे ख़ान ने “ऊँचाई का अधिमूल्य” कहा। उनके प्रसिद्ध 1969 के आरेख ने दर्शाया कि पारंपरिक ढाँचाकरण में भवन की ऊँचाई के साथ पवन-ब्रेसिंग के लिए इस्पात की आवश्यकता नाटकीय रूप से कैसे बढी और अति-ऊँचे भवन निषेधात्मक रूप से महँगे हो गए।

ख़ान की क्रांतिकारी अंतर्दृष्टि यह पहचानना थी कि दृढ ढाँचा ऊँचे भवनों के लिए उपयुक्त एकमात्र संरचनात्मक तंत्र नहीं था और संपूर्ण भवन-परिमाप की संरचनात्मक नलिका के रूप में पुनःसंकल्पना की जा सकती थी—भूमि से उठता खोखला कैंटिलीवर, जिसमें निकट अंतराल वाले बाह्य स्तंभ गहरे स्पैंड्रल धरनों से जुडे होकर ऐसी दृढ नलिका बनाते हैं जो कैंटिलीवर तथा ढाँचा क्रिया द्वारा पार्श्व भारों का प्रतिरोध करती है। प्रमुख पार्श्व-भार-प्रतिरोधी अवयवों को भवन के परिमाप पर ले जाकर उन्होंने संरचना की संकल्पना नींव से कैंटिलीवर होती त्रिविमीय खोखली नलिका के रूप में की—जिसकी तुलना उन्होंने बाद में अपने मूल बांग्लादेश में उगने वाले बाँस से की। शिकागो के 43-मंजिला डीविट-चेस्टनट अपार्टमेंट्स (1963–66) में पहले लागू और बाद में डीविट-चेस्टनट अपार्टमेंट बिल्डिंग (1963) तथा 43-मंजिला ब्रंसविक बिल्डिंग (1965) में साकार इस नलिकाकार संकल्पना ने गहरे स्पैंड्रल धरनों से जुडे निकट अंतराल वाले परिमापीय स्तंभों का उपयोग करके दृढ बाह्य “त्वचा” बनाई, जो एक साथ संरचना, पवन-ब्रेसिंग और वास्तुशिल्पीय अभिव्यक्ति का कार्य करती थी; साथ ही आंतरिक भाग को नम्य तल-योजनाओं के लिए मुक्त करती और संरचनात्मक दक्षता को नाटकीय रूप से बढाती थी। पार्श्व प्रतिरोध को परिमाप में केंद्रित करके नलिका ने आंतरिक स्थानों को पारंपरिक ढाँचाकरण के लिए आवश्यक स्तंभों के वन से मुक्त किया।

संरचनात्मक तंत्र और प्रमुख कृतियाँ ख़ान ने भिन्न ऊँचाई-परासों तथा कार्यात्मक आवश्यकताओं और भवन-ऊँचाई तथा इष्टतम संरचनात्मक तंत्र के बीच व्यवस्थित संबंधों को संबोधित करने के लिए नलिका संकल्पना के अनेक रूपांतर विकसित किए—निम्न भवनों के दृढ ढाँचों से अपरूपण दीवारों, ब्रेसित ढाँचों और बढती ऊँचाइयों के लिए विभिन्न नलिका-विन्यासों तक। इस “ऊँचाई के अधिमूल्य” की संकल्पना ने अभिकल्पकों को पूर्वोदाहरण के बजाय दक्षता के आधार पर संरचनात्मक तंत्र चुनने के लिए परिमेय मार्गदर्शन दिया। डीविट-चेस्टनट भवन और बाद में न्यूयॉर्क के वर्ल्ड ट्रेड सेंटर की मीनारों (ख़ान के सिद्धांतों का उपयोग करते हुए लेस्ली रॉबर्टसन द्वारा अभियांत्रित) से उदाहरणित *framed tube*, लगभग 60 मंजिल तक के भवनों के लिए दक्ष सिद्ध हुई।

100-मंजिला जॉन हैनकॉक केंद्र (1965–69) के लिए ख़ान ने *trussed tube* (अथवा ब्रेसित नलिका) प्रस्तुत की, जिसमें विकर्ण ब्रेसिंग अवयव—भवन की प्रतिष्ठित बाह्य X-ब्रेसें—अपरूपण विलंब के विरुद्ध नलिका को दृढ बनाते और इस्पात की आवश्यकता को नाटकीय रूप से घटाते हैं। हैनकॉक केंद्र ने प्रति वर्ग मीटर केवल 145 kg इस्पात उपयोग किया, जबकि एम्पायर स्टेट बिल्डिंग में 206 kg/m^2 और वन चेज़ मैनहैटन प्लाज़ा में 275 kg/m^2 था। सियर्स टावर के लिए ख़ान ने *bundled tube* का आविष्कार किया, जिसमें भिन्न ऊँचाइयों की नौ वर्गाकार नलिकाएँ एक साथ गुच्छित थीं; इसने भवन के परिच्छेद को ऊपर उठते समय क्रमशः पीछे हटने देते हुए असाधारण दृढता प्रदान की—और प्रमाणित किया कि “दक्ष मीनारों को अब पेटी-सदृश होने की आवश्यकता नहीं थी; नलिका-इकाइयाँ विभिन्न आकार ग्रहण और विविध प्रकार के समूहों में एक साथ गुच्छित हो सकती थीं।” भिन्न ऊँचाइयों की नौ गुच्छित नलिकाओं

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

का उपयोग करने वाले 110-मंजिला सियर्स टावर (1973, अब विलिस टावर) ने अति-ऊँचे निर्माण के लिए तंत्र की क्षमता प्रदर्शित की।

ख़ान ने सम्मिश्र इस्पात-कंक्रीट तंत्रों और ऊँचे भवनों के निर्माण में हल्के कंक्रीट के उपयोग में भी अग्रणी भूमिका निभाई तथा संरचनात्मक विश्लेषण और अभिकल्प-सत्यापन के लिए संगणकों का उपयोग करने वाले प्रथम लोगों में थे। फिर भी संभवतः वे गगनचुंबी भवनों के अंतिम महान अभिकल्पक थे जो संगणकों के उपयोग पर सार्थक रूप से निर्भर नहीं थे; परिस्थितियाँ बदलने ही वाली थीं।

निम्न उद्धरण उनके व्यवस्थित दृष्टिकोण को व्यक्त करता है:

> तथापि ऊँचे भवनों का निर्माण आर्थिक रूप से तभी आकर्षक हो सकता है जब संरचनात्मक अभियंताओं के पास एक ओर विभिन्न तंत्रों के संरचनात्मक व्यवहार का व्यापक बोध और दूसरी ओर निर्माण-समस्याओं का व्यावहारिक विवेक हो।
>
> ...
>
> न्यूनतम इस्पात उपयोग करने वाली संरचना अत्यंत महँगे पूर्ण भवन को जन्म दे सकती है, क्योंकि पूर्ण भवन को प्रभावित करने वाले किसी असंरचनात्मक कारक पर विचार नहीं किया गया। दूसरी ओर केवल वास्तुकार की सौंदर्यपरक 'दृष्टियों' और अन्य सभी व्यवसायों की आवश्यकताओं के अनुकूल अभिकल्पित संरचना पूर्ण भवन की निम्नता और अत्यधिक लागत में योगदान देने के लिए बाध्य है। इन दोनों चरम सीमाओं के बीच किसी विशिष्ट परियोजना का इष्टतम संरचनात्मक तंत्र निहित है और उसे विकसित करना अभियंता की सजगता तथा सक्रिय भागीदारी पर छोड़ दिया जाता है। अनुभव ने दर्शाया है कि अधिकांश भवन-संरचनाओं को छह व्यापक श्रेणियों में वर्गीकृत किया जा सकता है:
>
> a सरल-संयोजित संरचनाएँ
> b अर्ध-दृढ संरचनाएँ
> c दृढ-ढाँचा संरचनाएँ
> d अपरूपण-कैंचियों वाली संरचनाएँ
> e अंतःक्रियात्मक ढाँचा और अपरूपण-कैंचियों वाली संरचनाएँ
> f दृढ-पेटी प्रकार की संरचनाएँ
>
> i निकट अंतराल वाले बाह्य स्तंभ
> ii बाह्य दीवारों के रूप में निकट अंतराल वाले विकर्ण
> iii बाह्य दीवारों के लिए इष्टतम स्तंभ-विकर्ण-स्पैंड्रल
>
> (Khan, 1965)

अभिकल्प-दर्शन और सहयोग अपने तकनीकी नवोन्मेषों से आगे ख़ान अभियांत्रिकी और वास्तुकला के संबंध के प्रति अपने दृष्टिकोण के लिए विशिष्ट थे। SOM में वास्तुकार ब्रूस ग्राहम के साथ उनकी प्रसिद्ध साझेदारी ने उनके इस विश्वास को उदाहरणित किया कि संरचना वास्तुशिल्पीय अभिकल्प का संगठनात्मक सिद्धांत होनी चाहिए, मात्र छिपा हुआ ढाँचा नहीं। ख़ान में वह था जिसे ग्राहम ने "संरचनात्मक व्यवहार का अंतर्बोधात्मक ज्ञान" कहा—उन्होंने एक बार टिप्पणी की, "अभिकल्प के विषय में सोचते समय मैं स्वयं को पूरे भवन के स्थान पर रखता हूँ और प्रत्येक भाग का अनुभव करता हूँ। अपने मन में मैं भवन द्वारा सहन किए जाने वाले प्रतिबलों और मरोड़ का मानसदर्शन करता हूँ।" फिर भी उनका आग्रह था कि तकनीकी कौशल अधिक व्यापक मानवीय उद्देश्यों की सेवा करे: "तकनीकी व्यक्ति को

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अपनी प्रौद्योगिकी में खोना नहीं चाहिए; उसमें जीवन की सराहना करने की क्षमता होनी चाहिए, और जीवन कला, नाटक, संगीत तथा सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण रूप से लोग हैं।”

वास्तुशिल्पीय नियोजन के साथ संरचनात्मक तर्क का उनका एकीकरण—नलिका ने स्तंभ-रहित आंतरिक भाग और नम्य तल-पट्ट संभव किए—अभियंता और वास्तुकार के उस सहयोग को उदाहरणित करता है जो सर्वोत्तम ऊँचे भवन उत्पन्न करता है। ख़ान संगणक-सहायित संरचनात्मक विश्लेषण में भी अग्रणी थे और उन्होंने ऊँचे भवनों के जटिल, अत्यधिक स्थैतिकतः अनिर्धार्य तंत्रों के विश्लेषण के लिए अंकीय संगणना की क्षमता आरंभ में ही पहचान ली थी। यह मानवतावादी दृष्टि इलिनॉय इंस्टीट्यूट ऑफ टेक्नोलॉजी में उनकी शिक्षण गतिविधियों तक विस्तृत थी, जहाँ उन्होंने छात्रों के साथ कंक्रीट कैंचीदार नलिका जैसी संकल्पनाएँ विकसित कीं, जिन्हें वर्षों बाद ही निर्मित रूप में साकार किया जाना था।

ख़ान का 1982 में 52 वर्ष की आयु में सऊदी अरब में हज टर्मिनल परियोजना पर कार्य करते समय अचानक निधन हुआ, जिससे असाधारण सृजनशीलता वाला कार्यजीवन समय से पहले समाप्त हो गया; किंतु उनके संरचनात्मक तंत्र कुआलालंपुर की पेट्रोनास मीनारों से दुबई के बुर्ज खलीफा तक विश्वभर के क्षितिजों को निरंतर आकार दे रहे हैं—बाद वाली संरचना एक टिप्पणीकार के शब्दों में “उनके साहसिक, हल्के अभिकल्प-दर्शन की चरम अभिव्यक्ति” है। काउंसिल ऑन टॉल बिल्डिंग्स एंड अर्बन हैबिटैट उनके सम्मान में फ़ज़लुर आर. ख़ान लाइफटाइम अचीवमेंट मेडल प्रदान करती है। ऊँचे भवनों पर उनके युगांतरकारी शोधपत्र को इक्कीसवीं शताब्दी की अति-ऊँची मीनारों के लिए Baker, Skidmore, et al., 2013 द्वारा अद्यतन किए जाने में लगभग पचास वर्ष लगे।

15.4.11 Progettisti की तुलना: अभिकल्पक-निर्माता और उनकी सामग्रियाँ

इस अध्याय में परिचित कराए गए अभियंताओं में एक विशिष्ट लक्षण समान था: वे केवल अभिकल्पक नहीं, बल्कि *निर्माता* भी थे—ऐसे उद्यमी जिनके स्वामित्व अथवा नियंत्रण में निर्माण कंपनियाँ थीं, जिससे वे नई तकनीकों और सामग्रियों के साथ उन विधियों में प्रयोग कर सकते थे जिनमें परामर्शी अभियंता विरले ही कर पाते। इतालवी पद *progettista* में मूर्त अभिकल्प और निर्माण का यह एकीकरण उनकी उपलब्धियों के केंद्र में था।

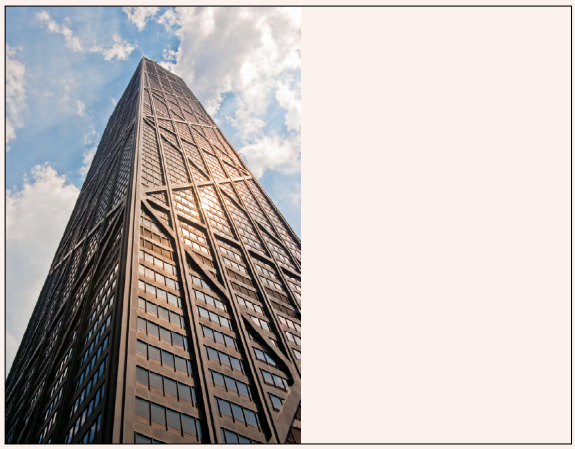
15.4.11.1 एफिल और धातु

गुस्ताव एफिल की कंपनी, *Compagnie des Établissements Eiffel*, पूर्वनिर्मित लौह और इस्पात ढाँचों में विशेषज्ञ थी। संस्था कार्यशालाओं में उच्च परिशुद्धता से घटक बनाती, फिर उन्हें स्थल तक पहुँचाकर संयोजित करती थी—यह औद्योगीकृत दृष्टिकोण पुलों, मीनारों और भवनों का तीव्र तथा लागत-प्रभावी निर्माण संभव करता था। एफिल टावर स्वयं स्थल से बाहर पूर्वनिर्मित और उल्लेखनीय गति से संयोजित किया गया था। एफिल द्वारा मानकीकृत, काबला घटकों के उपयोग और प्रतिरूपकता पर उनके बल ने आधुनिक इस्पात निर्माण की नींव रखी।

15.4.11.2 नेर्वी और फेरोसीमेंट

पियर लुइजी नेर्वी ने 1932 में *Nervi & Bartoli* की स्थापना की, जिसके माध्यम से उन्होंने फेरोसीमेंट को व्यावहारिक निर्माण-सामग्री के रूप में विकसित और लागू किया। अभिकल्प तथा निष्पादन दोनों पर

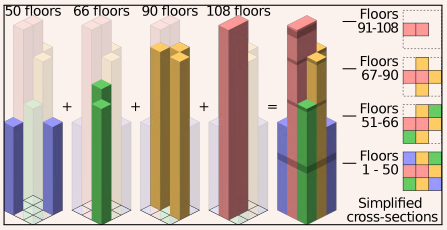
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) जॉन हैनकॉक भवन की बाह्य X-ब्रेसिंग



(b) विलिस टावर



(c) विलिस टावर के प्रतिरूपक

चित्र 15.27: ख़ान के प्रतिष्ठित भवन

उनके नियंत्रण ने उन्हें बाह्य ठेकेदारों पर निर्भर हुए बिना नवोन्मेष करने दिया और सुनिश्चित किया कि पतले कवचों तथा पसलीदार संरचनाओं के उनके विचार पूर्णतः साकार हो सकें। तूरिन प्रदर्शनी भवनों और पालात्सेत्तो देल्लो स्पोर्ट में प्रयुक्त पूर्वनिर्मित फेरोसीमेंट अवयव उनकी अपनी संस्था में बनाए गए थे; इसने सामग्री-नवोन्मेष, संरचनात्मक अभिकल्प और निर्माण-मितव्ययिता का एकीकरण प्रदर्शित किया।

15.4.11.3 रोब्लिंग और केबल

जॉन रोब्लिंग (1806–1869), यद्यपि इस अध्याय में विस्तार से विचारित नहीं हैं, तार-रस्सी निलंबन पुलों के अग्रदूत के रूप में उल्लेख के योग्य हैं। उनकी कंपनी, *John A. Roebling's Sons Company*, पुलों का अभिकल्प और उनमें प्रयुक्त तार-केबलों का विनिर्माण दोनों करती थी—इस ऊर्ध्वाधर एकीकरण ने रोब्लिंग को सामग्री की गुणवत्ता पर कठोर नियंत्रण बनाए रखने दिया। रोब्लिंग की मृत्यु के बाद उनके पुत्र वॉशिंगटन द्वारा पूर्ण ब्रुकलिन पुल (1883) ने दीर्घ-विस्तृति निलंबन संरचनाओं के लिए तार-रस्सी केबलों की क्षमता प्रदर्शित की और आधुनिक निलंबन पुल-अभिकल्प का प्रतिमान स्थापित किया।

15.4.11.4 समान सूत्र

इन तुलनाओं से अनेक प्रतिरूप उभरते हैं:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रयोगशाला के रूप में कंपनी। प्रत्येक अभियंता ने अपनी संस्था को प्रयोग और चुनी हुई सामग्री से प्राप्त की जा सकने वाली उपलब्धियों की सीमाएँ आगे बढाने के मंच के रूप में उपयोग किया—एफिल ने लौह और इस्पात, नेर्वी ने फेरोसीमेंट तथा रोबिलंग ने तार-रस्सी के साथ।

निर्माण में प्रत्यक्ष सहभागिता। तीनों वास्तविक निर्माण-प्रक्रिया में गहराई से सम्मिलित थे, जिससे उन्हें अपने अभिकल्पों के निर्माण की अंतरंग जानकारी मिली और गुणवत्ता नियंत्रण बनाए रखने की क्षमता प्राप्त हुई।

अभिकल्प और अभियांत्रिकी का एकीकरण। एक ही कंपनी के अंतर्गत अभिकल्प और निर्माण की क्षमता ने इन अभियंताओं को सौंदर्यपरक तथा कार्यात्मक पक्षों को निर्बाध रूप से मिलाने दिया, जिसके परिणामस्वरूप दृश्यतः प्रभावशाली और संरचनात्मक रूप से सुदृढ संरचनाएँ बनीं।

सामग्री पर अधिकार। प्रत्येक अपनी चुनी हुई संरचनात्मक सामग्री का अग्रणी व्यवसायी बना और ऐसी तकनीकें तथा अनुप्रयोग विकसित किए जिन्हें बाद में अन्य लोगों ने अपनाया तथा परिष्कृत किया।

अभिकल्पक-निर्माता-उद्यमी का यह प्रतिरूप आधुनिक प्रथा में अभिकल्प और निर्माण के पृथक्करण के कारण आज कम सामान्य है, फिर भी संरचना और वास्तुकला के उस एकीकरण को प्राप्त करने का प्रतिमान बना हुआ है जो संरचनात्मक अभियांत्रिकी की महानतम कृतियों की विशेषता है।

15.5 संरचनात्मक रूपजनन: प्रमुख व्यक्तित्व

अगले पृष्ठों में आप उन प्रमुख व्यक्तियों से मिलेंगे जिन्होंने उस धारणा को स्थापित करने में सहायता की जिसे *संरचनात्मक रूपजनन* कहा जा सकता है: अर्थात् संरचनात्मक रूप केवल अभिरुचि से चुने जाने के बजाय परिसीमाओं द्वारा उत्पन्न हो सकता है। यहाँ रूपजनन (शाब्दिक रूप से “रूप का निर्माण”) उस प्रक्रिया को कहता है जिसमें ज्यामिति भार, अवलंब अवस्थाओं, सामग्री की सीमाओं, स्थिरता और निर्माणयोग्यता की माँगों से उद्भूत होती है। इन अभियंताओं और वास्तुकारों ने लटकती शृंखला और रज्जुरेखीय प्रतिरूपों, झिल्ली तथा कवच प्रयोगों, तनन-जाल अध्ययनों अथवा बाद के संगणकीय रूप-निर्धारण के माध्यम से “संरचना को बोलने देना” सीखा। आप देखेंगे कि अनेक प्रसिद्ध रूप केवल आविष्कृत नहीं किए गए थे; वे ऐसी साम्यावस्थी संरचनाओं के रूप में *खोजे* गए जिनमें बल, सामग्री और ज्यामिति एक सुसंगत—और प्रायः सुरुचिपूर्ण—समग्र में स्थिर होते हैं।

अभियंता और वास्तुकार उन संरचनाओं के साथ सर्वाधिक सहज हैं जिनका गणितीय वर्णन किया जा सकता है: सीधी धरन, चाप (वृत्ताकार, परवलयाकार अथवा कैटेनरी), अथवा द्विघात पृष्ठों द्वारा परिभाषित कवच।[42] ये आकार न केवल “मनोहर” हैं, बल्कि गणितीय समाधान की खोज को सुग्राह्य भी बनाते हैं।

किंतु क्या हम दो मानदंड पूरे करने वाला समान रूप से मनोहर पृष्ठ खोज सकते हैं: (a) सौंदर्यपरक आकर्षण, और (b) संरचनात्मक सुदृढता?

यह खंड उल्लेखनीय अभियंताओं द्वारा ऐसे रूप-निर्धारक आकारों की खोज पर चर्चा करता है। Boller

[42]जैसे शंकु, बेलन, दीर्घवृत्ततज, दीर्घवृत्तीय शंकु, दीर्घवृत्तीय बेलन, दीर्घवृत्तीय अतिपरवलयज, दीर्घवृत्तीय परवलयज, अतिपरवलयिक बेलन, अतिपरवलयिक परवलयज, परवलयज, गोला और गोलाभ।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

and D'Acunto, 2021; Boller and Schwartz, 2020 के अध्ययनों ने हाल ही में फ्राइ ओटो, इस्लर और मुस्मेची के कार्य का परीक्षण करके इस प्रश्न पर विचार किया है (सारणी 15.5)।

तालिका 15.5: रूप-निर्धारक

कैटेनरी		
हाइगेन्स	तनन	लटकता तार
पोलेनी	संपीडन	सेंट पीटर का गुंबद
गाउदी	संपीडन	सग्रादा फमीलिया
सारिनेन	संपीडन	सेंट लुईस मेहराब
झिल्ली		
इस्लर	संपीडन	कवच छतें
मुस्मेची	संपीडन	बासेन्तो पुल
फ्राइ ओटो	तनन	म्यूनिख स्टेडियम

15.5.1 कैटेनरी

ऐतिहासिक रूप से पहली "रूप-निर्धारण" समस्या दो बिंदुओं के बीच लटकते केबल के आकार—उसका वर्णन करने वाले गणितीय समीकरण—की खोज थी। यद्यपि अंततः गणितीय समीकरण मिल गया, सत्रहवीं शताब्दी के उत्तरार्ध में कैटेनरी अध्ययनों का इतिहास आधुनिक पाठक के लिए आकर्षक है। उसने लाइबनिट्स और बर्नूली परिवार द्वारा कलन के विकास को प्रेरणा दी।

यह प्रतिस्पर्धा (तीन महान व्यक्तियों की), अहंकार (लाइबनिट्स द्वारा "अपने" कलन की श्रेष्ठता प्रमाणित करने की इच्छा), गुप्त संचार (कूटों का व्यापक उपयोग), निजी पत्राचार (लाइबनिट्स और हाइगेन्स के बीच), ईर्ष्या (याकोब और योहान बर्नूली बंधुओं के बीच), प्रकाशन-दबाव (*Acta Eruditorum* के संपादक द्वारा[43]) और बहुत कुछ की कथा है।

इसके अतिरिक्त यह एक "पारिवारिक प्रकरण" था, क्योंकि सभी नायक किसी न किसी प्रकार जुड़े हैं: हाइगेन्स लाइबनिट्स के मार्गदर्शक थे, लाइबनिट्स याकोब बर्नूली के परामर्शदाता थे, याकोब योहान बर्नूली के भाई थे, और योहान डेनियल बर्नूली के पिता तथा ऑयलर के परामर्शदाता थे।

विश्लेषणात्मक विवरण के लिए, §30.3.3 देखें

15.5.1.1 पोलेनी (1683–1761)

रूप-निर्धारण के *अनुप्रयोग* का पहला ज्ञात उदाहरण जियोवानी पोलेनी ने प्रस्तुत किया, जिन्हें रोम में सेंट पीटर के गुंबद में दरारों की जाँच करने के लिए कहा गया था (§4.4.3) (चित्र 15.28a)।

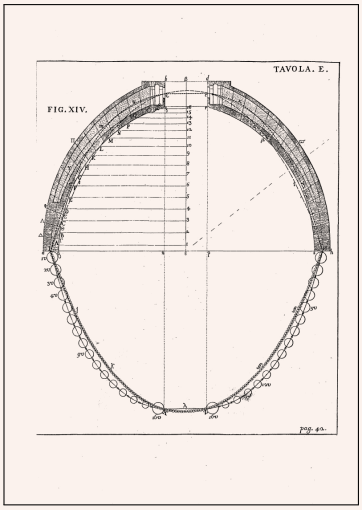
[43]उस समय यूरोप की अग्रणी वैज्ञानिक पत्रिका।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तथाकथित “तीन गणितज्ञों” की प्रारंभिक जाँच के बाद पोलेनी को प्रतिवेदन प्रस्तुत करने का कार्य दिया गया। उसमें उन्होंने गुंबद को पचास काटों में विभाजित करके और प्रत्येक काट के आकार की उलटी कैटेनरी के आकार से तुलना करके उसकी स्थिरता का आकलन किया—यह ज्ञात था कि लटकता केबल विशुद्ध तनन वहन करता है (Poleni, 1748) (चित्र 15.28b)।



(a) पोलेनी का प्रतिवेदन



(b) गुंबद के काट की कैटेनरी से पोलेनी की तुलना

चित्र 15.28: सेंट पीटर के गुंबद में दरारों की पोलेनी की जाँच (Poleni, 1748)

15.5.1.2 अंतोनी गाउदी (1852–1926)

प्रतिरूपों के मापक्रमण पर आधारित संरचनात्मक अभिकल्प के सर्वाधिक उल्लेखनीय उदाहरण के लिए कुछ शताब्दियों तक, 1900 के दशक के आरंभ में बार्सिलोना की *Sagrada Família* के गाउदी के अभिकल्प तक, प्रतीक्षा करनी पड़ी। जैसा पहले से सुविदित था, कैटेनरी (अपने स्वभार के अधीन नम्य केबल द्वारा ग्रहण किया आकार) को उलटने पर विशुद्ध संपीडन के अधीन पूर्ण मेहराब प्राप्त होता है (Huerta, 2006)।

> सीधी रेखा मनुष्यों की है, वक्र रेखा ईश्वर की।
>
> Antoni Gaudí को आरोपित (व्यापक रूप से उद्धृत, कोई सत्यापित प्राथमिक स्रोत नहीं)

गाउदी ने *catenoids* (किसी अक्ष के चारों ओर कैटेनरी वक्र के घूर्णन से प्राप्त कवच) का मापक्रमित प्रतिरूप बनाकर गिरजाघर के लिए रूप-निर्धारक आकारों का अन्वेषण आरंभ किया, जैसा चित्र 15.29a में दिखाया गया है। यह अन्यथा जटिल समस्या का वास्तव में अत्यंत चतुर विकल्प था। हम ध्यान देते हैं कि जहाँ अनेक लोगों ने एकल कैटेनरी के आकार का अन्वेषण किया था, गाउदी संभवतः कैटेनरियों के ऐसे संयोजन का अन्वेषण करने वाले प्रथम व्यक्ति थे जिसमें कुछ अन्य से जुड़ी थीं। चित्र 15.29b गिरजाघर का पलस्तर प्रतिरूप दिखाता है, जिसमें ऊँचा नुकीला मध्यभाग कैटेनरी की विशेषता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) सग्रादा फमीलिया के लिए गाउदी का कैटेनॉइड प्रतिरूप (Dragicevic and Jansen, 2012)



(b) पलस्तर प्रतिरूप

चित्र 15.29: गाउदी की सग्रादा फमीलिया

15.5.1.3 ईरो सारिनेन (1910–1961)

ईरो सारिनेन ऐसे वास्तुकार थे जिन्होंने युगांतरकारी संरचनाओं के अभिकल्प के लिए संरचनात्मक अभियंताओं की सहायता ली। उन्होंने अपनी वास्तुशिल्पीय रूपात्मक संवेदनशीलता को नवोन्मेषी और मौलिक कृतियों के सफल साकार रूप के लिए आवश्यक वैज्ञानिक तथा तकनीकी आवश्यकताओं से जोड़ा (Rega, 2013 PDF)। उन्होंने संयुक्त राज्य अमेरिका में दो युगांतरकारी संरचनाओं का अभिकल्प किया, दोनों कैटेनरी से प्रेरित थीं: (a) डलेस हवाई अड्डा (अध्याय 39.1 में विश्लेषित); और (b) सेंट लुईस का गेटवे आर्च।

वास्तुकार की रूपात्मक दृष्टि गणित और यांत्रिकी के कठोर नियमों द्वारा संभव हुई, जिनके अनुसार बिना तनन प्रतिबल के अपना स्वभार भूमि तक पहुँचाने के उद्देश्य वाले मेहराब का इष्टतम आकार उलटी साम्यावस्थी कैटेनरी द्वारा निरूपित होता है।

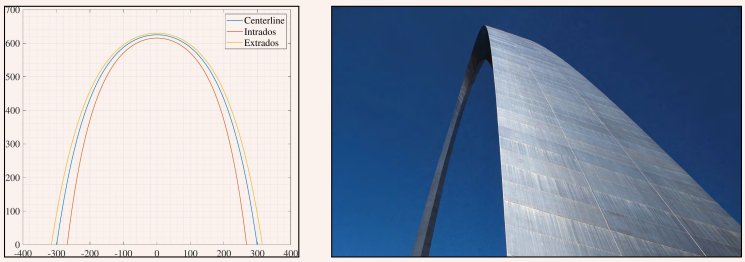
संरचनात्मक विश्लेषण में अपनी सीमाओं से परिचित सारिनेन ने मेहराब का अंतिम आकार प्राप्त करने के लिए हांसकार्ल बांदेल की सहायता ली। जब सारिनेन ने अपने हाथों में लटकी शृंखला से वांछित आकार प्रदर्शित करने का प्रयास किया, तो वे अपेक्षित थोड़ा दीर्घित, "आकाश की ओर उठता" प्रभाव प्राप्त नहीं कर सके। बांदेल ने शृंखला माँगी, कुछ दिन बाद लौटे और कुछ समान आकार की कड़ियों को परिवर्तनीय कड़ियों से बदलकर सारिनेन का वक्र उत्पन्न किया,[44] जिससे भार, भार का वितरण और आकार बदल गए। पवन के प्रति 630-फुट मेहराब के प्रतिरोध का आकलन करते समय बांदेल ने निर्धारित किया कि गुरुत्व-केंद्र नीचा करने के लिए मेहराब के प्रथम 300 फुट में अधिक भार जोड़ना होगा। इसके लिए 25,980 टन कंक्रीट आवश्यक था।

मेहराब 625 फुट ऊँचा और आधार पर 600 फुट चौड़ा है। अनुप्रस्थ काट समबाहु त्रिभुज है और अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल ऊँचाई के साथ रैखिक रूप से घटता है। संबंधित भुजाएँ आधार पर 54 फुट से शीर्ष पर 17 फुट तक घटती हैं (चित्र 15.30A)। मेहराब की विमाओं की गणनाएँ सरलता से बहुत दूर

[44] चित्र 15.28b का निकट परीक्षण सेंट पीटर की मेहराबी छत के लिए पोलेनी के कार्य में परिवर्तनीय आकार के मनके दिखाता प्रतीत होता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हैं[45] (MATLAB कोड परिशिष्ट I.1.2 में सूचीबद्ध है), और वास्तव में वास्तुकार तथा संरचनात्मक अभियंता के बीच इसी उल्लेखनीय अंतःक्रिया ने इसे संभव बनाया।



(a) विमाएँ (b) मेहराब

चित्र 15.30: सारिनेन का गेटवे आर्च

15.5.2 कवच और झिल्लियाँ

जहाँ गाउदी और सारिनेन ने छत अथवा मेहराब का पूर्ण आकार निर्धारित करने के लिए कैटेनरी वक्रों पर प्रयोग किए, वहीं फ्राइ ओटो, इस्लर और मुस्मेची ने पृष्ठों पर प्रयोग किए—पहले ने तनन में, अन्य ने संपीडन में।

15.5.2.1 फ्राइ पॉल ओटो (1925–2015)

फ्राइ पॉल ओटो बहुमुखी जर्मन वास्तुकार और संरचनात्मक अभियंता थे। उन्होंने तनित झिल्ली पृष्ठों के रूप-निर्धारक आकारों (Rasch and Otto, 1996), शाखित निर्माण (मुख्यतः संपीडन में) (Ap and Faia, 2018) (चित्र 15.31a), और लटकती झिल्लियों (तनन) के विश्लेषण (Otto, Trostel, and Schleyer, 1973) (चित्र 15.31b) पर कार्य किया।

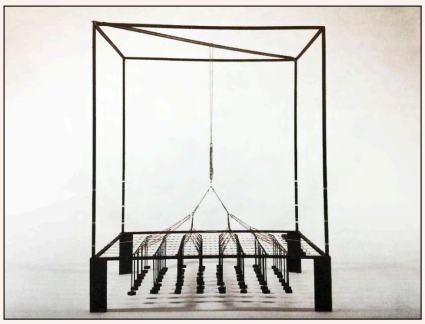
ओटो न केवल कुशल प्रयोगकर्ता और वास्तुकार थे, बल्कि तनित झिल्ली संरचनाओं के वैश्लेषिक विश्लेषण से संबंधित जटिल यांत्रिकी तथा गणित में भी समान रूप से सहज थे (चित्र 15.31c)।

15.5.2.2 हाइन्ज़ इस्लर (1926–2009)

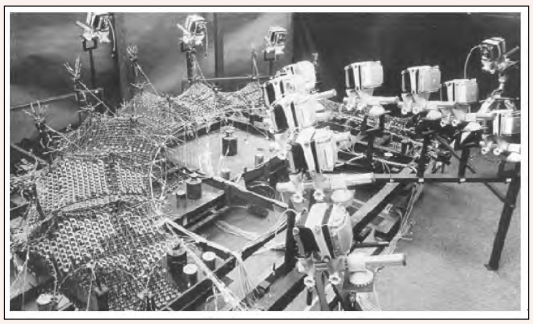
इस दृष्टिकोण का अनुसरण स्विस अभियंता हाइन्ज़ इस्लर (Chilton and Isler, 2000) ने किया, जिन्होंने *प्राकृतिक* (अर्थात् वैश्लेषिक रूप से अपरिभाषित) कवचों का अभिकल्प किया। अपनी "मुक्त लटकती झिल्ली" विधि में इस्लर ने भीगे वस्त्र को स्वतंत्र रूप से लटकाकर रूप बनाए; फिर कवच की दृढता बढाने के लिए अपने अनुभव के आधार पर उसके किनारे मोडे। उन्होंने प्रतिरूपों को या तो शीत मौसम में बाहर जमाकर अथवा सीमेंट मिश्रण मिलाकर कठोर किया। अंततः उन्होंने उनका मापक्रम बढाया और उनकी रज्जुरेखीय ज्यामिति पुनरुत्पादित की (Brew, 2007)। इस्लर ने बलों के परिमाण का अनुमान लगाने के लिए बंकन आघूर्ण न होने की धारणा पर आधारित सरल गणनाओं का भी उपयोग किया—यद्यपि अवलंबों के निकट नगण्य आनमनी क्रिया विद्यमान होती है।

[45] अतिपरवलयिक फलनों वाली गणनाएँ आधुनिक गणकयंत्रों और संगणकों के लाभ के बिना छठे दशमलव स्थान तक की गई थीं।

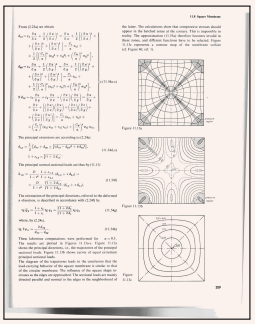
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) शाखित संरचना का अध्ययन



(b) म्यूनिख स्टेडियम का प्रतिरूप-परीक्षण



(c) तनित झिल्ली का विश्लेषण (Otto, Trostel, and Schleyer, 1973)

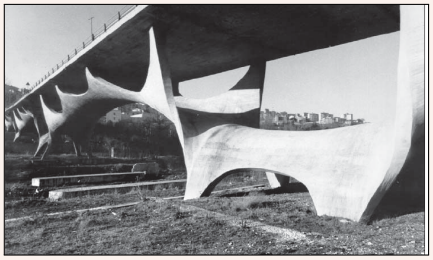
चित्र 15.31: फ्राइ ओटो



(a) गाउदी का प्रतिरूप (स्रोत)



(b) इस्लर का प्राकृतिक कवच



(c) मुस्मेची पुल (स्रोत)

चित्र 15.32: भौतिक प्रतिरूपों द्वारा रूप-निर्धारण के आधुनिक उदाहरण

15.5.2.3 सेर्जियो मुस्मेची (1926–1981)

सेर्जियो मुस्मेची बहुमुखी अभियंता थे जिन्होंने अधिकांश लोगों से अधिक संरचना और वास्तुशिल्पीय रूप की पारस्परिक निर्भरता का अपनी अद्वितीय रीति से अन्वेषण किया। वे ऐसे सिद्ध प्रयोगकर्ता थे जो बल-प्रवाह समझते थे[46] और फलस्वरूप उससे रूप व्युत्पन्न करते थे। उनका विचार था कि रूप (प्रतिबल नहीं) प्रमुख अज्ञात होना चाहिए।

सेर्जियो मुस्मेची से सर्वाधिक संबद्ध संरचना बासेन्तो नदी पर प्रसिद्ध पुल है (चित्र 15.33a–15.33b)। इसे एक सतत मरोड़ते पृष्ठ का अवलंब है, जिसकी फैली अँगुलियाँ बारी-बारी से पाट को ऊपर उठाती अथवा भूमि पर टिकती हैं और लगभग सत्तर मीटर की चार विस्तृतियाँ बनाती हैं। पुल लगभग 300 m लंबा है और उसी सामग्री के सतत द्विवक्र कवच से अवलंबित प्रबलित कंक्रीट पेटी-पाट से बना है। चार समान 69.2 m विस्तृतियाँ बनाने वाले कवच की मोटाई 0.30 m है और दोनों पार्श्व परिसीमाओं पर अधिक गहरी पसलियाँ उसकी विशेषता हैं। वह 16 अवलंब-युग्मों द्वारा पुल-पाट को वहन करता है, जो अनुदैर्ध्य अक्ष के साथ 17.30 m के समान अंतराल पर और अनुप्रस्थ रूप से 12.00 m पर रखे हैं। RC कवच को ϕ16 mm इस्पात छड़ों के दो जालों से प्रबलित किया गया है, जिनका समान अंतराल 0.2 m है और जो

[46] नेर्वी की संरचनाओं से कहीं अधिक जटिल संरचनाओं के लिए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समान कंक्रीट आवरण सहित अधोवक्र तथा बाह्यवक्र पृष्ठों पर स्थित हैं। कवच के दोनों ओर की दो अधिक गहरी पसलियों में अतिरिक्त प्रबलन है (Marmo et al., 2019 PDF)।

मुस्मेची ने व्यापक प्रायोगिक परीक्षण (चित्र 15.33c) रूप-निर्धारण और प्रतिबल विश्लेषण दोनों के लिए किए।[47] आगामी जटिल प्रबलन के लिए यह आवश्यक था (चित्र 15.33d)। यह भी जोड़ना चाहिए कि उन्होंने अपने मापक्रमित प्रतिरूपण को लाप्लास समीकरणों के प्रवर्तन और परिमित अंतर विधियों से पूरित किया।

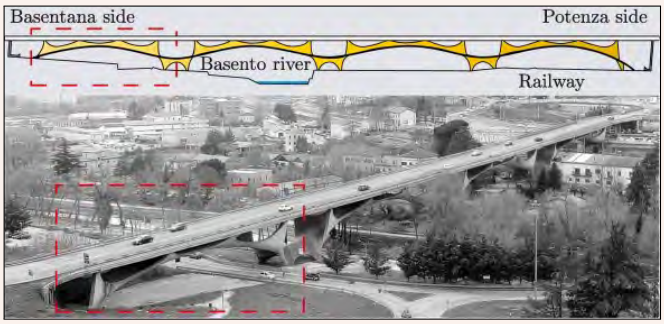
मैड्रिड के सार्सुएला हिप्पोड्रोम की भाँति पुल को इतालवी विरासत और संस्कृति मंत्रालय ने “सांस्कृतिक रुचि का स्मारक” घोषित किया है।

> मुस्मेची के अनुसार संरचना का आकार केवल गणनाओं का परिणाम नहीं है; वह अभिव्यंजक स्तर पर इस धारणा के संचार का माध्यम भी है कि संरचनात्मक व्यवहार के लिए आवश्यक प्रत्येक वस्तु [...] को दृश्य रूप का भाग भी होना चाहिए। यह संदेश का भाग है।
>
> (Brodini, 2013)

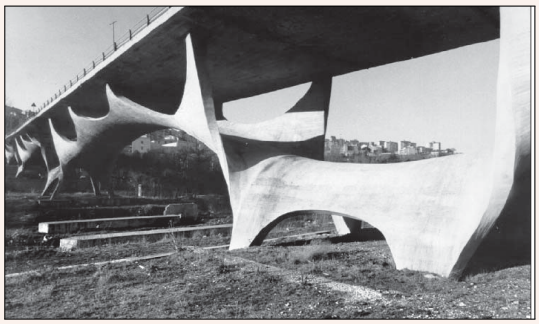
अनेक अन्य संरचनाओं से अधिक इस पुल में रूप और प्रकार्यता सामंजस्य में हैं, फिर भी उसका वास्तुशिल्पीय/सौंदर्यपरक मूल्य विवादास्पद है। तथापि वह अध्ययन योग्य अद्वितीय संयोजन है।

[47] सूक्ष्म-कंक्रीट प्रतिरूप का परीक्षण ISMES, बेर्गामो में हुआ था।

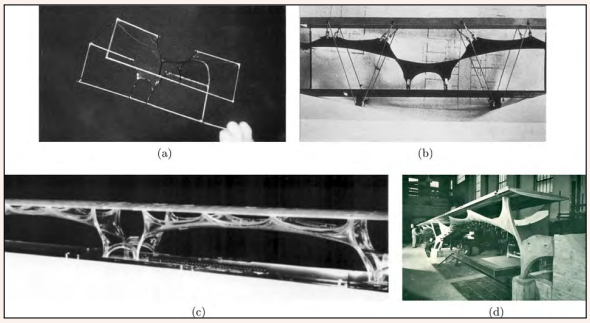
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



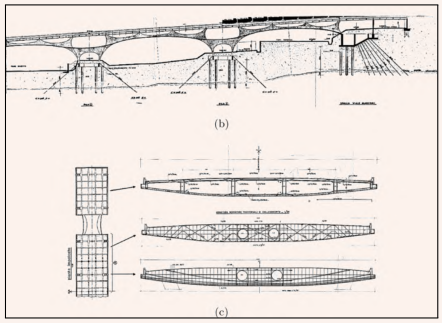
(a) पूर्ण पुल (Marmo et al., 2019)



(b) पुल के विवरण (Desideri et al., 2013)



(c) प्रतिरूप-परीक्षण: (a) साबुन, (b) नियोप्रीन, (c) प्लेक्सीग्लास, (d) सूक्ष्म-कंक्रीट (Marmo et al., 2019)



(d) प्रबलन (Marmo et al., 2019)

चित्र 15.33: बासेन्तो नदी पर मुस्मेची का पुल

15.5.3 पारस्परिक संरचनाएँ

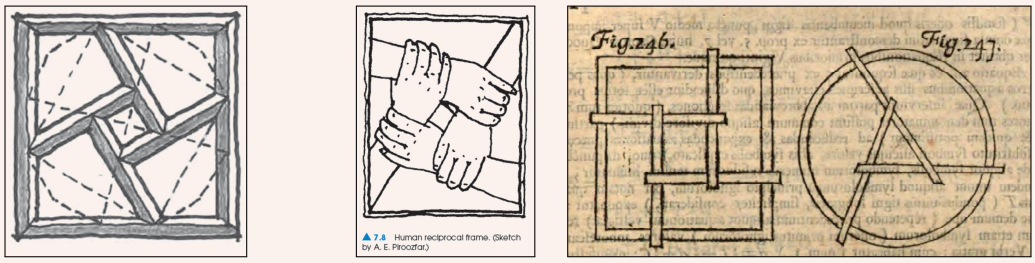
पारस्परिकता का सिद्धांत ऐसे भारवाही अवयवों के उपयोग पर आधारित है जो अपनी विस्तृतियों के साथ—कभी सिरों पर नहीं—एक-दूसरे को सहारा देते हुए स्पष्ट संरचनात्मक पदानुक्रम-रहित स्थानिक विन्यास बनाते हैं (Pugnale and Sassone, 2014)। दूसरे शब्दों में संरचना के सभी अवयव परस्पर अवलंब के लिए एक-दूसरे पर निर्भर होते हैं और संपूर्ण संरचना पूर्ण होने तक कोई उपसंरचना स्थिर नहीं होती। अंततः किसी एक संरचनात्मक अवयव को हटाने पर संरचना का प्रत्येक भाग हर अन्य भाग के सापेक्ष गतिशील हो जाता है।

पारस्परिक संरचना का प्रतिष्ठित विन्यास चित्र 15.34 में दिखाया गया है।

15.5.3.1 ऐतिहासिक विकास

सबसे प्राचीन ज्ञात उदाहरण विलार द ओन्नकूर (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858) ने लगभग 1240 में दिया। चित्र 15.35a पारस्परिक संरचना का उनका रेखाचित्र दिखाता है, जिसके साथ समस्या का वर्णन करने वाला पाठ है: *Ensi poe's ovrer a one tor u a one maison de bas,*

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) (Larsen, 2007) (b) Wallis, 1695

चित्र 15.34: पारस्परिक संरचनाएँ: उदाहरणात्मक संकल्पनाएँ

si sunt trop cor—जिसका मोटे तौर पर अनुवाद है "यदि धरन बहुत छोटी हों तो मीनार अथवा घर पर कैसे कार्य किया जाए।"

बाद में लियोनार्दो दा विंची ने अपनी दो संहिताओं में इस योजना पर विचार किया।[48] उनकी Codex Madrid I (Da Vinci, 1490) में हमें समान रेखाचित्र मिलता है (चित्र 15.35b)। उनकी Codex Atlanticus (Da Vinci, 1505) में इसी विषय का अधिक जटिल रूपांतर दिखाई देता है (चित्र 15.35c)।

निस्संदेह न तो द ओन्नकूर और न लियोनार्दो ने पारस्परिक संरचना की जटिल समस्या का वैश्लेषिक समाधान दिया। इसके लिए Wallis, 1695 की प्रतीक्षा करनी पड़ी, जिनका पारस्परिक संरचना के बलों का गणितीय विश्लेषण संभवतः किसी अजटिलेतर संरचना के व्यापक संरचनात्मक विश्लेषण का पहला अभिलिखित उदाहरण है।[49]

इस प्रकार वालिस ने पहली संरचनात्मक गणना प्रस्तुत की जिसमें ये सभी अवयव एकीकृत थे (Houlsby, 2014):

- संरचना का स्पष्ट रेखाचित्र प्रस्तुत करना, जिसमें जोड़ नामांकित हों;
- आगामी विश्लेषण सरल बनाने के लिए चतुर्गुण सममिति का उपयोग;
- संरचना के सभी अवयवों पर सरल सिद्धांत (प्रत्येक धरन का आघूर्ण-संतुलन) के व्यवस्थित अनुप्रयोग पर आधारित विश्लेषण, जिसके परिणामस्वरूप 25 युगपत रैखिक समीकरण प्राप्त हों;
- 25 चरों का समाधान करने के लिए समीकरणों के बीच व्यवस्थित विलोपन;
- प्राप्त परिणाम से संरचना के प्रमुख अवयवों पर भारों के विषय में महत्त्वपूर्ण संरचनात्मक निष्कर्ष निकालना।

जॉन वालिस (1616–1703) के विषय में एक टिप्पणी: वे अंग्रेज पादरी और गणितज्ञ थे जिन्हें अतिसूक्ष्म कलन के विकास का आंशिक श्रेय दिया जाता है। अनंतता की संकल्पना निरूपित करने के लिए ∞ प्रतीक

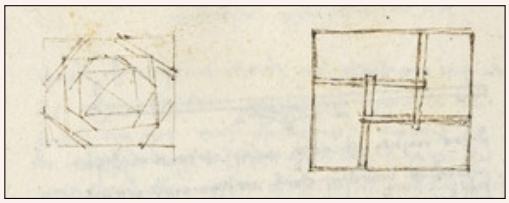
[48]संहिता हस्तलिखित सामग्री वाली आधुनिक पुस्तक की ऐतिहासिक पूर्वज थी। आधुनिक पुस्तक की भाँति संहिता पृष्ठों को एक के ऊपर एक रखकर और किनारों के एक समूह को बाँधकर बनाई जाती है—यह रूप आधुनिक जिल्दबंदी के अनुरूप है। संहिता ने पपाइरस के पहले के लपेटों और मोम की पट्टिकाओं का स्थान लिया और अनेक लाभ दिए: उसे पाठ के किसी भी बिंदु पर तुरंत खोला जा सकता था, पत्ती के दोनों ओर लेखन संभव था और उसमें लंबे पाठ आ सकते थे। संहिता में हम पृष्ठ-संख्या नहीं, बल्कि *folio* का उल्लेख करते हैं।

[49]जैसा पहले कहा गया, जॉन वालिस ने ही 1655 में अनंतता का प्रतीक ∞ प्रस्तुत किया था।

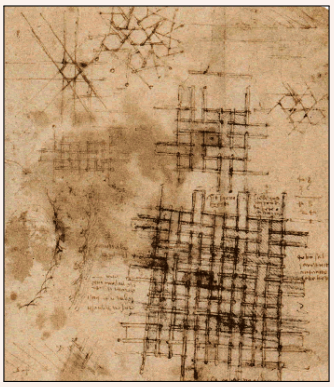
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



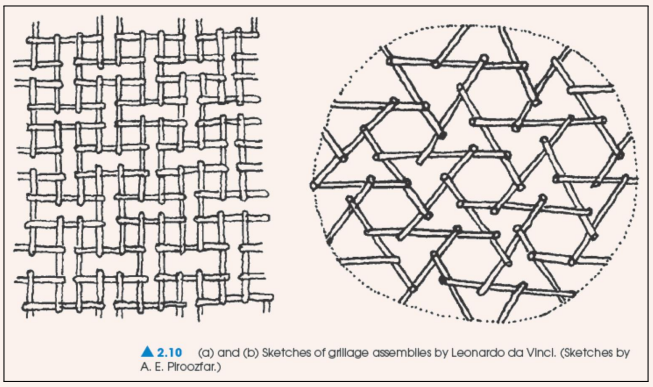
(a) De Honnecourt, 2006 नोटबुक fol. E XLIII



(b) Da Vinci, 1490 मैड्रिड संहिता, फोलियो 49

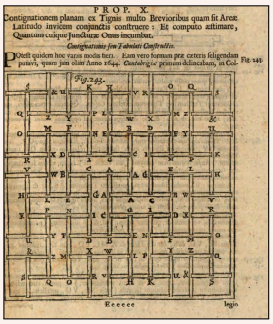


(c) Da Vinci, 1505, कोडेक्स अटलांटिकस, फोलियो 899v

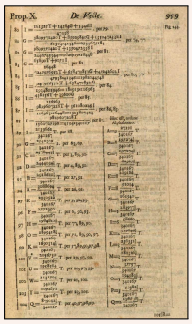


(d) लियोनार्दो के रेखाचित्र की व्याख्या (Larsen, 2007)

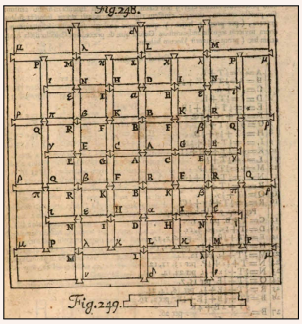
चित्र 15.35: पारस्परिक संरचनाओं के आरंभिक उदाहरण



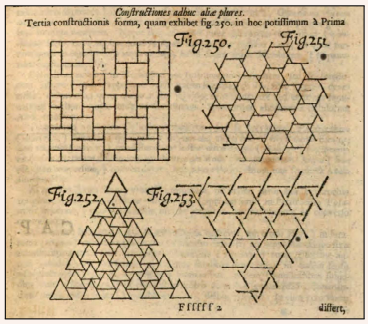
(a) समस्या-सूत्रण



(b) 25 अज्ञात वाले 25 समीकरणों का समाधान



(c) भार-पथ



(d) एक विषय के रूपांतर

चित्र 15.36: Wallis, 1695 द्वारा पारस्परिक संरचनाओं के विश्लेषण

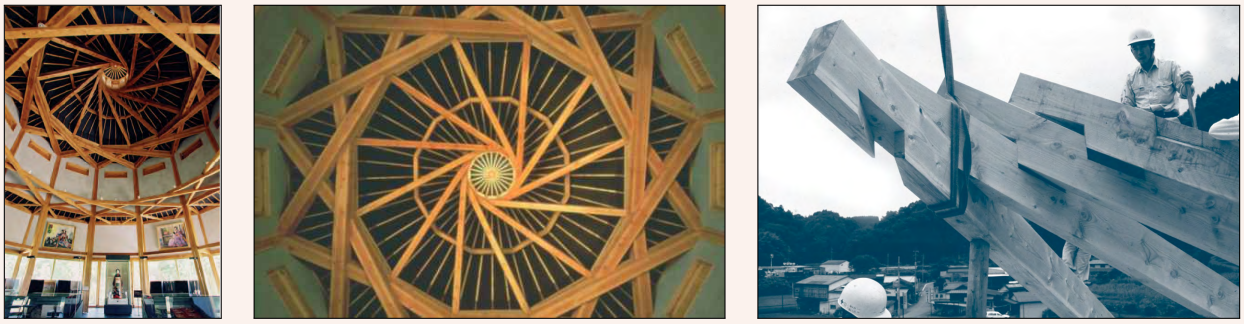
प्रस्तुत करने का श्रेय उन्हें मिलता है। इसी प्रकार उन्होंने अतिसूक्ष्म के लिए $1/\infty$ का उपयोग किया। वे न्यूटन के समकालीन और गणित के आरंभिक पुनर्जागरण के महानतम बुद्धिजीवियों में थे।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15.5.3.2 आधुनिक पुनरुत्थान

अब तक "पारस्परिक ढाँचे" पद ने "पारस्परिक संरचनाओं" का स्थान ले लिया प्रतीत होता है और उनका अध्ययन ओल्गा पोपोविच ने अपने शोध-प्रबंध (Popovic, 1996), युगांतरकारी पुस्तक (Larsen, 2007) और अनेक अन्य प्रकाशनों (Popovic Larsen, 2014) के माध्यम से पुनर्जीवित किया प्रतीत होता है।

चित्र 15.37 जापान के संभवतः सर्वाधिक प्रसिद्ध पारस्परिक ढाँचे, काज़ुहिरो इशी द्वारा अभिकल्पित *Seiwa Exhibition Hall*, पर केंद्रित है। यह विश्वास करना कठिन है कि विस्तृत संरचनात्मक विश्लेषण किए गए थे; इसके स्थान पर वास्तुकार का विशुद्ध "अभियांत्रिकीय विवेक" और उत्कृष्ट शिल्पकारी प्रभावी रहे प्रतीत होते हैं।



चित्र 15.37: सेइवा प्रदर्शनी भवन (जापान) (Popovic, 1996)

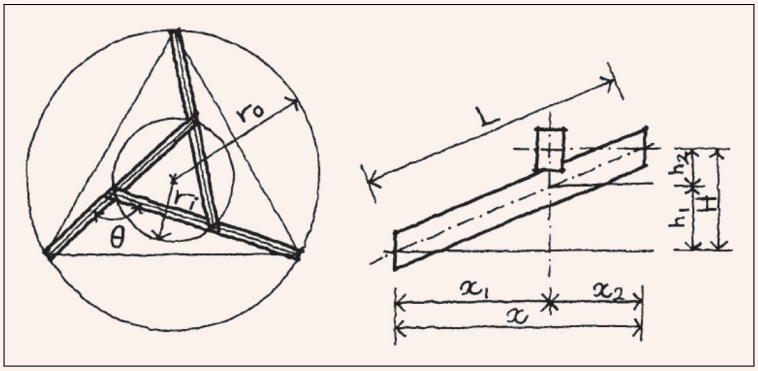
वास्तुकार के रूप में पोपोविच गणनाओं पर अधिक विचार नहीं करतीं और वास्तव में ऐसे बहुत कम उदाहरण प्रतीत होते हैं (Schrama, 2021)। यांत्रिकी को उनकी एकमात्र स्वीकृति पारस्परिक ढाँचा प्रतिरूपक की प्राचलिक परिभाषा है (चित्र 15.38):

- धरनों की संख्या (n)
- बाह्य अवलंबों से गुजरती त्रिज्या (r_o)
- धरन प्रतिच्छेद-बिंदुओं से गुजरती त्रिज्या (r_i)
- बाह्य अवलंबों से धरन प्रतिच्छेद-बिंदुओं तक ऊर्ध्वाधर उन्नयन (H)
- धरनों के प्रतिच्छेद-बिंदुओं पर उनकी केंद्ररेखाओं का ऊर्ध्वाधर अंतराल (h_2)
- ढाल पर धरनों की लंबाई (L)

15.5.4 गणितीय इष्टतमीकरण: मैक्सवेल, मिशेल, बेकर और बेगिनी

इस खंड में हम आधारभूत सिद्धांतों से आधुनिक अनुप्रयोग तक प्रमुख अभिकल्प-दिशानिर्देशों के विकास का अनुशीलन करते हैं। हम Maxwell, 1864c के युगांतरकारी शोधपत्र से आरंभ करते हैं, जिसने अभिकल्प-विचारों को सीधे संबोधित नहीं किया था। इसके बाद Michell, 1904 का युगांतरकारी शोधपत्र (जिसे संरचनात्मक इष्टतमीकरण पर पहला शोधपत्र माना जाता है) और अंततः बेकर तथा बेगिनी द्वारा इन सिद्धांतों का आधुनिक अनुप्रयोग आता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 15.38: पारस्परिक ढाँचा प्रतिरूपक का प्राचलीकरण (Popovic, 1996)

15.5.4.1 मैक्सवेल (1831–1879)

जहाँ मैक्सवेल के युगांतरकारी शोधपत्र (Maxwell, 1864c) ने आभासी कार्य-विधि की नींव रखी, वहीं उनका अगला शोधपत्र (Maxwell, 1864b) व्यवसाय पर अधिक प्रभावी हुआ (§15.5.4.2 देखें)।

उनके कथन का सार:

1. समतल में प्रतिकर्षणों और आकर्षणों की क्रिया के अधीन साम्य में स्थित बिंदुओं के किसी भी तंत्र में, प्रत्येक आकर्षण और जिन बिंदुओं के बीच वह कार्य करता है उनकी दूरी के गुणनफलों का योग प्रत्येक प्रतिकर्षण तथा जिन बिंदुओं के बीच वह कार्य करता है उनकी दूरी के गुणनफलों के योग के बराबर होता है।
2. प्रत्येक भार को उस बिंदु की ऊँचाई से गुणा करें जिस पर वह कार्य करता है, और प्रत्येक तनन को उस अवयव की लंबाई से गुणा करें जिस पर वह कार्य करता है, तथा इन सभी गुणनफलों को जोड़ें।
3. फिर ढाँचे के अवलंबों पर प्रत्येक ऊर्ध्वाधर दाब को उस ऊँचाई से गुणा करें जिस पर वह कार्य करता है, और प्रत्येक दाब को उस अवयव की लंबाई से गुणा करें जिस पर वह कार्य करता है, तथा गुणनफल जोड़ें। यह योग पूर्ववर्ती योग के बराबर होगा।

सरल शब्दों में: *संरचना के तनन भार-पथों के योग में से संपीडन पथों का योग घटाने पर वह मान मिलता है जो आरोपित बाह्य बलों से संबंधित है:*

$$\sum F_T L_T - \sum F_C L_C = \sum \vec{P}_i \cdot \vec{\Delta}_i \tag{15.1}$$

मैक्सवेल आगे कहते हैं:

> अभियंता के लिए इस प्रमेय का महत्त्व इस परिस्थिति से उत्पन्न होता है कि किसी अवयव का सामर्थ्य सामान्यतः उसके अनुप्रस्थ काट के समानुपाती होता है; अतः यदि प्रत्येक अवयव का सामर्थ्य उस प्रतिबल के समानुपाती हो जिसे उसे वहन करना है, तो उसका भार प्रतिबल और अवयव की लंबाई के गुणनफल के समानुपाती होगा। फलतः

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> गुणनफलों के ये योग क्रमशः तनन और दाब को बनाए रखने में प्रयुक्त होने वाली सामग्री की कुल मात्रा का अनुमान देते हैं।
>
> (Maxwell, 1864c)

15.5.4.2 मिशेल (1870–1959)

यद्यपि सभी व्यावहारिक प्रयोजनों के लिए मैक्सवेल ने आभासी कार्य का सिद्धांत (अप्रत्यक्ष रूप से) व्युत्पन्न किया, उन्होंने अपनी व्युत्पत्ति को संरचनाओं के इष्टतम अभिकल्प पर लागू करने की कल्पना नहीं की।[50]

यह कार्य Michell, 1904 ने किया, जिन्होंने मैक्सवेल के कार्य (समीकरण 15.1) को आगे बढाया। उन्होंने एकल भार-स्थिति के लिए कैंची का इष्टतम विन्यास निर्धारित किया, जब किसी भी छड में अक्षीय प्रतिबल का निरपेक्ष मान दी गई सीमा से अधिक नहीं होना था। उनके समाधान और अभिकल्प-अवस्था पर बीसवीं शताब्दी के दौरान पर्याप्त ध्यान दिया गया है।[51]

> अतः कोई ढाँचा समान आरोपित बलों के अधीन किसी भी ढाँचा-संरचना में संभव सामग्री-मितव्ययिता की सीमा प्राप्त करता है, यदि उसके अधिगृहीत स्थान को ऐसी लघु विरूपण अवस्था के अधीन किया जा सके जिसमें ढाँचे की सभी छडों में विकृतियाँ उनकी लंबाइयों के समान अंशों से बढें और स्थान के किसी भी अवयव के आंशिक परिवर्तन से कम न हों। यदि विरूपण के अधीन स्थान सभी दिशाओं में अनंत तक विस्तृत हो, तो ढाँचे का आयतन अन्य सभी के सापेक्ष न्यूनतम है; अन्यथा इसे उसी निर्धारित परिसीमा के भीतर स्थित ढाँचों के सापेक्ष न्यूनतम सिद्ध किया गया है।
>
> जब किसी ढाँचे की सभी छडों में समान चिह्न के प्रतिबल हों, तब अवस्था $e = \varepsilon$ स्पष्टतः पूरी की जा सकती है। लगाया जाने वाला परीक्षण-विरूपण तब ढाँचे को परिबद्ध करने और इच्छानुसार किसी भी परिमित परिसीमा अथवा अनंत तक विस्तृत स्थान का एकसमान प्रसार अथवा संकुचन (ढाँचा तनन अथवा संपीडन में होने के अनुसार) होता है।
>
> इस विशेष वर्ग के सरलतम न्यूनतम ढाँचे [कैंचियाँ] हैं:
>
> I समान और विपरीत बलों के एकल युग्म के अधीन बंधन तथा संपीडन-दंड।
> II आकृति के कोणों पर लगाए और आकृति के भीतर प्रतिच्छेद करने वाली रेखाओं के साथ कार्यरत बलों के अधीन त्रिभुजीय तथा चतुष्फलकीय ढाँचे।
> III सामान्यतः कैटेनरियाँ, जिनमें आरोपित बलों के अनुप्रयोग-बिंदु और स्वयं बल दिए गए हों।
>
> इन सभी स्थितियों में ढाँचे का न्यूनतम आयतन है
>
> $$V_m = \frac{\sum l[f]}{P} = \frac{\partial W}{\varepsilon P} = \frac{\sum \varepsilon F r \cos\theta}{\varepsilon P} = \frac{\sum F r \cos\theta}{P}$$
>
> जहाँ F आरोपित बलों में से एक है, r उसके अनुप्रयोग-बिंदु R की किसी स्वेच्छ बिंदु O से दूरी, θ RO तथा F की दिशा के बीच कोण, और P सामग्री में अनुमेय प्रतिबल है।

[50] सादृश्यतः Eshelby, 1970 ने ऊर्जा-संरक्षण के प्रमेय के कारण पथ-स्वतंत्र अनेक परिरेखा समाकल परिभाषित किए और कोई भौतिक व्याख्या नहीं दी (मानो "केवल गणित और यांत्रिकी के सौंदर्य के लिए")। चूँकि उन्होंने अपने अनेक समीकरणों को कभी भौतिक अर्थ देने का प्रयास नहीं किया, उनमें से एक ने Rice, 1968 का ध्यान आकर्षित किया, जिन्होंने पाया कि वह दरार की ऊर्जा-मुक्ति दर के अनुरूप है और इस प्रकार उस परिरेखा समाकल को परिभाषित किया जिसे बाद में उनका नाम मिला।

[51] वैकल्पिक भारों के लिए कैंची के इष्टतम विन्यास की अधिक जटिल समस्या पर कम ध्यान दिया गया प्रतीत होता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

...

कोई ढाँचा (इष्टतम होता है यदि वह) समान आरोपित बलों के अधीन किसी भी ढाँचा-संरचना में संभव सामग्री-मितव्ययिता की सीमा प्राप्त करता है, यदि उसके अधिगृहीत स्थान को ऐसे उपयुक्त लघु विरूपण के अधीन किया जा सके जिसमें ढाँचे की सभी छड़ों में विकृतियाँ उनकी लंबाइयों के समान अंशों से बढ़ें और स्थान के किसी भी अवयव की लंबाई के आंशिक परिवर्तन से कम न हों।

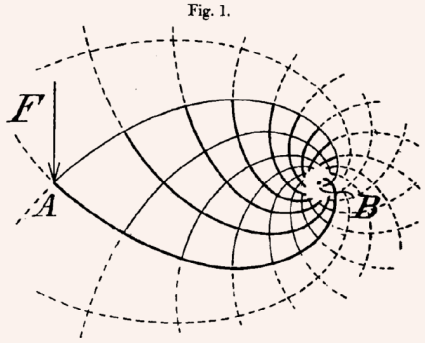
(Michell, 1904)

मिशेल आगे कहते हैं कि अवस्था $e = \varepsilon$ को पूरा करने वाले ढाँचों के अधिक सामान्य वर्ग में वे ढाँचे हैं जिनकी छड़ें विरूपण से पहले और बाद दोनों में *लांबिक तंत्रों* के वक्र बनाती हैं। ठीक यहीं मिशेल Maxwell, 1864b के दूसरे शोधपत्र से जुड़ते हैं।

मिशेल ने कुछ संरचनाओं (कैंचियों) के इष्टतम अभिकल्प दिए, जो चित्र 15.39 में दिखाए गए हैं।

1. (Fig. 1.) A single force F applied at A, and acting at right angles to the line AB, is balanced by an equal and opposite force and a couple, of moment F × AB, applied at B.

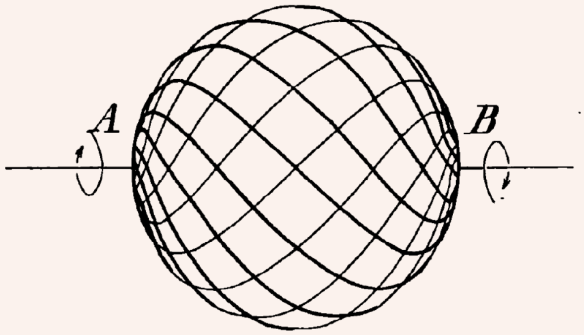
Fig. 1.



The minimum frame is formed of two similar equiangular spirals having their origin at B and intersecting orthogonally at A, together with all the other spirals orthogonal to these and enclosed between them.

4. (Fig. 5.) Equal and opposite couples applied at points A, B on the straight line AB.

Fig. 5.



The minimum frame consists of the series of rhumb-lines inclined at 45° to the meridians of the sphere having its poles at A and B.

चित्र 15.39: इष्टतम अभिकल्प (Michell, 1904)

यह युक्तिसंगत रूप से कहा जा सकता है कि अपने शोधपत्र के माध्यम से मिशेल *संरचनात्मक इष्टतमीकरण* के "जनक" थे।

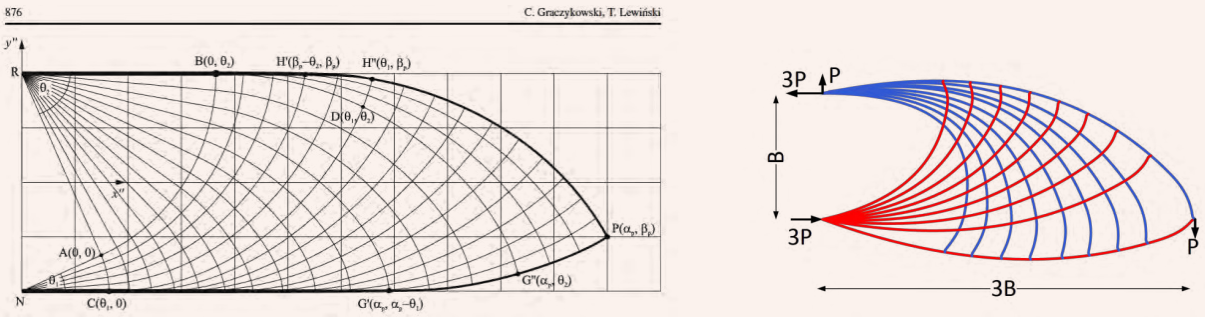
इससे तथाकथित *मिशेल संरचनाएँ* उत्पन्न हुईं—अर्थात् इन सिद्धांतों के अनुसार इष्टतम रूप से अभिकल्पित संरचनाएँ (जैसे चित्र 15.40 में कैंची)।

15.5.4.3 बेकर और बेगिनी

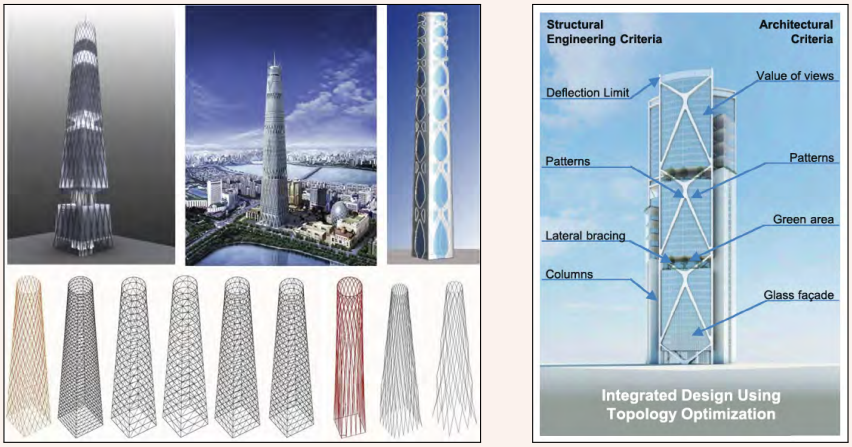
मिशेल के कार्य का उपयोग Baker, 1992 ने पार्श्व तंत्रों के ऊर्जा-आधारित अभिकल्प के लिए किया प्रतीत होता है। इसे Beghini et al., 2014 ने आगे बढ़ाया, जिन्होंने संरचनात्मक सांस्थिति इष्टतमीकरण द्वारा वास्तुकला और अभियांत्रिकी को जोड़ा (चित्र 15.41)।

उदाहरण: कैंची अभिकल्प

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 15.40: मिशेल कैंची

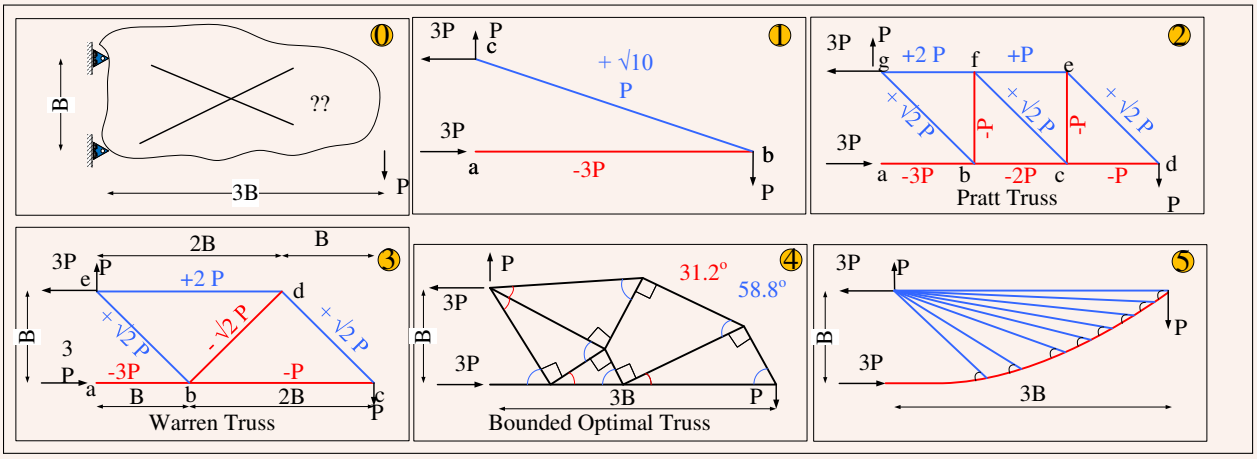


चित्र 15.41: संरचनात्मक सांस्थिति इष्टतमीकरण (Beghini et al., 2014)

"Structural Innovation: Combining Classic Theories with New Technologies" से Baker et al., 2015 द्वारा अनुकूलित।

हम स्वभार की उपेक्षा करते हुए दो नोडों पर अवलंबित और अन्य नोड पर ऊर्ध्वाधर भार वहन करने वाली कैंची का अभिकल्प करना चाहते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Length L/B	Force F/P		FL/BP		A-B	A+B	Deflection
			+ve	-ve	A +ve	B -ve			Δ/(σB/E)
Two bar Truss									
1	a-b	3.000		3.000		9.0	-9.0	9.0	
2	b-c	3.162	3.162		10.0		10.0	10.0	
Sum		**6.162**			**10.0**	**9.0**	**1.0**	**19.0**	**19.0**
Warren Truss									
1	a-b	1.000		3.000		3.0	-3.0	3.0	
2	b-c	2.000		1.000		2.0	-2.0	2.0	
3	c-d	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
4	d-e	2.000	2.000		4.0	0.0	4.0	4.0	
5	b-e	1.414	1.414		2.0	0.0	2.0	2.0	
6	b-d	1.414		1.414		2.0	-2.0	2.0	
Sum		**9.243**			**8.0**	**7.0**	**1.0**	**15.0**	**15.0**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Length L/B	Force F/P		FL/BP		A-B	A+B	Deflection
			+ve	-ve	A +ve	B -ve			Δ/(σB/E)
Pratt Truss									
1	a-b	1.000		3.000		3.0	-3.0	3.0	
2	b-c	1.000		2.000		2.0	-2.0	2.0	
3	c-d	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
4	d-e	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
5	e-f	1.000	1.000		1.0		1.0	1.0	
6	f-g	1.000	2.000		2.0		2.0	2.0	
7	b-g	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
8	c-f	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
9	b-f	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
10	c-e	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
Sum		**11.243**			**9.0**	**8.0**	**1.0**	**17.0**	**17.0**

विश्लेषण के विवरण (सरल किंतु लंबे) यहाँ नहीं दिखाए गए हैं; तथापि विभिन्न कैंची-विन्यासों के परिणाम नीचे संक्षेपित हैं।

स्तंभ I सामग्री के कुल आयतन के समानुपाती है (तनन और संपीडन में समान अनुमेय प्रतिबल मानते हुए)। विक्षेप (J) सामग्री के आयतन (I) के समानुपाती है।

	भार-पथ				विक्षेप
	तनन भार $A = \frac{\sum F_T L_T}{PB}$	संपीडन भार $B = \frac{\sum F_C L_C}{PB}$	$A - B$	$A + B$	$\frac{\Delta}{\frac{\sigma B}{E}}$
①	10	9	1.	19	19
②	9↘	8↘	1. →	17↘	17↘
③	8↘	7↘	1. →	15↘	15↘
④	7.7↘	6.7↘	1. →	14.47↘	14.47↘
⑤	8.52	7.52	1.	16.04	16.04

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Graczykowski and Lewiński, 2010 ने इस कैंची का विश्लेषण किया और ⑤ में दिखाया गया विन्यास प्राप्त किया।

15.5.5 उपसंहार: जब वास्तुकार और अभियंता टकराए

19वीं शताब्दी तीव्र औद्योगीकरण और प्रौद्योगिकीय प्रगति का समय थी, और इस काल में *वास्तुकारों* तथा *अभियंताओं* के बीच महत्त्वपूर्ण तनाव, प्रतिस्पर्धा और यहाँ तक कि वैमनस्य भी दिखाई दिया। ये दोनों व्यावसायिक समूह प्रायः *सौंदर्यशास्त्र* बनाम *प्रकार्यता*, शास्त्रीय वास्तुकला की *कलात्मक विरासत* बनाम लौह तथा इस्पात जैसी आधुनिक अभियांत्रिकीय सामग्रियों की *नवोन्मेषी क्षमता* की भूमिका पर असहमत होते थे। इस तनाव ने शताब्दी के दौरान भिन्न रूप लिए: कभी समान कार्यादेश के लिए प्रतिस्पर्धा करते दो नामित प्रतिद्वंद्वियों के सीधे मुकाबले के रूप में और कभी अभियंता के पहले से साकार समाधान को बाद में वास्तुशिल्पीय प्रतिष्ठान के प्रतिरोध का सामना करते हुए। तीन प्रकरण इस संघर्ष की परास उदाहरणित करते हैं—पेरिस में एफिल–बूर्दे मीनार प्रतियोगिता, लंदन में पैक्सटन के क्रिस्टल पैलेस की स्वीकृति और न्यूयॉर्क में रोब्लिंग के ब्रुकलिन पुल को मिली आलोचना—और साथ मिलकर वे 19वीं शताब्दी के आरंभिक *Romanticism* तथा *historicism* से उसके उत्तरार्ध को परिभाषित करने वाले *industrial modernism* की ओर व्यापक सामाजिक परिवर्तन प्रतिबिंबित करते हैं।

15.5.5.1 प्रकरण एक: बूर्दे बनाम एफिल (पेरिस, 1889)

शास्त्रीय रूप से प्रशिक्षित वास्तुकार जूल बूर्दे (1835–1915) और नवोन्मेषी अभियंता गुस्ताव एफिल (1832–1923) (उनके कार्यजीवन के अधिक पूर्ण विवरण के लिए §15.4.2 देखें) के बीच पेरिस की 1889 की विश्व प्रदर्शनी के लिए स्मारकीय मीनार के अभिकल्प की प्रतियोगिता इस अध्याय के विषयों को समाहित करती है। यह परंपरा और आधुनिकता, *École des Beaux-Arts* के शास्त्रीय आदर्शों और *École Centrale* के परिमेय अभियांत्रिकीय सिद्धांतों के बीच प्रतियोगिता थी।

एकोल सेंट्राल के दो स्नातक दोनों व्यक्तियों का *École Centrale des Arts et Manufactures* में समान शैक्षणिक आधार था। 1829 में स्थापित विद्यालय तीव्रता से औद्योगीकृत होती फ्रांसीसी अर्थव्यवस्था के लिए अभियंता तैयार करने हेतु अभिकल्पित था और वास्तुकला के शास्त्रीय अध्ययनों के बजाय व्यावहारिक अभियांत्रिकी तथा औद्योगिक अनुप्रयोगों पर केंद्रित था। उसका पाठ्यक्रम गणित, यांत्रिकी, भौतिकी और रसायन पर बल देता था—छात्रों को वैज्ञानिक सिद्धांतों द्वारा जटिल वास्तविक समस्याएँ हल करने का प्रशिक्षण देता हुआ।

स्नातक होने के बाद उनके मार्ग अलग हो गए। बूर्दे ने फ्रांस में शास्त्रीय वास्तुकला के केंद्र *École des Beaux-Arts* में अपना अध्ययन आगे बढाया, जो सममिति, समानुपात और प्राचीन यूनान तथा रोम के ऐतिहासिक संदर्भों पर बल देता था। वे शास्त्रीय वास्तुकला के समर्थक बने और *Palais du Trocadéro* जैसे भवनों का अभिकल्प किया, जिसने स्मारकीयता और विस्तृत सजावट के बो-आर्ट आदर्शों को मूर्त किया।

इसके विपरीत एफिल ने अभियांत्रिकी में कार्यजीवन अपनाया और पिटवाँ लौह तथा पूर्वनिर्मित निर्माण तकनीकों में विशेषज्ञता विकसित की। गाराबी जलसेतु जैसे पुलों और जलसेतुओं पर उनके कार्य ने संरचनात्मक गतिकी तथा पवन-प्रतिरोध पर उनका अधिकार प्रदर्शित किया। बूर्दे के विपरीत एफिल

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सामग्री की सत्यनिष्ठा और इस विचार में विश्वास करते थे कि संरचना का सौंदर्य आरोपित अलंकरण के बजाय उसकी प्रकार्यता तथा अभियांत्रिकीय परिशुद्धता से उद्भूत होना चाहिए।

प्रतिस्पर्धी प्रस्ताव 1889 की प्रदर्शनी के लिए बूर्दे ने विशाल स्तंभ के रूप में स्मारकीय पाषाण संरचना—“सूर्य मीनार” (*Tour Soleil*)—प्रस्तावित की, जो रोमन विजय-स्मारकों की स्मृति दिलाती थी (Bourdais, 1881)। अभिकल्प भव्य, भारी और अलंकृत था तथा सममिति और स्थायित्व के शास्त्रीय सौंदर्यपरक आदर्शों का पालन करता था। उसे ग्रेनाइट से आवृत और विद्युत प्रकाश से मुकुटित किया जाना था जो संपूर्ण पेरिस को प्रकाशित करता।

अभियंताओं मॉरिस केशलाँ और एमील नूगिए तथा वास्तुकार स्तेफान सोवेस्त्र के साथ विकसित एफिल का अभिकल्प पूर्णतः भिन्न था: पूर्वनिर्मित लौह भागों से बनी 300-मीटर लौह जालीदार मीनार (Lemoine, 2002)। वह आधुनिक, सुघड और औद्योगिक प्रौद्योगिकी का उत्सव था। अनावृत लौह ढाँचा आधुनिक अभियांत्रिकी की परिमेयता और सत्यनिष्ठा का प्रतीक था।

परिणाम फ्रांसीसी सरकार ने अंततः एफिल का अभिकल्प चुना और अपनी औद्योगिक क्षमता प्रदर्शित करने का प्रयास करते राष्ट्र के लिए आधुनिक अभियांत्रिकी के प्रतीकात्मक महत्त्व को स्वीकार किया। निर्णय विवाद-रहित नहीं था: अनेक आलोचकों, विशेषतः कलाकारों और बुद्धिजीवियों, ने आरंभ में एफिल के अभिकल्प का विरोध किया। लेखक गी द मोपासाँ सहित प्रमुख पेरिसवासियों के समूह ने याचिका पर हस्ताक्षर करके प्रस्तावित लौह संरचना को “विरूपता” और “पेरिस का अपमान” कहा।

बूर्दे के प्रस्ताव को फ्रांसीसी वास्तुशिल्पीय समुदाय के परंपरावादियों से समर्थन मिला, किंतु उनकी चिनाई मीनार कहीं अधिक महँगी, निर्माण में धीमी और संरचनात्मक रूप से कम नवोन्मेषी होती। समय पर और निर्धारित लागत से कम में पूर्ण एफिल टावर प्रदर्शनी—और अंततः स्वयं पेरिस—का प्रतीक बन गया।

15.5.5.2 प्रकरण दो: पैक्सटन और क्रिस्टल पैलेस (लंदन, 1851)

बूर्दे–एफिल प्रतियोगिता के विपरीत जोसेफ पैक्सटन का संघर्ष किसी एक नामित प्रतिद्वंद्वी से नहीं, बल्कि व्यापक वास्तुशिल्पीय प्रतिष्ठान से था। शौक़ीनिक रूप से प्रशिक्षित वास्तुकार के बजाय माली और हरितगृह अभिकल्पक के रूप में प्रशिक्षित पैक्सटन ने 1851 की महान प्रदर्शनी के लिए लौह तथा काँच की विशाल पूर्वनिर्मित संरचना प्रस्तावित की—एक भवन-प्रकार जो सीधे बड़े काँचगृहों के अभिकल्प के उनके अनुभव से व्युत्पन्न और वास्तुशिल्पीय व्यवसाय द्वारा तब तक उत्पन्न किसी भी वस्तु से पूर्णतः भिन्न था। भवन के अभिकल्प और निर्माण का विस्तृत समकालीन विवरण उसके खुलने के उसी वर्ष प्रकाशित हुआ (Berlyn and Fowler, 1851 PDF)।

उनके अभिकल्प को *Royal Institute of British Architects (RIBA)* और उस समय के प्रमुख वास्तुकारों के प्रतिरोध का सामना करना पड़ा। *Decimus Burton*, जिन्होंने आरंभ में पैक्सटन का समर्थन किया किंतु शास्त्रीय प्रशिक्षण से आए थे, और गॉथिक पुनरुत्थान के प्रमुख समर्थक *A.W.N. Pugin*, दोनों पैक्सटन के औद्योगिक सामग्रियों के क्रांतिकारी उपयोग से असंगत पारंपरिक वास्तुशिल्पीय मूल्यों का प्रतिनिधित्व करते थे। आलोचना किसी प्रतिस्पर्धी वैकल्पिक अभिकल्प की अपेक्षा व्यापक असहजता पर केंद्रित थी: ऐतिहासिक पूर्वोदाहरण के अनुसार निर्मित चिनाई के बजाय व्यापक उत्पादन वाले लौह तथा काँच घटकों से संयोजित भवन को वास्तुकला कहा भी जा सकता है अथवा नहीं।

इस प्रतिरोध के बावजूद क्रिस्टल पैलेस छह महीने से कम में निर्मित हुआ—पूर्वनिर्मित निर्माण की

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अभूतपूर्व उपलब्धि—और जिस प्रदर्शनी के लिए वह बना था उसका स्थायी प्रतीक बन गया, जैसा दशकों बाद एफिल टावर बनने वाला था।

15.5.5.3 प्रकरण तीन: रोब्लिंग और ब्रुकलिन पुल (न्यूयॉर्क, 1869–1883)

जॉन रोब्लिंग के ब्रुकलिन पुल ने सीधे मुकाबले के बजाय संस्थागत विरोध के समान प्रतिरूप का सामना किया। रोब्लिंग का अभिकल्प—अभूतपूर्व विस्तृति वाला निलंबन पुल, जो उनके अपने आविष्कार के इस्पात केबल का उपयोग करता था—प्रमुख गॉथिक पुनरुत्थान वास्तुकार *Richard Upjohn* और सेंट्रल पार्क के भूदृश्य वास्तुकार तथा नगरीय नियोजक *Frederick Law Olmsted* सहित अनेक व्यक्तियों की आलोचना का लक्ष्य बना; दोनों ने अनावृत केबल और इस्पात-कार्य के औद्योगिक सौंदर्यशास्त्र द्वारा नगर के दृश्य चरित्र में हस्तक्षेप पर आपत्ति की (McCullough, 1972)। रोब्लिंग ने पुल कंपनी के निदेशकों को दिए अपने वार्षिक प्रतिवेदनों में परियोजना की प्रगति स्वयं प्रलेखित की (Roebling, 1877 PDF)।

पैक्सटन की भाँति आपत्ति प्रतिस्पर्धी अभिकल्प से कम, प्रमुख नागरिक संरचनाओं में वास्तुशिल्पीय सौंदर्यशास्त्र का स्थान लेते अभियांत्रिकीय सौंदर्यशास्त्र के प्रति व्यापक संस्थागत असहजता थी। रोब्लिंग पुल को पूर्ण होते देखने के लिए जीवित नहीं रहे—निर्माण आरंभ होने से पहले सर्वेक्षण दुर्घटना के बाद की जटिलताओं से उनका निधन हुआ, और परियोजना के दौरान स्वयं विसंपीडन रोग से अक्षम उनके पुत्र वॉशिंगटन रोब्लिंग ने अपनी पत्नी एमिली वॉरेन रोब्लिंग के कार्य द्वारा उसके पूर्ण होने का अधिकांश निरीक्षण किया। पूर्ण पुल पैक्सटन के क्रिस्टल पैलेस और एफिल की मीनार की भाँति अपने नगर के परिभाषक युगांतरकारी स्थलों में बना।

15.5.5.4 विरासत

तीनों प्रकरणों में प्रतिरूप समान है: पूर्वनिर्मित, औद्योगिक और संरचनात्मक रूप से साहसिक अभियंता का समाधान विरासत में मिली सौंदर्यपरक तथा भौतिक परंपराओं की रक्षा करते वास्तुशिल्पीय प्रतिष्ठान के प्रतिरोध का सामना करता है—और प्रत्येक मामले में अभियंता की संरचना अंततः अपने नगर तथा युग का स्थायी प्रतीक बनती है। बूर्दे-एफिल प्रतियोगिता तीनों में सर्वाधिक प्रत्यक्ष थी, घोषित विजेता वाली औपचारिक सीधी प्रतियोगिता; इसके स्थान पर पैक्सटन और रोब्लिंग ने पहले से चल रहे कार्य पर प्रतिक्रिया करते संस्थानों तथा आलोचकों के विस्तृत विरोध का सामना किया। फिर भी तीनों प्रदर्शित करते हैं कि अभियांत्रिकी कला हो सकती है—कि सत्यनिष्ठ रूप से अभिव्यक्त संरचना स्वयं उस *venustas* को प्राप्त कर सकती है जिसकी विट्रुवियस ने *firmitas* और *utilitas* के साथ माँग की थी।

बूर्दे की शास्त्रीय विरासत फ्रांस में जारी रही और उनके दृष्टिकोण की प्रतिध्वनियाँ सिटी ब्यूटीफुल आंदोलन और बो-आर्ट शास्त्रीयता में मिलीं, जिसने 1930 के दशक तक अमेरिकी नागरिक वास्तुकला पर प्रभुत्व रखा। किंतु मीनार, महल और पुल ने अपने-अपने नगर तथा दशक में नए युग के आगमन की घोषणा की थी: ऐसा युग जिसमें *progettista*—अभिकल्प और निर्माण करने वाला, संरचना को बोलने देने वाला अभियंता—निर्मित पर्यावरण को उत्तरोत्तर आकार देने वाला था।

इस प्रकार प्रतियोगिता हमें इस अध्याय के केंद्रीय विषय पर लौटाती है: क्या रूप को प्रकार्य का अनुसरण करना चाहिए, क्या सौंदर्य संरचनात्मक आवश्यकता से उद्भूत हो सकता है, और क्या अभियंता वह प्राप्त कर सकता है जिसे कभी वास्तुकार का विशिष्ट क्षेत्र माना जाता था। तीन क्षितिजों पर लौह में लिखा उत्तर था—हाँ।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15.6 कंप्यूटर पीढ़ी

परिमित तत्त्व विधि के उद्भव ने वास्तुकारों और कभी-कभी अभियंताओं को उत्तरोत्तर चुनौतीपूर्ण रूपों की खोज करने तथा संगणकीय सहायता के बिना जिन कार्यों का साहस करना कठिन होता, उनकी सीमाओं तक पहुँचने में सक्षम बनाया। वास्तुकारों ने ऐसे संरचनात्मक रूपों की खोज आरंभ की जिनकी कंप्यूटर विश्लेषण के बिना कल्पना करना असंभव था, जबकि अभियंताओं ने चरम पवन भारों का प्रतिरोध करने योग्य अति-ऊँची इमारतें (बुर्ज खलीफा), कंपन जैसे द्वितीयक प्रभावों को ध्यान में रखने वाले दीर्घ-विस्तृति पुल (मिलेनियम ब्रिज), और विसरूपण तथा संकुचन जैसे दीर्घकालिक प्रभावों को समाविष्ट करने वाली जटिल कंक्रीट संरचनाएँ (मियो वायाडक्ट) अभिकल्पित कीं। मैं स्वयं को ऐसे तीन व्यवसायियों तक सीमित रखूँगा, जिनमें से दो पर्याप्त विवादास्पद हैं।

15.6.1 “असाधारण” वास्तुकार

पारंपरिक अर्थ में पूर्णतः *progettisti* न होते हुए भी कुछ वास्तुकार संरचनात्मक अभियंताओं को उनकी जटिल ज्यामितियों का समुचित विश्लेषण और अभिकल्प करने की चुनौती देते हैं। निम्नलिखित प्रभावशाली संरचनाएँ वास्तुकारों के सृजनात्मक मस्तिष्क में जन्मीं और संगणकीय संभावना की सीमाओं पर कार्यरत संरचनात्मक अभियंताओं की विशेषज्ञता द्वारा यथार्थ में परिणत हुईं।

मैं केवल दो उल्लेखनीय उदाहरणों पर ध्यान केंद्रित करूँगा, जबकि तीसरे (सारिनेन) के कार्य पर पहले विचार किया जा चुका है।

15.6.1.1 फेलिक्स कैंडेला (1910–1997)

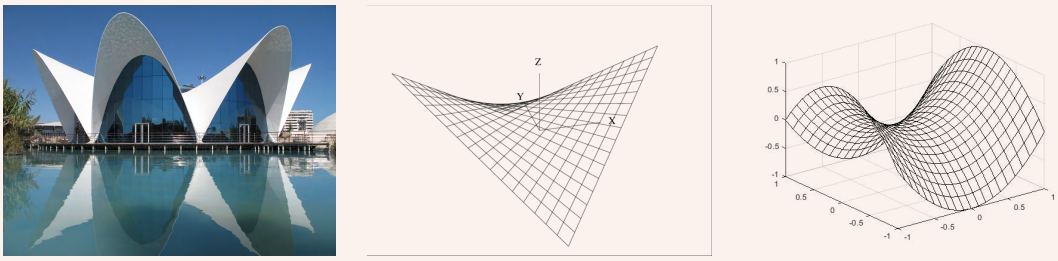
फेलिक्स कैंडेला औतेरीज़ो (मैड्रिड, 1910–रैले, उत्तरी कैरोलाइना, 1997) का जन्म स्पेन में हुआ और उन्होंने मैड्रिड के एस्कुएला टेक्निका सुपीरियर दे आर्कितेक्तूरा में वास्तुकला का अध्ययन करके 1935 में स्नातक उपाधि प्राप्त की। किंतु स्पेनी गृहयुद्ध में रिपब्लिकन पक्ष के अभियंता के रूप में भाग लेने और फ्रांसीसी यातना शिविर में संक्षिप्त नजरबंदी के बाद वे 1939 में मेक्सिको चले गए, जहाँ उन्होंने अपने कार्यजीवन का अधिकांश भाग बिताया और अंतरराष्ट्रीय मान्यता प्राप्त की।

नेर्वी की भाँति कैंडेला ने भवनों की समग्र रूप से संकल्पना की और वास्तुकार, अभियंता तथा ठेकेदार की भूमिकाएँ एक साथ निभाईं। उन्होंने अतिपरवलयिक-परवलयज (HP) खोलों के उपयोग का मार्ग प्रशस्त किया; यह अपनी द्विवक्रता के कारण विशेष रूप से दक्ष संरचनात्मक रूप है, जो भारों को बंकन के बजाय मुख्यतः झिल्ली क्रिया द्वारा वहन करने देता है। किंतु वे ऐसे रूपों का अध्ययन या निर्माण करने वाले पहले व्यक्ति नहीं थे (Espion, 2016)—फ्रांस में फर्नां एमों (Aimond, 1936) और इटली में जॉर्जियो बारोनी (Currà and Russo, 2018) उनसे पहले यह कार्य कर चुके थे। फिर भी 1950 के दशक में कैंडेला के नवोन्मेषी कार्य द्वारा अंतरराष्ट्रीय ध्यान आकर्षित किए जाने तक HP रूप वास्तुशिल्पीय व्यवहार में अपेक्षाकृत अज्ञात रहा।

कैंडेला के HP खोलों का सर्वाधिक प्रतिष्ठित उदाहरण निःसंदेह मेक्सिको के सोचिमिल्को में 1957 में पूर्ण रेस्तराँते लॉस मानांतियालेस है। अभिकल्प इतना सफल रहा कि उसने विश्वभर में अनेक समान संरचनाओं को प्रेरित किया। अपने विशिष्ट ऊपर की ओर वक्रित किनारों वाला दक्ष संरचनात्मक तंत्र केवल 40 mm मोटा अत्यंत तनु खोल उत्पन्न करता है, जिसकी आंतरिक विस्तृति 30 m है। केंद्र में खोल

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5.8 m की ऊँचाई तक पहुँचता है, जबकि किनारे 9.9 m तक उठते हैं। आलंबों को फर्श निर्माण के नीचे तनाव-दंडों से जोड़ा गया है, जिन्हें खोल के आधार पर उत्पन्न क्षैतिज प्रणोद का प्रतिरोध करने के लिए अभिकल्पित किया गया। कैंडेला स्वयं इस हल्की, सुरुचिपूर्ण संरचना को अपना सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण कार्य मानते थे—खोल अभिकल्प के प्रति उनके दृष्टिकोण को विशेषता प्रदान करने वाली संरचनात्मक दक्षता और वास्तुशिल्पीय काव्यात्मकता के संयोग का प्रमाण।



(a) सोचिमिल्को में रेस्तराँते लॉस मानांतियालेस

(b) सरल रेखाओं से परिसीमित

(c) परवलयों से परिसीमित

चित्र 15.42: फेलिक्स कैंडेला के अतिपरवलयिक-परवलयज खोल

15.6.1.2 फ्रैंक गेहरी (1929–2025)

फ्रैंक ओवेन गेहरी (टोरंटो, 1929–2025) अभियंता नहीं, बल्कि वास्तुकार हैं, और इस रूप में वे महान अभियंताओं के इस देवमंडल में उचिततः सम्मिलित नहीं होते। किंतु उनके कार्य ने संरचनात्मक अभियांत्रिकी व्यवसाय को इतनी गहराई से चुनौती दी है—संगणकीय और निर्माणात्मक रूप से संभव कार्यों की सीमाओं को आगे बढ़ाया है—कि अपवाद करना आवश्यक है।

गेहरी को वास्तुकार और मूर्तिकार दोनों माना जा सकता है। जहाँ कालात्रावा की वास्तुशिल्पीय भव्य रचनाएँ सामान्यतः सरल रेखाओं और साधारण वक्रों से बनी थीं, वहीं गेहरी ऐसी ज्यामितीय परिष्कृति वाले जटिल वक्र पृष्ठों के प्रति आसक्त हैं कि उनका अंकीय पृष्ठ-निरूपण भी शोध-प्रबंधों का विषय रहा है (Shelden, 2002 PDF)। उनके भवन पारंपरिक संरचनात्मक वर्गों की अवहेलना करते हैं और विश्लेषण, निर्माण तथा संयोजन के लिए पूर्णतः नए दृष्टिकोणों की माँग करते हैं।

आज अधिकांश वास्तुकार नियमित रूप से उपलब्ध सॉफ्टवेयर (जैसे SAP2000, RISA अथवा समान प्रोग्राम) पर निर्भर रहते हैं, जिनका उपयोग संरचनात्मक अभियंता उनके भवनों के विश्लेषण और अभिकल्प के लिए कर सकते हैं; किंतु गेहरी का कार्य ज्यामितीय रूप से इतना जटिल सिद्ध हुआ कि पारंपरिक संरचनात्मक सॉफ्टवेयर अपर्याप्त था। फलतः उन्होंने CATIA—वायुरूपीय सॉफ्टवेयर, जिसे मूलतः डसॉल्ट सिस्टम्स ने विमान के वक्र पृष्ठों के विश्लेषण हेतु विकसित किया था (Gehry, Lloyd, and Shelden, 2020 PDF)—को अनुकूलित और परिवर्तित करने के लिए अपने कार्यालय में एक पृथक प्रौद्योगिकी समूह स्थापित किया। वास्तुशिल्पीय अभिकल्प में वांतरिक्ष संगणकीय साधनों के इस अनुकूलन ने गेहरी के कार्यालय को अत्याधुनिक संगणन प्रौद्योगिकी और CAD/CAM विनिर्माण प्रक्रियाओं का पर्याय बना दिया तथा जटिल वास्तुशिल्पीय ज्यामितियों को साकार करने की विधि मूलतः बदल दी।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

गेहरी की सर्वाधिक प्रतिष्ठित संरचना बिलबाओ का गुगेनहाइम संग्रहालय है, जो 1997 में पूर्ण हुआ।[52] चित्र 15.43a में दिखाए गए उसके प्रभावशाली टाइटेनियम-आच्छादित वक्र अभिकल्प और संरचनात्मक विश्लेषण दोनों के लिए विशिष्ट संगणकीय साधनों के उपयोग का उदाहरण हैं। भवन के विशाल गुहा-सदृश आंतरिक स्थान—जो केवल परिष्कृत कंप्यूटर प्रतिरूपण द्वारा संभव हुए—रिचर्ड सेरा (मेरे प्रिय न्यूनतावादी मूर्तिकारों में से एक) की विशाल इस्पात मूर्तियों जैसी समान रूप से वक्र समकालीन कलाकृतियों के लिए उपयुक्त परिवेश प्रदान करते हैं (चित्र 15.43b)।



(a) बिलबाओ का गुगेनहाइम संग्रहालय



(b) रिचर्ड सेरा की “बैंड”

चित्र 15.43: फ्रैंक गेहरी का बिलबाओ गुगेनहाइम और रिचर्ड सेरा की मूर्ति

15.6.1.3 सांत्यागो कालात्रावा (1951–)

सांत्यागो कालात्रावा वाल्स (बेनिमामेत, वेलेंसिया, 1951–) ने पहले वेलेंसिया के पॉलिटेक्निक विश्वविद्यालय में वास्तुकला का अध्ययन करके 1974 में स्नातक उपाधि प्राप्त की और फिर ETH ज्यूरिख में सिविल अभियांत्रिकी का अध्ययन किया, जहाँ उन्होंने 1981 में शोधोपाधि पूर्ण की। क्रिश्चियन मेन के कार्यकाल में ETH में अध्ययन करने के बावजूद उनके बीच निकट सहयोग का कोई संकेत नहीं मिलता। कालात्रावा की वास्तुशिल्पीय शैली विशिष्ट, सर्वसंग्राही, प्रचुर और तत्काल पहचानी जाने योग्य है—संरचनात्मक अभियांत्रिकीय तर्क और मूर्तिकला-संबंधी महत्त्वाकांक्षा का संलयन। उनके आरंभिक कार्य का आलोचनात्मक मूल्यांकन (McQuaid, 1993 PDF) में प्रस्तुत है।

यद्यपि कालात्रावा वास्तुकार और संरचनात्मक अभियंता दोनों हैं, मैंने उन्हें इस वास्तुशिल्पीय खंड में रखा है क्योंकि उनका सर्वाधिक प्रभाव संरचनात्मक अभियांत्रिकी विज्ञान में मौलिक योगदान (जैसा कि फज़लुर खान जैसे व्यक्तियों में उदाहरणित है) के बजाय दृश्य और आकारिक रहा है। उनका दृष्टिकोण संरचनात्मक इष्टतमीकरण से अधिक वास्तुशिल्पीय अभिव्यक्ति को प्राथमिकता देता है और प्रत्येक परियोजना को भवन तथा मूर्ति दोनों मानता है।

उनकी संरचनाएँ अपेक्षाकृत सरल और संयत—जैसे सेविल का अलामियो पुल [53] अथवा ज्यूरिख का

[52]बिलबाओ उत्तरी स्पेन के बास्क क्षेत्र का आर्थिक रूप से अवनत औद्योगिक नगर था और गुगेनहाइम संग्रहालय ने वास्तुशिल्पीय पर्यटन के माध्यम से नगर को आर्थिक तथा सांस्कृतिक रूप से पुनर्जीवित करने का साहसिक (और अंततः सफल) प्रयास प्रस्तुत किया—यह रणनीति अब “बिलबाओ प्रभाव” के नाम से जानी जाती है।

[53]संरचनात्मक अभियांत्रिकी के विद्यार्थियों के लिए Pollalis, 1999 की पुस्तक विशेष रूप से रुचिकर है; इसमें कालात्रावा

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्टाडेलहोफेन रेलवे स्टेशन—से लेकर डलास के मार्गरेट हंट हिल पुल अथवा लियाँ के सेंट-एक्ज़ूपेरी हवाई अड्डा TGV स्टेशन जैसी भड़कीली और मूर्तिकला-सदृश रचनाओं तक विस्तृत हैं। सरलतर कार्य सुलिवन के इस सिद्धांत की अनुगूँज देते हैं कि रूप प्रकार्य का अनुसरण करता है, किंतु कालात्रावा न्यूनतमवादी होने का कोई प्रयास नहीं करते और मायार अथवा नेर्वी जैसे अभियंताओं द्वारा खोजे गए इष्टतम संरचनात्मक रूपों की तलाश नहीं करते। उनके लिए संरचना अभियांत्रिकीय समाधान और कलात्मक वक्तव्य, दोनों की भूमिका निभाती है और प्रायः संरचनात्मक दक्षता से अधिक दृश्य नाटकीयता को प्राथमिकता देती है।

इस दृष्टिकोण ने प्रशंसा और आलोचना दोनों उत्पन्न की हैं। कालात्रावा का कार्य प्रायः विलंब, लागत-वृद्धि और मुकदमेबाजी से ग्रस्त रहा है (Daley, 2013)। सबसे कुख्यात उदाहरण उनके अपने नगर वेलेंसिया का कला और विज्ञान नगर है—उनके कार्यों का विश्व का सबसे बड़ा संग्रह, जिसमें प्रदर्शन सभागार, पुल, तारामंडल, ओपेरा भवन, विज्ञान संग्रहालय, आच्छादित पदमार्ग और एकड़ भर परावर्तक जलाशय सम्मिलित हैं। मूलतः लगभग $405 million बजट वाला यह संकुल अंततः उस राशि का लगभग तीन गुना महँगा पड़ा और अनेक मुकदमों का कारण बना; यह उनके अधिकांश कार्य को विशेषता देने वाले वास्तुशिल्पीय महत्त्वाकांक्षा और अभियांत्रिकीय व्यावहारिकता के बीच तनाव को स्पष्ट करता है।



(a) अलामियो पुल, सेविल



(b) लियाँ सेंट-एक्ज़ूपेरी हवाई अड्डा TGV स्टेशन

चित्र 15.44: कालात्रावा: अलामियो पुल की संरचनात्मक सुरुचि बनाम दृश्यतः बोझिल लियाँ सेंट-एक्ज़ूपेरी TGV स्टेशन।

15.6.2 संरचनात्मक अभियंता: पाँच प्रतिशत वर्ग

मैं (Llunji, 2022 PDF) की उत्कृष्ट पुस्तक की विचारोत्तेजक भूमिका से उद्धरण के साथ आरंभ करूँगा, जो संरचनात्मक अभियांत्रिकी की वर्तमान स्थिति का गंभीर मूल्यांकन प्रस्तुत करती है:

> विश्व में वास्तुकारों से अधिक अभियंता हैं—पचास लाख से अधिक। किंतु आज संरचनात्मक अभियांत्रिकी में संभवतः विश्वभर में केवल 10 सच्चे अभिकल्पक हैं—इससे अधिक नहीं। अन्य सभी तकनीशियन और वास्तुशिल्पीय विचारों

के वास्तुशिल्पीय अभिप्राय स्पष्ट करते हुए अलामियो पुल के अभिकल्प और निर्माण के प्रत्येक चरण का वर्णन है। इसमें प्रासंगिक अभियांत्रिकीय गणनाएँ और तकनीकी विवरण सम्मिलित हैं। पुस्तक में अभियंताओं को संरचना का प्रतिरूप बनाने योग्य बनाने वाला ज्यामितीय आँकड़ा भी है, जैसा कि §G में विवेचित है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> के समर्थक हैं; वास्तुकार की इच्छाएँ पूरी करने वाले, सामान्यतः सेवक, बहुत कम भागीदार और कभी नेतृत्वकर्ता नहीं। यह कठोर लगता है, किंतु सत्य है। हमारे वर्तमान उत्तर-औद्योगिक अंकीय विश्व में सिविल अभियांत्रिकी अब सामाजिक विकास की अग्रिम पंक्ति में नहीं है। संरचनात्मक विश्लेषण और अभिकल्प के "स्वचालन" की खोज में अभियंता नीरस होते जा रहे हैं, अपनी 'परिष्कृति' और कुछ सृजनशीलता खो रहे हैं तथा अंतिम अभिकल्प में अल्प सृजनात्मक योगदान देने वाले वास्तुकारों के विशुद्ध तकनीकी सहायक बनते जा रहे हैं। मार्ग में कहीं संरचनात्मक अभियंता प्रौद्योगिकीय नवोन्मेषों के अग्रभाग में रहने के बजाय प्रौद्योगिकी के "अधीन" हो गए। हाल के प्रतिवेदनों के अनुसार इस पर सहमति है कि "स्वचालन अभियांत्रिकीय समुदाय की प्रतिष्ठा और अधिकार को घटा रहा है तथा अंकीय समन्वय उद्योग की कार्यपद्धति बदल रहा है"। संरचनात्मक अभियांत्रिकी उद्योग में कार्यरत हममें से अधिकांश जानते हैं कि हमारी शाखा परिवर्तन के ऐसे बड़े भूकंप से प्रभावित हुई है जो अभियंताओं की भूमिका को अप्रासंगिक बना सकता है और विश्वभर के व्यवहाररत संरचनात्मक अभियंताओं के लिए बड़ी चिंता है। ... निर्माण उद्योग में अनेक स्वर अभियंता की भूमिका को न्यून बताते हैं। अब जबकि संरचनात्मक अभिकल्प का लगभग प्रत्येक चरण स्वचालित है, कुछ लोग मानते हैं कि संरचनात्मक अभिकल्प को संरचनात्मक अभियंताओं द्वारा किए जाने की आवश्यकता भी नहीं रह गई है। यदि कंप्यूटर (प्रोग्राम) इसे कर सकता है तो प्रचालक संरचनाओं का प्रारंभिक ज्ञान रखने वाला तकनीशियन हो सकता है। किंतु अंकीय अभियांत्रिकी का यह विस्तार "दोधारी तलवार" हो सकता है, क्योंकि कंप्यूटर साधनों के अकुशल उपयोग से भवन विफलताएँ हो सकती हैं जिनका दोष अभियंताओं पर लगाया जाएगा। यह रेखांकित करना महत्त्वपूर्ण है कि सॉफ़्टवेयर स्वयं दोषपूर्ण नहीं है; मुख्य समस्या इसके बजाय इस बात से संबंधित है कि इन साधनों का उपयोग कैसे और किसके द्वारा किया जाता है। नए साधनों के लिए कार्य करने की नई विधियाँ आवश्यक हैं, जिनके लिए क्रमशः गुणवत्ता आश्वासन की नई विधियाँ चाहिए। ... संभवतः अब तक की हमारी परियोजनाओं में से 95% तकनीशियनों अथवा स्वचालन का कार्य बन जाएँगी और वास्तव में असामान्य संरचनात्मक अभियांत्रिकीय कार्य, शेष 5%, संरचनात्मक अभियांत्रिकी की परिभाषा के रूप में बचेंगे। अन्य लोग, जिनमें यह लेखक सम्मिलित है, भविष्य को "संरचनात्मक वास्तुकार" के दृष्टिकोण से देखते हैं, जहाँ भविष्य का संरचनात्मक अभियंता वास्तुशिल्पीय रूप से अधिक समर्थ होगा और भविष्य का वास्तुकार संरचनात्मक रूप से अधिक प्रवृत्त होगा।
>
> (Llunji, 2022)

यह कठोर मूल्यांकन समकालीन व्यवहार की वास्तविकता से गहराई से मेल खाता है। नेर्वी, तोरोहा और ख़ान जैसे व्यक्तियों द्वारा उदाहरणित सृजनात्मक अनुशासन से संरचनात्मक अभियांत्रिकी का बड़े पैमाने पर नियमित संगणकीय कार्य में रूपांतरण व्यवसाय की पहचान में मौलिक परिवर्तन प्रस्तुत करता है। "पाँच प्रतिशत वर्ग" की संकल्पना एक असुविधाजनक सत्य समेटती है: सीमाओं को आगे बढ़ाने और नए प्रतिमान बनाने वाली वास्तविक संरचनात्मक सृजनशीलता मानकीकृत सॉफ़्टवेयर और जोखिम से बचने वाले व्यवहार से प्रभुत्वित विश्व में उत्तरोत्तर दुर्लभ होती जा रही है।

जहाँ तक लुंजी का कथन वास्तुशिल्पीय अभिकल्प प्रक्रिया में संरचनात्मक अभियंताओं के हाशियाकरण की पहचान करता है, मैं उससे पूर्णतः सहमत हूँ; इसमें वे समान स्तर के सृजनात्मक भागीदार होने के बजाय वास्तव में सहयोगी अथवा अधिकतर अधीनस्थ तकनीकी परामर्शदाता बन गए हैं। एफिल से कालात्रावा तक अतीत के महान अभियंता-निर्माता अपने व्यवसाय को संहिता-जाँच और भार-पथ सत्यापन तक सीमित देखकर निराश होते।

किंतु संरचनात्मक अभियंता भवनों और पुलों तक सीमित नहीं हैं तथा व्यवसाय का उद्धार संभवतः वास्तुकला से पूर्णतः असंबद्ध क्षेत्रों में ही निहित हो। अभियंताओं की उन संरचनाओं के परिष्कृत विश्लेषण के लिए अब भी अत्यंत आवश्यकता है जिन्हें वास्तुकार कभी स्पर्श नहीं करते: बाँध, अपतटीय मंच, नाभिकीय परिरक्षण, वांतरिक्ष संरचनाएँ, जैवचिकित्सीय युक्तियाँ और असंख्य औद्योगिक अनुप्रयोग। ये अनुशासन पारंपरिक भवन व्यवहार के लिए आवश्यक स्तर से कहीं अधिक संरचनात्मक अभियांत्रिकीय ज्ञान की माँग करते हैं—जिसमें अरैखिक व्यवहार, गतिक अनुक्रिया, प्रायिकतापरक विश्लेषण और

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संगणकीय क्षमता तथा अभियांत्रिकीय अंतर्बोध की सीमाओं को आगे बढ़ाने वाली विफलता क्रियाविधियाँ सम्मिलित हैं।

इन क्षेत्रों को ऐसे अभियंताओं की आवश्यकता है जो सच्चे अभिकल्पक बने रहें और उन अभूतपूर्व चुनौतियों से जूझें जिनके लिए नियमित भवन विश्लेषण से कहीं अधिक संगणकीय परिष्कृति तथा अभियांत्रिकीय निर्णय आवश्यक हैं। चाहे कंक्रीट चाप बाँध की भूकंपीय अनुक्रिया का विश्लेषण हो, तरंग भारण के अधीन अपतटीय मंच का शांति व्यवहार हो अथवा नाभिकीय रिएक्टर पात्र की परिरक्षण अखंडता—ये अभियंता संरचनात्मक ज्ञान की उन सीमाओं पर कार्य करते हैं जहाँ मानकीकृत सॉफ़्टवेयर समाधान अपर्याप्त होते हैं और सृजनात्मक समस्या-समाधान अनिवार्य बनता है। इन विशिष्ट क्षेत्रों में व्यवसाय अपने सर्वाधिक आवश्यक रूप में वास्तुकला अथवा संरचनात्मक व्यवहार की छाया से परे जीवित रहता और विकसित होता है[54]।

Llunji, 2022 का निराशाजनक मूल्यांकन फिर भी संरचनात्मक अभियंताओं के उस मूल्यवान 5% के लिए आशा प्रदान करता है जो सीमाओं को आगे बढ़ाते और अनुशासन के भविष्य को परिभाषित करते रहते हैं। विश्वभर में अनेक अभियंता इस विशिष्ट वर्ग के योग्य हो सकते हैं, किंतु मैं स्वयं को दो सर्वाधिक उल्लेखनीय समकालीन व्यक्तियों—एक पुल अभिकल्पक और एक गगनचुंबी भवन अभियंता—के परीक्षण तक सीमित रखूँगा, जिनका कार्य हमारे संगणकीय युग में संरचनात्मक सृजनशीलता की निरंतर प्रासंगिकता का उदाहरण है।

रोचक रूप से दोनों मामलों में “आदर्श” रूप की खोज सर्वोत्कृष्ट बनी रहती है—ऐसी खोज जो गहन अर्थ में हमें गैलीलियो-पूर्व युग में वापस ले जाती है, जब ज्यामितीय रूप संरचनात्मक अभिकल्प का सर्वाधिक चुनौतीपूर्ण पक्ष था। चिनाई निर्माण में सामर्थ्य विरले ही नियंत्रक चिंता थी; कला विशुद्ध ज्यामिति द्वारा स्थिरता और सौंदर्य प्राप्त करने में निहित थी। गैलीलियो द्वारा आकार, भार और सामग्री-सामर्थ्य के संबंध का विश्लेषण आरंभ किए जाने पर ही रूप और बल अभिन्न रूप से जुड़ गए। आज के सर्वाधिक सृजनात्मक संरचनात्मक अभियंताओं ने चक्र पूर्ण कर लिया है और संगणकीय शक्ति का उपयोग केवल पर्याप्तता जाँचने के लिए नहीं, बल्कि उन नए रूपों को खोजने के लिए कर रहे हैं जो बलों के प्रवाह को अभूतपूर्व सुरुचि और दक्षता से अभिव्यक्त करते हैं।

15.6.2.1 ऊँची इमारतें

इक्कीसवीं शताब्दी के आरंभ में विश्वभर के प्रमुख नगरों के बीच सबसे ऊँची इमारत के लिए पुनः प्रतिस्पर्धा हुई; शिकागो और न्यूयॉर्क इसका नेतृत्व कर रहे थे, जबकि दुबई जैसे नए दावेदार उभरे। ऊँचाई की इस दौड़ ने संरचनात्मक अभियंताओं को उस मूल्यवान “पाँच प्रतिशत” क्षेत्र में पहुँचा दिया

[54]लेखक न्यू हैम्पशायर के सीब्रुक नाभिकीय विद्युत केंद्र की सुरक्षा को चुनौती देने वाले नागरिक समूहों (C-10) को तकनीकी विशेषज्ञता प्रदान करते रहे हैं, जहाँ कालप्रभावित कंक्रीट परिरक्षण संरचनाएँ अभूतपूर्व अभियांत्रिकीय चुनौतियाँ प्रस्तुत करती हैं, (NRC-ML19312B609, 2019)। यह प्रकरण सृजनात्मक संरचनात्मक विश्लेषण की माँग करने वाले “पाँच प्रतिशत” कार्य का उदाहरण है: कोई वर्तमान अभिकल्प संहिता सम्मिलित जटिल क्षरण क्रियाविधियों को पर्याप्त रूप से संबोधित नहीं करती, मानक सॉफ़्टवेयर युग्मित तापीय-यांत्रिक-रासायनिक प्रक्रियाओं का प्रतिरूपण नहीं कर सकता और विश्लेषण के लिए कंक्रीट स्थायित्व, विभंग यांत्रिकी तथा प्रायिकतापरक मूल्यांकन में दशकों के शोध का संश्लेषण आवश्यक है। ऐसी समस्याएँ—जहाँ सार्वजनिक सुरक्षा दाँव पर हो और पारंपरिक अभियांत्रिकीय दृष्टिकोण अपर्याप्त सिद्ध हों—संरचनात्मक अभियांत्रिकी का वह आवश्यक केंद्र प्रस्तुत करती हैं जिसका स्थान कोई भी स्वचालन नहीं ले सकता।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ पारंपरिक अभिकल्प दृष्टिकोण अपर्याप्त सिद्ध हुए और सृजनात्मक समस्या-समाधान अनिवार्य बन गया।

निम्नलिखित अंश (Seabrook, 2001) पिछली शताब्दी में न्यूयॉर्क नगर के गगनचुंबी भवनों में प्रयुक्त संरचनात्मक तंत्रों का संक्षिप्त ऐतिहासिक अवलोकन प्रस्तुत करता है। व्यवहाररत संरचनात्मक अभियंताओं से निकटता से जुड़े विज्ञान पत्रकार के दृष्टिकोण से लिखा यह अंश भारवाही चिनाई और ढलवाँ-लौह निर्माण से आरंभ होकर आरंभिक इस्पात-ढाँचा गगनचुंबी भवनों से होते हुए आधुनिक ऊँची इमारतों को विशेषता देने वाले नलिकाकार तथा क्रोड-आधारित तंत्रों तक विकास का अनुसरण करता है। वर्णनात्मक महत्त्व से परे यह पाठ संरचनात्मक चिंतन में परिवर्तन को समेटता है: रूढ़िवादी, द्रव्यमान-प्रधान निर्माण से उन्नत विश्लेषणात्मक साधनों, सामग्रियों और निर्माण विधियों द्वारा सूचित अधिक परिष्कृत, भार-दक्ष तंत्रों की ओर।

पिछले एक सौ बीस वर्षों के दौरान न्यूयॉर्क नगर की ऊँची इमारतों में तीन प्रमुख प्रकार की संरचनाएँ प्रयुक्त हुई हैं। पहला प्रकार अठारह सौ अस्सी और नब्बे के दशकों की ढलवाँ-लौह इमारतों में प्रयुक्त हुआ, जिनमें "गुरुत्व भार"—इमारत का भार—मुख्यतः बाहरी दीवारों द्वारा वहन किया जाता था। इस प्रकार की संरचना कारखाने और भंडारगृह के ऐसे स्थान (और अब आवासीय लॉफ्ट) उत्पन्न करती है जो आंतरिक आलंबी स्तंभों से अपेक्षाकृत मुक्त होते हैं—अधिभोगियों के लिए अधिक उपयोगी अचल संपत्ति—किंतु लकड़ी के फर्श धरनों और अधिक उदार भवन संहिताओं के साथ मिलकर यह इमारतों को पतन के प्रति सुभेद्य भी बनाती है। अग्नि में फर्श पतित होते हैं और लौह ढाँचा सामर्थ्य खोकर भीतर की ओर ढह जाता है। मेट्रोपॉलिटन लाइफ बिल्डिंग (1909), वूलवर्थ बिल्डिंग (1913) और एम्पायर स्टेट बिल्डिंग (1931) को सम्मिलित करने वाली ऊँची इमारतों की दूसरी पीढ़ी ढाँचा संरचनाएँ हैं, जिनमें प्रायः कंक्रीट में आवृत वेल्डित अथवा रिवेटित इस्पात स्तंभों और धरनों का कंकाल संपूर्ण इमारत में फैला होता है। यह निर्माण अत्यंत दृढ़ संरचना बनाता है, किंतु फर्श-स्थान उतना आकर्षक नहीं होता। आंतरिक भाग भारी भारवाही स्तंभों और दीवारों से भरे होते हैं तथा इन इमारतों के केंद्र की ओर बढ़ने पर वे अधिक समाधि-सदृश लगते हैं। आधुनिक ऊँची इमारतों की संरचनाओं के प्रमुख अभिकल्पक, मैनहट्टन स्थित संरचनात्मक अभियांत्रिकी कार्यालय थॉर्नटन-टोमासेटी इंजीनियर्स के चार्ली थॉर्नटन ने हाल में मुझसे कहा, "एम्पायर स्टेट बिल्डिंग जैसी इमारत अत्यधिक अभिकल्पित और निर्मित है। इमारत को इतने आलंब की आवश्यकता नहीं थी। वे अभियंता भारों को हमारी तरह नहीं समझते थे—वे उनकी गणना स्लाइड रूल से करते थे, जबकि हमारे पास कंप्यूटर हैं—इसलिए उन्होंने सावधानी की ओर त्रुटि की। उन्नीस सौ साठ के दशक के बाद निर्मित अधिकांश ऊँची इमारतें तीसरे प्रकार की संरचना—पिछली दोनों संरचनाओं के सर्वोत्तम पक्षों के संश्लेषण—का उपयोग करती हैं। इन इमारतों की परिधीय संरचनाएँ नलिकाओं जैसी होती हैं। भीतर इस्पात और/अथवा कंक्रीट का विशाल खोखला क्रोड अनेक सेवाएँ समेटता है: उद्वाहक, सीढ़ी-कूप और प्रसाधन-कक्ष। क्रोड और परिधीय स्तंभ इतना अधिक भार वहन करते हैं कि अभिकल्पक आंतरिक स्तंभ हटा सके, जिसके फलस्वरूप अधिभोगियों के लिए अधिक खुला फर्श-स्थान उपलब्ध हुआ। और क्योंकि ढाँचा संरचनाओं में लौह कर्मियों को स्थल पर धरनों को आलंबी स्तंभों से वेल्ड अथवा रिवेट करना पड़ता है, जो महँगा और संकटपूर्ण दोनों है, इसलिए ढाँचे का विस्तार घटाने का अर्थ है कि संरचना के अधिक भाग का निर्माण स्थल से बाहर किया जा सकता है, जिससे इमारत का निर्माण अधिक सुरक्षित और लागत-प्रभावी बनता है। अंततः धातुकर्म में सुधार ने इन इमारतों के संरचनात्मक इस्पात का सामर्थ्य बढ़ाया और अभियंताओं को संरचना के आलंब में कंक्रीट का उपयोग घटाने अथवा समाप्त करने दिया। प्रबलित कंक्रीट इस्पात से अधिक अग्नि-प्रतिरोधी होने पर भी कार्य में अव्यवस्थित और महँगा है, विशेषतः मैनहट्टन में, जहाँ यातायात और स्थल की सीमाएँ बड़े कार्य के लिए आवश्यक सीमेंट मिश्रकों के दैनिक बेड़े को लाना कठिन बनाती हैं। साठ के दशक के बाद निर्मित अधिकांश ऊँची इमारतों के फर्श पुरानी इमारतों के फर्शों से भार में कहीं हल्के हैं। सामान्य ऊँची कार्यालयी इमारत के फर्श में तीन अथवा चार इंच कंक्रीट नालीदार-इस्पात डेक को ढकता है, जिसका भार I-धरनों अथवा ट्रिवन टावर्स के मामले में लंबी "कैंचियों"—वर्गाकार अथवा बेलनाकार छड़ों के आड़े-जाल से दृढ़ की गई इस्पात की हल्की पट्टियों—द्वारा वहन किया जाता है, जो प्रत्येक फर्श-पृष्ठ के नीचे खोखला स्थान बनाती हैं। यह स्थान निर्माताओं को तापन और शीतलन नलिकाएँ उनके नीचे झूठी छत के बजाय फर्शों के भीतर लगाने देता है—ऐसा नवोन्मेष जिससे विकासकर्ता संपूर्ण इमारत में तलों की संख्या बढ़ा सकता है।

प्रारूप

(Seabrook, 2001)

15.6.2.1.1 लेस्ली रॉबर्टसन (1928–2021) ट्विन टावर्स (वर्ल्ड ट्रेड सेंटर) के अभिलेखित संरचनात्मक अभियंता लेस्ली अर्ल रॉबर्टसन उस अपारंपरिक मार्ग के मूर्तरूप थे जो प्रायः “पाँच प्रतिशत” को विशेषता देता है। उनकी असामान्य पृष्ठभूमि—सोलह वर्ष की आयु में उच्च विद्यालय छोड़ना, नौसेना में इलेक्ट्रॉनिकी तकनीशियन के रूप में सेवा करना, फिर विद्युत से संरचनात्मक अभियांत्रिकी की ओर आने से पहले UC बर्कली से विज्ञान उपाधि प्राप्त करना—प्रदर्शित करती है कि सृजनात्मक अभियांत्रिकीय प्रतिभा अप्रत्याशित स्थानों से उभरती है।

जब 1958 में सिएटल में रॉबर्टसन के पास धन समाप्त हो गया और उन्होंने तब वरिष्ठ गटन-स्किलिंग कहलाने वाले संरचनात्मक अभियांत्रिकी कार्यालय में नौकरी ली, तब उन्होंने एक ऐसी स्व-शिक्षा प्रक्रिया आरंभ की जो प्रसिद्ध होने वाली थी। रात्रि और सप्ताहांत में कार्य करते हुए उन्होंने ढाल-विक्षेप तथा हार्डी क्रॉस विधि जैसी मूलभूत संकल्पनाएँ स्वयं सीखीं और वह गहन संरचनात्मक अंतर्बोध विकसित किया जो कोई कंप्यूटर प्रोग्राम प्रदान नहीं कर सकता।[55]

पाँच वर्ष बाद कार्यालय ने अब तक निर्मित होने वाली सबसे ऊँची इमारतें—वर्ल्ड ट्रेड सेंटर की दो मीनारें—बनाने की प्रतियोगिता में प्रवेश किया। सिएटल की बीस-मंजिला IBM बिल्डिंग से ऊँची किसी इमारत का अभिकल्प न करने के बावजूद कार्यालय को एक महत्त्वपूर्ण लाभ था: उस परियोजना के लिए उन्हें चुनने वाले वास्तुकार मिनोरू यामासाकी वर्ल्ड ट्रेड सेंटर के भी वास्तुकार थे।

निर्णायक प्रस्तुति बैठक में जॉन स्किलिंग ने केवल आरेखण-पट्ट, चित्रफलक और संकेतकों का उपयोग करके अपना प्रस्ताव प्रस्तुत किया—न कोई PowerPoint प्रस्तुति, न विस्तृत कंप्यूटर सजीवन।[56] सरलता में गहराई थी: ऊँचाई के भय से पीड़ित यामासाकी इमारत की परिधि के चारों ओर संरचनात्मक तत्त्व चाहते थे ताकि अधिक ऊँचाई पर अधिभोगी सुरक्षित अनुभव करें। स्किलिंग का समाधान एक शुद्ध नलिका संरचना था, जिसने ख़ान की नलिकाकार संकल्पना को पहले कभी आजमाई गई सीमा से आगे बढ़ाया।

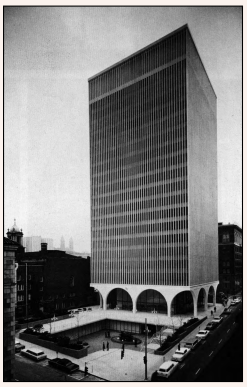
पैंतीस वर्ष की आयु में रॉबर्टसन विश्व की सबसे ऊँची बनने वाली इमारतों के निर्माण का पर्यवेक्षण करने न्यूयॉर्क चले गए। अभियांत्रिकीय चुनौतियों ने उन्हें अज्ञात क्षेत्र में पहुँचा दिया: क्षैतिज गति के लिए मानवीय बोध-सीमाएँ निर्धारित करना (Chen and Robertson, 1972), पवन-प्रेरित दोलनों को नियंत्रित करने के लिए शयानप्रत्यास्थ अवमंदक विकसित करना (Mahmoodi et al., 1987), और ऐसे संरचनात्मक तंत्र बनाना जिनका इतने बड़े पैमाने पर कभी परीक्षण नहीं हुआ था।

11 सितंबर, 2001 की दुःखद घटनाओं ने रॉबर्टसन के अभिकल्प को चरम अनभिप्रेत परीक्षण के अधीन किया। Eagar and Musso, 2001 और Bažant and Zhou, 2002 के मूलभूत शोधपत्रों में विस्तृत मीनारों के पतन के संरचनात्मक विश्लेषण ने प्रकट किया कि यद्यपि इमारतें आरंभ में विमान आघातों से बच गईं, परिणामी अग्नि से 800°C से अधिक निरंतर तापमान ने अंततः इस्पात के पराभव सामर्थ्य को

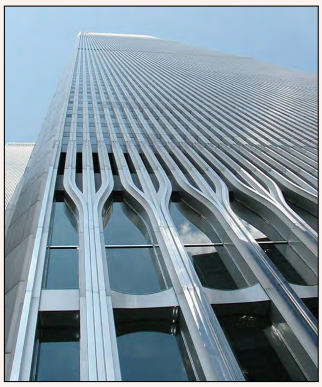
[55] वास्तव में उत्तरोत्तर जटिल संरचनाओं के लिए ऐसी हस्त-गणनाएँ करने पर संरचनात्मक व्यवहार की ऐसी समझ विकसित होती है जो बार-बार कंप्यूटर अनुकरण करने से प्राप्त नहीं हो सकती। यह उन चाप बाँध अभिकल्पकों के सदृश है जिन्होंने केवल कंप्यूटर प्रतिरूपों पर निर्भर रहने वालों की तुलना में *परीक्षण भार विधि* का उपयोग किया। लेखक ने नाभिकीय सुरक्षा मूल्यांकनों में ऐसी मूलभूत समझ की ओर लौटने का समर्थन किया है, जहाँ संगणकीय प्रतिरूपों को प्रथम-सिद्धांत विश्लेषण द्वारा विकसित अभियांत्रिकीय निर्णय से सत्यापित किया जाना चाहिए।

[56] आज की प्रौद्योगिकी-निर्भर प्रस्तुतियों से ताज़गीभरा विरोधाभास!

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) सिएटल की IBM बिल्डिंग



(b) वर्ल्ड ट्रेड सेंटर के "त्रिशूल"



(c) शंघाई वर्ल्ड फाइनेंशियल सेंटर

चित्र 15.45: यामासाकी और रॉबर्टसन: सिएटल के आदिरूप से वैश्विक प्रभाव तक

क्षीण किया और क्रमिक पतन हुआ। यह विधिवैज्ञानिक विश्लेषण स्वयं "पाँच प्रतिशत" अभियांत्रिकी का उदाहरण था: ऐसी विफलता क्रियाविधियों को समझना जिनका किसी संहिता ने पूर्वानुमान नहीं किया था और जिनकी कोई मानक विश्लेषण भविष्यवाणी नहीं कर सकता था।

रॉबर्टसन के बाद के कार्यजीवन में शंघाई वर्ल्ड फाइनेंशियल सेंटर और हांगकांग का बैंक ऑफ चाइना टावर जैसी अन्य प्रतिष्ठित अति-ऊँची संरचनाएँ सम्मिलित थीं; प्रत्येक ने पारंपरिक व्यवहार से परे सृजनात्मक समाधानों की माँग करने वाली अद्वितीय चुनौतियाँ प्रस्तुत कीं। उनका संस्मरण (Robertson, 2017) पहले कभी न सुलझाई गई समस्याओं के समाधान में व्यतीत कार्यजीवन का वृत्तांत प्रस्तुत करता है।

प्रकट संरचना: महामारी के पदभ्रमण COVID-19 महामारी ने, जिसने 2020 में विश्व के महान नगरों की सड़कों को रिक्त कर दिया था, वास्तुकला और अभियांत्रिकी के संबंध को अप्रत्याशित रूप से नई रीति से प्रकाशित किया। *The New York Times* के वास्तुकला समीक्षक माइकल किमेलमैन ने लॉकडाउन के दौरान वास्तुकारों, इतिहासकारों और—इस अध्याय के लिए विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण—संरचनात्मक अभियंताओं के साथ न्यूयॉर्क नगर के आभासी पदभ्रमणों की शृंखला आरंभ की। किमेलमैन ने लिखा, "वर्षों से न्यूयॉर्क के क्षितिज—पिछली अमेरिकी शताब्दी की परिचायक छवि—को नगरीय आकाश पर अंकित करने वाले केवल वास्तुकार नहीं रहे हैं। अन्य लोगों के साथ संरचनात्मक अभियंताओं—प्रायः ऊँची कल्पना और महत्त्व के व्यावहारिक कवियों—ने भी उन ऊँचाइयों तक पहुँचने का उपाय खोजा है।" "व्यावहारिक कवि" पद विट्रुवियसी आदर्श को ठीक-ठीक समेटता है: ऐसे अभियंता जो आरोपित अलंकरण से नहीं, बल्कि *firmitas* की वाक्पटु अभिव्यक्ति द्वारा *venustas* प्राप्त करते हैं।

मिडटाउन मैनहट्टन के गगनचुंबी भवनों के एक उल्लेखनीय भ्रमण में किमेलमैन ने उसी मार्ग पर दो बार पदभ्रमण किया: पहले वास्तुकार ऐनाबेल सेल्डॉर्फ के साथ, फिर प्रिंसटन विश्वविद्यालय के संरचनात्मक अभियंता गाय नॉर्डेंसन के साथ। समान भवनों—सीग्राम बिल्डिंग, ब्लैक रॉक (CBS बिल्डिंग), AT&T बिल्डिंग और 432 पार्क एवेन्यू—को देखते हुए दोनों व्यवसायियों ने इन युगांतरकारी स्थलों की परस्पर पूरक किंतु भिन्न व्याख्याएँ प्रस्तुत कीं। जहाँ सेल्डॉर्फ ने स्थानिक अनुभव और वास्तुशिल्पीय अभिप्राय पर बल दिया, वहीं नॉर्डेंसन ने भीतर छिपी संरचनात्मक प्रतिभा प्रकट की: सीग्राम बिल्डिंग में पार्श्वबंधित

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और आघूर्ण ढाँचों का नवोन्मेषी संयोजन, पेंसिल जैसी तनु 432 पार्क एवेन्यू के भीतर विशाल लोलक अवमंदक जो पवन-प्रेरित दोलनों को मृदु करते हैं, और समकालीन अति-ऊँची इमारतों को संभव बनाने वाली "संरचनात्मक अभियांत्रिकी की उपलब्धियाँ"। सीग्राम बिल्डिंग के विषय में नॉर्डेसन ने कहा: "मेरे लिए सीग्राम न्यूयॉर्क की सर्वाधिक उल्लेखनीय ऊँची इमारत है। यह उन सृजनात्मक प्रतिभाओं के संबंधों का मूर्तरूप है जिन्हें वास्तुशिल्पीय रूप से उल्लेखनीय कृति संभव करने के लिए एकत्र होना चाहिए।" यह सहयोगी भावना—वास्तुकार, अभियंता और संरक्षक का सामंजस्य में कार्य करना—पुनर्जागरणकालीन *progettisti* के एकीकृत व्यवहार की अनुगूँज देती है और विट्रुवियस के इस आग्रह का स्मरण कराती है कि उत्कृष्टता प्राप्त करने के लिए वास्तुकार (जो उनके समय में निर्माता और अभियंता का पर्याय था) को अनेक अनुशासनों पर अधिकार प्राप्त होना चाहिए।

इन समानांतर भ्रमणों ने लघु रूप में वास्तुकारों और अभियंताओं द्वारा निर्मित पर्यावरण को देखने की पूरक किंतु भिन्न विधियाँ—और किसी एक दृष्टिकोण के अनुपस्थित होने से उत्पन्न निर्धनता—प्रदर्शित कीं। संरचनात्मक अभियंता वह देखता है जिसे विट्रुवियस ने *firmitas* कहा: स्तंभों और क्रोडों से बलों का प्रवाह, तनाव और संपीडन का नृत्य जो मीनार को पवन और गुरुत्व के विरुद्ध खड़ा रखता है। वास्तुकार *utilitas* और *venustas* पर ध्यान देता है: स्थान किस प्रकार मानवीय प्रयोजनों की पूर्ति करते और रूप नेत्रों को प्रसन्न करते हैं। जब ये दृष्टिकोण अभिसरित होते हैं—जैसा नेर्वी, तोरोहा और ख़ान की महान कृतियों में हुआ—तो परिणामी संरचनात्मक वास्तुकला संपूर्ण विट्रुवियसी त्रिक को संतुष्ट करती है। किमेलमैन ने बाद में इन भ्रमणों को *The Intimate City: Walking New York* (2022) में संगृहीत किया; इस पुस्तक ने नगरीय जीवन निर्मित करने वाले "इतिहास, योजनाओं, विधियों, संरचनात्मक अभियांत्रिकी की उपलब्धियों, वास्तुशिल्पीय विशेषताओं और दैनिक वास्तविकताओं" को खोला (Kimmelman, 2020 📄)। संरचनात्मक अभियंता के लिए ये भ्रमण सार्वजनिक सहभागिता का ऐसा प्रतिरूप प्रस्तुत करते हैं जो निर्मित पर्यावरण में अनुशासन के आवश्यक योगदान को छिपाने के बजाय प्रकट करता है—और दर्शाता है कि समुचित रूप से अभिव्यक्त *firmitas* स्वयं *venustas* का स्रोत बन सकता है।

जिन समकालीन अभियंताओं के कार्य पर नॉर्डेसन ने अपने भ्रमण के दौरान प्रकाश डाला, उनमें स्किडमोर, ओविंग्स & मेरिल के विलियम बेकर थे—वही कार्यालय जिसने मार्ग में आए अनेक मिडटाउन युगांतरकारी स्थल अभिकल्पित किए थे। बेकर की उपलब्धियाँ संभवतः इस बात का सबसे स्पष्ट उदाहरण प्रस्तुत करती हैं कि संगणकीय परिष्कृति को गहन संरचनात्मक अंतर्बोध से जोड़े जाने पर "पाँच प्रतिशत" क्या प्राप्त कर सकता है।

15.6.2.1.2 विलियम बेकर (1953–) यदि सर्वाधिक प्रमुख और सृजनात्मक समकालीन संरचनात्मक अभियंता—ऐसा व्यक्ति जिसने फ़ज़लुर ख़ान के युगांतरकारी सिद्धांतों से आगे बढ़ते हुए आधुनिक संगणकीय साधनों पर अधिकार प्राप्त किया हो—की पहचान करनी हो तो वह शिकागो के प्रसिद्ध स्किडमोर, ओविंग्स & मेरिल के भागीदार विलियम फ्रेज़ियर बेकर होंगे। बेकर "पाँच प्रतिशत" के विकास का प्रतिनिधित्व करते हैं: ऐसा अभियंता जो संगणकीय शक्ति का उपयोग सृजनशीलता के स्थानापन्न के रूप में नहीं, बल्कि पहले असंभव संरचनात्मक अभिव्यक्ति प्राप्त करने के साधन के रूप में करता है।

दुबई में बेकर के 828-मीटर बुर्ज खलीफा जैसे अति-ऊँचे गगनचुंबी भवनों का अभिकल्प इस नए प्रतिमान का उदाहरण है। यद्यपि ऊर्ध्वाधर भारों को अति-उच्च-सामर्थ्य कंक्रीट से सँभाला जा सकता है, नियंत्रक चुनौती पार्श्व बलों—पवन और भूकंपीय प्रभावों—में निहित है, जो मानक व्यवहार से कहीं परे परिष्कृत विश्लेषण की आवश्यकता वाला जटिल त्रिविम गतिक व्यवहार उत्पन्न करते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

वास्तुकार एड्रियन स्मिथ द्वारा अभिकल्पित और बेकर द्वारा अभियंत्रित (दोनों SOM में) बुर्ज खलीफा परियोजना वास्तुशिल्पीय दृष्टि और अभियांत्रिकीय वास्तविकता के बीच निरंतर तनाव स्पष्ट करती है। वास्तुकार सार्वजनिक प्रकाश में रह सकता है, किंतु संरचनात्मक संकल्पना—पुश्ता-समर्थित क्रोड तंत्र, पवन-अनुक्रियाशील ज्यामिति और जटिल आंतरिक कंकाल—विशुद्ध "पाँच प्रतिशत" अभियांत्रिकीय सृजनशीलता प्रस्तुत करती है।

(Baker, Skidmore, et al., 2013) में प्रलेखित बेकर के सैद्धांतिक योगदान ख़ान की विरासत को संगणकीय युग तक विस्तृत करते हैं:

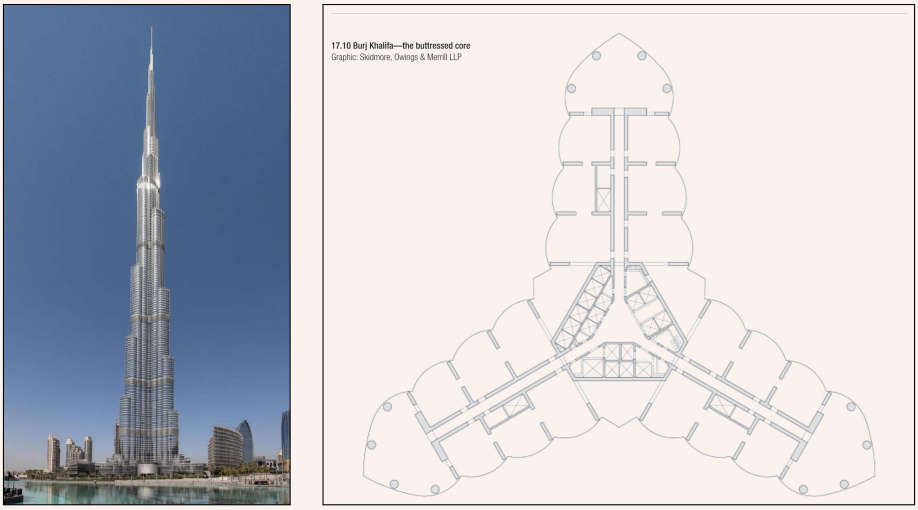
> ऊँची इमारत में संभवतः सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण संरचनात्मक प्राचल इमारत का वास्तुशिल्पीय द्रव्यमान-विन्यास अथवा आकार है। वह मीनार की जटिलता को परिभाषित करने के साथ सामान्यतः इमारत पर पवन बलों को भी महत्त्वपूर्ण रूप से प्रभावित करता है। ऊँची इमारतों के अभिकल्प में पवन प्रमुख संरचनात्मक विचार है। ऊँची इमारत के चारों ओर पवन का प्रवाह प्रायः अस्थिर होता है। पवन के पार जाने पर प्रवाह मीनार की पार्श्व सतह से पृथक होता है और भँवरों की शृंखला उत्पन्न करता है, जो इमारत के आर-पार दाबांतर उत्पन्न करती है। यद्यपि मीनार पर पवन के कर्षण प्रभाव महत्त्वपूर्ण हैं, ये बल सामान्यतः नियंत्रक चिंता नहीं होते। भँवर-विमोचन से उत्पन्न अनुपवन बल ही, मीनार के प्राकृतिक संनादों के संयोजन में, पवन की दिशा के लंबवत अत्यंत बड़े बल उत्पन्न कर सकते हैं। सामान्यतः घटित पवन घटनाओं की गति और भवन-चौड़ाई की सामान्य परास के कारण कुछ ऐसी पवन घटनाएँ होंगी जिनमें भँवर-विमोचन मीनार के प्राकृतिक संनादों से मेल खाता है।
>
> (Baker, Skidmore, et al., 2013)

बेकर की विरासत केवल उनके अभिकल्पित भवनों में नहीं, बल्कि यह प्रमाणित करने में निहित है कि हमारे स्वचालित युग में भी अभियांत्रिकीय अंतर्दृष्टि और सृजनात्मक दृष्टि का संयोग अपरिहार्य है। उनकी नवीन पुस्तक (Baker and McRobie, 2025) *Geometry and Equilibrium: 21st Century Structural Mechanics* इस दर्शन को संहिताबद्ध करती है और प्रदर्शित करती है कि ज्यामिति तथा संतुलन के मूलभूत सिद्धांत अभियंताओं को उन नवोन्मेषी समाधानों की ओर कैसे निर्देशित कर सकते हैं जिन्हें केवल संगणकीय विश्लेषण नहीं खोज सकता।

व्यक्तिगत परियोजनाओं से परे SOM में बेकर के दल ने संरचनात्मक सांस्थिति इष्टतमीकरण का अभिकल्प साधन के रूप में मार्ग प्रशस्त किया है, जिससे अभियांत्रिकीय दक्षता और वास्तुशिल्पीय अभिव्यक्ति के बीच अंतराल पाटा गया। (Beghini et al., 2014) में विस्तृत उनका दृष्टिकोण एक नया प्रतिमान प्रस्तुत करता है:

> आज के विश्व में निर्माण उद्योग के सम्मुख प्रचलित समस्याओं में से एक अभियांत्रिकी और वास्तुकला के बीच संतुलन है: परंपरागत रूप से वास्तुकार का लक्ष्य संरचना के सौंदर्यशास्त्र अथवा "रूप" पर अधिक केंद्रित रहा है, जबकि अभियंता का लक्ष्य स्थिरता और दक्षता अथवा उसके "प्रकार्य" पर केंद्रित रहा है। इस कार्य में हम इन अनुशासनों के बीच निकट सहयोग के महत्त्व पर विचार करते हैं और अनुकूलित संरचनात्मक सांस्थिति इष्टतमीकरण ढाँचे के माध्यम से नए, एकीकृत अभिकल्प विचार उत्पन्न करने का वैकल्पिक दृष्टिकोण प्रस्तुत करते हैं, जो वास्तुशिल्पीय और संरचनात्मक अभियांत्रिकीय समुदायों दोनों के लिए संभावित रूप से लाभकारी हो सकता है।
>
> (Beghini et al., 2014)

§15.5.4.3 में संदर्भित और सचित्र यह कार्य दर्शाता है कि "पाँच प्रतिशत" संगणकीय साधनों का उपयोग सृजनशीलता को प्रतिस्थापित करने के लिए नहीं, बल्कि संरचनात्मक तर्क को अभूतपूर्व



चित्र 15.46: बेकर और बुर्ज खलीफा: वास्तुशिल्पीय महत्त्वाकांक्षा की सेवा में संगणकीय परिष्कृति (Baker, Skidmore, et al., 2013 PDF)

स्पष्टता और सुरुचि से अभिव्यक्त करने वाले नए रूप खोजने के लिए करते हैं। बेकर की विरासत केवल उनके अभिकल्पित भवनों में नहीं, बल्कि यह प्रमाणित करने में निहित है कि हमारे स्वचालित युग में भी अभियांत्रिकीय अंतर्दृष्टि और सृजनात्मक दृष्टि का संयोग अपरिहार्य है।

15.6.2.2 पुल: मिशेल विर्लोज़ो (1946–)

मिशेल विर्लोज़ो फ्रांसीसी अभियांत्रिकीय उत्कृष्टता के मूर्तरूप और देश की विशिष्ट शिक्षा-व्यवस्था—एकोल पॉलिटेक्निक तथा एकोल नेशनल दे पों ए शोसे—की उपज हैं, जिसे संरचनात्मक अभियांत्रिकी में शोधो-पाधि ने पूर्ण किया। SETRA (सड़कों और राजमार्गों के तकनीकी अध्ययन के लिए उत्तरदायी सरकारी अभिकरण) में अपनी प्रतिष्ठा स्थापित करने के बाद वे स्वतंत्र परामर्श में आए, जहाँ उनकी सृजनात्मक दृष्टि प्रशासकीय बाधाओं के बिना विकसित हो सकती थी।

विर्लोज़ो 100 से अधिक पुलों के अभिकल्प द्वारा “पाँच प्रतिशत” का उदाहरण प्रस्तुत करते हैं; इनमें सबसे उल्लेखनीय नॉर्मंडी पुल और मियो वायाडक्ट (चित्र 15.47) हैं। उनके केबल-आलंबित पुल आरोपित सजावट से नहीं, बल्कि अभिकल्प को उसके संरचनात्मक सार तक घटाकर सौंदर्यपरक उत्कृष्टता प्राप्त करते हैं—यह दर्शन अतीत के महान अभियंता-कलाकारों की अनुगूँज देता है। किंतु इन संरचनाओं की प्रकट सरलता असाधारण विश्लेषणात्मक जटिलता को छिपाती है: बड़े केबल विरूपणों से उत्पन्न ज्यामितीय अरैखिकताएँ, गतिक पवन अंतःक्रियाएँ और जटिल भार-पुनर्वितरण क्रियाविधियाँ, जो मानक व्यवहार से कहीं परे परिष्कृत संगणकीय विश्लेषण की माँग करती हैं।

बहु-विस्तृति केबल-आलंबित पुलों की अभिकल्प जटिलता विर्लोज़ो के अपने तकनीकी मूल्यांकन से स्पष्ट होती है:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

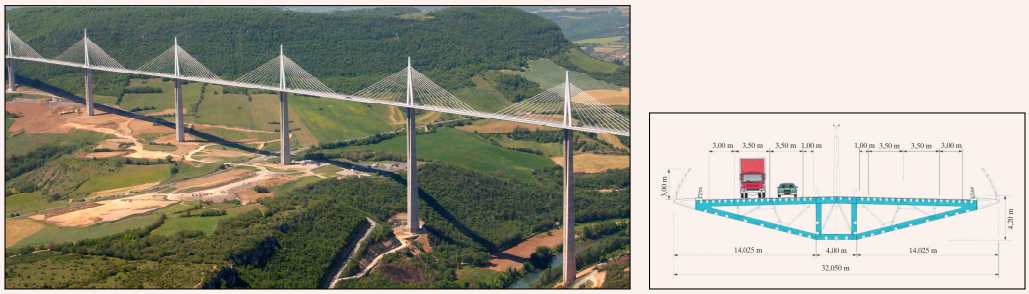
सर्वोत्तम और सर्वाधिक सुरुचिपूर्ण समाधान यह है कि असममित चल भारों से उत्पन्न बंकन प्रभावों को संतुलित करने और विक्षेपों को सीमित करने के लिए विभिन्न संरचनात्मक अवयवों (डेक, स्तंभों और तोरणों) में दृढता वितरित की जाए। एक चरम से दूसरे तक अनेक समाधानों की तुलना की जा सकती है:

- चल भारों से प्रेरित बंकन आघूर्णों का प्रतिरोध करने के लिए पर्याप्त उच्च दृढता वाला डेक। यह समाधान केवल लघु और मध्यम विस्तृति के केबल-आलंबित पुलों पर लागू होता है।
- उच्च बंकन दृढता वाले तोरण, उदाहरणतः अनुदैर्घ्य दिशा में उलटे V के आकार वाले, जिनमें डेक स्तर पर घूर्णन सीमित करने के लिए बंकन बलों को नीचे के स्तंभों में स्थानांतरित किया जाए। इन दशाओं में अत्यंत तनु और लचीला डेक संभव है।
- सभी संरचनात्मक अवयवों—डेक और मीनारों—में दृढता वितरित करना।

जैसा ऊपर कहा गया है, संरचनात्मक अभिकल्प को विस्तृतियाँ बंद किए जाने के बाद उनमें सातत्य पूर्वप्रतिबलन कंडरों की स्थापना, विस्तृतियों को बंद करने के बाद विकसित होने वाले कंक्रीट विसर्पण और संकुचन तथा तापमान परिवर्तन से डेक में उत्पन्न लंबाई परिवर्तनों की अनुमति देनी चाहिए। अतः सभी व्यावहारिक समाधानों का एक-एक करके विश्लेषण किया जाएगा।

(Virlogeux, 2001 PDF)

2004 में पूर्ण मियो वायाडक्ट संभवतः अब तक निर्मित सर्वाधिक सुरुचिपूर्ण केबल-आलंबित पुल है: छह 342-मीटर विस्तृतियों और 240 मीटर की दो अंत्य विस्तृतियों वाली सममित संरचना, जो तार्न घाटी से 245 मीटर ऊपर उठती है। परियोजना ने संगणकीय प्रतिरूपण, निर्माण विधि और सामग्री विज्ञान में ऐसे नवोन्मेषों की माँग की जिन्होंने संभव मानी जाने वाली सीमाओं को आगे बढ़ाया। विस्तृत तकनीकी विवरण (Virlogeux et al., 2005 PDF) में मिल सकते हैं, जबकि (Bergsjö and Pettersson, 2016 PDF) केबल-आलंबित पुल विश्लेषण के विद्यार्थियों के लिए आवश्यक पाठ्य प्रस्तुत करता है और (Virlogeux, 2001 PDF) में विर्लोज़ो के अधिक सुगम विवेचन का पूरक है।

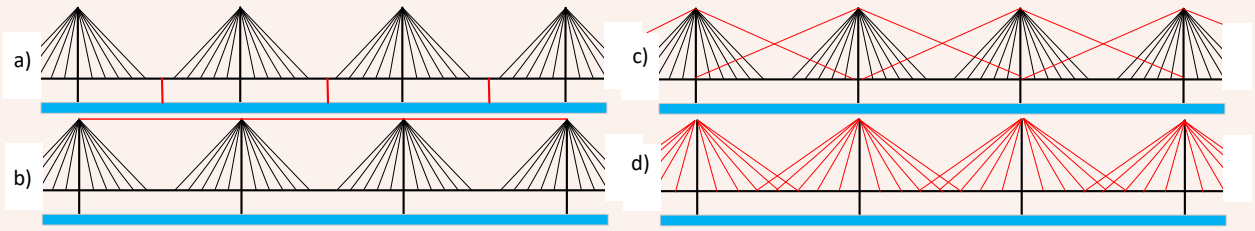


चित्र 15.47: विर्लोज़ो और मियो वायाडक्ट: अभूतपूर्व पैमाने पर संरचनात्मक काव्यात्मकता (Virlogeux et al., 2005 PDF)

अभिकल्प के प्रति विर्लोज़ो का दृष्टिकोण उस परिष्कृत निर्णय को प्रकट करता है जो “पाँच प्रतिशत” को नियमित व्यवसायियों से अलग करता है। संरचनात्मक दक्षता और सौंदर्यपरक उत्कृष्टता—विट्रुवियस तक पहुँचने वाले तनाव—के बीच सूक्ष्म संतुलन के प्रति अत्यंत सचेत होकर उन्होंने मियो परियोजना में इस दुविधा का प्रत्यक्ष सामना किया। चित्र 15.48 बहु-विस्तृति केबल-आलंबित पुलों को दृढ करने के लिए चार संरचनात्मक रूप से पर्याप्त समाधान दिखाता है; प्रत्येक सामग्री की मितव्ययिता और निर्माण जटिलता के बीच भिन्न संतुलन प्रस्तुत करता है। फिर भी विर्लोज़ो ने चारों विकल्पों को सौंदर्यपरक रूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

से अस्वीकार्य माना और इसके बजाय पूर्ण वायाडक्ट में दिखाई देने वाला अधिक सुरुचिपूर्ण समाधान चुना। इस निर्णय के लिए अतिरिक्त डेक-दृढता और अधिक परिष्कृत विश्लेषण आवश्यक था, जिसने प्रमाणित किया कि कभी-कभी दक्षता और मितव्ययिता को संरचनात्मक सौंदर्य की खोज के सम्मुख, भले ही क्षण भर के लिए, स्थान देना चाहिए।



चित्र 15.48: बहु-विस्तृति केबल-आलंबित पुलों के वैकल्पिक संरचनात्मक तंत्र, जिन्हें विर्लोज़ो ने सौंदर्यपरक कारणों से अस्वीकार किया (Virlogeux et al., 2005 PDF)

शुद्ध इष्टतमीकरण के ऊपर सौंदर्य चुनने की यह तत्परता विर्लोज़ो को उस 95% से अलग करती है जो स्वतः सर्वाधिक मितव्ययी समाधान चुन सकता है। मायार के विपरीत, जिनकी प्रतिभा संरचना, मितव्ययिता और सौंदर्य का एक साथ इष्टतमीकरण प्राप्त करने में थी, विर्लोज़ो ने माना कि कुछ संदर्भों में—विशेषतः प्रमुख अवसंरचना युगांतरकारी स्थलों के पैमाने पर—सौंदर्यपरक उत्कृष्टता की खोज अतिरिक्त संरचनात्मक परिष्कृति को उचित ठहराती है। उनके पुल केवल अभियांत्रिकीय क्षमता के ही नहीं, बल्कि उत्तरोत्तर स्वचालित व्यवसाय में सौंदर्यपरक निर्णय की निरंतर प्रासंगिकता के भी स्मारक हैं। वे प्रमाणित करते हैं कि हमारे संगणकीय युग में भी तकनीकी निपुणता को कलात्मक दृष्टि से संयोजित करने वाला “पाँच प्रतिशत” ऐसी अवसंरचना के निर्माण के लिए अपरिहार्य है जो भूदृश्य और मानवीय भावना दोनों को उन्नत करती है।

15.7 विट्रुवियस पर पुनर्विचार

विट्रुवियस का ग्रंथ (1st century BCE) पुनर्जागरण के दौरान पुनः खोजा गया और संरचनात्मक आवश्यकताओं के उनके सिद्धांतों की वास्तुकार-अभियंताओं की क्रमिक पीढ़ियों ने पुष्टि तथा परिष्कृति की। उन मूलभूत सिद्धांतों को उल्लेखनीय चुनौती तब तक नहीं मिली जब तक Billington, 1983b ने *structural art* पद गढ़कर उसे अपने प्रसिद्ध पूर्ववर्तियों—विट्रुवियस, अल्बेर्ती और पल्लादियो—की असाधारण स्मृति दिलाने वाली रीति से परिभाषित नहीं किया।

यह खंड संरचनात्मक कला की संकल्पना को ही चुनौती देगा और उसका विखंडन करने का प्रयास करेगा—महान अभियंता-निर्माताओं की उपलब्धियाँ घटाने के लिए नहीं, बल्कि उस संकल्पनात्मक ढाँचे को स्पष्ट करने के लिए जिसके माध्यम से हम उनके कार्य को समझते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15.7.1 संरचनात्मक कला का विखंडन

खोल संरचनाओं पर लिखी गई वह पुस्तक जिसे मैं अब तक की सर्वश्रेष्ठ पाठ्यपुस्तक मानता हूँ, *Thin Shell Concrete Structures*,[57] प्रकाशित होने के बाद Billington, 1965 ने संरचनात्मक सौंदर्यशास्त्र में गहरी रुचि विकसित की। यह रुचि प्रिंसटन में अनेक आंतरिक प्रतिवेदनों (Billington and Mark, 1970; Billington, Mark, and Abel, 1972; Billington, 1984a; Billington, 1979; Billington, 1983a; Billington, 1984b) के माध्यम से विकसित हुई और अंततः उनकी युगांतरकारी कृति (Billington, 1983b) में परिणत हुई।

इस मौलिक पुस्तक *The Tower and the Bridge* में बिलिंगटन ने आधुनिक संरचनात्मक अभियांत्रिकी में ऐसी सौंदर्यपरक परंपरा पहचानी जिसे उन्होंने वास्तुकला से स्वतंत्र माना—ऐसी परंपरा जिसे उन्होंने *structural art* कहा। यह कृति संरचनात्मक अभियांत्रिकी, वास्तुकला और कला के प्रतिच्छेदन पर उनके विचार समेटती है और प्रस्तावित करती है कि संरचनात्मक अभिकल्प तीन क्षेत्रों—*efficiency, economy, and elegance*—में उत्कृष्टता प्राप्त करने पर *structural art* का स्तर प्राप्त करता है। पुस्तक थॉमस टेल्फर्ड, जॉन रोबिलंग, गुस्ताव एफिल, बेंजामिन बेकर (19th-century में लौह संरचनाओं के स्वर्ण युग का प्रतिनिधित्व करते हुए) और 20th century के आरंभिक कंक्रीट युग के मायार, नेर्वी तथा अन्य व्यक्तियों की चुनी हुई प्रमुख संरचनाओं की समीक्षा करती है।

संरचनात्मक कला के लिए बिलिंगटन की आवश्यकताएँ सारतः 1st century BCE में प्रतिपादित सिद्धांतों (सारणी 15.6) का एक महत्त्वपूर्ण अंतर सहित पुनर्निरूपण हैं। उनके पूर्ववर्तियों ने इन सद्गुणों को *all* योग्य संरचनाओं के लिए आवश्यक माना, जबकि बिलिंगटन संरचनात्मक कला की विशेषता केवल अपनी विशिष्ट कसौटियाँ पूरी करने वाली संरचनाओं के लिए सुरक्षित रखते हैं।

तालिका 15.6: विट्रुवियस से बिलिंगटन तक वास्तुशिल्पीय सद्गुण

विट्रुवियस ~ 20 BCE	**अल्बेर्ती** 1452	**पल्लादियो**[58] 1570	**बिलिंगटन** 1983
	सभी संरचनाएँ		*संरचनात्मक कला*
सामर्थ्य (*Firmitas*)	उपयोगिता (*Comodità*)	उपयोगिता	दक्षता
उपयोगिता (*Utilitas*)	स्थायित्व (*Perpetuità*)	सुविधा	मितव्ययिता
सौंदर्य (*Venustas*)	सौंदर्य (*Bellezza*)	स्थायित्व & सौंदर्य	सुरुचि

इस प्रभावशाली कृति ने बाद में विद्यार्थियों के अनेक शोध-प्रबंधों और शोधपत्रों को प्रेरित किया, जिनमें उन्होंने सुस्थापित प्रतिरूप का उपयोग करके “संरचनात्मक कलाकारों” के कार्यों का विश्लेषण

[57] सभी विद्यार्थियों को परिचित मूल संबंधों से आरंभ करके और उत्कृष्ट चित्रों से समर्थित बिलिंगटन खोल व्यवहार को नियंत्रित करने वाला अष्टम-कोटि आंशिक अवकल समीकरण व्युत्पन्न करते हैं। फिर वे विभिन्न खोल प्रकारों को संबोधित करने के लिए उसे सरल बनाते और—जो कठोर विश्लेषण ग्रंथों में अत्यंत दुर्लभ है—सिद्धांत को वास्तविक प्रबलित कंक्रीट अभिकल्प व्यवहार के अनुकूल बनाते हैं।

[58] पल्लादियो के अपने निरूपण में वास्तव में त्रिभागी विभाजन के बजाय चार पद—उपयोगिता, सुविधा, स्थायित्व और सौंदर्य—सम्मिलित हैं; सारणी की पंक्तियों का संरेखण बनाए रखने के लिए अंतिम दो को यहाँ संयोजित किया गया है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

किया: संरचना का वर्णन करना, उसे ऐतिहासिक संदर्भ में रखना, उसके सौंदर्य और सुरुचि का मूल्यांकन करना तथा अभिकल्प परिकल्पनाओं की पुष्टि के लिए गणनाएँ करना।

तब से असंख्य प्रकाशनों ने इस पद का समर्थन किया है, किंतु कुछ ने ही इसका आलोचनात्मक परीक्षण किया है। अंततः बिलिंगटन वास्तुकला और संरचनाओं के बीच अंतराल पाटने वाले विराट व्यक्ति थे। उनके करिश्माई दृष्टिकोण को स्वीकार करना उसकी दार्शनिक नींव की परीक्षा करने से कहीं सरल सिद्ध हुआ।

15.7.2 कला क्या है?

किंतु कला वास्तव में क्या है? मेरा तर्क है कि कला का एकमात्र उद्देश्य मनुष्यों में *भावनाओं का संक्रामक संचार* उत्पन्न करना है—आंतरिक अनुभूतियों की अत्यंत व्यक्तिगत, निःस्वार्थ अभिव्यक्ति। कला के सात पारंपरिक रूप हैं: चित्रकला, मूर्तिकला, वास्तुकला, संगीत और नृत्य, साहित्य, रंगमंच तथा चलचित्र। परिभाषा से इनमें से कोई उपयोगितावादी प्रयोजन पूरा नहीं करता। वास्तुकला इस सूची में केवल सुंदर निर्माण से प्राप्त सौंदर्यपरक आनंद के कारण आती है। उदाहरणतः पल्लादियो की विला रोटोंडा (चित्र 15.49a) और कापरी की कासा मालापार्ते[59] (चित्र 15.49b) (Iacovou, 2024) दोनों वास्तुशिल्पीय श्रेष्ठ कृतियाँ हैं जो विशुद्ध कलात्मक अभिव्यक्ति के रूप में कार्य करती हैं। किंतु उनकी संरचनात्मक संकल्पना का उनके कलात्मक गुण से बहुत कम संबंध है।



(a) विला रोटोंडा (पल्लादियो) (b) कासा मालापार्ते, कापरी

चित्र 15.49: विशुद्ध कला के रूप में वास्तुकला: संरचनात्मक अभिव्यक्ति से मुक्त रूप

कला सदैव *अभिव्यक्ति* होती है और प्रकार्यात्मक वस्तुओं पर लगाए गए विशेषण का कार्य नहीं कर सकती (यद्यपि "कलात्मक" उपयुक्त हो सकता है)। हम केवल इसलिए "कलम-कला" की बात नहीं कर सकते कि मोंटेग्रापपा फाउंटेन पेन सुंदर है (चित्र 15.50a) अथवा भावना जगाता है। अपने सौंदर्य और शिल्पकौशल के बावजूद वह मूलतः प्रकार्यात्मक साधन ही रहता है—निःसंदेह सुंदर कलम, किंतु कला नहीं।

इसी प्रकार पुल हमें बिंदु A से बिंदु B तक पहुँचाने के लिए अस्तित्व में होता है। वह सुंदर निर्माण हो सकता है—और होना चाहिए—किंतु हमें उसे कला नहीं कहना चाहिए। जब मायार ने अपने साल्गिनाटोबेल

[59]अदाल्बेर्तो लिबेरा द्वारा अभिकल्पित, जिसमें कुर्त्सयो मालापार्ते ने पर्याप्त पुनरभिकल्प और प्रत्यक्ष लेखकीय योगदान दिया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पुल का अभिकल्प किया, तब उनका उद्देश्य संरचनात्मक कला बनाना नहीं, बल्कि ऐसा प्रकार्यात्मक पुल बनाना था जो सुंदर भी हो और अपने परिवेश में सुरुचिपूर्ण ढंग से एकीकृत हो (चित्र 15.50b)।



(a) मोंटेग्रापूपा का फाउंटेन पेन



(b) मायार का साल्गिनाटोबेल पुल

चित्र 15.50: प्रकार्य और सौंदर्य: कलम और पुल

बिलिंगटन द्वारा संरचनात्मक कला कहकर संबोधित अनेक संरचनाओं के लिए इस विशेषता को चुनौती देने के बाद भी प्रश्न शेष रहता है: क्या संरचनात्मक कला जैसी कोई वस्तु वास्तव में अस्तित्व में है? उत्तर हाँ है, किंतु उदाहरण असाधारण रूप से दुर्लभ हैं। योग्य होने के लिए संरचना का अंतिम प्रयोजन केवल दृश्य सौंदर्य और भावनात्मक संचार होना चाहिए, जबकि उसे साकार करने के लिए संरचनात्मक अभियंता के कौशल आवश्यक हों। इसमें एफिल टावर (फ्रांसीसी गौरव का उत्सव मनाने के लिए 1889 के विश्व मेले के केंद्रबिंदु के रूप में निर्मित, चित्र 15.51a), सेंट लुईस का गेटवे आर्च (चित्र 15.51b) अथवा स्विस एक्सपो 2002 का ग्लोब ऑफ साइंस एंड इनोवेशन (चित्र 15.51c) सम्मिलित होंगे।



(a) एफिल टावर



(b) गेटवे आर्च, सेंट लुईस



(c) स्विस एक्सपो 2002

चित्र 15.51: प्रामाणिक संरचनात्मक कला: विशुद्ध अभिव्यक्ति के रूप में संरचना

इस बात पर बल देना आवश्यक है कि जब मायार अथवा नेर्वी ने अपने पुलों और क्रीडांगनों की संकल्पना की, तब कला निश्चय ही उनका प्राथमिक उद्देश्य नहीं थी। उनका लक्ष्य प्रकार्यात्मक अवसंरचना का अभिकल्प करना था, जिसने संयोगवश संरचनात्मक सरलता और सुरुचि द्वारा सौंदर्य प्राप्त किया।[60] यह

[60]माध्यमिक विद्यालय की मेरी प्रियतम स्मृतियों में एक गणित के प्राध्यापक से संबंधित है; जब हम गुलाब वक्र का समीकरण अनुमानित करने में कठिनाई अनुभव कर रहे थे तो उन्होंने कहा: "वक्र सरल और सुंदर है—उसका समीकरण भी समान रूप से सरल और सुंदर होना चाहिए" ($r = a\cos(n\theta)$)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सौंदर्य असाधारण अतिरिक्त मूल्य प्रस्तुत करता है, किंतु वह कलात्मक अभिव्यक्ति से नहीं, संरचनात्मक तर्क की खोज से उद्भूत होता है।

यह एक मूलभूत प्रश्न उठाता है: जब विट्रुवियस ने 2,000 वर्ष पहले आवश्यक सिद्धांत प्रतिपादित कर दिए थे तो नया पद क्यों गढ़ा जाए? उनके *Firmitas, Utilitas, Venustas* ने स्थापित किया कि सभी योग्य संरचनाओं को तीन दशाएँ पूरी करनी चाहिए: सामर्थ्य, उपयोगिता और सौंदर्य। इसकी प्रायः ऐसी व्याख्या की गई है कि यदि पहली दो आवश्यकताएँ पूरी हों तो तीसरी स्वतः अनुसरण करती है। बिलिंगटन के तीन स्तंभ—दक्षता, मितव्ययिता और सुरुचि—विट्रुवियसी सिद्धांतों के अद्यतन शब्दों से कुछ अधिक नहीं हैं (सारणी 15.6)। विट्रुवियस के लिए ये दशाएँ योग्य संरचना को ही परिभाषित करती थीं; बिलिंगटन के लिए उनकी पूर्ति "संरचनात्मक कला" उत्पन्न करती है।

इसीलिए मैं *structural art* पद को अस्वीकार करके उसके स्थान पर अधिक विनम्र और सटीक पद *structural architecture* अपनाता हूँ।

15.7.3 संरचनात्मक वास्तुकला: लुंजी का घोषणापत्र

बिलिंगटन की *The Tower and the Bridge* ने व्यापक प्रभाव प्राप्त किया, किंतु मॉन्टेनेग्रो के संरचनात्मक अभियंता मिलोश लुंजी द्वारा हाल में प्रकाशित कम प्रसिद्ध घोषणापत्र समान, बल्कि संभवतः अधिक ध्यान का अधिकारी है (Llunji, 2022 PDF)।

यह आवश्यक पाठ संरचनात्मक कला की संकल्पना का क्रमबद्ध विखंडन करता, उसकी सीमाएँ रेखांकित करता, उसे आँख मूँदकर अपनाने वालों की आलोचना करता और मूलतः नेर्वी द्वारा गढ़े गए *structural architecture* पद (Nervi, 1963 PDF) को पुनर्जीवित करने का तर्क देता है। मैं लुंजी के विश्लेषण से इससे अधिक दृढता से सहमत नहीं हो सकता।

मैं §15.6.2 में संरचनात्मक अभियांत्रिकी व्यवसाय का लुंजी का गंभीर मूल्यांकन पहले ही प्रस्तुत कर चुका हूँ। उनकी अनुशंसाएँ इस विवादास्पद खंड को उपयुक्त निष्कर्ष प्रदान करती हैं:

> यदि हम स्वीकार करते हैं कि हमारा व्यवसाय संकट में है और यदि हम उसे पुनः आकर्षक बनाना चाहते हैं तो हमें अभियांत्रिकी विद्यार्थियों की शिक्षा में कठोर परिवर्तन लाने चाहिए, जो वर्तमान में बहुत कुछ अपेक्षित छोड़ती है। युवा पीढ़ियाँ अभियांत्रिकी के ऊपर वास्तुकला चुनना पसंद करेंगी क्योंकि अब वे सिविल अभियांत्रिकी व्यवहार को सृजनशीलता और नवोन्मेष से नहीं जोड़तीं। हमें अपने व्यवसाय के सृजनात्मक पक्ष पर बल देकर उसे प्रोत्साहित करना चाहिए और इस प्रकार पहचान योग्य छवि को पुनः गढ़ना तथा अभियांत्रिकीय नेतृत्व के बंद द्वार खोलने चाहिए।
>
> (Llunji, 2022 PDF)

चाहे हम संरचनात्मक कला कहें अथवा संरचनात्मक वास्तुकला, संभवतः समान भावनात्मक और सौंदर्य-परक क्षेत्र को संबोधित करते हैं, किंतु मुझे दूसरा पद अधिक सटीक और बौद्धिक रूप से ईमानदार लगता है। अंततः हम शब्दों को अपने प्रयोजनों के लिए सर्वाधिक सुविधाजनक अर्थ देते हैं और शेक्सपियर की जूलियट हमें स्मरण कराती है:

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> नाम में क्या रखा है? जिसे हम गुलाब कहते हैं
> वह किसी अन्य नाम से भी उतना ही सुगंधित होगा।
>
> Romeo and Juliet, Act 2, Scene 2

मायार, नेर्वी, तोरोहा और उनके समकालीनों की महानता "कला" बनाने में नहीं, बल्कि यह प्रदर्शित करने में निहित है कि सामग्रियों और बलों की गहरी समझ से संकल्पित प्रकार्यात्मक संरचनाएँ ऐसा सौंदर्य प्राप्त कर सकती हैं जो किसी भी कलात्मक रचना का प्रतिद्वंद्वी हो। वे हमें स्मरण कराते हैं कि संरचनात्मक अभियांत्रिकी का सर्वोच्च आह्वान कला की नकल करना नहीं, बल्कि निर्माण के अपने तर्क के भीतर अंतर्निहित काव्यात्मकता खोजना है।

15.8 निष्कर्ष

प्राचीन रोम से अंकीय युग तक अभियांत्रिकी और वास्तुकला के प्रतिच्छेदन की यह यात्रा रूपांतरित होते व्यवसाय को प्रकट करती है। हमने विट्रुवियस के आधारभूत सिद्धांतों से औद्योगिक युग के महान अभियंता-निर्माताओं के माध्यम से आज के संगणकीय व्यवसायियों तक विकास का अनुसरण किया है और असाधारण उपलब्धियों तथा चिंताजनक प्रवृत्तियों दोनों को देखा है।

इस अध्याय में प्रस्तुत अभियंता और वास्तुकार उस वर्ग का प्रतिनिधित्व करते हैं जिसे लुंजी "पाँच प्रतिशत" कहते हैं—वे दुर्लभ व्यवसायी जो वास्तविक संरचनात्मक सृजनशीलता प्राप्त करने के लिए नियमित गणना से परे जाते हैं। एफिल की परिमेय सुरुचि से नेर्वी की संरचनात्मक काव्यात्मकता तक, ख़ान के नलिकाकार नवोन्मेषों से बेकर की संगणकीय परिष्कृति तक ये व्यक्ति प्रदर्शित करते हैं कि महान संरचनात्मक अभिकल्प सॉफ़्टवेयर कलन-विधियों से नहीं, बल्कि तकनीकी निपुणता और सृजनात्मक दृष्टि के संयोग से उद्भूत होता है।

फिर भी जैसा हमने देखा है, व्यवसाय अस्तित्वगत चुनौती का सामना कर रहा है। संगणकीय साधनों के लोकतंत्रीकरण ने विरोधाभासी रूप से संरचनात्मक अभियंताओं की भूमिका घटा दी है और अनेक को अभिकल्प प्रक्रिया में सृजनात्मक भागीदारों के बजाय "वास्तुशिल्पीय विचारों के तकनीशियन और समर्थक" बना दिया है। कृत्रिम बुद्धिमत्ता के उद्भव से अब यह चुनौती और बढ़ गई है, जो नियमित अभियांत्रिकीय कार्यों के और अधिक स्वचालन का वादा करती है। AI सृजनात्मक अभियंता के लिए शक्तिशाली साधन बन सकती है—गणनाओं को तीव्र करके, अभिकल्प विकल्पों की खोज करके और पुनरावृत्त विश्लेषण सँभालकर—किंतु वह वास्तविक अभियांत्रिकी को मात्र संगणन से अलग करने वाली बौद्धिक सहभागिता को और अधिक क्षीण करने का संकट भी उत्पन्न करती है।

संकट स्वयं AI में नहीं, बल्कि उस पर अतिनिर्भरता में निहित है। जिस प्रकार परिमित तत्त्व सॉफ़्टवेयर की उपलब्धता ने ऐसे अभियंता उत्पन्न किए हैं जो अंतर्निहित भौतिकी को समझे बिना जटिल विश्लेषण चला सकते हैं, उसी प्रकार AI ऐसे व्यवसायी बना सकती है जो संरचनात्मक व्यवहार को नियंत्रित करने वाले मूलभूत सिद्धांत समझे बिना अभिकल्प उत्पन्न कर सकते हैं। विवेकी अभियंता AI का उपयोग उसी प्रकार करेगा जैसे नेर्वी ने अपने परीक्षण उपकरण अथवा बेकर सांस्थिति इष्टतमीकरण का करते हैं: समझ के माध्यम से संकल्पित विचारों को सत्यापित और परिष्कृत करने के साधन के रूप में, अभियांत्रिकीय निर्णय के स्थानापन्न के रूप में कभी नहीं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आगे का मार्ग प्रौद्योगिकी अस्वीकार करने में नहीं, बल्कि वास्तविक नवोन्मेषी समाधानों को संभव करने वाले मूलभूत सिद्धांतों—ज्यामिति, संतुलन, सामग्री व्यवहार[61]—को पुनः खोजने में निहित है। यह समझने वाला अभियंता कि लटकन चाप क्यों कार्य करता है, जो धरन में प्रतिबल प्रवाह की कल्पना कर सकता है, जो रूप और बल का संबंध समझता है, सदैव कुछ अपरिहार्य रखेगा: संभाव्य और इष्टतम के बीच, गणना और अंतर्दृष्टि के बीच भेद करने की क्षमता। *विश्वास करें, किंतु सत्यापित करें* AI युग का आदर्श-वाक्य बनना चाहिए—उसके परिणाम पर प्रश्न उठाने के लिए बौद्धिक स्वतंत्रता बनाए रखते हुए साधन की शक्ति अपनाएँ।

उस मूल्यवान पाँच प्रतिशत में सम्मिलित होने के इच्छुक भावी संरचनात्मक अभियंता अथवा वास्तुकार के लिए निम्नलिखित ग्रंथ आवश्यक आधार प्रदान करते हैं:

1. *The Ten Books on Architecture*, Vitruvius, 1960 — दो सहस्राब्दियों बाद भी मान्य आधारभूत सिद्धांत
2. *De re aedificatoria; Catoria Libri Decem Leo*, Alberti, 1485 — शास्त्रीय सिद्धांत और व्यावहारिक अनुप्रयोग का पुनर्जागरणकालीन संश्लेषण
3. *I quattro libri dell'architettura*, Palladio, 1570 — आनुपातिक तंत्र और संरचना की वास्तुकला
4. "The tall office building artistically considered", Sullivan, 1896 — आधुनिक संरचनात्मक अभिव्यक्ति की दार्शनिक नींव
5. *Philosophy of structures*, Torroja, Polivka, and Polivka, 1958 — संरचनात्मक अंतर्बोध बनाम यांत्रिक गणना
6. *Structures*, Nervi, 1956b — अभियांत्रिकी और कलात्मक दृष्टि का एकीकरण
7. "Design of high-rise buildings", Khan, 1965 — ऊँची इमारतों के संरचनात्मक तंत्रों के प्रति क्रमबद्ध दृष्टिकोण
8. *Towards a new architecture*, Le Corbusier, 1931 — आधुनिकतावादी सिद्धांत और उनके संरचनात्मक निहितार्थ
9. *The Tower and the Bridge*, Billington, 1983b — संरचनात्मक सौंदर्यशास्त्र का प्रामाणिक कथन
10. *Towards A New Engineering-: Reflections of a practitioner*, Llunji, 2022 — आवश्यक आलोचना और नवीकरण का मार्ग

निम्नलिखित सारणी विवेचित प्रमुख व्यक्तियों का कालक्रम प्रस्तुत करती है और प्रायोगिक अंतर्बोध से गणितीय कठोरता के माध्यम से संगणकीय परिष्कृति तक विकास प्रकट करती है:

बिलिंगटन से लुंजी तक बौद्धिक यात्रा (चित्र 15.52) एक सृजनात्मक अनुशासन के रूप में संरचनात्मक अभियांत्रिकी के व्यवहार के अर्थ की हमारी विकसित होती समझ प्रतिबिंबित करती है। जहाँ बिलिंगटन ने महान अभियंताओं की सौंदर्यपरक उपलब्धियों का उत्सव मनाया, वहीं लुंजी हमें यह जाँचने की चुनौती देते हैं कि कहीं व्यवसाय ने सृजनात्मक उत्कृष्टता के ऊपर संगणकीय दक्षता की खोज में अपना मार्ग तो नहीं खो दिया है।

[61] अथवा जैसा आगामी तीन पुस्तकों में असंख्य बार दोहराया गया है: संतुलन, सुसंगतता, संघटक प्रतिरूप।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

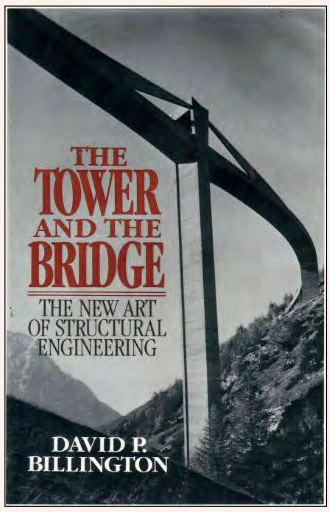
तालिका 15.7: संरचनात्मक अभिकल्प दृष्टिकोणों का विकास

नाम	वर्ष	देश (व्यवहार)	वास्तुकार अथवा अभियंता	प्राथमिक नवोन्मेष
आनुभविक विधियाँ & संरचनात्मक अंतर्बोध				
एफिल	1832–1923	फ्रांस	अभियंता	परिमेय लौह निर्माण
गाउदी	1852–1926	स्पेन	वास्तुकार	लटकन ज्यामिति
मायार	1872–1940	स्विट्ज़रलैंड	अभियंता	त्रि-कब्जित कंक्रीट चाप
पेरे	1874–1954	फ्रांस	वास्तुकार	अनावृत कंक्रीट ढाँचा वास्तुकला
नेर्वी	1891–1979	इटली	अभियंता	फेरोसीमेंट खोल
मोरांदी	1902–1989	इटली	अभियंता	पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट
सारिनेन	1910–1961	US	वास्तुकार	अभिव्यंजक कंक्रीट रूप
कैंडेला	1910–1997	मेक्सिको	वास्तुकार	अतिपरवलयिक परवलयज खोल
भौतिक रूप-निर्धारण				
ओटो	1925–2015	जर्मनी	वास्तुकार	तनाव संरचनाएँ
इस्लर	1926–2009	स्विट्ज़रलैंड	अभियंता	लटकती झिल्ली विधि
मुस्मेची	1926–1981	इटली	अभियंता	प्रायोगिक कंक्रीट पुल
खान	1929–1982	US	अभियंता	नलिकाकार भवन तंत्र
मेन	1927–2018	स्विट्ज़रलैंड	अभियंता	पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट पुल
संगणकीय अभिकल्प				
रॉबर्टसन	1928–2021	US	अभियंता	अति-ऊँची इमारतों के तंत्र
गेहरी	1929–2025	US	वास्तुकार	अंकीय निर्माण
कालात्रावा	1951–	स्पेन	वास्तु./अभि.	मूर्तिकला-सदृश अभियांत्रिकी
विर्लोज़ो	1946–	फ्रांस	अभियंता	जटिल केबल-आलंबित पुल
बेकर	1953–	US	अभियंता	सांस्थिति इष्टतमीकरण

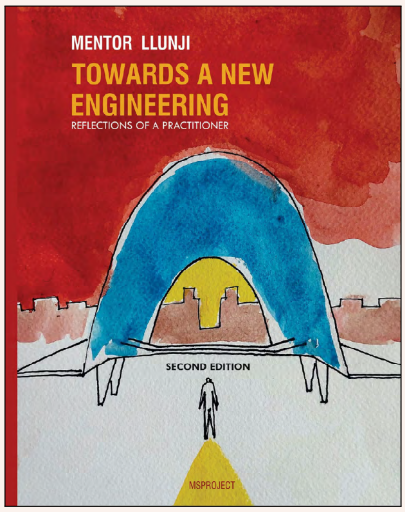
आगे के मार्ग के लिए न तो प्रौद्योगिकी त्यागने की आवश्यकता है, न पुरानी स्मृतियों में लौटने की, बल्कि बेकर द्वारा कही गई “ज्यामिति और संतुलन”—वह मूलभूत अंतर्दृष्टि जो अभियंताओं को संगणकीय साधनों का उपयोग चिंतन के स्थानापन्न के बजाय खोज के उपकरण के रूप में करने देती है—विकसित करने की आवश्यकता है। मायार के पुलों और नेर्वी के खोलों का मार्गदर्शन करने वाले सिद्धांतों को समझकर ही आज के अभियंता उस विशिष्ट परंपरा में सम्मिलित होने योग्य संरचनाएँ बनाने की आशा कर सकते हैं।

संरचनात्मक अभियंताओं की प्रत्येक नई पीढ़ी के सम्मुख वही विकल्प रहता है जो एफिल और तोरोहा के सम्मुख था: क्या आप “वास्तुशिल्पीय विचारों के तकनीशियन और समर्थक” के रूप में सेवा करने से संतुष्ट होंगे, अथवा संरचनात्मक तर्क का उपयोग करके सौंदर्य के नए रूप बनाने वाले पाँच प्रतिशत में सम्मिलित होने की आकांक्षा करेंगे? उत्तर आपके सॉफ्टवेयर की परिष्कृति में नहीं, बल्कि इस समझ की गहराई में निहित है कि सामग्रियाँ और बल संरचना उत्पन्न करने के लिए कैसे परस्पर कार्य करते हैं—और संरचना के माध्यम से अर्थ कैसे उत्पन्न होता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) द टावर एंड द ब्रिज (Billington, 1983b)



(b) टुवर्ड्स अ न्यू इंजीनियरिंग (Llunji, 2022)

चित्र 15.52: उत्सव से आलोचना तक: संरचनात्मक सृजनशीलता पर विकसित होते दृष्टिकोण

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



कारवाज्जो, मार्था और मरियम मगदलीनी (1598)

संवाद में सक्रिय और चिंतनशील जीवन: संरचना वास्तुकला की सेवा वैसे ही करती है जैसे मार्था मरियम की—भिन्न आह्वान, परस्पर निर्भरता, प्रत्येक समग्र के लिए आवश्यक।

प्रति विषमस

16 Terrae Motus: भूकंपों के मिथक, विश्वास और निरूपण

सारांश

यह अध्याय संस्कृतियों और ऐतिहासिक कालों में मानवीय कल्पना के स्थायी उत्प्रेरक के रूप में भूकंप का परीक्षण करता है। आरंभिकतम मिथकीय ढाँचों—जिनमें भूकंपीय घटनाओं का कारण भूमिगत पशुओं, वैश्विक असंतुलन अथवा बंदी बनाए गए दैत्यों के संघर्षों को माना गया—से आरंभ करके यह धर्म की औपचारिक संरचनाओं, दर्शन की परिमेय जिज्ञासाओं तथा साहित्य, वास्तुकला, कला, संगीत और चलचित्र के अभिव्यंजक साधनों के माध्यम से भूकंप की व्याख्या के क्रमिक विस्तार का अनुसरण करता है। एक सुसंगत प्रतिरूप उभरता है: जहाँ कहीं भूकंप सांस्कृतिक स्मृति में प्रवेश करने योग्य पर्याप्त आवृत्ति से घटित होते हैं, वहाँ वे ऐसे व्याख्यात्मक ढाँचे उत्पन्न करते हैं जो कर्तृत्व निर्धारित करते, घटना को नैतिक अथवा वैश्विक व्यवस्था में समाहित करते और सामुदायिक अनुक्रिया की माँग करते हैं। अध्याय का तर्क है कि यह व्याख्यात्मक प्रतिवर्त—इस बात पर आग्रह कि पृथ्वी का काँपना कुछ अर्थ रखता है—प्राकृतिक ज्ञान की प्रगति से विस्थापित नहीं होता, बल्कि क्रमशः रूपांतरित होता है: अरस्तू के वायवीय सिद्धांत से लिस्बन के प्रबोधनकालीन संकट होते हुए बीसवीं शताब्दी के साहित्य और कला के धर्मनिरपेक्ष शोकगीत तक। यह अध्याय सुझाव देता है कि व्यवस्था, स्थिरता और समझ की सीमाओं का सामना करने वाली मानव समाजों की विधियों के अध्ययन के लिए भूकंप सभी प्राकृतिक परिघटनाओं में सर्वाधिक उत्पादक परिघटनाओं में से एक है।

16.1 परिचय 640
16.2 मिथक 641
16.2.1 जापान 642
16.2.2 प्रशांत उत्तर-पश्चिम 644
16.2.3 अमेरिका 645
16.2.4 अन्य परंपराएँ 646
16.2.5 संश्लेषण: भूकंपीय स्मृति के रूप में मिथक 647
16.3 धर्म 648
16.3.1 बाइबिल 648
16.3.2 यूनान 652
16.3.3 भारत 658
16.3.4 इस्लाम 660
16.3.5 मेसोअमेरिका 663
16.3.6 शिंतो 665
16.3.7 संश्लेषण: धर्म और भूकंपीय विपत्ति का अर्थ 667
16.4 दर्शन 672
16.4.1 अरस्तू 672
16.4.2 एराटोस्थनीज़ 673
16.4.3 लुक्रेतियस और प्लिनी 673
16.4.4 दार्शनिक घटना के रूप में लिस्बन भूकंप 674
16.4.5 पुनर्निर्माण 676
16.5 साहित्य 678
16.5.1 साहित्य में भूकंप 678
16.5.2 1755 का लिस्बन भूकंप और प्रबोधनकालीन विवाद 678
16.5.3 1908 का मेसिना भूकंप 680
16.5.4 संश्लेषण: साहित्य और भूकंपों की सांस्कृतिक स्मृति 681
16.6 वास्तुकला 682
16.6.1 पीरो लिगोरियो 682
16.6.2 जिबेलिना 683
16.7 कला 686
16.7.1 शैल-कला और भ्रंश चिह्न . . . 686
16.7.2 चित्रकला 688
16.7.3 कोज़ाक संग्रह 689
16.7.4 अमेलियो संग्रह 689
16.8 संगीत 691
16.9 चलचित्रकला 692
16.10 निष्कर्ष 693
16.11 उपसंहार: नमाज़ु से रॉज़वेल तक 694

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16.1 परिचय

इस पुस्तक के कुछ अन्य अध्यायों की भाँति[1] यह अध्याय संरचनाओं के एक अन्य प्रमुख प्रतिबलक[2] से संबंधित एक अन्य विषयगत प्रसंग—भूकंप और विशेष रूप से मानवीय अवचेतन से उनका संबंध—संबोधित करता है। दूसरे शब्दों में यह परीक्षण करता है कि भूकंपों ने हमारी सामूहिक कल्पना को कैसे आकार दिया और मिथक, धर्म, दर्शन तथा कलाओं को कैसे प्रभावित किया।

आगे बढ़ने से पहले उन तीन निकट संबंधित किंतु भिन्न क्षेत्रों को स्पष्ट करना उपयोगी है जिनके माध्यम से मनुष्यों ने प्राकृतिक परिघटनाओं की व्याख्या करने का प्रयास किया है: मिथक, धर्म और दर्शन। ये क्षेत्र कठोरता से पृथक नहीं हैं; जैसा स्पष्ट होगा, उनके बीच की सीमाएँ प्रायः पारगम्य हैं और मानवीय चिंतन पर भूकंपों का प्रभाव विरले ही किसी एक वर्ग में सुव्यवस्थित रूप से आता है।

मिथक उन पारंपरिक आख्यानों को संदर्भित करता है जो अलौकिक प्राणियों अथवा वैश्विक शक्तियों से संबंधित प्रतीकात्मक कथाओं द्वारा प्राकृतिक परिघटनाओं की व्याख्या करते हैं। भूकंपों के संदर्भ में मिथक प्रायः पृथ्वी के काँपने का कारण पशुओं, देवताओं अथवा भूमिगत शक्तियों की क्रियाओं को मानते हैं। इस अध्याय में मिथक पर पहले विचार किया गया है, क्योंकि वह मानवीय व्याख्या की आरंभिकतम और सर्वाधिक सार्वभौम परत प्रस्तुत करता है।

धर्म विश्वासों और व्यवहारों का अधिक संरचित ढाँचा प्रदान करता है, जिसमें भूकंपों की व्याख्या व्यापक धर्मवैज्ञानिक व्यवस्था के भीतर दैवी इच्छा, दंड, चेतावनी अथवा नैतिक परीक्षा की अभिव्यक्ति के रूप में की जा सकती है। महत्त्वपूर्ण रूप से धार्मिक परंपराएँ प्रायः आरंभिक मिथकीय आख्यानों में मूलित होती अथवा उन्हें आत्मसात कर चुकी होती हैं—दोनों के बीच की सीमा ऐतिहासिक रूप से नियत होने के बजाय परिवर्तनशील है। अशांत भूमिगत देवता को भूकंपों का कारण मानने वाला मिथक समय के साथ अपने अनुष्ठानों, पुरोहितवर्ग और प्रामाणिक ग्रंथों वाली औपचारिक धार्मिक व्यवस्था में सम्मिलित हो सकता है। इस कारण इस अध्याय में विवेचित कुछ भूकंप परंपराएँ विशुद्ध मिथकीय अथवा विशुद्ध धार्मिक वर्गीकरण का प्रतिरोध करती हैं और पाठक को यह ध्यान में रखना चाहिए।

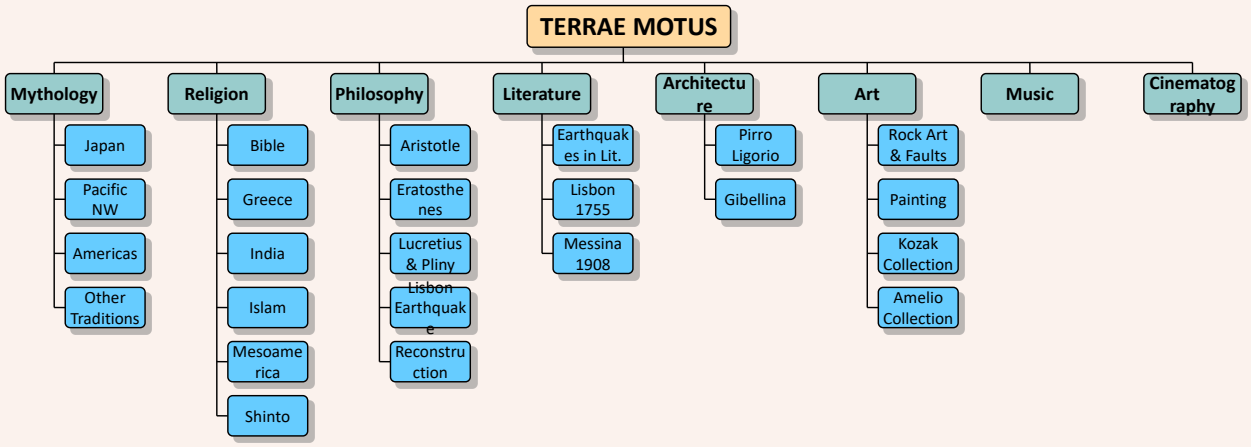
इसके विपरीत **दर्शन** तर्क और प्रेक्षण पर आधारित परिमेय व्याख्याएँ खोजता है। प्राचीन काल से दार्शनिकों ने भूकंपों को अंतर्निहित सिद्धांतों द्वारा नियंत्रित प्राकृतिक प्रक्रियाओं के रूप में समझने का प्रयास किया और इस प्रकार व्याख्या को मिथकीय आख्यान से क्रमबद्ध जिज्ञासा की ओर अग्रसर किया—ऐसा प्रक्षेपपथ जो अंततः आधुनिक भूकंप विज्ञान की ओर ले गया।

इस अध्याय की विषयवस्तु की असामान्य व्यापकता—जो संरचनात्मक अभियांत्रिकी पाठ के सामान्य क्षेत्र से बहुत बाहर स्थित विषयों तक विस्तृत है—को देखते हुए चित्र 16.1 विस्तृत विवेचन आरंभ होने से पहले पाठक को दिशा देने के लिए विषयगत मानचित्र प्रस्तुत करता है।

[1] मेरी इस रुचि की उत्पत्ति तब हुई जब मैंने भूकंप से ध्वस्त जिबेलीना नगर (§16.6.2) का भ्रमण किया और इस बात पर विचार किया कि समाज ने उसे लगभग शब्दशः “ढक दिया” है।

[2] संरचनात्मक विश्लेषण के संदर्भ में प्रतिबलक ऐसी किसी क्रिया अथवा प्रभाव को दर्शाता है जो संरचना के भीतर प्रतिबल अथवा विरूपण प्रेरित करता है। इसमें बाहरी भार (जैसे गुरुत्व, पवन, भूकंप, तापीय प्रभाव अथवा आरोपित विस्थापन) के साथ पर्यावरणीय अथवा समय-निर्भर प्रभाव (उदाहरणतः तापमान प्रवणता, संकुचन अथवा विसर्पण) सम्मिलित हैं। संक्षेप में प्रतिबलक संरचनात्मक तंत्र के भीतर आंतरिक बल, प्रतिबल अथवा विकृति उत्पन्न करने में सक्षम कोई भी भौतिक कारण है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 16.1: अध्याय की विषयगत संरचना

16.2 मिथक

पॉल डिराक ने प्रसिद्ध रूप से लिखा

> यह पूर्णतः समझने योग्य है कि आदिम लोगों ने, जो आज हमारी तुलना में प्रकृति की प्रबल शक्तियों के कहीं अधिक संपर्क में थे, इन शक्तियों का भय और कंपन के साथ मानवीकरण क्यों किया होगा। किंतु आज जब हम इतनी प्राकृतिक प्रक्रियाएँ समझते हैं, हमें ऐसे समाधानों की आवश्यकता नहीं है।
>
> Dirac, 1963 *"The Evolution of the Physicist's Picture of Nature"*

संगठित धर्मों अथवा दार्शनिक व्याख्याओं के उद्भव से बहुत पहले मानव समाजों ने *मिथकों के माध्यम से भूकंपों को समझने* का प्रयास किया। ये मिथक औपचारिक धर्मवैज्ञानिक तंत्रों में समाहित नहीं थे, बल्कि उन मौखिक परंपराओं से संबंधित थे जो प्रतीकात्मक आख्यानों द्वारा प्राकृतिक परिघटनाओं की व्याख्या करती थीं। ऐसे वृत्तांतों में भूकंपों का कारण प्रायः पृथ्वी को सहारा देने अथवा उसके भीतर रहने वाले माने गए पशुओं या अलौकिक प्राणियों की गति को माना जाता था। ये व्याख्याएँ अचानक, हिंसक और अबोधगम्य दिखाई देने वाली घटनाओं पर अर्थ तथा कार्यकारण आरोपित करने के आरंभिक प्रयास प्रतिबिंबित करती हैं।

अत्यंत दूर स्थित संस्कृतियों में भूकंप संबंधी मिथकीय आख्यानों की सर्वव्यापकता स्वयं उल्लेखनीय है। जापान और मध्य एशिया से उत्तरी अमेरिका के प्रशांत उत्तर-पश्चिम तथा मेसोअमेरिका तक, परस्पर संपर्क-विहीन समाज संरचनात्मक रूप से समान व्याख्यात्मक ढाँचों पर पहुँचे: पृथ्वी के नीचे कोई विशाल प्राणी हिलता है; कोई अलौकिक रक्षक सतर्कता खो देता है; विरोधी वैश्विक शक्तियाँ अस्थायी रूप से संतुलन से बाहर हो जाती हैं। ऐसे आख्यानों का विश्वभर में स्वतंत्र रूप से उभरना साझा मानवीय संज्ञानात्मक आवेग—भूकंपीय विपत्ति की भयावह स्वेच्छाचारिता को कर्तृत्व, कार्यकारण और अंततः अर्थ प्रदान करने वाली कथा में स्थापित करने की आवश्यकता—को व्यक्त करता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16.2.1 जापान

नामाज़ु परंपरा

जापान में भूकंपों की प्रचलित—यद्यपि एकमात्र नहीं—लोककथात्मक व्याख्या भूमिगत विशाल कैटफिश (*Namazu*) के अस्तित्व पर केंद्रित है। यह विश्वास कई शताब्दियों में स्थानीय जापानी लोक परंपराओं से धीरे-धीरे विकसित हुआ और चीनी ब्रह्मांडविज्ञानी विचारों से आंशिक रूप से प्रभावित था। इस दृष्टिकोण के अनुसार विशाल नामाज़ु हिताची प्रांत (वर्तमान इबाराकी प्रीफेक्चर) में काशिमा तीर्थ के नीचे भूमिगत जल में रहता था। *kaname-ishi* (“आधारशिला” अथवा “धुरी-शिला”) नामक विशाल शिलाखंड को उस प्राणी को नीचे दबाकर गति करने से रोकने वाला माना जाता था (चित्र 16.2c)।

किंतु केवल शिला को नामाज़ु रोकने के लिए अपर्याप्त माना जाता था। यह तंत्र काशिमा देवता (*Takemikazuchi-no-kami*)—गर्जन और युद्धशक्ति से संबद्ध देवता—पर निर्भर था, जो कैटफिश को गतिहीन रखने के लिए शिला पर दबाव डालता था (चित्र 16.2c)। प्रत्येक वर्ष दसवें चंद्र मास—तथाकथित *kannazuki*, अथवा “देवता-विहीन मास”—में काशिमा को अपना स्थान छोड़कर प्रमुख जापानी देवताओं की वार्षिक सभा में भाग लेने के लिए ईसे के विशाल तीर्थ की यात्रा करने वाला माना जाता था। उसकी अनुपस्थिति में स्थानीय देवता एबिसु (अथवा इबिज़ु) को शिला पर दबाव बनाए रखने का कार्य सौंपा जाता था। यदि काशिमा अपने कर्तव्य की उपेक्षा करता, अथवा देवता की अनुपस्थिति में एबिसु प्राणी को रोकने में विफल होता, तो नामाज़ु पृथ्वी के नीचे छटपटाकर भूकंप उत्पन्न करता (चित्र 16.2b)। कंपन की तीव्रता कैटफिश की गतियों के परिमाण से सीधे संबंधित मानी जाती थी।

नामाज़ु परंपरा के सांस्कृतिक और सामाजिक आयाम 1855 के विशाल आनसेई एदो भूकंप के बाद नाटकीय रूप से स्फटिकीकृत हुए, जिसने *Namazu-e* (“कैटफिश चित्र,” चित्र 16.2a–16.2e) नामक काष्ठखंड मुद्रणों का उल्लेखनीय संग्रह उत्पन्न किया, (Smits, 2006)। ये मुद्रण कैटफिश को अनेक आख्यानात्मक और व्यंग्यात्मक भूमिकाओं में दिखाते हैं: काशिमा देवता की अनुपस्थिति में नगर में उत्पात मचाते हुए (चित्र 16.2b), उसके लौटने पर देवता द्वारा वश में अथवा दंडित किए जाते हुए (चित्र 16.2c), और अधिक द्वैध भाव में आर्थिक पुनर्वितरण के दृश्यों की अध्यक्षता करते हुए, जिनमें सामान्य लोग धनी व्यापारियों की संचित वस्तुओं के विनाश से लाभ उठाते हैं (चित्र 16.2a और 16.2d) (Smits, 2006)। यह अंतिम विषय—*yonaoshi* (“विश्व सुधार”) के अभिकर्ता के रूप में नामाज़ु—उस लोकप्रिय अंतर्धारा को प्रतिबिंबित करता है जिसमें अपने समस्त आतंक के बावजूद भूकंप को जड़बद्ध सामाजिक पदानुक्रमों को बाधित करने वाली समताकारी शक्ति भी माना गया था (चित्र 16.2e)।

नामाज़ु और भूकंपों के संबंध का निश्चित उद्गम अनिश्चित है। संभव है कि पृथ्वी को सहारा देने वाली विशाल मछली का व्यापक विचार बौद्ध परंपराओं के माध्यम से चीन से प्रसारित हुआ हो। कुछ चीनी मंदिरों में बोधिसत्त्व गुआनयिन को जापानी नामाज़ु जैसी विशाल मछली पर खड़ा दिखाया गया है। यद्यपि चीनी चिंतन ने निश्चय ही जापानी ब्रह्मांडविज्ञान को प्रभावित किया, विशाल कैटफिश और भूकंपों के बीच विशिष्ट तथा स्थायी संबंध जापान में अद्वितीय रूप से विकसित हुआ प्रतीत होता है (Ludwin and Smits, 2007)। कैटफिश का चयन स्वयं विचारोत्तेजक है: यह जीव तल में रहता, अधिकांशतः अदृश्य होता और अचानक शक्तिशाली गति करने में सक्षम है—भूमिगत विश्व की छिपी शक्तियों का उपयुक्त प्रतीक।

रोचक रूप से कुछ नृ-भूकंपवैज्ञानिक साक्ष्य सुझाव देते हैं कि कैटफिश और तल में आहार लेने वाली अन्य मछलियाँ भूकंपों से पहले के घंटों अथवा दिनों में असामान्य व्यवहार प्रदर्शित करती हैं, संभवतः भूजल रसायन, विद्युतचुंबकीय क्षेत्रों अथवा सूक्ष्म-भूकंपीय पूर्वगामियों में परिवर्तनों की अनुक्रिया में।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) 1855 का भूकंप उत्पन्न करने के कारण नामाज़ु पर आक्रमण करते एदो के लोग



(b) नगर के जलते समय उत्पात मचाता नामाज़ु



(c) भूकंप उत्पन्न करने वाली कैटफिश को वश में करता काशिमा देवता



(d) अनुकूल सामाजिक परिवर्तन लाने वाले लोकप्रिय देवता के रूप में कैटफिश



(e) आधारशिला के साथ काशिमा अथवा एबिसु

चित्र 16.2: भूकंपों के लिए उत्तरदायी विशाल कैटफिश को दर्शाने वाले *namazu-e* मुद्रणों के उदाहरण (Miyata and Takada, 1995)

जापानी पर्यवेक्षकों ने वास्तव में ऐसी व्यवहारगत असंगतियाँ देखीं और उन्हें मिथक में समाहित किया था अथवा कैटफिश ने केवल प्रतीकात्मक आकृति का कार्य किया था—यह खुला प्रश्न है; किंतु यह संभावना विचारणीय है कि नामाज़ु परंपरा अपने मिथकीय ढाँचे में आनुभविक प्रेक्षण का बीज सुरक्षित रखती है (Ludwin and Smits, 2007)।

ब्रह्मांडविज्ञानी व्याख्याएँ: यिन, यांग और प्रतिस्पर्धी ढाँचे

नामाज़ु परंपरा के साथ भूकंपों की अधिक दार्शनिक व्याख्या भी जापान में प्रचलित थी, जिसकी जड़ें चीनी प्राकृतिक दर्शन में थीं। *Ansei Kenmonroku* (आनसेई युग में देखी और सुनी वस्तुओं के अभिलेख, c. 1854) यिन (*in*) और यांग (*yō*) के ब्रह्मांडविज्ञानी सिद्धांत द्वारा भूकंपों की व्याख्या करता है: जल (विशुद्ध यिन) सामान्यतः भूमिगत क्षेत्र पर प्रभुत्व रखता और अग्नि (विशुद्ध यांग) को दबाता है, किंतु यह संतुलन बाधित होने तथा भूमिगत अग्नि द्वारा अस्थायी रूप से जल पर विजय पाने पर भूकंप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

घटित होते हैं। ज्वालामुखीय और भूतापीय परिघटनाओं से इसकी समानता उल्लेखनीय है और संभवतः यह—वैज्ञानिक-पूर्व होते हुए भी—उस अंतर्बोध को प्रतिबिंबित करती है कि पृथ्वी के कंपन में ऊष्मा सम्मिलित है।

महत्त्वपूर्ण रूप से 1855 के आनसेई भूकंप के बाद मुद्रित कुछ व्यापक पत्रकों ने कैटफिश व्याख्या को स्पष्टतः “अपरिष्कृत सिद्धांत” बताते हुए दोनों ढाँचों को एक साथ उपयोग किया। समानांतर—और कभी-कभी प्रतिस्पर्धी—व्याख्यात्मक ढाँचों के रूप में लोक मिथक और दार्शनिक ब्रह्मांडविज्ञान का यह सह-अस्तित्व स्पष्ट करता है कि वैज्ञानिक-पूर्व संस्कृतियाँ समान रूप से सहजविश्वासी नहीं थीं: उन्होंने प्राकृतिक कार्यकारण के प्रतिस्पर्धी वृत्तांतों पर वाद-विवाद किया, उन्हें क्रम दिया और कभी-कभी स्पष्ट रूप से अस्वीकार किया।

नामाज़ु-ए मुद्रण और विश्व सुधार

1855 का आनसेई-एदो भूकंप, जिसका अनुमानित परिमाण 7.0–7.1 था, आनसेई 2 के दसवें मास के दूसरे दिन एदो (आधुनिक टोक्यो) से टकराया, जिससे विनाशकारी अग्नियाँ लगीं और 4,000 से 10,000 लोगों की मृत्यु हुई (Miyata and Takada, 1995; Smits, 2006; Abe, 2000)। दो दिनों के भीतर मुद्रकों ने *namazu-e* व्यापक पत्रक बनाना आरंभ कर दिया, जो पूर्व-आधुनिक इतिहास में लोकप्रिय आपदा बिंबावली के सर्वाधिक उल्लेखनीय संग्रहों में से एक हैं।

कृषति के भौगोलिक वितरण ने घटना को विशेष राजनीतिक अनुनाद दिया: विनाश असमान रूप से सामुराई निवासों और तोकुगावा *bakufu* के समर्थकों पर पड़ा, जिसका अधिकार 1853–54 में कमोडोर पेरी के भ्रमणों के बाद जापान को विदेशी व्यापार के लिए बलपूर्वक खोलने से पहले ही दुर्बल था, जबकि सामान्य लोगों के कुछ जिले अपेक्षाकृत अक्षत रहे Smits, 2006। कलाकारों ने *yonaoshi* (“विश्व सुधार”) की संकल्पना द्वारा इस विषमता का उपयोग किया: नामाज़ु केवल विनाशक के रूप में नहीं, बल्कि समताकारी अभिकर्ता के रूप में भी दिखाई दिया, जो अभिजात वर्ग से पुनर्निर्माण से लाभ उठाने वाले कारीगरों और व्यापारियों की ओर संपत्ति के पुनर्वितरण की अध्यक्षता करता था। तोकुगावा सरकार की प्रत्यक्ष आलोचना के लिए कठोर दंड होने के कारण यह राजनीतिक टिप्पणी प्रतीकवाद, दृश्य रूपक और शब्दक्रीड़ा में समाहित की गई—जिससे *namazu-e* केवल भूकंपीय घटना के चित्रण नहीं, बल्कि उत्तर एदो काल के सामाजिक और राजनीतिक तनाव प्रतिबिंबित करने वाले समृद्ध सांस्कृतिक प्रलेख बने (Wakamizu, 2003) (चित्र 16.2 देखें)।

16.2.2 प्रशांत उत्तर-पश्चिम

कैस्केडिया तट पर भूकंपों और सुनामियों की व्याख्या उन शक्तिशाली अलौकिक प्राणियों से संबंधित मिथकीय आख्यानों द्वारा की गई जिनकी गति को पृथ्वी हिलाने और तट पर विशाल तरंगें भेजने वाला माना जाता था। कैस्केडिया अधोगमन क्षेत्र—विश्व के सर्वाधिक भूकंपीय तथा सुनामीजनक संकटपूर्ण विवर्तनिक परिवेशों में से एक—के ऊपर स्थित क्षेत्र में ऐसे आख्यान जनवरी 1700 के विशाल भूकंप और सुनामी तथा होलोसीन अभिलेख की आरंभिक घटनाओं सहित वास्तविक रूप से विनाशकारी भूवैज्ञानिक घटनाओं की सांस्कृतिक स्मृतियाँ सांकेतिक रूप में समेट सकते हैं।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

थंडरबर्ड और व्हेल

क्षेत्र में सर्वाधिक प्रसिद्ध भूकंप विषय थंडरबर्ड—गर्जन और तूफानों से संबद्ध शक्तिशाली आकाशीय आत्मा—तथा महासागर की गहराइयों के जीव व्हेल के बीच संघर्ष से संबंधित है। अनेक परंपराओं के अनुसार उनके हिंसक सम्मुखन से भूमि काँपती और समुद्र उमड़ता था—ऐसा युग्म जो कैस्केडिया अधोगमन क्षेत्र के बड़े विदारण की सह-भूकंपीय सुनामी की विशिष्टता से ठीक-ठीक मेल खाता है। वॉशिंगटन तट के क्विल्यूट लोगों की मौखिक परंपराएँ ऐसे विशाल युद्ध का वर्णन करती हैं जिसमें पृथ्वी का कंपन और तट का जलप्लावन अभिन्न रूप से जुड़े थे। उत्तरी कैलिफोर्निया के यूरोक लोगों में समान बिंब दिखाई देता है, जो सुझाव देता है कि यह अभिप्राय अधिक व्यापक क्षेत्र में फैला है, चित्र 16.3b। भूमि-कंपन को तटीय जलप्लावन से निरंतर जोड़ने के साथ इन कथाओं की स्थिरता और भौगोलिक परास ने कुछ शोधकर्ताओं को तर्क देने के लिए प्रेरित किया है कि थंडरबर्ड–व्हेल चक्र प्रागैतिहासिक महाप्रणोद भूकंपों की वास्तविक स्मृति सुरक्षित रखता है (Ludwin and Smits, 2007)।

भूदृश्य आत्माएँ और भूवैज्ञानिक स्मृति

प्यूजेट साउंड क्षेत्र की अन्य परंपराएँ भूकंपों और अचानक भूदृश्य रूपांतरणों को विशिष्ट भौगोलिक आकृतियों में रहने वाले अलौकिक सर्पाकार प्राणियों से जोड़ती हैं। उल्लेखनीय उदाहरण पश्चिम सिएटल में फॉन्टलरॉय के निकट “आत्मा शिलाखंड” है, जिसे स्थानीय मूलनिवासी लोग परंपरागत रूप से *A’Yahos* नामक अलौकिक सत्ता से जोड़ते हैं; इसका वर्णन भूकंपों अथवा बड़े भूस्खलनों के भौतिक प्रभावों से निकटता से मेल खाता है: अचानक हिंसक कंपन, परिचित भूभाग का रूपांतरण और पृथ्वी के भीतर से विनाशकारी शक्तियों का विमोचन। भूमि-विक्षोभ से संबद्ध द्विमुखी सर्प प्रशांत उत्तर-पश्चिम संस्कृतियों में व्यापक है और तटीय सैलिश लोगों के *Sxwayxwey* मुखौटों सहित अनेक आनुष्ठानिक संदर्भों में दिखाई देता है। इस आकृति को विवर्तनिक द्वैत के प्रतीकात्मक संकेतन के रूप में समझा जा सकता है: एक साथ भूमिगत और सतही शक्ति, जो पृथ्वी के छिपे आंतरिक भाग को ऊपर के दृश्य भूदृश्य से जोड़ती है, चित्र 16.3a।

प्रशांत उत्तर-पश्चिम की परंपराएँ आधुनिक भूकंपवैज्ञानिकों के लिए विशेष रुचि रखती हैं क्योंकि क्षेत्र का भूवैज्ञानिक अभिलेख असामान्य रूप से सुसंबद्ध है। 1700 का कैस्केडिया भूकंप भूवैज्ञानिक स्तरक्रम—मृत वन, सुनामी बालू परतें, धँसे तटीय दलदल—और अनाथ सुनामी के जापानी ऐतिहासिक अभिलेखों में प्रलेखित है। एक ही विनाशकारी घटना के लिए भूवैज्ञानिक, ऐतिहासिक और मूलनिवासी मौखिक साक्ष्यों के इस अभिसरण ने उस परिकल्पना को नई विश्वसनीयता दी है कि ये आख्यान 1700 की घटना और संभवतः आरंभिक कैस्केडिया विदारणों की वास्तविक स्मृति सुरक्षित रखते हैं (Ludwin and Smits, 2007); इससे शताब्दियों अथवा सहस्राब्दियों के कालमानों में भूवैज्ञानिक सूचना के भंडार के रूप में कार्य करने की मौखिक परंपरा की क्षमता पर गहन प्रश्न उठते हैं।

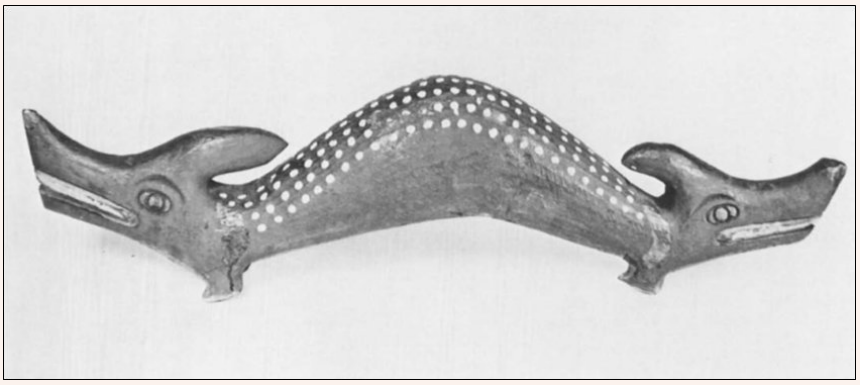
16.2.3 अमेरिका

मेसोअमेरिका और प्रशांत तट—प्रशांत अग्निवलय के पूर्वी किनारे पर तीव्र भूकंपीय तथा ज्वालामुखीय सक्रियता वाला क्षेत्र—में भूकंप संबंधी मिथक इन भूदृश्यों में रहने वाले लोगों द्वारा अनुभव किए गए भूवैज्ञानिक संकटों के निकट भौगोलिक सामंजस्य में विकसित हुए।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) मुख्यभूमि ब्रिटिश कोलंबिया का Sxwayxwey मुखौटा।



(b) क्विलयूट आनुष्ठानिक निरूपण।

चित्र 16.3: भूकंपीय आत्माओं को निरूपित करने वाली प्रशांत उत्तर-पश्चिम तट की आनुष्ठानिक वस्तुएँ।

मेसोअमेरिका और चित्रलिपियाँ

मध्य और उत्तरी मेक्सिको में चित्रलिपियाँ कहलाने वाली सचित्र पांडुलिपियाँ भूकंपों को चित्रित करती हैं और कुछ मामलों में घटनाओं की संख्या तथा तिथियाँ अभिलेखित करती हैं, जो सुझाव देता है कि भूकंपीय घटनाएँ ऐतिहासिक, पंचांगीय और भविष्यकथन तंत्रों में एकीकृत थीं। एज़्टेक परंपरा में दिवस-चिह्न *Ollin* (“गति” अथवा “भूकंप”) 260-दिवसीय आनुष्ठानिक पंचांग *tonalpohualli* में प्रमुख स्थान रखता था और वर्तमान वैश्विक युग—पंचम सूर्य—का नाम *Nahui Ollin* (“चार गति”) था, जिसके विनाशकारी भूकंप में समाप्त होने की भविष्यवाणी की गई थी। पूर्व-कोलंबियाई सभ्यता की सर्वाधिक प्रतिष्ठित वस्तुओं में से एक एज़्टेक सूर्य शिला (*Piedra del Sol*) अपनी संरचना के ठीक केंद्र में *Ollin* लिपिचिह्न रखती है—भूकंप की वैश्विक केंद्रीयता की ऐसी दृश्य घोषणा जो सरल लोक व्याख्या से बहुत आगे जाती और इसके बजाय भूकंपीय घटनाओं की पुनरावृत्ति तथा अननुमेयता से परिष्कृत दार्शनिक संलग्नता प्रस्तुत करती है।

16.2.4 अन्य परंपराएँ

यद्यपि पूर्ववर्ती खंडों ने सुप्रलेखित क्षेत्रीय परंपराओं पर ध्यान केंद्रित किया है, भूकंप संबंधी मिथक वास्तविक रूप से वैश्विक परिघटना हैं और अनेक अतिरिक्त परंपराएँ संक्षिप्त विचार की अधिकारी हैं।

स्कैंडिनेविया में जैसा ऊपर उल्लेख किया गया है, नॉर्स मिथक भूकंपों का कारण छलिया देवता लोकी की ऐंठन को मानता था, जिसे पृथ्वी के नीचे बँधा पड़ा रहने का दंड मिला था और एक सर्प उसके मुख पर विष टपकाता था। पीड़ा में उसका छटपटाना—जो उसकी पत्नी सिगिन द्वारा पात्र में विष एकत्र करने पर अस्थायी रूप से शांत होता और पात्र रिक्त करने के लिए उसके हटने पर विशेष हिंसा से पुनः आरंभ होता—ऊपर की भूमि को काँपाता था। यह मिथक अपनी नैतिक संरचना के लिए उल्लेखनीय है: यहाँ भूकंप दैवी दंड, अपराध और पीड़ा का बाह्यकरण है।

भारत में *Shatapatha Brahmana* और अन्य आरंभिक ग्रंथ पृथ्वी को विष्णु के अवतार विशाल वराह (*Varaha*) की पीठ पर स्थित बताते हैं, जबकि विभिन्न क्षेत्रों की लोक परंपराओं ने भूकंपों का

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कारण विशाल हाथी अथवा उस विश्व-कछुए की गति को माना जिसकी पीठ पर पृथ्वी संतुलित थी। इस प्रकार दक्षिण और दक्षिण-पूर्व एशियाई परंपराओं ने ऊपर विवेचित व्यापक रूप से प्रसारित “पशु-द्वारा-समर्थित-पृथ्वी” अभिप्राय में भाग लिया। हिंदू दार्शनिक ब्रह्मांडविज्ञान में भूकंपों की व्याख्या *karma* और वैश्विक काल के दृष्टिकोण से भी की गई: कुछ भूकंपीय घटनाएँ वैश्विक युगों (*yugas*) के बीच संक्रमण से संबद्ध थीं, जिसने उन्हें एज़्टेक *Nahui Ollin* के सदृश युगांतशास्त्रीय महत्त्व दिया।

मध्य पूर्व में सुमेर और बेबीलोन के प्राचीन मेसोपोटामियाई ग्रंथ भूकंपीय घटनाएँ अभिलेखित करते और उनका कारण विशिष्ट देवताओं, विशेषतः तूफान के देवता, का क्रोध मानते हैं। कुछ विद्वानों ने तर्क दिया है कि मृत सागर रूपांतरण भ्रंश तंत्र—लेवांत से होकर जाने वाली भूकंपीय रूप से सक्रिय संरचना—के साथ स्थित प्राचीन नगरों का विनाश जेरिको के पतन तथा सदोम और गोमोरा के विनाश सहित दैवी आदेश से हुए विनाश के बाइबिल वृत्तांतों में प्रतिबिंबित होता है। यद्यपि विशिष्ट ग्रंथों और विशिष्ट भूवैज्ञानिक घटनाओं के बीच कार्यकारण संबंधों पर वाद-विवाद जारी है, क्षेत्र में भूकंपीय सक्रियता का व्यापक प्रतिरूप और धार्मिक तथा मिथकीय परंपराओं पर उसका संभावित प्रभाव निरंतर अंतःविषयी शोध का विषय है।

16.2.5 संश्लेषण: भूकंपीय स्मृति के रूप में मिथक

इस अध्याय में सर्वेक्षित परंपराएँ एक सुसंगत वैश्विक प्रतिरूप प्रकट करती हैं: भूकंपीय रूप से सक्रिय क्षेत्रों में स्थित मानव संस्कृतियाँ ऐसे मिथकीय ढाँचे विकसित करती हैं जो भूकंप के अनुभव को सांकेतिक रूप में समेटते, उसकी व्याख्या करते और उसे नैतिक तथा सामाजिक महत्त्व देते हैं। ये ढाँचे अपने विशिष्ट बिंबों—पशु संरक्षक, सर्पाकार शक्तियाँ, वैश्विक असंतुलन, दैवी दंड—में भिन्न हैं, किंतु साझा संरचनात्मक तर्क रखते हैं। वे भूकंप को कर्तृत्व देते हैं (वह किसी प्राणी के कारण होता है); उस कर्तृत्व को पर्यवेक्षण अथवा संरक्षण के आख्यान में समाहित करते हैं (प्राणी सामान्यतः नियंत्रित रहता है, किंतु कभी बच निकलता अथवा प्रहार करता है); और भूकंप को प्रायः सामाजिक अथवा वैश्विक नवीकरण की व्यापक प्रक्रियाओं से जोड़ते हैं।

इनमें से अनेक परंपराएँ अपने प्रतीकात्मक ढाँचों के साथ वास्तविक आनुभविक अंतर्वस्तु रखती प्रतीत होती हैं। भूमि-कंपन को तटीय जलप्लावन से जोड़ने वाली प्रशांत उत्तर-पश्चिम की कथाएँ कैस्केडिया महाप्रणोद घटनाओं की सह-भूकंपीय सुनामी की विशिष्टता से सटीक मेल खाती हैं। बाजा कैलिफोर्निया और दक्षिणी कैलिफोर्निया में सक्रिय भ्रंशों के ऊपर भूकंप-संबंधी शैल-कला का भौगोलिक गुच्छन सुझाव देता है कि कुछ मामलों में मिथकीय बिंबावली के स्थान प्रेक्षित भूकंपीय परिघटनाओं से निर्धारित हुए थे। असामान्य कैटफिश व्यवहार की जापानी परंपरा भूकंपीय घटनाओं के पशु पूर्वगामियों के विषय में प्रेक्षण का बीज सुरक्षित रख सकती है। इनमें से कुछ भी आधुनिक अर्थ में इन परंपराओं को वैज्ञानिक समझ का श्रेय देने की माँग नहीं करता; किंतु यह सुझाव अवश्य देता है कि मिथकीय और मौखिक परंपराओं पर सावधानीपूर्वक ध्यान कुछ मामलों में वास्तविक भूवैज्ञानिक प्रासंगिकता की सूचना प्रदान कर सकता है।

अतः भूकंप संबंधी मिथकों का अध्ययन केवल सांस्कृतिक इतिहास का अभ्यास नहीं है। यह विपत्ति को अर्थ देने की गहरी मानवीय आवश्यकता प्रकाशित करता है और साथ ही प्रदर्शित करता है कि मिथकीय आख्यान तथा आनुभविक प्रेक्षण के बीच सीमा प्रायः दिखाई देने की तुलना में अधिक पारगम्य होती है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16.3 धर्म

भूकंपों की धार्मिक व्याख्या मिथकीय व्याख्या से प्रकार में नहीं, बल्कि संस्थागत विस्तार की मात्रा में भिन्न है। जहाँ मिथक मौखिक परंपरा और प्रतीकात्मक बिंबावली में मूलित आख्यानात्मक व्याख्याएँ देता है, वहीं धर्म उन व्याख्याओं को सिद्धांत, धार्मिक अनुष्ठान और पवित्र ग्रंथ की औपचारिक संरचनाओं में समाहित करता है—भूकंप को व्यापक धर्मवैज्ञानिक व्यवस्था में नियत स्थान देता और भूकंपीय विपत्ति के लिए निर्धारित सामुदायिक अनुक्रियाएँ उत्पन्न करता है। फिर भी जैसा इस अध्याय के परिचय में देखा गया है, दोनों क्षेत्रों के बीच सीमा ऐतिहासिक रूप से नियत होने के बजाय परिवर्तनशील है: मिथकीय आख्यान प्रायः धार्मिक तंत्रों में आत्मसात होते, प्रक्रिया में रूपांतरित होते, किंतु कभी पूर्णतः मिटते नहीं हैं। इस खंड में सर्वेक्षित परंपराएँ उस गतिकता को विशेष स्पष्टता से दर्शाती हैं।

नीचे परीक्षण की गई यहूदी-ईसाई, यूनानी, हिंदू, बौद्ध, इस्लामी, मेसोअमेरिकी और जापानी परंपराओं में एक सुसंगत प्रतिरूप उभरता है। भूकंप कभी केवल भूवैज्ञानिक घटनाएँ नहीं होते; वे सदैव दैवी उपस्थिति, दैवी क्रोध, वैश्विक असंतुलन अथवा युगांतशास्त्रीय आसन्नता में से किसी के संचार भी होते हैं। उस संचार की विशिष्ट धर्मवैज्ञानिक अंतर्वस्तु विभिन्न परंपराओं में अत्यधिक भिन्न है, किंतु व्याख्यात्मक प्रतिवर्त स्वयं—यह आग्रह कि पृथ्वी का काँपना कुछ अर्थ रखता है, मानवता को संबोधित है और अनुक्रिया की माँग करता है—सार्वभौम प्रतीत होता है। ठीक इसी प्रतिवर्त को §16.4 में सर्वेक्षित दार्शनिक परंपरा अपनी पहली निरंतर आलोचनात्मक परीक्षा के अधीन करेगी।

16.3.1 बाइबिल

यहूदी-ईसाई परंपरा में ईश्वर प्रायः प्राकृतिक परिघटनाओं द्वारा स्वयं को प्रकट करते हैं। अतः भूकंप, तूफान, अग्नि और बाढ़ की व्याख्या केवल भूवैज्ञानिक अथवा मौसमवैज्ञानिक घटनाओं के रूप में नहीं, बल्कि दैवी उपस्थिति, शक्ति और इच्छा की दृश्य अभिव्यक्तियों के रूप में की जाती है। यह व्याख्यात्मक ढाँचा ऊपर सर्वेक्षित मिथकीय परंपराओं से निरंतर होते हुए भी उनसे भिन्न है: जहाँ मिथक भूकंपीय कर्तृत्व भूमिगत प्राणियों अथवा वैश्विक शक्तियों को देता है, वहीं बाइबिल धर्म भूकंप को अनुबंध, न्याय और मुक्ति के धर्मवैज्ञानिक आख्यान में समाहित करता है—ऐसा आख्यान जिसमें पृथ्वी का कंपन मानवता की नैतिक दशा से अविभाज्य है। संदर्भ के अनुसार बाइबिल का भूकंप देवप्राकट्य, चमत्कारी हस्तक्षेप के उपकरण अथवा पवित्र आख्यान में आत्मसात वास्तविक भूवैज्ञानिक विपत्ति की सांकेतिक स्मृति के रूप में कार्य करता है।

देवप्राकट्य और दैवी उपस्थिति

देवप्राकट्य[3] के रूप में भूकंप का प्रभावशाली उदाहरण सिनाई पर्वत पर प्रकाशन के समय घटित होता है:

[3]यूनानी *theophaneia* (*θεοφανεια*) से, जो *theos* (*θεος*), "देवता," और *phainein* (*φαινειν*), "प्रकट होना" अथवा "प्रत्यक्ष करना," से संयुक्त है। यह पद सृजित व्यवस्था के भीतर दैवी सत्ता की प्रत्यक्ष, बोधगम्य अभिव्यक्ति दर्शाता है—*epiphany* (*epiphaneia*, *επιφανεια*) से भिन्न, जो अधिक व्यापक रूप से दैवी दर्शन अथवा आगमन दर्शाता है, और *apocalypse* (*apokalýpsis*, *αποκαλυψις*) से भिन्न, जिसका अर्थ छिपे ज्ञान का अनावरण अथवा प्रकाशन है। हिब्रू परंपरा में सिनाई का देवप्राकट्य सु-परिभाषित साहित्यिक विधा से संबंधित है जिसमें ज्वालामुखीय, भूकंपीय और वायुमंडलीय

> संपूर्ण सिनाई पर्वत धुएँ से ढका था क्योंकि प्रभु अग्नि के रूप में उस पर उतरे थे। धुआँ भट्टी के धुएँ की तरह आकाश में उमड़ा और संपूर्ण पर्वत तीव्रता से काँपा। (Exodus 19:18)
>
> 1611 *The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments*



चित्र 16.4: यान ल्यूकेन की *Israel at Mount Sinai* (1703)। यह उत्कीर्णन भूकंपीय देवप्राकट्य को संपूर्ण पर्यावरणीय उथल-पुथल के रूप में दिखाता है, जहाँ शिखरों का दाँतेदार, अस्थिर निरूपण दैवी उपस्थिति की अनुक्रिया में पृथ्वी के “तीव्र कंपन” का संकेत देता है।

यहाँ भूकंप अकेला नहीं है, बल्कि ज्वालामुखीय और वायुमंडलीय परिघटनाओं—अग्नि, धुआँ, अंधकार—के व्यापक संकुल का भाग है, जिनके माध्यम से दैवी उपस्थिति प्रकट होती है (चित्र 16.4)। भूकंपीय और वायुमंडलीय संकेतों का समान अभिसरण *Book of Judges* में दिखाई देता है:

> पृथ्वी काँपी और आकाश से बूँदें गिरीं, बादलों ने भी जल गिराया; पर्वत Lord के सम्मुख पिघल गए।[a]
>
> 1611 *The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments*

[a] Judges 5:4। समान रूप से विचारोत्तेजक फ्रांसीसी अनुवाद है: *“La terre trembla, les cieux chancelèrent, les nuées déversèrent de l’eau, les montagnes s’affaissèrent devant le Seigneur”* (Louis Segond, 1910)। “पिघल गए” के रूप में अनूदित हिब्रू क्रिया (*nāzalû*) में बहने अथवा घुलने का अर्थ है, जो दैवी आगमन के सम्मुख भूदृश्य के द्रवीकरण अथवा अस्थिरीकरण का संकेत देता है—संभावित भूकंपवैज्ञानिक रुचि का विवरण।

परिघटनाएँ सामूहिक रूप से इस्राएल के ईश्वर *YHWH* (टेट्राग्रामेटन, लिप्यंतरित *yod-hē-wāw-hē*) के आगमन का संकेत देती हैं। प्रामाणिक विद्वत्तापूर्ण विवेचन Jeremias, 1965 ही है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दोनों अंशों में पृथ्वी का कंपन दैवी आगमन की वैश्विक स्वीकृति के रूप में कार्य करता है—भूदृश्य स्वयं ईश्वर की उपस्थिति की अनुक्रिया करता है।

चमत्कारी हस्तक्षेप के रूप में भूकंप

नव विधान में अनेक प्रसंग हैं जिनमें निर्णायक धार्मिक महत्त्व के क्षणों के साथ भूकंप घटित होते हैं। मसीह की मृत्यु के क्षण पर मैथ्यू अभिलेखित करते हैं कि “पृथ्वी काँपी, शिलाएँ फट गईं और समाधियाँ खुल गईं” (Matthew 27:51–53)—यह अंश अन्य सुसमाचारों में उल्लेखनीय रूप से अनुपस्थित है और इसमें भूकंपीय घटना सूली पर चढ़ाए जाने की वैश्विक पुष्टि के रूप में कार्य करती है। इसी प्रकार Matthew 28:2 में पुनरुत्थान का वृत्तांत अभिलेखित करता है कि “विशाल भूकंप हुआ, क्योंकि प्रभु का एक देवदूत स्वर्ग से उतरा था।”

चमत्कारी भूकंपीय हस्तक्षेप का अधिक अंतरंग प्रसंग Acts 16:19–40 में घटित होता है, जब पॉल और सिलास फिलिप्पी में बंदी होते हैं और अपनी बेड़ियों के बावजूद प्रार्थना तथा भजन-गायन जारी रखते हैं (चित्र 16.5)। उनकी दृढ़ता को नाटकीय पुरस्कार मिलता है:

> अचानक एक विशाल भूकंप आया, जिससे बंदीगृह की नींवें हिल गईं; और तत्काल सभी द्वार खुल गए तथा प्रत्येक व्यक्ति की बेड़ियाँ खुल गईं। (Acts 16:26)
>
> 1611 *The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments*



चित्र 16.5: हिएरापोलिस, फ्रिजिया में प्रेरित फिलिप पर पथराव (यान ल्यूकेन, 1685)।

यहाँ भूकंप न देवप्राकट्य, न न्याय, बल्कि मुक्ति के रूप में कार्य करता है—उत्पीड़ित आस्थावानों के साथ दैवी एकात्मता की भूकंपीय अभिव्यक्ति। यह प्रतिरूप व्यापक बाइबिल धर्मविज्ञान के अनुरूप है, जिसमें प्राकृतिक विपत्ति स्वेच्छाचारी होने के बजाय सदैव सोद्देश्य होती है: वह सेवा करती, दंड देती, मुक्त करती अथवा प्रकट करती है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बाइबिल आख्यान में भूवैज्ञानिक घटनाएँ

कुछ बाइबिल आख्यान पहचानी जा सकने वाली भूवैज्ञानिक घटनाओं से मेल खाते प्रतीत होते हैं, जिससे प्रश्न उठता है कि प्राचीन धार्मिक स्मृति वास्तविक भूकंपीय विपत्तियों के चिह्न किस सीमा तक सुरक्षित रख सकती है। जॉर्डन नदी को पार करना और उसके बाद जेरिको की दीवारों का विनाश सर्वाधिक चर्चित उदाहरणों में हैं। दोनों घटनाएँ प्रमुख नतिलंब-सर्पण जॉर्डन घाटी भ्रंश के साथ घटित होती हैं, जो लेवांत की सर्वाधिक भूकंपीय रूप से सक्रिय संरचनाओं में से एक है। प्रबल भूकंप नदी के लगभग ऊर्ध्वाधर जलोढ़ तटों—भूकंपीय अस्थिरीकरण के प्रति विशेष रूप से सुभेद्य कोमल मार्ल और जलोढ़ मृत्तिका से निर्मित—का पतन प्रेरित कर सकता था, जिससे ऊर्ध्वप्रवाह अस्थायी रूप से अवरुद्ध होता और अधोप्रवाह की नदीतली पार करने के लिए पर्याप्त रूप से रिक्त हो जाती। इस परिकल्पना को असामान्य बल स्वयं बाइबिल वृत्तांत की भौगोलिक परिशुद्धता से मिलता है: Joshua 3:16 विशेष रूप से *Adam* नगर (आधुनिक दमिया से पहचाना गया) को वह स्थान बताता है जहाँ जल “ढेर हुआ”—ठीक वही स्थल जहाँ भूकंप-प्रेरित तट-पतन अनेक अवसरों पर ऐतिहासिक रूप से प्रलेखित हुए हैं, जिनमें 1267, 1546, 1906 और सबसे हाल में 1927 सम्मिलित हैं, जब 6.2 परिमाण के भूकंप ने नदी को इक्कीस घंटे से अधिक समय तक अवरुद्ध रखा। समान भौगोलिक स्थान पर इस परिघटना की पुनरावृत्ति जोशुआ आख्यान की भूकंपीय व्याख्या को पर्याप्त संभाव्यता देती है। आगे की भूकंपीय क्षति ने तब जेरिको की दीवारों के पतन में योगदान दिया होगा (चित्र 16.6)। जेरिको का विनाश पंद्रहवीं शताब्दी के भूकंप वृत्तांत में पहले ही भूकंपीय घटना के रूप में सूचीबद्ध था और टेल एस-सुल्तान में पुरातात्त्विक उत्खननों ने भूकंप क्षति से सुसंगत विनाश परतें प्रकट की हैं (Nur and Burgess, 2008)।



चित्र 16.6: वर्जिल सोलिस की जेरिको की लड़ाई (c. 1560) (कोज़ाक संग्रह)।

सदोम और गोमोरा के विनाश को समान भ्रंश तंत्र के साथ घटित बड़े भूकंप से भी जोड़ा गया है, जिसके साथ संभवतः प्राकृतिक गैस और बिटुमेन के विस्फोटक विमोचन—दोनों मृत सागर रूपांतरण की भ्रंश संरचनाओं के साथ प्रचुरता से प्रलेखित हैं—तथा क्षेत्र की ज्वालामुखीय सक्रियता हुई। इस संबंध का उल्लेख मध्य पूर्वी मिथकीय परंपराओं के पूर्ववर्ती खंड (§16.2.4) में पहले ही किया गया है।

अधिक अनुमानपरक किंतु व्यापक रूप से चर्चित परिकल्पना निर्गमन आख्यान को सैंटोरिनी (थेरा) के विनाशकारी उद्गार—प्राचीन विश्व की सबसे शक्तिशाली ज्वालामुखीय घटनाओं में से एक, जिसे लगभग

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सत्रहवीं अथवा सोलहवीं शताब्दी BCE में दिनांकित किया गया है—से जोड़ती है। Nur and Burgess, 2008 सहित विद्वानों द्वारा विभिन्न रूपों में विकसित यह परिकल्पना प्रस्तावित करती है कि इस उद्गार से संबद्ध तीव्र भूकंपीय और ज्वालामुखीय सक्रियता ने पूर्वी भूमध्यसागर में बाइबिल की विपत्तियों सदृश पर्यावरणीय विक्षोभों की शृंखला उत्प्रेरित की होगी—जिसमें ज्वालामुखीय राख के मेघों से संबद्ध दीर्घकालिक अंधकार सम्मिलित है—और भूकंपीय विक्षोभों ने निर्गमन के पारगमन आख्यान में वर्णित जल स्तरों के अस्थायी परिवर्तन में योगदान दिया होगा। इसी परिकल्पना के अधिक लोकप्रिय विवेचन में Jacobovici and Cameron, 2006 इस्माइलिया के संग्रहालय में चित्रलिपीय अभिलेख की ओर संकेत करते और तर्क देते हैं कि बाइबिल वृत्तांत का "लाल सागर" उथले मीठे जल के बेसिन, एल-बाला झील, को संदर्भित कर सकता है, जो उन्नीसवीं शताब्दी में स्वेज नहर के निर्माण के बाद सूख गई और जिसका जल स्तर तीव्र भूकंप-प्रेरित परिवर्तनों के प्रति संवेदनशील रहा होगा।

ऐसी भूवैज्ञानिक व्याख्याएँ अंततः सही हों अथवा नहीं, वे अधिक व्यापक और सुस्थापित परिघटना स्पष्ट करती हैं: भूकंपीय रूप से सक्रिय भूदृश्यों में रहने वाले समुदाय विनाशकारी घटनाओं के अपने अनुभव को एक साथ ऐतिहासिक, धर्मवैज्ञानिक और मिथकीय आख्यानों में सांकेतिक रूप से समाहित करते हैं। जैसा इस अध्याय के परिचय में कहा गया है, इन वर्गों के बीच सीमा विरले ही नियत होती है। इस अर्थ में बाइबिल ऊपर सर्वेक्षित मिथकीय परंपराओं में पहचानी गई उसी मूलभूत गतिकता—पृथ्वी की भयावह अननुमेयता को व्यापक आख्यानात्मक ढाँचे के भीतर अर्थपूर्ण बनाने का मानवीय आवेग—में भाग लेती है।

16.3.2 यूनान

प्राचीन यूनानियों में भूकंपों की व्याख्या एक साथ मिथकीय, धार्मिक और—जैसा अगला खंड दिखाएगा—आरंभिक दार्शनिक स्थान रखती थी। यूनानी विश्व में इन क्षेत्रों के बीच सीमाएँ विशेष रूप से परिवर्तनशील थीं: चिंतकों की एक ही पीढ़ी में समान देवता का आह्वान सांप्रदायिक संदर्भ में किया जा सकता, मिथकीय पद्य में आख्यानित किया जा सकता और परिमेय आलोचना के अधीन रखा जा सकता था। अतः भूकंपों के प्रति यूनानी धार्मिक अनुक्रिया को ऊपर सर्वेक्षित मिथकीय परंपराओं से पूर्णतः पृथक करके देखना असंभव है; इसके बजाय दोनों को निरंतर व्याख्यात्मक परंपरा की क्रमिक परतों के रूप में समझा जाना चाहिए।

पोसीडॉन एनोसिख्थॉन: पृथ्वी-कंपक

भूकंपों को पोसीडॉन से जोड़ना केवल मिथकीय सुविधा नहीं, बल्कि सक्रिय धार्मिक संप्रदाय का विषय था। अपनी अनेक उपाधियों में पोसीडॉन *Enosichthon* (*ενοσιχθων*)—"पृथ्वी-कंपक"—और *Ennosigaios* (*εννοσιγαιος*), "भूमि को हिलाने वाला," की उपाधियाँ धारण करता था। ये उपाधियाँ होमर और हेसिओड में पहले ही दिखाई देती हैं और संबंध की प्राचीनता प्रमाणित करती हैं। *Iliad* में भूदृश्य पर पोसीडॉन की गति का वर्णन ऐसे पदों में है जो उसके भूकंपीय चरित्र के विषय में कोई अस्पष्टता नहीं छोड़ते:

> वह आगे बढ़ा और उसकी गति के साथ पोसीडॉन के अमर चरणों के नीचे ऊँचे वन तथा पर्वत काँप उठे। (*Iliad*, XIII.18)
>
> Homer, 1924 *The Iliad*

यद्यपि बाद की ओलंपियाई व्यवस्था में पोसीडॉन को मुख्यतः समुद्र के देवता के रूप में स्मरण किया

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जाता है, परंपरा की पुरानी परतें अधिक प्राचीन और व्यापक भूमिका सुझाती हैं। उसकी पहचान मुख्यतः सामुद्रिक बनने से पहले वह स्वयं पृथ्वी, भूपर्पटी के नीचे के खनिज विश्व और हिंसक सतही विक्षोभ उत्पन्न करने में सक्षम छिपी शक्तियों से संबद्ध प्रतीत होता है। इस पुरानी संकल्पना में भूकंप और तूफान दोनों उसके क्रोध की अभिव्यक्तियाँ थे। भूकंप द्वारा उसका नाम सुरक्षित रखने के साथ उसके क्षेत्र का समुद्र तक क्रमिक संकुचन यूनानी धार्मिक परंपरा का स्तरित चरित्र प्रतिबिंबित करता है: नई धर्मवैज्ञानिक संरचनाएँ पुरानी संरचनाओं को पूर्णतः विस्थापित किए बिना उनके ऊपर रखी गईं।

फलतः यूनान में भूकंपों की व्याख्या केवल पोसीडॉन के संदर्भ से नहीं की गई, बल्कि धार्मिक व्यवहार के माध्यम से उनकी अनुक्रिया भी की गई। प्रमुख भूकंपीय घटनाओं के बाद देवता को शांत करने के लिए बलियाँ चढाई जाती थीं और उसके पवित्र स्थान प्रायः तटीय तथा भूवैज्ञानिक रूप से सक्रिय क्षेत्रों में स्थित होते थे। इस प्रकार भूकंपीय अस्थिरता और दैवी उपस्थिति का संबंध केवल मिथक में आख्यानित नहीं, बल्कि संप्रदाय में संस्थागत था।

एन्सेलाडस और दैत्ययुद्ध

पोसीडॉन परंपरा, जिसमें देवता की सक्रिय गति पृथ्वी को हिलाती है, यूनानी धार्मिक चिंतन में दैत्ययुद्ध के मिथक—ओलंपियाई देवताओं और पृथ्वी-जनित दैत्यों के बीच विशाल आदिम युद्ध—में मूलित संरचनात्मक रूप से भिन्न वृत्तांत के साथ सह-अस्तित्व रखती थी। इस परंपरा में भूकंप का कारण देवता का मार्ग नहीं, बल्कि पराजित वैश्विक शत्रु के बंदी संघर्ष हैं।

एन्सेलाडस ($Εγκελαδος$), जो दैत्यों में सबसे शक्तिशाली और दैत्ययुद्ध में एथेना का पारंपरिक शत्रु था, देवी के भाले से आहत होकर सिसिली द्वीप—अथवा वर्जिल और स्टेटियस की अधिक सटीक परंपरा में स्वयं एटना पर्वत—के नीचे दबाया गया। एटना की ज्वालामुखीय अग्नियाँ एन्सेलाडस की श्वास मानी जाती थीं; उसके कंपन पर्वत के नीचे उसके घायल पार्श्व को पलटने का परिणाम। वर्जिल मिथक को उसकी सर्वाधिक प्रसिद्ध लैटिन अभिव्यक्ति देते हैं:

> Fama est Enceladum semustum fulmine corpus
> urgeri mole hac, ingentemque insuper Aetnam
> impositam ruptis flammam exspirare caminis,
> et fessum quotiens mutet latus, intremere omnem
> murmure Trinacriam et caelum subtexere fumo.
>
> कथा है कि विद्युत से दग्ध शरीर वाला एन्सेलाडस
> इस समस्त भार के नीचे बंदी पड़ा है और उसके ऊपर
> विशाल एटना अपनी फटी भट्टियों से अग्नि उगलता है;
> और जब वह थककर अपना पार्श्व बदलता है,
> संपूर्ण सिसिली काँपता और कराहता है तथा आकाश
> धुएँ से ढक जाता है।
>
> Vergilius Maro, 2008 *The Aeneid*

एन्सेलाडस परंपरा का धर्मवैज्ञानिक तर्क पोसीडॉन से एक महत्त्वपूर्ण अर्थ में भिन्न है। जहाँ पोसीडॉन ऐसा संप्रभु देवता है जिसका क्रोध अथवा गति उसकी शक्ति के उपोत्पाद के रूप में भूकंपीय प्रभाव उत्पन्न करती है, वहीं एन्सेलाडस बंदी है—उन आदिम पृथ्वी-शक्तियों (गैया और यूरेनस के रक्त से जन्मी) का प्रतिनिधि जिन्हें ओलंपियाई व्यवस्था ने पराजित और दमन किया है। पृथ्वी के नीचे उसका निरंतर अस्तित्व दैवी शक्ति का नहीं, बल्कि दैवी विजय का संकेत है: भूकंप पराजित पूर्व-वैश्विक व्यवस्था की अंतिम ऐंठन है, इसका प्रमाण कि ओलंपियाई देवताओं ने स्वयं पृथ्वी में अंतर्निहित हिंसा को वश में

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

किया है, किंतु पूर्णतः बुझाया नहीं। आरोपित वैश्विक व्यवस्था के नीचे दमित आदिम शक्ति की स्थिरता के रूप में भूकंप की इस व्याख्या का पोसीडॉन परंपरा में कोई समानांतर नहीं है और वह मिथकीय रूप में §16.3.2 में परीक्षण किए गए सर्प-पराजय आख्यानों के संरचनात्मक तर्क का पूर्वाभास देती है।



(a) समुद्र में दबा एन्सेलाडस, अपने उदर पर सिसिली और एटना पर्वत धारण किए



(b) गास्पार मर्सी की स्वर्णिम-कांस्य एन्सेलाडस मूर्ति, वर्साय

चित्र 16.7: एन्सेलाडस का मिथक

इस अध्याय में सर्वेक्षित भूकंपीय आकृतियों में एन्सेलाडस की सांस्कृतिक स्थिरता का कोई समानांतर नहीं है। उसका नाम केवल विद्वत्तापूर्ण संकेत अथवा काव्यात्मक रूपक में जीवित नहीं रहा: वह भूकंप के सामान्य जातिवाचक संज्ञा—*egkelados* (*Εγκέλαδος*)—के रूप में यूनानी भाषा में प्रविष्ट हुआ और आज तक आधुनिक यूनानी में ऐसा ही है।[4] यह किसी स्थान-नाम अथवा तारामंडल की रीति से जीवित रहना नहीं है: यह मिथक का भाषा बन जाना है। भूकंप की सूचना देने वाला प्रत्येक यूनानी वक्ता जाने अथवा अनजाने सिसिली के नीचे बंदी पराजित वैश्विक शत्रु का आह्वान करता है—भूकंपीय व्याख्या संस्कृति में इतनी गहराई से समाहित है कि वह उसे उत्पन्न करने वाले धर्मविज्ञान, संप्रदाय, साम्राज्य और सभ्यता से अधिक समय तक जीवित रही और ढाई सहस्राब्दियों से अधिक समय तक सजीव शब्दावली के रूप में स्थिर रही। मंगलाचरण में डिराक से जोड़े गए §16.2 के इस प्रेक्षण—प्राकृतिक प्रक्रियाओं की आधुनिक समझ ने मिथकीय व्याख्या को अप्रचलित बना दिया है—का सर्वाधिक सशक्त प्रतिउदाहरण किसी धर्मवैज्ञानिक तर्क में नहीं, बल्कि शब्दकोश में मिलता है: भूकंप का आधुनिक यूनानी शब्द एक मिथक है।

वह आकृति प्राचीन विश्व से परे अन्य संदर्भों में भी शक्तिशाली रही। वर्साय में राजकीय सर्वोच्चता के प्रतीकों के रूप में ओलंपियाई देवताओं की लुई XIV द्वारा क्रमबद्ध नियुक्ति में एन्सेलाडस का स्मारकीय फव्वारा—*Bosquet de l'Encélade*, जिसका अभिकल्प c. 1675 में बना और जिसे कैम्ब्रे के गास्पार मर्सी ने स्वर्णिम कांस्य में निर्मित किया (चित्र 16.7b)—सम्मिलित था। फव्वारा दैत्य को सिसिली की शिलाओं के नीचे आधा दबा दिखाता है और ज्वालामुखीय अग्नि के स्थान पर उसके मुख से

[4] व्युत्पत्ति इस नाम को क्रिया *enkeleuô* (*Εγκελεύω*), "उत्तेजित करना" अथवा "आक्रमण का संकेत देना," से जोड़ती है—ऐसी व्युत्पत्ति जो नाम के मिथक से सामान्य वाणी में आने पर भी दैत्य का युद्धशील चरित्र सुरक्षित रखती है।

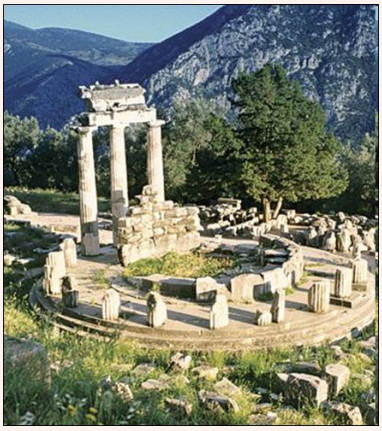
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जल फूटता है—औपचारिक उद्यान की दरवचालित शब्दावली में वरिजल के बिंब का दृश्य रूपांतरण। चयन आकसिमक नहीं था: सूरय राजा के सममुख एनसेलाडस का अधीन होना बारोक संदरभ में उसी वैशविक तरक को परतिबिंबित करता है जिसने उसे एटना के नीचे दबाया था।

पवितर भूगोल और भूकंपीय भूदृशय

यूनानी धारमिक वयवहार की पुनरावरती विशेषता पवितर सथलों को जानबूझकर उन सथानों पर सथापित करना है जहाँ पृथवी असामानय अथवा रहसयमय वयवहार दिखाती थी: तापीय सरोत, गैसीय उतसरजन, भू-दरारें और सथायी भूकंपीय सकरियता के कषेतर। ऐसे सथान केवल भूवैजञानिक रूप से रोचक नहीं, बलकि *enargeis*—ऐसे सथल जहाँ दैवी सतता विशव के पृषठ के असामानय रूप से निकट थी—माने जाते थे।

सरवाधिक परसिदध उदाहरण डेलफी में अपोलो का पवितर सथान है, चितर 16.8। अब यह सुसथापित है कि डेलफी का देववाणी सथल सीधे सकरिय भूकंपीय भरंश के ऊपर सिथत था और *Pythia* की भविषयवाणी संबंधी परेरणा को अंतरनिहित चूना पतथर की दरारों से उठती हाइडरोकारबन वाषप—मुखयतः एथिलीन—के अंतःशवसन से भौतिक सहायता मिली होगी (Broad, 2006; De Boer and Sanders, 2005)। इस परकार पवितर सथल का धारमिक अधिकार आंशिक रूप से उन भूवैजञानिक दशाओं पर आधारित था जिनकी यूनानियों ने दैवी निकटता के संकेतों के रूप में वयाखया की। अपोलो दवारा इस विभंगित, वाषप-उतसरजक भूमि को अपने भविषयवाणी-आसन के रूप में चुनना यूनानी धारमिक कलपना में पूरणतः सुसंगत था: देवता सवयं पृथवी की असिथरता दवारा बोलता था। धयान देने योगय है कि डेलफी के अधिकार की यह भूवैजञानिक वयाखया—यूनानियों दवारा दैवी रूप में अनुभव की गई वसतु का पराकृतिककरण—पराकृतिक और अलौकिक कारयकारण पृथक करने की उस दारशनिक परियोजना का पूरवाभास देती है जिसे §16.4 में लिया गया है।



चितर 16.8: यूनान के डेलफी में एथेना परोनाया के पवितर सथान के भीतर 380 और 360 BC के बीच निरमित वृतताकार मंदिर, डेलफी का थोलोस।

भूकंपीय संरचनाओं के ऊपर सिथत पवितर सथलों का यह परतिरूप डेलफी से परे विसतृत है और एजियाई अनातोलिया तथा यूनानी विशव के अनेक अनय परमुख पवितर सथलों पर पहचाना गया है (Piccardi, 2007)। इन सथलों पर धारमिक महततव और भूवैजञानिक सकरियता का अभिसरण लगभग निशचय ही आकसिमक नहीं था: किसी विशिषट सथान पर भूकंपीय विकषोभ का बार-बार अनुभव करने वाले समुदाय सवाभाविक

ग्रंथ I: यांतरिकी और संरचनातमक विशलेषण का संकषिपत इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex दवारा मूल अंगरेज़ी संसकरण से अनूदित;
अनुवाद में तरुटियाँ संभव हैं।

रूप से उस विक्षोभ की व्याख्या दैवी उपस्थिति के प्रमाण के रूप में करते और समय के साथ पवित्र स्थान के निर्माण द्वारा उस व्याख्या को औपचारिक बनाते। इस अर्थ में यूनानी विश्व का पवित्र भूगोल आंशिक रूप से स्वयं पृथ्वी द्वारा लिखा गया था।

AD 60 का भूकंप और पवित्र आख्यान का रूपांतरण

AD 60 का भूकंप इस बात के सर्वाधिक शिक्षाप्रद उदाहरणों में से एक प्रस्तुत करता है कि वास्तविक भूवैज्ञानिक घटना धार्मिक आख्यान में कैसे आत्मसात और बाद में रूपांतरित हुई। इस काल के भूकंपीय संकट ने पश्चिमी अनातोलिया के विस्तृत चाप को प्रभावित किया और उसके प्रभाव भौतिक अभिलेख तथा दो प्रमुख स्थलों—हिएरापोलिस और कोलोसी—की धार्मिक परंपराओं दोनों में खोजे जा सकते हैं। दोनों मामलों में भूवैज्ञानिक अभिलेख जिसे विनाशकारी भू-विदारण सुझाता है, उसे बाद में चमत्कारी दैवी हस्तक्षेप के रूप में आख्यानित किया गया (Piccardi, 2007)। अतः दोनों स्थल समान अंतर्निहित गतिकता दर्शाते हैं: धार्मिक स्मृति में आत्मसात भूवैज्ञानिक घटना, रूपांतरित किंतु अमिट।

हिएरापोलिस में मुख्य पवित्र परिसर को जानबूझकर सीधे सक्रिय भ्रंश-चिह्न के ऊपर स्थापित करने के प्रबल पुरातात्त्विक और भूवैज्ञानिक साक्ष्य हैं; यह चिह्न अपोलो के मंदिर से प्रमुख तापीय स्रोत तक विस्तृत प्रतीत होता है। यूनानी बसने वालों के आगमन से बहुत पहले यह स्थल अधोलोक से संचार का स्थान माना गया था—संभवतः भ्रंश क्षेत्र से संबद्ध स्थानीय गैसीय उत्सर्जनों और जलतापीय सक्रियता के कारण। यूनानी धार्मिक कल्पना में पाताली देवताओं की श्वास के रूप में व्याख्यायित इन भूमिगत शक्तियों ने स्थल को उसके हेलेनिस्टिक और बाद के ईसाई संबंध प्राप्त करने से बहुत पहले पवित्र चरित्र दिया।

प्रेरित फिलिप के लगभग AD 70–80 में हिएरापोलिस पहुँचने की बात कही जाती है। परंपरा में उनका आगमन दो असाधारण परिघटनाओं द्वारा संरचित है: हिंसक भूकंप और विद्युत के साथ ड्रैगन का प्राकट्य, तथा नगर के मध्य विशाल गर्त का अचानक खुलना, जिसने सर्प-देवी एकिडना के साथ सात सहस्र पुरुषों को निगल लिया। अब प्रभावशाली साक्ष्य हैं कि यह आख्यान AD 60 के भूकंप की स्मृति सुरक्षित रखता है, जिसने नगर से गुजरने वाली मुख्य सड़क के चिह्न पर दीर्घ सतही विदारण खोला प्रतीत होता है—ठीक परंपरा का “गर्त”। यहाँ सर्पाकृति नीचे विवेचित व्यापक प्रतीकात्मक व्याकरण (§16.3.2) में भाग लेती है।

कोलोसी में धार्मिक संकेतन की समानांतर प्रक्रिया दिखाई देती है। परंपरा अभिलेखित करती है कि अन्यधर्मियों ने स्थानीय ईसाई पवित्र स्थान को जलमग्न करने के लिए जलधारा मोड़कर उसे नष्ट करने का प्रयास किया। पुरोहित आर्किप्पस द्वारा आहूत महादूत माइकल प्रकट हुए और अपनी छड़ी से शिला पर प्रहार करके पृथ्वी में ऐसी दरार खोली जिसने जल को पवित्र स्थान से दूर प्रवाहित कर दिया, चित्र 16.9। इस दरार के चारों ओर विकसित नई बस्ती का नाम—कोने ($\chi\omega\nu\alpha\iota$, “कीप”)—सीधे भूवैज्ञानिक आकृति से आया। साक्ष्य दृढ़ता से सुझाते हैं कि यह चमत्कारी दरार वास्तव में AD 60 के भूकंप से संबद्ध भ्रंश-विदारण थी और परंपरा में वर्णित जलनिकास का पुनर्गठन वास्तविक भूकंप-प्रेरित भूदृश्य परिवर्तन प्रतिबिंबित करता है (Piccardi, 2007)। फिर भी धर्मवैज्ञानिक रूपांतरण पूर्ण है: भूविज्ञान ने जो उत्पन्न किया, धार्मिक आख्यान ने उसका कारण देवदूतीय हस्तक्षेप को माना।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 16.9: कोने में महादूत माइकल के चमत्कार को दर्शाता 18th-century का रूसी प्रतिमाचित्र।

सर्प, ड्रैगन और भूकंपीय शक्ति की प्रतीकात्मक भाषा

हिएरापोलिस और कोलोसी दोनों की परंपराओं में सर्पों तथा ड्रैगनों का प्राकट्य आकस्मिक नहीं है। जैसा §16.2.4 और §16.2.3 में विवेचित है, सर्पाकृति विभिन्न संस्कृतियों में भूकंपीय और पाताली शक्तियों के सर्वाधिक व्यापक तथा स्थायी प्रतीकात्मक माध्यमों में से एक है। यूनानी धार्मिक परंपरा में यह संबंध विशेष रूप से समृद्ध रूप में विकसित है। डेल्फी में अपोलो द्वारा मारा गया पाइथन, हिएरापोलिस की एकिडना और कोलोसी में महादूत माइकल द्वारा कुचला गया ड्रैगन सभी साझा प्रतीकात्मक व्याकरण में भाग लेते हैं: भूवैज्ञानिक अस्थिरता और पुरानी धार्मिक व्यवस्थाओं से संबद्ध शक्तिशाली भूमिगत सर्पाकार शक्ति पर नई दैवी अथवा प्रेरित सत्ता विजय प्राप्त करती है।

यह प्रतिरूप—भूकंपीय रूप से सक्रिय स्थल के ऊपर देवता अथवा संत द्वारा पराजित सर्प—सुझाव देता है कि अनातोलिया के ईसाईकरण ने भूकंपों की पुरानी यूनानी धार्मिक व्याख्या को केवल विस्थापित नहीं किया, बल्कि आत्मसात करके पुनः अनूदित किया। हिएरापोलिस का ड्रैगन और डेल्फी का पाइथन समान प्रतीकात्मक परिवार से संबंधित हैं; अंतर इस बात में है कि गर्त के ऊपर अपोलो अथवा प्रेरित फिलिप में से कौन विजयी खड़ा है। दोनों मामलों में धार्मिक आख्यान अस्थिर और संकटपूर्ण पृथ्वी से समुदाय के सम्मुखन को सांकेतिक रूप में समेटता और पाताली शक्ति पर दैवी सत्ता की पुष्टि द्वारा उस सम्मुखन का समाधान करता है। समान प्रतीकात्मक व्याकरण शेष की हिंदू आकृति (§16.3.3) और बौद्ध नाग मुचलिंद (§16.3.3) में पुनः दिखाई देगा, जो भूकंपीय रूपक के रूप में सर्प की अंतर-सांस्कृतिक परास की पुष्टि करता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16.3.3 भारत

भारतीय और यूरेशियाई विवर्तनिक प्लेटों के अभिसरण पर स्थित भारतीय उपमहाद्वीप विश्व के सर्वाधिक भूकंपीय रूप से सक्रिय क्षेत्रों में से एक है। अतः यह आश्चर्यजनक नहीं कि वहाँ उत्पन्न दोनों महान धार्मिक परंपराओं—हिंदू धर्म और बौद्ध धर्म—ने पृथ्वी के कंपन की व्याख्या के लिए परिष्कृत धर्मवैज्ञानिक ढाँचे विकसित किए, जो अपनी विशिष्ट ब्रह्मांडविज्ञानी पूर्वधारणाओं में मूलित रहते हुए ऊपर सर्वेक्षित बाइबिल तथा यूनानी परंपराओं से तुलना के योग्य हैं।

हिंदू धर्म

हिंदू ब्रह्मांडविज्ञानी परंपरा भूकंपीय परिघटनाओं और दैवी व्यवस्था के संबंध के सर्वाधिक विस्तृत वृत्तांतों में से एक प्रस्तुत करती है। जैसा मिथक के पूर्ववर्ती खंड (§16.2.4) में कहा गया है, अनेक परंपराओं में पृथ्वी को विशाल हाथी पर स्थित माना गया, जो स्वयं विश्व-कछुए पर खड़ा था और जिसकी गति भूकंप उत्पन्न करती थी। *Shatapatha Brahmana* अधिक धर्मवैज्ञानिक रूप से विकसित वृत्तांत प्रस्तुत करता है और पृथ्वी को *Varaha*—विष्णु के वराह अवतार—द्वारा संभाली हुई बताता है, जिसने वैश्विक काल के आरंभ में उसे आदिम जल से बचाया था। इस ढाँचे में भूकंपीय अस्थिरता केवल भौतिक नहीं, बल्कि धर्मवैज्ञानिक परिघटना है: वह वैश्विक विघटन के सदैव उपस्थित संकट के विरुद्ध व्यवस्था बनाए रखने के दैवी शक्ति के निरंतर प्रयास को प्रतिबिंबित करती है।

यह युगांतशास्त्रीय आयाम *yugas* के सिद्धांत में सर्वाधिक पूर्ण रूप से व्यक्त है—*Puranas* और *Mahabharata* में वर्णित चार क्रमिक वैश्विक युग। प्रत्येक युग नैतिक और भौतिक व्यवस्था के क्रमिक ह्रास से विशेषीकृत है और युगों के बीच संक्रमण विनाशकारी प्राकृतिक घटनाओं—जिनमें बाढ़, अग्नि और भूकंप सम्मिलित हैं—से चिह्नित होता है। वर्तमान युग *Kali Yuga* को अधिकतम अव्यवस्था का काल माना जाता है, जिसमें भूकंपीय विक्षोभ समीप आते वैश्विक विघटन (*pralaya*) के संकेतों में हैं। एज़्टेक *Nahui Ollin* और अंतिम भूकंप की उसकी भविष्यवाणी से संरचनात्मक समानता प्रभावशाली है, जिसका उल्लेख §16.2.3 में हुआ और जिसे §16.3.5 में आगे विकसित किया गया है: अत्यंत दूर स्थित परंपराओं में भूकंप युगांतशास्त्रीय निष्कर्ष के उपकरण के रूप में दिखाई देता है।

हिंदू भूकंपीय ब्रह्मांडविज्ञान की केंद्रीय सर्पाकृति *Shesha* (*Ananta*, अनंत, भी कहलाता है) है—वह विशाल वैश्विक नाग जिसकी कुंडलियों पर विष्णु विश्व-चक्रों के बीच के अंतराल में शयन करते हैं। शेष को स्वयं पृथ्वी को सहारा देने वाला माना जाता है और उसका हिलना—कुछ वृत्तांतों में उसकी जँभाई—भूमि को काँपाता है। इस प्रकार यह बिंब एक ही मिथकीय आकृति में इस अध्याय में अंतर-सांस्कृतिक भूकंपीय रूपक के रूप में सर्वत्र मिलने वाले सर्पाकार रूप (§16.3.2 देखें) और विघटन के ऊपर स्थायी रूप से निलंबित पृथ्वी के ब्रह्मांडविज्ञानी तर्क दोनों को सांकेतिक रूप से समेटता है। चित्र 16.10A में भारत के मध्य प्रदेश में देवगढ़ के दशावतार मंदिर में वैश्विक सर्प शेष पर शयन करते विष्णु दिखाए गए हैं, c. 500 CE (गुप्त काल)। पृथ्वी के नीचे शेष की कुंडलियों को सर्प के हिलने पर भूकंप उत्पन्न करने वाला माना जाता है। शिला-उत्कीर्णन, *in situ*।

इस ढाँचे के भीतर व्यक्तिगत भूकंपीय घटनाओं की व्याख्या *karma*—कारण और प्रभाव का नैतिक नियम—के दृष्टिकोण से सामूहिक मानवीय अपराध के परिणाम के रूप में की जा सकती थी। प्राचीन उद्गम का यह व्याख्यात्मक प्रतिवर्त आधुनिक काल में उल्लेखनीय जीवन्तता के साथ स्थिर रहा। जब उत्तर-पूर्वी भारत के बिहार क्षेत्र में 15 जनवरी 1934 को विनाशकारी भूकंप आया और लगभग 20,000 लोग

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मारे गए, तब महात्मा गांधी ने सार्वजनिक रूप से उसे अस्पृश्यता के पाप— निम्न जाति के समुदायों को पूर्ण सामाजिक और धार्मिक सहभागिता से क्रमबद्ध रूप से बाहर रखना—का दैवी दंड घोषित किया। इस कथन पर रवींद्रनाथ टैगोर[5] ने तत्काल प्रसिद्ध प्रत्युत्तर दिया; उनका तर्क था कि किसी प्राकृतिक विपत्ति को सामाजिक पाप से जोड़ना गांधी के स्तर के नेता के लिए अनुपयुक्त, नैतिक रूप से अनुत्तरदायी और बौद्धिक रूप से प्रतिगामी था (Paranjape, 2011)। यह संवाद अपने तत्काल संदर्भ से बहुत आगे ऐतिहासिक महत्त्व रखता है: आधुनिक भारतीय संदर्भ में यह भूकंप विपत्ति की धर्मवैज्ञानिक और परिमेय व्याख्याओं के बीच उसी सम्मुखन को पुनः प्रस्तुत करता है जिसने लगभग दो शताब्दी पहले 1755 के लिस्बन भूकंप के बाद यूरोपीय चिंतन को झकझोर दिया था (§16.5.2)।[6]

यह संवाद डिराक द्वारा पृष्ठ 641 पर §16.2 के मंगलाचरण में व्यक्त आत्मविश्वासपूर्ण अस्वीकृति का सशक्त प्रत्युत्तर है,[7] जिन्होंने माना कि प्राकृतिक प्रक्रियाओं की आधुनिक समझ ने प्राकृतिक विपत्ति की धर्मवैज्ञानिक व्याख्या को अप्रचलित बना दिया है। 1934 का बिहार भूकंप अन्यथा सुझाता है।

बौद्ध धर्म

बौद्ध परंपरा भूकंपों का विशिष्ट किंतु पूरक वृत्तांत प्रस्तुत करती है, जो ब्रह्मांडविज्ञानी युगांतशास्त्र की तुलना में स्वयं बुद्ध की जीवनी में अधिक मूलित है। बौद्ध धर्मग्रंथों का आरंभिकतम जीवित संग्रह *Pali Canon* अभिलेखित करता है कि बुद्ध के सांसारिक अस्तित्व के आठ महान क्षणों में से प्रत्येक के साथ भूकंप घटित हुए: उनका गर्भाधान, जन्म, सांसारिक जीवन का त्याग, बोधि वृक्ष के नीचे ज्ञान की प्राप्ति, सारनाथ में उनका प्रथम उपदेश, आसन्न मृत्यु की घोषणा, अंतिम *parinirvana* में उनका प्रवेश और उनके अवशेषों का वितरण। इस ढाँचे में भूकंप दैवी दंड का उपकरण नहीं, बल्कि वैश्विक पुष्टि है—पृथ्वी स्वयं सर्वोच्च आध्यात्मिक महत्त्व की घटनाओं की साक्षी है, ठीक वैसे ही जैसे मैथ्यू के सुसमाचार में सूली पर चढ़ाए जाने और पुनरुत्थान पर पृथ्वी काँपी थी (§16.3.1)।

इस भूकंपीय धर्मविज्ञान के सर्वाधिक दृश्यतः प्रभावशाली मूर्तरूपों में *Mucalinda* का प्रसंग है—नागराज जो पृथ्वी के नीचे से उठकर अपने फैले फण से ध्यानमग्न बुद्ध को तूफान से आश्रय देता है। यह बिंब एक ही संरचना में अध्याय के केंद्रीय अभिप्राय केंद्रित करता है: भूमिगत शक्ति के रूप में सर्प, रूपांतरणकारी शक्ति के आसन के रूप में पृथ्वी और उस शक्ति तथा सर्वोच्च आध्यात्मिक उपलब्धि के बीच संबंध। चित्र 16.10B में कंबोडिया के अंगकोर क्षेत्र में नागराज मुचलिंद द्वारा आश्रय दिए गए बुद्ध दिखाए गए हैं, 12TH CENTURY CE (ख्मेर, उत्तर बायोन शैली)। सर्प ध्यानमग्न बुद्ध की रक्षा करने के लिए पृथ्वी के नीचे से उठता है और भूमिगत शक्ति की बौद्ध संकल्पना को संकटपूर्ण तथा समुचित रूप से समझे जाने पर रक्षक, दोनों रूपों में मूर्त करता है।

[5] रवींद्रनाथ टैगोर (1861–1941), बंगाली कवि, दार्शनिक और संगीतकार, जिन्हें 1913 में साहित्य का नोबेल पुरस्कार मिला—यह पुरस्कार प्राप्त करने वाले प्रथम गैर-यूरोपीय लेखक—और भारत तथा बांग्लादेश दोनों के राष्ट्रगानों के रचयिता।

[6] 1755 के लिस्बन भूकंप (§16.5.2) ने यूरोपीय प्रबोधन में संरचनात्मक रूप से समान वाद-विवाद उत्पन्न किया, जिसमें वोल्तेयर और रूसो ने क्रमशः टैगोर और गांधी के सदृश भूमिकाएँ निभाईं तथा लाइबनित्स का *optimism* सिद्धांत—कि यह "सभी संभावित विश्वों में सर्वोत्तम" है—आक्रमण के अधीन धर्मवैज्ञानिक स्थिति था। दो शताब्दियों और दो महाद्वीपों से पृथक किंतु अपने अंतर्निहित तर्क में समान दोनों प्रसंगों के बीच समानता पर §16.5.2 में आगे विचार किया गया है।

[7] "आज जब हम इतनी प्राकृतिक प्रक्रियाएँ समझते हैं, हमें ऐसे समाधानों की आवश्यकता नहीं है" (Dirac, 1963)। 1934 का बिहार भूकंप सुझाता है कि प्राकृतिक विपत्ति की धर्मवैज्ञानिक पदों में व्याख्या करने का आवेग डिराक की टिप्पणी के संकेत से कहीं अधिक स्थायी है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) *Anantashayana Vishnu*: वैश्विक सर्प शेष पर शयन करते विष्णु।



(b) नागराज मुचलिंद द्वारा आश्रय दिए गए बुद्ध।

चित्र 16.10: हिंदू और बौद्ध प्रतिमाशास्त्र में स्थिरीकारी तथा रक्षक शक्तियों के रूप में वैश्विक सर्प।

Anguttara Nikaya भूकंपों के कारणों की उल्लेखनीय रूप से क्रमबद्ध गणना करता है और पृथ्वी पर कार्यरत पवन तथा जल से उत्पन्न भूकंपीय घटनाओं, महान तपस्वियों की आध्यात्मिक शक्ति से उत्पन्न घटनाओं और बुद्ध के जीवन की घटनाओं के साथ घटित होने वाली घटनाओं के बीच भेद करता है। यह त्रिभागी वर्गीकरण पर्याप्त रुचिकर है: वह भूकंपीय परिघटनाओं के प्राकृतिक, मानवीय और लोकोत्तर कारणों में भेद करने का आरंभिक प्रयास प्रस्तुत करता है और अपनी संरचना में—यदि अपनी अंतर्वस्तु में नहीं—प्राकृतिक तथा अलौकिक कार्यकारण पृथक करने के बाद के दार्शनिक प्रयास का पूर्वाभास देता है, जिसका परीक्षण §16.4 में किया गया है।

बौद्ध धर्म भारतीय उपमहाद्वीप से मध्य एशिया, चीन, तिब्बत और जापान में फैला तो उसका भूकंपीय धर्मविज्ञान ग्रहण करने वाली संस्कृतियों के ब्रह्मांडविज्ञानी ढाँचों में आत्मसात तथा परिवर्तित हुआ। जापान में जैसा §16.2.1 में कहा गया है, पृथ्वी को सहारा देने वाली विशाल मछली के विषय में बौद्ध विचारों ने *Namazu* परंपरा के विकास में योगदान दिया प्रतीत होता है और यह धार्मिक सीमाओं की पारगम्यता स्पष्ट करता है जब परंपराएँ भौगोलिक तथा सांस्कृतिक सीमांतों पर एक-दूसरे से मिलती हैं। तिब्बत में भूकंपों को तांत्रिक ब्रह्मांडविज्ञान के *Vajrayana* ढाँचे में सम्मिलित किया गया, जहाँ वे आनुष्ठानिक शमन की आवश्यकता वाली शक्तिशाली भूमिगत आत्माओं (*nagas*) की सक्रियता का संकेत दे सकते थे। इस प्रकार *naga*—जल, अधोलोक और भूकंपीय विक्षोभ से संबद्ध सर्पाकार प्राणी—पृथ्वी की छिपी शक्तियों के प्रतीकात्मक माध्यमों के रूप में इस अध्याय में सर्वत्र मिलने वाली सर्पाकृतियों की दीर्घ सूची में सम्मिलित होता है (§16.3.2 भी देखें)।

16.3.4 इस्लाम

इस्लामी परंपरा में भूकंप पर्याप्त धर्मवैज्ञानिक महत्त्व का स्थान रखते हैं और कुरान में वर्तमान विश्व में कार्यरत दैवी शक्ति के संकेतों तथा अंतिम दिवस का उद्घाटन करने वाले युगांतशास्त्रीय कंपन के अग्रदूतों, दोनों रूपों में दिखाई देते हैं। यह द्वैत चरित्र—समकालीन दैवी संकेत और वैश्विक समापन के रूप में भूकंप—भूकंपीय घटनाओं के इस्लामी धर्मविज्ञान को ऐसी परास और तीव्रता देता है जो अपनी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विशिष्ट धर्मवैज्ञानिक पूर्वधारणाओं में मूलित रहते हुए ऊपर सर्वेक्षित बाइबिल तथा हिंदू दोनों परंपराओं (§16.3.1, §16.3.3) से तुलना आमंत्रित करती है।

सूरा 99: अल-ज़लज़ला

कुरान में भूकंपों का सर्वाधिक केंद्रित और धर्मवैज्ञानिक रूप से स्पष्ट विवेचन सूरा 99 है, जिसका शीर्षक *Al-Zalzalah* (“भूकंप”) है।[8] केवल आठ आयतों वाला यह कुरान के सबसे छोटे अध्यायों में है, फिर भी सर्वाधिक युगांतशास्त्रीय आवेश वाले अध्यायों में आता है। अध्याय वैश्विक भूकंपीय कंपन की दृष्टि के साथ आरंभ होता है:


سُورَةُ الزِّلْزَالِ مَدَنِيَّةٌ وَهِيَ ثَمَانِ آيَاتٍ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

إِذَا زُلْزِلَتِ الْأَرْضُ زِلْزَالَهَا ﴿١﴾ وَأَخْرَجَتِ الْأَرْضُ أَثْقَالَهَا ﴿٢﴾
وَقَالَ الْإِنسَانُ مَا لَهَا ﴿٣﴾ يَوْمَئِذٍ تُحَدِّثُ أَخْبَارَهَا ﴿٤﴾ بِأَنَّ
رَبَّكَ أَوْحَىٰ لَهَا ﴿٥﴾ يَوْمَئِذٍ يَصْدُرُ النَّاسُ أَشْتَاتًا لِّيُرَوْا
أَعْمَالَهُمْ ﴿٦﴾ فَمَن يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ ﴿٧﴾ وَمَن
يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُ ﴿٨﴾

चित्र 16.11: सूरा 99:1–8 (*Al-Zalzalah*) का सुलेखीय निरूपण

Bismi llāhi r-raḥmāni r-raḥīm
अल्लाह के नाम से, जो अत्यंत कृपालु और परम दयालु है।

1. *Idhā zulzilati l-arḍu zilzālahā*
   जब पृथ्वी अपने अंतिम भूकंप से हिला दी जाएगी,
2. *Wa-akhrajati l-arḍu athqālahā*
   और पृथ्वी अपने भार बाहर निकाल देगी,
3. *Wa-qāla l-insānu mā lahā*
   और मनुष्य कहेगा: “इसे क्या हो रहा है?”
4. *Yawma'idhin tuḥaddithu akhbārahā*
   उस दिन वह अपना समाचार बताएगी,
5. *Bi-anna rabbaka awḥā lahā*

[8] अरबी शीर्षक *al-zalzalah* चतुरक्षरीय मूल *z-l-z-l* से व्युत्पन्न है, जो हिंसक, पुनरावृत्त कंपन व्यक्त करता है—ऐसी ध्वन्यात्मक रचना जिसकी अपनी ध्वनि उसके द्वारा वर्णित परिघटना को क्रियान्वित करती है। यही मूल क्रिया *zalzala* और संज्ञा *zilzal* उत्पन्न करता है, जिनका उपयोग कुरान में भूकंपीय अथवा युगांतशास्त्रीय कंपन दर्शाने के लिए होता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

क्योंकि तुम्हारे प्रभु ने उसे प्रेरित किया है।

6. *Yawma'idhin yaṣduru n-nāsu ashtātan li-yuraw amʿālahum*
उस दिन लोग अपने कर्म दिखाए जाने के लिए बिखरे समूहों में निकलेंगे।
7. *Fa-man yamʿal mithqāla dharratin khayran yarah*
अतः जिसने परमाणु-भार जितना भी शुभ किया होगा, वह उसे देखेगा,
8. *Wa-man yamʿal mithqāla dharratin sharran yarah*
और जिसने परमाणु-भार जितना भी अशुभ किया होगा, वह उसे देखेगा।

Abdel Haleem, 2004 *The Qur'an: A New Translation*
Surat (99:1–8) — al-Zalzalah (The Earthquake)

यहाँ भूकंप केवल भौतिक घटना नहीं, बल्कि वैश्विक प्रकटीकरण का उपकरण है: अपनी नींव तक हिली पृथ्वी अपने द्वारा सुरक्षित रहस्य मुक्त करती है और सभी मानवीय कर्म दैवी न्याय के प्रकाश में दृश्य हो जाते हैं। इस संबंध में *pralaya* के हिंदू सिद्धांत और *Nahui Ollin* की एज़्टेक भविष्यवाणी से संरचनात्मक समानता प्रभावशाली है: स्थान और काल में अत्यंत दूर स्थित परंपराओं में भूकंप युगांतशास्त्रीय समापन तथा नैतिक लेखे-जोखे की क्रियाविधि के रूप में दिखाई देता है (§16.3.7 देखें)।

दैवी संकेतों के रूप में भूकंप

अपने युगांतशास्त्रीय प्रकार्य से परे भूकंप कुरान और पैगंबर के शब्दों तथा कार्यों के संकलित वृत्तांत *hadith* साहित्य[9] में सृजित व्यवस्था के भीतर कार्यरत दैवी शक्ति और उपस्थिति के *ayat* ("संकेत"[10]) के रूप में दिखाई देते हैं। इस क्षमता में वे बाइबिल परंपरा के देवप्राकट्य संबंधी भूकंपों (§16.3.1) के सदृश कार्य करते हैं: वे स्वेच्छाचारी प्राकृतिक घटनाएँ नहीं, बल्कि ईश्वर से मानवता के लिए सोद्देश्य संचार हैं। पैगंबर मुहम्मद द्वारा अनेक *hadith* में भूकंपों की दैवी चेतावनियों के रूप में व्याख्या किए जाने की सूचना है और इस्लामी न्यायशास्त्र ने इस सिद्धांत को क्रमबद्ध रूप से विस्तृत किया: भूकंप उन साधनों में हैं जिनसे ईश्वर मानवता का ध्यान उसकी नैतिक दशा की ओर खींचते हैं।

इस व्याख्या ने विशिष्ट धार्मिक अनुक्रिया उत्पन्न की। बड़े भूकंप के बाद अनेक मुस्लिम समुदायों में *salat al-khusuf*[11]—प्रार्थना और प्रायश्चित की विशेष नमाज़—करना प्रचलित हुआ; अपने तर्क में यह प्राचीन यूनानी धार्मिक व्यवहार में भूकंपीय घटनाओं के प्रति बलिदान संबंधी अनुक्रियाओं (§16.3.2) और बड़े भूकंपों के बाद जापान में दी गई मन्नती भेंटों (§16.2.1) के सदृश है।

[9] कुरान के साथ *hadith* ("प्रतिवेदन" अथवा "आख्यान") इस्लामी विधि और धर्मविज्ञान के प्रमुख मानकीय स्रोत बनाते हैं। सर्वाधिक प्रामाणिक संग्रह *Sahihayn* ("दो प्रामाणिक संग्रह") हैं, जो अल-बुखारी और मुस्लिम इब्न अल-हज्जाज के हैं।

[10] अरबी *āyāt*, *āya* का बहुवचन, कुरान की व्यक्तिगत आयतों और सृजित व्यवस्था में दृश्य दैवी शक्ति के संकेतों दोनों को दर्शाता है। यह पद हिब्रू *ot*, "संकेत," का सजातीय है और साझा सामी मूल ◪-*w-t* प्रतिबिंबित करता है।

[11] अरबी *ṣalāt al-khusūf*, शब्दशः "ग्रहण की प्रार्थना," जिसे न्यायशास्त्रीय सादृश्य (*qiyas*) द्वारा भूकंपों और अन्य असाधारण प्राकृतिक घटनाओं तक विस्तृत किया गया। प्रार्थना में विस्तारित पाठ वाले दो खंड (*rak'at*) होते हैं, जिन्हें समुदाय में किया जाता और चेतावनी के उपदेश (*khutba*) से पूरण किया जाता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16.3.5 मेसोअमेरिका

मेसोअमेरिका में भूकंपों की धार्मिक व्याख्या ऊपर सर्वेक्षित व्याख्याओं से एक मूलभूत अर्थ में भिन्न है: प्राचीन विश्व में कहीं अन्यत्र भूकंपीय विपत्ति को धार्मिक चिंतन की औपचारिक संरचना में इतना पूर्ण और क्रमबद्ध रूप से एकीकृत नहीं किया गया। एज़्टेक परंपरा में भूकंप केवल दैवी अप्रसन्नता का संकेत अथवा दैवी शक्ति की देवप्राकट्य संबंधी अभिव्यक्ति नहीं था; वह स्वयं विश्व की ब्रह्मांडविज्ञानी नियति था, जो आनुष्ठानिक पंचांग के ठीक केंद्र में समाहित और सभ्यता की सबसे पवित्र वस्तुओं में सांकेतिक रूप से अंकित था।

पंचम सूर्य और नाहुई ओलिन

एज़्टेक ब्रह्मांडविज्ञान मानता था कि वर्तमान विश्व वैश्विक युगों की शृंखला में पाँचवाँ था, जिनमें से प्रत्येक की अध्यक्षता भिन्न सूर्य करता और प्रत्येक भिन्न विपत्ति से समाप्त होता था: बाढ़, पवन, अग्निवर्षा और अंधकार ने चार पूर्ववर्ती विश्व नष्ट किए थे। वर्तमान युग पंचम सूर्य का नाम *Nahui Ollin* (“चार गति” अथवा “चार भूकंप”) था और उसके बाढ़ अथवा अग्नि से नहीं, बल्कि विनाशकारी भूकंप से समाप्त होने की भविष्यवाणी थी।[12] यह भविष्यवाणी एज़्टेक धार्मिक चिंतन का परिधीय तत्त्व नहीं, बल्कि उसका ब्रह्मांडविज्ञानी केंद्र थी: वर्तमान विश्व स्थायी भूकंपीय दंडादेश के अधीन रहता था और मानव बलि सहित अनुष्ठान का प्रकार्य आंशिक रूप से सूर्य को पोषित करके तथा वैश्विक व्यवस्था बनाए रखकर उस अंतिम कंपन को स्थगित करना था।

Ollin लिपिचिह्न पूर्व-कोलंबियाई सभ्यता की सबसे प्रतिष्ठित वस्तुओं में से एक, तथाकथित “एज़्टेक सूर्य शिला” *Piedra del Sol*—जो अब मेक्सिको नगर के म्यूज़ेओ नैसियोनाल दे अंतरोपोलोजिया में स्थित है—के ठीक केंद्र में रखा गया था। उसकी केंद्रीय स्थिति भूकंप की ब्रह्मांडविज्ञानी प्रधानता की दृश्य घोषणा है: संपूर्ण काल, संपूर्ण अनुष्ठान और संपूर्ण इतिहास विश्व की भूकंपीय नियति से बाहर की ओर विकीर्ण होते हैं।

> नाहुई ओलिन, चार-भूकंप, इस सूर्य का नाम होगा जो अब अस्तित्व में है। [...] भूकंप होंगे, भूख होगी और तब हमारा अंत आएगा। (*Anales de Cuauhtitlan*)
>
> León-Portilla, 1963 *Aztec Thought and Culture: A Study of the Ancient Nahuatl Mind*

आनुष्ठानिक अनुक्रिया और विपत्ति का स्थगन

एज़्टेक धार्मिक व्यवहार में भूकंप की भविष्यवाणी के एकीकरण के गहन आनुष्ठानिक परिणाम थे। यदि वैश्विक व्यवस्था बनाए रखकर अंतिम भूकंप स्थगित किया जा सकता था तो आनुष्ठानिक विफलता—अपवित्रता, बलि की उपेक्षा, नैतिक अपराध—उसे शीघ्र ला सकती थी। अतः प्रत्येक वास्तविक भूकंप संभावित रूप से अंतिम कंपन का पूर्वस्वाद, वर्तमान विश्व-युग की भंगुरता और आनुष्ठानिक अनुरक्षण की आवश्यकता का स्मरण था। इससे एज़्टेक धार्मिक कल्पना में भूकंपीय घटनाओं को ऐसी तात्कालिकता

[12] नाहुआत्ल पद *ollin* गति और विस्तार से भूकंप दर्शाता है; वह 260-दिवसीय आनुष्ठानिक पंचांग *tonalpohualli* के बीस दिवस-चिह्नों में सत्रहवाँ है। उपसर्गित अंक *nahui* (“चार”) उस दिवस की विशिष्ट पंचांगीय स्थिति पहचानता है जिस पर वर्तमान विश्व-युग बनाया गया था और जिस पर उसका अंत नियत है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मिली जो बाइबिल अथवा इस्लामी परंपराओं की किसी भी वस्तु से बहुत आगे थी: भूकंप केवल दैवी चेतावनी नहीं, बल्कि विश्वांत का संभावित पूर्वाभ्यास था।

फलतः दिवस-चिह्न *Ollin* को आनुष्ठानिक पंचांग में विशेष गंभीरता से लिया जाता था। *Ollin* दिवस पर जन्मे व्यक्तियों को भूकंपीय शक्तियों से विशिष्ट संबंध द्वारा चिह्नित माना जाता और स्वयं *Ollin* दिवस को कुछ अनुष्ठानों के लिए शुभ तथा अन्य के लिए अशुभ माना जाता था। इस प्रकार पंचांगीय और भूवैज्ञानिक केवल सादृश्य से संबंधित नहीं, बल्कि संरचनात्मक रूप से संलयित थे: काल स्वयं भूकंपीय विपत्ति की लय के चारों ओर संगठित था।

मिथकीय परंपरा के साथ निरंतरता

जैसा §16.2.3 में कहा गया है, *Ollin* लिपिचिह्न और *Nahui Ollin* की संकल्पना केवल एज़्टेक धार्मिक संदर्भों में नहीं, बल्कि अनेक मेसोअमेरिकी संस्कृतियों की चित्रलिपियों में भी दिखाई देती है; यह सुझाव देता है कि भूकंपीय परिघटनाओं का ब्रह्मांडविज्ञानी तथा पंचांगीय चिंतन में एकीकरण विशेषतः एज़्टेक नवोन्मेष के बजाय पर्याप्त प्राचीनता की क्षेत्रीय परंपरा था। इस प्रकार एज़्टेक धार्मिक तंत्र भूकंपों के साथ व्यापक मेसोअमेरिकी संलग्नता की सर्वाधिक पूर्णतः विकसित अभिव्यक्ति प्रस्तुत करता है, जो पंचांगीय अभिलेखन से मिथकीय आख्यान के माध्यम से औपचारिक धर्मवैज्ञानिक सिद्धांत और आनुष्ठानिक व्यवहार तक विस्तृत थी।

इस अर्थ में मेसोअमेरिकी प्रसंग इस अध्याय में सर्वेक्षित सभी परंपराओं से गुजरने वाले वर्णक्रम के चरम पर स्थित है। जहाँ बाइबिल परंपरा भूकंपों की व्याख्या अन्यथा स्थिर सृजित व्यवस्था के भीतर यदाकदा दैवी हस्तक्षेपों के रूप में करती है और इस्लामी परंपरा उन्हें भविष्य तथा आपातिक बने रहने वाले युगांतशास्त्र में समाहित करती है, वहीं एज़्टेक परंपरा ने अंतिम भूकंप को अपने संपूर्ण ब्रह्मांडविज्ञानी और आनुष्ठानिक तंत्र का संरचनात्मक आधार बनाया। विश्व के केवल भूकंप में समाप्त होने का संकट नहीं था; ऐसा अंत उसकी संघटक नियति था और संपूर्ण धार्मिक जीवन उस निश्चितता की अनुक्रिया में संगठित था।



चित्र 16.12: केंद्र में *Ollin* लिपिचिह्न वाली *Piedra del Sol* (एज़्टेक सूर्य शिला)।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16.3.6 शिंतो

जापान में भूकंपों और धार्मिक चिंतन का संबंध असामान्य रूप से सुप्रलेखित है और लगभग एक सहस्राब्दी के पाठ्य, कलात्मक तथा आनुष्ठानिक साक्ष्यों तक विस्तृत है। जैसा §16.2.1 में विवेचित है, विशाल भूमिगत कैटफिश *Namazu* पर केंद्रित लोकप्रिय मिथकीय परंपरा ने पूर्व-आधुनिक जापान में भूकंपीय घटनाओं की प्रमुख लोक व्याख्या प्रदान की। यहाँ जिस बात पर बल देना आवश्यक है वह वह सीमा है जहाँ तक इस मिथकीय परंपरा को शिंतो धार्मिक व्यवहार की औपचारिक संरचनाओं में आत्मसात किया गया—जिससे इस अध्याय के परिचय में पहचानी गई मिथक और धर्म के बीच परिवर्तनशील सीमा विशेष स्पष्टता से दिखाई देती है।

काशिमा और नियंत्रण का धर्मविज्ञान

शिंतो की भूकंप परंपरा का धर्मवैज्ञानिक केंद्र *Takemikazuchi-no-kami* की आकृति है, जो काशिमा तीर्थ में, वर्तमान इबाराकी प्रीफेक्चर में प्रतिष्ठित है और *Namazu* के दैवी नियंत्रक की भूमिका निभाती है। शिंतो व्यवहार में मिथकीय आख्यान समुदाय और उसके रक्षक देवता के बीच सक्रिय आनुष्ठानिक संबंध का आधार बन गया: तीर्थ के पंचांग में कैटफिश का दैवी नियंत्रण बनाए रखने के लिए स्पष्ट रूप से निर्देशित अनुष्ठान सम्मिलित थे और तीर्थयात्री भूकंपों से रक्षा माँगने के लिए काशिमा आते थे (चित्र 16.13)। इस चित्रण का ऊपरी भाग काशिमा तीर्थ की शिला दिखाता है, जबकि नीचे देवता ताकेमिकाज़ुची विशाल कैटफिश Ōnamazu को अपनी तलवार से दबा रहा है। कहा जाता है कि Ōnamazu जापान के द्वीपों के नीचे रहता है और उत्तेजित होने पर वहाँ के अनेक भूकंपों का कारण बनता है। ताकेमिकाज़ुची आधारशिला का उपयोग करके कैटफिश को नियंत्रित करता है। अतः भूकंपीय विपत्ति के संकट के लिए निरंतर आनुष्ठानिक अनुरक्षण आवश्यक था—जो अंतिम भूकंप के एज़्टेक बलिदान संबंधी स्थगन (§16.3.5) के संरचनात्मक रूप से सदृश है।

kannazuki, दसवाँ चंद्र मास जिसमें काशिमा ईसे में देवताओं की विशाल सभा में जाता था, बढ़ी हुई भूकंपीय सुभेद्यता का काल माना जाता था जिसकी प्रतिपूर्ति तीव्रतर प्रार्थना, भेंट और शुद्धीकरण अनुष्ठानों से की जाती थी। इस प्रकार आनुष्ठानिक पंचांग आंशिक रूप से भूकंपीय संकट की लय के चारों ओर संगठित था।

भूकंप, शुद्धीकरण और नवीकरण

1855 के *namazu-e* मुद्रण, जिनका §16.2.1 में लोकप्रिय प्रलेखों के रूप में विवेचन हुआ है, यहाँ धार्मिक वस्तुओं के रूप में पुनर्विचार के योग्य हैं। अनेक मुद्रण स्पष्ट रूप से तावीज़ी प्रकार्य रखते थे: कैटफिश को वश में करते ताकेमिकाज़ुची का बिंब प्रदर्शित करना आगे की भूकंपीय विपत्ति से सुरक्षा प्रदान करने वाला माना जाता था और इसने मुद्रणों को शिंतो व्यवहार के घरेलू भक्तिमय क्षेत्र में स्पष्ट रूप से रखा (चित्र 16.14)। स्वयं *Namazu*, असाधारण और भयंकर शक्ति रखने वाला प्राणी, *kami*[13] था—केवल दबाया जाने वाला प्राणी नहीं, बल्कि शांत करके समुदाय की धार्मिक अर्थव्यवस्था में सम्मिलित की जाने वाली शक्ति।

[13] *kami* पद शिंतो विश्वदृष्टि के भीतर प्राकृतिक परिघटनाओं को जीवन देने वाली पवित्र उपस्थितियाँ अथवा शक्तियाँ दर्शाता है—विद्वान मोतोओरी नोरिनागा (1730–1801) के वर्णनानुसार विस्मय उत्पन्न करने वाली असामान्य शक्ति रखने वाली कोई भी वस्तु, चाहे कल्याणकारी हो अथवा भयंकर।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 16.13: काशिमा तीर्थ (इबाराकी प्रीफेक्चर), *Takemikazuchi-no-kami* का आसन और पूर्व-आधुनिक जापान में शिंतो के भूकंपीय रक्षा अनुष्ठान का प्रमुख स्थल।

इसकी गहनतम अभिव्यक्ति *yonaoshi* (“विश्व सुधार”) की संकल्पना में मिलती है। शिंतो ढाँचे में सामाजिक भ्रष्टाचार और आनुष्ठानिक उपेक्षा प्रदूषण (*kegare*) के रूप में संचित होते हैं; भूकंप सहित विनाशकारी घटनाओं को हिंसक शुद्धीकरण—संतुलन की पीड़ादायक किंतु आवश्यक पुनर्स्थापना—के रूप में समझा जा सकता था (Smits, 2006)। विनाशकारी नवीकरण के इस धर्मविज्ञान के इस अध्याय में सर्वेक्षित परंपराओं में संरचनात्मक समानांतर हैं: बाइबिल का न्याय और मुक्ति (§16.3.1), हिंदू *pralaya* (§16.3.3) और क्रमिक विश्व-युगों की एज़्टेक दृष्टि (§16.3.5)। विभिन्न परंपराओं में भूकंप विरले ही केवल विनाशकारी होता है: वह नवनिर्मित विश्व की हिंसक प्रस्तावना भी है।

शिंतो, बौद्ध धर्म और भूकंपीय समन्वयवाद

बौद्ध धर्म के प्रभाव को स्वीकार किए बिना शिंतो की भूकंप परंपरा का कोई वृत्तांत पूर्ण नहीं होगा। जापान में शिंतो और बौद्ध धर्म एक सहस्राब्दी से अधिक समय तक *shinbutsu-shūgō*[14] नामक समन्वयवादी संलयन में सह-अस्तित्व रखते थे और भूकंपों की व्याख्या इसका अपवाद नहीं थी। बौद्ध युगांतशास्त्रीय ढाँचों—जिनमें *mappō* का सिद्धांत (“धर्म के उत्तर दिन,” हिंदू *Kali Yuga* के सदृश, जिसका §16.3.3 में विवेचन हुआ है) सम्मिलित था—को शिंतो की भूकंपीय चिंताओं में सरलता से आत्मसात किया गया और दोनों परंपराओं से एक साथ प्रेरित स्तरित धार्मिक अनुक्रिया उत्पन्न हुई। इस प्रकार शिंतो की भूकंप परंपरा सांस्कृतिक संश्लेषण की दीर्घ प्रक्रिया की परिणति प्रस्तुत करती है, जिसमें स्थानीय मिथकीय, चीनी ब्रह्मांडविज्ञानी और बौद्ध युगांतशास्त्रीय ढाँचे भूकंपीय विपत्ति की सुसंगत धार्मिक व्याख्या में क्रमशः एकीकृत हुए।

[14]शब्दशः “कामी और बुद्धों का समामेलन,” यह समन्वयवाद नारा काल (710–794 AD) से 1868 में मेइजी सरकार द्वारा दोनों परंपराओं के बलपूर्वक पृथक्करण तक जापानी धार्मिक जीवन पर प्रभावी रहा।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 16.14: कैटफिश को वश में करते *Takemikazuchi-no-kami* को दर्शाता तावीज़ी *namazu-e* मुद्रण।

16.3.7 संश्लेषण: धर्म और भूकंपीय विपत्ति का अर्थ

इस खंड में सर्वेक्षित परंपराएँ अत्यंत दूर स्थित संस्कृतियों और ऐतिहासिक कालों में उल्लेखनीय सुसंगतता का प्रतिरूप प्रकट करती हैं। परीक्षण की गई प्रत्येक परंपरा में भूकंप ऐसे धर्मवैज्ञानिक ढाँचे में समाहित हैं जो एक साथ तीन कार्य करता है: वह भूकंपीय घटना को अर्थ देता है (वह यादृच्छिक नहीं, बल्कि सोद्देश्य है); उस अर्थ को नैतिक व्यवस्था में स्थापित करता है (भूकंप मानवता और दैवी सत्ता के संबंध के विषय में कुछ संचार करता है); और निर्धारित सामुदायिक अनुक्रिया (बलि, प्रार्थना, शुद्धीकरण, आनुष्ठानिक अनुरक्षण) उत्पन्न करता है। अर्थ की विशिष्ट अंतर्वस्तु, विशिष्ट नैतिक ढाँचा और विशिष्ट आनुष्ठानिक अनुक्रिया विभिन्न परंपराओं में अत्यधिक भिन्न हैं—किंतु त्रिभागी संरचना स्वयं सार्वभौम है।

तीन परस्परव्यापी विषय विशेष बल के अधिकारी हैं। पहला युगांतशास्त्रीय चिंतन का अभिसरण है। हिंदू *pralaya*, इस्लामी अंतिम दिवस, एज़्टेक *Nahui Ollin* और बौद्ध *mappō* सभी भूकंप को वैश्विक इतिहास की अंतिम घटना पर अथवा उसके निकट रखते हैं—ऐसा संरचनात्मक अभिसरण जो परस्पर ऐतिहासिक संपर्क से विहीन परंपराओं में बना रहता और मिथकीय संश्लेषण (§16.2.5) में पहले ही देखे गए भूकंपीय विपत्ति के अनुभव के प्रति साझा संज्ञानात्मक अनुक्रिया व्यक्त करता है।

दूसरा विषय ऐतिहासिक कालों में भूकंपों की नैतिक व्याख्या की स्थिरता है। मानवीय अपराध के लिए दैवी दंड के रूप में भूकंपीय घटनाओं का प्रतिवर्ती आरोपण—जो बाइबिल, यूनानी संप्रदाय व्यवहार, हिंदू *karma* धर्मविज्ञान, इस्लामी *hadith* परंपरा और एज़्टेक आनुष्ठानिक तंत्र में प्रलेखित है—आधुनिकता के आगमन के साथ विलीन नहीं हुआ। अस्पृश्यता के पाप के दंड के रूप में 1934 के बिहार भूकंप की गांधी की व्याख्या प्रदर्शित करती है कि इस धर्मवैज्ञानिक प्रतिवर्त ने बीसवीं शताब्दी तक अपनी पकड़ बनाए रखी और टैगोर से वही तर्कवादी प्रत्युत्तर उत्पन्न किए जो वोल्तेयर ने लगभग दो शताब्दी पहले लिस्बन भूकंप की ईश्वरीय-व्यवस्थावादी व्याख्याओं के विरुद्ध दिए थे (§16.5.2)। दोनों प्रसंग दो

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

शताब्दियों और दो महाद्वीपों से पृथक किंतु अपने अंतर्निहित तर्क में समान हैं: विपत्ति की धर्मवैज्ञानिक और परिमेय व्याख्याओं के बीच समान सम्मुखन, जो भिन्न सांस्कृतिक संदर्भों में घटित हुआ।

तीसरा विषय भूवैज्ञानिक रूप से सक्रिय संरचनाओं के ऊपर पवित्र स्थानों की क्रमबद्ध स्थापना है—जो डेल्फी, हिएरापोलिस, कोलोसी और काशिमा तीर्थ में प्रलेखित है और भूकंपीय अस्थिरता के क्षेत्रों की व्याख्या तीव्रतर दैवी उपस्थिति के क्षेत्रों के रूप में करने की व्यापक प्रवृत्ति सुझाती है। इस अर्थ में भूकंपों की धार्मिक व्याख्या घटना के बाद भूकंपीय घटनाओं की केवल अनुक्रिया नहीं है; वह स्वयं भूदृश्य के पवित्र भूगोल को आकार देती और उस भूमि में धर्मवैज्ञानिक अर्थ अंकित करती है जिस पर समुदाय अपने पवित्र स्थल बनाते हैं। जो आतंक के रूप में आरंभ होता है, धार्मिक आख्यान के मध्यस्थ कार्य द्वारा दैवी उपस्थिति और शक्ति का प्रमाण बनता है—और अंततः, जैसा अगला खंड दिखाता है, उस व्याख्या के लिए पहली दार्शनिक चुनौती का अवसर।

भूकंपीय अनुभव के इसी व्यापक धर्मवैज्ञानीकरण—इस आग्रह कि भूकंप कुछ *अर्थ* रखता है, मानवता को संबोधित है और केवल सहनशीलता नहीं, बल्कि व्याख्या तथा अनुक्रिया की माँग करता है—को दार्शनिक परंपरा §16.4 में अपनी पहली निरंतर आलोचनात्मक परीक्षा के अधीन करेगी।

इस खंड में प्रलेखित प्रतिरूप की सार्वभौमिकता अधिक गहरा प्रश्न आमंत्रित करती है: केवल यह नहीं कि भूकंप विपत्ति की धर्मवैज्ञानिक व्याख्याएँ संस्कृतियों और शताब्दियों में स्थिर रही हैं, बल्कि यह कि वे प्राकृतिक दर्शन, प्रबोधन और आधुनिक भूकंप विज्ञान के उदय से बचते हुए इतनी उल्लेखनीय रूप से स्थायी *क्यों* सिद्ध हुई हैं। उत्तर साढ़े तीन शताब्दी पहले स्पिनोज़ा ने विशिष्ट परिशुद्धता से पहले ही व्यक्त किया था:

> यदि मनुष्य अपनी समस्त परिस्थितियों को नियत नियमों से संचालित कर सकते अथवा भाग्य उनका सदैव साथ देता तो वे कभी अंधविश्वासी न होते; किंतु बार-बार ऐसी कठिनाइयों में धकेले जाने पर जहाँ नियम व्यर्थ होते हैं और भाग्य के लोभपूर्वक वांछित अनुग्रहों के chap:trustregion द्वारा आशा तथा भय के बीच प्रायः दयनीय रूप से डोलते रहने के कारण वे अधिकांशतः सहजविश्वास के अत्यंत प्रवण होते हैं। अतः अंधविश्वास भय से उत्पन्न, सुरक्षित और पोषित होता है।
>
> Spinoza, 1670 *Tractatus Theologico-Politicus*

सभी प्राकृतिक परिघटनाओं में भूकंप स्पिनोज़ा द्वारा वर्णित दशा का सर्वाधिक पूर्ण मूर्तरूप है: वह बिना चेतावनी प्रहार करता, भविष्यवाणी की अवहेलना करता और उन सभी नियमों को अभिभूत करता है जिनसे मनुष्य सामान्यतः अपनी परिस्थितियाँ संचालित करते हैं। अतः उसका अंधविश्वास उत्पन्न करना—और उस अंधविश्वास का दृढ़ सिद्ध होना—पूर्व-आधुनिक अज्ञान की विचित्रता नहीं, बल्कि घटना का संरचनात्मक परिणाम है। ठीक इसी पहचान का उत्तर अगले खंड में परीक्षण की गई दार्शनिक परंपरा मिथक अथवा अनुष्ठान से नहीं, बल्कि तर्क से देने का प्रयास करेगी।

ऊपर सर्वेक्षित सात परंपराओं और उनके साझा आठ पुनरावर्ती अभिप्रायों को आगामी दो सारणियों में योजनाबद्ध रूप से प्रस्तुत किया जा सकता है। सारणी 16.1 प्रत्येक परंपरा के लिए भूकंप को दी गई प्राथमिक धर्मवैज्ञानिक भूमिका, उत्तरदायी माने गए दैवी अथवा वैश्विक अभिकर्ता, युगांतशास्त्रीय आयाम की उपस्थिति अथवा अनुपस्थिति, निर्धारित आनुष्ठानिक अनुक्रिया और प्रमुख पाठ्य स्रोतों का सार प्रस्तुत करती है। सारणी 16.2 आठ सबसे महत्त्वपूर्ण अंतर-सांस्कृतिक अभिप्रायों को उन परंपराओं

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के सम्मुख निरूपित करती है जिनमें वे प्रमाणित हैं और उनकी विशिष्ट अभिव्यक्तियों तथा विश्लेषणात्मक महत्त्व दोनों की पहचान करती है।

सारणियों द्वारा दृश्य बनाए गए दो प्रतिरूप यहाँ संक्षिप्त टिप्पणी के अधिकारी हैं। पहला, **भूकंपीय अभिकर्ता के रूप में सर्प अथवा ड्रैगन**—भारत, जापान, यूनान और मेसोअमेरिका तक विस्तृत पाँच परंपराओं में प्रमाणित—वास्तव में संपूर्ण अध्याय का अकेला सबसे व्यापक रूप से वितरित अभिप्राय है, संश्लेषण के आरंभ की युगांतशास्त्रीय व्याख्याओं से भी अधिक सार्वभौम। बाइबिल और इस्लामी परंपराओं में उसकी अनुपस्थिति आकस्मिक नहीं है: ठीक इन्हीं दोनों परंपराओं में प्रत्यक्ष दैवी कर्तृत्व का सर्वाधिक पूर्ण विकसित धर्मविज्ञान है, जिसमें पृथ्वी के कंपन की व्याख्या करने के लिए किसी मध्यस्थ पाताली प्राणी की आवश्यकता नहीं होती। अतः सर्प की उपस्थिति अथवा अनुपस्थिति प्रत्येक परंपरा की अंतर्निहित धर्मवैज्ञानिक संरचना के निदान-चिह्न के रूप में कार्य करती है।

दूसरा, **अनुपस्थितियों** का स्तंभ सारणी 16.2 में उपस्थितियों के स्तंभ जितना ही विश्लेषणात्मक रूप से महत्त्वपूर्ण है। सर्वेक्षित सभी परंपराओं में केवल बौद्ध धर्म भूकंपों की दंड के रूप में नैतिक व्याख्या को निरंतर अस्वीकार करता है—बौद्ध ढाँचे में भूकंप वैश्विक पुष्टि है, प्रतिकार नहीं। केवल यूनान में विकसित युगांतशास्त्रीय आयाम का अभाव है। ये अनुपस्थितियाँ साक्ष्य में अंतराल नहीं, बल्कि स्वयं परंपराओं की संरचनात्मक विशेषताएँ हैं और वे इस सतही रूप से आकर्षक निष्कर्ष को रोकती हैं कि भूकंपों के प्रति सभी धार्मिक अनुक्रियाएँ मूलतः समान हैं।

तालिका 16.1: भूकंप और धार्मिक परंपराएँ: एक तुलनात्मक सारांश।

परंपरा	भूकंप की प्राथमिक भूमिका	अभिकर्ता / स्थान	युगांतशास्त्रीय?	आनुष्ठानिक अनुक्रिया	प्रमुख स्रोत
बाइबिल (यहूदी–ईसाई)	देवप्राकट्य; चमत्कारी मुक्ति अथवा न्याय का उपकरण; संहिताबद्ध भूवैज्ञानिक स्मृति	*YHWH* / ईश्वर प्रत्यक्षतः	आंशिक—रहस्योद्घाटन में भूकंपीय बिंब अंतिम घटनाओं को इंगित करते हैं	प्रार्थना; मन्नत की भेंट; सामुदायिक प्रायश्चित्त	निर्गमन 19:18; प्रेरितों के काम 16:26; मत्ती. 27–28; Nur and Burgess, 2008
यूनान (हेलेनिक धर्म)	दैवी क्रोध का देवप्राकट्य (*Enosichthon*); पवित्र उपस्थिति और भविष्यवाणी के स्थान के रूप में भ्रंश-क्षेत्र; पृथ्वी के नीचे बंदी पराजित आद्य शक्ति (एन्सेलाडस) की स्थिरता	पोसीडॉन *Enosichthon*; एन्सेलाडस और पाताली दैत्य; भूमिगत भूवैज्ञानिक बल	कोई अभिज्ञात नहीं	पोसीडॉन को पशु-बलि; सक्रिय भ्रंश चिह्नों के ऊपर तीर्थस्थलों की सुविचारित स्थापना	*Iliad* XIII.18; Vergilius Maro, 2008 *The Aeneid*; Piccardi, 2007; Broad, 2006

अगले पृष्ठ पर जारी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 16.1 *(क्रमशः)*

परंपरा	भूकंप की प्राथमिक भूमिका	अभिकर्ता / स्थान	युगांतशास्त्रीय?	आनुष्ठानिक अनुक्रिया	प्रमुख स्रोत
हिंदू धर्म	वैश्विक अस्थिरता; सामूहिक अतिक्रमण का कार्मिक परिणाम; आसन्न *pralaya* का संकेत	शेष / विष्णु; सामूहिक *karma*	हाँ—*pralaya*, ब्रह्मांड का अंतिम विलय	आनुष्ठानिक तुष्टीकरण; कर्म धर्मविज्ञान द्वारा व्याख्या	*Shatapatha Brahmana*; *Puranas*; गांधी–टैगोर संवाद (1934) (Paranjape, 2011)
बौद्ध धर्म	बुद्ध के जीवन की घटनाओं की वैश्विक पुष्टि; प्राकृतिक, मानवीय और अतींद्रिय कारणों को पृथक करने वाली त्रिविध कारण-योजना	अनुक्रियाशील ब्रह्मांड के रूप में पृथ्वी; *nagas*	आंशिक—*mappō* सिद्धांत; धर्म-युग के अंत के निकट भूकंपीय वृद्धि	*nagas* का आनुष्ठानिक तुष्टीकरण; तीर्थयात्रा	*Pali Canon*; *Anguttara Nikaya*
इस्लाम	वर्तमान में नैतिक चेतावनी का दैवी संकेत (*ayat*); अंतिम दिवस पर वैश्विक उद्घाटन का उपकरण	Allāh (अल्लाह) प्रत्यक्षतः; प्रामाणिक सत्ता के रूप में कुरान	हाँ—सूरह 99 भूकंप को अंतिम दिवस के आरंभ पर रखती है	*Salāt al-khusūf* (प्रायश्चित्त की विशेष सामूहिक प्रार्थना)	सूरह 99 (*Al-Zalzalah*); *hadīth* संग्रह
मेसोअमेरिका (एज़्टेक)	वर्तमान विश्व-युग की ब्रह्मांडवैज्ञानिक नियति; प्रत्येक वास्तविक भूकंप अंतिम कंपन का पूर्वाभ्यास	*Ollin* बल; वैश्विक पंचांग संरचना	हाँ—संघटक; विश्व का अंत भूकंप (*Nahui Ollin*) द्वारा होना नियत है	मानव बलि; अंतिम भूकंप को स्थगित करने के लिए आनुष्ठानिक पंचांग का अनुरक्षण	*Anales de Cuauhtitlan*; *Piedra del Sol*; León-Portilla, 1963
शिंतो (जापान)	दैवी नियंत्रण की अपेक्षा रखने वाली नमाज़ु की आक्रामकता; विपत्तिकारी शुद्धीकरण (*yonaoshi*) और विश्व-सुधार	नमाज़ु (विशाल कैटफ़िश); नियंत्रक के रूप में ताकेमिकाज़ुची	आंशिक—बौद्ध समन्वयवाद द्वारा आत्मसात *mappō*	काशिमा तीर्थ के अनुष्ठान; *namazu-e* तावीज़; शुद्धीकरण संस्कार	*Namazu-e* चित्र (1855); Smits, 2006; काशिमा तीर्थ के अभिलेख

प्रारूप पाठ्यसामग्री

तालिका 16.2: भूकंपों की धार्मिक व्याख्या में पुनरावर्ती अंतर-सांस्कृतिक अभिप्राय। ✓ = अभिप्राय प्रमाणित; × = अभिप्राय अनुपस्थित अथवा गौण।

अभिप्राय	बाइबिल	यूनान	हिंदू धर्म	बौद्ध धर्म	इस्लाम	मेसोअमेरिका	क्षिति	महत्त्व
भूकंपीय अभिकर्ता के रूप में सर्प/ड्रैगन	×	✓	✓	✓	×	✓	✓	सर्वाधिक व्यापक रूप से वितरित अभिप्राय। सर्पाकार देह भ्रंश चिह्नों और भू-विदारण को निरूपित करती है; देवता अथवा संत द्वारा उसकी पराजय पाताली बल पर दैवी व्यवस्था का अधिरोपण संहिताबद्ध करती है। प्रत्यक्ष दैवी कर्तृत्व का सर्वाधिक विकसित धर्मविज्ञान रखने वाली दो परंपराओं (बाइबिल; इस्लाम) में अनुपस्थित।
युगांतशास्त्रीय परिसमाप्ति के रूप में भूकंप	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	विकसित युगांतशास्त्र वाली प्रत्येक परंपरा में उपस्थित। भूकंप वैश्विक समापन की क्रियाविधि—भूवैज्ञानिक, नैतिक और धर्मवैज्ञानिक रूप से एक साथ घटित अंत की भौतिक अभिव्यक्ति—के रूप में प्रकट होता है। केवल यूनान में इस आयाम का अभाव है।
भूवैज्ञानिक भ्रंशों के ऊपर स्थित पवित्र स्थल	✓	✓	×	×	×	✓	✓	किसी स्थान पर बार-बार भूकंपीय विक्षोभ अनुभव करने वाले समुदायों ने अस्थिरता को दैवी सामीप्य माना। भूविज्ञान ने पवित्र भूगोल को आकार दिया: आतंक दैवी उपस्थिति का प्रमाण बन गया।
नैतिक दंड/कार्मिक परिणाम के रूप में भूकंप	✓	✓	✓	×	✓	×	✓	ऐतिहासिक रूप से सबसे चिरस्थायी व्याख्या—जो आधुनिकता तक जीवित रही (गांधी, 1934)। केवल बौद्ध धर्म इसे निरंतर अस्वीकार करता है: भूकंप वैश्विक पुष्टि है, प्रतिकार नहीं। प्रत्येक युग में समान तर्कवादी खंडन को प्रेरित करता है।
निर्धारित सामुदायिक आनुष्ठानिक अनुक्रिया	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	सभी परंपराओं में सार्वभौम। भूकंप केवल सहनशीलता नहीं, सक्रिय सामुदायिक अनुष्ठान की माँग करता है। उसका रूप अत्यधिक भिन्न (प्रार्थना से बलि तक) है, किंतु संरचनात्मक तर्क—अनुक्रिया की अपेक्षा रखने वाले सोद्देश्य संचार के रूप में भूकंप—समान है।
शुद्धीकरण और नवीकरण के रूप में विपत्ति	✓	×	✓	×	×	✓	✓	भूकंप विनाशकारी होने के साथ-साथ उत्पादक भी है—नवनिर्मित विश्व की हिंसक प्रस्तावना। आतंक को प्रयोजनवाद में बदलता है: विपत्ति स्वयं से बड़े प्रयोजन की सेवा करती है। यूनानी और इस्लामी ढाँचों में विशेषतः अनुपस्थित।

अगले पृष्ठ पर जारी

समीक्षा प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 16.2 *(क्रमशः)*

अभिप्राय	बाइबिल	क़ुरान	हिंदू धर्म	बौद्ध धर्म	इस्लाम	मेसोअमेरिका	किंतो	महत्त्व
वास्तविक भूवैज्ञानिक घटनाओं की संहिताबद्ध स्मृति	✓	✓	×	×	×	×	✓	कुछ धार्मिक आख्यान विशिष्ट भूवैज्ञानिक घटनाओं की प्रत्यक्षतः प्रमाण्य अनुक्रियाएँ हैं (यहोशू और जेरिको के आख्यानों में संहिताबद्ध जॉर्डन घाटी के भ्रंश-पतन; हिएरापोलिस और कोलोसी की परंपराओं में आत्मसात AD 60 का अनातोलियाई भूकंप; एन्सेलाडस के बंदी कंपन के रूप में मिथकीकृत एटना का ज्वालामुखीय और भूकंपीय स्वरूप; *namazu-e* संग्रह में साकार 1855 का आनसेई एदो भूकंप)। भौतिक घटना धार्मिक आख्यान में आत्मसात—रूपांतरित किंतु अमिट—हो जाती है।
भूकंप उत्पन्न करने वाला आधारभूत प्राणी	×	×	✓	✓	×	×	✓	सर्प अभिप्राय से भिन्न: पृथ्वी को धारण करने वाला वैश्विक प्राणी, जिसकी अनैच्छिक गति भूकंपीय अस्थिरता उत्पन्न करती है। भारत और जापान जितनी भौगोलिक दूरी वाली परंपराओं में स्वतंत्रतः प्रमाणित (वैश्विक हाथी/कछुआ; शेष; नमाज़ु)।

16.4 दर्शन

दार्शनिकों ने लंबे समय से भूकंपों के कारणों पर विचार किया है। आरंभिक व्याख्याओं में से एक मिलेटस के थेल्स को दी जाती है, जिनका विश्वास था कि पृथ्वी जल पर तैरती है; अतः इस अंतर्निहित माध्यम में विक्षोभों को कंपन उत्पन्न करने में सक्षम माना गया। अन्य सुकरात-पूर्व दार्शनिकों ने इसे आगे विकसित किया: एनाक्सीमेनीज़ ने प्रस्तावित किया कि सतह के नीचे बंद संपीडित वायु भूमि को फाड़ती और ऊपर उठाती है, जबकि एनाक्सीमैंडर तथा एपोलोनिया के डायोजनीज़ ने चार मूल तत्त्वों—पृथ्वी, जल, वायु और अग्नि—की परस्पर क्रिया में मूलित व्याख्याएँ खोजीं (De Boer and Sanders, 2005)। ये आरंभिक प्रयास कितने भी अनुमानपरक रहे हों, उन्होंने भूकंपीय परिघटनाओं के लिए विशुद्ध मिथकीय कारणों के बजाय भौतिक कारण खोजने की बौद्धिक प्रवृत्ति स्थापित की—§16.3 की धार्मिक परंपराओं में प्रलेखित व्याख्यात्मक प्रतिवर्त को पहली निरंतर चुनौती।

16.4.1 अरस्तू

प्राचीन काल के सर्वाधिक प्रभावशाली सिद्धांतों में अरस्तू द्वारा प्रस्तावित वातिक व्याख्या थी। इस मत के अनुसार भूकंप पृथ्वी की सतह के नीचे गुहाओं में बंद भूमिगत पवनों द्वारा उत्पन्न होते थे। निकलने के लिए संघर्ष करती ये पवनें भूमि को कंपित अथवा विदीर्ण करती थीं। अरस्तू का सिद्धांत उल्लेखनीय

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रूप से स्थायी सिद्ध हुआ और अनेक शताब्दियों तक भूकंपों की व्याख्या का प्रमुख बौद्धिक ढाँचा बना रहा।

अन्य संस्कृतियों में तुलनीय ब्रह्मांडवैज्ञानिक व्याख्याएँ स्वतंत्र रूप से विकसित हुईं। प्राचीन चीन में भूकंपों को कभी-कभी यिन और यांग से संबद्ध पाँच मूल अभिकर्ताओं (*gogyo*) की परस्पर क्रिया द्वारा व्यक्त वैश्विक बलों के संतुलन में विक्षोभ का परिणाम माना गया (Guidoboni and Poirier, 2004)। भिन्न रूप में प्रस्तुत होने पर भी इन विचारों और यूनानी दर्शन में भूकंपों को विशुद्ध मिथकीय कारणों के बजाय अंतर्निहित प्राकृतिक प्रक्रियाओं का परिणाम समझने का साझा प्रयास था।

16.4.2 एराटोस्थनीज़

भूकंपों की दार्शनिक और भौगोलिक समझ में महत्त्वपूर्ण किंतु प्रायः उपेक्षित योगदान साइरीन के एराटोस्थनीज़ (लगभग 276–194 BCE) ने दिया। अलेक्ज़ेंड्रिया के इस बहुज्ञ पुस्तकाध्यक्ष को मुख्यतः पृथ्वी की परिधि के उल्लेखनीय रूप से परिशुद्ध मापन के लिए जाना जाता है। अपने *Geographika* में एराटोस्थनीज़ ने वह कार्य किया जिसे प्राचीन विश्व में भूकंपीय गतिविधि का पहला क्रमबद्ध भौगोलिक मानचित्रण माना जा सकता है। भूकंपों को पृथक अथवा यादृच्छिक घटनाएँ मानने के बजाय उन्होंने उन क्षेत्रों की पहचान करने का प्रयास किया जहाँ वे सर्वाधिक आवृत्ति से घटित होते थे और उनके वितरण को भूदृश्य के व्यापक भौतिक लक्षणों से संबद्ध किया।

एराटोस्थनीज़ ने देखा कि भूकंपीय गतिविधि तटीय क्षेत्रों और ज्वालामुखीय प्रदेशों के निकट केंद्रित थी—स्थायी महत्त्व वाला ऐसा सहसंबंध जिसकी कठोर भौतिक व्याख्या आधुनिक युग तक नहीं मिली। उन्होंने भूमध्यसागरीय द्वीप-शृंखलाओं का भूकंपीय स्वरूप पहचाना और कुछ तटरेखाओं की अस्थिरता को समुद्र को भूमिगत गुहाओं से जोड़ने वाली भूमिगत जल-वाहिकाओं की क्रिया का परिणाम माना। इन छिपे संबंधों के विच्छिन्न होने पर ऊपर की भूमि धँस अथवा काँप सकती थी। भूकंपों का यह जलीय सिद्धांत अंततः अशुद्ध होते हुए भी भूकंपीय परिघटनाओं को पृथ्वी के सुसंगत भौतिक भूगोल में एकीकृत करने का वास्तविक प्रयास था।

एराटोस्थनीज़ के योगदान का महत्त्व किसी विशिष्ट क्रियाविधि की शुद्धता से कम, उनकी पद्धति में अधिक है: भूकंपीय क्षेत्रों को सूचीबद्ध करके और उन्हें भौगोलिक तथा भूवैज्ञानिक लक्षणों से जोड़कर उन्होंने आधुनिक मान्यता का पूर्वाभास दिया कि भूकंपों का घटित होना समान रूप से वितरित नहीं, बल्कि पृथ्वी की पर्पटी के संरचनात्मक गुणों द्वारा नियंत्रित है। इस प्रकार उनका कार्य मिथकीय व्याख्या और क्रमबद्ध प्राकृतिक अन्वेषण के बीच एक महत्त्वपूर्ण संक्रमणकालीन क्षण प्रस्तुत करता है, (Dragoni, 2005)।

16.4.3 लुक्रेतियस और प्लिनी

रोमन कवि और दार्शनिक लुक्रेतियस के कार्य में एक विशेष महत्त्वपूर्ण दार्शनिक विवेचन मिलता है (Lucretius, 1995)। उनकी महाकाव्यात्मक कविता *De Rerum Natura* (*वस्तुओं की प्रकृति पर*), जो प्रथम शताब्दी BCE में लिखी गई, ने एपिक्यूरियन दर्शन द्वारा प्राकृतिक परिघटनाओं की व्याख्या करने का प्रयास किया। पुस्तक VI में लुक्रेतियस भूकंपों की चर्चा करते और उन्हें पृथ्वी की गुहाओं में बंद वायु की गति का परिणाम मानते हैं। जब ये भूमिगत पवनें संचित होकर निकास खोजती हैं, तो वे ऐसे कंपन

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

उत्पन्न करती हैं जो भूमि को हिलाते अथवा उसे फाड़ भी देते हैं। यह व्याख्या दैवी हस्तक्षेप के बजाय भौतिक क्रियाविधियों द्वारा प्राकृतिक विश्व को समझने के व्यापक प्रयास को दर्शाती है।

प्राचीन लेखकों ने इस वातिक सिद्धांत को प्रायः विस्तार दिया। कुछ लेखकों ने पृथ्वी की तुलना ऐसे स्पंज से की जिसकी आंतरिक गुहाएँ पवनों को भूमिगत मार्गों में प्रवाहित होने देती हैं। संचित वायु के इन गुहाओं की क्षमता से अधिक हो जाने पर परिणामी दाब गर्जन-ध्वनि, काँपती भूमि और कभी-कभी ऐसी दरारें उत्पन्न करता है जिनसे पवन निकलती है। ऐसी व्याख्याएँ सैलस्ट और लूकन सहित बाद के शास्त्रीय लेखकों तथा कवियों ने भी दोहराईं, जिन्होंने भूकंपों को पृथ्वी के गुप्त स्थानों में गतिशील बलों का परिणाम बताया।

एक अन्य महत्त्वपूर्ण प्राचीन स्रोत प्लिनी द एल्डर का *Naturalis Historia* (AD 77–78) है—एक विश्वकोशीय कृति जिसने भूकंपों सहित अनेक प्राकृतिक परिघटनाओं का परीक्षण किया (Pliny the Elder, 1906)। प्लिनी ने देखा कि भूकंपीय आघात कुछ क्षेत्रों, विशेषतः समुद्री प्रदेशों, में अधिक बार घटित होते थे, यद्यपि पर्वतीय क्षेत्र भी उनसे मुक्त नहीं थे। उन्होंने ऋतुगत प्रतिरूप भी पहचाने और सुझाया कि भूकंप शरद तथा वसंत में अधिक बार घटित होते हैं—यह अवलोकन बाद में कांट ने दोहराया। प्लिनी ने यह भी दर्ज किया कि भूकंपों से पहले पशु प्रायः असामान्य व्यवहार करते हैं; यह उस विषय के आरंभिक प्रलेखित उल्लेखों में से एक है जो आगे चलकर भूकंप-लोककथाओं में बार-बार प्रकट हुआ।

16.4.4 दार्शनिक घटना के रूप में लिस्बन भूकंप

भूकंपों पर दार्शनिक विमर्श उस विनाशकारी भूकंप से रूपांतरित हो गया जिसने 1 नवंबर 1755—सर्व संत दिवस—को लिस्बन पर प्रहार किया। इस विपत्ति ने गिरते गिरजाघरों में दसियों हजार उपासकों को मार डाला और अग्निकांडों तथा सुनामियों को जन्म दिया जिन्होंने नगर को कई दिनों तक उजाड़ा, चित्र 16.15a। उसने केवल एक राजधानी को नष्ट नहीं किया; उसने यूरोप के बौद्धिक जीवन को झकझोर दिया। अभिलिखित इतिहास की कुछ ही प्राकृतिक घटनाओं ने इतना केंद्रित और परिणामकारी दार्शनिक विवाद उत्पन्न किया है और कोई अन्य भूकंप एक साथ धर्मविज्ञान, नैतिक दर्शन, प्राकृतिक विज्ञान और साहित्यिक कल्पना का विवाद-केंद्र नहीं बना। साहित्य संबंधी अगले खंड (§16.5.2) में यह घटना पुनः सामने आएगी, जहाँ उसकी साहित्यिक प्रतिध्वनियों का विस्तार से परीक्षण किया गया है; यहाँ सरोकार उसके दार्शनिक आयामों से है।

भूकंप यूरोपीय प्रबोधन के चरम पर ऐसे समय आया जब शिक्षित मत प्राकृतिक विश्व को तर्कसंगत रूप से व्यवस्थित और अंततः कल्याणकारी मानने के लिए प्रवृत्त था। उसने निर्मम तात्कालिकता से इस विश्वास की सीमाएँ उजागर कर दीं। उसके द्वारा प्रस्तुत धर्मवैज्ञानिक प्रश्न नया नहीं था: जैसा §16.3 में धार्मिक परंपराओं के सर्वेक्षण ने स्पष्ट किया, भूकंपीय विपत्ति को प्रतिवर्ती रूप से दैवी दंड मानना बाइबिल से इस्लामी *hadith* और हिंदू *karma* सिद्धांत तक अनुक्रियाओं को आकार देता रहा था। नया था उसका श्रोता-वर्ग: तर्कवादी दर्शन के वैचारिक उपकरणों से संपन्न और परंपरागत उत्तरों से नव-अधीर शिक्षित यूरोपीय। भूकंप की धर्मवैज्ञानिक और परिमेय व्याख्याओं के बीच वही सम्मुखन, जिसने 1934 के बिहार भूकंप के बाद गांधी–टैगोर संवाद (§16.3.3) को आकार दिया, यहाँ पहली बार यूरोपीय बौद्धिक जीवन के केंद्र में घटित हुआ।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16.4.4.1 दार्शनिक संवादियों के रूप में वोल्तेयर और रूसो

वोल्तेयर ने ऐसी गति और भावनात्मक तीव्रता से प्रतिक्रिया दी जो उनके लिए भी असामान्य थी। अपने *Poème sur le désastre de Lisbonne* (1756) (Voltaire [Arouet, 2009) में उन्होंने लाइबनित्स से सर्वाधिक निकट संबद्ध आशावादी दर्शन—*Essais de Théodicée* (Leibniz, 1710) में पहली बार क्रमबद्ध रूप से विकसित वह सिद्धांत कि यह विश्व "सभी संभव विश्वों में सर्वोत्तम" है और प्रत्येक प्रतीयमान बुराई अंततः किसी व्यापक कल्याणकारी अभिकल्प से संगत है—को पूर्णतः अस्वीकार किया। लिस्बन विवाद के साहित्यिक आयामों के संदर्भ में §16.5.2 में इस दार्शनिक स्थिति की आगे चर्चा की गई है; यहाँ महत्त्व उसके दार्शनिक लक्ष्य का है। लाइबनित्स का आशावाद प्रबोधन की प्रमुख ईश्वरीय-व्यवस्था प्रस्तुत करता था: क्रमबद्ध, तर्कसंगत और न्यूटनवादी विज्ञान द्वारा उद्घाटित व्यवस्थित ब्रह्मांड से प्रतीयमानतः संगत। वोल्तेयर की *Poème* ने निर्दोष पीड़ा के समक्ष इसे नैतिक रूप से अरक्षणीय बताया और ऐसा करके प्राकृतिक बुराई के प्रश्न को दार्शनिक ध्यान के केंद्र में पुनः स्थापित किया।

ज्यां-जाक रूसो ने अगस्त 1756 के प्रसिद्ध पत्र (Rousseau, 1967) में उत्तर देकर विवाद की शर्तों को दार्शनिक रूप से परिणामकारी दिशा में बदल दिया। उनका केंद्रीय तर्क था कि लिस्बन के विनाश की मात्रा केवल प्रकृति को नहीं दी जा सकती: अधिकांश पीड़ा उस प्रकार का परिणाम थी जिसमें मानव समाज ने स्वयं को संगठित किया था। यदि लिस्बन के निवासी छोटे और अधिक छितरे आवासों में रहते, तो विपत्ति कहीं कम घातक होती। सघन नगरीय संरचनाओं—जिनमें अनेक निकृष्ट रूप से निर्मित थीं—में जनसंख्या के संकेंद्रण ने भूवैज्ञानिक घटना को प्रथम कोटि की मानवीय विपत्ति में बदला। इस व्याख्या में भूकंप दैवी व्यवस्था का खंडन नहीं, बल्कि मानवीय अव्यवस्था का उद्घाटन था: मानव समाज द्वारा स्वयं अपने लिए सृजित सुभेद्यताओं का अनावरण।

यह तर्क संभवतः उसका सबसे आरंभिक क्रमबद्ध कथन है जिसे समकालीन आपदा-विज्ञान *सुभेद्यता का सामाजिक निर्माण* कहता है: यह मान्यता कि किसी प्राकृतिक संकट की विनाशकता उस निर्मित पर्यावरण और सामाजिक व्यवस्थाओं से अविभाज्य है जिनके माध्यम से कोई समुदाय उसका सामना करता है (Blaikie et al., 1994; Wisner et al., 2004)। रूसो की अंतर्दृष्टि—कि भूकंप ने दसियों हजार लोगों को नहीं मारा; लिस्बन नगर ने मारा—आज भी अपना विश्लेषणात्मक बल बनाए रखती है और उस ढाँचे का दो शताब्दी पहले पूर्वानुमान करती है जिसके द्वारा आधुनिक अभियंता और आपदा-अनुसंधानकर्ता भूकंपीय जोखिम का आकलन करते हैं।

16.4.4.2 कांट

इमैनुएल कांट ने लिस्बन भूकंप को भिन्न दार्शनिक दिशा से ग्रहण किया और विपत्ति के तुरंत बाद के महीनों में इस विषय पर तीन वैज्ञानिक निबंध लिखे। धर्मवैज्ञानिक भाग्यवाद और विशुद्ध संयोग पर आधारित व्याख्याओं दोनों को अस्वीकार करते हुए कांट ने तर्क दिया कि विपत्ति को स्थिर प्राकृतिक नियमों के यथार्थ परिणाम के रूप में समझना चाहिए। इस मत में प्रकृति स्वेच्छाचारी बलों के बजाय नियमित सिद्धांतों के अनुसार कार्य करती है। विपत्तियाँ प्राकृतिक व्यवस्था के अस्तित्व का खंडन नहीं करतीं; वे उन गत्यात्मक प्रक्रियाओं को उजागर करती हैं जिनसे पृथ्वी विकसित होती है।

कांट ने बल दिया कि प्राकृतिक विश्व की व्याख्या केवल मानव-केंद्रित दृष्टिकोण से नहीं की जा सकती। पृथ्वी अपनी नियमितता और अर्थव्यवस्था का अनुसरण करती है तथा भूवैज्ञानिक रूपांतरण ऐसे

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

नियमों के अनुसार घटित होते हैं जो क्रमिक परिवर्तन और आकस्मिक विघटन दोनों उत्पन्न कर सकते हैं। ब्रह्मांड स्वयं निरंतर रूपांतरण में है और प्रकृति में संक्रमण सदैव शांतिपूर्ण नहीं होते। फिर भी ये परिवर्तन प्राकृतिक नियमों से शासित व्यवस्थित ढाँचे में ही घटित होते हैं।

इस दृष्टिकोण से लिस्बन भूकंप निरर्थक घटना नहीं, बल्कि पृथ्वी को आकार देने वाली प्रक्रियाओं की गत्यात्मक अभिव्यक्ति बन जाता है। अतः प्राकृतिक विपत्तियों को ग्रह के व्यापक विकास के भाग के रूप में समझना चाहिए। प्रकृति के अंग में परिवर्तन की स्वीकृति आपदा को भिन्न दार्शनिक आयाम देती है: विशुद्ध अराजकता के बजाय विपत्ति प्राकृतिक विश्व को संरचित करने वाले विधिसम्मत रूपांतरणों की एक संभावित अभिव्यक्ति प्रस्तुत करती है। इस अर्थ में लिस्बन के प्रति कांट की प्रतिक्रिया प्राकृतिक दर्शन के इतिहास में निर्णायक क्षण चिह्नित करती है: वह बिंदु जहाँ भूकंप मुख्यतः धर्मवैज्ञानिक समस्या रहना बंद करके वैज्ञानिक समस्या बन जाता है। लिस्बन विवाद के साहित्यिक आयाम—वोल्तेयर का *Candide*, क्लाइस्ट की लघु-उपन्यासिका और उनके द्वारा उत्पन्न साहित्य-समूह—का परीक्षण §16.5.2 में किया गया है।

इस प्रकार आरंभिक यूनानी अनुमान से लेकर प्रबोधनकालीन लिस्बन की अग्निपरीक्षा तक भूकंप दार्शनिक चिंतन के स्थायी उत्प्रेरक रहे; उन्होंने चिंतकों को प्राकृतिक विश्व की संरचना, दैवी विधान की सीमाओं और कभी हिंसक तथा अप्रत्याशित ब्रह्मांड में मानवता के स्थान संबंधी मूल प्रश्नों का सामना करने को विवश किया। वह कांट थे जिन्होंने पहली बार वह उत्तर व्यक्त किया जिसे पृथ्वी-विज्ञान की आगामी दो शताब्दियाँ पुष्ट करेंगी: भूकंप का अर्थ प्राकृतिक नियमों की अपेक्षा के अतिरिक्त कुछ नहीं है।

16.4.5 पुनर्निर्माण

इस आपदा का स्थायी महत्त्व वाला तात्कालिक भौतिक परिणाम भी हुआ। पोंबाल के मार्क्विस का बैशा क्षेत्र का पुनर्निर्माण आधुनिक नगर नियोजन और भूकंपीय अभियांत्रिकी का संस्थापक क्षण है—विपत्ति के प्रति मानवता को कैसे अनुक्रिया करनी चाहिए, इस दार्शनिक प्रश्न का पोंबाल के प्रसंग में ईंट और पत्थर में दिया उत्तर। फिर भी स्थापत्य उपलब्धि को उसे संभव बनाने वाली राजनीतिक दशाओं से पृथक नहीं किया जा सकता। आरंभ से ही पोंबाल की प्रतिक्रिया उसका अभ्यास थी जिसे प्रबुद्ध अधिनायकवाद कहा जा सकता है: लुटेरों को सार्वजनिक रूप से फाँसी दी गई, सक्षम भगोड़ों को सेना द्वारा राहत-कार्य में लगाया गया और 1666 की अग्नि के बाद लंदन के लिए रेन की सदृश योजना को विफल करने वाले अव्यवस्थित पुनर्निर्माण को रोकने हेतु पूरे नगर में नया निर्माण तत्काल निषिद्ध कर दिया गया। पाँच महीनों में मैनुएल दा माइया की *Dissertação* नामक रणनीतिक रूपरेखा ने नए बैशा के नियोजन सिद्धांत स्थापित कर दिए; दो वर्षों में संपत्ति-स्वामित्व के आमूल विधिक पुनर्विन्यास ने भूमि को अभिजात और धार्मिक अधिकारियों से उभरते व्यापारी वर्ग को हस्तांतरित कर दिया और भौतिक भूकंप के साथ राजनीतिक भूकंप को प्रभावी रूप से अभियंत्रित किया (Brand and Nicholson, 2013)।

योजना में अंतर्निहित तकनीकी नवाचार भी उतने ही परिणामकारी थे। नए बैशा को तर्कसंगत सम-कोणिक जाल पर विन्यस्त किया गया, चित्र 16.15b—मध्ययुगीन नगर के मलबे पर आरोपित कार्तीय व्यवस्था—जिसमें मानकीकृत खंड-विमाएँ, समान भवन-ऊँचाइयाँ और वहाँ रहने वाले शिल्प-संघों के नाम पर रखी सड़कों का सुपष्ट पदानुक्रम था। नदी-तटीय क्षेत्रों में द्रवीकरण के अवलोकनों ने लकड़ी के खूँटों पर टिके नींवों को जन्म दिया; काष्ठ-ढाँचे वाले भवनों की श्रेष्ठ उत्तरजीविता दर ने *gaiola* तंत्र के

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विकास को प्रेरित किया—चिनाई की परिधीय दीवारों के भीतर स्वतंत्र रूप से स्थित विकर्णतः अवलंबित आंतरिक काष्ठ-पिंजरे, यूरोपीय इतिहास का पहला सुविचारित भूकंप-प्रतिरोधी भवन प्रकार। सड़कें इतनी चौड़ी की गईं कि दोनों ओर के भवनों के एक साथ ढहने पर भी उनके बीच निकासी गलियारा बचा रहे। तीव्र संयोजन के लिए अवयवों का स्थल से बाहर पूर्वनिर्माण किया गया और छत-रेखा से ऊपर उठती अग्नि-दीवारें सर्वत्र मानक बनाई गईं। इस प्रकार योजना ने आपदा-पश्चात अनुभवजन्य अन्वेषण और विशाल स्तर के तकनीकी कार्यान्वयन का उत्पादक संगम प्रस्तुत किया, जिसकी बीसवीं शताब्दी तक क्रमबद्ध पुनरावृत्ति नहीं हुई।



(a) लिस्बन

(b) बैशा क्षेत्र का पुनर्निर्माण

चित्र 16.15: पुनर्निर्माण से पहले और बाद में लिस्बन

Brand and Nicholson, 2013 द्वारा लिस्बन और भूकंप-पश्चात क्राइस्टचर्च का तुलनात्मक अध्ययन निष्कर्ष देता है कि पोंबालीन पुनर्निर्माण की सफलता तीन परस्पराश्रित स्तंभों पर टिकी थी: ध्वस्त बैशा का पूर्ण अपमार्जन, संपत्ति-सीमाओं का अनिवार्य पुनर्रेखांकन और अंतरराष्ट्रीय सर्वोत्तम व्यवहार में दृढतः आधारित नगरीय अभिकल्प दृष्टि (Brand and Nicholson, 2013)। इनमें प्रत्येक के लिए सामूहिक प्रत्यास्थता के नाम पर वैयक्तिक संपत्ति-अधिकारों का अतिक्रमण आवश्यक था—सार्वजनिक आवश्यकता के अधीन निजी हित का ऐसा समर्पण जो केवल इसलिए संभव हुआ क्योंकि पोंबाल के पास केंद्रीकृत कार्यकारी शक्ति थी और वे उसका प्रयोग करने को तत्पर थे। इससे प्राप्त शिक्षा यह नहीं कि अधिनायकवाद स्वयं वांछनीय है, बल्कि यह कि स्थायी गुणवत्ता के आपदा-पश्चात पुनर्निर्माण ने ऐतिहासिक रूप से निर्णयकारी सत्ता की एकता, तकनीकी दृष्टि की स्पष्टता और ऐसी गति तथा निर्णायकता से कार्य करने की इच्छा की माँग की है जिसकी विचार-विमर्शपरक लोकतांत्रिक प्रक्रियाएँ विरल ही अनुमति देती हैं[15]। पोंबाल के लिस्बन में विपत्ति का दार्शनिक उत्तर केवल ईंट और पत्थर में व्यक्त नहीं था: उसे आदेश द्वारा लागू किया गया।

[15]यह प्रतिरूप सदैव सफलतापूर्वक स्थानांतरित नहीं हुआ। गृहयुद्ध-पश्चात बेरूत का *Solidere* द्वारा पुनर्निर्माण सावधान करने वाला प्रति-उदाहरण है: ऐतिहासिक केंद्र को ढहा दिया गया, उसका सामाजिक ताना-बाना विघटित हुआ और परिणाम की व्यापक निंदा उस नगर की स्वच्छीकृत, मनोरंजन-विहार सदृश अनुकृति के रूप में हुई जिसे उसने प्रतिस्थापित किया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16.5 साहित्य

16.5.1 साहित्य में भूकंप

भूकंपों ने साहित्य पर भी अपनी छाप छोड़ी है, जहाँ वे ऐतिहासिक संदर्भों और सशक्त नाटकीय अथवा प्रतीकात्मक उपकरणों दोनों के रूप में प्रकट होते हैं। प्रबोधन द्वारा भूकंप को दार्शनिक विवाद का माध्यम बनाने से बहुत पहले भूकंपीय घटनाएँ सामूहिक स्मृति के चिह्नों के रूप में साहित्यिक कल्पना में प्रवेश कर चुकी थीं। इसका एक आरंभिक उदाहरण 6 अप्रैल 1580 का डोवर जलडमरूमध्य भूकंप है, जो इंग्लैंड, फ़्लैंडर्स और उत्तरी फ़्रांस के ऐतिहासिक वृत्तांतों में अभिलिखित सबसे बड़ा भूकंप प्रतीत होता है। यह घटना इतनी स्मरणीय थी कि उस काल की सांस्कृतिक चेतना में समा गई और लगभग ग्यारह वर्ष बाद शेक्सपियर ने *Romeo and Juliet* में उसका संक्षिप्त उल्लेख सम्मिलित किया। अंक I, दृश्य III में धाय स्मरण करती है:

> ‘उस भूकंप को अब ग्यारह वर्ष हुए।
>
> अंक I, दृश्य III Shakespeare, 1597 *Romeo and Juliet*

संक्षिप्त होते हुए भी यह कथन कालानुक्रमिक आधार का कार्य करता और सुझाता है कि शेक्सपियर द्वारा नाटक रचे जाने पर भूकंप सामूहिक स्मृति में सजीव था—भूकंपीय घटनाएँ सांस्कृतिक काल में कैसे स्थापित हो जाती हैं, इसका छोटा किंतु अर्थपूर्ण उदाहरण।

अठारहवीं शताब्दी के अंत तक साहित्य में प्राकृतिक आपदाओं का प्रयोग नैतिक और दार्शनिक आख्यानों में नाटकीय उपकरण के रूप में बढ़ने लगा था। विशेषतः 1755 के लिस्बन भूकंप ने यूरोप के बौद्धिक परिवेश को गहराई से प्रभावित किया और ऐसे साहित्य-समूह को प्रेरित किया जिसने भूकंप को दैवी न्याय, मानवीय पीड़ा और सभ्यता की भंगुरता के विषयों की खोज के प्रतीकात्मक माध्यम में बदल दिया। उल्लेखनीय उदाहरणों में त्रासदी *Die Lissabonner* (1758) के रचयिता क्रिश्चियन गॉटलिब Lieberkühn (Lieberkühn, 1758), काव्यात्मक रोमांस *Les Incas* (1777) के रचयिता Jean-François Marmontel (Marmontel, 1777), और हाइनरिख़ फ़ॉन क्लाइस्ट की प्रसिद्ध लघु-उपन्यासिका *Das Erdbeben in Chile* (लगभग 1806 में लिखित, 1810 में प्रकाशित) (Kleist, 1810) हैं। इन सभी कृतियों में भूकंप केवल भौतिक परिघटना नहीं, बल्कि ऐसा आख्यानात्मक उत्प्रेरक है जो नैतिक तनाव, सामाजिक अंतर्विरोध और नियति, दैवी विधान तथा मानव समाज की प्रकृति संबंधी दार्शनिक प्रश्नों को उजागर करता है।

16.5.2 1755 का लिस्बन भूकंप और प्रबोधनकालीन विवाद

लिस्बन भूकंप के दार्शनिक आयामों का परीक्षण §16.4.4 में किया गया है: कांट की प्रकृतिवादी अनुक्रिया, रूसो की सुभेद्यता की आद्य-समाजशास्त्रीय व्याख्या और दार्शनिक स्थिति के रूप में लाइबनित्सीय आशावाद पर वोल्तेयर का आक्रमण। वर्तमान खंड समानांतर साहित्यिक अनुक्रिया का परीक्षण करता है—वे विधियाँ जिनसे उसी घटना ने केवल तर्क नहीं, बल्कि ऐसी कविताएँ, व्यंग्य और कथाएँ भी उत्पन्न कीं जो उसके प्रश्नों को कहीं व्यापक श्रोता-वर्ग तक ले गईं और उन्हें ऐसी स्थायिता दी जिसे केवल दार्शनिक गद्य सुनिश्चित नहीं कर सकता था। दोनों आयाम अविभाज्य हैं: वोल्तेयर एक साथ लिस्बन

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के दार्शनिक और उसकी महानतम साहित्यिक वाणी थे तथा व्यवहार में उनके दार्शनिक क्रोध और काव्यात्मक क्रोध के बीच भेद करना कठिन है।

वोल्तेयर

वोल्तेयर की *Poème sur le désastre de Lisbonne* (1756) ने भूकंप को उसकी सबसे प्रसिद्ध साहित्यिक वाणी दी। कविता दार्शनिक तर्क की नहीं, बल्कि दार्शनिक क्रोध की रचना है: वह पूछती है कि लिस्बन के मलबे के नीचे कुचले बच्चों के दृश्य के सम्मुख आशावाद का कोई सिद्धांत कैसे जीवित रह सकता है।

> Direz-vous, en voyant cet amas de victimes :
> “Dieu s’est vengé, leur mort est le prix de leurs crimes” ?
> Quel crime, quelle faute ont commis ces enfants
> Sur le sein maternel écrasés et sanglants ?
>
> Voltaire [Arouet, 2009 *“Poème sur le désastre de Lisbonne, ou Examen de cet axiome : Tout est bien”*

इस अंश का अनुवाद इस प्रकार किया जा सकता है: *“पीड़ितों के इस ढेर को देखकर क्या आप कहेंगे: ‘ईश्वर ने प्रतिशोध लिया; उनकी मृत्यु उनके अपराधों का मूल्य है’? अपनी माँ की छाती पर कुचले और रक्तरंजित इन बच्चों ने कौन-सा अपराध, कौन-सी भूल की थी?”* अभियोग केवल धर्मवैज्ञानिक आशावाद पर नहीं, बल्कि प्रत्येक ऐसे व्याख्यात्मक ढाँचे—धार्मिक अथवा दार्शनिक—पर लक्षित है जो निर्दोषों पर आरोपित पीड़ा को तर्कसंगत ठहराने का प्रयास करता है। वोल्तेयर के हाथों में भूकंप खंडन बन जाता है: विपत्ति द्वारा इस बात का प्रमाण कि विश्व मानव-कल्याण के लिए व्यवस्थित नहीं और उस धारणा पर निर्मित बौद्धिक तंत्र नैतिक रूप से अरक्षणीय हैं।

तीन वर्ष बाद *Candide, ou l’Optimisme* (1759) (Voltaire [Arouet, 1759) में वोल्तेयर अत्यंत भिन्न शैली में लिस्बन लौटे। यह उपन्यास—संभवतः पाश्चात्य साहित्य-विधान का सर्वाधिक पठित दार्शनिक व्यंग्य—अपने naïve (सरलमना) नायक को नगर के भग्नावशेषों से ले जाता है, जहाँ वह भूकंप और उसके परिणामों सहित भावी भूकंपीय घटनाओं को रोकने के लिए धर्माधिकरण द्वारा आयोजित auto-da-fé देखता है। यह समीपस्थापन जानबूझकर विकृत है: राजकीय धर्मविज्ञान भूवैज्ञानिक विपत्ति का उत्तर न्यायिक हत्या से देता है। डॉ. पैंगलॉस के चरित्र में, जो प्रत्येक आपदा में आग्रह करता है कि “सभी संभव विश्वों में सर्वोत्तम विश्व में सब कुछ सर्वोत्तम के लिए है,” वोल्तेयर ने दार्शनिक आत्म-प्रवंचना का साहित्यिक महान प्रतीक रचा—ऐसा चरित्र जिसका प्रसन्न आशावाद लिस्बन के सम्मुख नैतिक अंधता का रूप बन जाता है।

क्लाइस्ट

हाइनरिख फ़ॉन क्लाइस्ट की लघु-उपन्यासिका *Das Erdbeben in Chile* (“चिली में भूकंप”, लगभग 1806 में लिखित, 1810 में प्रकाशित) (Kleist, 1810) यूरोपीय साहित्य में भूकंप का सर्वाधिक रूपतः सिद्ध साहित्यिक विवेचन है और लिस्बन द्वारा प्रस्तुत दार्शनिक प्रश्नों से सर्वाधिक प्रत्यक्षतः संलग्न कृति भी—यद्यपि उसका परिवेश 1647 के विनाशकारी भूकंप के समय का सैंटियागो है। उसके दो नायक

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Jerónimo और Josépha नगर की नैतिक संहिताओं का अतिक्रमण करने के कारण मृत्युदंड के निकट हैं, तभी भूकंप कारागार और वध-मंच दोनों को नष्ट करके उन्हें रूपांतरित विश्व में मुक्त कर देता है।

लघु-उपन्यासिका में आगे जो होता है वह जर्मन साहित्य में विपत्ति और भ्रम के सर्वाधिक सूक्ष्म अन्वेषणों में से है। भूकंप अल्पकाल के लिए एक प्रकार का सामाजिक ईडन बनाता है: सामान्य पदानुक्रम निलंबित होते हैं, अपरिचित एक-दूसरे की सहायता करते हैं और उत्तरजीवी ऐसी क्षणिक एकजुटता अनुभव करते हैं जो औपनिवेशिक समाज के कठोर स्तरीकरणों को काटती है। क्षण भर के लिए क्लाइस्ट *yonaoshi*—§16.2.1 में विवेचित जापानी अर्थ में "विश्व-सुधार"—का आख्यान लिखते प्रतीत होते हैं, जिसमें भूकंप हिंसक किंतु अंततः मुक्तिदायक सामाजिक समताकारी का कार्य करता है।

किंतु यह भ्रम विशिष्ट क्लाइस्टीय हिंसा से टूट जाता है। उत्तरजीवी धन्यवाद-प्रवचन के लिए गिरजाघर में एकत्र होते हैं और उपदेशक, भूकंप द्वारा निलंबित धर्मवैज्ञानिक व्यवस्था को पुनःस्थापित करते हुए, विपत्ति को उन्हीं नैतिक अतिक्रमणों का दैवी दंड बताता है जिनके लिए Jerónimo और Josépha अभियुक्त थे। धर्मवैज्ञानिक भय से पुनः प्रज्वलित जनसमूह दंपति पर टूट पड़ता और उनकी हत्या कर देता है। व्यवस्था—सामाजिक, धर्मवैज्ञानिक, हिंसक—विपत्ति द्वारा निर्मित क्षणिक खुलेपन पर पुनः अधिकार कर लेती है। भूकंप उद्धार नहीं करता; वह केवल अधिक क्रमबद्ध क्रूरता का अवसर देता है।

इस प्रकार क्लाइस्ट की लघु-उपन्यासिका आख्यान के स्तर पर भूकंप की धर्मवैज्ञानिक और परिमेय व्याख्याओं के उसी सम्मुखन को नाट्यरूप देती है जिसे वोल्तेयर और रूसो ने दार्शनिक तर्क के रूप में किया था (§16.4.4)। उपदेशक भूकंप को दैवी न्याय के रूप में पढ़ता है; उत्तरजीवियों का क्षणिक समुदाय उसे मुक्ति मानता है; और क्लाइस्ट का व्यंग्यात्मक आख्यान उसे समस्त सामाजिक व्यवस्था में अंतर्निहित हिंसा का उद्घाटन बनाता है। इनमें किसी व्याख्या की पुष्टि नहीं होती; सभी उस भूवैज्ञानिक घटना पर व्याख्यात्मक अधिरोपण के रूप में उजागर होती हैं जो स्वयं मानवीय अर्थ के प्रति उदासीन है। इस अर्थ में *Das Erdbeben in Chile* को उस दार्शनिक प्रक्षेप-पथ की साहित्यिक पूर्ति माना जा सकता है जो वोल्तेयर से कांट तक जाता है (§16.4.4): सांत्वनापरक कथाओं को हटाने और विश्व का जैसा वह है वैसा सामना करने का अवसर बनता भूकंप।

16.5.3 1908 का मेसिना भूकंप

यदि लिस्बन भूकंप प्रबोधन दर्शन का उत्प्रेरक था, तो 28 दिसंबर 1908 का मेसिना भूकंप आधुनिक यूरोपीय साहित्यिक कल्पना की महान भूकंपीय विपत्ति था—यद्यपि उसकी साहित्यिक अनुक्रिया लिस्बन के अर्थ में दार्शनिक होने के बजाय शोकगीतात्मक और देशभक्तिपूर्ण थी। प्रातःकाल मेसिना जलडमरूमध्य के दोनों तटों पर आए भूकंप और संबद्ध सुनामी ने अनुमानतः 80,000 से 120,000 लोगों को मारा और दो नगरों को लगभग पूर्णतः नष्ट कर दिया, जिससे यह यूरोपीय इतिहास की सबसे घातक भूकंपीय घटना बनी।

आपदा की मात्रा ने इतालवी साहित्य-जगत से तत्काल अनुक्रिया उत्पन्न की। महान सिसिलीयाई यथार्थवादी उपन्यासकार जियोवानी वेर्गा ने उत्तरजीवियों को "अपने अभागे नगर के भग्नावशेषों पर दृढ़" लिखा—प्रतिरोध और अस्मिता की उस भाषा का आह्वान जो घटना की सांस्कृतिक स्मृति में केंद्रीय होनी थी। लुइजी कापुआना, जो *verismo* आंदोलन के संस्थापक थे, ने विनाश का वर्णन विशिष्ट प्रत्यक्षता से किया: पीढ़ियों द्वारा निर्मित को मिटाने के लिए भूकंप को केवल एक मिनट लगा था। भूकंप-अनाथों की सहायता हेतु इतालवी पत्र-पत्रिका प्रेस संघ द्वारा निर्मित प्रकाशन *Scilla e Cariddi* (Barzilai,

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1909) में संकलित ये अनुक्रियाएँ दर्शाती हैं कि मेसिना विपत्ति राष्ट्रीय एकजुटता और सामूहिक शोक के विमर्श में कैसे आत्मसात हुई—जापानी *namazu-e* चित्रों में संहिताबद्ध सामाजिक तथा राजनीतिक व्याख्याओं के संरचनात्मक रूप से सदृश प्रक्रिया, जिसका विवेचन §16.2.1 में हुआ है।

किंतु मेसिना भूकंप की सर्वाधिक स्थायी साहित्यिक अनुक्रिया ऐसे लेखक से आई जिसने बालक के रूप में उसे अनुभव किया था। कवि साल्वातोरे क्वाज़िमोडो—जिन्हें 1959 में साहित्य का नोबेल पुरस्कार मिला—आपदा के तुरंत बाद अपने परिवार के साथ मेसिना आए क्योंकि उनके पिता को बचाव-प्रयास में सहायता हेतु वहाँ रेलवे अधिकारी के रूप में नियुक्त किया गया था। दशकों बाद लिखी अपनी कविता *To My Father* में क्वाज़िमोडो ने दृश्य को ऐसी बिंबात्मक परिशुद्धता से स्मरण किया जो वर्षों की दूरी के पार विपत्ति का अनुभव सुरक्षित रखती है:

Dove sull'acque viola era Messina,	जहाँ जल पर बैंगनी मेसिना था,
tra fili spezzati e macerie	टूटे तारों और मलबे के बीच,
tu vai lungo binari e scambi	तुम रेल और स्विच के साथ चलते हो
col tuo berretto di gallo isolano.	अपनी द्वीपवासी की कलगीदार टोपी में।
Il terremoto ribolle da due giorni,	दो दिनों से भूकंप उबल रहा है,
è dicembre d'uragani	यह तूफानी दिसंबर है
e mare avvelenato.	और विषाक्त समुद्र।

La terra impareggiabile, Quasimodo, 1958 *"Al padre"*

"जल पर बैंगनी" पड़े मेसिना का बिंब गीतात्मक मितव्ययिता से वह पकड़ता है जिसे अभियांत्रिकी सर्वेक्षण क्षति-सांख्यिकी में दर्ज करते हैं: समुद्र के किनारे भग्नावशेष में विलीन पूरा नगर। भूकंप का तीन दिनों तक "उबलना" कवि के संक्षेप में प्रारंभिक घटना के बाद विनाश को विस्तारित करने वाले पश्चात्कंपों का अनुभव संहिताबद्ध करता है—भूकंपवैज्ञानिक और साहित्यिक दोनों महत्त्व का विवरण।

लिस्बन से विरोध शिक्षाप्रद है। जहाँ लिस्बन ने दर्शन और धर्मवैज्ञानिक संकट उत्पन्न किया, वहीं मेसिना ने शोकगीत और राष्ट्रीय एकजुटता उत्पन्न की। यह भेद केवल 1755 और 1908 की सांस्कृतिक दूरी नहीं, बल्कि उस बौद्धिक ढाँचे में महत्त्वपूर्ण परिवर्तन दर्शाता है जिसमें भूकंपों की व्याख्या होती थी: बीसवीं शताब्दी के आरंभ तक भूकंप का प्राकृतिक कारण गंभीर विवाद का विषय नहीं रहा और दैवी न्याय का प्रश्न शिक्षित विमर्श के केंद्र से हट चुका था। जो शेष था—और जिसे मेसिना का साहित्य दर्शाता है—वह विपत्ति का मानवीय अनुभव था: शोक, एकजुटता, स्मृति और पुनर्निर्माण का कार्य। धर्मवैज्ञानिक से अनुभवजन्य की ओर इस परिवर्तन में भूकंप की साहित्यिक अनुक्रिया इस अध्याय में निरूपित व्यापक बौद्धिक प्रक्षेप-पथ को प्रतिबिंबित करती है—मिथक से धर्म और दर्शन होते हुए आधुनिक युग की विशेषता, प्राकृतिक बलों के धर्मनिरपेक्ष सामना तक।

16.5.4 संश्लेषण: साहित्य और भूकंपों की सांस्कृतिक स्मृति

इस खंड में परीक्षित साहित्यिक परंपराएँ प्रकट करती हैं कि महान भूकंपीय घटनाएँ कितनी सुसंगतता से सांस्कृतिक और बौद्धिक आत्मपरीक्षण की उत्प्रेरक रही हैं—और समय के साथ उस आत्मपरीक्षण का स्वरूप कैसे बदला है। 1580 के भूकंप की शेक्सपियर की संक्षिप्त संकेतना स्मृति-चिह्न का कार्य करती है, इस बात का प्रमाण कि भूकंपीय घटनाएँ सामूहिक स्मृति में बसती और सांस्कृतिक काल के संदर्भ-बिंदु

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बनती हैं। लिस्बन का साहित्य भिन्न और अधिक महत्त्वाकांक्षी कार्य करता है: वह भूवैज्ञानिक विपत्ति को तर्क में बदलता और भूकंप को विश्व की संरचना तथा उसमें मानवता के स्थान संबंधी दार्शनिक विवाद में प्रमाण के रूप में नियोजित करता है—ऐसा विवाद जिसकी दार्शनिक आधार-संरचना कांट, वोल्तेयर और रूसो ने स्थापित की, जैसा §16.4.4 में परीक्षित है, और जिसकी साहित्यिक अभिव्यक्ति का यहाँ परीक्षण है। इसके विपरीत मेसिना का साहित्य उत्तर-दार्शनिक है: वह शोक करता, स्मरण करता और साक्ष्य देता है, किंतु अब नहीं पूछता कि भूकंप का धर्मवैज्ञानिक अर्थ में कोई अर्थ है अथवा नहीं।

यह प्रक्षेप-पथ—स्मृति-चिह्न से दार्शनिक उत्प्रेरक होते हुए धर्मनिरपेक्ष शोकगीत तक—इस अध्याय में निरूपित व्यापक चाप प्रतिबिंबित करता है: प्राकृतिक अन्वेषण और मानवीय अनुभव में मूलित ढाँचों द्वारा भूकंपों की मिथकीय, धार्मिक और ईश्वरीय-व्यवस्थावादी व्याख्याओं का क्रमिक विस्थापन। डिराक का विश्वासपूर्ण कथन, जिसे §16.2 के आरंभ में उद्धृत किया गया है, कि प्राकृतिक प्रक्रियाओं की आधुनिक समझ ने आपदा की धर्मवैज्ञानिक व्याख्या को अप्रचलित कर दिया है, अपना सर्वाधिक प्रेरक प्रमाण किसी दार्शनिक तर्क में नहीं, बल्कि स्वयं साहित्यिक अभिलेख में पाता है: वोल्तेयर की *Poème*—जो ईश्वर का सामना किए बिना लिस्बन का वर्णन नहीं कर सकती थी—और क्वाज़िमोडो की कविता के बीच की दूरी में, जिसमें ईश्वर पूर्णतः अनुपस्थित है और भूकंप विषाक्त समुद्र में तीन दिनों तक उबलता है।

16.6 वास्तुकला

16.6.1 पीरो लिगोरियो

भूकंपों के आरंभिक बौद्धिक इतिहास का एक अन्य महत्त्वपूर्ण सोपान पीरो लिगोरियो का कार्य है, जिन्होंने 1570 में *Libro di diversi terremoti* लिखा। इस ग्रंथ ने भूकंपीय परिघटनाओं संबंधी समकालीन सिद्धांतों को संकलित और आलोचनात्मक रूप से मूल्यांकित किया तथा पाश्चात्य विश्व में भूकंपों को धर्मवैज्ञानिक व्याख्या के बजाय तर्कसंगत विश्लेषण के अधीन करने के आरंभिक क्रमबद्ध प्रयासों में से एक प्रस्तुत किया—जिससे वह इस अध्याय में परीक्षित परंपरा के ठीक भीतर आता है। उल्लेखनीय रूप से इस कृति में वह भी है जिसे पाश्चात्य स्थापत्य इतिहास में भूकंप-प्रतिरोधी संरचना का पहला अभिकल्प माना जाता है; यह विवरण लिगोरियो को ऊपर सर्वेक्षित दार्शनिक परंपरा और इस कृति के आगामी अध्यायों में परीक्षित अभियांत्रिकी परंपरा के बीच संक्रमणकालीन व्यक्तित्व बनाता है। पांडुलिपि को इमानुएला गुइडोबोनी ने पुनः खोजा और आधुनिक विद्वत्तापूर्ण संस्करण में प्रकाशित किया (Ligorio, 2005), वर्ष 2005 में।[16]

[16] आरंभिक भूकंप-अन्वेषण का एक और उल्लेखनीय उदाहरण ट्रालेस के एन्थेमियस (लगभग 474–लगभग 558) को दिया जाता है। हागिया सोफ़िया के प्रमुख वास्तुकारों में से एक एन्थेमियस ने कथिततः पड़ोसी के घर के नीचे भूकंपीय कंपन का अनुकरण करने के लिए वाष्प-चालित यांत्रिक उपकरण बनाया था—स्रोतों के अनुसार वह पड़ोसी विधिक विरोधी था—जिससे यह संभवतः कृत्रिम भूकंप-अनुकरण का सबसे आरंभिक अभिलिखित उदाहरण बनता है (Dragoni, 2005; Downey, 1946)। इतिहास के सर्वाधिक भूकंपीय रूप से परीक्षित भवनों में से एक के वास्तुकार को प्रथम भूकंप-अनुकरण का श्रेय भी मिलना सुरक्षित रखे जाने योग्य संयोग है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16.6.2 जिबेलिना

15 जनवरी 1968 को 6.4 परिमाण के विनाशकारी भूकंप ने पश्चिमी सिसिली की बेलिचे घाटी को आघात किया, जिसमें लगभग 400 लोग मारे गए और करीब 100,000 बेघर हुए। पूर्णतः नष्ट नगरों में लगभग 6,000 निवासियों वाला छोटा कृषि-समुदाय जिबेलिना भी था, चित्र 16.16a। विनाश संपूर्ण था: पूरे खंड ढह गए, मध्ययुगीन सड़क-विन्यास मिट गया और उत्तरजीवी आसपास के ग्रामीण क्षेत्र में अस्थायी तंबू-नगरों में भागे, चित्र 16.16b। इसके बाद इतालवी इतिहास के सर्वाधिक दीर्घ और राजनीतिक रूप से आवेशित पुनर्निर्माण प्रयासों में से एक चला। इतालवी राज्य ने धीमी और अव्यवस्थित अनुक्रिया दी; आपात आवास वर्षों तक उपलब्ध नहीं हुआ और विस्थापित जनसंख्या अस्थायी बैरकों में पड़ी रही—कुछ लोग एक दशक से अधिक। भूकंप रोम द्वारा दक्षिणी इटली की उपेक्षा का प्रतीक और बेलिचे घाटी संस्थागत विफलता तथा समृद्ध उत्तर और निर्धन *Mezzogiorno* के बीच अंतर का पर्याय बन गई। लेखक, बुद्धिजीवी और श्रमिक-संघवादी उत्तरजीवियों के पक्ष में एकत्र हुए तथा बेलिचे नगरों का पुनर्निर्माण अंततः युद्धोत्तर इटली में नगर नियोजन, सांस्कृतिक अस्मिता और आपदा की राजनीति संबंधी व्यापक विवादों से जुड़ गया (Musolino, 2017)।

इसी तनावपूर्ण संदर्भ में कलाकार अल्बेर्तो बुरी (1915–1995) ने भू-कला के इतिहास में विनाश के प्रति सर्वाधिक असाधारण अनुक्रियाओं में से एक की परिकल्पना की। बुरी पहले ही इटली के युद्धोत्तर काल के सबसे प्रसिद्ध कलाकारों में थे और अपने *Sacchi* (सिले टाट के बोरों से बने चित्र), झुलसे प्लास्टिक और सबसे बढ़कर अपने *Cretti*—काओलिन-आधारित मिश्रणों से लेपित कैनवस, जो सूखते और सिकुड़ते समय ऐसी दरारों के जाल उत्पन्न करते थे जो विचित्र रूप से तप्त भूमि, सूखे कीचड़ अथवा अनिवार्यतः भूकंप-विदीर्ण धरातल की स्मृति दिलाते थे—के लिए अंतरराष्ट्रीय स्तर पर मान्य थे। कैनवस से भूदृश्य की छलाँग वैचारिक रूप से साहसी किंतु दृश्यतः सुसंगत थी: जिबेलिना में बुरी ने वही कार्य सभ्यतागत स्तर पर जारी रखा जो वे सदा करते आए थे (Forty, 2013)।

1984 से 1989 के बीच, और फिर 2015 में मरणोपरांत पूर्ण हुए कार्य में, बुरी ने पुराने जिबेलिना के संपूर्ण मलबा-क्षेत्र को श्वेत कंक्रीट के सतत आवरण में बंद करने का निर्देशन किया (Forty, 2013), चित्र 16.16c। यह प्रक्रिया मिटाने की नहीं, जीवाश्मीकरण की थी: कंक्रीट ने पूर्ववर्ती सड़क-जाल का अनुसरण किया और सड़कों, आँगनों तथा गृह-पदचिह्नों की रूपरेखाओं को चलने योग्य दरारों से पृथक उभरे श्वेत फीते की शृंखला के रूप में सुरक्षित रखा। सतह में जानबूझकर “फाड़ी” गई ये दरारें विनाश उत्पन्न करने वाले भूकंपीय विदारणों और उनके कैनवस के विशिष्ट सतह-उपचार दोनों की प्रतिध्वनि करती हैं, जिन्हें अब पूरे नगरीय क्षेत्र के स्तर तक विस्तृत किया गया है। पूर्ण कृति लगभग 300 गुणा 400 m मापती, करीब 80,000 वर्ग मीटर ढकती और हवाई तथा उपग्रह छायाचित्रण में सुसंगत रूप के रूप में पठनीय है। यह अब तक निर्मित सबसे बड़े भू-कला संस्थापनों में से है।

मैंने 2008 में *Cretto* देखा और उसकी अलौकिक निस्तब्धता से प्रभावित हुआ।[17] उसके संकरे श्वेत गलियारों—कुछ स्थानों पर दो व्यक्तियों के निकलने भर की चौड़ाई—में चलते हुए व्यक्ति मूलतः सामुदायिक समाधि से गुजरता है। दीवारें छाती अथवा कंधे की ऊँचाई तक उठती और पथिक को निरपेक्ष श्वेतता की भूलभुलैया में घेरती हैं। कोई ध्वनि नहीं, छाया अल्प है और स्वयं कंक्रीट तथा ऊपर के आकाश के अतिरिक्त कोई दृश्य संदर्भ नहीं। अनुभव एक साथ स्थापत्यपरक और अंत्येष्टिपरक, अमूर्त और अत्यंत

[17] वास्तव में जिबेलिना की इसी यात्रा ने, जैसा भूमिका में उल्लेख है, इस अध्याय को लिखने में मेरी रुचि पहली बार जगाई।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विशिष्ट है: पैरों के नीचे बंद तथा निस्तब्ध पूरा नगर है। *Cretto* कृषति का निरूपण नहीं करता; वह स्वयं कृषति है, जिसे भौतिक रूप मिला है (Forty, 2013)।



(a) विनाश से पहले जिबेलिना



(b) विनष्ट जिबेलिना





(c) बुरी का क्रेतो

चित्र 16.16: कंक्रीट में समाधिस्थ विनष्ट जिबेलिना

उत्तरजीवियों की नियति ने स्मारक से अधिक की माँग की। बीस किलोमीटर दूर नीचे के मैदान में समतल स्थल पर प्रतिस्थापन बस्ती—जिबेलिना नुओवा—का आरंभ से निर्माण होना था, चित्र 16.17a। नए नगर के महापौर लुदोविको कोर्राओ अधिवक्ता, राजनीतिज्ञ और कला के उत्साही संरक्षक थे, जिन्होंने आपदा में एक असंभावित अवसर देखा: ऐसा नगर बनाने का अवसर जो अपनी नींव से कला की संपूर्ण कृति हो (Badami, 2012)। कोर्राओ ने इतालवी और अंतरराष्ट्रीय वास्तुकारों, कलाकारों तथा अभिकल्पकों के असाधारण समूह को नए नगर में योगदान हेतु आमंत्रित किया और सामाजिक आवास की संभावित सामान्य कवायद को बीसवीं शताब्दी में कहीं भी किए गए नगरवाद तथा समकालीन कला के संलयन के सर्वाधिक महत्त्वाकांक्षी प्रयोगों में बदल दिया। भवनों, नगरीय संरचनाओं अथवा सार्वजनिक मूर्तियों का योगदान देने वालों में ओसवाल्ड मथियास उंगर्स, फ्रांको पुरीनी, पिएत्रो कोंसाग्रा, लुदोविको क्वारोनी, वित्तोरियो ग्रेगोत्ती, अलेस्सांद्रो मेंदिनी और मिम्मो पलादीनो थे (Venezia, 1989)। इन योगदानों को बाँधने वाला नागरिक ढाँचा फ्रांको पुरीनी और लौरा थर्मेस की *Sistema delle Piazze* (1990), चित्र 16.17b, ने दिया—द्विस्तरीय टूफ़ा बरामदे से घिरे, संगमरमर और लावा-पत्थर से पक्के तथा फव्वारों की शृंखला को जल देने वाली छोटी नहर से जुड़े तीन परस्पर संबद्ध सार्वजनिक चौकों का क्रम, जिसे आवासीय क्षेत्रों के बीच सामाजिक संधि और पूरे नगर में वितरित कलाकृतियों की स्मारकीय पृष्ठभूमि दोनों के रूप में बनाया गया। कुल मिलाकर अस्सी से अधिक वास्तुकारों और कलाकारों ने जिबेलिना नुओवा पर अपनी छाप छोड़ी

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और नगर—कम से कम आशय में—उत्तर-आधुनिक तथा परवर्ती आधुनिकतावादी अभिकल्प का मुक्ताकाश संग्रहालय बना।



(a) पिएत्रो कोंसाग्रा की *Porta del Belice*





(b) फ्रांको पुरीनी, लौरा थर्मेस, *Sistema delle Piazze*



(c) पिएत्रो कोंसाग्रा की *Snake*



(d) पिएत्रो कोंसाग्रा की *Teatro Frontale*

चित्र 16.17: जिबेलिना नुओवा

रोचक और उपयुक्त रूप से चित्र 16.17c में पिएत्रो कोंसाग्रा को दी गई मूर्ति दिखाई गई है। सिसिली में जन्मे और कोर्राओ की मुक्ताकाश संग्रहालय परियोजना में व्यापक योगदान देने वाले इस कलाकार की धातु-पटीना वाली वक्र नलिकाकार आकृति की कुंडलित आकारिकी—चाहे अभिकल्प से अथवा अपनी अनुगूँज खोजते अमूर्त रूप के तर्क से—इस अध्याय में भूकंपीय और पाताली बल के अंतर-सांस्कृतिक माध्यम के रूप में विवेचित सर्पाकार आकृतियों से तुलना आमंत्रित करती है। युद्धोत्तर इतालवी विचारधारा के प्रतिबद्ध अमूर्तवादी कोंसाग्रा ने संभवतः प्रत्यक्ष मिथकीय व्याख्या का विरोध किया होता (वे कट्टर मार्क्सवादी थे); फिर भी विनाशकारी भूकंप के बाद पुनर्निर्मित नगर में सर्पाकार मूर्ति का अभिसरण—ऐसे प्रदेश में जिसकी भूवैज्ञानिक हिंसा *Cretto* के नीचे की भूमि में ही संहिताबद्ध है—केवल आकस्मिक मानकर त्यागना कठिन है।

पिएत्रो कोंसाग्रा का तेआत्रो फ़रोंताले, चित्र 16.17d, (1984 में आरंभ, कभी पूर्ण नहीं) संभवतः जिबेलिना नुओवा के अवास्तविक आदर्शलोक का सर्वाधिक प्रतीकात्मक स्मारक है: मूर्तिकार ने इसकी कल्पना परंपरागत रंगमंच के बजाय “जीवित मूर्ति” के रूप में की थी; ऊँचे उठते कंक्रीट मेहराबों की पंक्ति—जिसकी सरिया अब भी सिसिली के आकाश के सामने खुली है—भूकंप-पश्चात पुनर्निर्माण की महत्त्वाकांक्षाओं का अनभिप्रेत शोकगीत बनकर खड़ी है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

फिर भी यह प्रयोग गहन और शिक्षाप्रद विफलताओं से रहित नहीं था[18]। अपनी समस्त सांस्कृतिक महत्त्वाकांक्षा के बाद भी जिबेलिना नुओवा को अनेक निवासियों—विशेषतः वृद्धों—ने अत्यंत अलगावकारी अनुभव किया (Musolino, 2017)। पुराना जिबेलिना सिसिली में सामान्य प्रकार का सघन, भूलभुलैया-सदृश पर्वतीय नगर था: सड़कें कठिनाई से दो मीटर चौड़ी, घर एक-दूसरे पर चढ़े, पड़ोसी एक दीवार अथवा साझा सीढ़ी से पृथक और सार्वजनिक जीवन प्रदर्शन के बजाय वार्तालाप के अनुपात वाले चौकों में चलता था। इसके विपरीत नया नगर समतल मैदान पर बिखरे, अल्प-सघनता वाले विन्यास में विस्तृत था, जिसमें चौड़े मार्ग, स्मारकीय गोलचक्कर और ऐसी मूर्तिकला-संरचनाएँ थीं जिनका पारंपरिक सिसिलीयाई नगरवाद के कण-विन्यास से कोई संबंध नहीं था (Badami, 2012)। भवन वैयक्तिक वस्तुओं के रूप में प्रभावशाली थे, किंतु मूल नगर के दैनिक जीवन को संरचित करने वाला स्थानिक घेराव और सामाजिक आत्मीयता उत्पन्न करने में विफल रहे। वृद्ध निवासी स्वयं को दिशाबद्ध करने, पड़ोसियों तक पैदल जाने और जीवन-भर की आदतों तथा अनुष्ठानों को पुनरुत्पन्न करने में असमर्थ पाए। अनेक लोगों ने नए नगर को वापसी के बजाय निर्वासन-स्थल कहा। समुदाय को वास्तुकला मिली थी, किंतु वह नगर नहीं जिसे उसने खोया था।

इस प्रकार जिबेलिना भूकंपविज्ञान, वास्तुकला और नगरवाद के अंतर्संबंध का सर्वाधिक दृश्यतः आकर्षक और संभवतः सर्वाधिक शिक्षाप्रद प्रकरण-अध्ययन है। *Cretto* कृषति का अप्रतिस्थाप्य स्मारक है; जिबेलिना नुओवा स्थापत्य दृष्टि और सामाजिक जीवन के बीच अंतर की सावधानकारी शिक्षा है। साथ मिलकर वे भूकंप और निर्मित पर्यावरण पर विश्व में कहीं भी उपलब्ध सर्वाधिक केंद्रित चिंतन निर्मित करते हैं।

16.7 कला

16.7.1 शैल-कला और भ्रंश चिह्न

दो प्रभावशाली उदाहरण भूकंप-बिंबावली को सक्रिय भूवैज्ञानिक संरचनाओं से प्रत्यक्षतः जोड़ते हैं और साथ मिलकर इस प्रकार के तर्क के लिए उपलब्ध साक्ष्य की सीमा—भूवैज्ञानिक अवलोकन से सांस्कृतिक व्याख्या तक—दर्शाते हैं।

बाजा कैलिफ़ोर्निया की सिएरा दे सैन फ्रांसिस्को में *Cueva de la Serpiente* (सर्प की गुफा) नामक स्थल लगभग आठ मीटर लंबा भित्तिचित्र सुरक्षित रखता है जिसमें करीब पचास मानव और पशु आकृतियों से घिरा विशाल सींगदार सर्प चित्रित है, चित्र 16.18। केंद्रीय सींगदार सर्प के चारों ओर मानव और पशु आकृतियों का डोलता दृश्य-विन्यास ध्यान देने योग्य है, जो पट्टिका के आर-पार गत्यात्मक पार्श्व गति सुझाता है। रचना स्थिर नहीं है: आकृतियों का विन्यास डोलती दृश्य लय उत्पन्न करता है, मानो सर्प पट्टिका पर गत्यात्मक रूप से लहरा रहा हो और मानव तथा पशु जगत को अपनी गति में समेट रहा हो। गुफा के ठीक सामने जलधारा उत्तर की दिशा पुनः लेने से पहले अचानक पूर्व की ओर मुड़ती है—ऐसी

[18]मातेरा के *Sassi* की नियति जिबेलिना की दोहरी त्रासदी का शिक्षाप्रद प्रतिरूप देती है। निर्धनता और अस्वास्थ्यकरता के आधार पर 1950 के दशक में शासकीय आदेश द्वारा खाली कराई गई—कार्लो लेवी की *Cristo si è fermato ad Eboli* (1945) ने गुफा-आवासों को दक्षिणी इतालवी दुर्दशा का पर्याय बना दिया था—प्राचीन शैल-निवास बस्ती को ढहाया नहीं गया, केवल छोड़ दिया गया। 1986 के कानून ने पुनः अधिवास की अनुमति दी, 1993 में यूनेस्को मान्यता मिली और आज *Sassi* पुनः समृद्ध, यद्यपि अत्यधिक पर्यटन-प्रधान, नगरीय क्षेत्र है। जहाँ जिबेलिना मिटाकर पुनः आविष्कृत हुआ, मातेरा खाली करके पुनः प्राप्त किया गया: मूल ताना-बाना बचा रहा और उसके साथ वापसी की संभावना भी।

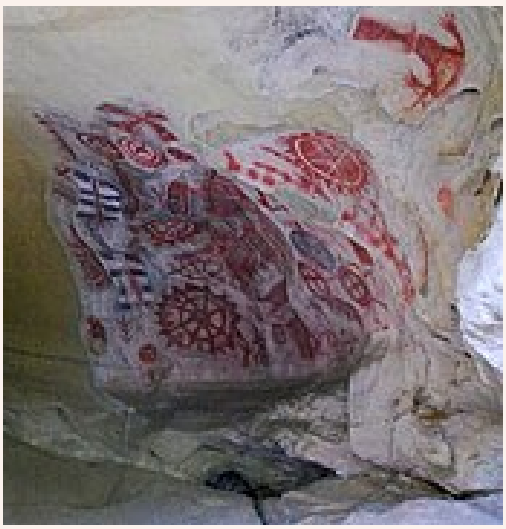
ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 16.18: कुएवा दे ला सेर्रिपएंते का भित्तिचित्र, सिएरा दे सैन फ्रांसिस्को, बाजा कैलिफ़ोर्निया।

अपवाह विसंगति जो धारा-पथ को विस्थापित करने वाले पूर्व–पश्चिम प्रवृत्त नतिलंब-सर्पण भ्रंश से संगत है। बिंबावली और भूविज्ञान का संयोग निस्संदेह कारणता सिद्ध नहीं करता; किंतु यह प्रश्न उठाता है कि क्या इस स्थल को चुनने और इस दीवार को चित्रित करने वाले लोग अपनी संकल्पनाओं में समझते थे कि यहाँ भूमि अन्यत्र की भूमि से भिन्न प्रकार से गतिमान थी।

दूसरा उदाहरण *Chumash Painted Cave* है, जो सांता बारबरा के उत्तर में सांता येनेज़ पर्वत में स्थित है, चित्र 16.19, और सक्रिय अरोयो परिदा भ्रंश के निकट है। स्थल पर मिले चित्रलेख—जटिल अंतर्ग्रथित आकृतियाँ, विकीर्ण प्रतिरूप और ऐसी आकृतियाँ जिनकी ज्यामिति विश्राम के बजाय गति सुझाती है—कुछ अनुसंधानकर्ताओं द्वारा अनुभव की गई भूकंपीय गतिविधि की संभावित सांस्कृतिक अनुक्रियाओं के रूप में व्याख्यायित हुए हैं, यद्यपि पुरातत्त्वविदों में यह व्याख्या विवादित है और उनमें अनेक बिंबावली को शमनवादी दिव्य-दृष्टि अनुभव से जोड़ते हैं।



चित्र 16.19: चुमाश चित्रित गुफा, सांता येनेज़ पर्वत, कैलिफ़ोर्निया के चित्रलेख।

दोनों व्याख्याएँ परस्पर अपवर्जी होना आवश्यक नहीं। ऐसे ब्रह्मांडवैज्ञानिक ढाँचे में जिसमें भूकंप और दिव्य-दृष्टि अवस्थाएँ दोनों भूमिगत शक्ति की अभिव्यक्तियाँ मानी जाती हैं, दोनों अनुभवों के बीच अल्प भेद किया जाएगा। अधिक विश्वास से यह कहा जा सकता है कि स्थल का चयन मनमाना होना असंभाव्य था। विवर्तनिक रूप से सक्रिय भूदृश्य में उसका स्थान सुझाता है कि परिवेश स्वयं मान्य

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

महत्त्व रखता था, भले वह ज्ञान आधुनिक भूविज्ञान की संकल्पनाओं से अत्यंत भिन्न प्रतीकात्मक अथवा ब्रह्मांडवैज्ञानिक संकल्पनाओं द्वारा व्यक्त हुआ हो।

इस अध्याय में विवेचित अन्य उदाहरणों के साथ लेने पर व्यापक प्रतिरूप उभरता है। भूकंप-प्रवण भूदृश्य प्रायः सर्प-मिथकों को जन्म देते हैं, ऐसा संबंध जिसे समझना संभवतः कठिन नहीं। सर्प अचानक प्रकट होने और विनाशकारी बल वाला गत्यात्मक, भूमिगत प्राणी है तथा वह ऐसी वक्र पार्श्व रीति से चलता है जो भ्रंशों की विदारण-गति अथवा असंसक्त भूमि में भूकंपीय तरंगों के संचरण की स्मृति दिलाती है। बाजा कैलिफ़ोर्निया के सींगदार सर्प से प्रशांत उत्तर-पश्चिम के द्विमुखी *sisiutl* तक यह आकृति वास्तविक, पुनरावर्ती और अन्यथा व्याख्या में कठिन बलों के अंतर-सांस्कृतिक रूपक के रूप में बार-बार प्रकट होती है।

स्वयं सर्प से आगे अमेरिकी भूकंप-मिथक प्रायः भूकंपीय घटनाओं को चक्रीय विनाश और नवीकरण के ब्रह्मांडवैज्ञानिक आख्यानों में स्थापित करते हैं। क्रमिक विश्व-युगों—प्रत्येक का अंत विपत्ति से—की एज़्टेक परंपरा मेसोअमेरिकी परंपराओं में उल्लेखनीय आख्यानात्मक समानताएँ पाती है। सदृश विचार विश्व में अन्यत्र भी प्रकट होते हैं; जापानी *yonaoshi* (“विश्व-सुधार”) की संकल्पना ऐसा एक उदाहरण देती है और अगले खंड में उस पर चर्चा होगी।

16.7.2 चित्रकला

भूकंपों ने दृश्य कलाओं में अभिव्यक्ति पाई है, जहाँ चित्रकारों ने घटना की भौतिक हिंसा और विपत्ति के प्रति मानवीय अनुक्रिया दोनों को निरूपित करने का प्रयास किया है। कलात्मक निरूपण दो परंपराओं के बीच डोलते हैं: दैनिक जीवन के आपदा से सामना करने पर केंद्रित *peinture de genre* और घटना को व्यापक ऐतिहासिक तथा प्रतीकात्मक स्तर तक उठाने वाली *peinture d’histoire*।

उन्नीसवीं शताब्दी का उल्लेखनीय उदाहरण लियोपोल्ड रोबर्ट का कार्य है, जिन्होंने लगभग 1830 में नेपल्स के एक भूकंप के परिणामों से प्रेरित दृश्य चित्रित किए। बल केवल विनाश पर नहीं, बल्कि ध्वस्त नगरीय भूदृश्य—खंडित वास्तुकला, विस्थापित जनसंख्या और भावनात्मक पीड़ा—में खुलते मानवीय नाटक पर है, जो विपत्ति और उदात्त के प्रति व्यापक रोमानी आकर्षण को प्रतिबिंबित करता है, चित्र 16.20a।

लैटिन अमेरिका में फ़र्नांडो बोतेरो ने ऐतिहासिक कोलंबियाई नगर को आघात करने वाले 1983 के विनाशकारी भूकंप से प्रेरित *Terremoto en Popayán* में इस विषय को प्रत्यक्षतः संबोधित किया। बोतेरो की व्याख्या उनकी विशिष्ट आयतनात्मक आकृतियों को नगरीय विनाश के दृश्यों से मिलाकर विपत्ति को सशक्त दृश्य आख्यान में बदलती है, चित्र 16.20b।

विद्वत्तापूर्ण चर्चाओं ने विपत्ति की ऐतिहासिक घटना और सौंदर्यपरक विषय की दोहरी भूमिका पर बल दिया है। सिल्वी वुहरमान ने ज्यां-पिएर सैंत-ऊर्स से लियोपोल्ड रोबर्ट तक शैली-दृश्यों से इतिहास-चित्रकला में भूकंप-बिंबावली का विकास निरूपित किया है Wuhrmann, 1994। मिशेल रिबों ने “विपत्ति के सौंदर्यशास्त्र” की खोज करते हुए तर्क दिया है कि भूकंप जैसी आपदाएँ कलात्मक निरूपण के इतिहास में महत्त्वपूर्ण स्थान रखती हैं क्योंकि वे कलाकारों को व्यवस्था, स्थिरता और मानवीय नियंत्रण की सीमाओं का सामना कराती हैं Ribon, 1999।

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) लियोपोल्ड रोबर्ट, *Napolitaine pleurant sur les ruines de sa maison après un tremblement de terre* (लगभग 1830)



(b) फ़र्नांडो बोतेरो, *Terremoto en Popayán* (1999)

चित्र 16.20: भूकंपीय विपत्ति के प्रति दो चित्रात्मक अनुक्रियाएँ

16.7.3 कोज़ाक संग्रह

चेक विज्ञान अकादमी के भूभौतिक संस्थान के चेक भूविज्ञानी यान कोज़ाक का निजी संग्रह अत्यंत रोचक है (Kozak, Moreira, and Oldroyd, 2005); उन्होंने चार दशकों में प्राकृतिक आपदाओं के छायाचित्रण-पूर्व निरूपणों की विश्व की सबसे बड़ी शृंखलाओं में से एक संकलित की: भूकंप, ज्वालामुखी विस्फोट और सुनामियों को समेटती 2,300 से अधिक वस्तुएँ। 875 स्लाइडों का एक उपसमुच्चय कैलिफ़ोर्निया विश्वविद्यालय, बर्कले के भूकंप अभियांत्रिकी अनुसंधान केंद्र को दान किया गया, NISEE-PEER पुस्तकालय-कर्मियों ने उसे अंकीकृत करके ऑनलाइन उपलब्ध कराया; वह पोर्टल अब सार्वजनिक रूप से सुलभ नहीं है।

संग्रह में 1755 के लिस्बन भूकंप के असंख्य निरूपण (Keller, 1998; Kozak, Moreira, and Oldroyd, 2005), 1830 का नेपल्स भूकंप (लियोपोल्ड रोबर्ट द्वारा निरूपित) और अनेक *namazu-e* (Giacomoni, 2005) सम्मिलित हैं। इसका सर्वाधिक सुलभ प्रकाशित रूप भूभौतिकीविद व्लादिमीर चेरमाक के साथ सह-लिखित ग्रंथ (Kozák and Cermák, 2010) है, जो दुर्लभ उत्कीर्णनों, पुराने मानचित्रों और रेखाचित्रों के पूर्ण-पृष्ठ पुनरुत्पादन देने के लिए संग्रह का उपयोग करता है; प्रत्येक के साथ घटना की भूभौतिक और ऐतिहासिक पृष्ठभूमि तथा चित्र के उद्गम पर पाठ है। चित्रित भूकंपों में बासेल (1356), कॉन्स्टेंटिनोपल (1762) और सैन फ़्रांसिस्को (1868 और 1906) के भूकंप हैं, साथ ही चौदहवीं से उन्नीसवीं शताब्दी तक के ज्वालामुखी विस्फोट और सुनामियाँ। यह कृति विज्ञान के इतिहास और कला के इतिहास को जोड़ती तथा प्रलेखित करती है कि छायाचित्रण के आगमन से पहले पूर्व-आधुनिक समाजों ने भूकंपीय विपत्ति को कैसे देखा, अभिलिखित और व्याख्यायित किया।

16.7.4 अमेलियो संग्रह

भूकंप आधुनिक कला के एक महत्त्वपूर्ण और अद्वितीय निजी संग्रह (*Terrae Motus*) (Fondazione Amelio, 1987) का विषय भी था। 23 नवंबर 1980 को इरपीनिया और बेसिलिकाता को आघात करने वाले

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भूकंप के बाद नियपोलिटन समकालीन कला-विक्रेता लूचो अमेलियो (1931–1994)—जो आश्वस्त थे कि केवल कला का बल पुनर्जन्म की ओर ले जा सकता है—ने अंतरराष्ट्रीय ख्याति के कलाकारों को विपत्ति के प्रति अनुक्रिया देने वाली कृतियों का योगदान करने के लिए आमंत्रित किया। परियोजना को संस्थागत आधार देने हेतु नवंबर 1982 में अमेलियो प्रतिष्ठान औपचारिक रूप से स्थापित किया गया और संग्रह 70 से अधिक चित्रों और मूर्तियों तक बढ़ा, जिन्हें 50 से अधिक इतालवी तथा अंतरराष्ट्रीय कलाकारों ने बनाया था; उनमें जोज़ेफ़ बॉयस, एंडी वारहोल, कीथ हैरिंग, रोबर्ट मैपलथॉर्प, साइ ट्वॉम्बली, गेर्हार्ड रिक्टर, आंसेल्म कीफ़र, क्रिश्चियन बोल्तांस्की, मिम्मो पलादीनो और नीनो लोंगोबार्दी थे।



(a) एंडी वारहोल: *Fate presto*



(b) आंसेल्म कीफ़र *Et la terre tremble encore, d'avoir vu la fuite des géants*



(c) रोबर्ट मैपलथॉर्प: Terrae Motus पंचपट

चित्र 16.21: अमेलियो संग्रह में चयनित योगदान (वारहोल, मैपलथॉर्प और कीफ़र)

तीन कृतियाँ अमेलियो द्वारा प्रेरित कलात्मक अनुक्रियाओं की सीमा दर्शाती हैं। सर्वाधिक प्रसिद्ध में वारहोल की *Fate presto*, चित्र 16.21a, भूकंप के तुरंत बाद के दिनों में प्रकाशित नियपोलिटन समाचारपत्र *Il Mattino* के मुखपृष्ठ की पॉप आर्ट पुनर्व्याख्या है। जोज़ेफ़ बॉयस ने *Terremoto in Palazzo* (1981) का योगदान दिया—भूकंप से नष्ट गाँवों से व्यक्तिगत रूप से प्राप्त कारीगरी उपकरणों, दर्ज़ी की मेज़, मोची की चौकी और पीपा-निर्माता की रैक से संयोजित संस्थापन; उन्हें संदर्भ-विहीन करके काँच के टुकड़ों में बिखेरा गया, मिट्टी के पात्र दीवार तथा फर्नीचर के बीच फँसाए गए और एक अकेला अंडा अस्थिर संतुलन में रखा गया, जिससे विपत्ति द्वारा छोड़ी भंगुरता और विस्थापन का आह्वान होता है। रोबर्ट मैपलथॉर्प ने पाँच बड़े प्रारूप के जिलेटिन सिल्वर चित्रों के पंचपट (*Denis Speight with Thorns, Jack with Crown, Skull and Crossbones, Jill Chapman, Dennis Speight with Flowers*, 1983) से अनुक्रिया दी, जो मसीह के पैशन के प्रतीकों के चारों ओर व्यवस्थित था; केंद्रीय पट्टिका नेपल्स के सांता मारिया देल्ले आनीमे देल पुर्गातोरियो अद आर्को के बरोक गिरजाघर के प्रवेश पर खोपड़ी और क्रॉसबोन्स वाला आधार दिखाती है, जिसे कलाकार के नेपल्स प्रवास के समय छायाचित्रित किया गया

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

था, चित्र 16.21c[19]। आंसेल्म कीफ़र का[20] *Et la terre tremble encore, d'avoir vu la fuite des géants* वाटरलू के युद्ध को भूकंपीय विपत्ति के रूपक में बदलता है: कैनवस पर सीधे लगाई टेराकोटा चित्रित सतह पर विशाल घाव खोलती है, जिसे काले चिह्न और भटकते काव्यात्मक अभिलेख काटते हैं, तथा चित्रकला को पृथ्वी के अपने पदार्थ से मिलाती है, चित्र 16.21b।

संग्रह पहली बार 1984 में नेपल्स के पुनर्वासित मठ में प्रदर्शित हुआ, फिर 1987 में पेरिस के ग्रां पैले में दिखाया गया, जिससे परियोजना को अंतरराष्ट्रीय मान्यता मिली। अमेलियो ने संग्रह इतालवी राज्य को वसीयत किया; नवंबर 1992 से यह अठारहवीं शताब्दी के रेज्जा दी कासेर्ता की ग्रांदे गैलेरिया में स्थायी प्रदर्शन पर है[21], जहाँ कलाकृतियाँ राजकीय कक्षों में चक्रानुक्रम से दिखाई जाती हैं और समकालीन कला की ऊर्जा को बोरबोन महल की बरोक भव्यता से प्रत्यक्ष संवाद में रखती हैं।

16.8 संगीत

भूकंपों सहित प्राकृतिक आपदाओं ने संगीत-रचनाओं में भी अभिव्यक्ति पाई है। सबसे आरंभिक उल्लेखनीय उदाहरणों में अंत्वान ब्रूमेल (लगभग 1460–लगभग 1520) हैं, जिन्होंने प्रसिद्ध *Missa Et ecce terrae motus* ("और देखो, पृथ्वी काँपी") की रचना की, जिसे प्रायः "भूकंप मिस्सा" कहा जाता है। शीर्षक मसीह की मृत्यु के साथ आए भूकंप का वर्णन करने वाले सुसमाचार-वृत्तांत से लिया गया है; कृति अपनी बारह-स्वरीय बहुध्वनिक बनावट के कारण उल्लेखनीय और पुनर्जागरण काल की सर्वाधिक महत्त्वाकांक्षी कृतियों में से एक है (Cumming, 2001)।

योहान सेबास्टियन बाख उसी भूकंप को *Passion according to St. John* (1724) और *Passion*

[19] इसे बहुत अधिक बड़ा न करें; अंततः यह मैपलथॉर्प है!

[20] कीफ़र के एक अन्य चित्र के लिए पृष्ठ 690 देखें।

[21] रेज्जा दी कासेर्ता में *Terrae Motus* संग्रह का स्थायी स्थान आकस्मिक नहीं, बल्कि स्वयं अमेलियो के सुविचारित और भावनात्मक रूप से आवेशित निर्णय का परिणाम था। 1994 में अपनी मृत्यु से पहले अमेलियो तत्कालीन कासेर्ता बिशप रफ़ाएले नोगारो से दो बार मिले; पहली बार अधीक्षक जियान मार्को याकोबित्ती उनके साथ थे और दूसरी बार वे अकेले गए। उन्होंने नोगारो से ऐसे दस्तावेज़ पर हस्ताक्षर करने को कहा जिसमें सार्वजनिक नैतिक सत्ता के रूप में संग्रह की रेज्जा में स्थायी स्थापना की गारंटी देने की व्यक्तिगत प्रतिबद्धता हो। अमेलियो द्वारा दिया कारण स्पष्ट था: उन्होंने बिशप से कहा कि नेपल्स बिना कृतज्ञता के उनसे सब कुछ चुरा चुका था और संग्रह कासेर्ता को देने का निर्णय द्वेष अथवा प्रतिशोध की इच्छा से नहीं, बल्कि अपने जन्म-नगर से गहरे मोहभंग से प्रेरित था। उस नगर ने उनके सांस्कृतिक योगदान को कभी पर्याप्त मान्यता नहीं दी, जबकि उन्होंने पियाज़ा देई मारितरी स्थित अपनी दीर्घा को अंतरराष्ट्रीय समकालीन कला के केंद्र में बदलने में दशकों लगाए थे। अगस्त 2009 के खुले पत्र में इन भेंटों का वर्णन करते हुए, जब वे अपना धर्माध्यक्षीय कार्यकाल समाप्त कर रहे थे, बिशप नोगारो ने अमेलियो के भीतर मान्यता के इस अभाव से उत्पन्न गहरे और अनसुलझे शोक का वर्णन किया। अमेलियो की मृत्यु 2 जुलाई 1994 को हुई और उनकी वसीयत के अनुसार संग्रह उसी वर्ष बाद में औपचारिक रूप से रेज्जा में स्थापित किया गया; वसीयत ने संग्रह को विधिक रूप से वानवितेल्ली महल से बाँध दिया। विषय वहीं समाप्त नहीं हुआ: अमेलियो की मृत्यु के बाद के वर्षों में अमेलियो परिवार के सदस्यों और नियपोलिटन सांस्कृतिक संचालकों ने *Terrae Motus* को कासेर्ता से हटाकर नेपल्स के भवन में स्थानांतरित करने के बार-बार प्रयास किए। नोगारो ने इन प्रयासों का सार्वजनिक विरोध किया और वसीयत की विधिक शक्ति तथा उस सांस्कृतिक और नैतिक कृतज्ञता-ऋण दोनों को पुनः पुष्ट किया जो उनके अनुसार कासेर्ता नगर पर इस दान के कारण था। यह विवाद पूरे संग्रह के इतिहास में व्याप्त तनाव दर्शाता है: यद्यपि उसे प्रेरित करने वाला भूकंप कैंपानिया के अंतःप्रदेश में आया और अमेलियो स्वयं नियपोलिटन थे, संग्रह की यात्रा नेपल्स में नहीं, बल्कि उत्तर में तीस किलोमीटर दूर बोरबोन राजमहल में समाप्त हुई, ठीक इसलिए कि उसके सर्जक को लगा नेपल्स ने उन्हें विफल किया।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

according to St. Matthew[22] (1729) दोनों में भावपूर्ण रूप से चित्रित करते हैं और पृथ्वी के हिंसक कंपन को स्वर-संघर्ष तथा नाटकीय वाद्यविन्यास द्वारा वाद्य-वृंदीय और गान-वृंदीय रूप में बदलते हैं।

जोज़ेफ़ हाइडन भी अपनी *Seven Last Words of Christ on the Cross* (वाद्य-वृंदीय संस्करण, 1785) का अंत स्पष्टतः *Il Terremoto* शीर्षक वाले संचरण से करते हैं, जो आकस्मिक गत्यात्मक बल से सुसमाचार के भूकंप का आह्वान करता है (Webster, 2001)।

लुई XIV के शासन में सांगीतिक नाट्यकर्म में भूकंपों की भूमिका का परीक्षण ला गोर्स ने किया है (La Gorce, 1996); वे प्रलेखित करते हैं कि संगीतकारों और मंच-अभिकल्पकों ने राजदरबारी दर्शकों तक भूकंपीय विनाश पहुँचाने के लिए सांगीतिक प्रभाव कैसे नियोजित किए।

16.9 चलचित्रकला

भूकंपों ने वृत्तचित्र सिनेमा में निरूपण पाया है, जहाँ दृश्य साक्ष्य, उत्तरजीवी साक्षात्कार और अभिलेखीय दृश्यांश का संयोजन विपत्ति के उन आयामों को संचारित कर सकता है जो वैज्ञानिक वृत्तांतों में अमूर्त रहते हैं। वास्तव में किसी प्राकृतिक आपदा के सबसे आरंभिक ज्ञात वृत्तचित्रों में *The Messina Disaster* (1909) है, जिसे इतालवी संस्था चीनेस ने 1908 के भूकंप—यूरोपीय अभिलिखित इतिहास के सबसे घातक भूकंप—के तुरंत बाद बनाया था। उल्लेखनीय रूप से समकालीन समीक्षकों ने भग्नावशेषों के बजाय उत्तरजीवियों को दिखाने के कारण ठीक इसी की प्रशंसा की और पहचाना कि सिनेमा की विशिष्ट शक्ति केवल भौतिक विनाश नहीं, बल्कि मानवीय पीड़ा प्रलेखित करने की क्षमता में थी।

1908 के भूकंप की सांस्कृतिक स्मृति स्वयं वृत्तचित्र का विषय बनी है: जॉन डिकी की *Messina: City Without Memory?* (2008) परीक्षण करती है कि नगर की स्थापत्य विरासत के पूर्ण विनाश ने उसे उस दृश्य ऐतिहासिक अस्मिता से कैसे वंचित किया जो अधिकांश इतालवी नगर रखते हैं—ऐसी अनुपस्थिति जो एक शताब्दी बाद भी अनुभव होती है।

अधिक हाल में ईरानी चलचित्रकार कियानूश अयारी ने 2003 के बाम भूकंप को प्रलेखित किया, जो आधुनिक ईरानी इतिहास की सर्वाधिक विनाशकारी भूकंपीय घटनाओं में से एक था। उनकी फ़िल्म को वृत्तचित्र हेतु रोमा पुरस्कार सहित अंतरराष्ट्रीय मान्यता मिली और वह ऐतिहासिक अभिलेख तथा सामूहिक आघात और प्रत्यास्थता पर चिंतन दोनों है।

उपसंहारिका

भूकंपीय विपत्ति और निर्मित पर्यावरण से वृत्तचित्रात्मक संलग्नता में अधिक हाल का तथा दार्शनिक रूप से महत्त्वाकांक्षी योगदान *Architecton* (Kossakovsky, 2024) है, जिसे रूसी चलचित्रकार विक्टर कोसाकोव्स्की ने लिखा और निर्देशित किया। यह फ़िल्म सभ्यता के आधारभूत पदार्थों के रूप में पत्थर और कंक्रीट पर लगभग शब्दहीन चिंतन है, जो इतालवी वास्तुकार मिशेल दे लूकी की भूदृश्य परियोजना के चारों ओर संरचित और असाधारण ड्रोन चलचित्रण से चित्रित है।

कोसाकोव्स्की की यात्रा प्राचीन निर्माण और आधुनिक विनाश के स्थलों के बीच ऐसी रीति से चलती है जो इस अध्याय के सरोकारों से सीधे संवाद करती है: लेबनान के बालबेक के मंदिर-भग्नावशेष

[22] मेरी प्रिय कृति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(पृ. 48)—जिनमें रहस्यमय अधूरा महापाषाण, तथाकथित *Stone of the Pregnant Woman*, सम्मिलित है, जो खदान से काटा गया किंतु कभी हटाया नहीं गया; भूदृश्य का ऐसा क्षतचिह्न जो मानवीय महत्त्वाकांक्षा और भूवैज्ञानिक काल पर वही अनुत्तरित प्रश्न उठाता है जो बुरी का *Cretto* उठाता है—फ़रवरी 2023 के विनाशकारी भूकंप से नष्ट तुर्की नगरों का मलबा, यूक्रेन के युद्ध द्वारा उत्पन्न विनाश, और इस अध्याय के लिए निर्णायक स्वयं जिबेलिना नुओवा, जिसे ऊपर से उत्तर-आधुनिकतावादी मूर्तिकला के उस मुक्ताकाश संग्रहालय के रूप में चित्रित किया गया है जिसे कोर्राओ ने मूल पर्वतीय नगर के भग्नावशेषों से बनाया। फ़िल्म सरल चिनाई मेहराबों और वितानित रूपों के मौलिक सौंदर्य पर भी ठहरती है (तुलना करें अध्याय 32 और 31), जिनका संरचनात्मक तर्क—विशुद्ध ज्यामिति द्वारा बल का समाधान (तुलना करें अध्याय 8)—निर्देशक केवल तकनीकी उपलब्धि नहीं, बल्कि उस प्रकार की सभ्यतागत बुद्धि के रूप में प्रस्तुत करते हैं जिसे कंक्रीट और इस्पात निर्माण ने बड़े स्तर पर त्याग दिया है।

Architecton का अंतर्निहित तर्क, जिसे दे लूकी फ़िल्म के विरल संवाद में व्यक्त करते हैं, यह है कि भूकंप, युद्ध और औद्योगिक निष्कर्षण की विनाशकता इस गहरे प्रश्न से अविभाज्य है कि हम कैसे और क्यों निर्माण करते हैं: “जब हम किसी वस्तु का अभिकल्प करते हैं,” वे कहते हैं, “हम लोगों के व्यवहार का अभिकल्प करते हैं।” वह प्रश्न—जो अन्य शैली में इस अध्याय में परीक्षित प्रत्येक परंपरा द्वारा प्रस्तुत प्रश्न भी है—*Architecton* को विपत्ति और निर्मित पर्यावरण के संबंध पर सर्वाधिक गहन चलचित्रात्मक चिंतनों में होने का दावा देता है। संरचनात्मक विश्लेषण के इतिहास—वह अनुशासन जो वस्तुएँ क्यों खड़ी रहती और क्यों गिरती हैं, इसे समझने के मानवीय आग्रह से जन्मा—के लिए फ़िल्म विशेषतः उपयुक्त अंतिम कलात्मक चिंतन देती है। वह स्मरण कराती है कि स्थिरता और पतन की यांत्रिकी समझ लिए जाने के बाद भी भग्नावशेष स्वयं व्याख्या की माँग करते रहते हैं।

16.10 निष्कर्ष

इस अध्याय में सर्वेक्षित आठ क्षेत्र—मिथक, धर्म, दर्शन, साहित्य, वास्तुकला, कला, संगीत और सिनेमा—एक ही प्रश्न पर विस्तृत चिंतन निर्मित करते हैं: जब हमारे पैरों के नीचे की भूमि अविश्वसनीय सिद्ध होती है तो उसका क्या अर्थ है?

आरंभिक उत्तर कर्तृत्व देते हैं: कैटफ़िश हिलती है, सर्प स्थान बदलता है, पराजित दैत्य पर्वत के नीचे करवट लेता है। धर्म इस प्रतिवर्त को औपचारिक संरचना में विकसित करता, भूकंप को नैतिक व्यवस्था में समाहित करता और सामुदायिक अनुक्रिया की माँग करता है। दर्शन इस प्रतिवर्त को आलोचनात्मक परीक्षण के अधीन करता है—ऐसी प्रक्रिया जिसकी परिणति लिस्बन विवाद में होती है, जहाँ वोल्तेयर का क्रोध, रूसो का सुभेद्यता का आद्य-समाजशास्त्र और कांट का प्रकृतिवाद मिलकर निर्णायक संक्रमण चिह्नित करते हैं: भूकंप मुख्यतः धर्मवैज्ञानिक समस्या रहना बंद करके वैज्ञानिक समस्या बन जाता है। साहित्य और कला इस संक्रमण को विशेष संवेदनशीलता से दर्ज करते हैं: वोल्तेयर की *Poème*—जो ईश्वर का सामना किए बिना लिस्बन का वर्णन नहीं कर सकती थी—और मेसिना के लिए क्वाज़िमोडो के शोकगीत, जिसमें ईश्वर पूर्णतः अनुपस्थित है, के बीच की दूरी प्राकृतिक अन्वेषण की दो शताब्दियों द्वारा तय की गई दूरी है।

इन क्षेत्रों को जोड़ने वाला केवल साझा विषय नहीं, बल्कि साझा संकट है। भूकंपों के साथ रहने वाली प्रत्येक संस्कृति को समान प्रश्न का उत्तर देना पड़ा है और प्रत्येक उत्तर समान मूल कार्य करता

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

है: वह आतंक को अर्थ में बदलता है। मिथकीय आख्यान, धर्मवैज्ञानिक ढाँचा, दार्शनिक तर्क, पूरे नगर को कंक्रीट में बंद करने वाला स्थापत्य स्मारक—ये एक-दूसरे के क्रमिक प्रतिस्थापन नहीं, बल्कि इस खोज के प्रति सतत मानवीय अनुक्रिया की क्रमिक परतें हैं कि पृथ्वी वह स्थिर नींव नहीं है जिसकी हमें आवश्यकता है।

डिराक की विश्वासपूर्ण उपेक्षा, जिसे §16.2 के आरंभ में उद्धृत किया गया है, ने मान लिया था कि आधुनिक समझ ने विपत्ति की मिथकीय और धर्मवैज्ञानिक व्याख्याएँ अप्रचलित कर दी हैं। इस अध्याय के साक्ष्य अन्यथा सुझाते हैं। वैज्ञानिक व्याख्या ने कैटफ़िश, सर्प और बंदी दैत्य को विस्थापित किया है, किंतु स्वयं व्याख्यात्मक प्रतिवर्त को समाप्त नहीं किया—यह आग्रह कि असाधारण घटना में केवल भौतिक कारण ही नहीं, बल्कि अभिकर्ता, आशय और अर्थ भी होना चाहिए। इसके स्थान पर वह प्रतिवर्त ऐसे अन्य क्षेत्रों की ओर चला गया जिनमें अवलोकन खंडित और व्याख्या अनिश्चित रहती है। उसकी सबसे स्पष्ट आधुनिक अभिव्यक्तियों में से एक पृथ्वी के नीचे नहीं, बल्कि आकाश में मिलती है।

16.11 उपसंहार: नमाज़ु से रॉज़वेल तक

इस अध्याय में परीक्षित मिथक केवल अज्ञान से उत्पन्न नहीं हुए। वे निर्विवाद अनुभव और अदृश्य कारण के सम्मुखन से उत्पन्न हुए। पृथ्वी हिली और जहाँ क्रियाविधि नहीं देखी जा सकती थी, कल्पना ने अभिकर्ता दिया: एदो जापान में पवित्र शिला के नीचे दबा विशाल कैटफ़िश (§16.2.1); अन्यत्र सर्प, बंदी दैत्य, रुष्ट देवता अथवा नियंत्रण से अस्थायी रूप से मुक्त वैश्विक शक्ति। वैज्ञानिक ज्ञान ने अंततः इन विशिष्ट अभिकर्ताओं को विस्थापित किया, किंतु उन्हें रचने वाली मानवीय प्रवृत्ति समाप्त नहीं की।

आधुनिक तकनीकी विश्व में वह प्रवृत्ति विलीन नहीं हुई; वह ऐसे अन्य क्षेत्रों की ओर चली गई जहाँ अवलोकन खंडित और व्याख्या अनिश्चित है तथा मार्ग में उसने भूकंप की भाँति अपना साहित्य, कला और सिनेमा उत्पन्न किया। उसकी अधिक स्पष्ट अभिव्यक्तियों में—और जिसकी मिथकीय वंशावली निरूपित करना सबसे सरल है—यह स्थायी विश्वास है कि आकाश में सूचित अस्पष्टीकृत प्रकाश और वस्तुएँ आगंतुक बुद्धि का प्रमाण हैं।

नमाज़ु से समानता पहली दृष्टि से अधिक निकट है। लोकप्रिय कल्पना में स्थायी होने के लिए नमाज़ु को किसी अकेले विश्वासी की आवश्यकता नहीं थी, केवल नाम, तीर्थ और काष्ठ-मुद्रित चित्रों की परंपरा चाहिए थी (§16.2.1)। जुलाई 1947 में रॉज़वेल, न्यू मेक्सिको के निकट कथित घटना को आधुनिक लोकप्रिय यूफ़ोलॉजी की संस्थापक किंवदंती बनने के लिए इससे थोड़ा ही अधिक चाहिए था। दशकों के आधिकारिक वक्तव्यों, अन्वेषणों और अवर्गीकृत अभिलेखों ने उसे हटाने में उल्लेखनीय रूप से अल्प सफलता पाई है। काशिमा अथवा एबिसु द्वारा किसी विशिष्ट भूकंप की व्याख्या में प्रत्येक विफलता के बाद भी जीवित नमाज़ु परंपरा की भाँति रॉज़वेल किंवदंती अपने लिए दी गई व्याख्याओं के बाद भी जीवित है—क्योंकि मिथक के रूप में वह कभी मिथ्याकरण योग्य बनने के लिए निर्मित नहीं थी। वह कल्पना में उस स्थान को धारण करने हेतु निर्मित थी जिसे केवल अवलोकन नहीं भर सकता था।

शब्दावली विकसित हुई, किंतु अंतर्निहित प्रश्न नहीं बदला। लंबे समय तक *unidentified flying object*, अथवा UFO, पदनाम के अंतर्गत चर्चित सांस्कृतिक परिघटना की अब व्यापक आधिकारिक पदनाम *unidentified anomalous phenomenon*, अथवा UAP, के अंतर्गत जाँच होती है। आधिकारिक वैज्ञानिक प्रयोग में UAP ऐसा अवलोकन है जिसे अभी विमान अथवा ज्ञात प्राकृतिक परिघटना के

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रूप में पहचाना नहीं जा सकता; पदनाम परिघटना की उत्पत्ति के बजाय प्रेक्षक के ज्ञान की वर्तमान अवस्था का वर्णन करता है (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023)। अतः *Unidentified* का अर्थ *unexplainable* नहीं और उससे भी कम *extraterrestrial* है।

जब कोई अवलोकन सामान्य भौतिक अपेक्षाओं का उल्लंघन करता प्रतीत हो, तब भेद सरलता से धुँधला हो जाता है। कोई वस्तु जड़त्व के बिना चलती, ज्ञात विमानों की क्षमता से अधिक त्वरित होती अथवा तत्क्षण विलीन होती प्रतीत हो सकती है। फिर भी भौतिकी का प्रतीयमान उल्लंघन वस्तु में नहीं, बल्कि अवलोकन की दशाओं में उत्पन्न हो सकता है: अनिश्चित दूरी अथवा स्तर, बाध्य परिप्रेक्ष्य, लंबन, संवेदक मंच की गति, वायुमंडलीय दशाएँ, उपकरणीय अथवा वीडियो-संपीडन कलाकृतियाँ, चाल के आकलन में त्रुटियाँ अथवा घटना के पुनर्निर्माण हेतु आवश्यक परादत्त का अभाव। नासा के स्वतंत्र अध्ययन ने पाया कि अनेक UAP रिपोर्टों का विश्लेषण निकृष्ट अंशांकित संवेदकों, बहुल मापों के अभाव, अनुपस्थित संवेदक परादत्त और अपर्याप्त आधारभूत आँकड़ों से बाधित है। प्रसिद्ध “GoFast” अभिलेखन के उसके परीक्षण ने दिखाया कि असाधारण गति की छाप प्रेक्षक विमान के वेग और लंबन प्रभाव से बड़े अंश में उत्पन्न हो सकती थी (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023); उसी प्रकरण का तब से सर्व-क्षेत्र विसंगति समाधान कार्यालय ने अधिक विस्तार से पुनर्परीक्षण किया है (All-domain Anomaly Resolution Office, 2024; All-domain Anomaly Resolution Office, 2025)। अत्यंत छोटे स्तर पर यह वही संक्रमण है जिसे लिस्बन भूकंप ने अठारहवीं शताब्दी के यूरोप पर आरोपित किया था (§16.4.4): पहले अर्थ के लिए पढ़ी गई घटना को इसके बजाय पुनर्निर्माण, मापन और उपकरणीकरण के अधीन किया जाता है। ऐसे प्रसंगों में रहस्य वास्तविक है, किंतु उसका स्रोत भौतिक नियम की अपर्याप्तता के बजाय साक्ष्य की अपर्याप्तता हो सकता है।

इनमें से कुछ भी यह प्रदर्शित नहीं करता कि ब्रह्मांड में अन्यत्र जीवन नहीं है और न यह अपेक्षा करता है कि प्रत्येक असामान्य अवलोकन को तुच्छ मानकर त्याग दिया जाए। विज्ञान विसंगतियों से आरंभ और उन्हें गंभीरता से लेकर प्रगति करता है। किंतु वह यह भी अपेक्षा करता है कि व्याख्या साक्ष्य के अनुपात में रहे। नासा के अध्ययन ने कोई निर्णायक वैज्ञानिक प्रमाण नहीं पाया कि विद्यमान UAP रिपोर्टों की उत्पत्ति पारलौकिक है (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023)। अतः घटना की पहचान न कर सकना अन्वेषण का आरंभ है, यह निष्कर्ष नहीं कि पारलौकिक बुद्धि ने स्वयं को उद्घाटित किया है।

स्वयं परिघटना का मिथकीय होना आवश्यक नहीं कि उसके चारों ओर निर्मित आख्यान मिथक बन जाए। कार्ल युंग ने 1950 के दशक के अंत में यही तर्क दिया और उड़न-तश्तरियों को आकाश में देखी वस्तुओं का आधुनिक मिथक बताया (Jung, 1959)—रॉज़वेल के लोकप्रिय किंवदंती बनने से वर्षों पहले और UAP के आधिकारिक संक्षिप्ताक्षर बनने से दशकों पहले। प्राचीन मिथक ने पृथ्वी के नीचे के अगम्य क्षेत्रों को ऐसे शक्तिशाली प्राणियों से भरा जिनकी गतियाँ भूमि के कंपन की व्याख्या करती थीं; आधुनिक आख्यान आकाश की अगम्य पहुँच को ऐसे तकनीकी रूप से श्रेष्ठ प्राणियों से भरता है जिनके आशय अस्पष्ट प्रकाशों, चित्रों और चिह्नों की व्याख्या करते हैं। उसकी शब्दावली अब धर्मवैज्ञानिक नहीं, बल्कि तकनीकी है: अंतरिक्षयान दिव्य रथों का स्थान लेते, उन्नत प्रणोदन दैवी शक्ति का और शासकीय गोपनीयता देवताओं की गुप्त परिषदों का। अंतर्निहित संरचना वही रहती है। अस्पष्टीकृत घटना को अभिकर्ता दिया जाता है; अभिकर्ता को बुद्धि और प्रयोजन मिलता है; और निर्णायक साक्ष्य का अभाव आख्यान के विरुद्ध गिने जाने के बजाय उसमें समाहित होता है।

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विज्ञान हमसे विस्मय बुझाने की अपेक्षा नहीं करता; वह उसे अनुशासित करने की अपेक्षा करता है। अतः इस अध्याय में सर्वेक्षित परंपराओं की स्थायी शिक्षा यह नहीं कि मानवता कभी मूर्खतापूर्ण बातों पर विश्वास करती थी और अब उनसे मुक्त हो गई है। शिक्षा यह है कि अवलोकन और व्याख्या के बीच की दूरी सदैव मिथक के लिए उर्वर भूमि है। कभी काशिमा तीर्थ के नीचे सोने वाले कैटफ़िश ने लोकप्रिय कल्पना में रॉज़वेल के पार से आने वाले आगंतुकों को स्थान दे दिया है; जिसने एक को आश्रय दिया वही प्रवृत्ति अब दूसरे को देती है। दोनों प्रसंगों में तर्क का प्रथम दायित्व समान है: रहस्य को अकालतः कर्तृत्व में बदले बिना सुरक्षित रखना।

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



La Caduta dei Giganti

दैत्य-पतन[a], 1532–1535। भित्तिचित्र, साला देई जिगांती, पलात्सो ते, मांतुआ।

[a]भूकंपों से इसका कोई संबंध नहीं है ☹

प्रारूप

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ग्रंथ I के संदर्भ

ABAQUS User's Manual (1978). Hibbitt, Karlsson and Sorensen. Providence, RI.

Abdel Haleem, M. A. S. (2004). *The Qur'an: A New Translation*. Oxford World's Classics. Oxford: Oxford University Press.

Abe, Y. (2000). "Namazu-e no ue no Amaterasu". In: *Shiso*. Amaterasu above the catfish picture prints. Tokyo, pp. 25–52.

Accademia del Cimento (1667). *Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento*. Original Italian edition; English translation by W.E. Knowles Middleton, *The First Scientific Society*, 1971. Florence: Giunti.

Ackerman, J. S. (1949). "*ARS Sine Scientia Nihil EST*. Gothic Theory of Architecture at the Cathedral of Milan". In: *The Art Bulletin* 31.2, pp. 84–111.

Administration, F. H. (1969). *Silver Bridge Collapse Report*. Tech. rep. FHWA-RD-69-1. Investigation into the failure of the Silver Bridge, Point Pleasant, West Virginia. U.S. Department of Transportation.

Aimond, F. (1936). "Étude statique des voiles minces en paraboloide hyperbolique travaillant sans flexion". In: *Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)* 4.

Al-Bīrūnī, A. R. (1910). *The Chronology of Ancient Nations*. Trans. by C. E. Sachau. An English version of the Arabic text of the Athār-ul-bākiya of Albīrūnī. London: W. H. Allen.

Alassi, S. (Mar. 2019). *Jacob Bernoulli's Role in the History of Elasticity: From a Discussion with a Craftsman to the Discovery of the Elasticity Rules*. Presentation at the History of Mathematics Seminar, Mathematical Institute, University of Oxford.

– (2020). "From the Mechanics of Jacob Bernoulli to Digital History of Science. Infrastructure, Tools, and Methods". PhD thesis. University of Basel.

Alberti, L. B. (1485). *De re aedificatoria; Catoria Libri Decem Leo*. Nicolaus Laurentii, Alamanus.

– (1988). *On the Art of Building in Ten Books*. Trans. by J. Rykwert and N. Leach. MIT Press.

Alberti, L. B. and G. Tiraboschi (1804). *Della pittura e della statua di Leonbatista Alberti*. Vol. 34. Società tip. de'Classici italiani.

Alexander, K. D., R. Mark, and J. F. Abel (1977). "The structural behavior of medieval ribbed vaulting". In: *Journal of the society of architectural historians* 36.4, pp. 241–251.

Alexandria, H. of (1851). *The Pneumatics of Hero of Alexandria*. Trans. by B. Woodcroft. From the original Greek. London: Taylor Walton and Maberly.

All-domain Anomaly Resolution Office (May 2024). *Effect of Forced Perspective and Parallax View on UAP Observations*. Information Paper. U.S. Department of Defense.

– (Feb. 6, 2025). *Case: "Go Fast": Case Resolution*. Case Resolution Report. U.S. Department of Defense.

Andrade, E. N. D. C. (1950). "Wilkins Lecture-Robert Hooke". In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series B-Biological Sciences* 137.887, pp. 153–187.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Anonymous (Aug. 1724). “Celebre catenariae problema geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent & Londini; Parisiis ad collectores actorum erud. transmissum”. In: *Acta Eruditorum* 43. Unsigned item (author not stated)., p. 366.

Antuña Bernardo, J. (2003). “Las estructuras de edificación de Eduardo Torroja Miret”. PhD thesis. *Universidad Politécnica de Madrid; Escuela Técnica Superior de Arquitectura*.

Ap, L. and N. G. Faia (2018). “Form Finding Techniques of Branched Construction Developed by Frei Otto”. In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 59.1, pp. 60–67.

Archimedes (-250). *De Planorum Æquilibriis (On the Equilibrium of Planes)*. c. 250 BCE. English translation in *The Works of Archimedes*, ed. T. L. Heath, Cambridge University Press, 1897.

Archimedes and T. L. Heath (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press.

Argyris, J. H. and S. Kelsey (1960). *Energy theorems and structural analysis*. Vol. 60. Springer.

Aristotle (2000). *Mechanica*. Ed. by M. J. T. Lewis. Translated and introduced by Michael J. T. Lewis. Traditional attribution to Aristotle; authorship disputed. Oxford: Oxford University Press.

Arnold, D. (2003). *The Encyclopedia of Ancient Egyptian Architecture*. Princeton University Press.

Babbage, C. (1864). *Passages from the Life of a Philosopher*. London: Longman, Green, Longman, Roberts, and Green.

Backus, J. (1957). *The FORTRAN Automatic Coding System*. Tech. rep. New York: IBM.

Bacon, F. (2000). *Novum Organum*. Cambridge University Press.

Badami, A. (2012). “L’investimento in arte e cultura per fondare una città e generare una comunità a Gibellina. Intervista a Ludovico Corrao”. In: *Archivio di Studi Urbani e Regionali* 105, pp. 66–86.

Bag, A. (2003). “Aryabhata’s Contributions to Mathematics and Astronomy”. In: *Indian Journal of History of Science* 38.2, pp. 123–135.

Baker, W. F. (1992). “Energy-based design of lateral systems”. In: *Structural Engineering International* 2.2, pp. 99–102.

Baker, W. F. and A. McRobie, eds. (2025). *The Geometry of Equilibrium: James Clerk Maxwell and 21st-Century Structural Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, p. 322.

Baker, W. F., O. Skidmore, et al. (2013). “Structural possibilities”. In: *The tall buildings reference book*. Routledge, pp. 229–240.

Baker, W. F. et al. (2015). “Structural Innovation: Combining Classic Theories with New Technologies”. In: *Engineering Journal American Institute of Steel Construction* 52.3, pp. 203–217.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Balasubramaniam, R. (2000). “The Corrosion Resistance of the Iron Pillar of Delhi”. In: *Current Science* 79.4, pp. 45–54.

Banū Mūsā ibn Shākir (850). *The Book of Ingenious Devices*. Arabic. Original Arabic manuscript, Baghdad. English translation in Donald R. Hill (ed. and trans.), *The Book of Ingenious Devices*, Dordrecht: Reidel, 1979. Baghdad: House of Wisdom.

Bardini, G. and G. M. Gianella (2014). “On the Evolution of the Idea of Curvature, from Newton to Gauss’ Theorema Egregium”. In: *Applied Mathematical Sciences* 8.167, pp. 8361–8376.

Barnes, J. (1984). *The Complete Works of Aristotle, Volume One: The Revised Oxford Translation*. Vol. 1. Princeton University Press.

Barrallo, J., S. Sanchez-Beitia, and P. Onati (2005). “Mathematical Models of Gothic Structures”. en. In: *Renaissance Banff: Mathemetics, Music, Art, Culture*, p. 8.

Bartholomew, A. (1840). *Specifications for Practical Architecture: Preceded by an Essay on the Decline of Excellence in the Structure and in the Science of Modern English Buildings: with the Proposal of Remedies for Those Defects*. J. Williams.

Bartlett, C. (2014). “The design of the Great Pyramid of Khufu”. In: *Nexus Network Journal* 16.2, pp. 299–311.

Barzilai, S., ed. (1909). *Scilla e Cariddi: Pubblicazione dell’Associazione della Stampa Periodica Italiana a beneficio del Patronato Regina Elena per gli orfani del terremoto*. Contributions by Giovanni Verga, Luigi Capuana, Arthur Conan Doyle, Benedetto Croce, Antonio Fogazzaro and others. Published in aid of earthquake orphans following the Messina disaster of 28 December 1908. Roma: Tipografia Roma di E. Armani & W. Stein, p. 159.

Bažant, Ž. (1976). “Instability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete”. In: *Journal of Engng. Mech., ASCE* 102.2, pp. 331–344.

– (1984). “Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal”. In: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 110.4, pp. 518–535.

Bažant, Z. P. and Y. Zhou (2002). “Why did the world trade center collapse?—Simple analysis”. In: *Journal of Engineering Mechanics* 128.1, pp. 2–6.

Beeckman, I. (1939). *Journal tenu par Isaac Beeckman de 1604 à 1634*. Ed. by C. de Waard. 4 vols., 1939–1953. La Haye: Martinus Nijhoff.

Beghini, L. et al. (2014). “Connecting architecture and engineering through structural topology”. In: *Engineering Structures* 59, pp. 716–726.

Behnia, M. A. (2021). “Sustainability and hydraulic design in ancient Persian qanats”. In: *Journal of Hydraulic Engineering* 147.3.

Bendixen, A. (1914). *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*. German. [The Method of Alpha-Equations for the Analysis of Frame Structures]. Germany.

Benedetti, G. B. (1585). *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*. Original Latin text. Turin: Heirs of Melchior Sessa.

 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Benouville, L. (1891). *Note sur l'effondrement de la voûte du chœur de la cathédrale de Beauvais (1284)*. Unpublished manuscript / report. Referenced in 19th-century architectural structural studies.

Benvenuto, E. (1991a). *An Introduction to the History of Structural Mechanics; Part I: Statics and Resistance of Solids*. Springer-Verlag.

– (1991b). *An introduction to the History of Structural Mechanics; Part II: Vaulted structures and Elastic Systems*. Springler-Verlag.

Bergsjö, C. and M. Pettersson (2016). *A Simulation of the Millau Viaduct*. Tech. rep. KTH, Royal Institute of Technology in Stockholm.

Berlyn, P. and C. Fowler (1851). *The Crystal Palace: Its Architectural History and Constructive Marvels*. London: James Gilbert.

Bernoulli, J. (Dec. 1694). "Responsio ad Objectiones Clarissimi Hugenii de Curvatura Laminae Elasticae". In: *Acta Eruditorum*. Bernoulli's published reply to Christiaan Huygens's critique of the elastica, pp. 580–584.

– (1744). *Varia Posthuma*. Ed. by N. I. Bernoulli. Posthumous mathematical works edited by Nicolaus (I) Bernoulli. Basel: H.A. Gosse & Soc.

Bernoulli, Daniel (1726). "1726. em Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1, 126-142". In: *Die Werke* 3, pp. 119–135.

– (1738). *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii. Opus academicum ab auctore, dum Petropoli ageret, congestum*. Latin. With engraved title vignette and 12 folding plates. Argentorati: Sumptibus Johannis Reinholdi Dulseckeri, p. 304.

– (1744). "Methodus universalis determinandae curvaturae fili a potentiis quamcunque legem inter se observantibus extensi una cum solutione problematum quorundam novorum eo pertinentium". In: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 3. Originally written in 1728; published in the 1744 Bologna edition, pp. 57–84.

– (1845). "The 26th letter to Euler". In: *Correspondance Mathématique et Physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*. Ed. by P. H. Fuss. Vol. 2. Letter originally dated October 1742. St. Petersburg: Imperial Academy of Sciences, p. 499.

Bernoulli, Jakob (1677–1705). *Meditationes*. Manuscript. Scientific diary manuscript, 367 pages, 287 entries. Available digitally at Bernoulli-Euler Online (BEOL). Basel University Library.

– (June 1690a). "Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum". In: *Acta Eruditorum*. Contains the famous elastica challenge problem concerning the bending of elastic beams, presented in cipher, pp. 288–290.

– (May 1690b). "Problema funicularium (challenge on the curve of a hanging thread)". In: *Acta Eruditorum*. Short challenge notice; see also a follow-up item in the same year on p. 360., pp. 218–220.

 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Bernoulli, Jakob (1691). *Dialogue with a Craftsman. Didactic exchange preceding the elastica challenge*. In *Acta Eruditorum*, Leipzig. Often cited as an introductory "dialogue" attached to Bernoulli's early announcements on the elastica (1691–1694). No separate standalone edition is known.
– (1692). *Quadratura curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura*. BirkhauserMed. CLXX; Ref. UB: L Ia 3. Die Werke von Jakob Bernoulli.
– (June 1694). "Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus". In: *Acta Eruditorum*. Includes Bernoulli's solution of the elastica and the "Golden Theorem"; reprinted in *Opera* (1744), pp. 576–600., pp. 262–276.
– (1744a). "Jacobi Bernoulli Basileensis Opera, vol 1". In: *Geneve: Cramer-Philibert.*
– (1744b). *Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera*. Latin and French. Ed. by G. Cramer. 2 vols. Posthumous collected works, excluding *Ars Conjectandi*. Contains *Varia posthuma* and biography by J.J. Battier (1705). Geneva: sumptibus hæredum Cramer & fratrum Philibert.
– (1855). "Letter to G. W. Leibniz, December 1687". In: *Die Mathematischen Werke von Jakob Bernoulli*. Ed. by C. I. Gerhardt. Vol. 3. Originally written in 1687; first published in this 1855 edition. Leipzig: B. G. Teubner, pp. 1–5.
Bernoulli, Johann (June 1696). "Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur". In: *Acta Eruditorum* 15. Announcement of the brachistochrone (curve of fastest descent) problem, pp. 269–271.
Bernoulli, Johann (1691a). *Integral Calculus. Lectiones mathematicae de methodo integralium, aliisque; conseriptae in usum Ill. Marchionis Hopitalii, cure auctor Parisiis ageret annis*. In Opera III.
– (1691b). "Letter to Leibniz". In: *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*. Ed. by Spiess, Otto. Vol. 1. Basel: Birkhäuser.
– (June 1691c). "Solutio problematis funicularii". In: *Acta Eruditorum*, pp. 274–276.
– (June 1697a). "Curvatura radii in diaphanis non uniformibus: Solutio problematis brachistochrona". In: *Acta Eruditorum*. Solution to the brachistochrone problem, showing the curve of fastest descent is a cycloid, pp. 269–271.
– (Jan. 1697b). *Programma [extending the brachistochrone challenge]*. Extension of the brachistochrone challenge deadline to Easter 1697. Groningen.
– (1713). *Opera Omnia*. Collected works including contributions to calculus and mechanics. Lausanne and Geneva: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios.
– (1725). "Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717". In: *Nouvelle Mécanique ou Statique*. Ed. by P. Varignon. Vol. 2. Contains Johann Bernoulli's 1717 letter on virtual velocities. Paris: Claude Jombert. Chap. Section IX, pp. 174–176.
Billington, D. (1965). *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
Billington, D. (1979). *Robert Maillart's Bridges; The art of Engineering*. Princeton University Press.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Billington, D. (1983a). *Structural Studies*. Tech. rep. Department of Civil Engineering, Princeton University.
– (1983b). *The Tower and the Bridge*. Princepton University Press.
– (1984a). *Structures and the Urban Environment*. Tech. rep. Lecture notes, CE 262. Department of Civil Engineering, Princeton University.
– (1984b). *Structures and the Urban Environment*. Tech. rep. Catalogue and Commentary on the slides. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Billington, D. and R. Mark, eds. (1970). *Civil Engineering–history, Heritage, and the Humanities: Background Papers from the First National Conference on Civil Engineering–History, Heritage and the Humanities*. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Billington, D., R. Mark, and J. Abel, eds. (1972). *The Maillart Papers: From the Second National Conference on Civil Engineering: History, Heritage and the Humanities: Commemorating the Hundredth Anniversary of the Birth of Robert Maillart*. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Blaikie, P. et al. (1994). *At Risk: Natural Hazards, People's Vulnerability and Disasters*. London: Routledge.
Blasjo, V. (2017). *Transcendental curves in the Leibnizian calculus*. Academic Press.
Boller, G. and P. D'Acunto (2021). "Structural design via form finding: Comparing Frei Otto, Heinz Isler and Sergio Musmeci". In: *History of Construction Cultures*, pp. 431–438.
Boller, G. and J. Schwartz (2020). "Modelling the form. Heinz Isler, Frei Otto and their approaches to form-finding". In: *Proceedings of Seventh Conf. Constr. Hist. Soc.,(3-5 April 2020, Cambridge, UK)*, pp. 565–76.
Bony, J. (1983). *French Gothic Architecture of the Twelfth and Thirteenth Centuries*.
Bos, H. J. M. (1974). "Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus". In: *Archive for history of exact sciences* 14.1, pp. 1–90.
Bourdais, J. (1881). *Projet de phare monumental pour Paris, élévation*. Original drawing, Musée d'Orsay, Paris.
Boyer, C. B. and U. C. Merzbach (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.
Brackenridge, J. B. (1992). *The critical role of curvature in Newton's developing dynamics*.
Brand, D. and H. Nicholson (2013). "Learning from Lisbon: Contemporary cities in the aftermath of natural disasters". In: *Approaches to Disaster Management-Examining the Implications of Hazards, Emergencies and Disasters*. IntechOpen.
Branner, R. (1962). *Le Maitre de la cathédrale de Beauvais*. Vol. II, pp. 77–92.
– (1997). "The Collapse of the Tower and Choir at Beauvais Cathedral". In: *The Engineering of Medieval Cathedrals*. Ed. by R. Mark and P. Mellars. Ashgate, pp. 141–158.
Bravais, A. (1850). "Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace". In: *Journal de l'École Polytechnique* 19, pp. 1–128.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Bravais, A. (1866). *Etudes cristallographiques*. Gauthier-Villars.
Brew, J. S. (2007). “Computational Analysis of Heinz Isler’s Shell Structures”. In: *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium*. Venice, Italy, pp. 1–8.
Broad, W. J. (2006). *The Oracle: Ancient Delphi and the Science Behind Its Lost Secrets*. Penguin Books.
Brodini, A. (2013). “Le coperture a grande luce nell’opera di Sergio Musmeci”. In: *La concezione strutturale: ingegneria e architettura in Italia negli anni cinquanta e sessanta*. Ed. by P. Desideri et al. U. Allemandi, pp. 253–262.
Brownbridge, A. (1986). *Ancient Chinese Bridge Architecture*. Asian Historical Press.
Brühwiler, E. (2010). “Eminent Structural Engineer: Christian Menn—Bridge Designer and Builder”. In: *Structural Engineering International* 20.4, pp. 470–472.
Bukowski, J. (2008). “Christiaan Huygens and the Problem of the Hanging Chain”. In: *The College Mathematics Journal* 39.1, pp. 2–11.
Buridan, J. (1971). *John Buridan: Quaestiones super libros De caelo et mundo*. Ed. by J. Hubert. Latin text. Paris: Vrin.
– (1991). *John Buridan: Questions on the Eight Books of Aristotle’s Physics*. Ed. by M. Clagett. Latin text with English translation. Madison: University of Wisconsin Press.
Bush, V. (1931). “The Differential Analyzer. A New Machine for Solving Differential Equations”. In: *Journal of the American Society of Mechanical Engineers* 53, pp. 107–116.
Butzer, K. W. (1976). “Early Hydraulic Civilization in Egypt: A Study in Cultural Ecology”. In: *University of Chicago Press* 11, pp. 123–145.
Cannone, M. and S. Friedlander (2003). “Navier: blow-up and collapse”. In: *Notices of the AMS* 50.1, pp. 7–13.
Capecchi, D., G. Ruta, and P. Trovalusci (2010). “From classical to Voigt’s molecular models in elasticity”. In: *Archive for history of exact sciences* 64.5, pp. 525–559.
Carnot, L. (1783). *Essai sur les machines en général*. First edition. Published anonymously as “par un officier du Corps Royal du Génie.” Second edition with author’s name: Dijon: Defay; Paris: Nyon, 1786. Dijon: [s.n.]
– (1803). *Principes fondamentaux de l’équilibre et du mouvement*. Substantially revised and expanded version of the *Essai sur les machines en général* (1783). Paris: Deterville.
Castigliano, A. (1879). *Théorie de l’équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Vol. 1. AF Negro.
Cauchy, A. L. (1822). “Recherches sur l’équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques”. In: *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, pp. 9–13.
– (1823). “Recherches sur l’équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques”. In: *Exercices de Mathématiques*. Vol. 2. Paris: De Bure Frères, pp. 42–56.

 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Cauchy, A.-L. (1827). *Exercices de mathématiques*. Vol. 2. Contains key papers on elasticity theory. Paris: De Bure Frères.
– (1828). “Sur les équations qui expriment les conditions d’équilibre ou les lois du mouvement intérieur d’un corps solide, élastique ou non élastique”. In: *Exercises de Mathematiques*. Vol. 3. De Bure Frères, pp. 160–187.
– (1829). “Sur l’équilibre et le mouvement d’un système de points matériels sollicités par des forces d’attraction ou de répulsion mutuelle”. In: *Exercices de Mathématiques*. Vol. 4. Paris: De Bure Frères, pp. 129–139.
– (1841). *Oeuvres Complètes de Cauchy*. Gauthier-Villars.
Caus, S. de (1615). *Les Raisons des Forces Mouvantes avec Diverses Machines tant Utilles que Plaisantes*. Treatise on hydraulics and mechanics; introduced the term “Travail” (work) for force times displacement. Second edition Paris, 1624. Frankfurt: Jan Norton.
Charle, C. (2004). “Le scandale de Panama: Une affaire d’État à la fin du XIXe siècle”. In: *Revue Historique* 312.4, pp. 847–872.
Charlton, T. M. (1982). *A History of Theory of Structures in the Nineteenth Century*. Cambridge: Cambridge University Press.
Châtelet, É. du (1740). *Institutions de Physique*. Paris: Prault.
Chen, P. W. and L. E. Robertson (1972). “Human perception thresholds of horizontal motion”. In: *Journal of the structural division* 98.8, pp. 1681–1695.
Child, J. (1920). *The Early Manuscripts of Leibniz*. Translations of various latin manuscripts of Leibniz. Chicago, London: The Open Court Publishing Company, p. 238.
Chilton, J. and H. Isler (2000). *The architecture of Heinz isler*. Thomas Telford.
Ching, F. D. (2011). *A visual dictionary of architecture*. John Wiley & Sons.
Chiorino, C. and C. M. Olmo (2010). *Pier Luigi Nervi: l’architecture comme défi*. Silvana Editoriale.
Cité de l’architecture & du patrimoine (Apr. 2015). *La Cité radieuse: 1945-1952, Marseille, Le Corbusier*. French. Tech. rep. Museum educational resource produced for the Éduthèque platform. Paris: Cité de l’architecture & du patrimoine, p. 12.
Clagett, M. (1964). “Nicole Oresme and Medieval scientific thought”. In: *Proceedings of the American Philosophical Society* 108.4, pp. 298–309.
– (1995). *Ancient Egyptian Science: A Source Book. Volume Two: Calendars, Clocks, and Astronomy*. American Philosophical Society.
– (1999). *Ancient Egyptian Science, Vol. 3: Ancient Egyptian Mathematics*. Philadelphia: American Philosophical Society.
Clapeyron, B.-P.-E. (1834). “Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur”. In: *Journal de l’École Polytechnique* 14.23. Work completed 1833; published 1834, pp. 153–190.
Clapeyron, B. (1857). “Calcul d’une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés”. In: *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences* 45, pp. 1076–1080.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Clark, E. and R. Stephenson (1850). *The Britannia and Conway Tubular Bridges: With General Inquiries on Beams and on the Properties of Materials Used in Construction*. Vol. 2. London: Day, Son, and John Weale.
Clausius, R. (1850). "Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen". In: *Annalen der Physik* 155.3, pp. 368–397.
– (1854). "Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie". In: *Annalen der Physik* 169.12, pp. 481–506.
– (1879). *The Mechanical Theory of Heat*. Trans. by T. A. Hirst. 2nd. Translation of *Die mechanische Wärmetheorie*. London: Macmillan.
Clebsch, A. (1862a). *Theorie der elasticität fester körper*. BG Teubner.
– (1862b). *Theorie der Elasticität fester Körper*. Posthumously edited by Gustav Kirchhoff. Leipzig: B.G. Teubner.
– (1866). *Théorie de l'élasticité des corps solides*. Ed. by B. de Saint-Venant. Traduit de l'allemand et annoté avec des additions par M. Barré de Saint-Venant. Paris: Mallet-Bachelier.
Clough, R. W. (1960). "The finite element method in plane stress analysis". In: *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960*.
– (1962). *The stress distribution of Norfork Dam*. Tech. rep. California Univ Berkeley Institute of Engineering Research.
– (2004). "Early history of the finite element method from the view point of a pioneer". In: *International journal for numerical methods in engineering* 60.1, pp. 283–287.
Clough, R. W. and E. L. Wilson (1999). "Early finite element research at Berkeley". In: *Fifth US National Conference on Computational Mechanics*, pp. 1–35.
Clough, R. and J Penzien (1975). *of Structures*. McGraw-Hill.
Clough, R. and E. Wilson (1962). "Stress analysis of a gravity dam by the finite element method". In: *Proc. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering*. Laboratorio Nacional de Engenliaria Civil, Lisbon, Portugal.
Coe, M. D. (2005). *The Maya*. Thames & Hudson.
Cohen, I. B. (2002). "Newton's concepts of force and mass, with notes on the Laws of Motion". In: *The Cambridge Companion to Newton*. Ed. by I. Cohen and G. Smith.
– (2013). *Introduction to Newton's "Principia"*. Harvard University Press.
Coleman, B. D. and W. Noll (1963). "The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity". In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13.1, pp. 167–178.
Como, M. (2013). *Statics of historic masonry constructions*. Vol. 1. Springer.
Coolidge, J. L. (1952). "The unsatisfactory story of curvature". In: *The American Mathematical Monthly* 59.6, pp. 375–379.
Copernicus, N. (1995). *On the Revolutions of the Heavenly Spheres*. Prometheus Books.
Corazzi, R. (2012). "La curva "lossodromica" e la spina pesce". In: *DISEGNARECON*, pp. 85–92.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Corbusier, L. (1954). *The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics*. Vol. 1. Harvard University Press.
– (1955). *Le Modulor 2*. Paris: Éditions de l'Architecture d'Aujourd'hui.
Corbusier, L. and P. Jeanneret (1929). "Les cinq points d'une architecture nouvelle". French. In: *Œuvres complètes 1910–1929*. Ed. by W. Boesiger. First delivered as a lecture at the Weissenhof Siedlung, Stuttgart, in 1927; reprinted in later editions of the Œuvre complète. Erlenbach-Zurich: Les Éditions d'Architecture.
Corporation, S. R. (1951). *UNIVAC I System Description*. Tech. rep. New York: Sperry Rand.
Coulomb, C (1773a). "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture". In: *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences*. Foundational work on earth pressure and slope stability, pp. 343–382.
Coulomb, C. (1773b). "*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*". In: *mémoires de l'académie Royale des Sciences* 7, pp. 343–382.
– (1773c). "Mémoires de mathématique et de physique". In: *Academie Royale des Sciences* 7.
Courant, R (1943). "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations". In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 49, pp. 1–23.
Cross, H. (1932). "Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments". In: *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 96.1. *Includes all subsequent discussions*, pp. 1–78.
– (1936). *Analysis of flow in networks of conduits or conductors*. Tech. rep. University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering ...
Cross, H. and N. D. Morgan (1932). *Continuous frames of reinforced concrete*. J. Wiley & Sons, Incorporated.
Crotti, F. (1888). *La Teoria dell'Elasticità ne' suoi Principi Fondamentali e nelle sue Applicazioni Pratiche alle Costruzioni*. Milan: Ulrico Hoepli.
Crowe, M. J. (1994). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*. Courier Corporation.
Culmann, K. (1866). *Die Graphische Statik*. Meyer and Zeller, Zürich.
Cumming, J. E. (2001). "Brumel, Antoine". In: *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. Ed. by S. Sadie. 2nd ed. Vol. 4. London: Macmillan, pp. 485–490.
Curatola, G. and G. Scarcia (2003). *Persepolis: The Great Stairway*. Getty Publications.
Currà, E. and M. Russo (2018). "Reinforced concrete in Italy through the works of two generations of engineers: Mario and Giorgio Baroni". In: *6th International Congress on Construction History (6ICCH 2018):"Building Knowledge, Constructing Histories*, pp. 9–13.
Da Vinci, L. (1490). *Códice de Madrid I*. Biblioteca Nacional de España.
– (1505). *Codex Atlanticus*. Pinacota Ambrosania, Milan.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

d'Alembert, J. l. R. (1743). *Traite de dynamique*. First edition. Collation: [4], xxvi, [2], 186, [2]. With 4 folding engraved plates. Paris: David l'aine.

D'Alembert, J. l. R. (1747). "Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration". In: *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin* 3, pp. 214–219.

Daley, S. (2013). "A Star Architect Leaves Some Clients Fuming". In: *The New York Times*.

Daniels, P. T. and W. Bright, eds. (1996). *The World's Writing Systems*. New York: Oxford University Press.

Davis, M. (2018). *The universal computer: The road from Leibniz to Turing*. AK Peters/CRC Press.

De Belidor, B. (1729). *Architecture hydraulique ou l'Art de conduire, d'élever et de ménager les eaux pour les différens besoins de la vie*. C. Jombert.

De Boer, J. Z. and D. T. Sanders (2005). *Earthquakes in Human History: The Far-Reaching Effects of Seismic Disruptions*. Princeton University Press.

De Honnecourt, V. (1858). *Album de Villard de Honnecourt, architecte du XIIIe siècle: manuscrit publié en fac-simile, annoté, précédé de considérations sur la renaissance de l'art français au XIXe siècle et suivi d'un glossaire*. Imprimerie Imperiale.

– (2006). *The Medieval Sketchbook of Villard de Honnecourt*. Ed. by T. Bowie. Reprints the 1959 Indiana University Press edition (introduction and captions by Theodore Bowie), using plates from R. Willis's 1859 English facsimile, which in turn reproduces the engraved plates of the 1858 Lassus & Darcel edition (De Honnecourt, 1858). Dover Publications.

De l'Orme, P. (1561). *Nouvelles inventions pour bien bastir et a petits fraiz*. French. Illustrated treatise presenting geometric and constructive rules for economical building, including proportional design methods. Paris: Federic Morel.

Deakin, R. (2007). "Catenary Curve". In: Technical paper on the mathematical derivation of the catenary.

DeJong, M. J. (2009). "Seismic assessment strategies for masonry structures". PhD thesis. Massachusetts Institute of Technology.

Descartes, R. (1637a). *Discours de la méthode*. Originally published with *La Géométrie*, *La Dioptrique*, and *Les Météores*. Leiden: Jan Maire.

– (1897a). *Oeuvres de Descartes*. Ed. by C. Adam and P. Tannery. 11 vols., 1897–1913. Paris: Léopold Cerf; later Vrin/CNRS reprints.

Descartes, R. (1898). *Oeuvres de Descartes*. Vol. 2: *Correspondance, mars 1638 – decembre 1639*. Ed. by C. Adam and P. Tannery. Paris: Leopold Cerf.

Descartes, R. (1927). *Selections*. C. Scribner's sons.

Descartes, R. (1637b). *La Géométrie*. Leiden: Jean Maire.

– (1644). *Principia Philosophiae*. English title: Principles of Philosophy. Part II contains the laws of motion and conservation principles. Amsterdam: Ludovicus Elzevirius.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Descartes, R. (1897b). *Correspondance de René Descartes*. Ed. by C. Adam and P. Tannery. Vol. 2. Œuvres de Descartes. Letter to Marin Mersenne, 11 October 1638, pp. 542–544. Paris: Léopold Cerf.
Desideri, P. et al. (2013). *La concezione strutturale: ingegneria e architettura in Italia negli anni cinquanta e sessanta*. U. Allemandi.
Devlin, K. (2011). *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*. New York: Walker & Company, p. 192.
Diderot, D. and J. l. R. d'Alembert (1751). *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. First volume published 1751; final volume 1772. Paris: Briasson, David and Le Breton, Durand.
Dirac, P. A. M. (1963). "The Evolution of the Physicist's Picture of Nature". In: *Scientific American* 208.5. Based on a 1958 lecture; includes Dirac's comments on religion and primitive explanations of nature, pp. 45–53.
Downey, G. (1946). "Byzantine Architects, their Training and Methods". In: *Byzantion* 18, pp. 99–118.
Dragicevic, P. and Y. Jansen (2012). *List of Physical Visualizations*. Last accessed 2022-03-30.
Dragoni, M. (2005). *Terrae motus. La sismologia da Eratostene allo tsunami di Sumatra*. Frontiere. Torino: UTET Libreria. 394 pp.
Drake, S. (1970). *The Genesis of Fluid Mechanics 1640–1780*. Vol. 6. Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer-Verlag.
– (1976). "A further reappraisal of impetus theory: Buridan, Benedetti, and Galileo". In: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 7.4, pp. 319–336.
Dreyfuss, H. (1960). *The Measure of Man: Human Factors in Design*. New York: Whitney Library of Design.
Dugas, R. (1988). *A history of mechanics*. Courier Corporation.
Dugas, R. (1955). *A History of Mechanics*. Dover Publications.
Duhem, P. (1891). *Hysteresis dans les phénomènes capillaires. Application de la thermodynamique à la mécanique des fluides*. Paris: Gauthier-Villars.
– (1893). *Introduction à la mécanique chimique*. Paris: Carré.
– (1911). *Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale*. Vol. 2. Paris: Gauthier-Villars.
d'Alembert, J (1761). "Démonstration du principe de la composition des forces". In: *Opuscules mathématiques* 1, pp. 169–179.
– (1773). "Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces". In: *Opuscules mathématiques* 6, pp. 360–370.
D'Ayala, D. and E Tomasoni (2008). "The structural behaviour of masonry vaults: Limit state analysis with finite friction". In: *Structural Analysis of Historic Construction: Preserving Safety and Significance, Two Volume Set*. CRC Press, pp. 67–82.
Eagar, T. W. and C. Musso (2001). "Why did the World Trade Center collapse? Science, engineering, and speculation". In: *Jom* 53.12, pp. 8–11.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Eckert, J. P. and J. W. Mauchly (1946). *Description of the ENIAC and the ENIAC Project*. Tech. rep. Philadelphia: University of Pennsylvania.

Einstein, A. (1935). “Emmy Noether”. In: *The New York Times*. Obituary letter to the editor.

– (1954). *Ideas and Opinions*. Originally compiled from Mein Weltbild (1934), translated by Sonja Bargmann. Includes essay “On the 300th Anniversary of Galileo’s Death.” New York: Crown Publishers.

Elizalde, R. R. (2025). “Beauvais Cathedral: The Ambition, Collapse and Legacy of Gothic Engineering”. In: *Heritage* 8.6, p. 203.

Engesser, F. (1889). “Über den Satz vom Minimum der Ergänzungsarbeit”. In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 33, pp. 927–928.

Eshelby, J. (1970). “Energy Relations and the Energy-Momentum Tensor in Continuum Mechanics”. In: *Inelastic Behavior of Solids*. Ed. by M. Kanninen et al. New York, N.Y.: McGraw-Hill, pp. 77–115.

Espion, B. (2016). “Pioneering hypar thin shell concrete roofs in the 1930s”. In: *Beton-und Stahlbetonbau* 111.3, pp. 159–165.

Établissements Eiffel, C. des (19th Century). *Historical Works and Projects of the Eiffel Company*. French. Founded by Gustave Eiffel in 1866, famous for the Eiffel Tower and other engineering achievements.

Euclid and T. L. Heath (1956). *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*. Dover Publications.

Euler, L. (1728). “*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*”. In: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 3, pp. 64–77.

– (1732). “*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*”. In: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pp. 70–84.

– (1741). “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”. In: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8, pp. 128–140.

– (1744a). “Additamentum I: De curvis elasticis”. In: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Ed. by C. Carathéodory. Vol. 24. Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series I. Reprint of the 1744 Lausanne and Geneva edition with editorial notes. Basel: Birkhäuser, pp. 231–308.

– (1744b). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Euler’s definitive formulation of the elastica, building on the earlier work of Jakob Bernoulli and Daniel Bernoulli. Lausanne and Geneva: Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, pp. 245–297.

– (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. 2 volumes. Enestrom Index E101–E102. Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet.

– (1757a). “Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides”. In: *Opera Omnia*. Vol. 12. Series 2. Basel: Orell Füssli, pp. 92–132.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Euler, L. (1757b). *Principes généraux du mouvement des fluides*. Vol. 11. Presented 1755; published 1757, pp. 274–315.
– (1759). "Sur la force des colonnes". In: *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* 13. Enestrom number E238. Original French version of Euler's classic column buckling paper., pp. 252–282.
– (1760). "De motu rectilineo tremulo linearum". In: *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 6. Reprinted in *Opera Omnia*, Series II, Volume 10, pp. 315–347, pp. 208–242.
– (1771). " *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*". In: *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pp. 381–413.
– (1780). "De formulis differentialibus, quas frustra hactenus quaesivit geometria flexionum et tensionum". In: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Reprinted in *Opera Omnia*, Series II, Volume 10, pp. 559–586, pp. 36–61.
– (1862). "De oscillationibus annulorum elasticorum". In: *Opera Postuma*, pp. 129–131.
Evans, J. (1998). *The History and Practice of Ancient Astronomy*. Oxford University Press.
Felippa, C. A. (2001). "A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts". In: *Computers & Structures* 79.14, pp. 1313–1324.
Fernández Casado, C. (1980). *Historia del puente en España: Puentes romanos*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
Ferrers, N. M., ed. (1871). *Mathematical Papers of George Green*. London: Macmillan.
Fishman, R. (1982). *Urban Utopias in the Twentieth Century: Ebenezer Howard, Frank Lloyd Wright, Le Corbusier*. MIT press.
Fletcher, R. (2004). *The cross and the crescent: the dramatic story of the earliest encounters between Christians and Muslims*. Penguin UK.
Florensky, P. (1996). *Beyond Vision: Essays on the Perception of Art*. Trans. by W. Salmond. London: Reaktion Books.
Fondazione Amelio (1987). *Terrae Motus: Naples, Tremblement de Terre*. italian, french. Exhibition catalogue, Grand Palais, Paris, 28 March – 11 May 1987. Naples: Guida, p. 302.
Forty, A. (2013). "Happy Ghost of a Possible City: Il Cretto, Gibellina". In: *AA Files* 66, pp. 101–108.
Foundation, P. S. (2001). *Python Language Reference, Version 2.0*. Python 2.0 release documentation.
Fourier, J.-B. J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Firmin Didot.
Fourier, J. (1798). "Mémoire sur la Statique, Contenant la Démonstration du Principe des Vitesses Virtuelles". In: *Journal de l'École Polytechnique* 5. Reprinted in *Œuvres de Fourier*, ed. G. Darboux, Gauthier-Villars, Paris, 1888–1890, pp. 20–60.
Fraser, C. G. (1991). "Mathematical technique and physical conception in Euler's investigation of the elastica". In: *Centaurus* 34.3, pp. 211–246.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Freedberg, D. (2003). *The eye of the lynx: Galileo, his friends, and the beginnings of modern natural history*. University of Chicago Press.
Galerkin, B. G. (1915). “Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates”. In: *Vestnik inzhenerov i tekhnikov* 19.7, pp. 897–908.
Galilei, G. (1594). *Le mecaniche*. Ed. by A. Favaro. Vol. 2. Edizione Nazionale; cite “Della vite”, p. 185 for the “quanto si guadagna di forza ...” passage. Firenze: Barbera.
– (1623). *Il Saggiatore*. The Assayer. Rome: Giacomo Mascardi.
– (1632). *”Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican”*. Originally published by Elzevir, The Neterlands, 1638. Translation by Stillman Drake and Foreword by Albert Einstein. University of California press.
– (1638). *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*. English translation: *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Leiden: Elzevir.
Galilei, G. and S. Drake (1990). “Discoveries and opinions of Galileo: including The starry messenger (1610), Letter to the Grand Duchess Christina (1615), and excerpts from Letters on sunspots (1613), The assayer (1623)”. In: *New York: Anchor Books*.
Gallagher, R. (1964). *A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis*. AGARDograph 69. Report to the 14th Meeting, Structures and Materials Panel, AGARD, NATO. Oxford: Pergamon Press.
– (1975). *Finite Element Analysis Fundamentals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
Gauthey, E.-M. (1813). *Œuvres de M. Gauthey: Traité de la construction des ponts*. Vol. 2. Firmin Didot.
Gautier, H. (1765). *Traité des ponts*. Vol. 1. Veuve Duchesne.
Gehry, F., M. Lloyd, and D. Shelden (2020). “Empowering design: Gehry partners, Gehry technologies and architect-led industry change”. In: *Architectural Design* 90.2, pp. 14–23.
George, A. R. (1993). *House Most High: The Temples of Ancient Mesopotamia*. Winona Lake, IN: Eisenbrauns.
Germain, S. (1821). *Recherches sur la Théorie des Surfaces Élastiques*. Paris: Courcier.
Giacomoni, P., ed. (2005). *La Terra Trema*. Kozach Collection. Rovereto: Museo Arte Moderna e Contemporanea.
Gillings, R. J. (2019). “Mathematics in the Time of the Pharaohs”. In: *Mathematics*. Chapman and Hall/CRC, pp. 9–17.
Giorgio Martini, F. di (ca. 1480). *Trattati di architettura, ingegneria e arte militare*. Manuscript treatise on architecture, engineering, and military art, written ca. 1478–1490.
Girard, A. (1634). “Notes et annotations (sur les cordes pendantes)”. French. In: *Les Oeuvres mathématiques*. Marginal annotation by Girard in Stevin’s posthumous work. Leiden: Bonaventure & Abraham Elzevier.
Girard, P.-S. (1798). *Traité analytique de la résistance des solides*. One of the earliest systematic treatments of structural mechanics, providing illustrative diagrams of Galileo’s and Mariotte’s theories. Paris: Imprimerie de la République.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Gleick, J. (2016). *Time Travel: A History*. Pantheon.
Goldberg, J. E. (1934). “Wind stresses by slope deflection and converging approximations”. In: *transactions of the American Society of Civil Engineers* 99.1, pp. 962–975.
Goodman, R. E. (1999). *Karl Terzaghi: The Engineer as Artist*. Contains a detailed account of the Terzaghi–Fillunger dispute and its historical context. Reston, VA: ASCE Press.
Goss, V. G. A. (2009). “The history of the planar elastica: insights into mechanics and scientific method”. In: *Science & Education* 18.8, pp. 1057–1082.
Graczykowski, C. and T. Lewiński (2010). “Michell cantilevers constructed within a half strip. Tabulation of selected benchmark results”. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 42.6, pp. 869–877.
Graham, A. (1978). *The Mohist Canon*. Cambridge University Press.
Graham, H. D. and N. Diamond (2004). *The rise of American research universities: Elites and challengers in the postwar era*. JHU Press.
Grant, E. (1977). *Physical science in the middle ages*. Cambridge University Press.
Grattan-Guinness, I. (1990). *Convolutions in French Mathematics, 1800–1840*. 3 vols. Excellent on the French school. Basel: Birkhäuser.
Gravesande, W. J. (1722). *Essai d’une nouvelle theorie sur le choc des corps, fondee sur l’experience*. Also issued in the *Journal litteraire de La Haye*, tome XII, pp. 1–54 (1722). La Haye: T. Johnson.
Greco, C. (2008). *Pier Luigi Nervi: dai primi brevetti al palazzo delle esposizioni di Torino 1917-1948*. Quart Verlag.
Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Reprinted in *Mathematical Papers of George Green*, edited by N. M. Ferrers, London: Macmillan, 1871. Nottingham: T. Wheelhouse.
– (1837). “On the Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media”. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.
– (1839a). “On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media”. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.
– (1839b). “On the Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media”. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.
– (1842). “On the Propagation of Light in Crystallized Media”. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 121–140.
Guidoboni, E. and J.-P. Poirier (2004). *Quand la Terre Tremblait*. Paris: Odile Jacob.
Hall, A. R. (1951). *Robert Hooke and horology*.
Halpern, A., D. Billington, and S. Adriaenssens (2013). “The ribbed floor slab systems of Pier Luigi Nervi”. In: *Proceedings of IASS Annual Symposia*. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), pp. 1–7.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Hardy, A. (2007). *The Indian Temple: Architecture and Engineering*. Oxford University Press.
Harvey, W. (1628). *Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus*. An Anatomical Exercise on the Motion of the Heart and Blood in Living Beings. Frankfurt: Guilielmi Fitzeri.
Hassan Fangary, A. A. (2010). "Graphics analysis of gothic vaults". M.S. Thesis. Universitat Politècnica de Catalunya.
Haytham, I. al (1989). *The Optics of Ibn al-Haytham: Books I–III on Direct Vision*. Trans. by A. I. Sabra. Vol. 40. Studies of the Warburg Institute. London: Warburg Institute.
Herodotus (1921). *The Persian Wars*. Trans. by A. D. Godley. Vol. 2. Loeb Classical Library 118. Book IV.87–88 (Darius' bridge over the Bosporus, built by Mandrocles of Samos). Cambridge, MA: Harvard University Press.
Heyman, J. (1998a). *Structural analysis; A historical approach*. Cambridge University Press.
Heyman, J. (1966). "The stone skeleton". In: *International Journal of Solids and Structures* 2.2, pp. 249–279.
– (1967). "Beauvais cathedral". In: *Transactions of the Newcomen Society* 40.1, pp. 15–35.
– (1982). *The Masonry Arch*. Ellis Horwood Series in Engineering Science. Chichester: Ellis Horwood.
– (1997). *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. en. Cambridge University Press.
– (1998b). *Structural Analysis; A Historical Approach*. Cambridge University Press.
– (2003). "Truesdell and the History of the Theory of Structures". In: *Essays on the History of Mechanics*. Springer, pp. 9–20.
Heyman, J. and G Poleni (1988). "Poleni's problem." In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 84.4, pp. 737–759.
Heyman, J. et al. (1992). "How to design a cathedral: some fragments of the history of structural engineering." In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Civil Engineering*. Thomas Telford-ICE Virtual Library, pp. 24–29.
Hill, D. R. (2019). *Islamic science and engineering*. Edinburgh University Press.
Hodge, A. T. (1992). *Roman Aqueducts and Water Supply*. Duckworth.
Hogendijk, I (1994). "Pure mathematics in Islamic civilization". In: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* 1, pp. 70–79.
Homer (1924). *The Iliad*. Trans. by A. T. Murray. Vol. 170. Loeb Classical Library. 2 vols. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
Hon, G. and Y. Zik (2009). "Kepler's optical part of astronomy (1604): Introducing the ecliptic instrument". In: *Perspectives on Science* 17.3, pp. 307–345.
Honigmann, C. and D. P. Billington (2003). "Conceptual design for the Sunniberg Bridge". In: *Journal of Bridge Engineering* 8.3, pp. 122–130.

 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Hooke, R. (1665). *Micrographia: or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses with Observations and Inquiries Thereupon*. Royal Society of London. London: Jo. Martyn and Ja. Allestry.
– (1676). *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments*. Imprint dated 1676; actually published October 1675. London: John Martyn.
– (1678). *Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies*. London: John Martyn.
– (1705). *The Posthumous Works of Robert Hooke*. Ed. by R. Waller. The decipherment of the arch anagram appears in Waller's prefatory "Life of Dr. Robert Hooke". London: Sam. Smith and Benj. Walford.
Houlsby, G. T. (2014). "John Wallis and the numerical analysis of structures". In: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 207–217.
structural engineering, n. (n.d.). Earliest evidence recorded by OED: 1859. Oxford English Dictionary.
Hrennikoff, A. (1941). "Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method". In: *Journal of Applied Mechanics* 8, pp. 169–175.
Huerta, S. (2004). *Arcos, bóvedas y cúpulas: Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
– (2006). "Structural Design in the Work of Gaudí". In: *Architectural Science Review* 49.4, pp. 324–339.
– (2009). "The Debate about the Structural Behaviour of Gothic Vaults: From Viollet-le-Duc to Heyman". In: *Proceedings of the Third International Congress on Construction History*.
– (2018). "Arch Bridge Design in Eighteenth-Century France: The Rule of Perronet". In: *Building Knowledge, Constructing Histories*. Ed. by I. Wouters et al. Proceedings of the 6th International Congress on Construction History (6ICCH), Brussels, Belgium, July 9–13, 2018. London: CRC Press/Balkema, pp. 773–780.
Huff, D. (2005). "From Median to Achaemenian palace architecture". In: *Iranica Antiqua* 40, pp. 371–395.
Huxtable, A. L. (2017). *Pier Luigi Nervi*. Pickle Partners Publishing.
Huygens, C (1673). "1673 Horologium oscillatorium". In: *Sive de Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometrical (Paris: AF Muguet)*.
Huygens, C. (Nov. 16, 1691). *Lettre à G.W. Leibniz*. French. Ed. by J. B. Jr. In *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, vol. 10: *Correspondance 1691–1695*. Letter. La Haye.
– (Aug. 24, 1694). *Lettre à G.W. Leibniz*. French. Ed. by J. B. Jr. In *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, vol. 10: *Correspondance 1691–1695*. Letter. La Haye.
– (1888a). "Letter to Gottfried Wilhelm Leibniz, 1 September 1691". In: *Oeuvres Complêtes de Christiaan Huygens*. Ed. by D. B. de Haan et al. Vol. 10. Letter dated 1 September 1691. The Hague: Martinus Nijhoff, pp. 127–134.
– (1888b). *Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1*. Correspondance 1638-1656. Société Hollandaise des Sciences; Martinus Nijhoff, pp. 35–40.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Huygens, C. (1986). *The Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations*. Iowa State University Press.
Iacovou, P. (2024). "The construction of Casa Malaparte as living images". In: *Journal of Architecture/ Architectural History (Taylor & Francis)*.
Inwood, S. (2002). *The Man Who Knew Too Much: The Strange and Inventive Life of Robert Hooke, 1635–1703*. London: Macmillan.
Irons, B. M. (1966). "Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods". In: *AIAA Journal* 4.11, pp. 2035–2037.
Istituto Geografico De Agostini, ed. (1956). *Leonardo da Vinci*. Memorial edition arising from the 1938 Leonardo Exposition in Milan. New York: Reynal & Company. 518 pp.
Jacobovici, S. and J. Cameron (2006). *The Exodus Decoded*. History Channel documentary.
Jakob Bernoulli (n.d.).
James, J. (1982). *Chartres: The Masons Who Built a Legend*. London: Routledge & Kegan Paul.
Jammer, M. (1957). *Concepts of Force*. Reprinted by Dover Books on Physics. Harvard University Press.
Jeremias, J. (1965). *Theophanie: Die Geschichte einer alttestamentlichen Gattung*. German. Neukirchen-Vluyn: Neukirchener Verlag, p. 181.
Jones, B., A. Sereni, and M. Ricci (2010). "Building Brunelleschi's Dome: A Practical Methodology Verified by Experiment". In: *Journal of the Society of Architectural Historians* 69.1, pp. 39–61.
Jung, C. G. (1959). *Flying Saucers: A Modern Myth of Things Seen in the Skies*. Trans. by R. F. C. Hull. London: Routledge & Kegan Paul.
Kant, I. (2023). *Metaphysical foundations of natural science*. Newcomb Livraria Press.
Kaplan, R. (2000). *The Nothing That Is: A Natural History of Zero*. Oxford University Press.
Kästner, A. G. (1786). *Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*. 4. Auflage. Göttingen: Keyser.
Keller, S. (1998). "Sections and Views: Visual Representation in Eighteenth-Century Earthquake Studies". In: *British Journal for the History of Science* 31, pp. 129–159.
Kennedy, E. S. (1971). "Al-Biruni's Masudic canon". In: *Al-Abhath* 24.1-4, pp. 59–81.
Kepler, J. (1609). *Astronomia nova: Aitiologıa, seu physica coelestis*. Prague: Typographia Jonae Rosini.
– (1855). *Joannis Kepleri Astronomi Opera Omnia*. Ed. by H. Zimmer. Francofurti.
Khan, F. R. (1965). "Design of high-rise buildings". In: *ASCE Symposium on Steel, Chicago*.
Khāzinī, A. al-Rahman al (2001). *The Balance of Wisdom*. Ed. by A. S. Hamdan. Originally written in 1121 CE. Cairo: Dar al-Fikr al-Arabi.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Kim, R. D. Y. (2016). “Analysis of architectural geometries affecting stress distributions of gothic flying buttresses”. Thesis. Kansas State University.
Kimmelman, M. (Apr. 29, 2020). *https://www.nytimes.com/2020/04/29/arts/design/new-york-virtual-tour-virus.htmlThe Hidden Feats That Built New York’s Towering Skyscrapers*. Critic’s Notebook. Published Apr. 29, 2020; updated May 4, 2020.
King, R. (2010). *Brunelleschi’s Dome: The story of the great cathedral in florence*. Random House.
Kinney, J. (1957). *Indeterminate Structural Analysis*. Out of Print. Addison-Wesley.
Kirchhoff, G. (1859). “Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe”. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40, pp. 51–88.
Kleinert, A. (Dec. 2015). “Leonhardi Euleri Opera Omnia: Editing the works and correspondence of Leonhard Euler”. In: *Prace Komisji Historii Nauki PAU* IVX, pp. 13–35.
Kleist, H. v. (1810). “Das Erdbeben in Chili”. In: *Erzählungen*. Vol. 1. Written c. 1806; first published 1807 under the title *Jeronimo und Josephe*. Berlin: Realschulbuchhandlung, pp. 1–62.
Kossakovsky, V. (2024). *Architecton*.
Kozák, J. and V. Cermák (2010). *The Illustrated History of Natural Disasters*. Dordrecht: Springer, p. 231.
Kozak, J., V. Moreira, and D. Oldroyd (2005). *Iconography of the 1755 Lisbon Earthquake*. Prague: Academia.
Kramer, S. N. (1963). *The Sumerians: Their History, Culture, and Character*. Chicago: University of Chicago Press.
Krinsky, C. H. (1967). “Seventy-eight Vitruvius manuscripts”. In: *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes* 30.1, pp. 36–70.
Kron, G. (1944). “Tensorial Analysis and Equivalent Circuits of Elastic Structures”. In: *Journal of the Franklin Institute* 238.6, pp. 399–442.
Kurrer, K.-E. (2003). “The development of the deformation method”. In: *Essays on the History of Mechanics*. Springer, pp. 57–87.
Kurrer, K. (2008). *The History of the Theory of Structures*. Ernst & Sohn.
La Gorce, J. d. (1996). “Tempêtes et Tremblements de Terre dans l’Opéra Français sous le Règne de Louis XIV”. In: *Le Mouvement en Musique à l’Epoque Baroque*. Ed. by H. Lacombe. Metz: Editions Serpenoise, pp. 171–188.
Lagrange, J.-L. (1788). *Mécanique Analytique*. Foundational work reformulating mechanics using variational principles. Paris: Veuve Desaint.
– (1798). “Sur le principe des vitesses virtuelles”. In: *Journal de l’École polytechnique* 2.5. Prairial an VI (May–Jun 1798)., pp. 115–118.
Lamé, G and B Clapeyron (1831). “Mémoire sur l’équilibre intérieur des corps solides homogènes”. In: *Mémoires présentés par divers savants à l’Académie Royale des Sciences* 4, pp. 463–562.
Lamé, G. (1852). *Leçons sur la théorie mathématique de l’élasticité des corps solides*. Paris: Bachelier.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Lamé, G. and B. P. E. Clapeyron (1833). “Mémoire sur la solidification par refroidissement d’un globe liquide”. In: *Annales de chimie et de physique* 47, pp. 250–256.
Larsen, O. P. (2007). *Reciprocal frame architecture*. Routledge.
Le Corbusier (1931). *Towards a new architecture*. Republished in 2013. Courier Corporation.
Lehner, M. (1997). *The Complete Pyramids: Solving the Ancient Mysteries*. Thames & Hudson.
Leibniz, G. W. (1684). “Demonstratio generalis corporum solidorum resistentiam in flexu determinandi”. In: *Acta Eruditorum*. Leibniz addresses the bending resistance of solid bodies, comparing inextensional and extensional theories., pp. 334–336.
– (Mar. 1686a). “Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii”. Latin. In: *Acta Eruditorum*. English title: A Brief Demonstration of a Notable Error of Descartes and Others Concerning a Natural Law, pp. 161–163.
– (1686b). “De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum”. In: *Acta Eruditorum* 1686.VI, pp. 292–300.
– (1690). “Ad ea, quae vir clarissimus JB, mense Majo nupero in his Actis publicavit, responsio”. In: *Acta eruditorum*, pp. 358–360.
– (June 1691a). “De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos”. In: *Acta Eruditorum*, pp. 277–281.
– (1691b). *Description of the Stepped Reckoner*. Contemporary account of Leibniz’s calculating machine.
– (July 24, 1691c). “Letter to Christiaan Huygens”. In: *Sämtliche Schriften und Briefe*. Vol. III, 5. Akademie-Ausgabe. Letter discussing Johann Bernoulli’s catenary solution and the quadrature of the hyperbola. Berlin: Akademie Verlag.
– (Mar. 2, 1691d). “Letter to Huygens”. In: *Sämtliche Schriften und Briefe*. Ed. by Preussische Akademie der Wissenschaften. Vol. 5. Reihe III: Mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel. Akademie-Ausgabe III, 5. Berlin: Akademie Verlag, pp. 58–64.
– (June 1691e). “On the curve formed by a heavy flexible cord”. In: *Acta Eruditorum*. Discusses plans to study the bending of beams and bows in future correspondence.
– (1710). *Essais de Théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté de l’homme et l’origine du mal*. The only major philosophical work published by Leibniz in his lifetime. *Printing and the Mind of Man*, no. 177. Amsterdam: Isaac Troyel.
– (1858). “Historia et origo calculi differentialis (1714)”. In: *Leibniz GW Mathematische Schriften. In* 7, pp. 392–410.
– (1901). “Letter to Christiaan Huygens, October 13, 1690”. In: *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*. Ed. by Société Hollandaise des Sciences. Vol. 9. The Hague: Martinus Nijhoff.
– (1923). *Samtliche Schriften und Briefe. Philosophische Schriften. Vols. 1-3.*
– (1969). *Philosophical Papers and Letters*. D. Reidel.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Leibniz, G. W. and L. E. Loemker (1956). *Philosophical Papers and Letters*. Ed. by L. E. Loemker. Chicago: University of Chicago Press.

Lemoine, B. (2002). *The Eiffel Tower*. New York: Princeton Architectural Press.

León-Portilla, M. (1963). *Aztec Thought and Culture: A Study of the Ancient Nahuatl Mind*. Translated from the Spanish by Jack Emory Davis. Norman: University of Oklahoma Press.

Levien, R. (2008). "The elastica: a mathematical history". In: *Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley*. Text reproduced with author's permission.

Levy, S. (1953). "Structural analysis and influence coefficients for delta wings". In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 20.7, pp. 449–454.

Lieberkühn, C. G. (1758). *Die Lissabonner: ein bürgerliches Trauerspiel*. Bound with *Die Insel der Pucklichten, ein Lustspiel*. First edition. [Halle]: Carl Gottfried Meyer.

Ligorio, P. (2005). *Libro di diversi terremoti*. Ed. by E. Guidoboni. Edizione Nazionale delle Opere di Pirro Ligorio, Libri delle antichità, Torino 28. Critical edition of the manuscript (Archivio di Stato di Torino, cod. Ja.II.15), written 1570–71 during the Ferrara earthquake sequence. Introduction in Italian and English. Roma: De Luca Editori d'Arte.

Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Crown.

Llunji, M. (2022). *Towards A New Engineering-: Reflections of a practitioner*. Msproject.

Londe, P. (1987). "The Malpasset dam failure". In: *Engineering Geology* 24.1-4, pp. 295–329.

López, G. (2006). "Poleni's Manuscripts about the Dome of Saint Peter's". In: *Proceedings of the Second International Congress on Construction History* 2.

Lori, T. (2009). *Pier Luigi Nervi*. Motta Architectura.

Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th ed. Contains extensive historical notes. Cambridge: Cambridge University Press.

Lovelace, A. (1843). "Notes by the Translator". In: *Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage*. Ed. by L. F. Menabrea. London: Richard and John Edward Taylor.

Lucretius, T. C. (1995). *De Rerum Natura*. Trans. by A. M. Esolen. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Ludwin, R. S. and G. Smits (2007). "Folklore and Earthquakes: Native American Oral Traditions from Cascadia Compared with Written Traditions from Japan". In: *Myth and Geology*. Ed. by L. Piccardi and W. B. Masse. London: Geological Society, pp. 67–94.

MacDonald, W. L. (1982). *The Architecture of the Roman Empire, Volume II: An Urban Appraisal*. Yale University Press.

Mahmoodi, P et al. (1987). "Performance of viscoelastic dampers in world trade center towers". In: *Dynamics of structures*. ASCE, pp. 632–644.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Maier, G. (2007). Private Communication.
Maney, G. A. (1915). “Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution”. In: *Studies in Engineering*. University of Minnesota.
Maor, E. (2001). *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*.
Mark, R. (1978). “Structural experimentation in Gothic architecture: Large-scale experimentation brought Gothic cathedrals to a level of technical elegance unsurpassed until the last century”. In: *American Scientist* 66.5, pp. 542–550.
Mark, R., J. F. Abel, and K. O’Neill (1973). “Photoelastic and finite-element analysis of a quadripartite vault”. In: *Experimental Mechanics* 13.8, pp. 322–329.
Mark, R. and R. A. Prentke (1968). “Model analysis of Gothic structure”. In: *The Journal of the Society of Architectural Historians* 27.1, pp. 44–48.
Markowsky, G. (1992). “Misconceptions about the golden ratio”. In: *The College Mathematics Journal* 23.1, pp. 2–19.
Marmo, F. et al. (2019). “On the form of the Musmeci’s bridge over the Basento river”. In: *Engineering Structures* 191, pp. 658–673.
Marmontel, J.-F. (1777). *Les Incas, ou La destruction de l’empire du Pérou*. 2 vols. 2 vols. First edition. Paris: Lacombe.
Marshack, A. (1972). *The Roots of Civilization: The Cognitive Beginnings of Man’s First Art, Symbol and Notation*. New York: McGraw-Hill.
MATLAB User’s Guide (1984). The MathWorks. Natick, MA.
Maxwell, J. (1864a). “On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces”. In: *Philosophical Magazine* 27, pp. 250–261.
– (1864b). “On reciprocal figures and diagrams of forces”. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27.182, pp. 250–261.
– (1864c). “On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames”. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27.182, pp. 294–299.
– (1890). *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell...* Vol. 2. University Press.
McCullough, D. (1972). *The Great Bridge: The Epic Story of the Building of the Brooklyn Bridge*. New York: Simon & Schuster.
McDonough, J. K. (2016). “Leibniz and the Foundations of Physics: The Later years”. In: *Philosophical Review* 125.1, pp. 1–34.
McQuaid, M. (1993). *Santiago Calatrava : structure and expression*. New York, N.Y: Museum of Modern Art.
Menn, C. (1990). *Prestressed concrete bridges*. Springer Science & Business Media.
– (1996). “The place of aesthetics in bridge design”. In: *Structural engineering international* 6.2, pp. 93–95.
Menninger, K. (2013). *Number words and number symbols: A cultural history of numbers*. Courier Corporation.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Michell, A. G. M. (1904). “LVIII. The limits of economy of material in frame-structures”. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 8.47, pp. 589–597.
Michell, G. (1989). *The Stepwells of India*. Mapin Publishing.
Mieroop, M. Van de (2024). *A history of the ancient Near East ca. 3000-323 BC*. John Wiley & Sons.
Miller, D. M. (2017). “The Parallelogram Rule from Pseudo-Aristotle to Newton”. In: *Archive for History of Exact Sciences* 71.2, pp. 157–191.
Miller, G. A. (1916). *Historical introduction to mathematical literature*. Macmillan.
Miyata, N. and M. Takada, eds. (1995). *Namazu-e: Jishin to Nihon Bunka*. Tokyo: Satofuni Shuppan.
Mohr, C. O. (1868). “Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen”. German. In: *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover* 14. [Contributions to the Theory of Timber and Iron Constructions], pp. 20–52, 397–400.
– (1874). *Lehrbuch der Mechanik*. F. Vieweg.
– (1882a). “Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre”. German. In: *Der Civilingenieur* 28.2, pp. 113–156.
– (1882b). “Ueber die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre”. In: *Der Civilingenieur* 28, pp. 113–156, 193–235.
Mohr, O. (1892). “Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen”. German. In: *Der Civilingenieur* 38. [The Calculation of Trusses with Rigid Joint Connections], pp. 577–594.
Moody, E. A. (1951). “Galileo and Avempace: The Dynamics of the Leaning Tower Experiment (I)”. In: *Journal of the History of Ideas*, pp. 163–193.
Moorey, P. R. S. (1999). *Ancient Mesopotamian materials and industries: the archaeological evidence*. Eisenbrauns.
Morandi, R. and F. Piccarreta (1972). “Roof structure of the new hangars by the International Fiumicino Airport (Rome): design, model tests”. In: *IABSE congress report*. International Association for Bridge and Structural Engineering.
Moseley, H. (1843). *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture*. John Weale.
Mozi (2013). *The Mozi: A Complete Translation*. Trans. by I. Johnston. Originally compiled in the 5th century BCE. Hong Kong: The Chinese University Press.
Müller-Breslau, H. F. B. (1886). *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit*. German. [The Newer Methods of Strength of Materials and Statics of Building Structures, Based on the Law of Virtual Displacements and the Theorems on Strain Energy]. Leipzig: Baumgärtner.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Müller-Breslau, H. F. B. (1887). *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*. German. 1st ed. Vol. 1. [Graphical Statics of Building Structures]. Systematic treatment of influence lines. Leipzig: Baumgärtner.

Murray, S. (1989). *Beauvais Cathedral: architecture of transcendence*. Princeton University Press.

– (1998). “Notre-Dame of Paris and the anticipation of Gothic”. In: *The Art Bulletin* 80.2, pp. 229–253.

Musolino, M. (2017). “L’arte traumatica. Gibellina e la risemantizzazione delle sue rovine”. In: *Meridiana* 88, pp. 157–178.

Musschenbroek, P. van (1739). *Elementa Physicae Conscripta in usus Academicos*. Latin. Includes early experimental studies on the tensile strength of materials. Lugduni Batavorum: Petrum vander Eyk.

Napier, J. (1614). *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Edinburgh: Andrew Hart.

NASA (1968). *NASTRAN User’s Manual*. Tech. rep. Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration.

NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team (Sept. 2023). *Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team Report*. Tech. rep. Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration.

National Institute of Standards and Technology (NIST) (Sept. 2005). *Final Report on the Collapse of the World Trade Center Towers: Federal Building and Fire Safety Investigation of the World Trade Center Disaster*. NCSTAR 1. Gaithersburg, MD: National Institute of Standards and Technology.

Naveh, J. (1987). *Early History of the Alphabet: An Introduction to West Semitic Epigraphy and Palaeography*. 2nd. Jerusalem: Magnes Press.

Navier, C (1821). “Sur les lois de l’équilibre et du mouvement des corps solides élastiques”. In: *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, pp. 177–181.

– (1823). *Rapport à Monsieur le Ministre de l’Intérieur sur le projet d’un pont suspendu à établir au port des Champs-Élysées*. Report on the proposed suspension bridge at the Champs-Élysées, highlighting the intersection of engineering, mathematics, and architectural aesthetics. Paris: Imprimerie Royale.

– (1826). *Résumé des leçons données à l’École royale des ponts et chaussées sur l’application de la mécanique à l’établissement des constructions et des machines*. First edition. Second edition published in 2 volumes, 1833-1838. Paris: Carilian-Gœury.

– (1827a). “Mémoire sur les lois de l’équilibre et du mouvement des corps solides élastiques”. In: *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences de l’Institut de France* 7, pp. 375–393.

– (1827b). “Mémoire sur les lois du mouvement des fluides”. In: *Mémoires de l’Académie des sciences de l’Institut de France* 6. Lu à l’Académie royale des Sciences le 18 mars 1822, pp. 389–440.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Navier, C (1830). *Rapport à Monsieur Becquey, Conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus*. 2nd ed. Augmentée d'une notice sur le pont des Invalides. Paris: Carilian-Gœury.
– (1833). *Résumé des Leçons Données sur L Application de la mécanique a L'etablissement des constructions et des machines*. 2nd edition.
– (1864). *Résumé des leçons données a l'École des ponts et chaussées [...]. Troisième édition avec des notes et des appendices, par M. Barré de Saint-Venant*.
Needham, J. (1959). *Science and Civilization in China*. Cambridge University Press.
Nelli, G. B. and A. Ceccherelli (1753). *Discorsi di architettura del senatore Giovan Batista Nelli con la vita del medesimo dedicata all'illustriss. signore Bindo Simone Peruzzi e due ragionamenti sopra le cupole di Alessandro Cecchini architetto*. per gli eredi Paperini.
Nemore, J. de (1250). *Liber de Ratione Ponderis*. 13th century. Critical edition by E. A. Moody and M. Clagett in *The Medieval Science of Weights*, University of Wisconsin Press, 1952.
Nervi, P. (2018). *Aesthetics and Technology in Building: The Twenty-first-century Edition*. Translated from the Italian by Robert Einaudi. University of Illinois Press.
Nervi, P. L. (1956a). *Structures*. F. W. Dodge Corporation.
– (1956b). *Structures*. Translated from the Italian *Costruire correttamente* by Giuseppina and Mario Salvadori. F.W. Dodge Corporation.
– (1963). *Buildings, projects, structures, 1953-1963*. Praeger.
Nervi, P. L., G. Neri, et al. (2014). *Scienza o arte del costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento armato*. CittàStudi Edizioni.
Neufert, E. (1970). *Architects' Data*. Trans. by R. Herz. First English translation of *Bauentwurfslehre* (1936). London: Lockwood.
Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity*. Vol. 9. Courier Corporation.
– (2012). *A history of ancient mathematical astronomy*. Vol. 1. Springer Science & Business Media.
Newmark, N. M. (1959). "A method of computation for structural dynamics". In: *Journal of the engineering mechanics division* 85.3, pp. 67–94.
Newton, I. (1680). *Index Chemicus*. The Chimistry of Isaac Newton Project, Indiana University Digital Library Program.
– (1687). *Mathematical principles of natural philosophy*. English & Latin Version.
– (1704). *Opticks: or, A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*. First edition. London: Sam. Smith and Benj. Walford.
– (1717). *Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light*. Dover Publications, 1952.
– (1736). *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam*. Trans. by J. Colson. Originally written in 1671. London: Henry Woodfall.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Newton, I. (1960). “Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676”. In: *The Correspondence of Isaac Newton*. Ed. by H. W. Turnbull. Vol. 2. 1676–1687. Cambridge: Cambridge University Press. Chap. 187, pp. 110–161.

Nikolinakou, M. A. and A. J. Tallon (2006). “New Research in Early Gothic Flying Buttresses”. en. In: *Proc. Second Intern. Congress Construction History, Cambridge*, pp. 2347–2361.

Nikolinakou, M.-K., A. J. Tallon, and J. A. Ochsendorf (2005). “Structure and form of early Gothic flying buttresses”. In: *Revue Européenne de Génie Civil* 9.9-10, pp. 1191–1217.

Noether, E. (1918). “Invariante Variationsprobleme”. In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 235–257.

Noll, W. (1958). “A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media”. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 2.1, pp. 197–226.

NRC-ML19312B609 (2019). *Official Transcript of Proceedings; NextEra Energy Seabrook, LLC Seabrook Station, Unit 1; Docket Number: 50-443-LA-2;ASLBP Number:17-953-02-LA-BD01*. Newburyport, Massachusetts.

Nur, A. and D. Burgess (2008). *Apocalypse: earthquakes, archaeology, and the wrath of God*. Princeton University Press.

Oates, J. (1990). *Babylon*. See Chapter 2 for building materials and construction practice. London: Thames and Hudson.

Ochsendorf, J. A. (2002). “Collapse of masonry structures”. Thesis. University of Cambridge.

Oikonomou, A. (2022). “The Use of Geometrical Tracing, Module and Proportions in Design and Construction, from Antiquity to the 18th Century”. In: *International Journal of Architectural Heritage* 16.10, pp. 1567–1587.

Oldfather, W., C. Ellis, and D. M. Brown (1933). “Leonhard Euler’s elastic curves”. In: *Isis* 20.1. Translation of *De curvis elasticis*, Additamentum I to *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, pp. 72–160.

Oppenheim, A. L. (1977). *Ancient Mesopotamia: Portrait of a Dead Civilization*. University of Chicago Press.

Oresme, N. (1351). *De configurationibus qualitatum et motuum*.

Otto, F., R. Trostel, and F. K. Schleyer (1973). *Tensile structures; design, structure, and calculati on of buildings of cables, nets, and membranes*. MIT Press.

Oughtred, W. (1632). *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument*. London: Augustine Mathewes.

Our history (2026). Institutional history: origin in 1908; name adopted in 1922. The Institution of Structural Engineers.

Palladio, A. (1570). *I quattro libri dell’architettura*. Domenico di Franceschi.

Palomo, M. (2017). “Describing Reality: Bernoulli’s Challenge of the Catenary Curve and its Mathematical Description by Leibniz and Huygens”. In: *Leibniz and the Dialogue Between Sciences, Philosophy and Engineering, 1646–2016. New Historical and Epistemological Insights*, p. 334.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Panofsky, E. (1945). “An Explanation of Stornaloco’s Formula”. In: *The Art Bulletin* 27.1, pp. 61–64.
Paranjape, M. R. (2011). “‘Natural Supernaturalism?’The Tagore–Gandhi Debate on the Bihar Earthquake”. In: *The Journal of Hindu Studies* 4.2, pp. 176–204.
Pardies, I. G. (1710). *La statique ou la science des forces mouvantes*. S. Mabre-Cramoisy.
Parent, A. (1713). *Essais et recherches de mathématique et de physique, dans lesquels on traite de l’utilité des différentes sciences, et principalement de la mécanique, par rapport aux arts et métiers*. 3 volumes. Paris: Jean Anisson.
Parkinson, R. B. (1999). *Cracking Codes: The Rosetta Stone and Decipherment*. Berkeley: University of California Press.
Pascal, B. (1645). *La Machine Arithmetique*. Pamphlet describing Pascal’s mechanical calculator. Paris.
Pearson, K (Aug. 1905). “On the Stability of Masonry Dams”. In: *Engineering*, p. 171.
Pearson, K. et al. (1907). *An experimental study of the stress in Masonry Dams*. Tech. rep. Technical Series, V. Drapers Company Research Memoirs (Technical Series).
Pedreschi, R. (2008). “Form, force and structure: a brief history”. In: *Architectural Design* 78.2, pp. 12–19.
Peiffer, J. (2006). “Jacob Bernoulli, teacher and rival of his brother Johann”. In: *Journal Électronique d’Histoire des Probabilités et de la Statistique [electronic only]* 2.1b, Article–1.
Perga, A. of (1896). *Treatise on Conic Sections*. Trans. by T. L. Heath. Greek text with English translation. Cambridge: Cambridge University Press.
Peripatetic School (circa 4th century BCE). *Mechanical Problems*. Traditionally attributed to Aristotle, though likely compiled by later members of the Peripatetic school. Problem 3 possibly reflects the thought of Archytas of Tarentum.
Perret, A. (1952). *Contribution à une théorie de l’architecture*. Paris: Cercle d’études architecturales.
Perronet, J.-R. (1782). *La construcción de puentes en el siglo XVIII*. Spanish translation. Reverte.
– (1782–1788). *Description des projets et de la construction des ponts de Neuilly, de Mantes, d’Orléans et autres*. 2 vols. with 67 engraved plates. Available at https://archive.org/details/chepfl-lipr-axd-20-01. Paris: Imprimerie Royale.
Petroski, H. (1997). “Engineering: Santiago Calatrava”. In: *American Scientist* 85.2, pp. 114–118.
Philoponus, J. (1993). *Philoponus: On Aristotle Physics 4.1–5*. Ed. by R. Sorabji and C. Wildberg. Trans. by C. Wildberg. Ancient Commentators on Aristotle. London: Duckworth.
Piccardi, L. (2007). “The AD60 Denizli Basin Earthquake and the Apparition of Archangel Michael at Colossae”. In: *Myth and Geology*. Ed. by L. Piccardi and W. B. Masse. London: Geological Society, pp. 95–105.
Picon, A. (1988). “Navier and the introduction of suspension bridges in France”. In: *Construction History* 4, pp. 21–34.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Pierrefeu, F. de and L. Corbusier (1942). *La maison des hommes*. Plon.
Piola, G. (1833). "La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni". In: *Opuscoli Matematici e Fisici di Diversi Autori* 1, pp. 201–236.
Pisano, R., J. Coopersmith, and M. Peake (2021). *Essay on Machines in General (1786)*. Vol. 47. Springer.
Pizzigoni, A. (2015). "Brunelleschi's Bricks". In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 56.2, pp. 137–148.
Plato (350 BC). *Laws*. Composed ca. 350 BCE. Online editio. Tufts University: Perseus Digital Library.
Pliny the Elder (1906). *Naturalis Historia*. Ed. by K. Mayhoff. Leipzig: Teubner.
Poincaré, H. (1905). *Science and hypothesis*. London: Walter Scott Publishing CO., LTD.
Poisson, S. D. (1829). "Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques". In: *Mémoires de l'Académie des Sciences* 8, pp. 357–570.
Poisson, S. D. (1831). "Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques". In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* 10, pp. 549–605.
Poleni, G. (1748). *Memorie Istoriche Della Gran Cvpola Del Tempio Vaticano, E De'Danni Di Essa, E De'Ristoramenti Loro, Divise In Libri Cinqve*. Nella Stamperia del seminario.
Pollalis, S. N. (1999). *What is a bridge? the making of Calatrava's bridge in Seville*. MIT Press.
Pope, T. (1811). *A Treatise on Bridge Architecture: In which the Superior Advantages of the Flying Pendent Lever Bridge are Fully Proved; with an Historical Account and Description of Different Bridges Erected in Various Parts of the World, from an Early Period, Down to the Present Time*. Alexander Niven.
Popovic, O. (1996). "Reciprocal frame structures". PhD thesis. University of Nottingham.
Popovic Larsen, O. (2014). "Reciprocal frame (RF) structures: real and exploratory". In: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 119–134.
Povoledo, E. (2023). "A High-Maintenance Relationship for 637 Years, but Milan's Duomo Is Still Adored". In: *The New York Times*.
Powell, G. (2008). "Structural analysis: Are we relying too much on computers? Part 1: The problem". In: *Structure Magazine*, pp. 50–52.
Przemieniecki, J. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Reprinted by Courrier (formerly Dover). New York: McGraw-Hill.
Pugnale, A. and M. Sassone (2014). "Structural reciprocity: critical overview and promising research/design issues". In: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 9–35.
Quasimodo, S. (1958). "Al padre". In: *La terra impareggiabile*. Written for the 90th birthday of Gaetano Quasimodo and the 50th anniversary of the Messina earthquake of 28 December 1908. English title: *To My Father*. Milano: Mondadori.
Rankine, W. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*. Charles Griffin and Company.
Rankine, W. J. M. (1862). *A Manual of Civil Engineering*. London: Charles Griffin.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Rasch, B. and F. Otto (1996). *Finding Form: Towards an Architecture of the Minimal*.
Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
Rega, G. (2013). "Mechanics and Architecture: Nervi's Creative Knowledge Versus The Unsolved Contemporary Complexity". In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 54.2-3, pp. 243–252.
Renn, J., P. Damerow, and P. McLaughlin (2002). "Aristotle, Archimedes, Euclid, and the origin of mechanics: The perspective of historical epistemology". In: *Symposium Arquımedes, edited by José Luis Montesinos Sirera*, pp. 43–59.
Ribon, M. (1999). *Esthetique de la Catastrophe*. Editions Kime.
Rice, J. (1968). "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks". In: *J. Applied Mechanics* 35, pp. 379–386.
Richards, E. G. (1998). *Mapping Time: The Calendar and Its History*. Oxford University Press.
Richardson, L. (Feb. 1911). "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam". In: *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A*. 210, pp. 307–357.
Ritz, W. (1909). "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik." In: *Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York*.
Robertson, L. E. (2017). *The Structure of Design: An Engineer's Extraordinary Life in Architecture*. The Monacelli Press, LLC.
Robins, G. and C. Shute (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text*. Transcription, translation, and commentary on EA 10057–10058. London: British Museum Press.
Robson, E. (2001). "Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322". In: *Historia Mathematica* 28.3, pp. 167–206.
– (2002). "Words and Pictures: New Light on Plimpton 322". In: *American Mathematical Monthly* 109.2, pp. 105–120.
Roebling, W. A. (1877). *Report of the Chief Engineer of the New York and Brooklyn Bridge*. Annual report to the directors of the New York Bridge Company.
Rousseau, J.-J. (1967). "Lettre à M. de Voltaire [sur la Providence]". In: *Correspondance complète de Jean-Jacques Rousseau*. Ed. by R. A. Leigh. Vol. 4. Written 18 August 1756. Also known as *Lettre sur la Providence*. Genève: Institut et Musée Voltaire, pp. 37–50.
Sader, H. (2019). *The Phoenicians: A History*. Princeton: Princeton University Press.
Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1855a). "Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément". In: *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France* 14. Presented 1853; published 1855, pp. 233–560.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1864). “Mémoire sur l’établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l’élasticité pourrait les ramener à leur premier état”. In: *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* 70, pp. 473–480.

Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1855b). *Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l’équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s’exerçant simultanément*. Vol. 14, pp. 233–560.

Saint-Venant, B. de (1855c). “Mémoire sur la flexion des prismes rectangulaires”. French. In: *Mémoires présentés par divers savants à l’Académie des Sciences de l’Institut de France* 14. Reprinted in *Mémoires de Mécanique*, Paris: Gauthier-Villars, 1883, pp. 233–560.

Salençon, J. (2018). “The Emergence of the Principle of Virtual Velocities”. In: *Virtual Work Approach to Mechanical Modeling*. London: ISTE Press – Elsevier. Chap. 1, pp. 1–18.

Salencon, J. (Mar. 2017). *Equilibrium and Forces: from Aristotle to Lagrange*.

Saliklis, E. and J. Parker (2014). “The Maney-Goldberg Method: An Iterative Method Lost in the Mists of Time”. In: *Proceedings of the IASS-SLTE 2014 Symposium “Shells, Membranes and Spatial Structures: Footprints”*. Ed. by R. Brasil and R. Pauletti. IASS. Brasilia, Brazil.

Saouma, V. E. and C. Barton (Apr. 1994). “Fractals, Fractures and Size Effects in Concrete”. In: *Journal of Engineering Mechanics of the American Society of Civil Engineers* 120.4, pp. 835–854.

Saouma, V. E. and G. Fava (2006). “On Fractals and Size Effects”. In: *International Journal of Fracture* 137, pp. 231–249.

Saouma, V. E., D. Natekar, and E. Hansen (2003). “Cohesive Stresses and Size Effects in Elasto-Plastic and Quasi-Brittle Materials”. In: *International Journal of Fracture* 119, pp. 287–298.

Saouma, V. E. and L. Perotti (2004). *Constitutive Model for Alkali Aggregate Reaction*. Tech. rep. Bienne, Switzerland: Report No. 2, Submitted to the Swiss Federal Agency of Water and Geology.

Saxony, A. of (1988). *Quaestiones super libros Physicorum Aristotelis*. Ed. by A. Maier. Critical Latin edition. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Schmaltz, T. M. (2003). “Cartesian causation: body–body interaction, motion, and eternal truths”. In: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 34.4, pp. 737–762.

Schmandt-Besserat, D. (1992). *Before Writing, Vol. I: From Counting to Cuneiform*. Austin: University of Texas Press.

Schrama, W. (2021). “A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames”. In: *TU Delft, Civil Engineering*. Bachelor Thesis.

Seabrook, J. (Nov. 2001). “The Tower Builder”. In: *New Yorker* 36.

Sebregondi, G. C. and R. Schofield (2016). “First Principles: Gabriele Stornaloco and Milan Cathedral”. In: *Architectural history* 59, pp. 63–122.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Seidel, P. L. (1873). *Ueber ein verfahren, die gleichungen, auf welche die methode der kleinsten quadrate führt, sowie lineäre gleichungen überhaupt, durch successive annäherung aufzulösen*. Vol. 11. Verlag d. Akad.

Serlio, S. (1996). *Sebastiano Serlio on Architecture, Volume I*. Ed. by V. H. Veen and P. Hicks. Yale University Press.

Serrano, I. M. and B. D. Suceavă (2017). "A Medieval Mystery: Nicole Oresme's Concept of Curvitas". In: *The Best Writing on Mathematics 2016*. Princeton University Press, pp. 238–248.

Shakespeare, W. (1597). *Romeo and Juliet*. First published in 1597; numerous modern editions available.

Sharer, R. J. and L. P. Traxler (2006). *The Ancient Maya*. 6th. Stanford University Press.

Shelby, L. (1972). "The Geometrical Knowledge of Mediaeval Master Masons". In: *Speculum* 47.3, pp. 395–421.

Shelden, D. R. (2002). "Digital surface representation and the constructibility of Gehry's architecture". PhD thesis. Massachusetts Institute of Technology.

Shukla, D. (1993). *Vaastu Shastra: Principles of Ancient Architecture*. Institute of Indology.

Smith, M. E. (1996). *The Aztecs*. Blackwell Publishing.

Smits, G. (2006). "Shaking Up Japan: Edo Society and the 1855 Catfish Picture Prints". In: *Journal of Social History* 39.4, pp. 1045–1078.

Southwell, R. V. (1935). "Stress-calculation in frameworks by the method of" systematic relaxation of constraints"—I and II". In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 151.872, pp. 56–95.

Spinoza, B. d. (1670). *Tractatus Theologico-Politicus*. Published under the pseudonym "Operibus Posthumis"; quoted from the translation of R. H. M. Elwes (1883), Preface. Hamburg: Henricum Künraht.

Stevin, S. (1586). *De Beghinselen der Weeghconst*. English translation: *The Principal Works of Simon Stevin*, ed. E. J. Dijksterhuis, C. V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, 1955. Leiden: Christoffel Plantijn.

– (1955–1966). *The Principal Works of Simon Stevin*. Ed. by D. J. Struik. Vol. 5 volumes. Mathematics, Engineering, Navigation, Fortification, Optics, Architecture, Music. Amsterdam: C. V. Swets & Zeitlinger.

– (1987). *Les oeuvres mathématiques. Augmentées par Albert Girard*. chez Bonaventure & Abraham Elsevier, imprimeurs ordinaires de l'Université.

Strang, G. and G. J. Fix (1973). "An analysis of the finite element method(Book- An analysis of the finite element method.)" In: *Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1973. 318 p.*

Straub, H. (1952). *A History of Civil Engineering*. London: Leonard Hill.

Sugimoto, K. (2008). "Earthquake-Resistant Design in Japanese Pagodas: A Historical Perspective". In: *Journal of Japanese Architecture* 12.3, pp. 45–67.

Sullivan, L. (Mar. 1896). "The tall office building artistically considered". In: *Lippincott's Monthly Magazine*.

 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Sundaram, M. and G. K. Ananthasuresh (2009). *Gustave Eiffel and his Optimal Structures*. Vol. 14. 9. Indian Academy of Sciences, pp. 846–855.
Swanson, J. A. (1971). *ANSYS Engineering Analysis System*. Tech. rep. Pittsburgh: Swanson Analysis Systems.
Szabó, I. (1977). *Geschichte der mechanischen Principien*. In German; comprehensive history. Basel: Birkhäuser.
Thacker, B. et al. (2004). *Concepts of Model Verification and Validation*. Tech. rep. LA-14167. Los Alamos National Laboratory.
The Baltimore Sun (1979). "Pier Luigi Nervi, famed architect, dies in Italy". In: *Proquest Historical Newspapers*.
The Economist (July 2025). "How the Gulf's rulers want to harness the power of science". In: *The Economist* 449.9311. Accessed: 2025-01-12, pp. 20–23.
The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments (1611). Authorized King James Version. London: Robert Barker, Printer to the King.
Thomson, W. (1848). "On an Absolute Thermometric Scale Founded on Carnot's Theory of the Motive Power of Heat". In: *Philosophical Magazine* 33, pp. 313–317.
– (1851). "On the Dynamical Theory of Heat, with Numerical Results Deduced from Mr Joule's Equivalent of a Thermal Unit, and M. Regnault's Observations on Steam". In: *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 20, pp. 261–288.
Thomson, W. L. K. (1855). "On the Thermoelastic, Thermomagnetic, and Pyroelectric Properties of Matter". In: *Philosophical Magazine* 5, pp. 4–27.
Thrall, A., D. Billington, and K. Bréa (2012). "The Maria Pia Bridge: A major work of structural art". In: *Engineering structures* 40, pp. 479–486.
Timoshenko, S. P. (1953). *History of Strength of Materials*. New York, U.S.A: McGraw-Hill.
Timoshenko, S. and J. Goodier (1970). *Theory of Elasticity*. McGraw Hill.
Timoshenko, S. P. and J. M. Gere (1976). *Mechanics of Materials (Strength of Materials)*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.
Todhunter, I. and K. Pearson (1893). *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*. Two volumes, Edited and completed by Pearson, K. Cambridge University Press.
Toomer, G. J. (1998). *Ptolemy's almagest*. Princeton University Press.
Torricelli, E. (1644). *Opera geometrica*. Latin. Contains *De sphaera et solidis sphaeralibus*, *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum*, and *De dimensione parabolae*. Florence: Amadoro Massa & Lorenzo de Landis.
Torroja, E. (1962a). "Hipódromo de la Zarzuela". In: *Informes de la Construcción* 14.137, pp. 19–38.
– (1962b). *The Structures of Architecture*. University of California Press.
– (2008). "Razón y ser de los tipos estructurales". In.
Torroja, E. and E. T. Miret (1958). *The structures of Eduardo Torroja: an autobiography of engineering accomplishment*. FW Dodge Corporation.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Torroja, E., J.-J. Polivka, and M. Polivka (1958). *Philosophy of structures*. Univ of California Press.

Truesdell, C (1960). *The Rational Mechanics of Flexible Or Elastic Bodies 1638-1788: Introduction to Vol. X and XI of Leonhardi Euleri Opera Omnia*. This is the the definitive print source for Euler's works. Publication began in 1911, growing to scores of volumes comprising nearly all of Euler's works. Birkhäuser and the Euler Commission of Switzerland.

Truesdell, C. (1968). *Essays in the History of Mechanics*. Springer.

– (1976). "History of classical mechanics". In: *Naturwissenschaften* 63.2, pp. 53–62.

Truesdell, C. and W. Noll (1965). "The Non-Linear Field Theories of Mechanics". In: *Handbuch der Physik*. Ed. by S. Flügge. Vol. III/3. Berlin: Springer.

Turnbull, S. (2003). *Japanese Castles 1540-1640*. Osprey Publishing.

Turner, M. J. et al. (1956). "Stiffness and deflection analysis of complex structures". In: *journal of the Aeronautical Sciences* 23.9, pp. 805–823.

Turner, M. (1959). *The direct stiffness method of structural analysis*. Tech. rep. Technische Hockschule, Aachen, Germany.

Van Musschenbroek, P. (1729). *Physicae experimentales, et geometricae, de magnete, tuborum capillarium vitreorumque speculorum attractione, magnitudine terrae, cohaerentia corporum firmorum dissertationes: ut et ephemerides meteorologicae Ultrajectinae*. apud Samuelem Luchtmans.

Varignon, P. (1725). *Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII*. Vol. 2. chez Claude Jombert.

Vashy, A. (1892). "Sur les Lois de Similitude en Physique". In: *Annales Télégraphiques* 19, pp. 25–28.

Venezia, F. (1989). "Base: A Museum: Homage to Gibellina Vecchia, 1985: Gibellina Nuova, Sicily". In: *Perspecta* 25, pp. 202–215.

Vergilius Maro, P. (2008). *The Aeneid*. Trans. by C. Day Lewis. With an intro. by J. Griffin. Oxford World's Classics. Translation first published: London, Hogarth Press, 1952. Oxford: Oxford University Press.

Vesalius, A. (1998–2009). *On the Fabric of the Human Body: A Translation of De Humani Corporis Fabrica Libri Septem*. Trans. by W. F. Richardson and J. B. Carman. Vol. 5 volumes. English translation of the 1543 edition. San Francisco: Norman Publishing.

Vignola, G. B. da (1969). *Canon of the Five Orders of Architecture*. Dover Publications.

Vinci, L. da (1881). *Les Manuscrits de Léonard de Vinci*. Manuscripts A–M, c. 1490–1519. Paris: Institut de France.

– (1938). *The Notebooks of Leonardo da Vinci*. New York: Reynal & Hitchcock.

Viola, E., L. Panzacchi, and F. Tornabene (2004). "Structural Analysis of Historical Masonry Arches". en. In: *Restoration, International Conference of Restoration, Recycling and Rejuvenation Technology for Engineering and Architecture Application*. Cesena, Italy, pp. 7–11.

Viollet-le-Duc, E.-E. (1854). *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle*. Vol. 1. Bance.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Viollet-le-Duc, E.-E. (1875). *Discourses on Architecture*. Translated from the French by Benjamin Bucknall. Boston: Ticknor and Company.
Virlogeux, M. (2001). “Bridges with multiple cable-stayed spans”. In: *Structural Engineering International* 11.1, pp. 61–82.
Virlogeux, M. et al. (2005). “Millau Viaduct, France”. In: *Structural Engineering International* 15.1, pp. 4–7.
Vitalis, L. (Sept. 2021). *Pier Luigi Nervi, l’architecture biomimétique avant la lettre ?* Rapport de recherche hal-03359251. MAP – Modèles et simulations pour l’Architecture et le Patrimoine.
Vitruvius (1960). *The Ten Books on Architecture*. Dover.
Vitruvius and M. H. Morgan (1914). *The Ten Books on Architecture*. Harvard University Press.
Voigt, W. (1898). *Die fundamentalen Eigenschaften der Krystalle. 243 pp.*
Voigt, W. (1910). *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: Teubner.
Voltaire [Arouet, F.-M. (1759). *Candide, ou l’Optimisme, traduit de l’allemand de Mr. le Docteur Ralph*. Published without author’s name or place of publication. First edition; priority of the Cramer Geneva printing (299 pp.) established by Gagnebin (1952) and confirmed by Wade and Barber. *Printing and the Mind of Man*, no. 204. [Genève]: [Gabriel Cramer], p. 299.
– (2009). “Poème sur le désastre de Lisbonne, ou Examen de cet axiome : Tout est bien”. In: *Œuvres complètes de Voltaire*. Ed. by D. Adams and H. T. Mason. Vol. 45A. Written December 1755; first authorised edition Geneva: Cramer, 1756. 180 lines. Oxford: Voltaire Foundation, pp. 315–360.
Wagner, D. L. (1983). *The Seven Liberal Arts in the Middle Ages*. Collection of essays covering each of the seven liberal arts and their historical development. Bloomington: Indiana University Press.
Wakamizu, S. (2003). *Namazu wa Odoru*. Tokyo: Bungeisha.
Wallis, J. (1670). *Mechanica, sive de Motu Tractatus Geometricus*. London: Guliemi Godbid.
– (1695). *Opera mathematica*. Oxford University Press.
Wassell, S. R. (2008). “Andrea Palladio (1508-1580)”. In: *Nexus Network Journal* 10, pp. 213–226.
Webster, J. (2001). “Haydn’s *Seven Last Words*: An Introduction”. In: *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. Ed. by S. Sadie. 2nd ed. Vol. 11. London: Macmillan, pp. 171–173.
Weidman, P. (2009). “Modified shape of the Eiffel Tower determined for an atmospheric boundary-layer wind profile”. In: *Physics of Fluids* 21.6, p. 067102.
Westfall, R. S. (1980). *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press.
Whiteside, D. T. (1969). *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume V: 1683–1684*. Editor and commentary by Derek T. Whiteside. Cambridge: Cambridge University Press.

 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Wilkes, M. V. (1951). “The EDSAC”. In: *Journal of the British Institution of Radio Engineers* 11, pp. 327–331.
Willis, R. (1842). “On the Construction of the Vaults of the Middle Ages”. In: *Transactions of the Royal Institute of British Architects, I*.
– (1910). *On the construction of the vaults of the Middle Ages*. Royal Institute of British Architects.
Wilson, E. L. (1969). *SAP: A General Structural Analysis Program*. Tech. rep. Berkeley: University of California, Berkeley.
Wilson, E. (1960). “Matrix Analysis of Nonlinear Structures”. In: *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa.*
Wilson, E. and R. Clough (1962). “Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis”. In: *Proc. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering*. Laboratorio Nacional de Engenliaria Civil, Lisbon, Portugal.
Winchurch, M. E. (2007). *The Art of Thin Shell Design: A Comparison of Eduardo Torroja and Pier Luigi Nervi*. Undergraduate Thesis in the Department of Civil and Environmental Engineering.
Winkler, E. (1875). *Theorie der Brücken. Aeussere Kräfte gerader Träger*. German. 2nd ed. Vorträge über Brückenbau 1. [Theory of Bridges: External Forces on Straight Beams]. Wien: Carl Gerold’s Sohn.
Wisner, B. et al. (2004). *At Risk: Natural Hazards, People’s Vulnerability and Disasters*. 2nd ed. London: Routledge.
Wittkower, R. (1944). “Principles of Palladio’s Architecture”. In: *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes* 7.1, pp. 102–122.
Wolfe, M. I. and R. Mark (1976). “The collapse of the vaults of Beauvais Cathedral in 1284”. In: *Speculum* 51.3, pp. 462–476.
Wolfram, S. (1988). *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Redwood City, CA: Addison-Wesley.
Wuhrmann, S. (1994). “Le Tremblement de Terre entre Peinture de Genre et Peinture d’Histoire”. In: *Art + Architecture en Suisse* 45.4, pp. 330–339.
Wulff, H. E. (1968). “The Qanats of Iran”. In: *Scientific American* 218.4, pp. 94–105.
Young, T. (1807). *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*. Vol. 1. Lecture XXXIX, p. 463. London: Joseph Johnson.
Zammattio, C. (1980). *Leonardo the Scientist*. McGraw-Hill.
Zienkiewicz, O. (1967). *The Finite Element in Structural and Continuum Mechanics*. First. McGraw-Hill, London.
Zienkiewicz, O. and Y. K. Cheung (1964). “Buttress Dams on Complex Rock Foundations”. In: *Water Power* 16, p. 193.
– (1965). “Stresses in Buttress Dams”. In: *Water Power* 17, p. 69.
Zienkiewicz, O. and R. Taylor (2000). *The finite element method: Solid mechanics*. Vol. 2. Butterworth-heinemann.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ग्रंथ I के संदर्भ

Zixuan, C., C. Jixun, and Z. Zhigang (2018). “Curvature and Its Application in Huygens Isochronous Pendulum”. In: *2018 IEEE International Conference of Safety Produce Informatization (IICSPI)*. IEEE, pp. 661–666.

अप्रकाशित प्रति

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

Libro di diversi terremoti, 677

Pont des Invalides, 178

abacus, 450
ABAQUS, 445
Abbasid Caliphate, 87
Académie des Sciences, 174
Academia Scientiarum Imperialis Petropolitana, 166
Academy (Plato), 105, 106
Académie des Sciences, 94, 144
Accademia dei Lincei, 93, 138
Academia del Cimento, 93
acceleration, 157
Achaemenid period, 34
Acta Eruditorum, 231, 267, 275, 346
action at a distance, 143
ad quadratum, 555
ad quadratum, 113
ad quadratum, 71, 560
ad triangulum, 71, 113, 555
Additamentum ad Problema Funicularium, 281
Additamentum I: De curvis elasticis, 349
ADINA, 445
aeolipile, 110
aeroelastic analysis, 425
Aesthetics and Technology in Building, 578
aircraft structures, 425
Al-Azhar, 111
Al-Baghdaadi, 481
Al-Biruni, 111
al-Bukhari, 658
Al-Hakim bi-Amr Allah, 111
Al-Khazin, 112
Al-Khwarizmi, 87
Kitāb al-mukhtaṣar, 15
Al-Ma'mun, 87
Al-Mayl, 480
Alberti, Leon Battista, 107, 114, 541, 550
  definitor, 550
Alexander the Great, 105
Alexandria, 106–108, 110
Alhazen, 111
Altissimum planetam tergeminum observavi, 138
American Society of Mechanical Engineers (ASME), 382
Ammann, Othmar, 586
anagram, 148, 193
Anagrams and ciphers, 138, 148, 149, 155, 193
analysis, 169
analytical
  mechanics, 174
Ananta, 654
anatomical
  observation, 92
anatomical revolution, 92
Andreas Vesalius, 92
Anfangsgründe der Mathematik, 257
Anguttara Nikaya, 655
anisotropy, 377
Ansei Edo earthquake, 638
Ansei Kenmonroku, 639
Anthemius of Tralles, 678
anthropometry, 548, 553
anthropomorphic, 465
Apollo, 650, 651
Apollonius (son of Apollonius of Perga), 108
Apollonius of Perga, 108
applied mechanics, 381
Arab-Islamic
  iwan, 36
  muqarnas, 36
  qanāt, 36
Arab-Islamist

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

Al-Khwarizmi, 37
Córdoba, 36
Omar Khayyam, 37
Arcetri, 140
arch, 109
Etruscan, 42
Persia, 34
Roman, 41
Archimedes, 107, 112, 475
Archimedes Palimpsest, 108
Archimedis, 38
Archippus, 652
Architect
Candela, 612
Gehry, 613
Otto, 597
Saarinen, 596
architect-engineer, 380
architecte, 380
Architecton, 688
architects
Paladio, 44
Phidias, 18
Vitruvius, 42
Archive for Rational Mechanics and Analysis, 382
Archytas, 38
arcitect
Gaudi, 595
Argyris, John, 424
Aristotelian
grip, 89
mechanics, 153
Aristotle, 89, 106, 111, 473
Arroyo Parida fault, 682
artificial intelligence, 630
arşin, 560
assembly by superposition, 430
astronomical
observation, 90
astronomy, 90
Aswan, 111
Athena, 649
Automata, 110
axiom, 107
axiomatic field theory, 385
Aztec
world-ages, 683

Baalbeck, 47
Baalbek, 688
Babbage, 454
Babylonians, 15, 16
Bach, J.S., 687
Bacon, Francis, 89, 133
Bacon, Roger, 111
Baghdadi, 481
Baixa, Lisbon, 671
Baja California, 682
Baker, William, 621
balance, 112
laws, 352, 370, 385, 388
Bandel, Hannskarl, 596
Banu Musa, 87
Basel, 160, 165, 166
harvest festival, 287
mathematical school, 161
Basra, 110
Bayt al-Hikma, 87
beam
bending, 187
cantilever, 137
cantilevered, 221
deflection, 170
equation, 389
Beeckman, Thomas, 221
Beghini, Alessandro, 622
Belice Valley, 678
Bellarmine, Robert, 139
Belopoeica, 110
bending, 182
moment, 266, 311
unsymmetrical sections, 183
Benedetti, 485

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

Benouville, Léon, 64
Benvenuto, Edoardo, 475
Berkeley, 458
Bernoulli
  Daniel, 163, 266, 334, 509
  Family, 160
  Jakob, 161, 239, 253, 266, 312, 334, 347
  Johann, 163, 252, 266, 307, 342, 502, 510
Bibliotheque nationale de France, 113
Bihar earthquake, 1934, 654
Billington, David P., 626
BIM, 461
biomechanics, 445
biomimetic architecture, 582
blood circulation, 92
Bodhi tree, 655
Bossut, Charles, 235
Botero, 684
boundary value problem, 306, 384
Boyle, Robert, 94
brachistochrone, 163, 299
Brahe, Tycho, 90, 154
bridge
  Alamillo, 614
  Alcantara, 42
  Alexandre III, 568
  Anji, 45
  Bosphorus, 36
  Brooklyn, 592
  Darius, 34
  dell'Academia, 548, 549
  du Gard, 127
  Hellespont, 36
  invalides, 178
  Königsberg, 169
  Menai, 176
  Millau, 623
  Morandi, 586
  Navier, 176
  Neuilly (de), 131
  Pont des Invalides, 178
  Pont du Gard, 42
  Ponte Maria Pia, 569
  Salginatobel, 573
  Shushtar, 34
  Sunniberg, 587
  Tacoma Narrows, 165
  Telford, 178
  Vieille-Brioud, 131
  xerxes, 34
Brumel, A., 687
Bruneleschi, 76, 78
Bruno, Giordano, 494
brutalism, 573
Bubnov–Galerkin method, 432
buckling, 170
Buddha, 655
Buddhism, 655
bundled tube, 587
Buonarroti, Michelangelo, 74
buoyancy, 108, 112
Buridan, Jean, 482
Burj Khalifa, 622
Burri, Alberto, 678
Buyid dynasty, 110
Byzantine Empire, 112

cable-stayed bridge, 623
Cairo, 111
Calatrava, Santiago, 614
calculus, 169, 266
  invention, 154
  variations, 167, 170, 266
Cambridge tripos, 354
Candela, Félix, 612
capcity-demand, 228
Capuana, L., 676
Caravaggio, M., 100, 245, 351, 390, 449, 528, 634
Carnot's theorem (impact), 524
Carnot, Lazare, 523
Cartesian coordinates, 142
Cascadia suduction, 640

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Castiglian, Alberto, 170
Castigliano, Alberto, 397, 425
  theorems, 397
catenaria, 274
catenary, 163, 266, 270, 594
  Bernoulli, Jakob, 275
  Galileo, 271
  Huygens, 272
  Leonardo, 270
  Stevin, 272
catenoid, 595
catfish, 637
cathedral
  Beauvais, 61
    1284 collapse, 63
    1573 collapse, 65
    astronomical clock, 61
  dimensions, 49
  Duomo of Milan, 68
  Gothic, 48
  notable, 49
  Santa Maria del Fiore, 78
  St Peter, 74
CATIA software, 613
Catoptrica, 110
Cauchy
  stress tensor, 371
Cauchy, Augustin-Louis, 180, 305, 352, 361
  equations of motion, 371
  stress principle, 371
  stress tensor, 362
  tetrahedron, 362
  theorem, 363
Celebre catenariae problema, 349
center of gravity, 105, 106, 108, 112
  Torricelli's principle, 503
chain model, 75
Champollion, Jean-François, 20
Chartres, 113
du Châtelet, Emilie, 515
chevet, 52
China
  Hampi, 46
  Khajuraho, 46
Chumash Painted Cave, 682
chymistry, 155
du Châtelet, Émilie, 192
Cicero, 107
cipher, 193
civil engineer, 381
Clapeyron, Benoît, 395
classical orders, 125
classification
  Greek, 40
Clausius, 370, 372
Clausius-Duhem inequality, 373
Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred, 238, 402
clootcrans, 488, 512
Clough, Ray W., 428, 436
Codex, 117
  Madrid, 224
Cogito, ergo sum, 142
Coleman, Bernard, 370, 378
Collegium Experimentale sive curiosum, 161
column
  buckling, 187, 266
Comité Européen du Béton, 576
Commentarii Academiae Petropolitanae, 167
Compagnie des Établissements Eiffel, 570
computation, advent of, 421
computational
  mechanician, 383
  methods, 421
conchoid, 80
concinnitas, 542
concrete, 545
Condoglia marble, 70
conic sections, 108
Conon of Samos, 107

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

Consagra, P., 680
Consagra, Pietro, 680
conservation
  laws, 370
  mass, 352, 370
  of motion, 143
constitutive
  relations, 352, 364, 388
  theory, 374, 385
constraints
  inequality, 523
  unilateral, 523
continuity equation, 370
continuum mechanics, 181, 191, 266, 352, 380
  general formulation, 353
  mathematical foundations, 352
  modern, 382
  synthesis, 388
coordinate
  system
    zodiac, 14
  transformation, 430
Copernicus, Nicolaus, 90, 134
Corps des Ponts et Chaussées, 174, 178
Corrao, L., 688
Corrao, Ludovico, 679
Coulomb, Charles-Augustin de, 171, 233, 359, 362, 444
Courant, Richard, 433
Cramer, Gabriel, 347
creep, 384
Cretto, Grande, 679
Cross, Hardy, 404
crystal lattices, 377
Cueva de la Serpiente, 682
Culmann, Carl, 572
Culmann, Karl, 183
cuneiform, 13, 14, 18
  Yale Babylonian Collection 7289, 13, 14
Curator of Experiments, 146
Curie family, 160
Curvatura Laminae Elasticae, 162, 348
Curvatura radii in diaphanis non uniformibus, 348
curvature, 247, 267, 269, 305
  Bernoulli, Jakob, 253
  Bernoulli, Johann, 252
  Kästner, 257
  Leibniz, 251
  Newton, 249
  Oresme, 248
cycloid, 267
cycloidal pendulum, 144

d'Alembert's principle, 179
d'Alembert, Jean le Rond, 179, 306
  principle, 515, 518
da Vinci, Leonardo, 114, 219, 224, 270, 484, 550
  Architect, 118
  Engineer, 117
  notebooks, 116
  Vitruvian Man, 550
dams
  finite element analysis, 438
  stress analysis, 421
Darcy, Henry, 444
De Architectura, 44, 109, 534
De Beghinselen der Weeghconst, 135
De Honnecourt, V., 85
De Humani Corporis Fabrica, 92
De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, 348
De Lucchi, M., 688
De motu corporum in gyrum, 154
De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum, 138, 503
De Planorum Aequilibriis (Archimedes), 475
De ratione ponderis, 481
De Re Aedificatoria, 114, 541

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

De Revolutionibus Orbium Coelestium, 134, 139
deductive reasoning, 106
deformation, 374
  consistent, 399
della Porta, Giovanni Battista, 110
Della Scienza Meccanica, 138
delta wing problem, 426
density measurement, 111
Descartes, René, 90, 142, 267, 271, 476, 496
detrusion, 236
di giro in giro, 78
Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano, 139
Dialogue Concerning the Two Chief World Systems, 220
Die Graphische Statik, 183
Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 398
differential
  calculus, 164
  equations, 269
diffusion, 443
dimensional analysis, 141
Dioptra, 110
Diplom-Ingenieur, 382
Dirac, P., 636, 649, 654, 677, 689
Dirac, Paul, 526
Discorsi (Galileo), 491
Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali, 137, 140
Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali, 348
Discours de la méthode, 142
Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences, 219
displacement
  method, 401, 425
dissipation inequality, 373
dome, 109
  Arab-Islamic, 36
Dositheus of Pelusium, 107
Dreyfuss, Henry, 554
Dugas, René, 190
Duhem, Pierre, 370, 372
Durer
  Melencolia, 24
dynamic, 138, 144
  analysis, 439
  temporal discretization, 423

e pur si muove, 140
earth pressure, 185
earthquake, 15
  mythology, 683
earthquake-resistant design
  earliest Western, 677
Ebisu, 637
Echidna, 652, 653
École
  Génie de Mézières, 97
  Polytechnique, 173, 174, 180, 202, 359, 381
  Ponts et Chaussées, 97, 176, 182, 202, 358, 381
Egypt, 27
  hypostyle hall, 28
  Imhotep, 28
  Karnak temple, 28
  mastaba, 27
Egyptians, 15, 20
Eiffel, Gustave, 568
Einstein, Albert
  on the Modulor, 554
elastic
  body, 381
  curve, 170

विषय सूची — भाग I: इतिहास

energy, 297
hypothesis, 333
resistance, 329
elastica, 162, 164, 246, 274
nine species, 316, 318
elastician, 382
élasticité, 381
elasticity, 175, 185, 190, 275, 380
continuum theory, 352
molecular theory, 352
paradigm shift, 352
theory, 187, 189, 382
electrical conduction, 443
Elementa Physicae, 222
Elementa super demonstrationem ponderum, 481
The Elements, 17, 106, 267
elephant, cosmic, 653
Elixir of Life, 155
ellipse, 108, 109
elliptic
functions, 319
integrals, 275, 316
Elzevir, 96, 140
Empedocles, 471
empirical
design, 113
method, 133
Enceladus, 649
enciphered Latin, 148
Encyclopédie, 97, 179
energy
balance, 352, 370, 372
Bernoulli's usage, 512
methods, 384, 389
minimization, 306
principles, 352
engineer, 380
etymology, 22
engineering
education, 202, 369
practical, 184
Enlightenment, 96, 163
Enlil, 469
entropy production, 373
equilibrium, 112, 170
condition, 136
equations, 364
On the Equilibrium of Planes, 38
Erasmus program, 166
Eratosthenes, 107
Ergonomics, 554
Escher, M., 265
Essai sur les machines en général (Carnot), 523
Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture, 233
Essays in the history of the theory of structures: In honour of Jacques Heyman, 11
Euclid, 87, 106, 112, 267
Euclid of Megara, 106
Eudemus of Pergamum, 108
Euler, Leonhard, 151, 165, 169, 240, 266, 304, 332
Genuina principia, 342
Methodus inveniendi, 306, 347
Euler-Bernoulli beam theory, 333
Euler-Lagrange equation, 292, 307, 523
Evolute/involute, 259
evolutione describitur, 256
Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus, 92
experimental
mechanics, 138
extrados, 55

fatigue, 384
fault
strike-slip, 682
Fermat's principle, 300
Fermat, Pierre de, 267
ferrocement, 579

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

ferrocemento, 579
Festigkeitslehre, 382
field theory, 383
filament, 220
finite difference method, 421
  mesh discretization, 422
finite element, 323, 384, 432
  generalization, 443
firmitas, utilitas, venustas, 540
firmitas, 539
first principles, 352
five percent, 615
five points of a new architecture, 552
flexibility
  matrix, 410
  method, 186, 399, 430, 431
flexural
  rigidity, 321, 334
fluid mechanics, 443
fluxions, 154, 158, 268
flying buttresses, 53, 60, 113
folio, 117
force, 108, 157, 170, 465
  centrifugal, 145
  equilibrium, 135
  flow, 577
  impressed, 483, 486, 508
  innate, 479, 507
  method, 399, 425, 430
  parallelogram, 486, 487, 508, 516, 519
  parallelogram of, 136
  path, 109
  polygon, 184, 383
  system, 136
  transmission, 111
  versus stiffness method, 442
form
  finding, 593
  follows function, 565, 615
Fourier, Joseph, 359, 444, 523
fourth-order differential equation, 306
fracture mechanics, 384
frame-indifference, 385
free body diagram, 228
French school, 353
  achievements, 388
friction, 474
fulcrum, 232
functional, 294, 306
functionalism, 551
fundamental theorem, 155, 198
funicular polygon, 184
funicularia, 274
Fédération Internationale de la Précontrainte, 576
Föppl, August, 384

gaiola, 672
galenic theory, 92
Galerkin method, 432
  finite element interpretation, 432
Galerkin, Boris, 432
Galilei, Galileo, 92, 136, 137, 219, 270, 271, 345, 361, 490
Gallagher, Richard H., 441
Gandhi, M.K., 654
Gaudi, Antoni, 595
Gauss, Carl Friedrich, 423
Gauss–Seidel iteration, 423
Gautier, Hubert, 126
Gehry, Frank, 613
generalized coordinates, 520
Genuina principia, 266
Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii, 349
geomechanics, 445
Geometria deutsch, 70
geometric motion (Carnot), 524
geometry, 37, 69, 106, 246
  angles, 14
  operative, 555
  seked, 29, 32
  triangles, 15
Germain, Sophie, 192
Gesamtkunstwerk, 71

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Gibellina, 678, 688
di Giorgio Martini, Francesco, 550
Girard, Albert, 231
Goldberg, Joseph Ely, 407
Golden
  rule of mechanics, 492
  theorem, 253, 254
graphical
  methods, 59, 125
  statics, 572
gravitas, 474, 485
gravitas secundum situm, 481, 512
gravity
  specific, 112
Greece
  Archimedis, 38
  Parthenon, 39
  Peripatetic school, 38
  Phidias, 39
  trabeated, 39
Greeks, 15, 22
Green, George, 181, 352, 376
Gregotti, Vittorio, 680
gualandrino, 80
Guggenheim Museum Bilbao, 614
Guidoboni, Emanuela, 678

Hagia Sophia, 678
Hamilton's principle, 303
Hamilton, William, 467
hand calculation, 421
hanging basket, 219
harmony, 542
Harun al-Rashid, 87
Harvey, William, 92
Haydn, J., 687
heaviness, 474
heliocentrism, 90, 139
Hennebique, François, 582
Hero of Alexandria, 110
Hesiod, 648
Heyman, Jacques, 58, 63
Hieron II, 107
Hipparchis, 29
Historia et Origo Calculi Differentialis, 268
History
  mechanics, 10, 11, 190, 191
  strength
    of materials, 10
  strength of materials, 189
  structural engineering, 11
history
  big picture
    historically, 9
    thematically, 8
  coverage approach, 8
  why, 7
History of Strength of Materials, 189
History of the Theory of Elasticity, 189
History of the Theory of Structures, 11
Homer, 648
de Honnecourt, Villard, 69, 71, 113, 550, 600
Hooke's law
  generalized, 378, 384
Hooke, Robert, 95, 146, 380, 444
Horologium Oscillatorium, 144
house arrest, 139
Hrennikoff, Alexander, 433
Hungary, 113
Huygens' Principle, 145
Huygens, Christiaan, 143, 144, 158, 260, 266, 272, 341, 498
hydraulic systems, 110
hydrodynamics, 165
hydrostatics, 107, 111, 112
hyperbola, 108
hyperelasticity, 353, 376
  significance, 388

I Ching, 16
IBM 701, 438
IBM 704, 438
Ibn al-Haytham, 111

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

Ibn-Sinna, 480
Imhotep, 27
impetus, 479
inclination, 479
inclined plane, 135, 493
incorporeal, 479
indeterminate structures, 389
Index Chemicus, 156
Index Librorum Prohibitorum, 139
India
  Iron Pillar of Delhi, 46
  stepwells, 46
inductive reasoning, 133
inertia, 474
infinity
  ∞, 601
influence lines, 186, 409
ingénieur
  17th-18th century, 380
  militaire, 381
  ponts et chaussées, 381
inquisition, 139
Institution of Civil Engineers, 381
Institutions de physique, 514
Instituto Eduardo Torroja, 576
integro-differential equation, 333
intellectual history, 86
internal energy, 372
intrados, 55
Introductio in analysin infinitorum, 168, 269
inverse-square law of attraction, 155
Irons, Bruce M., 444
Islamic Golden Age, 88
Isler, Heinz, 597
ISMES, 582
isoparametric elements, 444
isoperimetric problem, 303, 306
isostatic lines, 579
isotropic materials, 377
isotropy, 377
iterative methods, 423
Jacobovici, S., 647
Jacquier, François, 74
Japan
  Himeji, 46
  shinbashira, 46
Japanese aesthetics, 542
Jerónimo, 675
John Hancock Center, 587
Johnson, K., 464
Jordanus de Nemore, 481
Joséphe, 675
Jung, C. G., 691

Kali Yuga, 654
kaname-ishi, 637
kannazuki, 637
Kant, I., 671, 675
karma, 470, 654
Kashima Shrine, 660
Kepler, 154
  Johannes, 30, 91, 494
  laws, 91
Kepler, Johannes, 111
Khan, Fazlur, 587
Khayyam, Omar, 112
Kimmelman, Michael, 620
kinematics, 190
Kirchhoff, Gustav, 305, 444
Kitab Mizan al-Hikma, 112
Kleist, H. von, 673, 675
knowledge is power., 90
Koechlin, Maurice, 610
Kossakovsky, V., 688
Kozac Collection, 647
Kron, Gabriel, 424
Kästner, Abraham, 257

l'Hôpital, Guillaume de, 300
La Construction la plus avantageuse des digues, 235
La Géométrie, 142
La Hire, Philippe de, 380
La Science des Ingénieurs, 381

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Lagrange
Joseph-Louis, 180, 270, 306, 359, 360, 519
multipliers, 522
Lagrangian, 523
Lambot, Joseph-Louis, 582
lamina, 310
Lamé constants, 378, 389
Lamé, Gabriel, 359, 367
land art, 679
Laon, 113
lateral load resistance, 588
LaTeX, 461
lattice analogy, 433
The laws, 472
Le Corbusier, 551
Modulor, 552
red and blue series, 553
Le Meccaniche, 92
Leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, 174
League of Nations, 572
least action principle, 302
left-handedness, 115
Lehrbuch der Mechanik, 186
Leibniz, G., 157, 159, 251, 266, 268, 342, 505
Leibniz, G.W., 654, 670
Letter to a craftsman, 285
lever, 105, 106, 110
law of, 108
Lever law
Archimedes, 475
Liber Abaci, 15
Libera, Adalberto, 627
Lieberkuhn, C.G., 673
light
Huygens' Principle, 145
lightness, 474
Ligorio, Pirro, 677
limit analysis, 384
line of thrust, 52
linteria, 274
Llunji, Miloš, 629
load
distribution, 109, 116
loads
moving, 409
local details, 68
Longitudinal Challenge, 144, 146
Love, Augustus Edward Hough, 382
loxodrome, 79
Lucasian Professor, 153
lunar eclipse, 110
Lyceum, 105

Macedon, 105
MacNeal, Richard H., 438
Madrilenian rationalism, 576
Mahabharata, 653
Maillart, Robert, 572
major disputes, 200
Manderla, Heinrich, 402
A Manual of Applied Mechanics, 184
Marcellus, 107
Mariotte, Edme, 362
Marmontel, J.-F., 673
mastaba, 27
master mason, 113
material
behavior, 112, 191, 374
failure, 190
frame indifference, 375
strength, 137
symmetry, 352, 375, 377, 385
Mathematica, 460
mathematical
modeling, 134
notation, 169, 269
physics, 352
mathematicians

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

Aryabhata, 16
classical
Al-Biruni, 15
Al-Khwarizmi, 15
Archimedes, 16
Aristarchus, 15
Brahmagupta, 13, 15
Euclid, 17
Euler, 17
Fibonacci, 15
Hipparchus, 15
Leibniz, 16
Ptolemy, 15
Sacrobosco, 15
Thales of Miletus, 15
Descartes, 142
Euler, 165
Fathers Boscovich, 74
Huygens, 143
Jones, W., 17
Lambert, J.H., 17
Le Seur, 74
Leibniz, 157
Lindemann, F., 17
Madhava, 16
Newton, I., 17
mathematics, 89
Euler's identity, 17
Fibonacci numbers, 18
Golden Ratio, 13, 17, 18, 39
Leibniz–Gregory series, 16
mechanics, 38
Pythagorean triples, 14
quadrature of the circle, 17
Rhind Papyrus, 16
superior highly composite number, 13
mathematization, 173, 180, 202
MATLAB, 459
matrix
historical development, 410
partitioning, 430
structural analysis, 424
Maxwell's reciprocal theorem, 188
Maxwell, James Clerk, 187, 396, 425, 444, 604
Mayan
Chichen Itza, 26
Tikal, 26
measurement
braccia, 70
byzantine foot, 556
cubit, 29, 32
earth circumference, 88
historical units, 560
pied de roi, 558
seked, 29
Système international d'unités, 16
Tlacxitl, 32
Meaux, 113
mécanique
Analytique, 180, 306, 360, 519
appliquée, 381
rationnelle, 381
Le meccaniche, 492
Mechanica, sive motus scientia analytice exposita, 166
mechanical
advantage, 105, 110
engineer, 382
Mechanical advantage, 492
The Mechanical Principles of Engineering and Architecture, 187
Mechanical Problems, 38, 106, 110, 466, 475
mechanician, 380
mechanics
general, 381
human body, 116
impact, 111
lever, 38, 45
materials, 380
rational, 162

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

solid, 382
solids, 380
theoretical, 184
mechanistic worldview, 143
Medici, 138
medieval scholasticism, 90
Meditationes CLXX, 348
Meiji government, 662
membrane structures, 597
Mencke, Otto, 281
Mendini, Alessandro, 680
Menelaus of Alexandria, 112
Menn, Christian, 586, 614
Mersenne, Marin, 228, 498
Merv, 112
mesh refinement, 444
Mesoamerica
aztec, 26
cosmological narratives, 683
Mesopotamia, 13
Etemenanki, 25
Ziggurats, 25
Messina disaster, 688
Messina: City Without Memory?, 688
Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, 154, 249
Methodus inveniendi lineas curvas, 167, 307, 349
Methodus universalis determinandae curvaturae fili, 349
Metrica, 110
Mezzogiorno, 678
Michael, Archangel, 652
Michell
Anthony, 605
structures, 606
truss, 605
Micrographia, 95
middle third rule, 237
Mignot, Jean, 72
military engineering schools, 97
Millau Viaduct, 623
mirror writing, 115
Missa Et ecce terrae motus, 687
Mo Jing, 105
modern empiricism, 90
modular construction, 583
Mohist, 45
Mohr's
circle, 186, 365
theorems, 396
unit load method, 186
Mohr, Otto, 186, 365, 396, 425
Mohr-Coulomb criterion, 186
molecular theory, 352
moment, 108
activity (Carnot), 524
curvature relationship, 334
distribution, 404, 452
three-moment equation, 389
momentum
balance, 352, 370, 371
balance (angular), 372
conservation, 143
Monge, Gaspard, 359
Monier, Joseph, 582
monoclinic symmetry, 377
morphogenesis, 593
Moseley, Henry, 187
motion, 170, 474
impetus, 465
pendulum, 144, 260
Mozi, 105
Mucalinda, 655
Muhammad, Prophet, 658
multiphysics analysis, 445
Museion (Alexandria), 108, 110
Muslim ibn al-Hajjaj, 658
Musmeci, Sergio, 598
van Musschenbroek, Peter, 95, 222
Mécanique Analytique, 512
Mémoire sur les lois du mouvement des corps solides, 175
Müller-Breslau

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

Heinrich, 398
principle, 410

nagas, 656
Nahui Ollin, 654
Namazu, 637
NASTRAN, 443
natural philosopher, 380
natural philosophy, 89, 470
Naucrates, 108
Navier, Claude Louis, 174, 352, 366, 394
bridge, 176
Nero, 110
Nervi, Pier Luigi, 578
Nessuna umana investigazione si può dimandare vera scienza s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni, 73
Neufert, Ernst, 554
Neugebauer, Otto, 110
neutral axis, 175, 225
Newmark's method, 440
Newmark, Nathan M., 440
Newton
Isaac, 94, 152, 157, 249, 507
laws, 157
mechanics, 353
third law, 155
Nht, 468
Nile River, 111
Noether, Emmy, 193
Noll, Walter, 375, 378, 382
nonlinear analysis, 439
Nordenson, Guy, 620
Norfork Dam, 438
Norinaga, Motoori, 661
Nouguier, Émile, 610
Nouvelle Mécanique ou Statique, 510, 512
Novum Organum, 133
Nullius in verba, 94, 95
number systems
binary, 13, 16
decimal, 13–16
duodecimal, 13–15
Hindu-Arabic numerals, 15
sexagesimal, 13–15
number theory, 169
Nur, A., 647

objectivity principle, 352, 374, 375
observation, 111
On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames, 396
Opera geometrica, 503
Opera Omnia, 163
operator
variation, 323
Opticks, 94
optimization, 304, 333
opus spicatum, 78
Oresme, 89, 248, 483
orthotropic materials, 377
Otto, Frei, 597

Pacific Northwest
earthquake mythology, 683
Padua, 138
Paladino, Mimmo, 680
Palazzetto dello Sport, 579
Palazzo dello Sport, 579
Pali Canon, 655
Palladio, 107
Palladio, Andrea, 124, 543, 551
Pamphylia, 108
pandemic
architecture during, 620
Pangloss, 674
Pannini, G.P., 213
papyrus
Moscow, 20, 29
Rhind, 20, 29
parabola, 108, 109
parallelogram of velocities, 106
Parent, Antoine, 232, 362
parinirvana, 655

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

partes minutiae, 15
partial differential equation, 443
Pascal, Blaise, 145
Passion according to St. John, 687
Passion according to St. Matthew, 687
Paul III, 140
Paul, Saint, 645
Pearson, Karl, 421
pendulum, 144
  motion, 260
Perga, 108
Pergamum, 108
Peripatetic school, 38, 105, 106, 466
perpetual motion, 113
Perret, A., 573
Persia
  Persepolis, 33, 34, 36
  qanat, 34
Petrarch, 40
phenomenological approach, 352
Phidias (astronomer), 107
Philip, Apostle, 652
Philoponus, 478
philosopher's stone, 155
Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 89, 147, 154, 157, 260, 507
Phoenicians, 13, 21
Phoronomy, 519
photoelasticity, 582
Physicae experimentales, 349
physical model, 75
Picardy, 113
pinnacle, 52, 55
plagiarism, 155
planetary motion, 91
plastic limit analysis, 58
plasticity, 384
Plato, 472
Pliny the Elder, 110
Plotinus, 478
pneumatic devices, 110
Pneumatica, 110
Poisson's ratio, 352
  experimental refutation, 388
Poisson, Siméon, 172
Poisson, Siméon, 305, 359, 365
Poleni, 74
polymath, 350
  Al-Biruni, 15
  Eratosthenes, 107
  Galileo, 140
  Hooke, 95
  Leibniz, 157
  Mersenne, 143
Pombal, Marquis of, 671
Ponte dell'Accademia, 548
Poseidon, 648
Posidonius, 476
Positional gravity, 481
postulate, 107
potential energy, 311
potential-based formulation, 352
pralaya, 654
Prandtl, Ludwig, 384
prefabrication, 583
Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement (Carnot), 523
Principia Philosophiae (Descartes), 142, 228
principle
  continuity, 524
  virtual work, 398, 465, 492, 493, 512
  virtual work Torricelli, 504
Problema funicularium, 348
Problema novum, 348
progettista, 565
progettista, 591
proportion, 542
  geometric tracing, 555
  systems, 543
Provando e riprovando, 93
Przemieniecki, J. S., 442
Ptolemy, 87

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

pulley, 106, 110
Puranas, 653
Purini, Franco, 680
pyramid
  Giza, 28
  saqqara, 27
  Templo Mayor, 27
Pythagorean triangle, 561
Python, 460

quadpartite, 52
Quadratura Curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura, 288
quadrivium, 40
quantity of matter, 482
Quaroni, Ludovico, 680
Quasimodo, S., 676, 677
quaternion, 467
I Quattro Libri dell'Architettura, 44, 124, 543
quinto acuto, 79

Racconto storico della vita di Galileo, 138
radius of curvature, 311
Ramberg–Osgood equation, 439
Rankine, William, 132, 184
Raphael
  School of Athens, 12
Rapport et Mémoire sur les Ponts Suspendus, 176
rational mechanics, 381
Rayleigh, Lord (John William Strutt), 432
Rayleigh–Ritz method, 432
Razón y ser de los tipos estructurales, 575
reciprocal
  diagrams, 187
  theorem, 396
Reformation, 140
Regola delli cinque ordini d'architettura, 125
Reims, 113
reinforced concrete, 583
reinterment, 140
Renaissance
  architectural treatises, 541
research laboratory, 115
Responsio ad Dn. Hugenium, 348
reversible process, 525
revolution
  anatomical, 92
Richardson
  extrapolation, 423
  method, 423
Richardson, Lewis Fry, 421, 422
rigid body, 111
Ritter, Wilhelm, 572
Ritz, Walther, 432
Robertson, Leslie, 619
Romanesque, 49
Rome, 140
  Colosseum, 41
  Pantheon, 42
Roriczer, Matthias, 70
rose, 629
rotational motion, 145
Rousseau, J.-J., 654, 670, 675
Royal Society, 94, 153
résistance des matériaux, 382

Saarinen, Eero, 596
Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento, 94
Sagrada Famiglia, 77
Sagrada Família, 595
Sagredo, 139
Saint-Venant's principle, 183
Saint-Venant, Adhémar, 182, 238, 359, 368
Salginatobel bridge, 573
Salviati, 139
Sanjar, Sultan, 112
Santa Maria del Fiore, 76
Santa Ynez Mountains, 682

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

SAP (Structural Analysis Program), 438
Sarnath, 655
scaling
  laws, 137
  proportion, 44
scholastic method, 90
school of Athens, 39
science, 89
science and religion (separation), 90
scientia est unum et ars est aliud, 73
scientific
  method, 136
  progress, 104
  revolution, 89
scientists
  classical
    Archimedes, 38
    Aryabhata, 46
    Mozi, 45
    Shastra, 45
    Zhang Heng, 45
  Imhotep, 27
Scienza o arte del costruire?, 578
screw, 110, 492
Sears Tower (Willis Tower), 587
Seidel, Philipp Ludwig von, 423
seismic activity
  cultural responses to, 682
Seljuk Empire, 112
Seneca, 110
Serlio, Sebastiano, 125
serpent
  as seismic metaphor, 683
  horned, Baja California, 682
Serra, Richard, 614
Seven Bridges of Königsberg, 169
sexpartite, 52
Shaddai, 469
Shakespeare, 629
Shakespeare, W., 673, 677
Shatapatha Brahmana, 653
shell structures, 575
  hyperbolic, 576
  hyperbolic paraboloid, 612
Shesha, 654
shibusa, 542
shinbashira, 46
Sicily, 678
Sidereus Nuncius, 138
Sierra de San Francisco, 682
Silas, 645
simple machines, 110, 494
Simplicio, 139
sisiutl, 683
size effect, 142
Skidmore, Owings & Merrill, 588, 621
slide rule, 451
slope-deflection method, 403
Smaismrmilmepoetaleumibunenugttauiras, 138
Snell's law, 302
solidity, 229
Solutio problematis catenarii, 348
Solutio problematis de invenienda curva, 349
Solutio problematis funicularii, 348
Southwell, Richard Vynne, 408
Specimen alterum calculi differentialis, 348
Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum, 286
sphere and cylinder, 107
spina di pesce, 78
Spinoza, B., 664
springs, 149
St. Petersburg, 166
stability, 165, 170, 185
  floating bodies, 108
  theory, 384
statically indeterminate structures, 394
statics, 105, 107, 135, 190, 486

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

Archimedis, 38
graphical, 184
Stepped Reckoner, 158
Stevin, Simon, 110, 135, 272, 487
stiffness
global matrix, 430
matrix, 410, 430
method, 401, 402, 431
Stoicism, 478
Stokes, George Gabriel, 382, 444
Stone of the Pregnant Woman, 688
stonemasonry, 69
straightedge and compass, 267
strain, 189, 191, 222
displacement relations, 364
energy, 303, 309, 352
strength, 219
of materials, 116, 185, 190, 382
stress, 189, 191, 224
concentration, 183
concept of, 361
pre-history, 361
principal, 181, 186, 364, 372
resultants, 343
tensor, 181, 352, 362
Cauchy, 383
importance, 389
symmetry, 364, 372
transformation, 186
structural
analysis, 352, 387
analyst, 383
architecture, 629
art, 625, 626
behavior, 113
clarity, 543
elegance, 583
experimentation, 565
expression, 583
failures, 178
forms, 583
intuition, 577
morphogenesis, 593
necessity, 611
optimization, 170, 578, 606
stability, 190
theory, 387
Structural analysis; A historical approach, 11
structural engineering
etymology, 393
studia humanitatis, 40
substructuring, 424
successive over-relaxation (SOR), 424
Sur la force des colonnes, 349
Sur une Application des Règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture, 171
symmetry
condition, 372
group, 377
sympathy, 476, 477
Syracuse, 107
system integration, 68

Tagore, R., 654
Takemikazuchi-no-kami, 661
Takemikazuchi-no-kami, 637
tall building design, 587
tangency, 267
tangent, 267
Technische Hochschulen, 382
telescope, 138
Ten Books on Architecture, 42
tension, 280
Théorie des machines simples, 171
Thayer System, 202
Theorema Egregium, 258
Theorie der Elasticität fester Körper, 238, 402
thermal conduction, 443
Thermes, Laura, 680
thermodynamics
consistency, 353, 375

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

first law, 372
laws, 370
restrictions, 352, 385
restrictions on constitutive relations, 378
second law, 373
thin concrete forms, 575
thinking skills, 40
Thomson, Lord Kelvin, 370, 372, 382
three moment equation, 395
three-hinged arch, 572
thrust line, 109
Tibet, 656
time integration
finite difference, 423
timekeeping, 144
calendar, 13
Republican, 16
time, 15, 16
Timoshenko, Stephen, 189, 382
Todhunter, Isaac, 189, 421
topology optimization, 606
Torricelli, Evangelista, 502
Torroja, Eduardo, 575
torsion, 172, 182, 235
tortoise, cosmic, 653
The Tower and the Bridge, 626
Tower of Pisa, 136
tracery, 113
Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum, 248
traction vector, 362, 371
Traité des ponts, 174
Traité de Dynamique, 179, 467, 513
Traite des ponts, 126
Traité de l'équilibre des liqueurs, 145
transcendental curve, 270
transverse isotropy, 377
tribology, 171
triclinic symmetry, 377
triforium, 52
trivium, 40
Truesdell, Clifford, 191, 370, 382
Trump, Donald, 139
truss
analysis, 184
trust but verify, 631
von Tschirnhaus, Ehrenfried Walther, 275
tubular structure, 587
Turner, M. Jonathan, 428
Tutte l'opere d'architettura, 125
tychonic system, 90

U.S. Army Corps of Engineers, 438
Ungers, Oswald Mathias, 680
Unité d'Habitation, 554
university transformation, 90
untouchability, 654
urban planning, 42
Urban VIII (Pope), 139
Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum, 75, 149
Ut tensio, sic vis, 231
utilitas, 539

Vaastu Shastra, 45
Vajrayana, 656
Varaha, 653
variational
calculus, 333
formulation, 164
methods, 159, 304
principles, 303, 310, 353, 384
Varignon
Pierre, 241, 466, 510, 512
theorem, 512
Vaucelles, 113
vault, 109
ribbed, 56
vector, 184, 488
mechanics, 136
vectorial, 216, 413
velaria, 274

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग I: इतिहास

Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano, 70
venustas, 539
Verga, G., 676
Vermeer, J., 420
Verrocchio, Andrea, 114
Vers une Architecture, 551
Vesica Piscis, 79
Victoria Amazonica, 582
Vignola, Giacomo Barozzi da, 125
Viollet-le-Duc, Eugène, 49, 58, 76, 566
Virlogeux, Michel, 623
virtual work, 136
virtus, 478
vis insita, 507
vis viva controversy, 506
vis viva, 158, 159, 305, 506, 507, 513, 518, 524
viscoelasticity, 384
Vishnu, 653
Vitruvian triad, 539
Vitruvius, 8, 42, 71, 109, 532, 548
Voigt, Woldemar, 377
Voltaire, 654, 670, 674, 675, 677
vortex theory, 143
voussoir, 52
Vérité, Auguste-Lucien, 61

Wallis, John, 502, 505
Warhol, A., 686
water-powered saw, 113
wedge, 106, 110
weight
  specific, 111
weighted residuals, 432
West Point, 202
wheel and axle, 110
Williot-Mohr diagram, 186
Wilson, Edward L., 438
Winkler, Emil, 409
Witelo, 111
wooden architecture, 46
work
  Carnot's moment of activity, 524
World Trade Center, 619
Wright,Frank Lloyd, 572
Wright-Patterson Conference (1965), 441
writing
  abjad, 21
  acrophonic principle, 21
  alphabet, 13, 21
  Arabic alphabet, 22
  Brahmic scripts, 22
  Chinese characters, 20
  clay tokens, 18
  Demotic, 20
  Epic of Gilgamesh, 18
  Hammurabi, 18
  Hebrew alphabet, 22
  Hieratic, 20
  hieroglyphs, 13, 20
  Ishango bone, 18
  Latin alphabet, 22
  Lebombo bone, 18
  Phoenician alphabet, 21
  phono-semantic compounds, 20
  Proto-Sinaitic, 21
  Rosetta Stone, 20
  tally sticks, 18
  vowels, 22
wrought iron construction, 568

yin-yang, 639
yonaoshi, 683
yonaoshi, 638, 640
Young, Thomas, 151, 236
yugas, 653

Zarzuela Hippodrome, 576
Zienkiewicz, Olgierd C., 444
+, div , ∞, 248

ग्रंथ I: यांत्रिकी और संरचनात्मक विश्लेषण का संक्षिप्त इतिहास © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भाग II–IV

भाग II

परिचय: मूलभूत एवं विश्लेषणात्मक

भाग III

मध्यवर्ती एवं संख्यात्मक

भाग IV

उन्नत: अरैखिक एवं अन्य विषय

भाग IV के पश्चात परिशिष्ट

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण)

विषय-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण) **757**

चित्र-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण) **794**

सारणी-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण) **811**

उदाहरण-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण) **815**

मुख्य-बिंदु सूची: भाग II–IV (विश्लेषण) **822**

17 परिचय **825**

17.1 व्यापक परिप्रेक्ष्य . . . 825
17.1.1 वास्तुकला . . . 826
17.1.2 संरचनात्मक अभियांत्रिकी . . . 827
17.1.2.1 संरचनात्मक अभिकल्प . . . 827
17.1.2.2 विश्लेषण . . . 828
17.1.2.3 सुरक्षा-मूल्यांकन . . . 830
17.1.3 संरचनात्मक विश्लेषण में समन्वित विद्याएँ . . . 830
17.2 तत्त्व: प्राथमिक आंतरिक बल . . . 830
17.3 भार-संचरण तत्त्व . . . 831
17.4 संरचनाओं के प्रकार . . . 832
17.5 अभियांत्रिकी साधनों का रूपांतरण . . . 836
17.6 संरचनात्मक अभियांत्रिकी के पाठ्यक्रम . . . 838

18 भार **839**

18.1 परिचय . . . 839
18.2 भारों का वर्गीकरण . . . 840
18.2.1 ऊर्ध्वाधर भार . . . 840
18.2.2 पार्श्व भार . . . 840
18.2.2.1 पवन . . . 840
18.2.2.2 भूकंपीय भार . . . 844
18.2.3 जलस्थैतिक और मृदा भार . . . 846
18.2.3.1 उदाहरण 18.1: जलस्थैतिक भार . . . 847
18.2.4 संघात भार . . . 847
18.2.5 द्वितीयक भार . . . 849
18.2.6 तापीय भार . . . 850
18.2.6.1 उदाहरण 18.2: तापीय प्रसार/प्रतिबल . . . 850
18.3 विचारणीय पक्ष . . . 851
18.3.1 प्रक्षेपित भार . . . 851
18.3.2 भार का स्थान-निर्धारण . . . 852
18.3.3 भार-संयोजन . . . 852
18.3.4 भार-पथ . . . 853

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

18.3.5 प्रभावी क्षेत्रफल . . . 858
18.3.5.1 उदाहरण 18.3: प्रभावी क्षेत्रफल . . . 859
18.3.6 संरचनात्मक प्रतिक्रिया . . . 859

19 आधार-प्रतिक्रियाएँ **862**
19.1 परिचय . . . 862
19.1.1 आधारों के प्रकार . . . 863
19.1.2 संतुलन . . . 864
19.1.3 दशा-समीकरण . . . 865
19.1.4 स्थैतिक निर्धार्यता . . . 866
19.1.5 ज्यामितीय अस्थिरता . . . 867
19.1.6 मुक्त-पिंड आरेख . . . 867
19.2 उदाहरण . . . 869
19.2.1 उदाहरण 19.1: जलस्थैतिक भार . . . 869
19.2.2 उदाहरण 19.2: भार-संचरण . . . 869
19.2.3 उदाहरण 19.3: सरलतः समर्थित धरन . . . 870
19.2.4 उदाहरण 19.4: परवलयिक भार . . . 871
19.2.5 उदाहरण 19.5: तीन-विस्तृति धरन . . . 872
19.2.6 उदाहरण 19.6: त्रि-कब्जित त्रिकोणिका फ्रेम . . . 873
19.2.7 उदाहरण 19.7: आनत आधार . . . 875
19.2.8 उदाहरण 19.8: ग्रिड संरचना . . . 876
19.2.9 उदाहरण 19.9: वायुयान का संतुलन . . . 876
19.2.10 उदाहरण 19.10: विशाल बजरा . . . 877
19.2.11 उदाहरण 19.11: रैंकिन: तैरते पिंड का संतुलन—जलस्थैतिक प्रमाण . . . 881
19.2.12 उदाहरण 19.12: पालात्सेतो देल्लो स्पोर्ट; नेर्वी . . . 882

20 ट्रस **886**
20.1 परिचय . . . 886
20.1.1 मान्यताएँ . . . 886
20.1.2 चिह्न-परिपाटी . . . 887
20.1.3 निर्धार्यता और स्थायित्व . . . 888
20.2 विश्लेषण-विधियाँ . . . 889
20.2.1 संधि-विधि . . . 889
20.2.1.1 उदाहरण 20.1: ट्रस-विश्लेषण; संधि-विधि . . . 891
20.2.1.2 उदाहरण 20.2: 3D ट्रस . . . 893
20.3 परिच्छेद-विधि . . . 897
20.3.1 परिच्छेद-विधि . . . 897
20.3.2 उदाहरण 20.3: परिच्छेद-विधि . . . 897
20.4 संधि/आव्यूह-विधि . . . 898
20.4.1 उदाहरण 20.4: सरल ट्रस; संधि/आव्यूह-विधि . . . 900
20.4.2 उदाहरण 20.5: जटिल ट्रस; संधि/आव्यूह-विधि . . . 902

21 वंकित अवयवों में आंतरिक बल **906**

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

21.1 परिचय . . . 906
21.1.1 अभियांत्रिकी उपागम: प्रतिबलों से आंतरिक बलों तक . . . 906
21.1.2 2d/3d सीधे और वक्र धरनों के आंतरिक बल . . . 908
21.1.3 यह क्यों महत्त्वपूर्ण है . . . 909
21.1.4 अभिकल्प चिह्न-परिपाटियाँ . . . 910
21.2 भार, अपरूपण और आघूर्ण के संबंध . . . 911
21.2.1 अवकल रूप . . . 911
21.2.2 समाकल रूप . . . 912
21.3 उदाहरण . . . 913
21.3.1 उदाहरण 21.1: आनत भार वाला धरन . . . 914
21.3.2 उदाहरण 21.2: आनत फ्रेम . . . 915
21.3.3 उदाहरण 21.3: जलस्थैतिक भार वाला फ्रेम . . . 918
21.3.4 उदाहरण 21.4: रैखिक रूप से परिवर्ती भार . . . 920
21.3.5 उदाहरण 21.5: फ्रेम; आनत छत का उदाहरण . . . 921
21.3.6 उदाहरण 21.6: पारस्परिक फ्रेम . . . 922
21.3.7 उदाहरण 21.7: 3D फ्रेम . . . 926

22 विक्षेप; प्रत्यास्थ वक्र 930
22.1 परिचय . . . 930
22.2 अवकल समीकरण . . . 931
22.2.1 उदाहरण 22.1: द्वि-समाकलन . . . 932
22.2.2 उदाहरण 22.2: अधिकतम विक्षेप . . . 933
22.2.3 उदाहरण 22.3: इष्टतम स्की-आकृति . . . 934
22.2.4 उदाहरण 22.4: तैरता धरन . . . 934
22.3 वक्रता . . . 937
22.3.1 उदाहरण 22.5: साइकिल का पहिया . . . 939
22.3.2 उदाहरण 22.6: कुंडलित स्प्रिंग की दृढता . . . 945
22.3.3 वक्रता–विकृति संबंध . . . 946
22.3.3.1 उदाहरण 22.7: द्विधात्विक स्विच . . . 947
22.3.4 वक्रता-क्षेत्र विधि (आघूर्ण-क्षेत्र) . . . 949
22.3.4.1 चिह्न परिपाटी . . . 949
22.3.4.2 प्रथम वक्रता-क्षेत्र प्रमेय . . . 949
22.3.4.3 द्वितीय वक्रता-क्षेत्र प्रमेय . . . 950
22.3.4.3.1 उदाहरण 22.8: वक्रता-क्षेत्र, कैंटिलीवर धरन . . . 951
22.3.4.3.2 उदाहरण 22.9: आघूर्ण-वक्रता, सरल आलंबित धरन . . . 952
22.3.4.4 अधिकतम विक्षेप . . . 953
22.3.4.4.1 उदाहरण 22.10: अधिकतम विक्षेप . . . 953
22.3.4.5 तापमान–वक्रता संबंध . . . 954
22.3.4.5.1 उदाहरण 22.11: तापमान-भार के अधीन फ्रेम . . . 955
22.3.4.6 उदाहरण 22.12: प्लास्टिक लंबाई . . . 957
22.3.4.7 प्रत्यास्थ भार/संयुग्मी धरन . . . 959
22.3.4.7.1 उदाहरण 22.13: संयुग्मी धरन; बिंदु भार . . . 960

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

22.3.4.7.2 उदाहरण 22.14: संयुग्मी धरन; परिवर्ती I 961

23 अपरूपण और ऐंठन **964**
23.1 अपरूपण-विरूपण (अनुप्रस्थ) 964
23.1.1 अपरूपण, अतिसूक्ष्म अवयव 965
23.1.1.1 उदाहरण 23.1: कैंटिलीवर धरन का विक्षेप 965
23.1.2 अपरूपण-वितरण; $\tau(y)$ 966
23.1.3 अपरूपण गुणांक 967
23.1.4 अपरूपण गुणक 968
23.1.5 अपरूपण-विरूपण v_s, Timoshenko 969
23.2 ऐंठन-विरूपण 970
23.2.1 S^{t} Venant अथवा एकसमान ऐंठन 970
23.2.2 Vlasov अथवा असमान ऐंठन 971
23.2.2.1 उदाहरण 23.2: I-काट की असमान ऐंठन 977

24 पूरक आभासी कार्य **981**
24.1 परिचय 981
24.2 पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत की सरलीकृत व्युत्पत्ति 982
24.2.1 व्युत्पत्ति 982
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti पारस्परिक प्रमेय 985
24.2.3 बाह्य आभासी कार्य $\delta\overline{W}^{*}$ 986
24.2.4 आंतरिक आभासी कार्य $\delta\overline{U}^{*}$ 986
24.3 उदाहरण 987
24.3.1 उदाहरण 24.1: धरन 987
24.3.2 उदाहरण 24.2: फ्रेम; विक्षेप 988
24.3.3 उदाहरण 24.3: फ्रेम, घूर्णन 990
24.3.4 उदाहरण 24.4: नम्य कोष्ठक 991
24.3.5 उदाहरण 24.5: केबल-आलंबित कैंटिलीवर धरन 993
24.3.6 उदाहरण 24.6: ऐंठन और नम्य विरूपण 994
24.3.7 उदाहरण 24.7: धरन में नम्य और अपरूपण-विरूपण 996
24.3.8 उदाहरण 24.8: धरन में तापीय प्रभाव 997
24.3.9 उदाहरण 24.9: पाइपलाइन 998
24.3.10 उदाहरण 24.10: ट्रस; सरल 999
24.3.11 उदाहरण 24.11: ट्रस; जटिल 1000
24.3.12 उदाहरण 24.12: आरंभिक कैम्बर वाला ट्रस 1001
24.3.13 उदाहरण 24.13: द्वितीयक प्रतिबलों वाला ट्रस 1002
24.3.14 उदाहरण 24.14: वृत्ताकार वलय 1004
24.3.15 उदाहरण 24.15: स्प्रिंग 1006

25 लचीलापन विधि **1010**
25.1 परिचय 1010
25.2 बल/लचीलापन विधि 1016
25.2.1 उदाहरण 1017

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

25.2.1.1 उदाहरण 25.1: टाई-छड़ सहित बीम 1017
25.2.1.2 उदाहरण 25.2: इस्पात भवन ढाँचे का विश्लेषण 1019
25.2.1.3 उदाहरण 25.3: ट्रस, एक अतिरिक्त बल 1022
25.2.1.4 उदाहरण 25.4: ट्रस: दो अतिरिक्त बल 1025
25.2.1.5 उदाहरण 25.5: ट्रस: तापीय भार 1027
25.2.1.6 उदाहरण 25.6: स्प्रिंग-आधारित बीम 1028
25.2.1.7 उदाहरण 25.7: क्वीन पोस्ट 1030
25.2.1.8 उदाहरण 25.8: लचीलापन आव्यूह; वक्र बीम 1033
25.3 तीन आघूर्ण समीकरण 1036
25.3.1 उदाहरण 25.9: सतत बीम 1039
25.3.2 उदाहरण 25.10: सतत बीम 1040

26 विस्थापनों के पदों में बल **1042**
26.1 परिचय 1042
26.1.1 चिह्न परिपाटी 1043
26.1.2 विश्लेषण विधियाँ 1043
26.2 अक्षीय विरूपण 1044
26.3 आनमन 1044
26.3.1 अवकल समीकरण 1044
26.3.2 प्रारंभिक विकृतियों के लिए संधि-सिरा बल 1048
26.3.3 आनमनी अवयवों के लिए संधि समतुल्य बल 1049
26.3.3.1 एकसमान वितरित भार 1049
26.3.3.2 संकेंद्रित भार 1050

27 हस्त-गणना द्वारा दृढता **1052**
27.1 परिचय 1052
27.2 ढाल-विक्षेप; प्रत्यक्ष हल 1052
27.2.1 उदाहरण 1054
27.2.1.1 उदाहरण 27.1: कैंटिलीवर बीम 1054
27.2.1.2 उदाहरण 27.2: सतत बीम 1055
27.2.1.3 उदाहरण 27.3: दो-विस्तार बीम 1056
27.2.1.4 उदाहरण 27.4: दो-विस्तार बीम, प्रारंभिक विक्षेप 1058
27.2.1.5 उदाहरण 27.5: ढाँचा 1059
27.2.1.6 उदाहरण 27.6: बॉक्स कल्वर्ट 1061
27.3 आघूर्ण वितरण 1063
27.3.1 परिचय 1063
27.3.1.1 उदाहरण 27.7: सतत बीम 1066
27.4 ढाल-विक्षेप; आघूर्ण वितरण; Gauss-Seidel 1069
27.4.1 उदाहरण 27.8: ढाल-विक्षेप/आघूर्ण वितरण/Gauss-Seidel 1069

28 प्रभाव रेखाएँ **1071**
28.1 परिचय 1071
28.2 प्रक्रिया 1072

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

28.2.1 उदाहरण 28.1: सरल आलंबित धरन की प्रभाव रेखाएँ . . . 1072
28.2.2 उदाहरण 28.2: अधिलंबों सहित सरल आलंबित धरन . . . 1075
28.3 Müller-Breslau सिद्धांत . . . 1075
28.3.1 व्युत्पत्ति . . . 1075
28.3.1.1 उदाहरण 28.3: Müller-Breslau; अपरूपण प्रभाव रेखा . . . 1076
28.3.1.2 उदाहरण 28.4: Müller-Breslau; आघूर्ण प्रभाव रेखा . . . 1077

29 द्वितीय-कोटि प्रत्यास्थ विश्लेषण 1078
29.1 परिचय . . . 1078
29.2 बड़े विस्थापन, स्थिर . . . 1079
29.2.1 उदाहरण 29.1: ज्यामितीय अस्थिरता . . . 1079
29.2.2 उदाहरण 29.2: आनमनी विरूपण पर अक्षीय भार का प्रभाव . . . 1080
29.2.3 उदाहरण 29.3: कैंटिलीवर धरन का बड़ा विक्षेप . . . 1083
29.3 छोटे विस्थापन, अस्थिर . . . 1087
29.3.1 विविक्त दृढ दंड . . . 1087
29.3.1.1 एकल-दंड निकाय . . . 1087
29.3.1.1.1 उदाहरण 29.4: दो कब्जेदार दृढ स्तंभों का कुंचन . . . 1089
29.3.2 सतत निकाय . . . 1091
29.3.2.1 Euler कुंचन भार . . . 1091
29.3.2.1.1 उदाहरण 29.5: कब्जेदार-कब्जेदार स्तंभ का कुंचन . . . 1093
29.3.2.1.2 उदाहरण 29.6: आबद्ध-आबद्ध स्तंभ का कुंचन . . . 1094
29.3.2.1.3 उदाहरण 29.7: आबद्ध-कब्जेदार स्तंभ का कुंचन . . . 1095
29.3.2.1.4 उदाहरण 29.8: प्रत्यास्थ आलंबों वाला स्तंभ . . . 1097
29.3.2.1.5 उदाहरण 29.9: अवरुद्ध कुंचन . . . 1099
29.3.2.1.6 उदाहरण 29.10: जल मीनार . . . 1100
29.3.2.2 मुक्त कंपन के साथ सादृश्य . . . 1103
29.3.2.3 प्रभावी लंबाई गुणक K . . . 1104
29.3.2.4 अप्रत्यास्थ स्तंभ . . . 1107

30 केबल संरचनाएँ 1110
30.1 परिचय . . . 1110
30.2 संकेंद्रित भार . . . 1111
30.2.1 उदाहरण 30.1: फनिक्युलर केबल . . . 1111
30.2.2 उदाहरण 30.2: झुका हुआ फनिक्युलर केबल . . . 1113
30.2.3 उदाहरण 30.3: द्वि-केबल गोंडोला . . . 1114
30.3 वितरित भार . . . 1115
30.3.1 साम्य समीकरण . . . 1115
30.3.2 qdx; पार्श्व भार; परवलय . . . 1116
30.3.2.1 ज्यामिति . . . 1116
30.3.2.2 आंतरिक बल . . . 1121
30.3.2.3 प्रत्यास्थ दीर्घन . . . 1122
30.3.2.4 तुल्य अक्षीय दृढता . . . 1124
30.3.2.5 विशेष स्थिति: क्षैतिज जीवा . . . 1127

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

30.3.2.5.1 उदाहरण 30.4: आनत केबल की ज्यामिति 1127
30.3.2.5.2 उदाहरण 30.5: आनत केबल के बल 1128
30.3.2.5.3 उदाहरण 30.6: गाइ-केबल युक्त मीनार 1130
30.3.2.5.4 उदाहरण 30.7: झूला पुल 1131
30.3.2.5.5 उदाहरण 30.8: अविस्तार्य केबल; तापमान 1133
30.3.2.5.6 उदाहरण 30.9: विस्तार्य केबल; लटकाव 1133
30.3.2.5.7 उदाहरण 30.10: विस्तार्य केबल; तापीय प्रभाव 1134
30.3.2.5.8 उदाहरण 30.11: विस्तार्य केबल; पूर्वप्रतिबल 1134
30.3.3 $q$ds; कैटेनरी 1135
30.3.3.1 ज्यामिति 1135
30.3.3.2 बल 1137
30.3.3.3 आनत जीवा वाली कैटेनरी 1137
30.3.3.3.1 उदाहरण 30.12: आनत केबल में लटकाव 1139
30.3.3.3.2 उदाहरण 30.13: ट्रॉली-बस केबल आलंब 1139
30.3.4 परवलय तथा कैटेनरी पर आधारित हलों की तुलना 1142
30.3.4.1 उदाहरण 30.14: कैटेनरी बनाम परवलय 1143

31 चिनाई मेहराबों का विश्लेषण (वूस्वार) 1145
31.1 परिचय 1145
31.2 कुछ ऐतिहासिक टिप्पणियाँ 1146
31.2.1 De la Hire; 1640-1718 1146
31.2.2 Belidor; 1698-1761 1147
31.2.3 Couplet; 1670-1744 1150
31.2.4 Danyzy; 1698-1777 1151
31.2.5 Coulomb;1736-1806 1152
31.2.6 Moseley; 1801-1872 1154
31.2.7 प्रत्यास्थ हल 1154
31.2.7.1 Castigliano; 1847-1884 1154
31.2.7.2 Winkler; 1835-1888 1155
31.2.8 Pippard; 1891-1969 1155
31.2.8.1 उदाहरण 31.1: वूस्वार का विफलता भार; Pippard की विधि 1159
31.3 Pippard की विधि का सामान्यीकरण; Smars 1162
31.4 कलनविधि 1166
31.5 अंतिम टिप्पणियाँ 1169
31.5.1 Jacques Heyman; 1925 1169
31.5.2 प्रणोद रेखा 1170
31.5.3 प्रणोद रेखा तथा Pippard 1171

32 मेहराब तथा वक्र बीम 1174
32.1 वृत्तीय मेहराब 1175
32.1.1 तीन-किलक वृत्तीय मेहराब 1175
32.1.1.1 Eddy का प्रमेय 1176
32.1.1.2 उदाहरण 1177

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

32.1.1.2.1 उदाहरण 32.1: तीन-किलक मेहराब; बिंदु-भार; वैश्लेषिक . 1177
32.1.1.2.2 उदाहरण 32.2: तीन-किलक मेहराब; बिंदु-भार 1179
32.1.1.2.3 उदाहरण 32.3: तीन-किलक मेहराब; एकसमान भार 1180
32.1.2 दो-किलक वृत्तीय मेहराब 1182
32.1.3 किलकरहित वृत्तीय मेहराब 1183
32.1.3.1 उदाहरण 32.4: किलकरहित वृत्तीय मेहराब 1183
32.1.4 सामान्यीकृत हल 1191
32.1.4.1 व्युत्पत्ति 1191
32.1.4.1.1 गुरुत्व-केंद्र 1191
32.1.4.1.2 व्युत्पत्ति 1192
32.1.4.1.3 सत्यापन 1197
32.1.5 Mathematica-आधारित हल 1197
32.2 मेहराब का इष्टतम आकार 1198
32.2.1 उदाहरण 32.5: आदर्श मेहराब 1198
32.3 परवलयी मेहराब 1199
32.3.1 उदाहरण 1199
32.3.1.1 उदाहरण 32.6: तीन-किलक परवलयी मेहराब 1200
32.3.1.2 उदाहरण 32.7: परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाला दो-किलक परवलयी मेहराब 1200
32.3.2 सममित भार वाला आबद्ध मेहराब 1204
32.3.2.1 उदाहरण 32.8: किलकरहित परवलयी मेहराब 1206
32.3.3 नींव अवतलन और तापमान के प्रभाव 1209
32.3.3.1 उदाहरण 32.9: परवलयी मेहराब पर तापीय भार 1212
32.4 वक्र बीम 1212
32.4.1 धनुष गर्डर 1212
32.4.1.1 उदाहरण 32.10: धनुष गर्डर 1213
32.4.2 कुंडलित बीम 1215
32.4.2.1 ज्यामिति 1215
32.4.2.2 साम्य 1217
32.4.2.2.1 उदाहरण 32.11: कुंडलित मेहराब; बिंदु भार 1218

33 पट्टिकाएँ **1222**
33.1 मोटी पट्टिका सिद्धांत: Reissner–Mindlin 1222
33.1.1 शुद्धगतिक संबंध 1222
33.1.2 संघटक संबंध 1224
33.1.3 साम्य 1225
33.2 पतली पट्टिका सिद्धांत: Kirchhoff 1227
33.2.0.1 उदाहरण 33.1: पतली बनाम मोटी पट्टिका आदर्शीकरण 1228
33.2.1 मूलभूत संबंध 1228
33.2.2 अवकल समीकरण 1229
33.2.3 प्रतिबल 1229
33.2.3.1 उदाहरण 33.2: पट्टिका-आघूर्ण परिणामकों से प्रतिबल पुनर्प्राप्ति . 1230
33.2.3.2 उदाहरण 33.3: एकसमान दाब के अधीन सरल आलंबित वर्गाकार पट्टिका 1232

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

33.2.3.3 उदाहरण 33.4: मोटाई के प्रति पट्टिका-विक्षेप की संवेदनशीलता . . . 1233
33.2.4 वृत्तीय पट्टिकाएँ . . . 1233
33.2.4.1 उदाहरण 33.5: एकसमान दाब के अधीन जकड़ी वृत्तीय पट्टिका . . . 1237
33.2.5 परिवर्ती सूत्रीकरण . . . 1238
33.3 सारांश . . . 1239

34 कवच **1242**
34.1 व्यापक सिद्धांत . . . 1243
34.1.1 परिभाषाएँ . . . 1243
34.1.2 धारणाएँ . . . 1245
34.1.3 बल–विस्थापन संबंध . . . 1247
34.1.3.1 साम्य . . . 1249
34.1.3.2 संतुलन समीकरणों का पूर्ण समुच्चय . . . 1255
34.1.3.3 सुसंगतता . . . 1255
34.1.3.4 सारांश . . . 1259
34.1.3.5 प्रतिबल–विकृति–बल . . . 1260
34.1.3.5.1 प्रतिबल–विकृति . . . 1260
34.1.3.5.2 प्रतिबल–बल . . . 1261
34.1.3.6 अंतिम व्यंजक (विस्थापनों के पदों में बल) . . . 1262
34.1.4 सरलीकरण . . . 1264
34.1.4.1 उथले कवच . . . 1264
34.1.4.1.1 धारणाएँ . . . 1264
34.1.4.1.2 धारणाओं का अनुप्रयोग . . . 1264
34.1.4.1.3 गहरी-बीम समीकरण . . . 1266
34.1.4.1.4 स्लैब समीकरण . . . 1267
34.1.4.1.5 उथले कवचों का समीकरण . . . 1268
34.1.4.2 झिल्ली सिद्धांत . . . 1268
34.1.4.2.1 धारणाएँ . . . 1269
34.1.4.2.2 सिद्धांत . . . 1269
34.1.4.2.3 वर्गीकरण . . . 1269
34.1.4.2.4 विशेषीकरण . . . 1270
34.2 एकल बैरल का विश्लेषण (वृत्तीय बेलनाकार कवच) . . . 1273
34.2.1 परिचय . . . 1273
34.2.2 झिल्ली सिद्धांत . . . 1274
34.2.2.1 प्रतिबल परिणामक . . . 1274
34.2.2.1.1 त्रुटियाँ . . . 1279
34.2.2.1.2 संशोधन . . . 1279
34.2.2.2 विस्थापन . . . 1281
34.2.3 उथले कवच का सिद्धांत . . . 1283
34.2.3.1 संतुलन समीकरण . . . 1283
34.2.3.2 सूत्रण . . . 1284

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.2.3.2.1 समान भार का विशेष हल 1287
34.2.3.2.2 तुलना: झिल्ली *बनाम* उथला कवच 1288
34.2.3.2.3 उदाहरण 34.1: झिल्ली & उथले कवच की तुलना 1291
34.2.3.3 सामान्य हल 1291
34.2.3.3.1 विस्थापन w 1292
34.2.3.3.2 M_ϕ 1294
34.2.3.3.3 अन्य पद; कार्यविधि 1295
34.3 स्थैतिकतः अनिर्धार्य कवच 1298
34.3.1 किनारी बीम 1298
34.3.1.1 ऊर्ध्वाधर किनारी बीम 1300
34.3.1.2 क्षैतिज किनारी बीम 1302
34.3.2 पूर्वप्रतिबलित किनारी बीम 1302
34.3.2.1 उदाहरण 34.2: बेलनाकार कवच का अभिकल्प 1304
34.3.3 MATLAB®कोड और संख्यात्मक उदाहरण 1315

35 गतिकी I **1317**
35.1 दार्शनिक आधार 1318
35.2 गतिक विश्लेषण कब आवश्यक है 1318
35.3 मूलभूत सिद्धांत 1319
35.3.1 d'Alembert का सिद्धांत और गतिक संतुलन 1319
35.3.2 एकल-स्वतंत्रता-कोटि दोलक 1320
35.3.3 प्राकृतिक आवृत्ति और आवर्तकाल 1321
35.3.3.1 उदाहरण 35.1: किसी SDOF निकाय के लिए ω_n, T_n और f_n की गणना 1321
35.3.4 अवमंदन और अवमंदन अनुपात 1322
35.4 मुक्त कंपन 1323
35.4.1 अनवमंदित मुक्त कंपन 1323
35.4.2 अवमंदित मुक्त कंपन 1324
35.4.3 लघुगणकीय ह्रास 1325
35.4.3.1 उदाहरण 35.2: लघुगणकीय ह्रास से अवमंदन का आकलन 1325
35.5 प्रणोदित कंपन: हार्मोनिक उत्तेजन 1326
35.5.1 अनवमंदित हार्मोनिक अनुक्रिया 1326
35.5.2 अवमंदित हार्मोनिक अनुक्रिया 1327
35.5.2.1 उदाहरण 35.3: हार्मोनिक अनुक्रिया: प्रवर्धन और कला 1328
35.6 स्वेच्छ भारण के प्रति अनुक्रिया 1329
35.6.1 आवेग अनुक्रिया और एकक आवेग 1329
35.6.1.1 उदाहरण 35.4: अवमंदित SDOF निकाय की एकक आवेग अनुक्रिया . . 1330
35.6.2 Duhamel समाकल 1330
35.6.2.1 उदाहरण 35.5: अचानक सोपान भार: गतिक प्रवर्धन गुणक 2 1331
35.6.2.2 उदाहरण 35.6: आयताकार स्पंद भार और आघात वर्णक्रम 1332
35.6.3 Fourier विश्लेषण और आवृत्ति अनुक्रिया 1334

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35.6.3.1 उदाहरण 35.7: दो हार्मोनिक घटकों वाले आवर्ती मशीन-बल के प्रति आवृत्ति अनुक्रिया . . . 1335
35.7 आलंब उत्तेजन और भूकंपीय अनुक्रिया . . . 1336
35.7.1 आधार उत्तेजन का गति-समीकरण . . . 1336
35.7.2 अनुक्रिया वर्णक्रम . . . 1337
35.7.2.1 उदाहरण 35.8: अनुक्रिया वर्णक्रम से एक-मंजिला ढाँचे का भूकंपीय अभिकल्प . . . 1338
35.8 बहु-स्वतंत्रता-कोटि निकाय . . . 1339
35.8.1 गति-समीकरण . . . 1339
35.8.2 अनवमंदित मुक्त कंपन: प्राकृतिक विधाएँ . . . 1340
35.8.3 विधिक विश्लेषण . . . 1340
35.8.4 भूकंपीय अनुक्रिया में विधिक सहभागिता . . . 1341
35.8.4.1 उदाहरण 35.9: भूकंपीय भारण के अधीन 3-DOF अपरूपण भवन का विधिक विश्लेषण . . . 1342
35.9 सतत निकाय . . . 1344
35.9.1 दंडों का अक्षीय कंपन . . . 1344
35.9.2 धरनों का अनुप्रस्थ कंपन . . . 1345
35.9.2.1 उदाहरण 35.10: इस्पात पद-सेतु की प्राकृतिक आवृत्ति और पैदल-यात्री अनुनाद जाँच . . . 1345
35.10 अरैखिक गतिकी . . . 1347
35.10.1 अरैखिकता के स्रोत . . . 1347
35.10.2 शैथिल्य और ऊर्जा-क्षय . . . 1347
35.10.2.1उदाहरण 35.11: द्विरेखीय शैथिल्य पाश से तुल्य श्यान अवमंदन . . . 1348
35.10.3 तन्यता और क्षमता अभिकल्प . . . 1349
35.10.3.1उदाहरण 35.12: प्रबलित कंक्रीट ढाँचे के लिए तन्यता माँग और बल न्यूनीकरण . . . 1350
35.11 व्यावहारिक विचार . . . 1351
35.11.1 वास्तविक संरचनाओं में अवमंदन . . . 1351
35.11.2 मृदा-संरचना अन्योन्यक्रिया . . . 1352
35.11.3 समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक . . . 1352
35.11.4 उदाहरण 35.13: ऊँचे भवन के लिए समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक का अभिकल्प 1352
35.11.5 आधार-विलगन . . . 1354
35.11.6 उदाहरण 35.14: आधार-विलगित अस्पताल भवन का अभिकल्प . . . 1354
35.12 समापन टिप्पणियाँ . . . 1356
35.12.1 अनुक्रिया-वर्णक्रम विधियों पर व्यवसायी की सावधानी . . . 1356
35.12.2 समापन टिप्पणी: रैखिक सिद्धांत की सीमाएँ . . . 1356

36 संरचनात्मक अभिकल्प के तत्त्व 1357
36.1 परिचय . . . 1357
36.1.1 विश्लेषण और अभिकल्प: एक पुनरावर्ती प्रक्रिया . . . 1357
36.1.2 सुरक्षा . . . 1359

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

36.2 अनुमेय प्रतिबल अभिकल्प (ASD) 1360
36.2.1 उदाहरण 36.1: ASD: आनमन 1361
36.3 भार और प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) 1361
36.4 LRFD-आधारित अभिकल्प संहिताओं के उदाहरण 1364
36.4.1 अनुप्रयोग: R/C धरन अनुभागों का सुघट्य सामर्थ्य 1365
36.4.1.1 उदाहरण 36.2: चरम सामर्थ्य; समीक्षा 1370
36.4.1.2 उदाहरण 36.3: चरम सामर्थ्य; अभिकल्प I 1370
36.4.1.3 उदाहरण 36.4: चरम सामर्थ्य; अभिकल्प II 1371
36.4.1.4 उदाहरण 36.5: यथार्थ विश्लेषण 1372
36.4.2 अनुप्रयोग: R/C स्तंभों का सुघट्य सामर्थ्य 1374
36.4.2.1 उदाहरण 36.6: R/C स्तंभ, c ज्ञात 1379
36.4.2.2 उदाहरण 36.7: R/C स्तंभ, e ज्ञात 1380
36.4.3 पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट 1383
36.4.3.1 उदाहरण 36.8: प्रकरण अध्ययन: वॉलनट लेन ब्रिज 1384
36.5 निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी (PBE) 1388

37 स्थैतिकतः अनिर्धार्य मेहराब का अभिकल्प 1390
37.1 उदाहरण 37.1: स्थैतिकतः अनिर्धार्य मेहराब का अभिकल्प 1390
37.2 उदाहरण 37.2: मेहराब में तापमान परिवर्तन 1397

38 फर्मी समाधान (सन्निकट विश्लेषण) 1401
38.1 आंतरिक बल 1402
38.1.1 विक्षेपित आकृतियाँ & नति-परिवर्तन बिंदु 1402
38.1.2 आधार-दृढता के पदों में धरन आघूर्ण 1405
38.1.3 विश्लेषण विधियाँ 1406
38.1.3.1 ऊर्ध्वाधर भार 1407
38.1.3.2 क्षैतिज भार 1410
38.1.3.2.1 पोर्टल विधि 1410
38.1.3.2.1.1 उदाहरण 38.1: पोर्टल विधि; निम्न-तलीय भवन . 1412
38.1.3.2.1.2 उदाहरण 38.2: Matlab समाधान 1424
38.1.3.2.2 ब्रैकट विधि 1425
38.1.3.2.2.1 उदाहरण 38.3: ब्रैकट विधि; उच्च-तलीय भवन . . 1426
38.2 संरचनात्मक प्रतिक्रिया 1427
38.2.1 कूप उपतंत्र 1427
38.2.1.1 उदाहरण 38.4: कूप उपतंत्र 1428
38.2.2 अपरूपण भित्ति 1429
38.2.2.1 उदाहरण 38.5: कंक्रीट अपरूपण भित्ति 1429
38.2.3 ट्रसित अपरूपण भित्ति 1431
38.2.3.1 उदाहरण 38.6: ट्रसित अपरूपण भित्ति 1432
38.2.4 पार्श्व विक्षेप 1433
38.2.4.1 छोटी भित्ति 1433
38.2.4.2 ऊँची भित्ति 1434

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

38.2.4.3 भित्तियाँ और लिंटल 1434
38.2.4.4 ढाँचे 1435
38.2.4.4.1 उदाहरण 38.7: भवन का सन्निकट अनुप्रस्थ विक्षेप . . . 1437

39 प्रारंभिक अभिकल्प **1442**
39.1 उदाहरण 39.1: डलेस विमानपत्तन 1442
39.2 उदाहरण 39.2: एफिल टॉवर 1449
39.3 उदाहरण 39.3: मागात्सीनी जेनराली 1456
39.4 उदाहरण 39.4: जॉर्ज वाशिंगटन ब्रिज 1460
39.5 उदाहरण 39.5: द्वि-कब्जित आर्च का अभिकल्प 1467
39.6 उदाहरण 39.6: आर्च में तापमान परिवर्तन 1475
39.7 उदाहरण 39.7: I के सेकेंट परिवर्तन वाला परवलयिक आर्च 1478

40 प्रत्यक्ष दृढता विधि का परिचय **1482**
40.1 आवयूह संरचनात्मक विश्लेषण क्यों? 1482
40.2 संरचनात्मक आदर्शीकरण 1483
40.3 चिह्न-परिपाटी 1485
40.4 निर्देशांक तंत्र 1486
40.5 नम्यता *बनाम* दृढता 1486
40.6 स्वतंत्रता कोटियाँ 1487
40.7 स्थैतिक *बनाम* गतिकीय अनिर्धार्यता 1490
40.8 संरचनात्मक विश्लेषण/यांत्रिकी: एक परिसीमा मान समस्या 1490

41 अवयव दृढता आवयूह $\mathbf{k}^{(e)}$ **1493**
41.1 दृढता पद की परिभाषा 1493
41.2 ट्रस अवयव 1494
41.3 धरन: यूलर-बर्नूली 1495
41.4 2D फ्रेम अवयव (जिसे धरन-स्तंभ अवयव भी कहते हैं) 1495
41.5 ग्रिड अवयव 1496
41.6 3D धरन-स्तंभ अवयव 1496
41.7 टिमोशेंको धरन 1499
41.7.1 अतिरिक्त विकृति 1499
41.7.2 अवयव दृढता आवयूह में संशोधन 1500
41.8 व्लासोव मरोड 1502

42 दृढता विधि; I लंबकोणीय संरचनाएँ **1504**
42.1 परिचय 1504
42.2 सिद्धांत 1505
42.2.1 नम्यता पर पुनर्विचार 1505
42.2.2 प्रत्यक्ष दृढता विधि 1506
42.2.3 अवयव से संरचना तक 1507
42.3 उदाहरण 1507
42.3.1 उदाहरण 42.1: लंबकोणीय धरन 1507
42.3.2 उदाहरण 42.2: लंबकोणीय फ्रेम 1510

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

42.3.3 उदाहरण 42.3: ग्रिड . . . 1519
42.3.4 उदाहरण 42.4: संकर फ्रेम . . . 1522
42.3.5 उदाहरण 42.5: संकर ग्रिड . . . 1525

43 रूपांतरण आव्यूह **1531**
43.1 परिचय . . . 1531
43.2 कुछ सिद्धांत . . . 1532
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ और $[\mathbf{K}^e]$ का संबंध . . . 1532
43.2.2 दिशा-कोज्याएँ . . . 1533
43.3 फ्रेमवर्क अवयवों के रूपांतरण आव्यूह . . . 1535
43.3.1 2D स्थितियाँ . . . 1536
43.3.1.1 2D फ्रेम . . . 1536
43.3.1.2 ग्रिड . . . 1536
43.3.1.3 व्लासोव धरन . . . 1537
43.3.1.4 2D ट्रस . . . 1538
43.3.2 3D फ्रेम . . . 1539
43.3.3 यूलरीय घूर्णन . . . 1539
43.3.4 अवयव अक्ष का ऐंठन . . . 1541
43.3.5 3D ट्रस . . . 1543

44 प्रत्यक्ष दृढता विधि **1545**
44.1 उद्देश्य . . . 1545
44.2 सिद्धांत . . . 1545
44.3 विविक्तीकरण . . . 1548
44.3.1 अनवरुद्ध और अवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियाँ . . . 1548
44.3.2 संरचनात्मक विविक्तीकरण . . . 1548
44.4 कंप्यूटर कार्यान्वयन . . . 1549
44.4.1 परिसीमा प्रतिबंध, [id] आव्यूह . . . 1549
44.4.2 **LM** सदिश . . . 1551
44.4.3 वैश्विक दृढता आव्यूह का समंजन . . . 1552
44.4.4 चरणबद्ध प्रक्रिया . . . 1552
44.5 उदाहरण . . . 1554
44.5.1 उदाहरण 44.1: फ्रेम . . . 1554
44.5.1.1 प्रारंभिक विवरण . . . 1554
44.5.2 उदाहरण 44.3: ट्रस . . . 1565

45 दृढता आव्यूह के गणितीय गुण; अभिकलनीय विषय **1569**
45.1 कुप्रतिबद्ध आव्यूह . . . 1569
45.1.1 अभिलक्षणिक मान . . . 1569
45.1.1.1 अभिलक्षणिक मानों की भौतिक व्याख्या . . . 1572
45.1.2 प्रतिबंध संख्या . . . 1574
45.1.3 कुप्रतिबद्ध दृढता आव्यूह . . . 1575
45.1.3.1 उदाहरण 45.1: कुप्रतिबद्ध . . . 1578

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

45.2 संख्यात्मक विचार 1579
45.2.1 प्रतिलोमन बनाम अपघटन 1579
45.2.2 नोडीय क्रमांकन 1580

46 विशेष विषय **1584**
46.1 संघनन/उपसंरचनाकरण 1584
46.2 स्थैतिकी और शुद्धगतिकी के समीकरण 1585
46.2.1 स्थैतिकी आव्यूह $\mathcal{B}$ 1585
46.2.1.1 व्युत्पत्ति 1585
46.2.1.2 स्थैतिकतः निर्धार्य 1585
46.2.1.2.1 उदाहरण 46.1: स्थैतिकतः निर्धार्य ट्रस का स्थैतिकी आव्यूह 1586
46.2.1.2.2 उदाहरण 46.2: धरन का स्थैतिकी आव्यूह 1587
46.2.1.3 स्थैतिकतः अनिर्धार्य 1588
46.2.1.3.1 उदाहरण 46.3: स्थैतिकतः अनिर्धार्य ट्रस का स्थैतिकी आव्यूह 1589
46.2.1.4 अतिरिक्त बलों की पहचान 1590
46.2.1.4.1 उदाहरण 46.4: अतिरिक्त बलों का चयन 1591
46.2.1.5 शुद्धगतिक अस्थिरता 1593
46.2.2 शुद्धगतिकी आव्यूह $\mathcal{A}$ 1593
46.2.2.1 उदाहरण 46.5: शुद्धगतिकी आव्यूह: ट्रस उदाहरण 1594
46.2.3 स्थैतिकी-शुद्धगतिकी आव्यूह संबंध 1595
46.2.3.1 स्थैतिकतः निर्धार्य 1595
46.2.3.2 स्थैतिकतः अनिर्धार्य 1596
46.3 स्थैतिकी आव्यूह के प्रतिलोम द्वारा शुद्धगतिक संबंध 1597
46.4 दृढता-नम्यता संबंध 1598
46.4.1 दृढता से नम्यता 1598
46.4.1.1 उदाहरण 46.6: नम्यता आव्यूह 1599
46.4.2 नम्यता से दृढता 1599
46.4.2.1 उदाहरण 46.7: नम्यता से दृढता 1600
46.4.2.2 उदाहरण 46.8: वक्र अवयव का दृढता आव्यूह 1602
46.4.3 नम्यता और दृढता विधियों के बीच द्वैतता 1603
46.5 **K** के लिए सर्वांगसम रूपांतरण उपागम 1604
46.5.1 उदाहरण 46.9: सर्वांगसम रूपांतरण 1605
46.5.2 उदाहरण 46.10: फ्रेम का सर्वांगसम रूपांतरण 1607
46.6 विशेष अवयव 1609
46.6.1 दृढ विस्थापन; 1609
46.6.2 अर्ध-दृढ धरन 1612
46.6.3 परिवर्ती अनुप्रस्थ काट 1617
46.7 आघूर्ण फ्रेमों में पार्श्व विस्थापन के स्रोत 1619

47 यांत्रिकी में विचरण कलन: यूलर-लाग्रांज रूपरेखा **1633**
47.1 परिचय 1633

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

47.2 Euler . . . 1634
47.2.1 प्रारंभिक बातें . . . 1634
47.2.2 $\delta\Pi$ का अवकल रूप . . . 1636
47.2.3 यूलर समीकरण . . . 1637
47.2.4 $\delta\Pi$ . . . 1638
47.2.5 प्रेक्षण . . . 1639
47.2.6 परिसीमा प्रतिबंध . . . 1639
47.2.6.1 उदाहरण 47.1: यूलर: अक्षीय . . . 1640
47.2.6.2 उदाहरण 47.2: यूलर: बंकन . . . 1642
47.3 कुल स्थितिज ऊर्जा सिद्धांत . . . 1643
47.4 Hamilton . . . 1646
47.4.1 गतिक; यूलर/लाग्रांज . . . 1646
47.4.1.1 विविक्त निकाय . . . 1646
47.4.1.2 सांतत्य निकाय . . . 1648
47.4.2 उदाहरण 47.3: Hamilton . . . 1650
47.5 सामान्य Hu-Washizu विचरण सिद्धांत . . . 1653
47.6 “छद्म-Tonti” आरेख . . . 1656
47.6.1 D’Alembert का सिद्धांत . . . 1656
47.6.2 Hamilton के समीकरण . . . 1657
47.6.3 Lagrange के समीकरण . . . 1657

48 संरचनात्मक विश्लेषण में विचरण और ऊर्जा सिद्धांत 1662
48.1 परिचय . . . 1662
48.1.1 ऊष्मागतिकी . . . 1663
48.1.2 मूल संबंध . . . 1663
48.1.3 परिभाषाएँ . . . 1664
48.1.4 वास्तविक पद . . . 1664
48.1.5 आभासी व्यंजक . . . 1666
48.1.6 टिप्पणियाँ . . . 1667
48.1.6.1 आंतरिक कार्य बनाम विकृति ऊर्जा . . . 1667
48.1.6.2 बाह्य कार्य की पथ-स्वतंत्रता . . . 1668
48.1.7 1D अवयवों पर अनुप्रयोग . . . 1669
48.1.7.1 पूरक ऊर्जा, रैखिक प्रत्यास्थ U^* . . . 1669
48.1.7.2 ऊर्जा, रैखिक प्रत्यास्थ U . . . 1670
48.1.7.3 पूरक आभासी विकृति ऊर्जा δU^* . . . 1670
48.1.7.4 आभासी विकृति ऊर्जा δU . . . 1672
48.1.8 VW और CVW का सारांश . . . 1674
48.2 उपागम . . . 1675
48.3 आभासी कार्य . . . 1676
48.3.1 पूरक आभासी कार्य का सिद्धांत (PCVW) . . . 1676
48.3.1.1 व्युत्पत्ति . . . 1676

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

48.3.1.2 उदाहरण 48.1: PCVW, क्रमशः परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाली कैंटिलीवर धरन . . . 1679
48.3.2 उदाहरण 48.2: तीन-कब्ज़ों वाली अर्धवृत्ताकार मेहराब . . . 1680
48.3.3 आभासी कार्य का सिद्धांत (PVW) . . . 1681
48.3.3.1 व्युत्पत्ति . . . 1681
48.3.3.2 उदाहरण 48.3: PVW, क्रमशः परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाली कैंटिलीवर धरन . . . 1683
48.4 स्थितिज ऊर्जा के सिद्धांत . . . 1685
48.4.1 कुल स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत (PTPE) . . . 1685
48.4.1.1 व्युत्पत्ति . . . 1685
48.4.1.2 उदाहरण 48.4: PTPE, कमानी और द्रव्यमान . . . 1687
48.4.1.3 उदाहरण 48.5: PTPE; परिवर्ती I वाली आबद्ध धरन . . . 1688
48.4.2 कुल पूरक स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत (PTCPE) . . . 1689
48.5 कास्टिलियानो के प्रमेय . . . 1689
48.5.1 प्रथम प्रमेय . . . 1689
48.5.1.1 उदाहरण 48.6: अरेखीय प्रत्यास्थ ट्रस . . . 1691
48.5.2 द्वितीय प्रमेय . . . 1692
48.5.2.1 उदाहरण 48.7: कास्टिलियानो 2; कैंटिलीवर धरन . . . 1693
48.5.2.2 उदाहरण 48.8: कास्टिलियानो 2; कास्टिलियानो के द्वितीय प्रमेय से समान रूप से भारित धरन का विक्षेप . . . 1693
48.5.2.3 उदाहरण 48.9: कास्टिलियानो 2, अरेखीय ट्रस . . . 1694
48.5.2.4 उदाहरण 48.10: कास्टिलियानो 2, कमानी का विक्षेप . . . 1694
48.6 रेले–रिट्ज विधि . . . 1695
48.6.1 व्युत्पत्ति . . . 1695
48.6.1.1 उदाहरण 48.11: रेले–रिट्ज: समान रूप से भारित सरल आलंबित धरन . . . 1696
48.6.1.2 उदाहरण 48.12: विचरणात्मक विधियाँ . . . 1697
48.7 सारांश . . . 1705

49 अंतर्वेशन फलन **1709**
49.1 परिचय . . . 1709
49.1.1 आकार फलनों के अभिलक्षण . . . 1709
49.1.2 पास्कल त्रिभुज . . . 1710
49.1.3 निर्देशांक निकाय . . . 1711
49.1.3.1 कार्तीय . . . 1711
49.1.3.2 प्राकृतिक . . . 1712
49.1.3.3 त्रिकोणीय . . . 1713
49.1.4 सातत्य . . . 1716
49.2 आकार फलन . . . 1716
49.2.1 प्रत्यक्ष सूत्रीकरण . . . 1716
49.2.1.1 ट्रस अवयव; रेखीय . . . 1716
49.2.1.2 सामान्यीकरण . . . 1718
49.2.1.3 स्थिर-विकृति त्रिभुज अवयव . . . 1718

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

49.2.1.4 आयताकार द्विरेखीय अवयव 1720
49.2.1.5 ईंट द्वित्रिरेखीय अवयव 1721
49.2.2 लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलन 1723
49.2.2.1 चतुर्भुज 1723
49.2.2.2 त्रिभुज 1724
49.2.2.3 ट्रस अवयव; द्विघाती 1725
49.2.2.4 धरन 1726
49.2.3 हर्मिटीय अंतर्वेशन फलन 1729
49.2.3.1 धरन आकार फलनों पर पुनर्विचार 1730
49.2.3.2 चतुर्भुज अवयव 1732
49.2.3.2.1 रेखीय चतुर्भुज (q4) 1732
49.2.3.2.2 द्विघाती चतुर्भुज 1733
49.2.3.2.2.1 सेरेनिडपिटी अवयव (q8) 1733
49.2.3.2.2.2 लैग्रांजीय अवयव (q9) 1734
49.2.3.3 परिवर्ती (पदानुक्रमिक) अवयव 1737
49.2.3.4 त्रिकोणीय अवयव (t6) 1737

50 रैखिक अवयव सूत्रीकरण **1741**
50.1 परिचय 1741
50.2 परिमित अवयव 1742
50.2.1 परिचय 1742
50.2.2 विकृति–विस्थापन संबंध 1742
50.2.2.1 अक्षीय सदस्य 1742
50.2.2.2 आनमनी सदस्य 1743
50.2.3 आभासी विस्थापन और विकृतियाँ 1743
50.2.4 अवयव दृढता आव्यूह सूत्रीकरण 1743
50.2.5 प्रतिबल पुनर्प्राप्ति 1745
50.3 अनुप्रयोग 1745
50.3.1 कैंची अवयव 1745
50.3.2 आनमनी अवयव 1746
50.4 सामान्य अवयव अपेक्षाएँ 1747
50.5 विविक्तीकरण त्रुटि और अभिसरण दर 1748
50.6 न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा-आधारित हलों का निम्न-सीमा स्वरूप 1750
50.7 हल में साम्य और सुसंगतता 1750

51 समप्राचलीय अवयव **1753**
51.1 परिचय 1753
51.2 अवयव सूत्रीकरण 1755
51.2.1 दंड अवयव 1755
51.2.2 चतुर्भुज (q4); विस्तृत सूत्रीकरण 1757
51.2.3 त्रिकोणीय अवयव 1761
51.2.3.1 T3 त्रिभुज 1761

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

51.2.3.2 T6 त्रिभुज 1763
51.2.4 उदाहरण 51.1: Jacobian operators 1764
51.3 संख्यात्मक समाकलन 1765
51.3.1 न्यूटन–कोट्स 1766
51.3.2 गाउस–लेजांद्र चतुर्थांश विधि 1768
51.3.2.1 लेजांद्र बहुपद 1770
51.3.2.2 $n = 2$ के लिए गाउस–लेजांद्र चतुर्थांश विधि 1770
51.3.3 आयताकार और प्रिज़्मीय क्षेत्र 1771
51.3.4 त्रिकोणीय क्षेत्र 1771
51.4 प्रतिबल पुनर्प्राप्ति; आसंधीय प्रतिबल 1771
51.5 आसंधीय तुल्य भार 1774
51.5.1 गुरुत्व भार 1775
51.5.2 कर्षण भार 1776
51.5.3 प्रारंभिक विकृतियाँ/प्रतिबल; तापीय भार 1777
51.5.4 समाकलन की कोटि 1778
51.5.4.1 पूर्ण समाकलन 1778
51.5.4.2 अपचयित समाकलन 1779
51.5.4.3 चयनात्मक अपचयित समाकलन 1780
51.6 परजीवी अपरूपण/असुसंगत अवयव 1781
51.6.1 Q4, समस्या 1781
51.6.2 Q6, समाधान 1782
51.6.3 Qm6, अतिरिक्त सुधार 1782
51.7 घूर्णी स्वातंत्र्य-कोटियाँ 1783

52 भारित अवशेष विधियाँ **1785**
52.1 परिचय 1785
52.2 सामान्य सूत्रीकरण 1786
52.2.1 अवकल संकारक 1786
52.2.1.1 उदाहरण 52.1: 1D अक्षीय सदस्य की सममिति और धनात्मक निश्चितता की जाँच 1786
52.2.2 अवशेष सूत्रीकरण 1787
52.3 भारित अवशेष विधियाँ 1789
52.3.1 बिंदु सहस्थान विधि 1789
52.3.2 उपक्षेत्र सहस्थान विधि 1789
52.3.3 न्यूनतम-वर्ग विधि 1790
52.3.4 गैलर्किन विधि 1790
52.3.4.1 उदाहरण 52.2: तंतु कंपन 1790
52.4 3D प्रत्यास्थता समस्याओं में गैलर्किन विधि के अनुप्रयोग 1792
52.4.1 दुर्बल रूप की व्युत्पत्ति 1792
52.4.2 परिमित अवयव विविक्तीकरण 1795
52.4.2.1 उदाहरण 52.3: धरन अवयव का दृढता आव्यूह 1796
52.4.2.2 उदाहरण 52.4: ऊष्मा अंतरण 1798

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53 गतिकी II **1802**
53.1 परिचय . . . 1803
53.2 गतिक विश्लेषण हेतु ढाँचा आदर्शीकरण . . . 1804
53.2.1 अक्षीय बनाम आनमनी दृढता . . . 1804
53.2.2 प्रतिरूपण . . . 1804
53.2.2.1 उदाहरण 53.1: पार्श्व भार के प्रति भवन की रैखिक प्रत्यास्थ प्रतिक्रिया का मोंटे कार्लो अनुकरण . . . 1808
53.3 समस्या निरूपण . . . 1808
53.3.1 विचरणात्मक निरूपण . . . 1808
53.3.2 द्रव्यमान निरूपण . . . 1811
53.3.3 अवमंदन . . . 1812
53.3.3.1 उदाहरण 53.2: अपरूपण भवन के लिए रेले अवमंदन गुणांकों का अंशांकन 1813
53.3.3.2 उदाहरण 53.3: विश्लेषणात्मक आधाररेखा: सामान्य प्रारंभिक दशाओं से मुक्त कंपन . . . 1814
53.3.4 संख्यात्मक तकनीक: ऑयलर विधियाँ . . . 1816
53.3.4.1 उदाहरण 53.4: ऑयलर विधि . . . 1817
53.4 काल विविक्तीकरण . . . 1817
53.4.1 अंतर्निहित . . . 1819
53.4.1.1 न्यूमार्क विधि . . . 1819
53.4.1.1.1 व्युत्पत्ति . . . 1819
53.4.1.1.2 न्यूमार्क β अंतर्निहित विधि . . . 1820
53.4.1.2 हिल्बर-ह्यूजेस-टेलर विधि . . . 1822
53.4.2 स्पष्ट काल समाकलन . . . 1824
53.4.2.1 रैखिक निकाय . . . 1824
53.4.2.2 अरैखिक निकाय . . . 1827
53.5 गतिक विश्लेषण की संख्यात्मक विधियाँ . . . 1827
53.5.1 केंद्रीय अंतर विधि . . . 1827
53.5.2 उदाहरण 53.5: केंद्रीय अंतर स्थिरता काल चरण . . . 1828
53.5.3 न्यूमार्क-बीटा विधि . . . 1828
53.5.4 विधा अध्यारोपण बनाम प्रत्यक्ष समाकलन . . . 1829
53.6 सतत निकाय . . . 1829
53.6.1 छडों का अक्षीय कंपन . . . 1830
53.6.1.1 उदाहरण 53.6: इस्पात बंधन-छड की तरंग चाल और अक्षीय प्राकृतिक आवृत्तियाँ . . . 1830
53.6.2 धरनों का अनुप्रस्थ कंपन . . . 1831
53.7 अरैखिक गतिकी . . . 1832
53.7.1 अरैखिकता के स्रोत . . . 1832
53.7.2 तन्यता और क्षमता अभिकल्प . . . 1833
53.8 व्यावहारिक विचार . . . 1833
53.8.1 वास्तविक संरचनाओं में अवमंदन . . . 1833
53.8.2 मृदा-संरचना अंतःक्रिया . . . 1833

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53.8.3 समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक 1834
53.8.4 आधार वियोजन 1834
53.9 सारांश 1834

54 परिचय **1838**
54.1 परिचय 1838
54.1.1 अरैखिकताओं के स्रोत 1838
54.1.2 अरैखिक विश्लेषण क्यों 1840
54.2 संरचनात्मक अरैखिक विश्लेषणों के प्रकार 1841
54.3 वृद्धिशील भार/विस्थापन 1844
54.4 सुरक्षा 1844
54.4.1 पारिभाषिक शब्दावली 1844
54.4.2 सुरक्षा & भार 1845
54.5 अभिकल्प संहिताएँ 1846
54.5.1 परिचय 1846
54.5.2 विकास: प्राचीन काल 1847
54.5.2.1 मेसोपोटामिया; हम्मुराबी 1847
54.5.2.2 रोमन; वित्रुवियस 1848
54.5.3 आधुनिक काल 1849
54.5.3.1 स्वीकार्य प्रतिबल अभिकल्प, ASD 1851
54.5.3.2 भार एवं प्रतिरोध गुणांक अभिकल्प, LRFD 1851
54.5.3.3 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी 1852
54.5.4 सारांश 1853

55 सुघट्यता I: तंतु & सातत्य (परिमित-अवयव विश्लेषण के लिए) **1855**
55.1 परिचय 1856
55.2 सुघट्य पराभव प्रतिबंध 1856
55.2.1 द्रवस्थैतिक दाब से स्वतंत्र प्रतिरूप 1856
55.2.2 द्रवस्थैतिक दाब पर निर्भर प्रतिरूप 1858
55.3 प्रयोगशाला प्रेक्षण 1860
55.3.1 धातुएँ 1860
55.3.2 कंक्रीट 1861
55.4 सूक्ष्मदर्शीय विफलताएँ 1862
55.4.1 रासायनिक आबंध 1862
55.4.2 तन्य और भंगुर विफलताएँ 1863
55.4.3 विस्थापन-दोष 1863
55.5 सुघट्यता के मूलाधार 1864
55.5.1 परिचय 1864
55.5.2 स्पर्शरेखीय प्रत्यास्थता मापांक 1865
55.5.2.1 सामान्यीकृत व्युत्पत्ति 1866
55.5.2.1.1 पराभव फलन; समदैशिक कठोरण प्रतिरूप 1866
55.5.2.1.2 प्रवाह नियम 1866

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

55.5.2.1.2.1 कून–टकर प्रतिबंध 1867
55.5.2.1.3 संगतता प्रतिबंध 1868
55.5.2.1.4 सुपरशाज्या मापांक 1868
55.5.2.2 सुपरशाज्या मापांक: अभियांत्रिकी व्युत्पत्ति 1869
55.5.2.3 उदाहरण 55.1: सुपरशाज्या मापांक 1870

56 सुघट्यता II: परिच्छेद **1874**
56.1 परिचय 1874
56.2 सैद्धांतिक रूपरेखा: धारणाएँ और प्रमुख परिणाम 1874
56.3 आघूर्ण–वक्रता: $M - \Phi$ 1876
56.3.1 आघूर्ण–वक्रता संबंध से 1878
56.3.1.1 उदाहरण 56.1: अरैखिक परिच्छेदीय विश्लेषण: वैश्लेषिक 1878
56.3.2 प्रतिबल–विकृति संबंध से 1880
56.3.2.1 उदाहरण 56.2: परतदार: इस्पात 1881
56.3.2.2 उदाहरण 56.3: परतदार: कंक्रीट/ACI 1886
56.4 आघूर्ण–वक्रता का सामान्यीकरण 1888
56.4.1 वैश्लेषिक उपागम 1888
56.4.1.1 उदाहरण 56.4: I-आकार R/C परिच्छेद की आघूर्ण–वक्रता 1890
56.4.1.2 अंतःक्रिया आरेख $M - N$ 1895
56.4.2 संख्यात्मक उपागम 1896

57 सुघट्यता III: संरचना–पराभव रेखाएँ **1901**
57.1 परिचय 1902
57.2 रैखिक अवयव (धरन, ढाँचे) 1903
57.2.1 शुद्धगतिक: ऊपरी सीमा 1903
57.2.1.1 उदाहरण 57.1: आबद्ध धरन: केंद्रीय भार 1906
57.2.1.2 उदाहरण 57.2: आबद्ध धरन: उत्केंद्रित भार 1906
57.2.1.3 उदाहरण 57.3: सतत धरन 1907
57.2.1.4 उदाहरण 57.4: लंबकोणीय ढाँचा 1907
57.2.1.5 उदाहरण 57.5: आनत ढाँचा 1908
57.2.2 स्थैतिकी; निचली सीमा 1909
57.2.2.1 उदाहरण 57.6: आधारित बाहुधरन I 1912
57.2.2.2 उदाहरण 57.7: आधारित बाहुधरन II 1912
57.2.2.3 उदाहरण 57.8: आबद्ध धरन 1913
57.2.2.4 उदाहरण 57.9: आनत ढाँचा 1914
57.3 समतलीय अवयव (पट्टिकाएँ) 1918
57.3.1 स्थैतिकी: निचली सीमा 1919
57.3.1.1 उदाहरण 57.10: वर्गाकार पट्टिका 1920
57.3.2 शुद्धगतिकी: ऊपरी सीमा 1920
57.3.2.1 उदाहरण 57.11: आयताकार पट्टिका 1922
57.4 पुशओवर विश्लेषण 1923
57.5 निचली सीमा विश्लेषण और 1924
57.5.1 पुशओवर विश्लेषण के बीच अनुरूपताएँ 1924

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

57.5.2 संहत सुघट्यता 1928

58 क्षति यांत्रिकी **1932**

58.1 ChatGPT द्वारा प्रस्तावित रूपरेखा 1932
58.1.1 अभिप्रेरणा और भौतिक आधार (~1.5 pages) 1932
58.2 ऊष्मागतिकीय संरूपण (~2 pages) 1932
58.3 अदिश समदैशिक क्षति: मज़ार्स प्रतिरूप (~4 pages) 1932
58.4 तनाव–संपीडन असममिति और एकपक्षीय प्रभाव (~2 pages) 1932
58.5 क्षति–सुघट्यता युग्मन (~2 pages) 1933
58.6 नियमितीकरण और जालक वस्तुनिष्ठता (~3 pages) 1933
58.7 धरन और स्तंभ अवयवों पर अनुप्रयोग (~3 pages) 1933
58.8 प्राचल-अभिज्ञान और व्यावहारिक मार्गदर्शिका (~1.5 pages) 1933
58.9 ग्रंथसूची टिप्पणियाँ और आगे का अध्ययन (~0.5 pages) 1933

59 अरैखिक विश्लेषण; सामग्री **1934**

59.1 संख्यात्मक मूल-निर्धारण 1934
59.1.1 न्यूटन विधियाँ 1935
59.1.1.1 परिचय 1935
59.1.1.2 टेलर श्रेणी और रैखिकीकरण 1936
59.1.1.2.1 उदाहरण 59.1: न्यूटन विधि, अदिश 1938
59.1.1.3 अभिसरण और त्रुटि आकलन 1940
59.1.1.4 अंतिम टिप्पणियाँ 1941
59.1.1.4.1 उदाहरण 59.2: न्यूटन विधि; सदिश 1941
59.1.2 छेदक विधि 1942
59.1.3 स्पष्ट 1943
59.2 संरचनात्मक यांत्रिकी से संबंध; अंतर्निहित 1944
59.3 समाकलन विधियाँ 1945
59.3.1 भार नियंत्रण 1945
59.3.1.1 न्यूटन–रैफसन/स्पर्शरेखीय दृढता विधि 1945
59.3.1.2 संशोधित न्यूटन–रैफसन 1950
59.3.1.3 छेदक न्यूटन 1950
59.3.1.4 अभिसरण मानदंड 1951
59.3.1.5 सारांश तालिका 1952
59.3.2 विस्थापन नियंत्रण 1954

60 अरैखिक विश्लेषण; ज्यामितीय **1958**

60.1 ज्यामितीय दृढता आव्यूह 1959
60.1.1 व्युत्पत्ति 1959
60.1.1.1 दुर्बल रूप 1959
60.1.1.2 विकृति 1959
60.1.1.3 आंतरिक विकृति ऊर्जा 1960
60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$ 1961

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

60.1.2 प्रत्यास्थ अस्थिरता; द्विशाखन विश्लेषण 1962
60.1.2.1 उदाहरण 60.1: स्तंभ व्याकुंचन 1963
60.1.2.2 उदाहरण 60.2: ढाँचा व्याकुंचन; Matlab समाधान 1964
60.1.2.3 उदाहरण 60.3: ढाँचा व्याकुंचन; Mathematica समाधान 1967
60.1.2.4 उदाहरण 60.4: बंकनीय विरूपण पर अक्षीय भार का प्रभाव 1967
60.2 वृद्धिशील स्पष्ट विश्लेषण 1970
60.2.1 उदाहरण 60.5: ब्रैकट धरन का बृहत् विक्षेप 1972
60.3 $P-\Delta$ पर पुनर्विचार 1976
60.3.1 उदाहरण 60.6: $\mathbf{K}_{geom}$ के बिना व्याकुंचन भार 1976

61 अरैखिक; अवयव सूत्रीकरण **1981**
61.1 परिचय 1982
61.2 ट्रस अवयव 1982
61.2.1 2D ट्रस अवयव का निर्देश-तंत्र 1983
61.2.2 अवस्था निर्धारण 1984
61.3 धरन–स्तंभ अवयव सूत्रीकरण 1985
61.3.1 दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव 1985
61.3.1.1 दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव का निर्देश-तंत्र 1987
61.3.1.2 अवस्था निर्धारण 1989
61.3.1.3 “प्रच्छन्न” त्रुटि 1992
61.3.1.4 दृढता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण 1992
61.4 स्तर/तंतु परिच्छेद 1996
61.4.1 नम्यता-विधि 2D धरन–स्तंभ अवयव 1999
61.4.1.1 नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव का निर्देश-तंत्र 2002
61.4.1.2 अवस्था निर्धारण 2004
61.4.1.2.1 अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति के बिना 2004
61.4.1.2.2 अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति पाश सहित . . 2007
61.4.1.3 नम्यता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण 2012
61.4.1.3.1 अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति के बिना 2012
61.4.1.3.2 अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति पाश सहित . . 2015
61.4.2 दृढता-आधारित *बनाम* नम्यता-आधारित अवयव 2019
61.5 शून्य-लंबाई 2D अवयव सूत्रीकरण 2024
61.5.1 शून्य-लंबाई 2D अवयव में निर्देश-तंत्र 2024
61.5.2 अवयव अवस्था निर्धारण 2025
61.6 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव 2028
61.6.1 दृढता आव्यूह 2028
61.6.2 निर्देश-तंत्र 2029
61.6.3 अवयव अवस्था निर्धारण 2030
61.7 संख्यात्मक समाकलन 2032
61.8 अवयव बल 2032

62 वितरित एवं संकेंद्रित सुघट्यता के संघटक प्रतिरूप **2033**

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.1 परिचय 2034
62.1.1 रैखिक ताप-प्रत्यास्थता 2034
62.1.2 अनुमानी प्रतिरूप 2035
62.2 वितरित सुघट्यता 2037
62.2.1 इस्पात प्रतिरूप 2037
62.2.1.1 परिचय 2037
62.2.1.2 समदैशिक दृढीकरण सहित द्विरैखिक प्रतिरूप 2037
62.2.1.2.1 प्रतिबल–विकृति संबंध 2037
62.2.1.2.2 द्विरैखिक प्रतिरूप का निर्धारण 2039
62.2.1.3 मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप 2040
62.2.2 कंक्रीट प्रतिरूप 2047
62.2.2.1 परिरोध का प्रभाव 2047
62.2.2.2 संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप 2048
62.2.2.2.1 प्रतिबल–विकृति संबंध 2048
62.2.2.2.2 संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप का निर्धारण 2055
62.2.3 प्रभावी क्षति और दृढता पुनर्प्राप्ति सहित विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप 2058
62.2.3.1 संघटक प्रतिरूप 2058
62.2.3.2 एकाक्षीय बहु-तंतु सूत्रीकरण 2060
62.2.3.3 विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण 2061
62.2.3.3.1 तनन भारण: 2061
62.2.3.3.2 संपीडन भारण: 2062
62.2.3.4 स्थायी विकृतियों सहित विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप 2069
62.2.3.4.1 एकाक्षीय संख्यात्मक योजना 2069
62.2.4 बंध–फिसलन 2072
62.2.5 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव 2074
62.3 संकेंद्रित सुघट्यता 2077
62.3.1 सुघट्य लंबाई 2077
62.3.1.1 सुघट्य कब्जों के संभावित स्थान 2078
62.3.1.2 वक्रता से विरूपण ($\Delta(\phi)$) 2078
62.3.1.3 प्रबलित कंक्रीट का प्रभावी जडत्व आघूर्ण और वक्रता 2080
62.3.1.4 सुघट्य कब्जा लंबाइयों के रूप में विरूपण 2081
62.3.1.4.1 प्रबलित कंक्रीट 2081
62.3.1.4.2 इस्पात 2085
62.3.1.5 उदाहरण 62.1: इस्पात स्तंभ में सुघट्य कब्जा 2086
62.3.2 अपरूपण विफलता मॉडल (सीमा-अवस्था सामग्री) 2087
62.3.2.1 परिचय 2087
62.3.2.2 अपरूपण सीमा-अवस्था मॉडल 2088
62.3.3 ऊर्जा अपव्यय को सम्मिलित करने वाले Ibarra शैथिल्य मॉडल 2091
62.3.3.1 शैथिल्य मॉडल 2095
62.3.3.1.1 शिखर-उन्मुख मॉडल 2097
62.3.3.1.2 संकुचन मॉडल 2099

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.3.3.2 सामर्थ्य-ह्रास विधाएँ . . . 2103
62.3.3.2.1 मूल सामर्थ्य-ह्रास विधा . . . 2106
62.3.3.2.2 कैप-पश्चात सामर्थ्य-ह्रास विधा . . . 2108
62.3.3.2.3 भारमोचन दृढता-ह्रास विधा . . . 2109
62.3.3.2.4 त्वरित पुनर्भारण दृढता-ह्रास विधा . . . 2110
62.3.3.3 सारांश . . . 2112
62.3.4 Ghannoum का मॉडल . . . 2112
62.3.4.1 आधार-वक्र . . . 2112
62.3.4.2 चक्रीय व्यवहार . . . 2114

63 परिमित अवयव प्रतिरूपण का विज्ञान और कला 2116
63.1 परिचय . . . 2116
63.1.1 परिमित अवयव जाल/विश्लेषण का सत्यापन . . . 2120
63.1.2 प्रतिरूप सत्यापन और मान्यकरण की अवधारणाएँ . . . 2120
63.2 जाल निर्माण . . . 2121
63.2.1 स्थूल अवयव . . . 2122
63.2.1.1 उदाहरण 63.1: स्तंभ प्रतिरूपण . . . 2125
63.2.1.2 उदाहरण 63.2: धरन प्रतिरूपण . . . 2127
63.2.2 अनुप्रस्थ काट . . . 2127
63.2.3 “चुनें और जोड़ें” . . . 2128
63.2.4 समापन टिप्पणियाँ . . . 2128
63.3 ह्रास प्राचलों का निर्धारण . . . 2129
63.3.1 अंशांकन . . . 2130
63.3.1.1 प्राचल पहचान . . . 2130
63.3.2 प्रतिरूपण प्राचलों का आँकड़ा-संग्रह . . . 2130
63.3.2.1 Peer/Berry . . . 2130
63.3.2.1.1 स्तंभ गुण . . . 2131
63.3.2.1.2 आनमनी क्षमताओं का सारांश . . . 2131
63.3.2.1.3 उदाहरण . . . 2132
63.3.2.2 Stanford/Lignos . . . 2134
63.3.2.3 UTSA/Ghannoum . . . 2137
63.3.2.4 संतति परिमित अवयव/Dolati . . . 2137
63.3.2.5 ACI-437-A . . . 2138

अंतराल: अग्र-विश्लेषण से प्राचल अभिनिर्धारण तक 2139

64 आँकड़े और संदेह: अनिश्चितताएँ और संवेदनशीलता विश्लेषण 2142
64.1 परिचय . . . 2143
64.2 आँकड़ों की गुणवत्ता और संदेह के स्रोत . . . 2143
64.3 अनिश्चितता परिमाणन और विश्लेषण . . . 2144
64.3.1 निवेश अनिश्चितता का अभिलक्षणन . . . 2144
64.3.1.1 अनिश्चितताओं के प्रकार . . . 2144
64.3.1.2 गणितीय निरूपण . . . 2145

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

64.3.2 निर्भरता और सहसंबद्ध प्रतिचयन 2145
64.3.2.1 सहप्रसरण और सहसंबंध 2145
64.3.2.1.0.1 उदाहरण 64.1: सहसंबंध आव्यूह 2146
64.3.2.2 स्थानिक सहप्रसरण 2147
64.3.2.3 कालिक सहप्रसरण 2147
64.3.2.4 सहसंबद्ध नमूने उत्पन्न करना 2148
64.3.3 अनिश्चितता प्रसारण 2148
64.3.3.1 Monte Carlo अनुकरण (MCS) 2148
64.3.3.2 Latin Hypercube प्रतिचयन (LHS) 2149
64.3.3.2.0.1 उदाहरण 64.2: Latin Hypercube: दो चरों वाला हल किया गया उदाहरण 2151
64.3.3.3 प्रत्यक्ष प्रतिचयन के सन्निकट और प्रतिपूरक विकल्प 2153
64.3.3.3.1 बिंदु आकलन विधि (PEM) 2153
64.3.3.3.1.1 उदाहरण 64.3: बिंदु आकलन विधि का उदाहरण . . 2153
64.3.3.3.2 एक समय में एक (Taylor श्रेणी–परिमित अंतर आकलन TSFD) 2154
64.3.3.3.2.1 उदाहरण 64.4: Taylor श्रेणी परिमित अंतर विधि का उदाहरण 2155
64.3.3.3.3 बहुपदीय अराजकता प्रसार (PCE) 2156
64.3.3.3.3.1 उदाहरण 64.5: बहुपदीय अराजकता प्रसार 2156
64.3.4 निरूगम अनिश्चितता की व्याख्या 2157
64.4 संवेदनशीलता विश्लेषण 2158
64.4.1 Morris विधि 2158
64.4.1.1 उदाहरण 64.6: Morris विधि 2163
64.4.2 Sobol प्रसरण-आधारित संवेदनशीलता सूचकांक 2163
64.4.2.1 प्रथम-कोटि सूचकांक 2164
64.4.2.2 अन्योन्यक्रिया और कुल-प्रभाव सूचकांक 2164
64.4.2.3 व्याख्या 2164
64.4.2.4 परिकलन और लागत 2165
64.4.2.5 Morris छँटाई से संबंध 2165
64.4.3 प्रसारण और संवेदनशीलता विधियों की तुलना 2165
64.4.4 महत्त्वपूर्ण यादृच्छिक चरों का निर्धारण 2165
64.4.4.1 उदाहरण 64.7: Morris विधि; महत्त्वपूर्ण चरों की पहचान 2166
64.4.5 Tornado आरेख 2170
64.5 संवेदनशीलता विश्लेषण से प्राचल अभिनिर्धारण तक 2171

65 निर्णय: प्राचल अभिनिर्धारण विधियाँ **2174**
65.1 प्रतिलोम समस्या के रूप में प्राचल अभिनिर्धारण 2174
65.2 अनुप्रयोग और निर्णय संरचना 2175
65.2.1 संवेदनशीलता विश्लेषण से प्राचल अभिनिर्धारण तक 2176
65.2.2 निर्णय संरचना: कौन-सी विधि कब? 2176
65.3 आँकड़ा गुणवत्ता और सुदृढता 2177

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

65.3.1 आँकड़ा संदूषण के स्रोत . . . 2177
65.3.2 सुदृढ़ सहमति आकलन: RANSAC . . . 2177
65.3.2.1 कलनविधि . . . 2177
65.4 Levenberg–Marquardt कलनविधि . . . 2181
65.4.1 प्रतिरूपण उपागम और प्रतिरूप चयन . . . 2181
65.4.2 भारित अरैखिक न्यूनतम वर्ग . . . 2182
65.4.3 Levenberg–Marquardt अद्यतन चरण और कलनविधीय अंतर्बोध . . . 2182
65.4.4 उदाहरण 65.1: अरैखिक अतिपरवलयी प्रतिरूप का समंजन . . . 2183
65.4.5 मापक्रमण, परिसीमाएँ और नियमितीकरण . . . 2185
65.4.6 अभिनिर्धारणीयता . . . 2186
65.4.6.1 स्थानीय अनिश्चितता सन्निकटन . . . 2187
65.4.7 प्रतिरूप-विसंगति . . . 2187
65.5 बायेसियन प्राचल अभिनिर्धारण . . . 2187
65.5.1 बायेसियन प्राचल अभिनिर्धारण: निरूपण . . . 2188
65.5.2 MAP आकलन और बिंदु आकलन . . . 2189
65.5.3 प्राचलों के लिए पश्च-प्रतिचयन और MCMC . . . 2189
65.5.4 उदाहरण 65.2: द्विघाती आधार और मेट्रोपोलिस–हेस्टिंग्स प्रतिचयन सहित बायेसियन समाश्रयण . . . 2190
65.5.5 हल किया हुआ उदाहरण: ह्रास-प्राचलों के लिए बायेसियन अनुमान . . . 2191
65.5.6 बायेसियन अभिनिर्धारण का प्रयोग कब करें . . . 2191
65.6 व्यवहार में लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट कलनविधि . . . 2192
65.6.1 न्यूनतम-वर्ग व्यवहार . . . 2193
65.6.1.1 MATLAB प्राचल अभिनिर्धारण कार्यक्रम: विवरण . . . 2194
65.7 संकर कार्यप्रवाह और सर्वोत्तम व्यवहार . . . 2202
65.7.1 अंशांकन और वैधीकरण . . . 2202
65.7.2 संरचनात्मक अनुप्रयोग . . . 2202
65.7.3 कार्यप्रवाह निर्णय ढाँचा . . . 2202
65.8 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी की ओर सेतु . . . 2203

66 अंतराल **2207**
66.1 भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) की सीमाएँ . . . 2207
66.2 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) की ओर क्यों बढ़ें? . . . 2208
66.3 PBEE के चार घटक . . . 2209
66.4 पुस्तक की संरचना . . . 2209

67 संकट विश्लेषण **2211**
67.1 परिचय . . . 2212
67.2 पुनरावृत्ति संबंध . . . 2212
67.3 क्षीणन प्रतिरूप . . . 2215
67.3.1 मूल सिद्धांत . . . 2215
67.3.2 Boore, Joyner और Fumel (1997) . . . 2215
67.3.3 प्राचलीय मूल्यांकन . . . 2217

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

67.4 नियतात्मक भूकंपीय संकट विश्लेषण . . . 2218
67.5 प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण . . . 2219
67.6 घटना-समय . . . 2221
67.7 भूकंपीय संकट-वक्र . . . 2222
67.8 भूकंपीय संकट-मानचित्र . . . 2224
67.9 भूकंपीय संकट वियोजन . . . 2224
67.10 लक्ष्य प्रतिक्रिया-वर्णक्रम . . . 2225
67.11 यादृच्छिक भू-गति अनुकरण . . . 2229
67.11.1 Rezaeian और Der Kiureghian (r-d) प्रतिरूप . . . 2230
67.11.2 Yamamoto और Baker (y-b) प्रतिरूप . . . 2231
67.12 सहन-अवधि उत्तेजन फलन . . . 2233
67.12.1 ETEF की प्रथम पीढ़ी . . . 2234
67.12.2 ETEF की द्वितीय पीढ़ी . . . 2234
67.12.3 ETEF की तृतीय पीढ़ी . . . 2236
67.12.4 ETEF की चतुर्थ पीढ़ी . . . 2236
67.12.5 ETEF की पंचम पीढ़ी . . . 2237
67.13 उदाहरण 67.1: भूकंपीय संकट विश्लेषण . . . 2239

68 भूकंपीय संकट विश्लेषण II 2244
68.1 परिचय . . . 2245
68.2 वार्षिक अतिक्रमण दर . . . 2245
68.3 संकट वक्र . . . 2246
68.4 अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण (ESRA) . . . 2247
68.4.1 उदाहरण 68.1: प्रत्यावर्तन अवधि की गणनाएँ . . . 2248
68.5 SHA + ESRA के रूप में प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA) . . . 2249

69 संरचनात्मक विश्लेषण 2252
69.1 परिचय . . . 2253
69.2 आधारभूत परिभाषाएँ . . . 2254
69.3 क्षमता और माँग . . . 2255
69.3.1 माँग-क्षमता संबंध . . . 2255
69.3.2 माँग आकलन की विधियाँ . . . 2255
69.3.3 क्षमता अभिकल्प सिद्धांत . . . 2257
69.4 भूकंपीय विश्लेषण विधियाँ . . . 2258
69.4.1 पुशओवर विश्लेषण (POA) . . . 2258
69.4.1.1 उदाहरण 69.1: माँग वक्र का उदाहरण . . . 2263
69.4.1.2 उदाहरण 69.2: पुशओवर विश्लेषण; व्यावहारिक उदाहरण . . . 2264
69.4.2 वृद्धिशील गतिक विश्लेषण (IDA) . . . 2296
69.4.3 बहु-पट्टी विश्लेषण (MSA) . . . 2298
69.4.4 मेघ विश्लेषण (CLA) . . . 2300
69.4.5 सहन-अवधि विश्लेषण (ETA) . . . 2301
69.4.6 सारांश . . . 2303

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

69.5 आगे क्या है 2305

70 क्षति विश्लेषण **2308**
70.1 परिचय 2309
70.2 सीमा अवस्थाएँ 2310
70.2.1 सीमा अवस्थाओं का पदानुक्रम 2311
70.2.2 प्रायिकतामूलक रूपरेखा 2311
70.2.3 PBEE रूपरेखा में कार्यान्वयन 2312
70.2.4 अंशांकन और सत्यापन 2312
70.2.5 बहु-उद्देश्यीय विचार 2312
70.2.6 क्षति सूचकांकों से संबंध 2313
70.3 क्षति सूचकांक 2313
70.3.1 क्षति सूचकांक और निष्पादन मानदंड 2313
70.3.2 प्रायिकतामूलक क्षति आकलन की ओर संक्रमण 2315
70.3.3 क्षति का प्रायिकतामूलक निरूपण 2315
70.3.4 क्षति मापक और अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP) 2316
70.3.5 क्षति आकलन में chap:trustregion 2316
70.3.6 परिमाणात्मक क्षति मापक 2317
70.4 निष्पादन 2318
70.4.1 निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी रूपरेखा 2319
70.4.2 निष्पादन स्तर और स्वीकार्यता मानदंड 2320
70.4.3 सीमा अवस्थाओं, क्षति सूचकांकों और निष्पादन स्तरों का समेकन 2322
70.5 भंगुरता वक्रों और जोखिम आकलन की ओर संक्रमण 2323

71 हानि विश्लेषण **2325**

72 प्रायिकता जोखिम आकलन (⊇ PBEE)[23] **2328**
72.1 नए प्रतिमान: निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) 2329
72.1.1 भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) की सीमाएँ 2329
72.1.2 भाग I: सुपष्ट निष्पादन उद्देश्य 2330
72.1.2.1 विधि 2330
72.1.2.2 PBEE-1 की सीमाएँ 2331
72.1.2.3 अभिकल्प बनाम विश्लेषण 2332
72.1.3 भाग II: कार्यात्मक और आर्थिक परिणामों का प्रत्यक्ष परिमाण-निर्धारण: . 2332
72.1.3.1 परिचय 2332
72.1.3.2 सामान्य ढाँचा 2333
72.1.3.3 PBEE 1 और PBEE 2 के बीच अन्तर 2335
72.1.4 PBEE कार्यान्वयन की प्रक्रिया 2337
72.2 अनुक्रिया से क्षति तक: भंगुरता वक्र 2338
72.2.1 मूल सिद्धान्त और परिभाषाएँ 2339
72.2.2 भंगुरता वक्रों का विकास 2339
72.2.3 गणितीय निरूपण 2340

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

72.2.4 सतत फलन बनाम विविक्त आव्यूह 2341
72.3 PBEE ढाँचे में भूमिका 2343
72.4 उदाहरण 72.1: सम्पूर्ण PBEE उदाहरण 2344
72.5 ऐतिहासिक मील-पत्थर और आधारभूत प्रलेख 2348

परिशिष्ट

भाग 1: आधारभूत संदर्भ सामग्री

A इकाइयाँ **2352**
A.1 SI इकाइयाँ 2352
A.2 मेट्रिक उपसर्ग और गुणक 2353
A.3 इकाइयाँ और रूपांतरण गुणक 2353
A.4 विभिन्न मेट्रिक इकाइयों में बल, लंबाई, कार्य और प्रतिबल का सारांश 2354
A.5 भौतिक राशियों का मेट्रिक से इम्पीरियल इकाइयों में रूपांतरण 2354

B भार: अनुभवजन्य-आधारित अभिकल्प **2355**
B.1 स्थायी भार 2355
B.2 पवन भार 2355
B.2.1 उदाहरण B.1: पवन भार 2357
B.3 भूकंप 2359
B.3.1 उदाहरण B.2: फ्रेम पर भूकंप भार 2367
B.3.2 उदाहरण B.3: ऊँचे भवन पर भूकंप भार 2368
B.4 सेतु भार 2369
B.5 भार संयोजन 2369
B.6 चल भार न्यूनीकरण 2371
B.6.1 उदाहरण B.4: चल भार न्यूनीकरण I 2372
B.6.2 उदाहरण B.5: चल भार न्यूनीकरण II 2373
B.7 भार स्थान-निर्धारण 2373

C रैखिक समघात अवकल समीकरण **2375**
C.1 नियामक अवकल समीकरणों का सारांश 2375
C.2 समाधान 2376
C.3 स्थिरता i: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ 2376
C.4 स्थिरता ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 2378
C.5 प्रत्यास्थ नींव पर धरन; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ 2378

D प्रत्यास्थ मेहराब; उन्नत विश्लेषण **2380**
D.1 परिचय 2380
D.2 तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2382
D.2.1 विश्लेषण प्रक्रिया 2382
D.2.2 बिंदु भार 2382

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.2.3 स्वभार . . . 2389
D.2.4 समान रूप से वितरित भार . . . 2393
D.2.4.1 विक्षेप . . . 2395
D.2.5 तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन . . . 2395
D.2.6 निष्कर्ष . . . 2397
D.3 दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब . . . 2398
D.3.1 विश्लेषण प्रक्रिया . . . 2398
D.3.2 बिंदु भार . . . 2398
D.3.3 स्व-भार . . . 2410
D.3.4 समान रूप से वितरित भार . . . 2417
D.3.5 दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन . . . 2421
D.3.6 निष्कर्ष . . . 2423
D.4 कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब . . . 2424
D.4.1 विश्लेषण प्रक्रिया . . . 2424
D.4.2 बिंदु भार . . . 2424
D.4.3 स्व-भार . . . 2438
D.4.4 समान रूप से वितरित भार . . . 2446
D.4.5 कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन . . . 2451
D.4.6 निष्कर्ष . . . 2453
D.5 निष्कर्ष . . . 2453

भाग 2: संरचनात्मक विश्लेषण एवं अभिकल्प सारणियाँ

E बेलनाकार शेलों की विश्लेषण सारणियाँ **2455**

F बैरल शेल छतों का अभिकल्प **2468**

G अलामिलो सेतु का आँकड़ा-समुच्चय **2497**

H आइडेंटिकॉन: दृश्य हैशिंग **2502**
H.1 आइडेंटिकॉन का परिचय . . . 2502
H.2 आइडेंटिकॉन-निर्माण कलनविधियाँ . . . 2503
H.3 GitHub और Stack Exchange के आइडेंटिकॉन कार्यान्वयनों की तुलना . . . 2505
H.4 हमारा MATLAB कार्यान्वयन . . . 2505
H.5 मूल कोड खंड . . . 2508
H.6 प्रोग्राम का उपयोग . . . 2509
H.7 लाभ और अनुप्रयोग . . . 2509
H.8 निष्कर्ष . . . 2510

भाग 3: कोड कार्यान्वयन

I MATLAB®, Mathematica Codes **2511**
I.1 Part I: Fundamental and Computational Analysis Methods . . . 2512
I.1.1 Statics matrix of a truss B . . . 2513

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.1.2 St louis arch shape . . . 2515
I.1.3 Arbitrary three hinged circular arch; mathematica . . . 2516
I.1.4 Collapse of masonry arches . . . 2527
I.1.5 Main . . . 2527
I.1.6 Large deflection of a beam . . . 2538
I.2 Part II: Structural Design and Analysis . . . 2542
I.2.1 Design of cylindrical shells . . . 2542
I.2.2 Approximate frame analysis; cantilever method . . . 2555
I.2.3 Non uniform torsion . . . 2566
I.2.4 Orthogonal frame . . . 2569
I.2.5 Hybrid orthogonal frame . . . 2572
I.2.6 Frame; hard-wired . . . 2576
I.2.7 Direct stiffness method; frame . . . 2580
I.2.8 Main code . . . 2580
I.2.9 Stiffness matrix of non-prismatic members . . . 2592
I.2.10 Isostatic lines . . . 2598
I.2.11 Evolutionary design . . . 2604
I.2.12 Main . . . 2604
I.2.13 Column interaction diagram . . . 2609
I.2.14 Variational methods; mathematica . . . 2612
I.2.15 Monte Carlo simulation of a building's linear elastic response to lateral load . . . 2623
I.2.16 Isoparametric elements . . . 2625
I.3 Part III: Material Modeling and Constitutive Behavior . . . 2637
I.3.1 Incremental plasticity . . . 2637
I.3.2 Constitutive models . . . 2641
I.3.3 Bilinear model . . . 2642
I.3.4 Hardening . . . 2645
I.3.5 Hysteresis . . . 2649
I.3.6 Modified giuffre monegotto pinto . . . 2668
I.3.7 Modified kent park . . . 2673
I.3.8 Ibarra . . . 2677
I.3.8.1 Hysteresis . . . 2677
I.3.8.2 Hysteresis pinch . . . 2696
I.3.9 Limit state shear . . . 2717
I.4 Part IV: Data-Driven Methods and Parameter Identification . . . 2739
I.4.1 Parameter Identification Program . . . 2739
I.4.2 Main Program and Core Orchestration . . . 2739
I.4.3 Data I/O and Spreadsheet Integration . . . 2749
I.4.4 Optimization Workflow and Auxiliary Functions . . . 2759
I.5 Part V: Numerical and Statistical Foundations . . . 2772
I.5.1 Levenberg-Marquardt . . . 2772

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.5.2 Numerical techniques . . . 2773
I.5.3 FFT and butterworth filters . . . 2773
I.5.4 Singular value decomposition . . . 2776
I.5.5 Preconditioning . . . 2778
I.5.6 Random Sampling Consensus (RANSAC) . . . 2779
I.5.7 Latin Hypercube . . . 2784
I.5.8 Bayesian regression with a quadratic basis . . . 2789
I.5.9 Markov chain Monte Carlo Simulation . . . 2796
I.6 Part VI: Optimization and Parameter Fitting . . . 2798
I.6.1 Levenberg-Marquardt . . . 2798
I.6.2 Custom Implementation . . . 2798
I.6.3 Using Built-in Function . . . 2801
I.7 Part VII: Seismic Reliability and Uncertainty . . . 2803
I.7.1 Seismic hazard analysis . . . 2803
I.7.2 Performance Based Earthquake Engineering . . . 2805
I.8 Part VIII: Utility . . . 2810
I.8.1 Identicon . . . 2810

J Mathcad के उदाहरण **2816**

भाग 4: संख्यात्मक एवं सांख्यिकीय विधियाँ

K भूकंपीय अभिलेख निस्यंदन (तीव्र फूरियर रूपांतरण) **2982**
K.1 फूरियर रूपांतरण की गणना . . . 2983

L रैखिक बीजगणित की समीक्षा **2988**
L.1 आव्यूहों के विषय में . . . 2988
L.1.1 परिभाषाएँ . . . 2988
L.1.2 प्राथमिक आव्यूह संक्रियाएँ . . . 2990
L.1.3 सारणिक . . . 2991
L.1.4 प्रतिलोमन . . . 2992
L.2 रैखिक समीकरणों के समाधान . . . 2992
L.2.1 कार्यनीतियाँ . . . 2992
L.2.2 अपघटन . . . 2993
L.2.2.1 गाउस विलोपन . . . 2994
L.2.2.2 गाउस-जॉर्डन विलोपन . . . 2994
L.2.2.3 **LU** अपघटन . . . 2995
L.2.2.4 चोलेस्की अपघटन . . . 2997
L.2.2.5 विचित्र मान अपघटन . . . 2998
L.2.2.6 QR अपघटन . . . 3000
L.2.3 अप्रत्यक्ष विधियाँ . . . 3000
L.2.3.1 गाउस-सीडेल . . . 3000
L.3 आव्यूह-अभिलक्षण और संगणकीय संवर्द्धन . . . 3001

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

L.3.1 विचित्रता और कोटि . . . 3001
L.3.2 अभिलक्षणिक मान और अभिलक्षणिक सदिश . . . 3002
L.3.3 अनुबंधन संख्या . . . 3003
L.3.4 पूर्वानुबंधन . . . 3003
L.3.4.1 वाम पूर्वानुबंधन . . . 3004
L.3.4.2 दक्षिण पूर्वानुबंधन . . . 3005
L.4 उदाहरण . . . 3006
L.4.1 उदाहरण L.1: गाउस विलोपन . . . 3006
L.4.2 उदाहरण L.2: गाउस-जॉर्डन विलोपन . . . 3007
L.4.3 उदाहरण L.3: **lu** अपघटन . . . 3008
L.4.4 उदाहरण L.4: चोलेस्की अपघटन . . . 3009
L.4.5 उदाहरण L.5: गाउस-सीडेल . . . 3010
L.4.6 उदाहरण L.6: गाउस-सीडेल . . . 3011
L.4.7 उदाहरण L.7: एकल मान अपघटन . . . 3011
L.4.8 उदाहरण L.8: पूर्वानुकूलन . . . 3012

M प्रायिकता और सांख्यिकी **3016**
M.1 प्रायिकता और सांख्यिकी का परिचय . . . 3016
M.2 प्रायिकता की मूलभूत संकल्पनाएँ . . . 3016
M.2.1 नियतात्मक *बनाम* प्रायिकतामूलक . . . 3016
M.2.2 परिभाषा . . . 3017
M.2.3 सशर्त प्रायिकता . . . 3018
M.2.4 यादृच्छिक चरों के प्रकार . . . 3019
M.3 प्रायिकता-विश्लेषण के सांख्यिकीय उपकरण . . . 3019
M.3.1 संचयी वितरण फलन . . . 3020
M.3.2 विश्वास अंतराल . . . 3021
M.4 सांख्यिकीय माप . . . 3022
M.4.1 आघूर्ण और केंद्रीय प्रवृत्ति के माप . . . 3022
M.4.2 चरों के बीच संबंध . . . 3025
M.5 वितरण . . . 3025
M.5.1 एकचर वितरण . . . 3025
M.5.1.1 तुलना . . . 3028
M.5.2 द्विचर वितरण . . . 3030

N विश्वसनीयता सूचकांक **3033**

भाग 5: उन्नत सिद्धांत एवं इष्टतमीकरण

O विकृत्य पिंडों की यांत्रिकी: एक परिचय **3039**
O.1 परिचय . . . 3039
O.1.1 संकेतन . . . 3040
O.1.2 प्रदिश . . . 3042
O.1.2.1 संक्रियाएँ . . . 3042

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

O.1.2.2 अक्षों का घूर्णन . . . 3044
O.1.2.3 प्रदिश रूपांतरण . . . 3045
O.1.2.4 सममित द्वितीय-कोटि प्रदिशों के प्रमुख मान . . . 3046
O.1.3 प्रतिबल अपरिवर्तों की भौतिक व्याख्या . . . 3047
O.2 सदिश क्षेत्र; विकृत्य पिंडों की यांत्रिकी . . . 3049
O.2.1 बल . . . 3049
O.2.2 कॉशी का प्रतिबल प्रदिश . . . 3049
O.2.2.1 द्रवस्थैतिक और विचलित प्रतिबल प्रदिश . . . 3051
O.2.2.2 प्रतिबल अवस्थाओं का ज्यामितीय निरूपण . . . 3052
O.2.3 शुद्धगतिकी . . . 3052
O.2.3.1 स्थिति और विस्थापन . . . 3052
O.2.3.2 विकृतियाँ . . . 3053
O.3 सातत्य यांत्रिकी के मूलभूत नियम . . . 3055
O.3.1 संरक्षण नियम . . . 3056
O.3.2 अभिवाह . . . 3056
O.3.3 द्रव्यमान संरक्षण; सातत्य समीकरण . . . 3057
O.3.4 संवेग संरक्षण; गति समीकरण . . . 3058
O.3.5 ऊर्जा संरक्षण; ऊष्मागतिकी का प्रथम सिद्धांत . . . 3060
O.4 संघटक समीकरण . . . 3062
O.4.1 सामान्य त्रिविम (3D) अवस्था . . . 3063
O.4.2 अनुप्रस्थ समदैशिक अवस्था . . . 3064
O.4.3 विशेष द्विविम (2D) अवस्थाएँ . . . 3064
O.5 परिघटनात्मक प्रेक्षण . . . 3065
O.5.1 भार, विस्थापन और विकृति-नियंत्रित परीक्षण . . . 3066
O.5.2 इस्पात और कंक्रीट की चरम-पूर्व/चरमोत्तर द्रव्य अनुक्रिया . . . 3067
O.6 विरूपण का स्थानीयकरण . . . 3068
O.6.1 प्रायोगिक साक्ष्य . . . 3068
O.6.1.1 σ-cod आरेख, हिलरबोर्ग प्रतिरूप . . . 3068
O.7 सीमा प्रतिबंध . . . 3071
O.8 टोंटी आरेख . . . 3072
O.9 आंतरिक बल की संकल्पना . . . 3072

P वेस्टरगार्ड को श्रद्धांजलि 3074
P.1 दरार-अग्र प्रतिबल क्षेत्र . . . 3074
P.1.1 एरी प्रतिबल फलन . . . 3074
P.1.2 समाधान . . . 3077
P.2 तरल-संरचना अंतःक्रिया . . . 3082

Q विश्वास-क्षेत्र तथा लेवेनबर्ग-मार्क्वार्ट विधियाँ 3096
Q.1 विश्वास-क्षेत्र . . . 3097
Q.2 कलनविधि . . . 3100
Q.3 MATLAB®सूत्रीकरण . . . 3101

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Q.4 वास्तविक-समय दृश्यांकन 3104

R सदिश कलन: एक परिचय **3105**

R.1 मूल परिभाषाएँ 3105
R.1.1 अदिश के सापेक्ष अवकलज 3105
R.1.1.1 उदाहरण R.1: वक्र की स्पर्शरेखा 3107
R.1.2 अपसरण 3107
R.1.2.1 सदिश 3107
R.1.2.1.1 उदाहरण R.2: सदिश का अपसरण 3109
R.1.2.2 द्वितीय-कोटि प्रदिश 3109
R.1.3 प्रवणता 3110
R.1.3.1 अदिश क्षेत्र 3110
R.1.3.1.1 उदाहरण R.3: अदिश क्षेत्र की प्रवणता I 3110
R.1.3.1.2 उदाहरण R.4: अदिश क्षेत्र की प्रवणता ii 3111
R.1.3.2 सदिश क्षेत्र 3112
R.1.3.2.1 उदाहरण R.5: सदिश क्षेत्र की प्रवणता 3113
R.2 समाकल प्रमेय 3113
R.2.1 सदिश का समाकल 3113
R.2.2 रेखा समाकल 3114
R.2.3 खंडशः समाकलन 3114
R.2.4 गाउस: अपसरण प्रमेय 3114
R.2.4.1 उदाहरण R.6: अपसरण प्रमेय की भौतिक व्याख्या 3115
R.2.5 स्टोक्स प्रमेय 3116
R.2.6 ग्रीन: प्रवणता प्रमेय 3116

भाग II–IV एवं परिशिष्टों के संदर्भ **3117**

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चित्र-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण)

17.1 संरचनात्मक विश्लेषण: व्यापक परिप्रेक्ष्य 825
17.2 संरचनात्मक तत्त्वों में बलों के प्रकार (1d) 831
17.3 केबल तंत्रों के मूल पक्ष 832
17.4 मेहराबों के मूल पक्ष 833
17.5 ट्रसों के प्रकार 833
17.6 स्तंभ और धरन के विन्यासों में विविधताएँ 834
17.7 धरनों के विभिन्न प्रकार 834
17.8 फ्रेमों के मूल रूप 835
17.9 वायु-समर्थित संरचनाओं के उदाहरण 836
17.10 कवचों के मूल रूप 836
17.11 संरचनात्मक अभियांत्रिकी के पाठ्यक्रमों का अनुक्रम 838

18.1 संयुक्त राज्य का हिम-मानचित्र 841
18.2 वायुपत्रक और बेर्नूली समीकरण 842
18.3 संयुक्त राज्य का पवन-मानचित्र 843
18.4 संरचनाओं पर पवन भार का प्रभाव 844
18.5 संयुक्त राज्य का भूकंपीय मानचित्र 845
18.6 संरचनाओं पर मृदा और जलस्थैतिक भार 847
18.7 प्रक्षेपित भार 851
18.8 आघूर्णों को अधिकतम करने के लिए भार का स्थान 852
18.9 R/C भवनों में भार-संचरण 855
18.10 पट्टिकाओं में एकदिश और द्विदिश क्रियाएँ 855
18.11 गॉथिक गिरजाघरों और छिछले मेहराबों में भार-संचरण तंत्र 857
18.12 संरचनात्मक सदस्यों पर भार के लिए प्रभावी क्षेत्रफलों की संकल्पना 858
18.13 संरचना का भार-जीवन, (Lin and Stotesbury, 1981) 860

19.1 आधार परिसीमाओं के उदाहरण 863
19.2 लियोनार्डो (Da Vinci, 1490) से काल्डर तक आघूर्णों का संतुलन 865
19.3 आनत रोलर आधार की प्रतिक्रियाएँ 866
19.4 स्थैतिक अनिर्धार्यता की कोटि 867
19.5 समवर्ती आधार-प्रतिक्रियाएँ 867
19.6 विभिन्न भारों के अधीन धरन के मुक्त-पिंड आरेख 868

20.1 स्थैतिकतः अनिर्धार्य ट्रस 889
20.2 बलों और लंबाइयों के बीच संबंध 890
20.3 बलों का तीरों द्वारा निरूपण 890
20.4 संधि/आव्यूह-विधि: संधि के मुक्त-पिंड आरेख 899
20.5 जटिल स्थैतिकतः निर्धार्य ट्रस 900

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

21.1 आंतरिक प्रतिबल . . . 907
21.2 ऋजुरेखीय और वक्र धरनों में आंतरिक बल . . . 908
21.3 आंतरिक बल . . . 910
21.4 अभिकल्प के लिए अपरूपण और आघूर्ण की चिह्न-परिपाटियाँ . . . 910
21.5 अभिकल्प चिह्न-परिपाटियाँ . . . 910
21.6 धरन के अतिसूक्ष्म खंड का मुक्त-पिंड आरेख . . . 911
21.7 भार, अपरूपण और आघूर्ण के परिवर्तन . . . 913

22.1 वक्रता और विकृतियाँ . . . 938
22.2 धरन की विपरीत वक्रताओं के लिए वक्रता-क्षेत्र विधि की चिह्न परिपाटी . . . 949
22.3 वक्रता-क्षेत्र विधियाँ . . . 950
22.4 आघूर्ण-क्षेत्र विधि द्वारा अधिकतम विक्षेप . . . 953
22.5 संयुग्मी धरन . . . 959

23.1 शुद्ध अपरूपण-विरूपण . . . 964
23.2 अपरूपण प्रतिबल के अधीन अतिसूक्ष्म अवयव . . . 965
23.3 अपरूपण प्रतिबल और गुणांक . . . 967
23.4 ऐंठन–घूर्णन संबंध . . . 970
23.5 वार्पन क्यों होता है . . . 972
23.6 असमान ऐंठन ((McGuire and Winter, 1968) से अनुकूलित) . . . 974
23.7 ऐंठन के अधीन I-धरन . . . 975

24.1 स्वेच्छ संरचना में आभासी और वास्तविक बल . . . 982
24.2 Maxwell-Betti पारस्परिक प्रमेय . . . 986

25.1 स्थैतिकतः अनिर्धार्य 3-केबल संरचना . . . 1012
25.2 आधारयुक्त कैंटिलीवर बीम . . . 1014
25.3 लचीलापन विधि के लिए व्याख्यात्मक समस्या . . . 1015
25.4 दो अज्ञातों वाली लचीलापन विधि का निरूपण . . . 1016
25.5 क्वीन-पोस्ट से प्रेरित संरचनाओं के उदाहरण . . . 1032
25.6 तीन आघूर्ण समीकरण की व्युत्पत्ति . . . 1037
25.7 तीन आघूर्ण समीकरण के भार पद . . . 1039

26.1 दृढता विधि की चिह्न परिपाटी . . . 1043
26.2 दृढता पदों के लिए आनमनी समस्या का सूत्रीकरण . . . 1045

27.1 ढाल-विक्षेप विधि का व्याख्यात्मक उदाहरण . . . 1053
27.2 आघूर्ण वितरण की प्रमुख संकल्पनाएँ . . . 1064

28.1 Müller-Breslau सिद्धांत . . . 1076

29.1 दृढ दंड की स्थिरता . . . 1088
29.2 प्रारंभिक अपूर्णता सहित दृढ दंड की स्थिरता . . . 1089

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

29.3 सरल आलंबित धरन-स्तंभ; अवकल खंड; अक्षीय बल p का प्रभाव 1091
29.4 दो स्वतंत्रता-कोटि वाला गतिक निकाय 1103
29.5 धरनों और ढाँचों की प्रभावी लंबाइयाँ 1105
29.6 बहु-खण्डीय, बहु-मंजिला ढाँचों में स्तंभों की प्रभावी लंबाइयाँ 1105
29.7 अर्ध-लचीले संयोजनों के लिए संरेखण आलेख (American Institute of Steel Construction, 2016) 1106
29.8 अप्रत्यास्थ कुंचन 1108
29.9 Euler कुंचन और SSRC स्तंभ वक्र 1108

30.1 केबल सिद्धांत का सत्यापन 1113
30.2 केबल ज्यामिति # 1 1116
30.3 केबल ज्यामिति # 2 1118
30.4 एकसमान क्षैतिज अनुप्रस्थ भार के अधीन आनत केबल की ज्यामिति 1124
30.5 केबल की दृढता 1125
30.6 कैटेनरी के वैकल्पिक संदर्भ निर्देशांक 1136
30.7 आनत जीवा वाली कैटेनरी, (Cella, 1999) 1138
30.8 कैटेनरी तथा परवलय पर आधारित हलों की तुलना 1143

31.1 वूस्वार क्या है 1145
31.2 de la Hire द्वारा मेहराबों का विश्लेषण 1147
31.3 बडी संख्याओं के वर्गमूल तथा घनमूल निकालने की de Belidor, B. F., 1757 की विधियाँ 1147
31.4 de La Hire के अनुसार मेहराबों के ऊर्ध्वाधर आलंब (*pied-droit*) के विमा-निर्धारण हेतु Belidor की सारणी; de Belidor, B. F., 1757 1148
31.5 मेहराबों का विश्लेषण (de Belidor, B. F., 1729) 1149
31.6 Belidor का विफलता निकष (Brandonisio and De Luca, 2020) 1150
31.7 मेहराबों का विश्लेषण (Couplet, 1729) 1151
31.8 Danyzy, 1732 के प्लास्टर मॉडल 1152
31.9 Coulomb, 1773 द्वारा घर्षणरहित वूस्वारों का विश्लेषण 1153
31.10 Moseley का न्यूनतम प्रतिरोध सिद्धांत (Moseley, 1869) 1154
31.11 Charles Mosca वूस्वार पुल (Turin), जिसका विश्लेषण (Castigliano, 1879) ने किया 1155
31.12 Winkler द्वारा मेहराबों का प्रत्यास्थ विश्लेषण (Winkler, 1880) 1156
31.13 वूस्वार मेहराबों की स्थिरता की जाँच हेतु Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 द्वारा प्रयुक्त प्रायोगिक उपकरण। 1156
31.14 वूस्वार की क्रमिक विफलता Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 1157
31.15 Pippard and Baker, 1943 द्वारा वूस्वारों का विश्लेषण 1158
31.16 मेहराब के खंडों के आर-पार बलों का प्रवाह 1162
31.17 मूलबिंदु पर बल-समुच्चय का निर्धारण 1165
31.18 वूस्वार में MATLAB®द्वारा उत्पन्न किलकों का क्रम 1167
31.19 पतन क्रियाविधियाँ; अंत्याधार प्रणोद (Nobile and Bartolomeo, 2014) 1170

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

31.20 उलटा फनिक्युलर बहुभुज तथा संगत प्रणोद रेखा और उत्केंद्रता 1171
31.21 तीन-किलक अर्धवृत्तीय मेहराब की विफलता विधा 1172
31.22 किलक-स्थानों का क्रम 1172

32.1 बीम की तुलना में मेहराब अथवा निलंबन प्रणाली में आघूर्ण-प्रतिरोधी बल, (Lin and Stotesbury, 1981) 1175
32.2 तीन-किलक मेहराब की स्थैतिकी 1176
32.3 दो-किलक मेहराब, आबद्ध-सिरा बीम से अनुरूपता (Lin and Stotesbury, 1981) . . . 1182
32.4 मेहराब-खंड का गुरुत्व-केंद्र 1191
32.5 सूक्ष्म मेहराब-खंड का साम्य 1193
32.6 एकसमान भार के लिए इष्टतम परवलयी मेहराब 1198
32.7 किलकरहित परवलयी मेहराब; मुक्त-पिंड आरेख 1204
32.8 आरंभिक अवतलन और तापमान-परिवर्तन का प्रभाव 1209
32.9 Louvre संग्रहालय (Paris) की सर्पिल सीढ़ी और Sagrada Familia गिरजाघर (Barcelona) 1216
32.10 आकाश में वक्र संरचना की ज्यामिति 1216
32.11 आकाश में वक्र संरचना का मुक्त-पिंड आरेख 1217

33.1 पट्टिका में विस्थापन और प्रतिबल 1223
33.2 आंतरिक परिणामक 1226
33.3 प्रतिबल-वितरण 1231
33.4 वृत्तीय पट्टिका के सूक्ष्म अवयव का साम्य 1235

34.1 अवकल कवच-अवयव, ज्यामिति, प्रतिबल और उनके परिणामक 1243
34.2 अवकल अवयव की शुद्धगतिकी 1244
34.3 अवकल कवच-अवयव का साम्य 1246
34.4 अवकल कवच अवयव, V_x प्रतिबल परिणामक 1250
34.5 अवकल कवच अवयव, प्रमुख वक्रताएँ 1251
34.6 अवकल कवच अवयव, प्रारंभिक एवं विरूपित अवस्था 1255
34.7 अवकल कवच अवयव, प्रारंभिक एवं विरूपित अवस्था; धनात्मक भुजाओं की लंबाई में वृद्धि से उत्पन्न अपरूपण विकृति 1257
34.8 अवकल कवच अवयव, प्रारंभिक एवं विरूपित अवस्था; घूर्णन 1258
34.9 अवकल अवयव का मध्य-पृष्ठ 1260
34.10 कवचों का वर्गीकरण 1270
34.11 वे कवच जिनमें झिल्ली धारणा (अधिकांशतः) वैध है 1271
34.12 अतिपरवलयज और गुंबद के अतिसूक्ष्म अवयवों के मुक्त-पिंड आरेख 1271
34.13 अतिसूक्ष्म वृत्तीय कवच अवयव का मुक्त-पिंड आरेख 1274
34.14 साधारणतः समर्थित पूर्ण वृत्तीय कवच में प्रतिबल परिणामक वितरण 1278
34.15 किनारी प्रभाव 1279
34.16 वृत्तीय कवच में लगाया गया संशोधक रेखा-भार 1280
34.17 ज्या श्रेणी का आलेख 1280
34.18 स्थैतिकतः अनिर्धार्य कवच और बीम के सादृश्य 1298

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.19 प्रत्यास्थ समर्थन पर टिके वृत्तीय कवच 1299

35.1 आदर्शीकृत एकल-स्वतंत्रता-कोटि दोलक 1320
35.2 हार्मोनिक प्रणोदन के अधीन अवमंदित SDOF दोलक के संकल्पनात्मक गतिक प्रवर्धन वक्र 1328
35.3 त्वरण अनुक्रिया वर्णक्रम S_a, जो विभिन्न अवमंदन अनुपातों के लिए प्राकृतिक आवर्तकाल T_n का फलन है। 1338
35.4 सरलतः आलंबित धरन की प्रथम तीन विधा-आकृतियाँ 1341
35.5 सममित चक्रीय भारण के अधीन द्विरेखीय प्रत्यास्थ-सुघट्य शैथिल्य पाश। 1348

36.1 वास्तुकार–संरचनात्मक अभियंता की पुनरावर्ती अन्योन्यक्रियाएँ 1358
36.2 धरन में माँग और क्षमता 1359
36.3 सुरक्षा 1359
36.4 C और D के प्रायिकता वितरण फलन 1362
36.5 β के पदों में विफलता की प्रायिकता 1364
36.6 विदरित प्रबलित-कंक्रीट अनुभाग का सीमा-अवस्था विश्लेषण 1365
36.7 विह्टनी प्रतिबल खंड 1367
36.8 स्तंभ के मुक्त-पिंड और अन्योन्यक्रिया आरेख 1375
36.9 स्तंभ का मुक्त-पिंड, संतुलित अवस्था 1376

38.1 संगत कोना-घूर्णन 1402
38.2 सरल धरन का विक्षेप 1403
38.3 ऊर्ध्वाधर भार के अधीन दृढ स्तंभों वाले पोर्टल ढाँचे का विक्षेप 1403
38.4 ऊर्ध्वाधर भार के अधीन पोर्टल ढाँचे का विक्षेप 1404
38.5 पार्श्व भार के अधीन पोर्टल ढाँचे का उदाहरण 1404
38.6 विक्षेपित आकृति और आघूर्ण आरेख; पार्श्व भार वाला पोर्टल ढाँचा 1405
38.7 आधार-दृढताओं के पदों में धरन विक्षेप 1406
38.8 ऊर्ध्वाधर भार के अधीन ढाँचा; नति-परिवर्तन बिंदुओं के सन्निकट स्थान 1407
38.9 ऊर्ध्वाधर भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; गर्डर आघूर्ण 1408
38.10 ऊर्ध्वाधर भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; स्तंभ के अक्षीय बल 1409
38.11 ऊर्ध्वाधर भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण 1410
38.12 पार्श्व भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; स्तंभ अपरूपण 1411
38.13 पार्श्व भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; गर्डर आघूर्ण 1412
38.14 छोटे भवन में अपरूपण विरूपण, (Lin and Stotesbury, 1981) 1433
38.15 ऊँचे भवन में आनमनी विरूपण, (Lin and Stotesbury, 1981) 1434
38.16 दो तनु भित्तियों और लिंटलों से बनी भवन-संरचना में विक्षेप, (Lin and Stotesbury, 1981) 1435
38.17 एक बेंट का विरूपण (Lin and Stotesbury, 1981) 1436
38.18 दृढ ढाँचा उपतंत्र का अपरूपण और आनमनी विक्षेप, (Lin and Stotesbury, 1981) . 1437
38.19 असममित ऊर्ध्वाधर भार से पार्श्व-दोलन विक्षेप, (Lin and Stotesbury, 1981) . . 1437

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

40.1 समय-निर्भर विकृति; विसर्पण और संकुचन 1484
40.2 भवन के तापीय भार 1485
40.3 चिह्न-परिपाटी, अभिकल्प और विश्लेषण (चित्र 26.1) 1485
40.4 अवयव के आंतरिक बल और स्थानीय स्वतंत्रता कोटियाँ 1486
40.5 स्वतंत्र विस्थापन 1487
40.6 स्थानीय और वैश्विक निर्देशांक तंत्र/स्वतंत्रता कोटियाँ 1488
40.7 स्थैतिक और गतिकीय अनिर्धार्यता की कोटियाँ 1490
40.8 परिसीमा मान समस्या 1491

41.1 दृढता पद K_{ij} की परिभाषा 1493
41.2 विभिन्न प्रकार के अवयवों के दृढता गुणांक 1494
41.3 3D धरन-स्तंभ अवयव की स्वतंत्रता-कोटियाँ 1496
41.4 3D धरन-स्तंभ अवयव में पृथक दृढता पद 1498
41.5 आरोपित विकृतियों से उत्पन्न परजीवी अपरूपण विकृति 1500
41.6 वारिपंग अवरोध सहित मरोड अवयव के अंत्य बल और विस्थापन 1503

42.1 नम्यता और दृढता विधियों की तुलना के लिए धरन उदाहरण 1505
42.2 शुद्धगतिक अनिर्धार्यता की कोटि निर्धारित करने के लिए धरन उदाहरण 1506

43.1 स्थानीय ($\mathbf{k}^e$) और वैश्विक ($\mathbf{K}^e$) अवयव दृढता आव्यूह 1531
43.2 2D धरन-स्तंभ के लिए रूपांतरण आव्यूह 1532
43.3 स्वेच्छ 3D सदिश रूपांतरण 1534
43.4 Z (अथवा z) के सापेक्ष 2D फ्रेम अवयव का घूर्णन 1536
43.5 ग्रिड अवयव का घूर्णन 1537
43.6 व्लासोव धरन का रूपांतरण आव्यूह 1538
43.7 2D ट्रस का घूर्णन 1538
43.8 लघुकृत 3D घूर्णन 1540
43.9 ऊर्ध्वाधर सदस्यों के लिए 3D रूपांतरण की विशेष स्थिति 1541
43.10 जटिल 3D घूर्णन 1542

44.1 अनवरुद्ध और अवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियाँ 1548
44.2 संरचनात्मक विविक्तीकरण का उदाहरण 1549
44.3 [**ID**] आव्यूह निर्धारण का उदाहरण 1550
44.4 **LM** निर्धारणों के उदाहरण 1551
44.5 वैश्विक दृढता आव्यूह के समंजन की प्रक्रिया 1552

45.1 विस्थापनों का बलों में प्रतिचित्रण 1570
45.2 एकक विस्थापन वृत्त का बल दीर्घवृत्त में प्रतिचित्रण, (Gavin, 2012)। 1571
45.3 अभिलक्षणिक मान परीक्षण समस्या 1574
45.4 कुप्रतिबद्ध **K** उत्पन्न करने वाला सदस्य संयोजन 1575
45.5 K_1 K_2 के पदों में कुप्रतिबद्ध आव्यूह 1577
45.6 नोडीय क्रमांकन का महत्त्व 1581

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

45.7 संरचनात्मक दृढता आव्यूह की भंडारण आवश्यकताएँ 1582

46.1 ट्रस अवयव की शुद्धगतिकी 1594
46.2 स्थिर और स्थैतिकतः निर्धार्य अवयव 1598
46.3 दृढ विस्थापन वाली धरन 1610
46.4 दृढ विस्थापन वाली धरन का मुक्त-पिंड आरेख 1610
46.5 नम्य, दृढ और अर्ध-दृढ धरन 1612
46.6 अर्ध-दृढ धरन के विरूपण 1613
46.7 अर्ध-नम्य संयोजनों के लिए $\overline{K}_{22}$ गुणांक 1616
46.8 फ्रेम नियतांकों की हस्तपुस्तिका से उद्धरण (Portland Cement Association, 1947) 1617
46.9 परिवर्ती काट वाला धरन 1618
46.10 रैखिक रूप से परिवर्ती गहराई वाला काट; प्राचलिक अध्ययन 1620
46.11 परवलयिक रूप से परिवर्ती गहराई वाला काट; प्राचलिक अध्ययन 1620

47.1 विचरण और अवकल संकारक 1635
47.2 आवश्यक और प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंधों के उदाहरण 1640
47.3 कुल स्थितिज ऊर्जा विधि के लिए Tonti आरेख 1645
47.4 Hu-Washizu के लिए Tonti आरेख, (Červenka, 1994) 1658
47.5 Lagrange, Hamilton और D'Alembert के लिए Tonti आरेख 1659

48.1 कर्षण की परिभाषा 1664
48.2 विकृति और पूरक विकृति ऊर्जा घनत्व 1665
48.3 स्थितिज ऊर्जा 1666
48.4 U और W_i पर भार इतिहासों का प्रभाव 1667
48.5 आभासी और पूरक आभासी कार्य के सिद्धांतों के निदर्शी आरेख 1676
48.6 क्वांटम और चिरसम्मत यांत्रिकी में न्यूनीकरण 1687
48.7 विचरणात्मक विधियों का सारांश 1706
48.8 विचरणात्मक सिद्धांतों का द्वैत 1707

49.1 सरल रेखा के अनुदिश प्राकृतिक निर्देशांक निकाय 1712
49.2 त्रिभुज के लिए प्राकृतिक निर्देशांक निकाय 1714
49.3 त्रिभुज पर समाकलन 1715
49.4 अक्षीय परिमित अवयव 1717
49.5 स्थिर-विकृति त्रिभुज अवयव 1719
49.6 आयताकार द्विरेखीय अवयव 1720
49.7 4-आसंधीय चतुर्भुज अवयव के आकार फलन 1722
49.8 ठोस त्रिरेखीय आयताकार अवयव 1722
49.9 3-आसंधीय रेखीय त्रिकोणीय अवयव के आकार फलन 1725
49.10 तीन-आसंधीय द्विघाती छड अवयव 1725
49.11 आनमनी परिमित अवयव 1726
49.12 एकसमान धरन अवयव के आनमन के लिए आकार फलन 1728
49.13 चार-आसंधीय समप्राचलीय अवयव 1732

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

49.14 सेरेनिडपिटी और लैग्रांजीय द्विघाती चतुर्भुज 1733
49.15 चतुर्भुज और त्रिभुज अवयवों के लिए पास्कल त्रिभुज 1733
49.16 सेरेनिडपिटी समप्राचलीय द्विघाती परिमित अवयव: वैश्विक और जनक अवयव 1734
49.17 8-आसंधीय चतुर्भुज अवयव के आकार फलन 1735
49.18 9-आसंधीय चतुर्भुज अवयव के आकार फलन 1738
49.19 समप्राचलीय अवयवों के लिए आसंधीय क्रमांकन 1738
49.20 6-आसंधीय द्विघाती त्रिकोणीय अवयव के आकार फलन 1740

50.1 पूर्णता और सुसंगतता 1748
50.2 h, p और r अभिसरण 1749
50.3 प्रतिबल का अंतरावयवीय सातत्य 1751
50.4 विकृति का अंतरावयवीय सातत्य 1751

51.1 कुछ अवयवों का द्विविमीय प्रतिचित्रण 1754
51.2 वास्तविक और जनक अवयव 1754
51.3 सम, अधि और अव-प्राचलीय अवयव 1755
51.4 वक्ररेखीय निर्देशांक निकाय में अवकल अवयव 1759
51.5 दो सदिशों का सदिश गुणनफल 1760
51.6 संभावित एकल जैकोबियन वाला अवयव 1761
51.7 न्यूटन–कोट्स संख्यात्मक समाकलन 1766
51.8 पृष्ठ पर गाउस–लेजांद्र समाकलन 1771
51.9 त्रिभुज पर संख्यात्मक समाकलन 1772
51.10 4-आसंधीय चतुर्भुज के गाउस बिंदुओं से बहिर्वेशन (Felippa, 1999) 1773
51.11 गुरुत्व भारण 1775
51.12 समप्राचलीय अवयवों में कर्षण भार 1776
51.13 सन्निहित समप्राचलीय अवयवों में कर्षण भार 1777
51.14 द्विरेखीय अवयव की स्वतंत्र विस्थापन विधाएँ 1780
51.15 अल्प-समाकलित द्विघाती अवयव में आवरग्लास विधाएँ 1780
51.16 आनमन के अधीन आयताकार द्विरेखीय अवयव; द्विरेखीय अवयव और सही ज्यामिति . 1781
51.17 q6 अवयव की असुसंगत विधाओं से संबद्ध विस्थापन 1782
51.18 ड्रिलिंग स्वातंत्र्य-कोटियों द्वारा प्रेरित पार्श्व विस्थापन 1783

53.1 अक्षीय *बनाम* आनमनी दृढताएँ 1805
53.2 अक्षीय दृढता की उपेक्षा पर अबाधित विस्थापनों में कमी 1805
53.3 भूकंपीय भार हेतु भवन का प्रतिरूपण 1806
53.4 आसंधि का मुक्त-पिंड आरेख 1807
53.5 द्रव्यमान- और दृढता-समानुपाती अवमंदन 1813
53.6 अग्र ऑयलर बनाम पश्च ऑयलर विधियाँ 1818

54.1 ज्यामितीय अरैखिकता: बृहद् विक्षेप का उदाहरण (**B**), 29.2.3 1839
54.2 पदार्थगत अरैखिकता: तंतु (**D**) 1840

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

54.3 पदार्थगत अरैखिकता: अनुप्रस्थ काट (**D**) 1840
54.4 रैखिक *बनाम* अरैखिक विश्लेषण 1841
54.5 संरचनात्मक विश्लेषण के प्रकार 1843
54.6 भार-विक्षेप वक्र और विभिन्न अनुक्रिया परास 1846
54.7 प्राचीन काल की अभिकल्प संहिताएँ 1848
54.8 *beton-reglement f ur Eisenbetonbau* 1849
54.9 आधुनिक अभिकल्प संहिताओं के उदाहरण 1850
54.10 निष्पादन स्तर 1852
54.11 विभिन्न अभिकल्प रूपरेखाओं की तुलना 1853

55.1 पराभव पृष्ठ: परिभाषा 1857
55.2 द्रवस्थैतिक दाब से स्वतंत्र प्रतिरूप 1857
55.3 दाब-निर्भर पराभव पृष्ठ 1859
55.4 द्रवस्थैतिक दाब पर निर्भर प्रतिरूप 1860
55.5 धातुओं का प्रतिबल-विकृति व्यवहार; Bauschinger प्रभाव 1861
55.6 कंक्रीट की सूक्ष्म दरारें 1862
55.7 रासायनिक आबंध 1862
55.8 तन्य और भंगुर आबंध 1863
55.9 विस्थापन-दोष 1864
55.10 प्रत्यास्थ-सुघट्य प्रतिबल-विकृति अनुक्रिया 1865
55.11 कठोरण प्रतिरूप 1866

56.1 $M - \Phi$ के निर्धारण के लिए विचारित स्वेच्छ अनुप्रस्थ परिच्छेद 1888
56.2 $M - \Phi$ को वैश्लेषिक रूप से निर्धारित करने की वृद्धिशील प्रक्रिया 1889
56.3 आघूर्ण–वक्रता और आघूर्ण–अक्षीय बल (अंतःक्रिया) आरेख 1895
56.4 अनुप्रस्थ परिच्छेद का परतों में विविक्तीकरण 1896
56.5 $M - \Phi$ को संख्यात्मक रूप से निर्धारित करने का वृद्धिशील उपागम 1898

57.1 पट्टिकाओं में पराभव रेखाएँ 1919
57.2 आयताकार पट्टिकाओं में पराभव रेखाओं का निर्धारण 1921
57.3 स्थैतिक निचली सीमा समाधान *बनाम* पुशओवर विश्लेषण 1925

59.1 न्यूटन विधि 1937
59.2 स्पष्ट समाकलन योजना 1944
59.3 न्यूटन विधि की व्याख्या (भार नियंत्रण के लिए) 1947
59.4 भार नियंत्रण के लिए न्यूटन–रैफसन विधि 1948
59.5 संशोधित न्यूटन–रैफसन विधि, आरंभिक स्पर्शरेखा 1950
59.6 वृद्धिशील छेदक, अर्ध-न्यूटन विधि 1951
59.7 न्यूटन विधि; भार बनाम विस्थापन नियंत्रण 1954
59.8 न्यूटन विधि; विस्थापन नियंत्रण (चित्र 59.3 से तुलना करें) 1955
59.9 न्यूटन–रैफसन विधि; विस्थापन नियंत्रण 1956

प्रारूप सामग्री

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

60.1 संरचनात्मक विश्लेषण के स्तर . . . 1971
60.2 ज्यामितीय अरैखिकता के लिए स्पष्ट वृद्धिशील उपागम . . . 1971
60.3 ज्यामितीय दृढता आव्यूह के बिना व्याकुंचन भार का निर्धारण . . . 1977

61.1 2D ट्रस का निर्देश-तंत्र . . . 1984
61.2 2D दृढता-आधारित विधि के आंतरिक बल तथा संगत विस्थापन . . . 1988
61.3 दृढता-आधारित विधि के लिए अवस्था निर्धारण . . . 1990
61.4 दृढता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण का प्रवाह-चित्र . . . 1993
61.5 तंतु परिच्छेद–नियंत्रण परिच्छेदों का वितरण तथा परिच्छेद का तंतुओं में उपविभाजन . 1997
61.6 अरैखिक अनुप्रस्थ परिच्छेद प्रतिबल वितरण . . . 1998
61.7 दृढ-पिंड विधाओं के बिना 2D ढाँचा अवयव . . . 2000
61.8 परिच्छेद बल के लिए चिह्न परिपाटी . . . 2000
61.9 2D नम्यता-आधारित विधि के आंतरिक बल तथा संगत विस्थापन . . . 2003
61.10 दृढ-पिंड विधाओं सहित तथा रहित राशियों के बीच संबंध . . . 2003
61.11 अवयव पुनरावृत्ति के बिना नम्यता-आधारित विधि का अवस्था निर्धारण . . . 2005
61.12 अवस्था निर्धारण (Taucer, Spacone, and Filippou, 1991a) . . . 2008
61.13 अवयव तथा परिच्छेद अवस्था निर्धारण . . . 2009
61.14 अवयव पुनरावृत्ति के बिना नम्यता-आधारित अरैखिक विश्लेषण का प्रवाह-चित्र . . . 2021
61.15 अवयव पुनरावृत्ति सहित नम्यता-आधारित अरैखिक विश्लेषण का प्रवाह-चित्र . . . 2022
61.16 दृढता-आधारित *बनाम* नम्यता-आधारित सूत्रीकरण की तुलना . . . 2023
61.17 शून्य-लंबाई 2D अवयव . . . 2025
61.18 अवयव अवस्था निर्धारण हेतु शून्य-लंबाई 2D अवयव का प्रवाह-चार्ट . . . 2026
61.19 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव; संतुलन . . . 2028
61.20 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव का निर्देश-तंत्र . . . 2029
61.21 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव का प्रवाह-चार्ट . . . 2031

62.1 संकेंद्रित और वितरित सुघट्यता प्रतिरूप . . . 2034
62.2 शैथिल्य प्रतिरूप . . . 2036
62.3 स्पर्शरेखीय मापांक की तुलना; सुघट्यता बनाम मेनेगोट्टो–पिंटो . . . 2038
62.4 द्विरैखिक प्रतिरूप का निर्धारण . . . 2039
62.5 उत्क्रम चक्रीय भार प्रतिरूपों की तुलना: सुघट्यता *बनाम* मेनेगोट्टो–पिंटो . . . 2040
62.6 मेनेगोट्टो–पिंटो (Menegotto and Pinto, 1973) इस्पात प्रतिरूप . . . 2041
62.7 फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित ज्यूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (1) 2043
62.8 फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित ज्यूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (2) 2044
62.9 फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित ज्यूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (3) 2045
62.10 फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित ज्यूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (4) 2046
62.11 कंक्रीट सामर्थ्य पर परिरोध का प्रभाव (Richart, Brandtzæg, and Brown, 1928) 2047
62.12 परिरोधित *बनाम* अपरिरोधित कंक्रीट संपीडन सामर्थ्य (Mander, Priestley, and Park, 1988) . . . 2048
62.13 कंक्रीट परिरोध प्रदान करने में रकाबों की भूमिका . . . 2048
62.14 संपीडन में कंक्रीट पदार्थ प्रतिरूप . . . 2050

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.15 संपीडन में चक्रीय भारण के अधीन कंक्रीट पदार्थ प्रतिरूप 2052
62.16 तनन में चक्रीय भारण के अधीन कंक्रीट पदार्थ प्रतिरूप 2054
62.17 संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप का निर्धारण (1) 2056
62.18 संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप का निर्धारण (2) 2057
62.19 संपीडन, तनन तथा तनन एवं संपीडन द्वारा उत्पन्न दरारें 2059
62.20 स्थायी विकृति-विहीन विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का विकृति–प्रतिबल वक्र 2065
62.21 विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण (1) 2066
62.22 विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण (2) 2067
62.23 विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण (3) 2068
62.24 स्थायी विकृति सहित विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का विकृति–प्रतिबल वक्र 2072
62.25 फिसलन प्रतिरूप 2073
62.26 सरलीकृत बंध प्रतिरूप 2074
62.27 बंध–फिसलन वक्र 2075
62.28 उदासीन अक्ष का स्थान 2076
62.29 सुघट्य क्षेत्रों की पहचान 2078
62.30 अवयव के आनमनी विरूपण का विक्षेप 2079
62.31 प्रबलित कंक्रीट में प्रभावी जड़त्व आघूर्ण 2080
62.32 सुघट्य लंबाइयों का स्थान (Park and Paulay, 1991) 2082
62.33 संकेंद्रित सुघट्यता धारणा सहित प्रबलित-कंक्रीट ब्रैकट धरन का अग्र-विस्थापन . . 2083
62.34 संकेंद्रित सुघट्यता धारणा सहित इस्पात ब्रैकट धरन का अग्र-विस्थापन 2085
62.35 अपरूपण विफलता सहित संकेंद्रित सुघट्यता मॉडल 2089
62.36 सीमा-अवस्था अपरूपण विफलता 2089
62.37 अपरूपण स्प्रिंग की अनुक्रिया 2090
62.38 सीमा-अवस्था स्तंभ अनुक्रिया 2091
62.39 सीमा-अवस्था की पृथक अनुक्रियाएँ 2092
62.40 प्रतिनिधि शैथिल्य चक्र 2093
62.41 विकृति-मृदुकरण के कारण सामर्थ्य-हानि 2094
62.42 व्युत्क्रम चक्रीय सामर्थ्य ह्रास 2094
62.43 शैथिल्य मॉडल का आधार-वक्र 2096
62.44 आनमन के लिए आधार-वक्र (Ghannoum, 2020) 2097
62.45 शिखर-उन्मुख और संकुचन मॉडल 2098
62.46 शिखर-उन्मुख मॉडल का मूल चक्र 2098
62.47 भार-व्युत्क्रमण और लक्ष्य अवस्था का अद्यतन 2099
62.48 शिखर-उन्मुख मॉडल का अनुसरण करता बढता चक्रीय भारण इतिहास 2099
62.49 संकुचन मॉडल का मूल चक्र 2100
62.50 विराम-बिंदु का निर्धारण 2101
62.51 प्रथम विराम-बिंदु का निर्धारण 2102
62.52 विराम-बिंदु का अद्यतन 2103
62.53 विराम-बिंदु के आगे पुनर्भारण 2104
62.54 संकुचन मॉडल का अनुसरण करता बढता चक्रीय भारण इतिहास 2104
62.55 UCSD संरचनात्मक प्रयोगशाला के परिणाम (Ibarra, 2004) 2105

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.56 मूल सामर्थ्य-ह्रास विधा 2107
62.57 कैप-पश्चात सामर्थ्य-ह्रास विधा 2108
62.58 भारमोचन दृढता-ह्रास विधा 2110
62.59 भारमोचन व्यवधान 2111
62.60 त्वरित पुनर्भारण दृढता-ह्रास विधा 2111
62.61 आधार-वक्र (Ghorbani et al., 2022) 2113
62.62 घनीय स्प्लाइन-आधारित शैथिल्य मॉडल (Suselo, 2021) 2114

63.1 परिमित अवयव प्रक्रिया (Bathe, 1996 से प्रेरित) 2117
63.2 समान रूप से वितरित प्रतिरूप जटिलता 2118
63.3 अरैखिक विश्लेषण की तुलना में रैखिक विश्लेषण की सीमाएँ 2119
63.4 ढाँचों के अरैखिक विश्लेषण के लिए परिमित अवयव 2123
63.5 स्तंभ सिरा-संयोजन 2123
63.6 धरन अथवा स्तंभ अवयव 2124
63.7 स्तंभ–धरन संयोजन 2125
63.8 अनुप्रस्थ काट का स्तरों में प्रतिरूपण 2128
63.9 RC धरन–स्तंभ का आदर्शीकृत प्रास प्रतिरूप (Haselton et al., 2016) 2131
63.10 परिरोध के प्रकार (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) 2131
63.11 PEER संरचनात्मक निष्पादन आँकड़ा-संग्रह का आलेखीय उपयोक्ता अंतरापृष्ठ (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) 2132

64.1 MCS और LHS की तुलना 2150
64.2 $k = 2$ के लिए एक प्रक्षेपपथ का उदाहरण। 2160
64.3 भिन्न Morris प्रक्षेपपथों के अतिव्यापित अथवा निकट गुच्छित बिंदु। 2160
64.4 यादृच्छिक चर और उसका संचयी वितरण फलन (CDF)। 2161
64.5 यादृच्छिक चर x_i की आवर्ती अनुक्रिया। नियत चरण आकार आवर्ती परिवर्तनों का पता लगाने में विफल हो सकते हैं। 2162
64.6 परिमात्रक अधिसमष्टि में $k = 3$ RV के लिए प्रक्षेपपथ (a) और त्रिज्य-बिंदु (b) विधियों की तुलना। 2162
64.7 संशोधित त्रिज्य-बिंदु छँटाई प्रक्रिया में आरंभीकरण और आरंभीकरणोत्तर अवस्था . . 2167
64.8 संवेदनशीलता-क्रम निर्धारण का उदाहरण (Gakuhari, 2021) 2171
64.9 संवेदनशीलता विश्लेषण प्रत्याशी प्राचलों की पहचान करता है; प्राचल अभिनिर्धारण प्रेक्षणों द्वारा समर्थित मान निर्धारित करता है 2172

65.1 निकाय अभिनिर्धारण उपागम का सिद्धांत: प्रतिरूप–आँकड़ा विसंगति न्यूनतम करने हेतु प्राचलों का पुनरावृत्तीय परिष्कार। 2176
65.2 RANSAC के साथ रैखिक प्रतिगमन का निदर्शी उदाहरण 2179
65.3 कंक्रीट ह्रास पर लागू RANSAC: प्रकरण अध्ययन (Gakuhari, 2021) 2179
65.4 प्राचल अभिनिर्धारण प्रक्रिया का प्रवाह-आरेख 2193
65.5 एकल अवशेष फलन और पाँच चरों के लिए आलेखीय उपयोगकर्ता अंतरापृष्ठ। अधिक व्यापक उदाहरण के लिए Fig. 65.7 देखें। 2194

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

65.6 लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट अरैखिक न्यूनतम-वर्ग अनुकूलन की निवेश आँकड़ा फ़ाइल 2196
65.7 लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट अरैखिक न्यूनतम-वर्ग अनुकूलन का डैशबोर्ड: 12 पूर्वानुमानित लक्ष्य और 8 चर। 2199
65.8 स्थल अभिलक्षणन, प्रतिरूप विकास, अनिश्चितता, प्राचल अभिनिर्धारण, संरचनात्मक विश्लेषण और भंगुरता आकलन का एकीकरण 2204

66.1 PBEE के चार घटक 2209

67.1 (परिबद्ध) गुटेनबर्ग–रिक्टर पुनरावृत्ति नियम 2213
67.2 भूकंपीय स्रोतों का वर्गीकरण 2214
67.3 स्थल-से-स्रोत दूरियों का वर्गीकरण 2217
67.4 GMPE का प्राचलीय अन्वेषण 2218
67.5 नियतात्मक भूकंपीय संकट विश्लेषण 2219
67.6 प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण 2220
67.7 पॉइसन प्रायिकता प्रतिरूप 2222
67.8 माध्य और भिन्नक भूकंपीय संकट-वक्रों का नमूना 2222
67.9 अमेरिकी संकट-मानचित्रों के नमूने 2225
67.10 University of Colorado Boulder के भूकंपीय वियोजन आलेखों के नमूने 2226
67.11 विभिन्न प्रतिक्रिया-वर्णक्रमों की तुलना 2226
67.12 IBPA, SBPA और TBPA के लिए भू-गति चयन और मापन की तुलना 2228
67.13 नमूना ETEF 2235
67.14 ETA40lc01 का CAV बनाम लक्ष्य 2237
67.15 ETA20kd01 की शैथिल्य ऊर्जा बनाम लक्ष्य 2238

68.1 संकट वक्र। बायाँ आलेख प्रत्यावर्तन अवधियों की अवधारणा दर्शाता है, जबकि दायाँ आलेख किसी विशिष्ट स्थल का संकट वक्र दिखाता है। 2247
68.2 अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण पृष्ठ 2249
68.3 प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA)। 2250

69.1 क्षमता और माँग की प्रायिकतामूलक प्रकृति 2256
69.2 क्षमता वक्र 2259
69.3 पुशओवर विश्लेषण के लिए पार्श्व भार 2260
69.4 सेतु का स्थान और चित्र 2265
69.5 स्तंभ और सेतु-स्तंभ के आयाम 2267
69.6 स्तंभ और शाफ़्ट अनुप्रस्थ परिच्छेद 2268
69.7 परिसीमित और अपरिसीमित कंक्रीट के एकदिश भारण का प्रतिबल-विकृति संबंध (Mander, Priestley, and Park, 1988) 2269
69.8 सेतु-स्तंभ की विक्षेपित आकृति और वक्रता आरेख; AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 से अनुकूलित 2270
69.9 आघूर्ण-वक्रताएँ और सुघट्य आघूर्ण 2271
69.10 अनुक्रिया वर्णक्रम विश्लेषण (C_S) 2275

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

69.11 विस्थापन अनुक्रिया वर्णक्रम विश्लेषण 2275
69.12 अनुमेय भूकंप-प्रतिरोधी अवयव (ERES) (AASHTO, Seismic, 2011) 2277
69.13 प्रबलन इस्पात प्रतिबल-विकृति प्रतिरूप 2279
69.14 आघूर्ण वक्रता ((AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1) से अनुकूलित) 2281
69.15 सेतु-स्तंभ की ऊँचाई में आघूर्ण वितरण 2282
69.16 सेतु-स्तंभ की विकर्षेपित आकृति और वक्रता आरेख; AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 से अनुकूलित 2283
69.17 RISA प्रतिरूप 2286
69.18 तीन आवश्यक स्तंभों का अन्योन्यक्रिया आरेख 2287
69.19 सुघट्य आघूर्ण 2288
69.20 Caltrans की शाफ्ट परिभाषा(CALTRANS, 2013) 2290
69.21 प्रथम सुघट्य कब्जा बनने के बाद संशोधित प्रत्यास्थ प्रतिरूप 2292
69.22 द्वितीय सुघट्य कब्जा बनने के बाद संशोधित प्रत्यास्थ प्रतिरूप 2293
69.23 4 सुघट्य कब्जों के निर्माण सहित पतन क्रियाविधि 2294
69.24 IDA विधि पर आधारित संकल्पनात्मक पतन-भंगुरता वक्र 2298
69.25 MSA विधि पर आधारित संकल्पनात्मक पतन-भंगुरता वक्र 2300
69.26 ETA-आधारित क्षमता फलन का जनन 2303
69.27 चार भिन्न रणनीतियों की प्रमुख विशेषताएँ (Hariri-Ardebili, Saouma, and Porter, 2016) 2306
69.28 भूकंपीय विश्लेषण की सापेक्ष जटिलताएँ 2306

70.1 एक DI और दो DVs के बीच संबंध (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) 2317
70.2 PBEE: व्यापक परिदृश्य 2319
70.3 भवनों के लिए अनुशंसित न्यूनतम भूकंपीय निष्पादन अभिकल्प उद्देश्य (Porter, 2003) 2321

72.1 PBEE की प्रथम पीढी का संकल्पनात्मक विवरण; (**Whittaker0303**) 2330
72.2 विविक्त निष्पादन स्तरों के चित्रण, (FEMA, 2012) 2331
72.3 PBEE के चार घटक 2334
72.4 भूकम्पीय भंगुरता, सुभेद्यता और संकट वक्रों की तुलना 2340
72.5 भंगुरता वक्र और क्षति प्रायिकता आव्यूह के बीच सम्बन्ध 2342
72.6 भूकम्पीय भंगुरता पृष्ठों के विभिन्न पक्ष 2343

B.1 संरचनाओं पर पवन भार का प्रभाव (Schueller, 1996) 2356
B.2 सामान्य पवन-बल प्रतिरोधी भवन संरचनाओं के लिए सन्निकट अभिकल्प पवन-दाब p 2358
B.3 भवन के कंपन 2359
B.4 संयुक्त राज्य के भूकंपीय क्षेत्र, (ICBO, 1994) 2360
B.5 ट्रक भार 2370
B.6 आघूर्णों को अधिकतम करने के लिए भार स्थान-निर्धारण 2374

D.1 वृत्ताकार मेहराब की ज्यामिति 2381
D.2 बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2383
D.3 θ के सापेक्ष β का संबंध 2385

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.4 बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2385
D.5 बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आंतरिक बलों के आलेख 2388
D.6 स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2389
D.7 स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2390
D.8 स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2392
D.9 समान रूप से वितरित भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2395
D.10 स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब बनाम बिंदु भारों की श्रेणी 2396
D.11 समान रूप से वितरित भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब बनाम बिंदु भारों की श्रेणी 2396
D.12 Sap 2000—स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का आघूर्ण आरेख 2396
D.13 Sap 2000—स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अक्षीय बल आरेख . 2396
D.14 Sap 2000—स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अपरूपण बल आरेख . 2397
D.15 स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब बनाम समान रूप से वितरित भार . . . 2397
D.16 विस्तार के 1/2 और 1/4 पर बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2397
D.17 बिंदु भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2399
D.18 अंत्याधार ‘b’ पर अतिरिक्त प्रणोद हटाने के बाद दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2400
D.19 लगाए गए आभासी बल सहित दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2402
D.20 बिंदु भार के अधीन मूल दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2405
D.21 दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब में विक्षेप की गणना हेतु मुक्त-पिंड आरेख 2408
D.22 बिंदु भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2409
D.23 स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2410
D.24 अंत्याधार B पर अतिरिक्त प्रणोद हटाने के बाद दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2411
D.25 स्व-भार के अधीन मूल दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2415
D.26 स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2417
D.27 समान रूप से वितरित भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2421
D.28 स्व-भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब की तुलना . . 2422
D.29 समान रूप से वितरित भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब की तुलना 2422
D.30 Sap 2000—स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का आघूर्ण आरेख 2422
D.31 Sap 2000—स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अक्षीय बल आरेख . . 2422
D.32 Sap 2000—स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अपरूपण बल आरेख . . 2423
D.33 स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब की तुलना 2423
D.34 विस्तार के 1/2 और 1/4 पर बिंदु भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2423
D.35 बिंदु भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब 2425
D.36 B पर आभासी आघूर्ण सहित कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब 2427
D.37 A पर आभासी आघूर्ण सहित कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब 2428
D.38 बिंदु भार के अधीन मूल कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख 2433
D.39 बिंदु भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2437
D.40 स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब 2438

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.41 कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब में आंतरिक बल 2443
D.42 स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2445
D.43 समान रूप से वितरित भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के आलेख 2450
D.44 स्व-भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब की तुलना . . 2451
D.45 समान रूप से वितरित भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब की तुलना 2451
D.46 Sap 2000—स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का आघूर्ण आरेख 2452
D.47 Sap 2000—स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का अक्षीय बल आरेख . . 2452
D.48 Sap 2000—स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का अपरूपण बल आरेख . 2452
D.49 स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब की तुलना 2452
D.50 विस्तार के 1/2 और 1/4 पर बिंदु भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब 2453

K.1 बटरवर्थ-निस्यंदित संकेतों के उदाहरण 2983
K.2 विभिन्न n के लिए बटरवर्थ निस्यंदकों की तुलना 2984

M.1 प्रायिकतामूलक विश्लेषण में समाविष्ट संकल्पनाओं का अंतर्संबंध (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) 3017
M.2 प्रतिदर्श समष्टि और परस्पर असंयुक्त घटनाओं की संकल्पना (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) 3018
M.3 तीन प्रयासों में 100 प्रतिदर्शों से प्राप्त आयतचित्रों की तुलना 3019
M.4 1,000 से 100,000 प्रतिदर्शों से प्राप्त आयतचित्रों की तुलना 3020
M.5 तीन सतत वितरण फलनों के उदाहरण 3020
M.6 PDF और CDF के बीच संबंध 3021
M.7 परिबद्ध PDF और CDF के बीच संबंध 3021
M.8 विश्वास अंतराल का चित्रण 3022
M.9 माध्य और माध्यिका का चित्रण 3023
M.10 मानक विचलन का चित्रण 3024
M.11 विषमता और शिखरता का चित्रण 3024
M.12 सहसंबंध गुणांकों का चित्रण 3025
M.13 विभिन्न प्रायिकता (और संचयी) वितरण फलनों की तुलना 3031
M.14 द्विचर प्रसामान्य वितरण 3032
M.15 द्विचर प्रसामान्य वितरण पर सहसंबंध ρ का प्रभाव 3032

N.1 विश्वसनीयता सूचकांक की परिभाषाएँ 3034
N.2 विश्वसनीयता सूचकांक β के पदों में विफलता-प्रायिकता 3036

O.1 सदिश रूपांतरण 3045
O.2 द्वितीय-कोटि प्रदिश की प्रमुख दिशाएँ 3047
O.3 अष्टफलकीय तल 3048
O.4 पृष्ठ बल 3049
O.5 कॉशी: चतुष्फलक से प्रतिबल 3050
O.6 प्रतिबल का ज्यामितीय निरूपण 3052

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

O.7 स्थिति और विस्थापन सदिश 3054
O.8 क्षेत्रफल dS से अभिवाह 3057
O.9 प्रतिबलों का संतुलन, कार्तीय निर्देशांक 3060
O.10 कमानियों पर हुक के व्याख्यान की पट्टिका 3062
O.11 परीक्षण नियंत्रण 3066
O.12 धातुओं और कंक्रीट के प्रतिबल-विकृति वक्र 3067
O.13 एकाक्षीय भारित कंक्रीट नमूनों में स्थानीयकरण का प्रायोगिक अभिलेखन 3068
O.14 हिलरबोर्ग का काल्पनिक दरार प्रतिरूप 3069
O.15 कंक्रीट विकृति-मृदुकरण प्रतिरूप 3070
O.16 टोंटी आरेख के घटक (Felippa, 2000) 3072
O.17 विरूपणीय पिंडों के यांत्रिकी का टोंटी आरेख 3073
O.18 प्रतिबलों के पदों में आंतरिक बल 3073

P.1 अनंत पट्टिका में दरार 3077
P.2 दरार विस्थापन की स्वतंत्र विधाएँ 3082
P.3 जल की गतिक क्रिया के कारण बाँध पर दाब (Westergaard, 1933) 3088
P.4 दाबों का सन्निकट वितरण (Westergaard, 1933) 3091
P.5 जल-पिंड जिसे बाँध के साथ गतिशील माना जा सकता है। (Westergaard, 1933) . . . 3094
P.6 प्रति इकाई क्षेत्रफल संकेंद्रित द्रव्यमान बनाम ऊँचाई 3095

Q.1 विश्वास-क्षेत्र कलनविधि 3099
Q.2 प्राचल-अभिज्ञान प्रक्रिया का प्रवाह-आरेख 3103
Q.3 क्षार-समुच्चय अभिक्रिया प्राचल-अभिज्ञान हेतु आलेखीय उपयोक्ता अंतरापृष्ठ (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) 3104

R.1 स्थिति सदिश $\mathbf{p}$ का अवकलन 3106
R.2 वक्र की वक्रता 3106
R.3 ठोस प्रदेश को पार करता सदिश क्षेत्र 3107
R.4 क्षेत्रफल dA से होकर अभिवाह 3108
R.5 अपसरण के मूल्यांकन हेतु अत्यल्प अवयव 3108
R.6 सदिश की प्रवणता 3113

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सारणी-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण)

18.1 तापीय प्रसार गुणांक 850

20.1 ट्रसों की स्थैतिक निर्धार्यता और स्थायित्व 888
20.2 ट्रसों के लिए प्रयोज्य संतुलन-समीकरण 888

22.1 संबंधों के दो समुच्चयों के बीच सादृश्य 959
22.2 संयुग्मी धरन के परिसीमा प्रतिबंध 959

25.1 बिंदु और एकसमान भारों के भार पद 1039

26.1 दृढता और लचीलापन विधियों की तुलना 1042
26.2 दृढता और लचीलापन विश्लेषणों की तुलना 1044
26.3 सरल भारों के लिए संधि समतुल्य बल 1047

29.1 स्तंभों के अनिवार्य और प्राकृतिक सीमा-प्रतिबंध 1093

33.1 प्रत्यास्थता और पट्टिका-बंकन के नियामक समीकरणों की तुलना (Pilkey and Wunderlich, 1994) 1240

34.1 पतले कवचों में समीकरणों और अज्ञातों का सारांश 1248
34.2 पतले कवचों के साम्य समीकरणों में अलग-अलग योगदान 1249
34.3 पतले कवचों के प्रमुख नियंत्रक समीकरणों का सारांश 1263
34.4 झिल्ली संरचनाओं की धारणाएँ और नियंत्रक समीकरण 1272
34.5 विभिन्न भारणों के अधीन झिल्ली प्रतिबल परिणामक वितरणों की तुलना 1276
34.6 समान भार के लिए झिल्ली और उथले कवच के हलों की तुलना 1290
34.7 कवच गुणांक (ϕ को शिखर से मापा गया है) 1296

36.1 विश्वसनीयता सूचकांक के लक्ष्य मान 1363

38.1 कूप उपतंत्र, अपरूपण भित्ति और ट्रसित अपरूपण भित्ति की तुलना 1432

40.1 स्थैतिक और गतिकीय अनिर्धार्यता की कोटियाँ 1490
40.2 आवश्यक और प्राकृतिक परिसीमा शर्तें 1491

43.1 रैखिक अवयवों के 3D रूपांतरण 1540

44.1 संरचनाओं का विविक्तीकरण 1548

45.1 कुप्रतिबद्ध आव्यूहों का प्रभाव 1577

46.1 स्थैतिकी आव्यूह के लिए आंतरिक अवयव बल की परिभाषा 1586
46.2 स्थैतिक निर्धार्यता और शुद्धगतिक अस्थिरता की शर्तें 1593

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

47.1 रैखिक प्रत्यास्थता में फलनक 1654
47.2 कुल स्थितिज ऊर्जा और Hu-Washizu सूत्रीकरणों की तुलना 1657

48.1 VW, CVW, PE और CPE के समीकरणों का सारांश 1674
48.2 आभासी कार्य और पूरक आभासी कार्य के सिद्धांतों के वैकल्पिक मार्ग 1675

49.1 बहुपदीय श्रेणी के पदों में आकार फलनों की व्याख्या (1d & 2d) 1710
49.2 विविध अवयव सूत्रीकरणों में बहुपदीय पद (1d & 2d) 1711
49.3 धरन अवयव के आकार फलनों के अभिलक्षण 1729
49.4 q8 अवयव के आकार फलन और प्राकृतिक अवकलज 1734
49.5 q9 अवयव के आसंधीय (प्राकृतिक) निर्देशांक 1735
49.6 परिवर्ती-आसंधि अवयवों के आकार फलन 1739
49.7 t6 अवयव के आकार फलन और अवकलज 1740

51.1 न्यूटन–कोट्स चतुर्थांश सूत्रों के भार 1767
51.2 $[-1, 1]$ अंतराल पर गाउस–चतुर्थांश सूत्रों के समाकलन बिंदु और भार 1770
51.3 त्रिभुज पर संख्यात्मक समाकलन के निर्देशांक और भार 1772
51.4 द्विरेखीय चतुर्भुज आसंधियों के प्राकृतिक निर्देशांक 1773
51.5 चतुर्भुजीय अवयवों के लिए पूर्ण और अपचयित संख्यात्मक समाकलन 1779
51.6 द्विरेखीय और यथार्थ विस्थापन/विकृतियाँ 1781

53.1 विभिन्न विधियों के लिए स्थिरता दशाएँ 1820
53.2 विभिन्न वर्गों की संरचनाओं के प्रतिनिधि अवमंदन अनुपात 1834

54.1 संरचनात्मक विश्लेषण के स्तरों का सारणीकरण 1842
54.2 विश्लेषण के विभिन्न स्तरों का पारस्परिक सहसंबंध 1843

57.1 सीमांत भार विश्लेषण के शुद्धगतिक और स्थैतिक उपागमों की तुलना 1903
57.2 निचली सीमा विश्लेषण और पुशओवर विश्लेषण की तुलना 1927
57.3 संहत सुघट्यता और निचली सीमा विश्लेषण 1930

59.1 गणित की अर्ध-न्यूटन विधि और संरचनात्मक यांत्रिकी के अंतर्निहित विश्लेषण के बीच समानता 1946
59.2 न्यूटन–रैफसन विधि के रूपांतर 1949
59.3 अरैखिक विश्लेषण में भार-नियंत्रण कलनविधियों की तुलना 1953

61.1 बहुस्तरीय अवस्था निर्धारण 1989
61.2 नम्यता- तथा दृढता-आधारित अवयवों की तुलना 2020

62.1 परिरोधित बनाम अपरिरोधित कंक्रीट के प्रत्यास्थ और सामर्थ्य गुण 2051
62.2 स्पर्शरेखीय मापांक 2096

63.1 स्तंभ संयोजन 2124

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

63.2 संयोजन–अवयव संगतता 2124
63.3 प्रतिरूपण के “चुनें और जोड़ें” विकल्प 2128
63.4 ह्रास का परिमाणन 2130
63.5 सामग्री-गुण 2132
63.6 अनुप्रस्थ काट का वर्गीकरण 2132
63.7 विफलता-विधा कोड 2133
63.8 स्तंभ ज्यामिति 2133
63.9 परिरोध विवरण 2134
63.10 परिरोध विवरण 2134
63.11 आयताकार प्रबलित स्तंभों के परीक्षणों का सारांश (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) 2135
63.12 30 प्रायोगिक परीक्षणों के अंशांकन अध्ययन के परिणाम (Haselton et al., 2008) . . 2136

64.1 अनिश्चितता परिमाणन और अनिश्चितता विश्लेषण के लिए इस पुस्तक में अपनाई गई शब्दावली 2144
64.2 Pearson सहसंबंध गुणांक के परिमाण के निदर्शी गुणात्मक वर्णक 2146
64.3 MCS और LHS की तुलना 2150
64.4 अनिश्चितता-प्रसारण और संवेदनशीलता विधियों की तुलना 2166
64.5 संवेदनशीलता विश्लेषण और प्राचल अभिनिर्धारण की भिन्न किंतु पूरक भूमिकाएँ . . . 2172

65.1 `Log.xlsx` में प्रतिनिधि विन्यास प्रविष्टियाँ 2196
65.2 प्राचल-अभिनिर्धारण कार्यक्रम के प्रमुख फलन 2200
65.3 विस्तृत-पत्रक पाठक और समुच्चयन स्तर द्वारा प्रयुक्त निजी सहायक फलन 2200
65.4 विन्यास संरचना `S` के प्रमुख क्षेत्र 2201
65.5 `ParIdentification.m` में चयनित चालन-कालीन चर 2201

67.1 Boore, Joyner, and Fumal, 1997 प्रतिरूप के अवधि-निर्भर गुणांक 2216
67.2 स्थल वर्ग पर आधारित आकलित V_S 2216

69.1 पुशओवर विश्लेषण और भूकंपीय विश्लेषण की तुलना 2262
69.2 NJ पहुँच संरचनाओं का अभिकल्प अनुक्रिया वर्णक्रम 2266
69.3 पुशओवर विश्लेषण के क्रमिक विश्लेषण 2273
69.4 प्रबलन इस्पात छड़ों के प्रतिबल गुण (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1) . . 2279
69.5 अक्षीय बलों के परास पर तीन भिन्न परिच्छेदों की आघूर्ण क्षमताएँ 2287
69.6 विश्लेषण परिणाम; शून्य कब्जा 2291
69.7 प्रथम कब्जा निर्माण की ओर ले जाने वाला अपरूपण समायोजन 2292
69.8 विश्लेषण परिणाम; एक कब्जा 2292
69.9 द्वितीय कब्जा निर्माण की ओर ले जाने वाला अपरूपण समायोजन 2293
69.10 विश्लेषण परिणाम; दो कब्जे 2294
69.11 तृतीय और चतुर्थ कब्जा निर्माण की ओर ले जाने वाला अपरूपण समायोजन 2294
69.12 विफलता पर बलों, आघूर्णों और विस्थापनों का योग 2295
69.13 भूकंपीय संरचनात्मक विश्लेषण विधियों की तुलना 2305

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

70.1 ASCE 41-17 के अनुसार विभिन्न निष्पादन स्तरों हेतु अनुमत अंतर्मंजिला विस्थापन अनुपात (IDR) . . . 2322
70.2 क्षति सूचकांक देहलियाँ और संगत संरचनात्मक अवस्थाएँ . . . 2322
70.3 FEMA 356 के अनुसार माँग-क्षमता अनुपात (DCR) देहलियाँ . . . 2323

72.1 विभिन्न लक्षित भवन निष्पादन स्तरों के लिए संरचनात्मक और असंरचनात्मक घटकों की क्षति का परिसर (तालिका C1-2) (FEMA-356, 2000) . . . 2331
72.2 PBEE 1 और PBEE 2 की तुलना . . . 2336
72.3 सतत बनाम विविक्त भंगुरता निरूपणों की तुलना . . . 2343
72.4 निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) के ऐतिहासिक विकास के प्रमुख प्रलेख 2349

B.1 पदार्थों के इकाई भार . . . 2355
B.2 भवनों में औसत सकल स्थायी भार . . . 2356
B.3 भवन-पदार्थों के भार . . . 2362
B.4 न्यूनतम समान रूप से वितरित चल भार, (ICBO, 1994) . . . 2363
B.5 भूमि के ऊपर पवन वेग का परिवर्तन . . . 2363
B.6 पवन भार के लिए C_e गुणांक, (ICBO, 1994) . . . 2363
B.7 पवन-दाब गुणांक C_q, (ICBO, 1994) . . . 2364
B.8 पवन और भूकंप भार के महत्त्व गुणक, (ICBO, 1994) . . . 2364
B.9 सामान्य पवन-बल प्रतिरोधी भवन संरचनाओं के लिए सन्निकट अभिकल्प पवन-दाब p . 2365
B.10 विभिन्न भूकंपीय क्षेत्रों के लिए Z गुणक, UBC1994 . . . 2365
B.11 भूकंप भारण के लिए S स्थल गुणांक, (ICBO, 1994) . . . 2365
B.12 विभिन्न संरचनात्मक तंत्रों के लिए R_W की आंशिक सूची, (ICBO, 1994) . . . 2366

G.1 अलामिलो के नोडीय निर्देशांक (Pollalis, 1999) . . . 2498
G.2 अलामिलो के सदस्य-गुण (Pollalis, 1999) . . . 2499
G.3 अलामिलो के परिसीमा प्रतिबंध (Pollalis, 1999) . . . 2500
G.4 अलामिलो के भार-संयोजन (Pollalis, 1999) . . . 2501

L.1 रैखिक समीकरणों की समाधान विधियाँ . . . 2993
L.2 पूर्वानुबंधन: वाम और दक्षिण की तुलना . . . 3004
L.3 आव्यूह पूर्वानुबंधन और विचित्र मान अपघटन (SVD) की तुलना . . . 3006

N.1 इस्पात और कंक्रीट संरचनाओं के लिए चयनित मान . . . 3035
N.2 इस्पात और कंक्रीट संरचनाओं की विश्वसनीयता . . . 3036

O.1 संकेतन . . . 3040
O.2 विकृति निरूपण . . . 3053
O.3 संरचनात्मक विश्लेषण में सीमा प्रतिबंधों के उदाहरण . . . 3072

P.1 आवर्तकाल $T = \frac{4}{3}$ सेकंड के संगत संख्यात्मक परिणाम . . . 3089

R.1 गुणन तथा अवकलन संकारकों के बीच सादृश्य . . . 3105

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

उदाहरण-सूची: भाग II–IV (विश्लेषण)

18.1 जलस्थैतिक भार 856
18.2 तापीय प्रसार/प्रतिबल 859
18.3 प्रभावी क्षेत्रफल 868
19.1 जलस्थैतिक भार 878
19.2 भार-संचरण 878
19.3 सरलतः समर्थित धरन 879
19.4 परवलयिक भार 880
19.5 तीन-विस्तृति धरन 881
19.6 त्रि-कब्जित त्रिकोणिका फ्रेम 882
19.7 आनत आधार 884
19.8 ग्रिड संरचना 885
19.9 वायुयान का संतुलन 885
19.10 विशाल बजरा 886
19.11 रैंकिन: तैरते पिंड का संतुलन—जलस्थैतिक प्रमाण 890
19.12 पालात्सेतो देल्लो स्पोर्ट; नेर्वी 891
20.1 ट्रस-विश्लेषण; संधि-विधि 900
20.2 3D ट्रस 902
20.3 परिच्छेद-विधि 906
20.4 सरल ट्रस; संधि/आव्यूह-विधि 909
20.5 जटिल ट्रस; संधि/आव्यूह-विधि 911
21.1 आनत भार वाला धरन 923
21.2 आनत फ्रेम 924
21.3 जलस्थैतिक भार वाला फ्रेम 927
21.4 रैखिक रूप से परिवर्ती भार 929
21.5 फ्रेम; आनत छत का उदाहरण 930
21.6 पारस्परिक फ्रेम 931
21.7 3D फ्रेम 935
22.1 द्वि-समाकलन 941
22.2 अधिकतम विक्षेप 942
22.3 इष्टतम स्की-आकृति 943
22.4 तैरता धरन 943
22.5 साइकिल का पहिया 948
22.6 कुंडलित स्प्रिंग की दृढता 954
22.7 द्विधात्विक स्विच 956
22.8 वक्रता-क्षेत्र, कैंटिलीवर धरन 960
22.9 आघूर्ण-वक्रता, सरल आलंबित धरन 961
22.10 अधिकतम विक्षेप 962
22.11 तापमान-भार के अधीन फ्रेम 964
22.12 प्लास्टिक लंबाई 966

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

22.13 संयुग्मी धरन; बिंदु भार . . . 969
22.14 संयुग्मी धरन; परिवर्ती I . . . 970
23.1 कैंटिलीवर धरन का विक्षेप . . . 974
23.2 I-काट की असमान ऐंठन . . . 986
24.1 धरन . . . 996
24.2 फ्रेम; विक्षेप . . . 997
24.3 फ्रेम, घूर्णन . . . 999
24.4 नम्य कोष्ठक . . . 1000
24.5 केबल-आलंबित कैंटिलीवर धरन . . . 1002
24.6 ऐंठन और नम्य विरूपण . . . 1003
24.7 धरन में नम्य और अपरूपण-विरूपण . . . 1005
24.8 धरन में तापीय प्रभाव . . . 1006
24.9 पाइपलाइन . . . 1007
24.10 ट्रस; सरल . . . 1008
24.11 ट्रस; जटिल . . . 1009
24.12 आरंभिक कैम्बर वाला ट्रस . . . 1010
24.13 द्वितीयक प्रतिबलों वाला ट्रस . . . 1011
24.14 वृत्ताकार वलय . . . 1013
24.15 स्प्रिंग . . . 1015
25.1 टाई-छड सहित बीम . . . 1026
25.2 इस्पात भवन ढाँचे का विश्लेषण . . . 1028
25.3 ट्रस, एक अतिरिक्त बल . . . 1031
25.4 ट्रस: दो अतिरिक्त बल . . . 1034
25.5 ट्रस: तापीय भार . . . 1036
25.6 स्प्रिंग-आधारित बीम . . . 1037
25.7 क्वीन पोस्ट . . . 1039
25.8 लचीलापन आव्यूह; वक्र बीम . . . 1042
25.9 सतत बीम . . . 1048
25.10 सतत बीम . . . 1049
27.1 कैंटिलीवर बीम . . . 1063
27.2 सतत बीम . . . 1064
27.3 दो-विस्तार बीम . . . 1065
27.4 दो-विस्तार बीम, प्रारंभिक विक्षेप . . . 1067
27.5 ढाँचा . . . 1068
27.6 बॉक्स कल्वर्ट . . . 1070
27.7 सतत बीम . . . 1075
27.8 ढाल-विक्षेप/आघूर्ण वितरण/Gauss-Seidel . . . 1078
28.1 सरल आलंबित धरन की प्रभाव रेखाएँ . . . 1081
28.2 अधिलंबों सहित सरल आलंबित धरन . . . 1084
28.3 Müller-Breslau; अपरूपण प्रभाव रेखा . . . 1085
28.4 Müller-Breslau; आघूर्ण प्रभाव रेखा . . . 1086

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

29.1 ज्यामितीय अस्थिरता 1088
29.2 आनमनी विरूपण पर अक्षीय भार का प्रभाव 1089
29.3 कैंटिलीवर धरन का बड़ा विक्षेप 1092
29.4 दो कब्जेदार दृढ स्तंभों का कुंचन 1098
29.5 कब्जेदार-कब्जेदार स्तंभ का कुंचन 1102
29.6 आबद्ध-आबद्ध स्तंभ का कुंचन 1103
29.7 आबद्ध-कब्जेदार स्तंभ का कुंचन 1104
29.8 प्रत्यास्थ आलंबों वाला स्तंभ 1106
29.9 अवरुद्ध कुंचन 1108
29.10जल मीनार 1109
30.1 फनिक्युलर केबल 1120
30.2 झुका हुआ फनिक्युलर केबल 1122
30.3 द्वि-केबल गोंडोला 1123
30.4 आनत केबल की ज्यामिति 1136
30.5 आनत केबल के बल 1137
30.6 गाइ-केबल युक्त मीनार 1139
30.7 झूला पुल 1140
30.8 अविस्तार्य केबल; तापमान 1142
30.9 विस्तार्य केबल; लटकाव 1142
30.10विस्तार्य केबल; तापीय प्रभाव 1143
30.11विस्तार्य केबल; पूर्वप्रतिबल 1143
30.12आनत केबल में लटकाव 1148
30.13ट्रॉली-बस केबल आलंब 1148
30.14कैटेनरी बनाम परवलय 1152
31.1 वूस्वार का विफलता भार; Pippard की विधि 1168
32.1 तीन-किलक मेहराब; बिंदु-भार; वैश्लेषिक 1186
32.2 तीन-किलक मेहराब; बिंदु-भार 1188
32.3 तीन-किलक मेहराब; एकसमान भार 1189
32.4 किलकरहित वृत्तीय मेहराब 1192
32.5 आदर्श मेहराब 1207
32.6 तीन-किलक परवलयी मेहराब 1209
32.7 परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाला दो-किलक परवलयी मेहराब 1209
32.8 किलकरहित परवलयी मेहराब 1215
32.9 परवलयी मेहराब पर तापीय भार 1221
32.10धनुष गर्डर 1222
32.11कुंडलित मेहराब; बिंदु भार 1227
33.1 पतली बनाम मोटी पट्टिका आदर्शीकरण 1237
33.2 पट्टिका-आघूर्ण परिणामकों से प्रतिबल पुनर्प्राप्ति 1239
33.3 एकसमान दाब के अधीन सरल आलंबित वर्गाकार पट्टिका 1241
33.4 मोटाई के प्रति पट्टिका-विक्षेप की संवेदनशीलता 1242
33.5 एकसमान दाब के अधीन जकड़ी वृत्तीय पट्टिका 1246
34.1 झिल्ली & उथले कवच की तुलना 1300

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.2 बेलनाकार कवच का अभिकल्प 1313
35.1 किसी SDOF निकाय के लिए ω_n, T_n और f_n की गणना 1330
35.2 लघुगणकीय ह्रास से अवमंदन का आकलन 1334
35.3 हार्मोनिक अनुक्रिया: प्रवर्धन और कला 1337
35.4 अवमंदित SDOF निकाय की एकक आवेग अनुक्रिया 1339
35.5 अचानक सोपान भार: गतिक प्रवर्धन गुणक 2 1340
35.6 आयताकार स्पंद भार और आघात वर्णक्रम 1341
35.7 दो हार्मोनिक घटकों वाले आवर्ती मशीन-बल के प्रति आवृत्ति अनुक्रिया 1344
35.8 अनुक्रिया वर्णक्रम से एक-मंजिला ढाँचे का भूकंपीय अभिकल्प 1347
35.9 भूकंपीय भारण के अधीन 3-DOF अपरूपण भवन का विधिक विश्लेषण 1351
35.10इस्पात पद-सेतु की प्राकृतिक आवृत्ति और पैदल-यात्री अनुनाद जाँच 1354
35.11द्विरेखीय शैथिल्य पाश से तुल्य श्यान अवमंदन 1357
35.12प्रबलित कंक्रीट ढाँचे के लिए तन्यता माँग और बल न्यूनीकरण 1359
35.13ऊँचे भवन के लिए समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक का अभिकल्प 1361
35.14आधार-विलगित अस्पताल भवन का अभिकल्प 1363
36.1 ASD: आनमन 1370
36.2 चरम सामर्थ्य; समीक्षा 1379
36.3 चरम सामर्थ्य; अभिकल्प I 1379
36.4 चरम सामर्थ्य; अभिकल्प II 1380
36.5 यथार्थ विश्लेषण 1381
36.6 R/C स्तंभ, c ज्ञात 1388
36.7 R/C स्तंभ, e ज्ञात 1389
36.8 प्रकरण अध्ययन: वॉलनट लेन ब्रिज 1393
37.1 स्थैतिकतः अनिर्धार्य मेहराब का अभिकल्प 1399
37.2 मेहराब में तापमान परिवर्तन 1406
38.1 पोर्टल विधि; निम्न-तलीय भवन 1421
38.2 Matlab समाधान 1433
38.3 ब्रैकट विधि; उच्च-तलीय भवन 1435
38.4 कूप उपतंत्र 1437
38.5 कंक्रीट अपरूपण भित्ति 1438
38.6 ट्रसित अपरूपण भित्ति 1441
38.7 भवन का सन्निकट अनुप्रस्थ विक्षेप 1446
39.1 डलेस विमानपत्तन 1451
39.2 एफिल टॉवर 1458
39.3 मागात्सीनी जेनराली 1465
39.4 जॉर्ज वाशिंगटन ब्रिज 1469
39.5 द्वि-कब्जित आर्च का अभिकल्प 1476
39.6 आर्च में तापमान परिवर्तन 1484
39.7 I के सेकेंट परिवर्तन वाला परवलयिक आर्च 1487
42.1 लंबकोणीय धरन 1516
42.2 लंबकोणीय फ्रेम 1519

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

42.3 ग्रिड 1528
42.4 संकर फ्रेम 1531
42.5 संकर ग्रिड 1534
44.1 फ्रेम 1563
44.2 धरन 1569
44.3 ट्रस 1574
45.1 कुप्रतिबद्ध 1587
46.1 स्थैतिकतः निर्धार्य ट्रस का स्थैतिकी आव्यूह 1595
46.2 धरन का स्थैतिकी आव्यूह 1596
46.3 स्थैतिकतः अनिर्धार्य ट्रस का स्थैतिकी आव्यूह 1598
46.4 अतिरिक्त बलों का चयन 1600
46.5 शुद्धगतिकी आव्यूह: ट्रस उदाहरण 1603
46.6 नम्यता आव्यूह 1608
46.7 नम्यता से दृढता 1609
46.8 वक्र अवयव का दृढता आव्यूह 1611
46.9 सर्वांगसम रूपांतरण 1614
46.10फ्रेम का सर्वांगसम रूपांतरण 1616
47.1 यूलर: अक्षीय 1649
47.2 यूलर: बंकन 1651
47.3 Hamilton 1659
48.1 PCVW, क्रमशः परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाली कैंटिलीवर धरन 1688
48.2 तीन-कब्ज़ों वाली अर्धवृत्ताकार मेहराब 1689
48.3 PVW, क्रमशः परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाली कैंटिलीवर धरन 1692
48.4 PTPE, कमानी और द्रव्यमान 1696
48.5 PTPE; परिवर्ती I वाली आबद्ध धरन 1697
48.6 अरेखीय प्रत्यास्थ ट्रस 1700
48.7 कास्टिलियानो 2; कैंटिलीवर धरन 1702
48.8 कास्टिलियानो 2; कास्टिलियानो के द्वितीय प्रमेय से समान रूप से भारित धरन का विक्षेप . 1702
48.9 कास्टिलियानो 2, अरेखीय ट्रस 1703
48.10कास्टिलियानो 2, कमानी का विक्षेप 1703
48.11रेले–रिट्ज: समान रूप से भारित सरल आलंबित धरन 1705
48.12विचरणात्मक विधियाँ 1706
51.1 Jacobian operators 1773
52.1 1D अक्षीय सदस्य की सममिति और धनात्मक निश्चितता की जाँच 1795
52.2 तंतु कंपन 1799
52.3 धरन अवयव का दृढता आव्यूह 1805
52.4 ऊष्मा अंतरण 1807
53.1 पार्श्व भार के प्रति भवन की रैखिक प्रत्यास्थ प्रतिक्रिया का मोंटे कार्लो अनुकरण . . . 1817
53.2 अपरूपण भवन के लिए रेले अवमंदन गुणांकों का अंशांकन 1822
53.3 विश्लेषणात्मक आधाररेखा: सामान्य प्रारंभिक दशाओं से मुक्त कंपन 1823
53.4 ऑयलर विधि 1826

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53.5 केंद्रीय अंतर स्थिरता काल चरण 1837
53.6 इस्पात बंधन-छड की तरंग चाल और अक्षीय प्राकृतिक आवृत्तियाँ 1839
55.1 स्पर्शज्या मापांक 1879
56.1 अरैखिक परिच्छेदीय विश्लेषण: वैश्लेषिक 1887
56.2 परतदार: इस्पात 1890
56.3 परतदार: कंक्रीट/ACI 1895
56.4 I-आकार R/C परिच्छेद की आघूर्ण–वक्रता 1899
57.1 आबद्ध धरन: केंद्रीय भार 1915
57.2 आबद्ध धरन: उत्केंद्रित भार 1915
57.3 सतत धरन 1916
57.4 लंबकोणीय ढाँचा 1916
57.5 आनत ढाँचा 1917
57.6 आधारित बाहुधरन I 1921
57.7 आधारित बाहुधरन II 1921
57.8 आबद्ध धरन 1922
57.9 आनत ढाँचा 1923
57.10वर्गाकार पट्टिका 1929
57.11आयताकार पट्टिका 1931
59.1 न्यूटन विधि, अदिश 1947
59.2 न्यूटन विधि; सदिश 1950
60.1 स्तंभ व्याकुंचन 1972
60.2 ढाँचा व्याकुंचन; Matlab समाधान 1973
60.3 ढाँचा व्याकुंचन; Mathematica समाधान 1976
60.4 बंकनीय विरूपण पर अक्षीय भार का प्रभाव 1976
60.5 ब्रैकट धरन का बृहत् विक्षेप 1981
60.6 $\mathbf{K}_{geom}$ के बिना व्याकुंचन भार 1985
62.1 इस्पात स्तंभ में सुघट्य कब्जा 2095
63.1 स्तंभ प्रतिरूपण 2134
63.2 धरन प्रतिरूपण 2136
64.1 सहसंबंध आव्यूह 2155
64.2 Latin Hypercube: दो चरों वाला हल किया गया उदाहरण 2160
64.3 बिंदु आकलन विधि का उदाहरण 2162
64.4 Taylor श्रेणी परिमित अंतर विधि का उदाहरण 2164
64.5 बहुपदीय अराजकता प्रसार 2165
64.6 Morris विधि 2172
64.7 Morris विधि; महत्त्वपूर्ण चरों की पहचान 2175
65.1 अरैखिक अतिपरवलयी प्रतिरूप का समंजन 2192
65.2 द्विघाती आधार और मेट्रोपोलिस–हेस्टिंग्स प्रतिचयन सहित बायेसियन समाश्रयण . . . 2199
67.1 भूकंपीय संकट विश्लेषण 2248
68.1 प्रत्यावर्तन अवधि की गणनाएँ 2257
69.1 माँग वक्र का उदाहरण 2272

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

69.2 पुशओवर विश्लेषण; व्यावहारिक उदाहरण 2273
72.1 सम्पूर्ण PBEE उदाहरण 2353
B.1 पवन भार 2366
B.2 फ्रेम पर भूकंप भार 2376
B.3 ऊँचे भवन पर भूकंप भार 2377
B.4 चल भार न्यूनीकरण I 2381
B.5 चल भार न्यूनीकरण II 2382
K.1 FFT 2995
L.1 गाउस विलोपन 3015
L.2 गाउस-जॉर्डन विलोपन 3016
L.3 **lu** अपघटन 3017
L.4 चोलेस्की अपघटन 3018
L.5 गाउस-सीडेल 3019
L.6 गाउस-सीडेल 3020
L.7 एकल मान अपघटन 3020
L.8 पूर्वानुकूलन 3021
N.1 विश्वसनीयता सूचकांक 3044
R.1 वक्र की स्पर्शरेखा 3116
R.2 सदिश का अपसरण 3118
R.3 अदिश क्षेत्र की प्रवणता I 3119
R.4 अदिश क्षेत्र की प्रवणता ii 3120
R.5 सदिश क्षेत्र की प्रवणता 3122
R.6 अपसरण प्रमेय की भौतिक व्याख्या 3124

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मुख्य-बिंदु सूची: भाग II–IV (विश्लेषण)

17.1 संरचनात्मक विश्लेषण की आवश्यकताएँ 838
17.2 संरचनात्मक अभिकल्प की आवश्यकताएँ 838
18.1 गतिक विश्लेषण की शर्त 854
19.1 संतुलन समीकरण 873
19.2 मुक्त-पिंड आरेख 877
21.1 संरचनाओं में आंतरिक बल 918
21.2 अपरूपण; अवकल 920
21.3 आघूर्ण; अवकल 921
21.4 अपरूपण; समाकल 921
21.5 आघूर्ण; समाकल 922
22.1 वंकन का नियामक अवकल समीकरण 940
22.2 प्रस्ताव; प्रथम वक्रता-क्षेत्र प्रमेय 958
22.3 प्रस्ताव: द्वितीय वक्रता-क्षेत्र प्रमेय 959
23.1 अपरूपण-विरूपण 978
23.2 एकसमान और असमान ऐंठन 982
24.1 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम 992
24.2 (पूरक) आभासी कार्य का सिद्धांत 993
24.3 Maxwell-Betti का पारस्परिक प्रमेय 994
25.1 लचीलापन समीकरण 1025
26.1 बीम में बल-विस्थापन संबंध 1056
27.1 ढाल-विक्षेप विधि 1063
27.2 आघूर्ण वितरण 1075
27.3 आघूर्ण वितरण, ढाल-विक्षेप और Gauss-Seidel 1078
28.1 प्रभाव रेखा 1081
28.2 Müller-Breslau सिद्धांत 1085
30.1 सामान्य केबल 1122
32.1 Eddy का प्रमेय 1185
40.1 स्वतंत्रता कोटि 1496
40.2 विभिन्न अवयवों की स्वतंत्रता कोटियाँ 1497
41.1 विभिन्न अवयव प्रकारों के आंतरिक बल 1503
44.1 प्रत्यक्ष दृढता विधि का मर्म 1556
45.1 दृढता आव्यूह के अभिलक्षणिक मान 1581
45.2 अवयव दृढता आव्यूह की विशेषताएँ 1582
45.3 प्रतिबंध संख्या 1583
45.4 परिशुद्धता और कुप्रतिबद्धता 1587
46.1 दृढता-नम्यता संबंध 1607
46.2 नम्यता-दृढता संबंध 1609
46.3 सर्वांगसम रूपांतरण 1614
47.1 Hamilton का सिद्धांत 1656

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

48.1 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम 1672
48.2 पूरक आभासी कार्य का सिद्धांत 1688
48.3 आभासी विस्थापन का सिद्धांत 1692
48.4 स्थितिज ऊर्जा के स्थिर मान का सिद्धांत 1695
48.5 कास्टिलियानो का प्रथम प्रमेय 1699
48.6 कास्टिलियानो का द्वितीय प्रमेय 1701
50.1 दृढता आव्यूह और अवयव बल 1753
50.2 अभिसरण निकष 1756
57.1 ऊपरी सीमा प्रमेय 1913
57.2 निचली सीमा प्रमेय 1918
63.1 परिमित अवयव अध्ययनों की भूमिका 2128

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

खण्ड II

परिचय: मूलभूत एवं विश्लेषणात्मक

यह खंड संभवतः संरचनात्मक विश्लेषण (structural analysis) का ऐसा एकमात्र व्यापक विवेचन प्रस्तुत करता है, जो एक ही एकीकृत रूपरेखा के अंतर्गत मूलभूत सिद्धांतों से लेकर उन्नत संगणकीय तथा प्रायिकतामूलक विधियों तक विस्तृत है। संपूर्ण विवेचन में सुसंगत संकेतन और एक सुस्पष्ट दार्शनिक दृष्टिकोण अपनाते हुए मैंने कठोर सैद्धांतिक आधारों को विशेष महत्त्व दिया है, क्योंकि केवल प्रक्रियात्मक दक्षता नहीं, बल्कि अंतर्निहित सिद्धांतों की गहन समझ ही विवेकपूर्ण अभियांत्रिकी निर्णय तथा पाठ्यपुस्तकों में मिलने वाली समस्याओं से परे विधियों के आत्मविश्वासपूर्ण अनुप्रयोग के लिए आवश्यक है। यह सतही विवेचन से संतुष्ट रहने वाले दुर्बल-संकल्प अभियंता के लिए रचना नहीं है; यह वास्तविक बौद्धिक संलग्नता की अपेक्षा करती है और उसका प्रतिफल भी देती है।

शास्त्रीय विधियों से आरंभ कर ऊर्जा सिद्धांतों, आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण (matrix structural analysis), परिमित तत्त्वों (finite elements), अरैखिक विश्लेषण (nonlinear analysis) और अंततः प्रदर्शन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (performance-based earthquake engineering) तक, यह ग्रंथ प्रतिपादित करता है कि संरचनात्मक विश्लेषण में वास्तविक प्रवीणता ऐसे सैद्धांतिक अंतर्दृष्टि पर आधारित है जो किसी विशिष्ट संगणकीय साधन अथवा अभिकल्प संहिता से परे जाती है।

अभियंता ऐसी वस्तुएँ रचते हैं जिनका अभी अस्तित्व नहीं है। आप किसी पुस्तक में यह नहीं खोज सकते कि आप क्या करने वाले हैं। तब आप क्या करते हैं? आप सिद्धांत की ओर लौटते हैं। इससे आप पूर्व में किए गए समस्त कार्य का उपयोग कर कुछ नया संश्लेषित कर सकते हैं। यह आपको ऐसी बातें देखने और ऐसे संबंध स्थापित करने में समर्थ बनाता है जिन्हें कोई अन्य नहीं देख पाएगा।

विशेष रूप से अभियांत्रिकी विद्यार्थियों की इस पीढ़ी को सिद्धांत में प्रवीण होना चाहिए। इस समय अभियंता के कार्य का एक बड़ा भाग गणना करना है। किंतु मेरा विचार है कि कृत्रिम बुद्धिमत्ता शीघ्र ही हमें गणनोत्तर युग में ले जाएगी, जहाँ सब कुछ स्वचालित रूप से किया जाएगा। उस युग में गहन सैद्धांतिक शिक्षा प्राप्त अभियंता वास्तव में विशिष्ट दिखाई देगा।

Baker, 2023 *William Baker: Structural Engineer and Problem Solver*

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

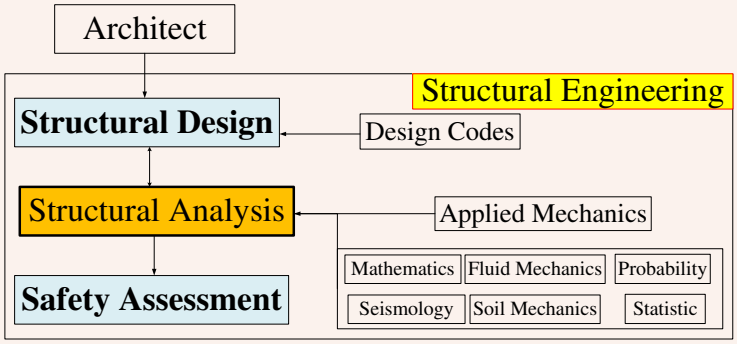
17 परिचय

सारांश

पुस्तक II का यह आरंभिक अध्याय इसके सिद्धांतों, अनुप्रयोगों तथा भवन उद्योग में विभिन्न व्यावसायिक विशेषज्ञों की विशिष्ट भूमिकाओं का व्यापक अवलोकन प्रस्तुत करता है। आरंभ में यह संरचनात्मक विश्लेषण (structural analysis) का एक विस्तृत परिप्रेक्ष्य देता है, जिससे आगे विषय के अधिक गहन अध्ययन की भूमिका तैयार होती है। इसमें वास्तुकारों और संरचनात्मक अभियंताओं के विशिष्ट उत्तरदायित्वों तथा दृष्टिकोणों का तुलनात्मक निरूपण किया गया है। अध्याय का मुख्य भाग संरचनात्मक अभियांत्रिकी के मूल पक्षों—अभिकल्प, विश्लेषण और सुरक्षा-मूल्यांकन—को समर्पित है। इसके बाद संरचनात्मक विश्लेषण से संबद्ध विविध विद्याओं पर चर्चा की गई है, जिससे इस क्षेत्र की अंतर्विषयी प्रकृति रेखांकित होती है। अध्याय का एक महत्त्वपूर्ण अंश आंतरिक बलों की संकल्पना प्रस्तुत करता है और कुछ संदर्भों में प्रतिबल-गणनाओं के सरल विकल्प के रूप में उनके उपयोग का प्रस्ताव करता है। यह दृष्टिकोण किसी संरचना के भीतर बलों के संचरण को अधिक सहज रूप से समझने में सहायक है। तत्पश्चात् धरन, स्तंभ और ट्रस जैसे विभिन्न भार-संचरण तत्त्वों तथा संपूर्ण संरचना में भार वितरित करने में उनकी भूमिकाओं का विवेचन किया गया है। अंत में अध्याय सरलतम से लेकर जटिल तक, विभिन्न प्रकार की संरचनाओं का परीक्षण करता है।

17.1 व्यापक परिप्रेक्ष्य 825
17.1.1 वास्तुकला 826
17.1.2 संरचनात्मक अभियांत्रिकी . . . 827
17.1.3 संरचनात्मक विश्लेषण में सम-न्वित विद्याएँ 830
17.2 तत्त्व: प्राथमिक आंतरिक बल 830
17.3 भार-संचरण तत्त्व 831
17.4 संरचनाओं के प्रकार 832
17.5 अभियांत्रिकी साधनों का रूपांतरण 836
17.6 संरचनात्मक अभियांत्रिकी के पाठ्यक्रम . 838

17.1 व्यापक परिप्रेक्ष्य



चित्र 17.1: संरचनात्मक विश्लेषण: व्यापक परिप्रेक्ष्य

[1] सर्वप्रथम, संरचनात्मक अभियांत्रिकी मूलतः निम्नलिखित में से एक अथवा अधिक कार्यों पर केंद्रित होती है, चित्र 17.1:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अभिकल्प नई संरचनाओं का—चाहे वह भवन हो, वायुयान हो अथवा पनडुब्बी।

विश्लेषण नई संरचनाओं का—पुनः भवनों, वायुयानों, पनडुब्बियों अथवा अन्य संरचनाओं का।

सुरक्षा-मूल्यांकन किसी भी संरचना का।

17.1.1 वास्तुकला

2 वास्तुकला भवनों और अन्य भौतिक संरचनाओं के अभिकल्प तथा निर्माण की कला और विज्ञान दोनों को समाहित करती है। यह केवल निर्माण तक सीमित नहीं है, बल्कि इसमें सौंदर्य, कार्यात्मकता, सांस्कृतिक संदर्भ और पर्यावरणीय संधारणीयता का भी विचार किया जाता है।

3 वास्तुकार संरचनाओं के अभिकल्प और नियोजन में प्रशिक्षित व्यावसायिक विशेषज्ञ होते हैं। वे ग्राहकों की आवश्यकताओं और आकांक्षाओं को मूर्त वास्तु-अभिकल्पों में रूपांतरित करने के लिए उनके साथ निकटता से कार्य करते हैं।

4 वास्तुकला ऐसे स्थानों की रचना करती है जो केवल व्यावहारिक प्रयोजन ही पूरा नहीं करते, बल्कि भावनाएँ उत्पन्न करते हैं, प्रेरणा देते हैं और निर्मित पर्यावरण में सार्थक योगदान करते हैं।

5 यह एक बहुविषयी क्षेत्र है जो अभियांत्रिकी, कला, समाजशास्त्र, मनोविज्ञान और पर्यावरण विज्ञान के सिद्धांतों का उपयोग कर ऐसी संरचनाएँ रचता है जो सौंदर्यपूर्ण और कार्यक्षम दोनों हों। वास्तुकला हमारे नगरों, समुदायों और समाजों को आकार देने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है तथा सांस्कृतिक मूल्यों, प्रौद्योगिकीय प्रगति और सामाजिक आकांक्षाओं को प्रतिबिंबित करती है।

6 वास्तुकार अभिकल्प में तत्त्वगत दृष्टिकोण की अपेक्षा समग्र दृष्टिकोण पर बल देते हैं। अभिकल्प प्रक्रिया में वे स्थान और रूप की योजना को एक संपूर्ण तंत्र के रूप में संकल्पित करते हैं। वे सामान्यज्ञ होते हैं।

7 वास्तु-अभिकल्प को विविध सीमाओं का सम्मान करना चाहिए—मूलतः वही जिन्हें विट्रुवियस ने दो सहस्राब्दी पूर्व निर्धारित किया था (§6.3.1)।

कार्यात्मकता: जिस प्रयोजन के लिए संरचना निर्मित की गई है, उस पर अपनाई गई संरचनात्मक व्यवस्था का प्रभाव।

सौंदर्य: वास्तुकार प्रायः अपनी सौंदर्य-संबंधी अपेक्षाएँ अभियंता पर आरोपित करता है। फलतः संरचनात्मक तंत्र पर कठोर सीमाएँ लग सकती हैं।

अर्थव्यवस्था: ध्यान रखना चाहिए कि किसी संरचना के दो सबसे बड़े लागत-घटक श्रम और सामग्री हैं। उनकी तुलना में अभिकल्प की लागत नगण्य होती है।

8 पुनर्जागरण काल में शास्त्रीय वास्तुकला के प्रति रुचि के पुनरुत्थान और नई वास्तुशैलियों तथा सिद्धांतों के उद्भव के साथ “वास्तुकला” शब्द को व्यापक मान्यता मिली। आंद्रेआ पल्लादियो, लियोन बतिस्ता अल्बेर्ती और फिलिप्पो ब्रुनेलेस्की जैसे वास्तुकारों ने वास्तु-विमर्श को आकार देने तथा वास्तुकला को एक सम्मानित व्यवसाय के रूप में स्थापित करने में निर्णायक भूमिका निभाई (अध्याय 15)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

17.1.2 संरचनात्मक अभियांत्रिकी

9 संरचनात्मक अभियांत्रिकी केवल सिविल अभियांत्रिकी[1] की ही नहीं, बल्कि यांत्रिक, नौसैनिक और वांतरिक्ष अभियांत्रिकी की भी एक शाखा है, जो संरचनाओं के अभिकल्प और विश्लेषण से संबंधित है।

10 संरचनात्मक अभियंता यह सुनिश्चित करने के लिए उत्तरदायी होते हैं कि संरचनाएँ सुरक्षित और स्थिर हों तथा अपने सेवा-काल में उन पर लगने वाले भारों और बलों को सहन कर सकें।

11 संरचनात्मक अभियंता की प्राथमिक भूमिका ऐसी संरचनाएँ अभिकल्पित करना है जो अपने स्वयं के भार के साथ-साथ पर्यावरणीय कारकों से उत्पन्न भारों को भी वहन कर सकें।

12 उन्हें प्रयुक्त सामग्री, भवन संहिताएँ और विनियम—जहाँ लागू हों—पर्यावरणीय दशाएँ तथा संरचना के अभीष्ट उपयोग सहित अनेक कारकों पर विचार करना होता है।

13 जैसा कि §11.2 में विवेचित है, "संरचनात्मक अभियांत्रिकी" शब्द 19वीं शताब्दी के मध्य में ही उस समय परिपक्व हो रहे यांत्रिकी क्षेत्र—जो एकल संरचनात्मक सदस्यों पर केंद्रित था—के स्वाभाविक विस्तार के रूप में उभरा। वास्तव में यह तर्क दिया जा सकता है कि संरचनात्मक विश्लेषण तत्त्वों के तंत्रों पर अनुप्रयुक्त यांत्रिकी के अतिरिक्त और कुछ नहीं है।

14 ऐतिहासिक रूप से पहले हमारे पास "निर्माता" थे—जैसे पिरामिडों के लिए इम्होटेप और फ्लोरेंस के गुंबद के लिए ब्रुनेलेस्की।

17.1.2.1 संरचनात्मक अभिकल्प

15 यह संरचनात्मक अभियंताओं द्वारा किए जाने वाले दो मुख्य कार्यों में से एक है।

16 किसी भवन अथवा वाहन के वास्तु-रेखाचित्रों और तत्पश्चात् किए गए विश्लेषण के आधार पर अभियंता भवन या अवसंरचना परियोजना के संरचनात्मक तत्त्वों को इस प्रकार अभिकल्पित करते हैं कि वे भारों को सुरक्षित रूप से वहन कर सकें। इसमें उपयुक्त सामग्री—जैसे कंक्रीट, इस्पात, काष्ठ अथवा सम्मिश्र सामग्री—का चयन, धरनों, स्तंभों, पट्टिकाओं और नींवों जैसे संरचनात्मक सदस्यों के आयाम तथा ज्यामिति का निर्धारण और इन तत्त्वों के बीच संयोजनों का विस्तृत विन्यास सम्मिलित है। ध्यान दें कि यह एक पुनरावृत्तिमूलक प्रक्रिया है, जैसा कि §36.1.1 में विवेचित है।

17 वास्तुकारों और संरचनात्मक अभियंताओं के पारस्परिक संबंध की अधिक गहन समझ के लिए पाठक को अध्याय 15 देखने की सलाह दी जाती है।

18 संरचनात्मक अभिकल्प को प्रचलित *अभिकल्प संहिताओं* (Design Codes) का अनुपालन करना चाहिए। इसका आगे §36 में विवेचन किया गया है।

19 संरचनात्मक अभिकल्प के विभिन्न स्तर हैं:

संकल्पनात्मक अभिकल्प: इस प्रारंभिक चरण में परियोजना की आवश्यकताओं, स्थल की दशाओं और वास्तु-विचारों के आधार पर संरचना के लिए विचार और संकल्पनाएँ विकसित की जाती हैं। अभियंता और वास्तुकार मिलकर एक आधारभूत अभिकल्प-संकल्पना तैयार करते हैं, जो संरचना के रूप, कार्य और सामान्य विन्यास की रूपरेखा निर्धारित करती है।

[1] ऐतिहासिक रूप से अभियांत्रिकी के केवल दो प्रकार माने जाते थे: सैन्य और सिविल।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रारंभिक अभिकल्प: इस चरण में अभियंता संकल्पनात्मक अभिकल्प की व्यवहार्यता जाँचने के लिए प्रारंभिक विश्लेषण और गणनाएँ करते हैं। वे भारों के आकलन, संभावित संरचनात्मक तंत्रों के चयन तथा सदस्यों के प्रारंभिक आकार निर्धारित करने हेतु सन्निकट संरचनात्मक विश्लेषण कर सकते हैं। इसका उद्देश्य संरचनात्मक आवश्यकताओं की अधिक विस्तृत समझ विकसित करना और अभिकल्प की प्रमुख चुनौतियों की पहचान करना है।

विस्तृत अभिकल्प: इस चरण में अभियंता अधिक विस्तृत विश्लेषण और गणनाओं के आधार पर अभिकल्प को परिष्कृत करते हैं। वे धरनों, स्तंभों, पट्टिकाओं और नींवों सहित सभी संरचनात्मक तत्त्वों के सटीक आयाम, सामग्री और संयोजन निर्दिष्ट करते हैं। ठेकेदारों और निर्माण दलों तक अभिकल्प की आवश्यकताएँ पहुँचाने के लिए विस्तृत रेखाचित्र, योजनाएँ और विनिर्देश तैयार किए जाते हैं।

निर्माण अभिकल्प: अभिकल्प का यह स्तर संरचना को निर्माण के लिए तैयार करने पर केंद्रित होता है। निर्माण-स्थल पर अभिकल्प के सुरक्षित और कुशल निष्पादन के लिए अभियंता अस्थायी आधार-तंत्रों, फॉर्मवर्क और टेकन सहित निर्माण योजनाएँ तथा अनुक्रम विकसित करते हैं। वे सामग्री की उपलब्धता, स्थल-व्यवस्था और समय-निर्धारण जैसे निर्माण-संबंधी विचारों को भी संबोधित करते हैं।

मूल्यांकन और पुनःसुदृढीकरण: जिन स्थितियों में विद्यमान संरचनाओं का मूल्यांकन अथवा पुनर्वास आवश्यक हो, अभियंता मूल्यांकन और पुनःसुदृढीकरण (retrofitting) का अभिकल्प कर सकते हैं। इसमें संरचना का निरीक्षण, उसकी दशा का आकलन, कमियों अथवा दुर्बलताओं की पहचान और वर्तमान सुरक्षा मानकों तथा निष्पादन-आवश्यकताओं की पूर्ति हेतु उसे सुदृढ या उन्नत करने की रणनीतियाँ विकसित करना सम्मिलित है।

संरचनात्मक अभिकल्प के ये स्तर संकल्पना से निर्माण तक की प्रगति को निरूपित करते हैं, जिसमें प्रत्येक चरण पर विवरण और परिष्कार बढ़ते जाते हैं। अभिकल्प के प्रत्येक स्तर पर सफल परिणाम के लिए वास्तुकारों, अभियंताओं, ठेकेदारों और अन्य हितधारकों के बीच प्रभावी सहयोग आवश्यक है।

17.1.2.2 विश्लेषण

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §11.8 देखें

[20] यद्यपि यही इस पुस्तक का मुख्य विषय है, विश्लेषण कभी अपने-आप में अंतिम लक्ष्य नहीं होता; वह केवल किसी नई संरचना के अभिकल्प अथवा किसी विद्यमान संरचना की सुरक्षा के आकलन की एक अनिवार्य अवस्था है।

[21] विश्लेषण साधारण हस्त-गणना—जैसा पुस्तक II में वर्णित है—से लेकर कंप्यूटर अनुकरण (पुस्तक III) और जटिल अरैखिक विश्लेषण (पुस्तक IV) तक विस्तृत हो सकता है।

[22] यांत्रिक दृष्टिकोण से,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 17.1: संरचनात्मक विश्लेषण की आवश्यकताएँ

संरचनात्मक विश्लेषण के सभी समाधानों को निम्नलिखित की संतुष्टि करनी चाहिए:

1. स्थैतिकी (संतुलन)
2. संघटनात्मक संबंध (प्रतिबल-विकृति अथवा बल-विस्थापन संबंध)
3. शुद्धगतिकी (विस्थापन की सुसंगति अथवा विकृति-विस्थापन संबंध)

23 संरचनात्मक अभिकल्प प्रक्रिया में बलों का एक समुच्चय और किसी संरचनात्मक घटक—धरन, स्तंभ, पट्टिका आदि—के आयाम दिए होते हैं; तब:

इस्पात/काष्ठ संरचनाएँ: उपयुक्त अनुप्रस्थ काट का चयन किया जाता है।

प्रबलित कंक्रीट: तत्त्व के आयाम और आंतरिक प्रबलन—प्रबलन छड़ों की संख्या तथा आकार—निर्धारित किए जाते हैं।

24 नई संरचनाओं के लिए विश्लेषण और अभिकल्प के बीच यह एक पुनरावृत्तिमूलक प्रक्रिया है। पहले अनुभवसंपन्न अभिकल्प अभियंताओं को ज्ञात व्यावहारिक नियमों से प्रारंभिक अभिकल्प बनाया जाता है, फिर उसका विश्लेषण और पुनःअभिकल्प किया जाता है, अध्याय 36।

25 सामर्थ्य को संबोधित करने वाली अभिकल्प प्रक्रिया के बाद[2], हमें निम्नलिखित की जाँच करनी चाहिए:

सेवायोग्यता: लागू भार के अधीन विक्षेप और दरारों की चौड़ाई; इनकी तुलना अभिकल्प संहिता में निर्दिष्ट स्वीकार्य मानों से की जाती है।

विफलता: विफलता-भार की तुलना उपयुक्त सुरक्षा गुणकों से गुणित लागू भार से की जाती है।

यदि अभिकल्प स्वीकार्य न पाया जाए, तो उसे संशोधित कर पुनः विश्लेषित करना चाहिए।

26 संक्षेप में, विश्लेषण सदैव आवश्यक है।

परिभाषा 17.2: संरचनात्मक अभिकल्प की आवश्यकताएँ

संरचनात्मक अभिकल्प को निम्नलिखित की संतुष्टि करनी चाहिए:

1. सामर्थ्य ($\sigma < \sigma_f$)
2. दृढता ("अल्प" विरूपण)
3. स्थिरता (व्याकुंचन, दरार पड़ना)

27 रोचक रूप से, तोरोहा (§15.4.6) गणनाओं को पश्च-विचार मानते थे, जो केवल किसी अभिकल्प की व्यवहार्यता का आकलन करने के लिए आवश्यक हैं।

[2]ध्यान दें कि महासागर के ऊपर उड़ने वाले वायुयानों के लिए सेवायोग्यता—दरारों को सहन करने की क्षमता—की जाँच पहले और सामर्थ्य की जाँच बाद में की जाती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

17.1.2.3 सुरक्षा-मूल्यांकन

28 संरचनात्मक अभियंताओं के लिए यह अपेक्षाकृत नया कार्य है। इसका उद्भव संरचनाओं के वृद्ध होने और उनकी संरचनात्मक अखंडता का पुनर्मूल्यांकन करने की आवश्यकता से हुआ है।

29 कुछ अभियंता त्रुटिपूर्वक प्रचलित अभिकल्प संहिता के अनुपालन को ही सुरक्षा का आकलन मान लेते हैं[3]।

30 यह अवस्था प्रायः विश्लेषण की सबसे जटिल अवस्थाओं में से एक होती है। अभिकल्प में जहाँ रैखिक प्रत्यास्थ व्यवहार माना जा सकता है, वहीं सुरक्षा-मूल्यांकन में—व्यापक दरारों अथवा अपरिवर्तनीय विरूपण के कारण—प्रतिक्रिया को रैखिक नहीं माना जा सकता और विश्लेषण अरैखिक होना चाहिए।

17.1.3 संरचनात्मक विश्लेषण में समन्वित विद्याएँ

31 एक विद्या के रूप में संरचनात्मक विश्लेषण अनेक क्षेत्रों के सिद्धांतों का समन्वय करता है। इनमें कुछ स्पष्ट हैं—जैसे यांत्रिकी—और कुछ अपेक्षाकृत कम स्पष्ट:

यांत्रिकी: ठोस यांत्रिकी भारकारकों के अधीन अलग-अलग सदस्यों के व्यवहार की समझ प्रदान करती है। संरचनात्मक विश्लेषण तत्त्वों के एक समुच्चय को संबोधित करता है, जिसके प्रत्येक तत्त्व पर यांत्रिकी के प्रासंगिक मूलभूत समीकरण लागू होते हैं।

गणित: एकचर कलन सर्वव्यापी है; इसके अतिरिक्त बहुचर कलन—सदिश कलन—रैखिक बीजगणित—पुस्तक III की कंप्यूटर-आधारित विधियाँ—अवकल समीकरण और परिवर्तनात्मक विधियाँ भी आवश्यक हैं।

तरल यांत्रिकी: पवन-भार के लिए बेर्नूली समीकरण इसका एक महत्त्वपूर्ण उदाहरण है।

मृदा यांत्रिकी: संरचनात्मक आधारों का प्रकार निर्धारित करने के लिए यह निर्णायक है।

भूकंपविज्ञान: भूकंपीय विश्लेषण के लिए भू-गति त्वरण प्रदान करने हेतु यह आवश्यक है।

प्रायिकता: प्रायिकता और सांख्यिकी संरचनाओं की सुरक्षा के आकलन के महत्त्वपूर्ण साधन हैं। प्रतिरोध का प्रायिकता-वितरण फलन (PDF) प्रयोगशाला परीक्षणों के सांख्यिकीय विश्लेषण पर आधारित होता है, जबकि माँग संभावित भारों के घटित होने के PDF पर आधारित होती है।

17.2 तत्त्व: प्राथमिक आंतरिक बल

32 आंतरिक बल और प्रतिबल मानव-निर्मित उपयोगी संकल्पनाओं के अतिरिक्त और कुछ नहीं हैं। केवल विकृतियों को भौतिक रूप से मापा जा सकता है। इन्हें यंग मापांक द्वारा प्रतिबलों से संबंधित किया जा सकता है और फिर अनुप्रस्थ काट पर समाकलित करके आंतरिक अक्षीय, अपरूपण, आनमन तथा मरोड़ बल परिभाषित किए जा सकते हैं (§)।

[3] उदाहरणार्थ, जब सीब्रुक नाभिकीय परिरोधन भवन में क्षार-समुच्चय अभिक्रियाओं के कारण व्यापक दरारें पाई गईं, तब नाभिकीय विनियामक आयोग ने संरचना के स्वामी द्वारा सुरक्षा के आकलन हेतु पुरानी ACI-318 अभिकल्प संहिता को "मनोनुकूल संशोधित" कर देने पर ही संतोष कर लिया।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

33 निम्नलिखित को प्राथमिक आंतरिक बल कहा जाएगा:

अक्षीय N: केबल, ट्रस तत्त्व, मेहराब, झिल्ली, कवच

आनमनी M: धरन, फ्रेम, ग्रिड, पट्टिकाएँ

मरोड़ी T: ग्रिड, 3D फ्रेम

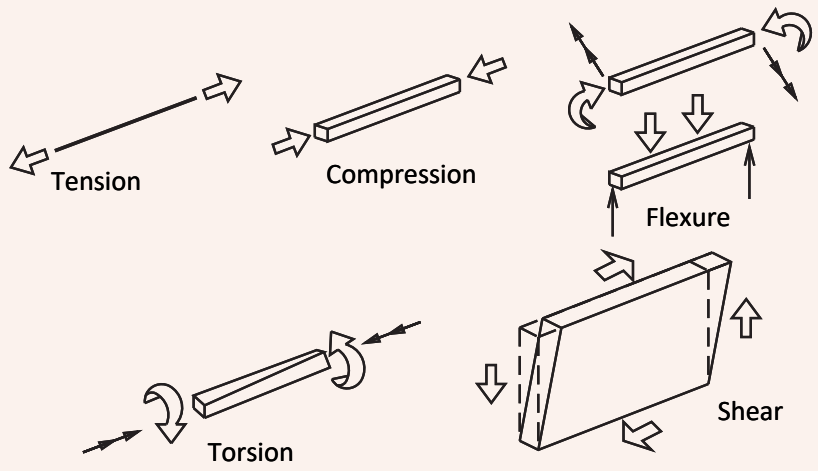
अपरूपण V: फ्रेम, ग्रिड, अपरूपण भित्तियाँ।

34 वास्तव में संरचना के प्रकार के अनुसार इन आंतरिक बलों में से अनेक संयुक्त रूप में उपस्थित हो सकते हैं, §17.4।

17.3 भार-संचरण तत्त्व

35 ध्यान रखना चाहिए कि भार के अधीन संरचना विरूपित होती है और हम विकृति को माप सकते हैं। फिर प्रत्यास्थता की परिकल्पना द्वारा विकृति को प्रतिबल से संबंधित किया जाता है—जिसे स्वतः प्रत्यक्ष रूप से नहीं मापा जा सकता—और सरलता के लिए प्रतिबलों को उनके समाकलित मानों से प्रतिस्थापित किया जाता है, §O.9।

36 अतः हमारे पास चार मूलभूत आंतरिक बल हैं, चित्र 17.2।



चित्र 17.2: संरचनात्मक तत्त्वों में बलों के प्रकार (1d)

अक्षीय: केबल, ट्रस तत्त्व, मेहराब, झिल्ली, कवच

आनमनी: धरन, फ्रेम, ग्रिड, पट्टिकाएँ

मरोड़ी: ग्रिड, 3D फ्रेम

अपरूपण: फ्रेम, ग्रिड, अपरूपण भित्तियाँ।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

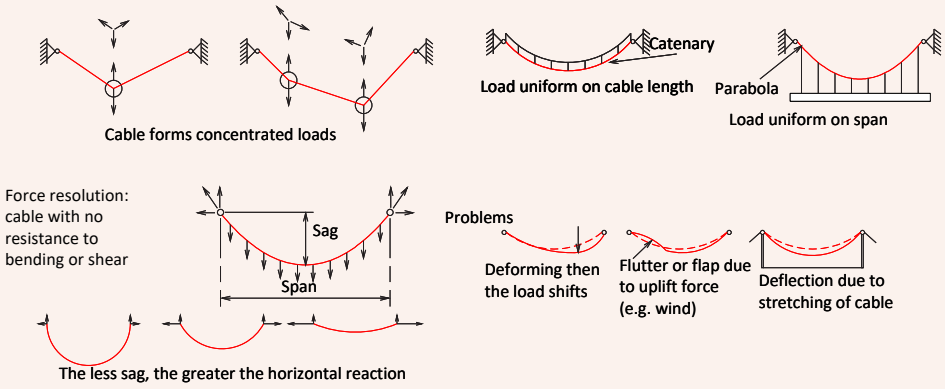
[37] ध्यान दें कि तत्त्व के प्रकार के अनुसार विभिन्न प्रकार के आंतरिक बल विविध विन्यासों में सह-अस्तित्व रखते हैं, §40.4।

17.4 संरचनाओं के प्रकार

[38] संरचनाओं को निम्नलिखित प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है:

तनन & संपीडन संरचनाएँ: इनमें केवल तनन और संपीडन होते हैं; अपरूपण, आनमन अथवा मरोड़ नहीं।

केबल (केवल तनन): इस्पात केबलों का उच्च सामर्थ्य और सरल तनन की दक्षता उन्हें पुलों तथा कटोरीनुमा छतों जैसी लंबी दूरियों को पाटने के लिए आदर्श संरचनात्मक तत्त्व बनाते हैं, चित्र 17.3।



चित्र 17.3: केबल तंत्रों के मूल पक्ष

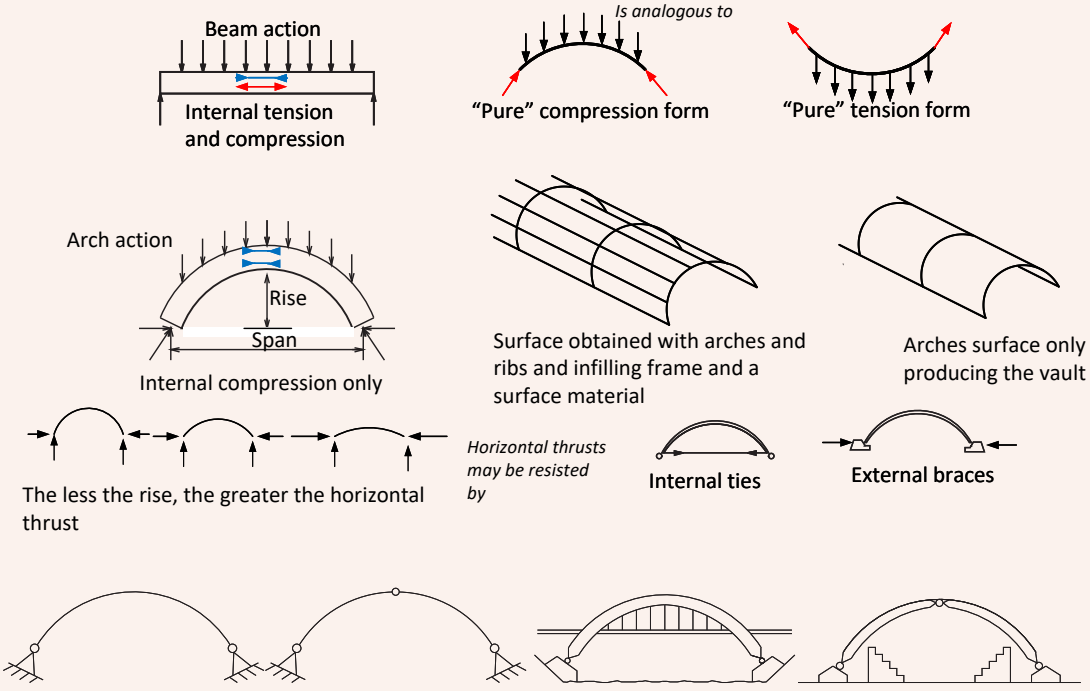
मेहराब (मुख्यतः संपीडन): यह एक "उलटी केबल संरचना" है। मेहराब में हम आनमन को न्यूनतम कर भार को केवल अक्षीय बलों द्वारा संचारित करना चाहते हैं। मेहराब लंबी विस्तृति वाली छतों और पुलों में प्रयुक्त होते हैं, चित्र 17.4।

ट्रस में *पिन-संयोजित* तत्त्व होते हैं, जो केवल अक्षीय बल—तनन और संपीडन—संचारित कर सकते हैं। तत्त्व खाँचेदार, पेंचदार अथवा *गसेट पट्टिका* संयोजकों द्वारा जोड़े जाते हैं। तथापि निर्माण-विवरणों के कारण अपेक्षाकृत दृढ संयोजनों से *द्वितीयक प्रतिबल* उत्पन्न हो सकते हैं। ट्रसों का उपयोग धरनियों, छतों, पुलों और विद्युत मीनारों में होता है, चित्र 17.5।

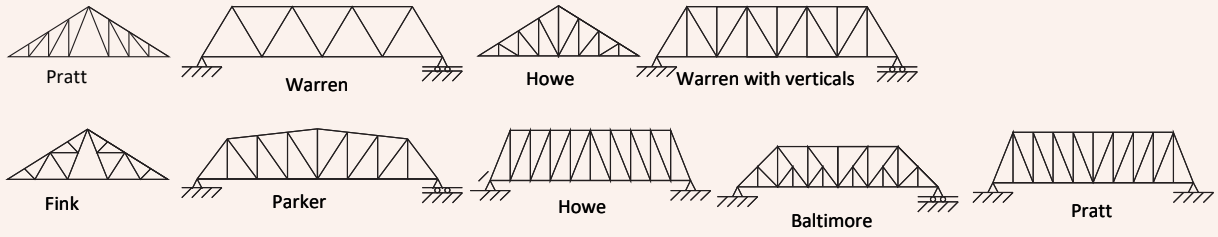
स्तंभ और धरन: मूलतः एक आधार-स्तंभ जिस पर "धरन" टिकी होती है, चित्र 17.6 और 17.7।

धरन: इनमें अपरूपण, आनमन और कभी-कभी अक्षीय बल होते हैं। स्मरण रखें कि $\sigma = \frac{Mc}{I}$ केवल *छिछली धरनों* पर लागू होता है, अर्थात् विस्तृति/गहराई अनुपात कम-से-कम पाँच हो। प्रबलित कंक्रीट की धरनें प्रायः आयताकार अथवा T-आकृति की होती हैं, जबकि इस्पात की धरनें सामान्यतः I-आकृति की होती हैं। यदि ऊपरी फ्लैंज पर्याप्त रूप से दृढ न किए गए हों तो उनमें व्याकुंचन हो सकता है; अतः दृढक आवश्यक होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

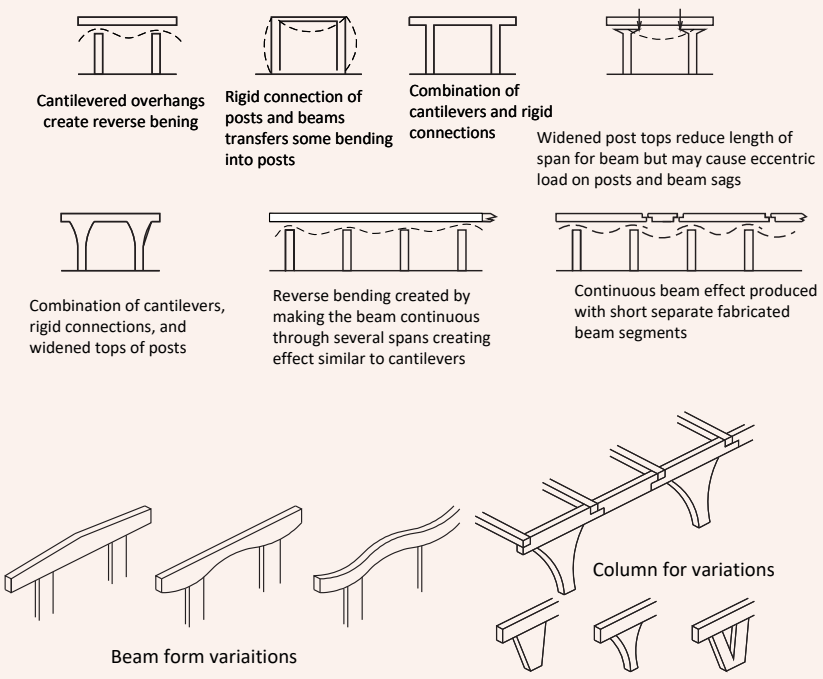


चित्र 17.4: मेहराबों के मूल पक्ष

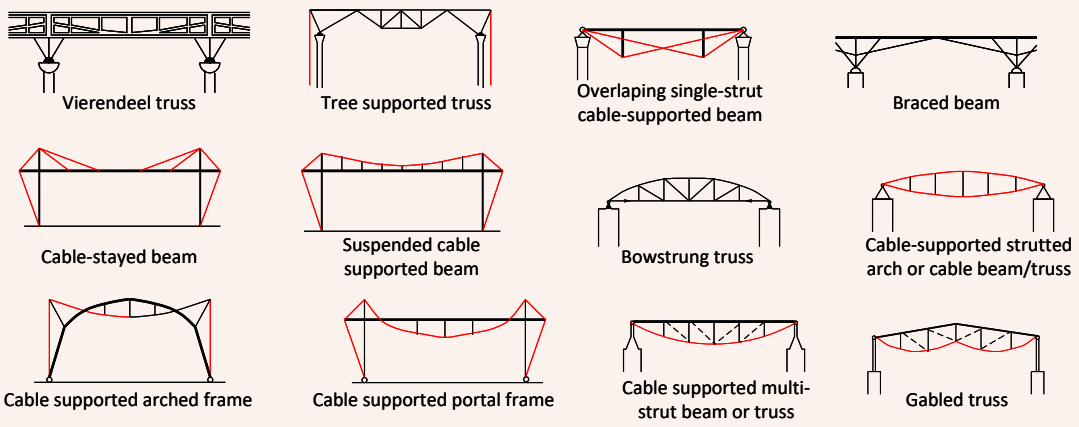


चित्र 17.5: ट्रसों के प्रकार

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



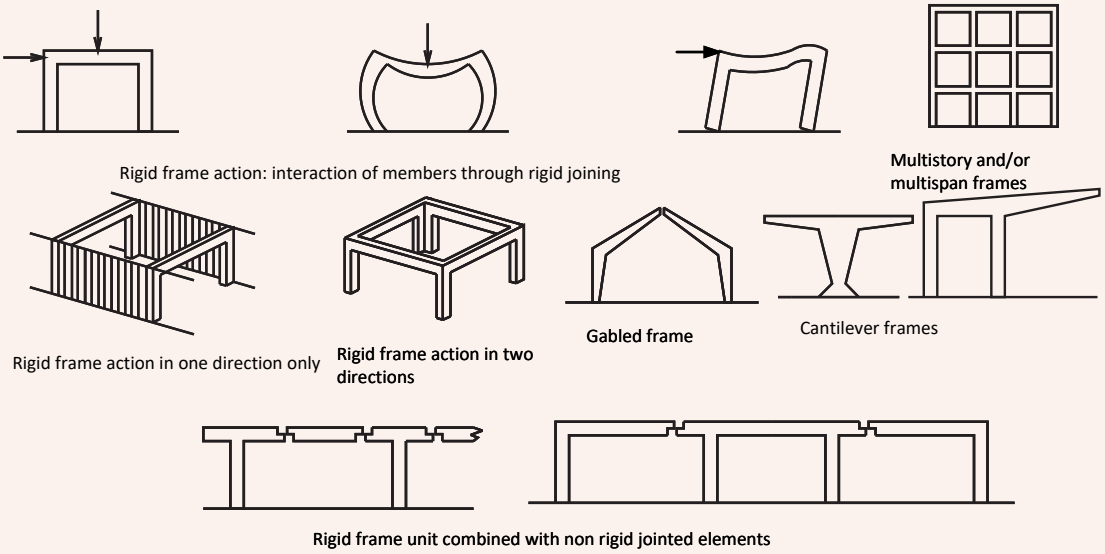
चित्र 17.6: स्तंभ और धरन के विन्यासों में विविधताएँ



चित्र 17.7: धरनों के विभिन्न प्रकार

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

फ्रेम: भार संरचना के समतल में होता है। इनमें अक्षीय बल, अपरूपण, आनमन—2D संरचनाओं में एक अक्ष के सापेक्ष और 3D संरचनाओं में दो अक्षों के सापेक्ष—तथा मरोड़—केवल 3D संरचनाओं में—होते हैं। फ्रेम में कम-से-कम एक क्षैतिज सदस्य—धरन—ऊर्ध्वाधर सदस्यों से दृढतापूर्वक जुड़ा होता है[4]। ऊर्ध्वाधर सदस्यों की परिसीमा दशाएँ भिन्न हो सकती हैं, जो सामान्यतः मृदा की दशाओं द्वारा नियंत्रित होती हैं। फ्रेमों का उपयोग घरों और भवनों में व्यापक रूप से होता है, चित्र 17.8।



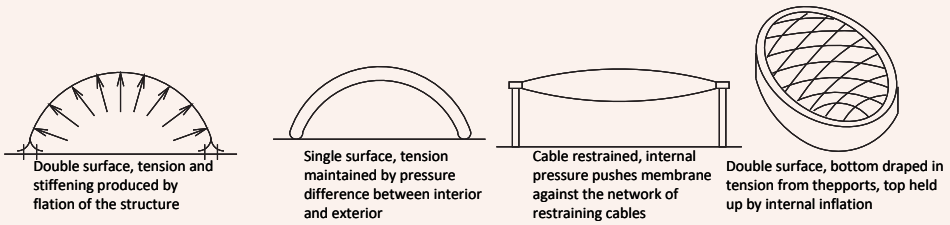
चित्र 17.8: फ्रेमों के मूल रूप

ग्रिड और पट्टिकाएँ: भार संरचना के समतल के लंबवत् होता है। इनमें आनमन, अपरूपण और मरोड़ होते हैं। ग्रिड में धरनें समकोण पर होती हैं, जिससे भार दो दिशाओं में वितरित होता है। धरनों के बीच दृढ संयोजनों के कारण सदस्यों के मरोड़-प्रतिरोध से अतिरिक्त दृढता प्राप्त होती है। यदि आकृति-अनुपात एक के निकट न हो, तो अधिक दक्षता के लिए ग्रिड को *तिर्यक* भी बनाया जा सकता है। पट्टिकाएँ समतल, दृढ, द्विविमीय संरचनाएँ हैं जो ऊर्ध्वाधर भार को अपने आधारों तक पहुँचाती हैं। इनका उपयोग मुख्यतः *फर्श पट्टिकाओं* के रूप में होता है। *वलित पट्टिकाएँ* अनुप्रस्थ और अनुदैर्ध्य धरन-क्रिया का संयोजन हैं और लंबी विस्तृति वाली छतों में प्रयुक्त होती हैं। पट्टिका को अनुदैर्ध्य रूप के स्थान पर वृत्ताकार भी मोड़ा जा सकता है। वलित पट्टिकाएँ मुख्यतः लंबी विस्तृति वाली छतों के रूप में प्रयुक्त होती हैं; किंतु ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दोनों भारों को सहारा देने वाली ऊर्ध्वाधर भित्तियों के रूप में भी उनका उपयोग किया जा सकता है।

झिल्लियाँ: ये 3D संरचनाएँ हैं, जो लचीली 2D सतह से बनी होती हैं और केवल तनन का प्रतिरोध करती हैं। वे प्रायः केबल-समर्थित होती हैं और तंबुओं तथा लंबी विस्तृति वाली छतों में प्रयुक्त होती हैं, चित्र 17.9।

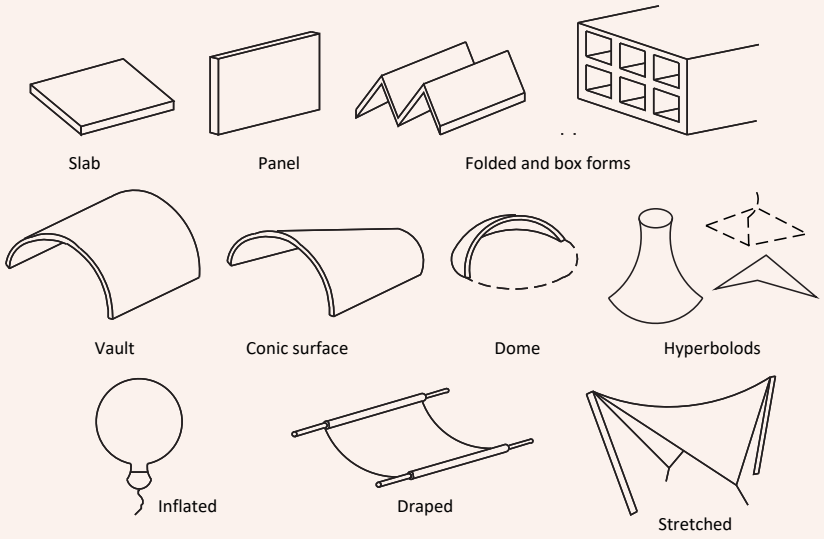
[4]फ्रेम संरचनाओं के अग्रदूत **स्तंभ और सरदल** थे, जिनमें स्तंभ ऊर्ध्वाधर सदस्य होता है और सरदल उस पर सरलता से रखा होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 17.9: वायु-समर्थित संरचनाओं के उदाहरण

कवच: ये 3D संरचनाएँ हैं, जो वक्र 2D सतह से बनी होती हैं और जिन्हें सामान्यतः केवल संपीडन अक्षीय प्रतिबल संचारित करने के लिए आकार दिया जाता है, चित्र 17.10। कवचों का वर्गीकरण



चित्र 17.10: कवचों के मूल रूप

उनकी वक्रता के आधार पर किया जाता है।

17.5 अभियांत्रिकी साधनों का रूपांतरण

39 एक अध्यापक के रूप में मुझे यह स्वीकार करना पड़ा कि हम एक परिवर्तनशील संसार में रह रहे हैं, जिसके अनुरूप हमें अपने विद्यार्थियों से पहले स्वयं को ढालना होगा।

40 अब तक सभी विद्यार्थी माध्यमिक विद्यालय के समय से—यदि खेलों के लिए उससे भी पहले नहीं—कंप्यूटर का उपयोग कर चुके हैं।

41 अधिकांश कंप्यूटर प्रोग्रामों में अब न तो उपयोग-पुस्तिकाएँ होती हैं, न ही कठिन अधिगम-वक्र। किसी

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सॉफ़्टवेयर को सार्वजनिक विश्वास और समर्थन प्राप्त करने के लिए सरल, सुरुचिपूर्ण, सहज और विस्तारक्षम होना चाहिए। इसका प्रभाव निम्नलिखित पर पड़ा है:

लेखन: शब्द-संसाधन के लिए कंप्यूटर का उपयोग बढ़ने के साथ कंप्यूटरों ने हमारी लेखन-कुशलताओं में क्रांति ला दी है। विद्यार्थी अब:

- सुलेखन—लेखन-उपकरण से हाथ द्वारा लिखने की तकनीक—अर्जित नहीं करते।
- विचारों को कागज पर रखने से पहले गहराई से नहीं सोचते—प्रतिलिपि बनाना, मिटाना और चिपकाना अत्यंत सरल है।

इसके स्थान पर:

- WYSIWYG शब्द-संसाधक—जैसे Word—का उपयोग होता है।
- सरल पाठ-चिह्नों वाली दस्तावेज़-तैयारी प्रणाली LaTeX—HTML के समान—का उपयोग होता है।
- MathCad जैसे सॉफ़्टवेयर से गणितीय गणनाओं का सत्यापन, वैधीकरण, प्रलेखन और पुनःउपयोग किया जाता है[5]।

संगणन: संगणन भी व्यापक रूप से विकसित हुआ है। आरंभ में हम Abaqus और स्लाइड-रूल का उपयोग करते थे तथा हमारे पास निम्न क्षमताएँ थीं:

- केवल मानव मस्तिष्क से मानसिक गणना करना, जैसे 78×3।
- संख्याओं के परिमाण का सहज बोध रखना: $3200 \times 400 = 1,280,000$।
- सरल त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ और कलन संक्रियाएँ करना: $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ अथवा $\int \frac{1}{x} dx$।

आज हम लगभग आँख मूँदकर प्रोग्रामयोग्य गणकयंत्रों, Excel, Matlab, Mathematica अथवा Mapple और Mathcad पर निर्भर रहते हैं।

प्रोग्रामन भाषाएँ: Basic, Pascal, Fortran 90, Fortrann 2018, C, C++, Perl और Python तक विकसित हुई हैं—और निस्संदेह इस सूची में अनेक छूट गई हैं।

आरेखन: आरेखन-मेजों और "ब्लू-प्रिंट" से Auto-CAD, Solid-Work, BIM (Building Information Modelling), REVIT आदि तक विकसित हुआ है।

[42] सरल शब्दों में, निकट भविष्य में और अधिक नवाचार की अपेक्षा करनी चाहिए, जिसे संभवतः कृत्रिम बुद्धिमत्ता गति देगी।

[43] इससे प्रश्न उठता है: क्या भविष्य के अभियंताओं को इस पुस्तक की कुछ सामग्री पढ़ाना वास्तव में अभी भी आवश्यक है?

[5] मेरे विद्यार्थियों से अपेक्षा थी कि वे अपना समस्त गृहकार्य MathCad में प्रस्तुत करें। उद्योग में इसका व्यापक उपयोग होने के बावजूद खेद है कि अनेक सहकर्मी विद्यार्थियों पर एक और सॉफ़्टवेयर सीखने का भार डालने को लेकर चिंतित रहते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

17.6 संरचनात्मक अभियांत्रिकी के पाठ्यक्रम

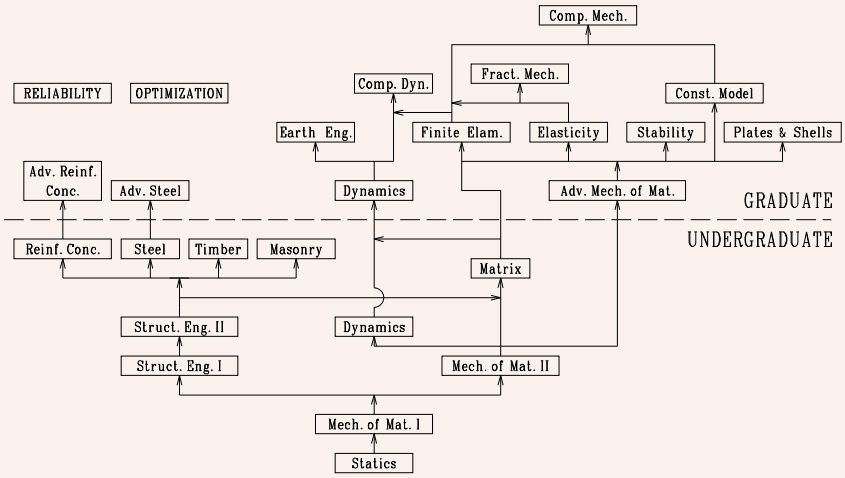
44 संरचनात्मक अभियांत्रिकी की शिक्षा दो दृष्टिकोणों में से किसी एक से आरंभ की जा सकती है:

वास्तु-दृष्टिकोण: समग्र अभिकल्प से आरंभ कर विस्तृत विश्लेषण की ओर बढ़ना।

शैक्षिक दृष्टिकोण: वैश्विक दृष्टिकोण के स्थान पर तत्त्वगत दृष्टिकोण; संपूर्ण तंत्र के स्थान पर अलग-अलग संरचनात्मक तत्त्वों पर बल।

CVEN3525 इन दोनों दृष्टिकोणों के बीच संतुलन स्थापित करने का प्रयास करेगा।

45 संरचनात्मक अभियांत्रिकी में लिए जा सकने वाले दीर्घ पाठ्यक्रम-क्रम में यह केवल तीसरा पाठ्यक्रम है, चित्र 17.11।



चित्र 17.11: संरचनात्मक अभियांत्रिकी के पाठ्यक्रमों का अनुक्रम

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

18 भार

सारांश

यह अध्याय भारों की संकल्पना का अनिवार्य परिचय प्रस्तुत करता है; संरचनात्मक विश्लेषण में भार मूलभूत होते हैं।

अनुभवजन्य समीकरणों और विस्तृत सारणियों पर पाठ्यपुस्तकों की पारंपरिक निर्भरता को अस्वीकार करते हुए यह अध्याय विविध प्रकार के भारों का व्यापक वर्गीकरण और विस्तृत विवेचन प्रस्तुत करता है। वर्गीकरण में मृत और चल भार जैसे ऊर्ध्वाधर भार तथा पवन और भूकंपीय बलों सहित पार्श्व भार सम्मिलित हैं। गतिक पवन-दाब समीकरणों की व्युत्पत्ति और विभिन्न दशाओं में भारों के व्यवहार पर विशेष ध्यान दिया गया है।

तथापि भारों के अनुभवजन्य दृष्टिकोण परिशिष्ट B में दिए गए हैं।

अध्याय संघात और द्वितीयक भार जैसे अपेक्षाकृत कम विवेचित विषय भी प्रस्तुत करता है, जो संरचनात्मक विश्लेषण की चुनौतियों के पूर्ण विस्तार को समझने के लिए अत्यंत महत्त्वपूर्ण हैं। प्रत्येक भार-प्रकार के लक्षणों और प्रभावों का विश्लेषण करके यह अध्याय इन बलों के अधीन संरचनात्मक व्यवहार के आगे के अध्ययन के लिए एक सुदृढ आधार निर्मित करता है।

18.1 परिचय 839
18.2 भारों का वर्गीकरण 840
18.2.1 ऊर्ध्वाधर भार 840
18.2.2 पार्श्व भार 840
18.2.3 जलस्थैतिक और मृदा भार . . . 846
18.2.4 संघात भार 847
18.2.5 द्वितीयक भार 849
18.2.6 तापीय भार 850
18.3 विचारणीय पक्ष 851
18.3.1 प्रक्षेपित भार 851
18.3.2 भार का स्थान-निर्धारण 852
18.3.3 भार-संयोजन 852
18.3.4 भार-पथ 853
18.3.5 प्रभावी क्षेत्रफल 858
18.3.6 संरचनात्मक प्रतिक्रिया 859

18.1 परिचय

1 भारों के बिना संरचनात्मक विश्लेषण अनावश्यक हो जाएगा। भार किसी संरचना पर प्राथमिक भारकारक हैं और उन्हें समझना मूलभूत आवश्यकता है। वास्तव में संरचना का मूल प्रयोजन किसी भार को बिंदु A से बिंदु B तक पहुँचाना है।

2 फलतः संरचनात्मक विश्लेषण की किसी पाठ्यपुस्तक में यह सामान्यतः पहला संख्यात्मक अध्याय होता है। इसमें दो मुख्य विषय हैं: a) भारों के प्रकार और उनसे संबंधित प्रश्न; तथा b) पवन और भूकंपीय भार निर्धारित करने के लिए संहिता-आधारित अनुभवजन्य समीकरण।

3 मेरे मत में ऐसी पाठ्यपुस्तक में ये अनुभवजन्य समीकरण भ्रम उत्पन्न कर सकते हैं, जिसमें प्रत्येक अन्य विषय भौतिकी/यांत्रिकी पर आधारित और तार्किक व्युत्पत्ति से प्राप्त होता है। इसलिए मैंने भारों के विवेचन को दो भागों में विभाजित किया है: यह अध्याय भार-वर्गीकरण और संबद्ध प्रश्नों पर केंद्रित होगा, जबकि संहिता-आधारित सभी विधियाँ परिशिष्ट B में दी जाएँगी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

18.2 भारों का वर्गीकरण

[4] भारों के विस्तृत विवेचन के लिए “Universal Building Code” (UBC), (ICBO, 1994), तथा “Minimum Design Loads For Buildings and Other Structures” (ASCE/SEI 7-16, 2017) देखें।

18.2.1 ऊर्ध्वाधर भार

[5] किसी संरचना में ऊर्ध्वाधर भार उन बलों को कहते हैं जो गुरुत्व के कारण नीचे की ओर कार्य करते हैं।

[6] ऊर्ध्वाधर भार दो श्रेणियों में से किसी एक में आते हैं।

मृत भार:

[7] ये संरचना के स्वयं के भार से उत्पन्न स्थायी भार हैं, जिनमें भित्तियाँ, फर्श, छतें और स्थिर स्थायी उपकरण जैसे तत्त्व सम्मिलित हैं। मृत भार स्थैतिक और पूर्वानुमेय होते हैं तथा समय के साथ स्थिर रहते हैं।

[8] अभिकल्प प्रक्रिया में प्रत्येक अभिकल्प चक्र के अंत में मृत भारों का आकलन और सत्यापन आवश्यक है। इससे अभिकल्प प्रक्रिया *पुनरावृत्तिमूलक* बनती है।

चल भार:

[9] ये संरचना के उपयोग से उत्पन्न परिवर्ती भार हैं, जैसे व्यक्ति, फर्नीचर, वाहन और चल उपकरण। चल भारों का परिमाण और स्थान बदल सकता है, अतः वे मृत भारों की तुलना में कम पूर्वानुमेय होते हैं।

[10] विश्लेषण में भारों का स्थान ऐसा होना चाहिए कि उनका प्रभाव—अपरूपण/आघूर्ण—अधिकतम हो।

[11] अधिकतम अधिभोगी-संकेंद्रण के भार के समतुल्य समान रूप से वितरित स्थैतिक भार निर्धारित करने के लिए सांख्यिकीय दृष्टिकोण अपनाया जाता है। ये भार भी ICBO, 1994 और ASCE/SEI 7-16, 2017 द्वारा परिभाषित किए गए हैं।

हिम भार

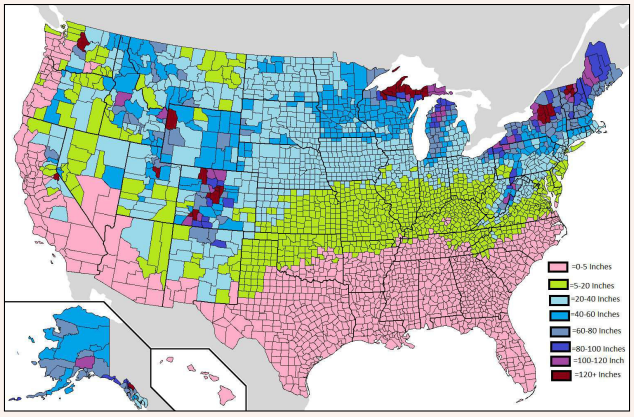
[12] छत का हिम भार *भौगोलिक स्थान* और *ऊँचाई* के अनुसार अत्यधिक बदलता है। इसका परिसर 20 से 45 psf तक है, चित्र 18.1।

18.2.2 पार्श्व भार

18.2.2.1 पवन

[13] किसी संरचना पर पवन भार से आशय किसी भवन अथवा अन्य संरचना के पृष्ठीय क्षेत्रफल पर पवन द्वारा लगाए गए बल से है। यह बल वायु-अणुओं की गति से उत्पन्न होता है और पवन-वेग, पवन-दिशा,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 18.1: संयुक्त राज्य का हिम-मानचित्र

भवन का आकार, ऊँचाई, भौगोलिक स्थान, भवन की सतह की बनावट और संरचना की दृढता जैसे कारकों के अनुसार इसके परिमाण और दिशा में परिवर्तन हो सकता है।

पवन भार ऊँचे भवनों[1] के लिए विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण हैं।

पहले हम डी. बेर्नूली द्वारा सर्वप्रथम व्युत्पन्न *गतिक दाब समीकरण* की व्युत्पत्ति करेंगे। यह किसी तरल के द्रव्यमान और गतिज ऊर्जा के सिद्धांतों से प्राप्त होता है। किसी वस्तु की गतिज ऊर्जा (KE) है:

$$KE = \frac{1}{2}mV^2$$

जहाँ m द्रव्यमान और V वेग है।

घनत्व ρ वाले तरल के लिए द्रव्यमान m, आयतन ΔV का, इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$m = \rho \Delta V$$

उपर्युक्त द्रव्यमान-व्यंजक से तरल आयतन की गतिज ऊर्जा है:

$$KE = \frac{1}{2}(\rho \Delta V)V^2$$

तब ΔV से भाग देने पर प्रति इकाई आयतन गतिज ऊर्जा प्राप्त होती है:

$$\frac{KE}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{18.1}$$

यह तरल के गतिक दाब को निरूपित करता है और तरल की गति के कारण प्रति इकाई आयतन गतिज ऊर्जा का परिमाण बताता है।

[1] अत्यधिक ऊँचे भवनों में प्रमुख अभिकल्प-विचार पार्श्व भार—पवन और संभवतः भूकंप—से उत्पन्न अत्यधिक *पार्श्व-विस्थापन* है।

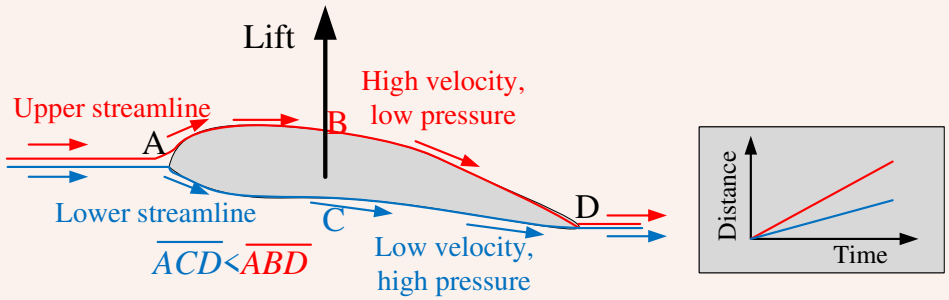
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

गतिक दाब q की इकाई पास्कल (Pa) है, जो प्रति इकाई आयतन गतिज ऊर्जा की भी इकाई है:

$$1\,\text{Pa} = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

अतः गतिक दाब ऊर्जा-घनत्व का एक रूप है।

16 यदि हम वायुपत्रक , चित्र 18.2, पर विचार करें तो प्रवाह को निचले भाग की तुलना में ऊपरी वक्र भाग पर अधिक तीव्र होना पड़ता है। इससे वायुपत्रक के नीचे की तुलना में उसके ऊपर स्थैतिक दाब कम हो जाता है। दाब का यह अंतर उत्थापन उत्पन्न करता है।



चित्र 18.2: वायुपत्रक और बेर्नूली समीकरण

17 समीकरण 18.1 में वायु के लिए प्रतिस्थापन करने पर वायु का द्रव्यमान-घनत्व ρ, वायु के भार को गुरुत्वीय त्वरण $g = 32.2$ ft/sec^2 से भाग देने पर मिलता है। समुद्र तल पर और 15^oC (59^oF) तापमान पर वायु का भार 0.0765 lb/ft^3 है; इससे निम्न दाब प्राप्त होगा:

$$q_s = \frac{1}{2}\frac{(0.0765)\text{lb/ft}^3}{(32.2)\text{ft/sec}^2}\left(\frac{(5280)\text{ft/mile}}{(3600)\text{sec/hr}}V\right)^2 \tag{18.2}$$

अथवा[2]

$$q_s = 0.00256V^2$$

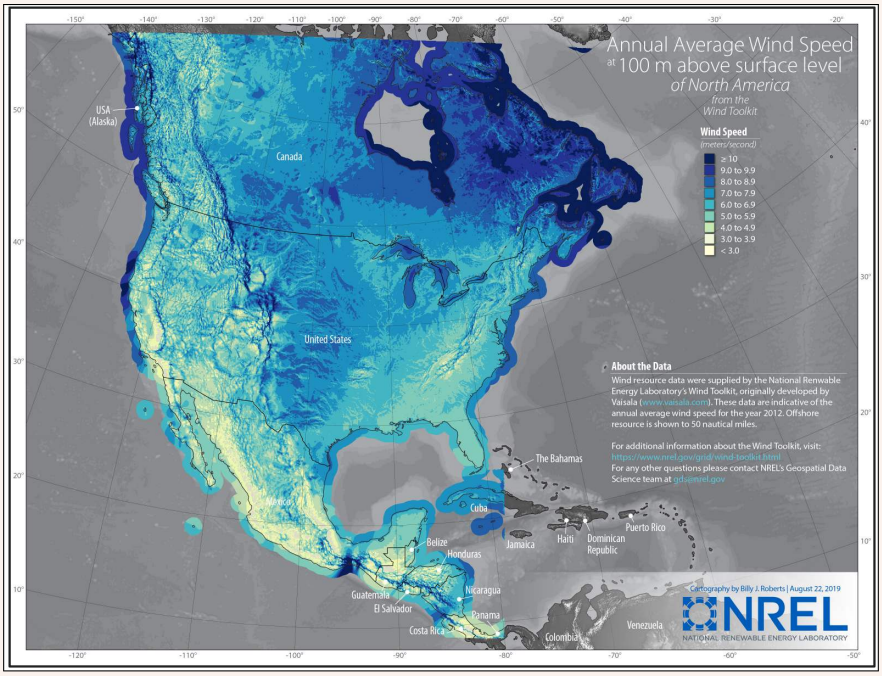
जहाँ V अधिकतम पवन-वेग—मील प्रति घंटा में—और q_s, psf में है। V पवन-मानचित्रों से प्राप्त किया जा सकता है—संयुक्त राज्य में $70 \le V \le 110$—चित्र 18.3।

18 जब पवन किसी भवन से टकराती है तो भवन के अवरोध होने के कारण उसे संरचना के चारों ओर मुड़ना पड़ता है। भवन के चारों ओर पवन के व्यवहार को अनेक मुख्य घटकों में विभाजित किया जा सकता है, चित्र 18.4:

पवनाभिमुख पार्श्व: पवन भवन के मुख से टकराकर मंद होती है और दाब बढ़ता है, जिससे पवनाभिमुख पार्श्व पर उच्च दाब का क्षेत्र बनता है।

[2]खेद है कि संरचनात्मक विश्लेषण की अधिकांश पाठ्यपुस्तकें इस समीकरण को बिना व्युत्पत्ति के प्रस्तुत करती हैं, जिससे पाठक को यह संदेह हो सकता है कि यह केवल अनुभवजन्य है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 18.3: संयुक्त राज्य का पवन-मानचित्र

ऊपर और चारों ओर प्रवाह: पवन भवन के ऊपर और पार्श्वों के चारों ओर बहती है। शीर्ष और किनारों से गुजरते समय उपलब्ध प्रवाह-अनुप्रस्थ काट कम होने के कारण पवन का वेग बढ़ता है—जैसे जलधारा के संकरे भाग में जल का वेग बढ़ता है। बेर्नूली सिद्धांत के अनुसार तरल—यहाँ वायु—का वेग बढ़ने पर उसका दाब घटता है।

पवनविमुख पार्श्व: भवन के शिखर से गुजरकर पवनविमुख पार्श्व की ओर नीचे बढ़ती पवन का विस्तार होता है और उसका वेग घटता है। इस संक्रमण से विक्षोभ और भँवरों वाला जटिल प्रवाह-प्रतिरूप बनता है।

19 भवन के पवनविमुख पार्श्व पर चूषण उत्पन्न करने में अनेक कारक योगदान करते हैं:

दाब की पुनर्प्राप्ति अपूर्ण: भवन का शिखर पार करने के बाद पवन मंद होती है, किंतु दाब परिवेशी दशा तक पूर्णतः पुनः प्राप्त नहीं होता। विभिन्न दिशाओं—शीर्ष और पार्श्वों—से आने वाली पवन-धाराओं का मिश्रण विक्षोभ उत्पन्न करता है, जिससे दाब-पुनर्प्राप्ति की प्रभावशीलता घटती है।

प्रवाह-पृथक्करण: भवन के शीर्ष और पवनविमुख पार्श्व पर बहते समय प्रतिकूल दाब-प्रवणता—शीर्ष के निम्न दाब से भूमि की ओर उच्च दाब तक गति—के कारण पवन सतह से पृथक होने लगती है। यह पृथक्करण भवन के पवनविमुख पार्श्व से लगे निम्न दाब का क्षेत्र बनाता है।

भँवर और आवर्त: प्रवाह-पृथक्करण और पवन-धाराओं की अंतःक्रिया भवन के कोनों और किनारों के चारों ओर भँवर तथा आवर्त उत्पन्न कर सकती है। ये घूर्णमान वायु-पुंज निम्न दाब के क्षेत्र होते हैं और पवनविमुख पार्श्व पर समग्र ऋणात्मक दाब—चूषण—में योगदान करते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 18.4: संरचनाओं पर पवन भार का प्रभाव

20 ऊँचे भवनों के लिए पवन-दाब के सही वितरण को ग्रहण करना महत्त्वपूर्ण है। ऊँचाई z के फलन के रूप में पवन-वेग $V(z)$ को घात-नियम समीकरण (ASCE/SEI 7-16, 2017) से व्यक्त किया जा सकता है:

$$V(z) = V_{\text{ref}} \left(\frac{z}{z_{\text{ref}}} \right)^{\alpha}$$

जहाँ:

- $V(z)$, ऊँचाई z पर पवन-वेग है,
- V_{ref}, संदर्भ ऊँचाई z_{ref} पर संदर्भ पवन-वेग है,
- α, भूभाग-निर्भर घातांक है।

इस समीकरण को समीकरण 18.1 के साथ संयोजित कर दाब-वितरण प्राप्त किया जा सकता है।

21 पवन भार के अधीन संरचनाओं के विश्लेषण के अनुभवजन्य दृष्टिकोण का विवरण §B.2 में दिया गया है।

18.2.2.2 भूकंपीय भार

22 भूकंपिता किसी विशिष्ट क्षेत्र में भूकंपों की घटना, आवृत्ति और परिमाण के अध्ययन को समाहित करती है और किसी स्थान से संबद्ध भूकंपीय संकट निर्धारित करने के लिए आवश्यक है, चित्र 18.5। भूकंपिता को प्रभावित करने वाले कारक हैं:

विवर्तनिक पट्टिकाएँ: विवर्तनिक पट्टिकाओं की गति और अंतःक्रिया भूकंपों के प्राथमिक कारण हैं।

ऐतिहासिक भूकंप आँकड़े: विगत भूकंपों के अभिलेख भविष्य के भूकंपों की संभावना, स्थान और संभावित परिमाण का पूर्वानुमान लगाने में सहायक हैं।

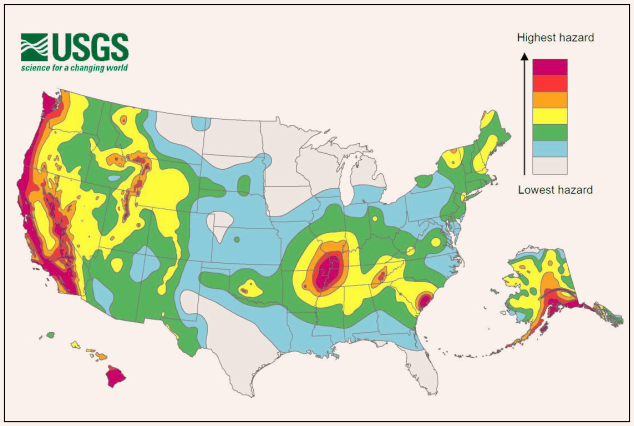
भ्रंश क्षेत्र: सक्रिय भ्रंश अपने गुणों के आधार पर स्थानीय भूकंपिता को उल्लेखनीय रूप से प्रभावित करते हैं।

23 भूकंप के समय भू-गति के प्रमुख अभिलक्षण हैं:

त्वरण: समय के साथ वेग के परिवर्तन की दर; अधिकतम भू-त्वरण (PGA) भूकंप की तीव्रता के माप के रूप में प्रयुक्त होता है।

वेग: अपरूपण-तरंग वेग V_s भूकंप के समय मृदा के व्यवहार का आकलन करने के लिए भूकंपविज्ञान का निर्णायक प्राचल है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 18.5: संयुक्त राज्य का भूकंपीय मानचित्र

[24] किसी संरचना की प्राकृतिक आवृत्ति उसके द्रव्यमान और दृढता का फलन है। सरल एकल स्वतंत्रता-कोटि तंत्र के लिए इसे सहजता से निर्धारित किया जा सकता है।

[25] दृढता k वाली कमानी से जुडे द्रव्यमान m पर विचार करें, जिस पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं करता। गतिक संतुलन समीकरण है:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ रूप का समाधान मानने पर:

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

संतुलन समीकरण में पुनः प्रतिस्थापन करने पर:

$$(-m\omega^2 + k)A\cos(\omega t + \phi) = 0$$

अतुच्छ समाधानों के लिए ($A \neq 0$):

$$-m\omega^2 + k = 0 \implies \omega^2 = \frac{k}{m}$$

अतः प्राकृतिक आवृत्ति f है:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

[26] उपर्युक्त परिणाम से यह निर्धारित करने की कसौटी प्राप्त होती है कि गतिक विश्लेषण कब आवश्यक है[3]।

[3]इसे औपचारिक रूप से इसलिए परिभाषित किया गया है क्योंकि अनेक विद्यार्थियों और अभियंताओं को यह तार्किक रूप से समझाने में कठिनाई होती है कि गतिक विश्लेषण कब आवश्यक है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 18.1: गतिक विश्लेषण की शर्त

यदि किसी संरचना की मूल प्राकृतिक आवृत्ति गतिक भारों की आवृत्ति—जैसे भूकंप में भू-गति की प्रमुख आवृत्तियाँ—के निकट हो, तो गतिक विश्लेषण आवश्यक है।

27 पूर्ववर्ती समीकरण के विस्तार से किसी भवन की अपनी प्राकृतिक आवृत्तियाँ होती हैं, जिन पर वह कंपन करने की प्रवृत्ति रखता है। यदि भू-गति की आवृत्ति भवन की प्राकृतिक आवृत्ति से मेल खाती है—अनुनाद—तो भवन में अत्यधिक और संभावित रूप से हानिकारक दोलन उत्पन्न हो सकते हैं।

28 भवनों में भूकंपीय भार मुख्यतः पार्श्व बलों के रूप में प्रकट होते हैं।

29 ये बल भूमि द्वारा आरोपित गति का प्रतिरोध करने के भवन के प्रयास से उत्पन्न होते हैं। भवन की ऊँचाई के साथ पार्श्व बलों का वितरण सामान्यतः बढ़ता है, क्योंकि ऊपर जाने पर उत्तोलक प्रभाव—आघूर्ण—बढ़ता है।

30 पार्श्व बल भवन के संरचनात्मक तत्त्वों में अपरूपण बल और बंकन आघूर्ण उत्पन्न करते हैं। बहुमंजिला भवन की निचली मंजिलों में सामान्यतः सर्वाधिक अपरूपण बल होते हैं, क्योंकि वे अपने ऊपर की सभी मंजिलों का भार वहन करती हैं।

31 यदि भवन के द्रव्यमान और दृढ़ता का वितरण सममित न हो अथवा भूमि का कंपन एकसमान न हो, तो मरोड़ी—घूर्णी—बल भी उत्पन्न हो सकते हैं। ये बल भवन को मरोड़ सकते हैं, जिससे जटिल प्रतिबल-वितरण और संभावित रूप से गंभीर क्षति हो सकती है।

32 सभी संरचनाओं में कुछ न कुछ अवमंदन होता है, अर्थात् ऊर्जा क्षय करने की क्षमता। भूकंप के समय अवमंदन कंपनों का परिमाण घटाता है और इस प्रकार भवन के प्रतिबलों तथा विरूपणों को कम करता है।

33 अंततः भूकंपीय भारों के प्रभावी प्रबंधन के लिए भवनों को भूकंप-प्रतिरोधी अभिकल्प मानकों के अनुसार अभिकल्पित किया जाता है। ये मानक सुनिश्चित करने में सहायक हैं कि संरचनाएँ अत्यधिक जनहानि अथवा पतन के बिना भूकंपीय घटनाएँ सह सकें। मुख्य अभिकल्प रणनीतियों में बड़े विरूपण सह सकने वाली सामग्री, तन्यता—बिना टूटे विरूपित होने की क्षमता—और अपरूपण भित्तियों, आघूर्ण-प्रतिरोधी फ्रेमों तथा आधार-विलगकों जैसे तत्त्वों का समावेश सम्मिलित है।

34 उपर्युक्त सभी विषयों का अध्याय 35, 70 और 67 में अधिक विस्तार से विवेचन किया जाएगा।

18.2.3 जलस्थैतिक और मृदा भार

35 भूमि के नीचे स्थित संरचनाओं को पार्श्व मृदा-दाब का प्रतिरोध करना चाहिए।

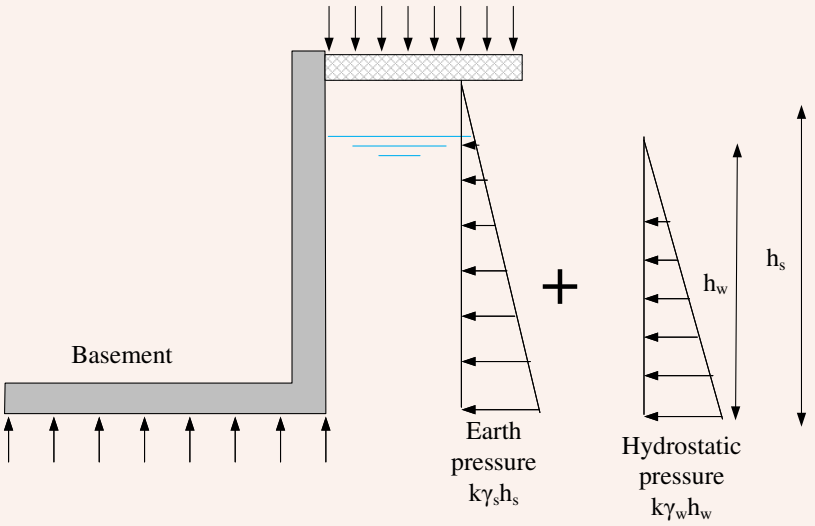
$$q = K\gamma h$$

जहाँ γ मृदा-घनत्व, $K = \frac{1-\sin\Phi}{1+\sin\Phi}$ दाब-गुणांक और h ऊँचाई है।

36 बालू और बजरी के लिए $\gamma = 120$ lb/ ft^3 तथा $\Phi \approx 30^\circ$ है।

37 यदि संरचना आंशिक रूप से निमज्जित हो, तो उसे जल के जलस्थैतिक दाब का भी प्रतिरोध करना चाहिए, चित्र 18.6।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 18.6: संरचनाओं पर मृदा और जलस्थैतिक भार

$$q = \gamma_W h$$

जहाँ $\gamma_W = 62.4\ \text{lbs/ft}^3$।

18.2.3.1 उदाहरण 18.1: जलस्थैतिक भार

किसी भवन का तलघर भूमि-तल से 12 ft नीचे है। भूजल भूमि-तल से 9 ft नीचे स्थित है। जलस्थैतिक उत्थापन को ठीक संतुलित करने के लिए कंक्रीट पट्टिका की कितनी मोटाई आवश्यक है?

जलस्थैतिक दाब का प्रतिरोध कंक्रीट के भार से उत्पन्न दाब द्वारा किया जाना चाहिए। चूँकि $p = \gamma h$ है, अतः दोनों दाबों को समान रखकर कंक्रीट पट्टिका की ऊँचाई h के लिए हल करते हैं: $\underbrace{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3 \times (12-9)\ \text{ft}}_{\text{water}} =$

$\underbrace{(150)\ \text{lbs/ft}^3 \times h}_{\text{concrete}} \Rightarrow h = \frac{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3}{(150)\ \text{lbs/ft}^3}(3)\ \text{ft}(12)\ \text{in/ft} = 14.976\ \text{in} \simeq 15.0\ \text{inch}$

18.2.4 संघात भार

38 संघात भार वे बल हैं जो किसी संरचना पर अत्यल्प अवधि के लिए किंतु अत्यधिक तीव्रता से लगाए जाते हैं। ये गिरती वस्तुओं, वाहन-टक्करों अथवा विस्फोटों जैसे विविध स्रोतों से उत्पन्न हो सकते हैं।

39 संघात भारों का मुख्य अभिलक्षण यह है कि उनमें अल्प अवधि में उच्च-ऊर्जा बल कार्य करते हैं, जिससे प्रतिबल, कंपन और संभावित संरचनात्मक क्षति होती है।

40 संघात बलों की व्युत्पत्ति अपेक्षाकृत सरल है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

41 संवेग-संरक्षण के अनुसार, यदि तंत्र पर कोई बाह्य बल कार्य न करे तो संघात से पहले का कुल संवेग संघात के बाद के कुल संवेग के समान होना चाहिए। इसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

जहाँ:

m_1, m_2	टकराने वाले पिंडों के द्रव्यमान
v_1, v_2	टक्कर से पहले पिंडों के वेग
v_1', v_2'	टक्कर के बाद पिंडों के वेग

42 प्रत्यास्थ टक्करों में गतिज ऊर्जा भी संरक्षित रहती है। किंतु संरचनाओं से जुड़े अधिकांश संघातों में टक्कर अप्रत्यास्थ होती है, अर्थात् कुछ गतिज ऊर्जा ऊष्मा जैसे अन्य ऊर्जा-रूपों में परिवर्तित होती है अथवा पिंडों को विरूपित करने में प्रयुक्त होती है।

43 संघात से पहले और बाद की गतिज ऊर्जा है:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + E_{\text{loss}}$$

जहाँ E_{loss} अप्रत्यास्थ विरूपण, ऊष्मा आदि के कारण नष्ट ऊर्जा है।

44 संघात बल F निर्धारित करने के लिए आवेग-संवेग प्रमेय का उपयोग किया जा सकता है, जो संघात के बल को संवेग में परिवर्तन और संघात की अवधि Δt से संबंधित करता है:

$$F = ma \Rightarrow F \simeq m \frac{\Delta v}{\delta t}$$

जहाँ:

m	वस्तु का द्रव्यमान
Δv	वेग में परिवर्तन
Δt	संघात की अवधि

45 ऊँचाई h से गिरते द्रव्यमान का संघात बल निर्धारित करने के लिए प्राप्त गतिज ऊर्जा को नष्ट स्थितिज ऊर्जा के समान रखते हैं[4]:

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \implies v = \sqrt{2gh}$$

सतह से टकराने पर वस्तु का वेग घटकर शून्य हो जाता है। यदि संघात Δt सेकंड तक रहता है, तो औसत संघात बल F होगा:

$$F = \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}$$

[4]जैसा गैलीलियो ने ज्ञात किया, पीसा की मीनार से गिरती वस्तुओं का वेग उनके "द्रव्यमान" से स्वतंत्र होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

18.2.5 द्वितीयक भार

46 संरचनाओं में द्वितीयक भार वे हैं जो बाह्य स्रोतों के स्थान पर संरचना के स्वयं के व्यवहार से उत्पन्न होते हैं। संरचनात्मक विश्लेषण में इन भारों पर विचार करना महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि वे संरचना की अखंडता और प्रदर्शन को उल्लेखनीय रूप से प्रभावित कर सकते हैं।

47 द्वितीयक भार सामान्यतः प्राथमिक भारों के प्रति संरचना की प्रतिक्रिया, तापमान-परिवर्तन अथवा अन्य पर्यावरणीय कारकों से प्रेरित होते हैं। संरचना के स्वयं के भार जैसे मृत भार और उपयोग तथा अधिभोग से उत्पन्न चल भार जैसे प्राथमिक भारों के विपरीत द्वितीयक भार प्रायः प्रत्यक्ष रूप से लागू नहीं किए जाते।

48 द्वितीयक भारों के प्रकार:

तापीय भार: तापमान-परिवर्तन के कारण सामग्री के प्रसार अथवा संकुचन से उत्पन्न भार। उदाहरणार्थ, ऊपरी और निचली सतहों के तापमान-अंतर से कंक्रीट पट्टिका में तापीय प्रतिबल उत्पन्न हो सकते हैं।

अवसादन भार: जब असमान मृदा-संपीडन अथवा अन्य कारणों से संरचना का एक भाग अन्य भागों से अधिक बैठता है, तब संरचना में प्रतिबल उत्पन्न होते हैं।

निर्माण अवस्थाएँ: निर्माण के समय अस्थायी भार और अनुक्रम, संरचनात्मक तत्त्वों के क्रमिक संयोजन तथा निर्माण प्रक्रियाओं के कारण द्वितीयक प्रभाव उत्पन्न कर सकते हैं।

उत्केंद्रता प्रभाव: उत्केंद्रता से आशय संरचनात्मक सदस्य के केंद्रक से लागू भार का विचलन है। इससे अतिरिक्त आघूर्ण और बल उत्पन्न हो सकते हैं, जिन पर संरचनात्मक विश्लेषण में विचार आवश्यक है।

P-Delta प्रभाव: P-Delta प्रभाव अक्षीय भारों (P) और पार्श्व भारों—जैसे पवन अथवा भूकंपीय बलों—की संयुक्त क्रिया से संरचना में उत्पन्न विरूपण (delta) के कारण होते हैं। संरचना के विरूपित होने पर बलों का वितरण बदलता है और ऐसे अतिरिक्त आंतरिक बल उत्पन्न होते हैं जो स्थैतिक दशाओं में उपस्थित नहीं थे।

ज्यामितीय अरैखिकता: संरचनात्मक सदस्यों के विक्षेप उल्लेखनीय होने पर अरैखिक व्यवहार उत्पन्न होता है। बड़े विरूपण अथवा तनु सदस्यों वाली संरचनाओं में यह विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण है।

विसर्पण और संकोचन: समय के साथ कंक्रीट जैसी सामग्री सतत भार के अधीन विरूपण—विसर्पण—और आयतन में कमी—संकोचन—से गुजरती है, जिससे अतिरिक्त आंतरिक प्रतिबल उत्पन्न हो सकते हैं।

49 संरचनात्मक सुरक्षा और सेवायोग्यता सुनिश्चित करने के लिए अभियंताओं को अभिकल्प प्रक्रिया में द्वितीयक भारों पर विचार करना चाहिए। उदाहरणार्थ, पुल के अभिकल्प में पाटन की वक्रता अथवा तापीय प्रसार से उत्पन्न द्वितीयक प्रभावों पर विचार आवश्यक है, ताकि संरचनात्मक विफलता अथवा अत्यधिक विरूपण रोका जा सके।

50 द्वितीयक भारों के विश्लेषण में प्रायः ऐसी परिष्कृत प्रतिरूपण तकनीकें आवश्यक होती हैं जो सामग्री-गुणों, ज्यामिति के परिवर्तनों और संरचना के विभिन्न भागों की अंतःक्रिया को ध्यान में रखती हैं। द्वितीयक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भारों के प्रति संरचनाओं की प्रतिक्रिया का पूर्वानुमान लगाने के लिए उन्नत परिमित तत्त्व विधियों का सामान्यतः उपयोग होता है।

18.2.6 तापीय भार

51 यदि किसी सदस्य को बिना अवरोध के समान रूप से गर्म अथवा ठंडा किया जाए, तो वह प्रसारित अथवा संकुचित होगा। यह प्रसार है:

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

जहाँ α तापीय प्रसार गुणांक है, सारणी 18.1।

	α ($/^{\circ}F$)
इस्पात	6.5×10^{-6}
कंक्रीट	5.5×10^{-6}

तालिका 18.1: तापीय प्रसार गुणांक

52 यदि सदस्य का प्रसार अवरुद्ध हो, तो संपीडन प्रतिबल $\sigma = E\alpha\Delta T$ उत्पन्न होता है।

53 तापीय भार से उत्पन्न अत्यधिक प्रतिबलों से बचने के लिए पुलों और भवनों में *प्रसार संधियों* का उपयोग किया जाता है।

18.2.6.1 उदाहरण 18.2: तापीय प्रसार/प्रतिबल

(Schueller, 1996) किसी निम्न-ऊँचाई वाले भवन का एक पार्श्व 100 ft लंबी मृत्तिका-चिनाई ($\alpha = 3.6 \times 10^{-6}$ in./in./^{o}F, $E = 2,400,000$ psi) धारक भित्ति से घिरा है। संरचना 60^{o}F तापमान पर निर्मित हुई और संयुक्त राज्य के उत्तरी भाग में स्थित है, जहाँ तापमान का परिसर -20^{o} से +120^{o}F है।

1. यदि भित्ति अनुप्रस्थ भित्तियों और नींव के किसी अवरोध के बिना स्वतंत्र रूप से गति कर सकती है, तो ग्रीष्म और शीत में उसका प्रसार तथा संकुचन है:

$$\Delta L^{Summer} = \alpha \Delta T L = (3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^{o}F (120 - 60)^{o}F (100) \text{ ft} (12) \text{ in/ft} = 0.26 \text{ in} \quad (18.3)$$

$$\Delta L^{Winter} = \alpha \Delta T L = (3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^{o}F (-20 - 60)^{o}F (100) \text{ ft} (12) \text{ in/ft} = -0.35 \text{ in} \quad (18.4)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. अब हम संरक्षणात्मक रूप से मानते हैं कि स्वतंत्र गति संभव नहीं है ($\Delta L = 0$); अतः परिणामी प्रतिबल $\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta L}{L} = E\frac{\alpha \Delta T L}{L} = E\alpha\Delta T$ होगा:

$$\sigma^{Summer} = E\alpha\Delta T = (2,400,000)\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}(3.6\times10^{-6})\ \text{in/ in/}^oF(120-60)^oF \quad (18.5)$$

$$= 518\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}\ \text{Tension} \quad (18.6)$$

$$\sigma^{Winter} = E\alpha\Delta T = (2,400,000)\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}(3.6\times10^{-6})\ \text{in/ in/}^oF(-20-60)^oF \quad (18.7)$$

$$= -691\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}\ \text{Compression} \quad (18.8)$$

(18.9)

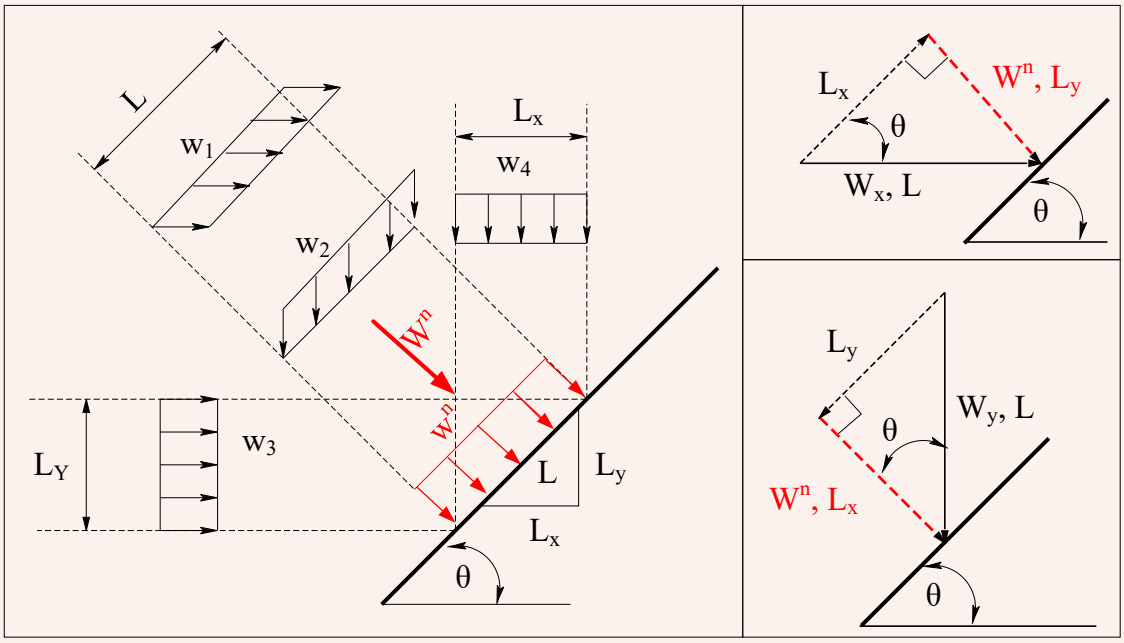
ध्यान दें कि तनन प्रतिबल चिनाई की क्षमता से अधिक हैं, अतः दरारें उत्पन्न होंगी।

18.3 विचारणीय पक्ष

18.3.1 प्रक्षेपित भार

54 यद्यपि यह मूल त्रिकोणमिति का साधारण अनुप्रयोग है, फिर भी विद्यार्थियों को प्रायः किसी आनत सतह पर भार प्रक्षेपित करने में कठिनाई होती है।

55 इसे चित्र 18.7 में सर्वोत्तम रूप से दर्शाया गया है। जहाँ



चित्र 18.7: प्रक्षेपित भार

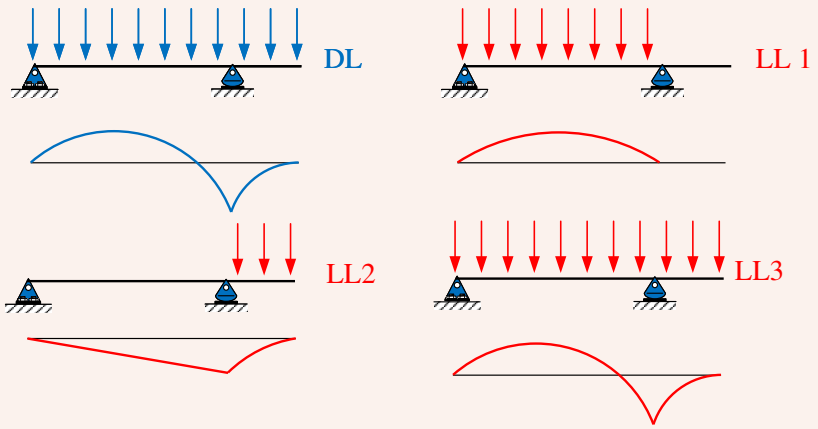
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Lateral inertial force x	$W_1^x = w_1^x L;$	$W^n = W_1^x \frac{L_y}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_1^x \frac{L_y}{L}$
Self weight y	$W_2^y = w_2^y L;$	$W^n = W_2^y \frac{L_x}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_2^y \frac{L_x}{L}$
Wind Load	$W_3^x = w_3^x L_y;$	$W^n = W_3^x \frac{L_y}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_3^x \frac{L_y^2}{L^2}$
Snow Load	$W_4^y = w_4^y L_x;$	$W^n = W_4^y \frac{L_x}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_4^y \frac{L_x^2}{L^2}$

18.3.2 भार का स्थान-निर्धारण

56 केवल मृत भार स्थिर होता है। दूसरी ओर चल भार संरचना के किसी घटक पर लागू हो भी सकता है और नहीं भी। अतः विभिन्न स्थानों पर सर्वाधिक आंतरिक बल—धनात्मक अथवा ऋणात्मक आघूर्ण और अपरूपण—उत्पन्न करने वाले भार-विन्यासों पर विचार आवश्यक है।

57 सरल धरन के लिए चित्र 18.8 चल भार के तीन संभावित स्थान दर्शाता है। LL1 धरन के केंद्र में धनात्मक आघूर्ण को अधिकतम करेगा, जबकि LL3 दाएँ आधार पर ऋणात्मक आघूर्ण को अधिकतम करेगा।



चित्र 18.8: आघूर्णों को अधिकतम करने के लिए भार का स्थान

58 अतः चल भारों का स्थान एक निर्णायक विचार है जो संरचना की सुरक्षा, स्थिरता और प्रदर्शन को प्रत्यक्ष रूप से प्रभावित करता है।

59 पाठक को अध्याय 28 भी देखना चाहिए, जिसमें *प्रभाव-रेखाओं* का विवेचन है। ये आलेख दर्शाते हैं कि संरचना पर इकाई भार के गतिशील होने पर किसी विशिष्ट बिंदु की प्रतिक्रिया—जैसे अपरूपण बल, बंकन आघूर्ण अथवा आधार-प्रतिक्रिया—कैसे बदलती है।

18.3.3 भार-संयोजन

60 संरचनात्मक अभियांत्रिकी में भार-संयोजन अभिकल्प प्रक्रिया का एक निर्णायक पक्ष है, जो विविध भार-दशाओं के अधीन भवनों और संरचनाओं की सुरक्षा तथा दक्षता सुनिश्चित करता है। इसमें अलग-

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अलग भारों के पृथक प्रभावों के स्थान पर एक साथ कार्य करने वाले विभिन्न भार-प्रकारों के प्रभावों का विश्लेषण किया जाता है, ताकि संरचना विफल हुए बिना अनेक समकालिक भार-प्रभाव सह सके।

61 भार-संयोजनों का प्राथमिक उद्देश्य संरचनात्मक सुरक्षा सुनिश्चित करना है। अनेक भार-प्रकारों पर एक साथ विचार कर अभियंता ऐसी संरचनाएँ अभिकल्पित कर सकते हैं जो पवन और भूकंपीय भारों की समकालिक घटना अथवा मृत और चल भारों के संयोजन जैसी चरम दशाओं का प्रतिरोध कर सकें। इससे संपत्ति-हानि, चोट अथवा जनहानि उत्पन्न करने वाली संरचनात्मक विफलता को रोकने में सहायता मिलती है।

62 भार-संयोजन अभियंताओं को अतिअभिकल्प से बचते हुए मितव्ययी संरचनाएँ अभिकल्पित करने देते हैं। विभिन्न भारों की अंतःक्रिया समझकर अभियंता सामग्री-उपयोग का इष्टतमीकरण और सुरक्षा-आवश्यकताओं की पूर्ति करने वाले सर्वाधिक लागत-प्रभावी समाधानों का चयन कर सकते हैं। इससे संरचनात्मक अखंडता बनाए रखते हुए समग्र निर्माण-लागत घटती है।

63 भार-संयोजन अभियंताओं को दुर्लभ किंतु संभावित परिस्थितियों—जैसे तीव्र पवन के साथ भारी हिमपात अथवा भूकंप के समय पूर्ण अधिभोग भार—में संरचनाओं के व्यवहार का पूर्वानुमान लगाने में सहायता करते हैं। विशिष्ट पर्यावरणीय चुनौतियों वाले क्षेत्रों में यह विशेष रूप से आवश्यक है।

64 विविध भार-संयोजनों के लिए अभिकल्पित संरचनाएँ तात्कालिक दशाओं में सुरक्षित होने के साथ अपने सेवा-काल में परिवर्तनों और प्रतिबलों को सहने में भी सक्षम होती हैं। इससे संरचना की दीर्घायु और टिकाऊपन बढ़ता है, जो सार्वजनिक भवनों और अवसंरचना में विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण है।

65 संरचनाएँ प्रायः अनेक प्रयोजन पूरा करती हैं और उपयोग-काल में विभिन्न भारों को समायोजित करती हैं। उदाहरणार्थ, बहुउपयोगी भवन को भिन्न अधिभोग-प्रकारों, उपकरणों अथवा भंडारण-भारों का समर्थन करना पड़ सकता है। भार-संयोजन सुनिश्चित करते हैं कि संरचना सुरक्षा से समझौता किए बिना इन विविध आवश्यकताओं के अनुकूल हो सके।

66 सामान्य भार-संयोजन हैं:

- मृत भार + चल भार
- मृत भार + पवन भार
- मृत भार + भूकंपीय भार
- मृत भार + हिम भार
- चल भार + पवन भार—जैसे स्टेडियम में, जहाँ अधिभोग और पवन एक साथ हो सकते हैं

67 संहिताओं द्वारा निर्दिष्ट चल भार अधिकतम संभावित भारों को निरूपित करते हैं।

68 इन सभी भारों के एक साथ घटित होने की संभावना अत्यल्प है। अतः भवन संहिताएँ कुछ भारों को संयोजित करने पर निश्चित न्यूनन की अनुमति देती हैं।

69 अधिक विवरण के लिए §B.5 देखें।

18.3.4 भार-पथ

70 भार-पथ की संकल्पना संरचनात्मक अभियांत्रिकी, अभिकल्प और विश्लेषण में मूलभूत है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

71 भार-पथ को समझने में उस मार्ग का अनुरेखण किया जाता है जिससे भार अपने अनुप्रयोग-बिंदुओं से विविध संरचनात्मक घटकों के माध्यम से तब तक चलते हैं, जब तक वे सुरक्षित रूप से भूमि तक संचारित न हो जाएँ।

72 भार-पथ सतत होना चाहिए। अर्थात् जहाँ भार लागू होता है वहाँ से नींव और अंततः नीचे की मृदा तक भार वहन करने वाले संरचनात्मक सदस्यों की स्पष्ट और अखंड शृंखला होनी चाहिए। भार-पथ में कोई असातत्य संरचनात्मक विफलता उत्पन्न कर सकता है।

73 आदर्शतः भार-पथ यथासंभव प्रत्यक्ष और छोटा होना चाहिए। वक्र अथवा चक्करदार पथ कुछ क्षेत्रों में बल बढ़ाकर प्रतिबल-संकेंद्रण उत्पन्न कर सकते हैं, जिससे संरचनात्मक अखंडता दुर्बल होती है। प्रत्यक्ष पथ भारों के अधिक समान वितरण और विफलता की संभावना घटाने में सहायक हैं।

74 भार-पथों में अतिरिक्तता सुनिश्चित करती है कि एक पथ विफल होने पर भी वैकल्पिक पथ भार को सहारा दे सकें। दूसरे शब्दों में, संरचना *स्थैतिकतः अनिर्धार्य* होनी चाहिए।

75 भारों का उचित वितरण सुनिश्चित करता है कि कोई एक तत्त्व अथवा संयोजन अतिभारित न हो। इसके लिए संरचनात्मक तंत्र को ऐसा अभिकल्पित किया जाता है कि भार अनेक सदस्यों में यथासंभव समान रूप से फैलें और स्थानीय विफलताओं का संकट घटे।

76 सुदृढ भार-पथ कुछ अनपेक्षित परिवर्तनों अथवा विफलताओं को विनाशकारी पतन के बिना सह सकता है। इसमें अनपेक्षित अतिभार अथवा संरचना के किसी भाग की क्षति संभालने की क्षमता सम्मिलित है। भार-पथ की सुदृढता उसकी अतिरिक्तता तथा प्रयुक्त सामग्री के समग्र सामर्थ्य और तन्यता से निकटता से संबंधित है।

77 जटिल संरचनाओं में यह आवश्यक है कि भार-पथ दृढता के पदानुक्रम का अनुसरण करे, अर्थात् अधिक दृढ तत्त्व अधिकांश भार वहन करें। इससे संरचना में भारों का संचालन नियंत्रित रहता है और अधिक नम्य अथवा दुर्बल तत्त्व अत्यधिक प्रतिबल के अधीन नहीं आते।

78 भार-पथ के सभी घटकों में संगत विरूपण होने चाहिए, अर्थात् उनका विरूपण इस प्रकार हो कि संलग्न घटकों की अखंडता प्रभावित न हो। भार के अधीन संरचना की समग्र स्थिरता बनाए रखने के लिए यह संगति निर्णायक है।

79 किसी संरचना में भार-पथ सरल आनमनी तत्त्वों के “पदानुक्रम” द्वारा पूरा होता है, जो आगे स्तंभों से जुड़े होते हैं, चित्र 18.9। अथवा चित्र 18.10 में दर्शाई गई द्विविदिश पट्टिकाओं द्वारा।

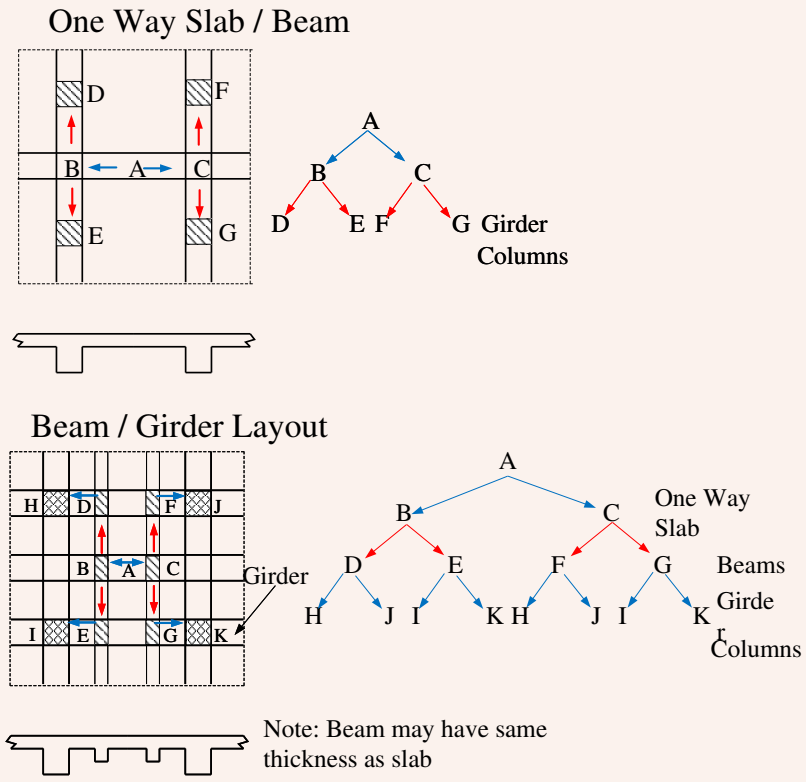
80 चार रैखिक आधारों पर सरलतः समर्थित पट्टिका में a/b अनुपात क्रमशः दो से अधिक अथवा कम होने पर एकदिश अथवा द्विविदिश क्रिया हो सकती है, चित्र 18.10।

81 यद्यपि हमारा ध्यान प्रबलित कंक्रीट अथवा इस्पात के अनुप्रस्थ काट के अभिकल्प पर होगा, हमें निम्नलिखित ध्यान में रखना चाहिए:

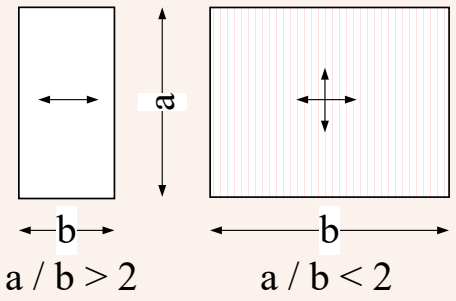
1. अनुप्रस्थ काट किसी धरन अथवा मुख्य धरन का भाग है।
2. धरन अथवा मुख्य धरन वास्तव में त्रिविमीय संरचना का भाग है, जिसमें संरचना के किसी भी बिंदु से भार विविध संरचनात्मक रूपों में से किसी एक के माध्यम से नींव तक संचारित होता है।

82 प्राचीन गिरजाघरों के राजमिस्त्रियों—अध्याय 4, चित्र 4.7—को भार-संचरण तंत्रों की उल्लेखनीय रूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 18.9: R/C भवनों में भार-संचरण



चित्र 18.10: पट्टिकाओं में एकदिश और द्विदिश क्रियाएँ

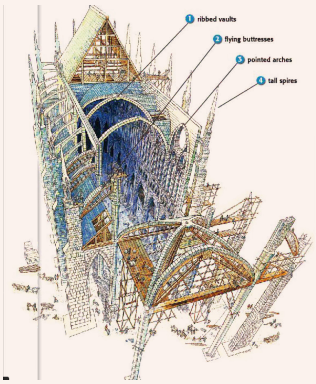
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

से सुदृढ समझ थी, जैसा चित्र 18.11a में दर्शाया गया है। गॉथिक गिरजाघर का संरचनात्मक तंत्र अनेक मुख्य तत्त्वों की पारस्परिक क्रिया पर निर्भर करता है, जो विशाल खुले स्थानों और विस्तृत खिडकियों को संभव बनाते हुए सामूहिक रूप से स्थिरता सुनिश्चित करते हैं:

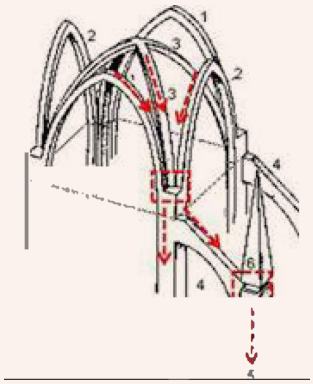
1. **पसलीदार वॉल्ट** पूर्वनिर्धारित रेखाओं—पसलियों—के साथ भारों को संचालित करके छत को सहारा देते हैं; ये पसलियाँ बलों को स्तंभों और आधार-स्तंभों की ओर निर्देशित करती हैं। यह कंकाली दृष्टिकोण वॉल्ट का द्रव्यमान घटाता और भारों को विशिष्ट बिंदुओं पर संकेंद्रित करता है।
2. **उडते प्रत्यालंब** वॉल्टों द्वारा लगाए गए क्षैतिज प्रणोद का प्रतिरोध करने में निर्णायक भूमिका निभाते हैं। वॉल्ट अधिक नुकीले—कम अर्धवृत्ताकार—होने पर यह प्रणोद बढता है। उडते प्रत्यालंब इन पार्श्व बलों को मुख्य भित्तियों से दूर बाह्य आधार-स्तंभों तक पहुँचाते हैं, जिससे स्थिरता बनाए रखते हुए भित्तियों में बडी रंगीन काँच की खिडकियाँ खोली जा सकती हैं।
3. **नुकीले मेहराब** वास्तु और संरचनात्मक दोनों प्रकार के नवाचार हैं। संरचनात्मक रूप से वे अर्धवृत्ताकार मेहराबों की तुलना में क्षैतिज प्रणोद घटाते और अधिक ऊँची, तनु संरचनाएँ संभव बनाते हैं। वास्तु की दृष्टि से वे गॉथिक सौंदर्य को परिभाषित करते और बडी खिडकियाँ संभव बनाकर आंतरिक प्रकाश को अधिकतम करते हैं।
4. **शिखर और मीनारें**, जो प्रायः प्रत्यालंबों के ऊपर अथवा गिरजाघर के प्रतिच्छेदन पर स्थित होती हैं, दो प्रयोजन पूरा करती हैं। प्रथम, वे विशाल आधार-स्तंभों के माध्यम से ऊर्ध्वाधर भार सीधे भूमि तक पहुँचाती हैं। द्वितीय, उनका भार स्थायीकारी संपीडन बल प्रदान करता है, जो पार्श्व भारों के अधीन उडते प्रत्यालंबों और मेहराबों में उत्पन्न तनन प्रतिबलों का प्रतिकार करता है। यह स्थायीकारी प्रभाव पेरिस के पों अलेक्ज़ांद्र III जैसे मेहराब-पुलों के भारित तोरणों के संकल्पनात्मक रूप से समान है, चित्र 18.11d; वहाँ पार्श्व प्रणोद विशाल भूमिगत आधार-स्तंभ वहन करते हैं और मीनारों का भार प्रेरित आनमन से उत्पन्न तनन प्रतिबलों को न्यूनतम करता है।

प्रारूप

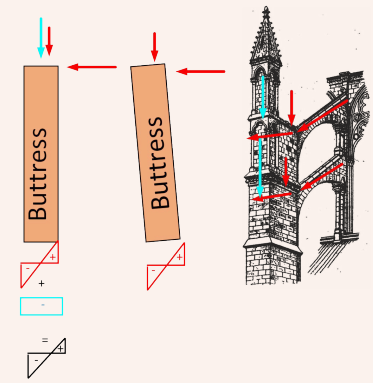
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) गॉथिक गिरजाघर



(b) भार-संचरण



(c) प्रत्यालंब के तल पर प्रतिबल



(d) अलेक्ज़ांद्र III पुल

चित्र 18.11: गॉथिक गिरजाघरों और छिछले मेहराबों में भार-संचरण तंत्र

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

18.3.5 प्रभावी क्षेत्रफल

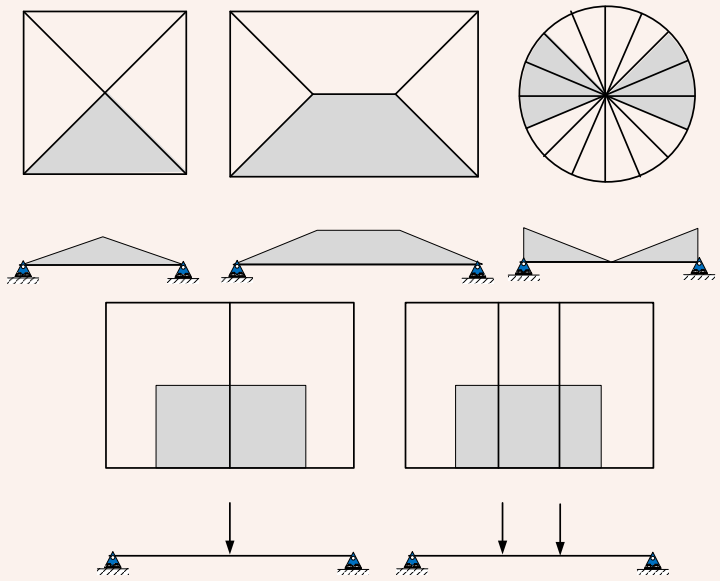
83 प्रायः किसी जटिल विश्लेषण के बिना संरचनात्मक तत्त्व से संबद्ध भार निर्धारित करने के लिए हमें सरलीकृत विधि की आवश्यकता होती है। यहाँ *प्रभावी क्षेत्रफल* की संकल्पना प्रयुक्त होती है।

84 प्रभावी क्षेत्रफल संरचना का वह क्षेत्र है जो अपने भार—मृत भार, चल भार, हिम भार आदि—किसी विशिष्ट संरचनात्मक घटक को संचारित करता है। यह क्षेत्र सामान्यतः संलग्न संरचनात्मक सदस्यों के बीच मध्यबिंदुओं अथवा केंद्र-रेखाओं या स्वयं संरचना की परिसीमाओं से घिरा होता है। विभिन्न घटकों के लिए इसका सामान्य अनुप्रयोग चित्र 18.12 में दर्शाया गया है:

धरन: किसी धरन का प्रभावी क्षेत्रफल फर्श अथवा छत का वह क्षेत्र है जिसका भार उस धरन पर आता है। एकदिश पट्टिका को सहारा देने वाली धरन के लिए यह क्षेत्रफल प्रायः संलग्न धरनों के केंद्रों के बीच पट्टिका की चौड़ाई को धरन की विस्तृति से गुणा करके निर्धारित किया जाता है।

स्तंभ: किसी स्तंभ का प्रभावी क्षेत्रफल उसके द्वारा समर्थित फर्श-क्षेत्र है। स्तंभों के बीच मध्यबिंदुओं के आधार पर फर्श को क्षेत्रों में विभाजित करके इसे निर्धारित किया जाता है। प्रत्येक स्तंभ अपने चारों ओर संलग्न स्तंभों तक के मध्यबिंदु वाला क्षेत्र वहन करता है।

फर्श पट्टिकाएँ: आवासीय निर्माण की भाँति प्रत्यक्ष भार वहन करने वाली पट्टिका यदि भित्ति से भित्ति तक विस्तृत हो, तो उसका प्रभावी क्षेत्रफल संपूर्ण फर्श-क्षेत्र हो सकता है।



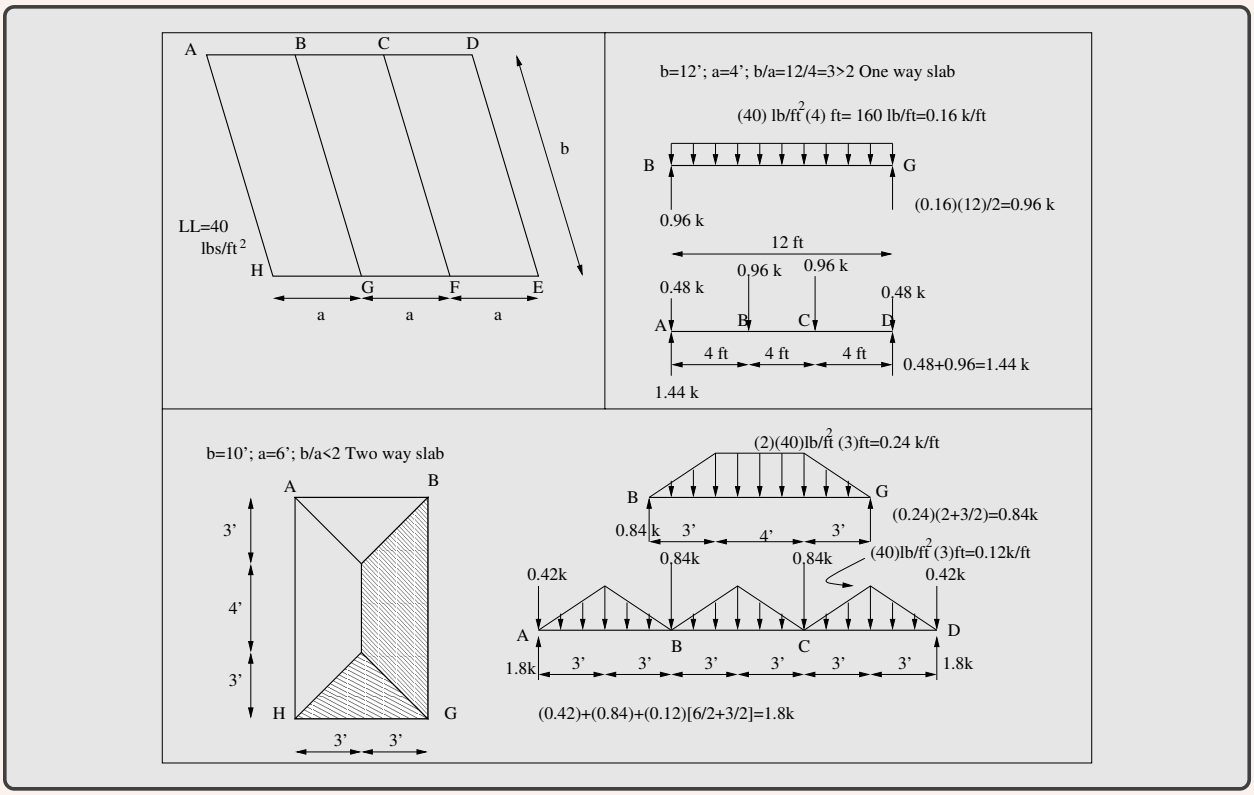
चित्र 18.12: संरचनात्मक सदस्यों पर भार के लिए प्रभावी क्षेत्रफलों की संकल्पना

85 पट्टिकाओं में प्रभावी क्षेत्रफलों का निर्धारण संगत पराभव-रेखाओं की पहचान के अनुरूप है, चित्र 57.1।

86 प्रभावी क्षेत्रफल की गणना का उदाहरण §19.2.2 में दिया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

18.3.5.1 उदाहरण 18.3: प्रभावी क्षेत्रफल



18.3.6 संरचनात्मक प्रतिक्रिया

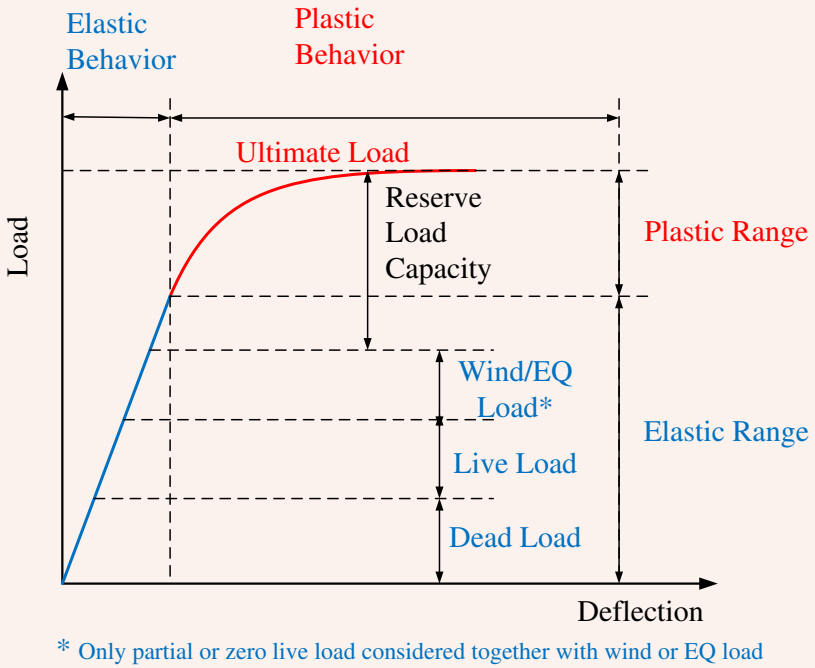
87 इस अध्याय का समापन संरचनात्मक प्रतिक्रिया पर अलग-अलग भार-प्रकारों की भूमिका की जाँच से करते हैं, चित्र 18.13।

88 सेवा भार, जिनमें सामान्यतः मृत और चल भार सम्मिलित होते हैं, संरचनात्मक प्रतिक्रिया को रैखिक प्रत्यास्थ परिसर के भीतर पर्याप्त रूप से बनाए रखने चाहिए। अप्रत्यास्थ प्रतिक्रिया अथवा अंततः विफलता-भार तक पहुँचने से पहले संरचना में पर्याप्त आरक्षित क्षमता होगी।

89 तीव्र पवन अथवा भूकंपीय सक्रियता जैसे असामान्य भारों में सुघट्य प्रतिक्रिया की सीमा तक पहुँचना स्वीकार्य है।

90 सुघट्य परिसर का अतिक्रमण केवल प्रबल भूकंप जैसी असाधारण परिस्थितियों में होना चाहिए। इससे स्थायी क्षति हो सकती है, किंतु संरचना खड़ी रहेगी और जीवन बचेंगे। इसका आगे *प्रदर्शन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी*, अध्याय 72, में विवेचन होगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 18.13: संरचना का भार-जीवन, (Lin and Stotesbury, 1981)

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



फ़ारनीज़ एटलस आकाशीय गोले को धारण करता टाइटन एटलस भार और बल-वितरण का प्रभावशाली निरूपण है।

प्रारूप

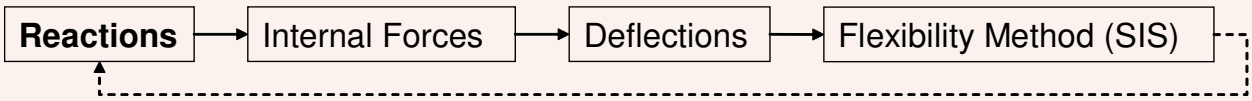
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

19 आधार-प्रतिक्रियाएँ

सारांश

आधार-प्रतिक्रियाएँ भार-पथ का अंतिम खंड बनाती हैं और इस प्रकार नींव के अभिकल्प पर उनका महत्त्वपूर्ण प्रभाव पड़ता है। आधार-प्रतिक्रियाओं का निर्धारण आंतरिक बलों—अगले अध्याय—की गणना को भी सरल बना सकता है। इस अध्याय की यांत्रिक आधारभूमि संतुलन समीकरणों के अतिरिक्त बहुत कम है; इन समीकरणों को विचाराधीन विशिष्ट संरचना के अनुरूप सावधानीपूर्वक ढालना आवश्यक है। अध्याय का प्रथम अनुभाग परस्पर असंबद्ध प्रतीत होने वाले अनेक विषयों को संबोधित करता है; तथापि वे सामूहिक रूप से ऐसी निर्णायक अंतर्दृष्टियाँ प्रदान करते हैं जो आधार-प्रतिक्रियाओं के निर्धारण को सुगम बनाती हैं। दूसरे अनुभाग में इन संकल्पनाओं के व्यावहारिक अनुप्रयोग को दर्शाने के लिए क्रमशः बढ़ती जटिलता वाले विविध उदाहरण प्रस्तुत किए गए हैं। अंततः, निम्न चित्र में दर्शाए अनुसार, आधार-प्रतिक्रियाओं का निर्धारण नम्यता विधि द्वारा स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं को हल करने का पहला चरण है।

19.1 परिचय 862
19.1.1 आधारों के प्रकार 863
19.1.2 संतुलन 864
19.1.3 दशा-समीकरण 865
19.1.4 स्थैतिक निर्धार्यता 866
19.1.5 ज्यामितीय अस्थिरता 867
19.1.6 मुक्त-पिंड आरेख 867
19.2 उदाहरण 869
19.2.1 उदाहरण 19.1: जलस्थैतिक भार 869
19.2.2 उदाहरण 19.2: भार-संचरण . . . 869
19.2.3 उदाहरण 19.3: सरलतः समर्थित धरन 870
19.2.4 उदाहरण 19.4: परवलयिक भार . 871
19.2.5 उदाहरण 19.5: तीन-विस्तृति धरन 872
19.2.6 उदाहरण 19.6: त्रि-कब्जित त्रि-कोणिका फ्रेम 873
19.2.7 उदाहरण 19.7: आनत आधार . . 875
19.2.8 उदाहरण 19.8: ग्रिड संरचना . . 876
19.2.9 उदाहरण 19.9: वायुयान का संतुलन 876
19.2.10 उदाहरण 19.10: विशाल बजरा . . 877
19.2.11 उदाहरण 19.11: रैंकिन: तैरते पिंड का संतुलन—जलस्थैतिक प्रमाण 881
19.2.12 उदाहरण 19.12: पालात्सेतो देल्लो स्पोर्ट; नेर्वी 882



19.1 परिचय

1 यद्यपि बल को भौतिकी की मूलभूत और आद्य संकल्पनाओं में माना जाता है, ऐतिहासिक रूप से इसे वास्तव में समझा नहीं गया था (अध्याय 14)।

2 बल तीन प्रकार के होते हैं:

भार किसी संरचना पर संकेंद्रित अथवा वितरित रूप में कार्य करने वाली बाह्य सदिश राशियाँ हैं। वे बल अथवा आघूर्ण होते हैं। भारों का विस्तृत विवेचन अध्याय 18 में है।

आधार-प्रतिक्रियाएँ आधारों द्वारा भारित संरचना पर लगाए गए बल हैं। वे सामान्यतः अज्ञात होते हैं और आंतरिक बल निर्धारित करने से पहले उनका निर्धारण आवश्यक है। प्रायः त्रुटिपूर्वक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यह माना जाता है कि न्यूटन का तीसरा नियम—*प्रत्येक क्रिया की समान और विपरीत प्रतिक्रिया होती है*—समान परिमाण और विपरीत दिशा वाली क्रिया तथा प्रतिक्रिया के दो बलों का संतुलन प्रदान करता है। किंतु नियम वास्तव में कहता है कि यदि पिंड A, बल F_a पिंड B पर लगाता है, तो पिंड B समान और विपरीत बल F_b, पिंड A पर लगाएगा। संतुलन नहीं होता, क्योंकि F_a और F_b अलग-अलग पिंडों पर लगाए जाते हैं—एक पिंड A पर और दूसरा पिंड B पर।

आंतरिक बल संरचना के आंतरिक अनुप्रस्थ काटों पर कार्य करने वाले वे बल हैं जो संरचना के किसी भाग को संतुलन में बनाए रखने के लिए आवश्यक हैं। इनका विवेचन अध्याय 21 में होगा।

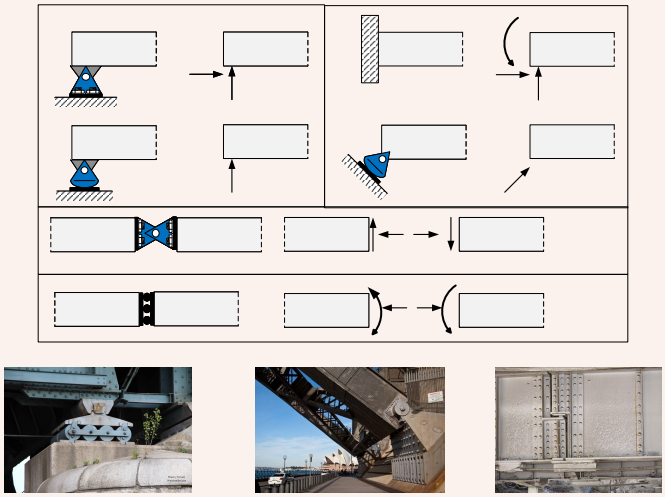
19.1.1 आधारों के प्रकार

3 संरचनाओं के विश्लेषण—हस्त-गणना—में प्रायः आधार-प्रतिक्रियाओं के निर्धारण से आरंभ करना अधिक सरल होता है, यद्यपि यह सदैव आवश्यक नहीं है।

4 आधार-प्रतिक्रियाएँ निर्धारित होने के बाद आंतरिक बल और अंत में विरूपण—विक्षेप तथा घूर्णन—निर्धारित किए जाते हैं[1]।

5 नींव का भार निर्धारित करने के लिए आधार-प्रतिक्रियाएँ आवश्यक हैं।

6 संरचना के प्रकार के अनुसार आधार-दशाएँ भिन्न प्रकार की हो सकती हैं, चित्र 19.1।



चित्र 19.1: आधार परिसीमाओं के उदाहरण

रोलर: 2D संरचना में केवल एक दिशा में अवरोध प्रदान करता है; 3D संरचना में रोलर एक अथवा दो दिशाओं में अवरोध दे सकता है। रोलर घूर्णन की अनुमति देता है।

कब्जा: घूर्णन की अनुमति देता है किंतु विस्थापन की नहीं। कुछ कब्जे ऊर्ध्वाधर स्थानांतरण की अनुमति देते हैं, किंतु घूर्णन की नहीं।

[1]यह नम्यता विधि में संक्रियाओं का अनुक्रम है, जो हस्त-गणना के अनुकूल है। दृढता विधि में पहले विस्थापन, फिर आंतरिक बल और आधार-प्रतिक्रियाएँ निर्धारित की जाती हैं। वह विधि कंप्यूटर कार्यान्वयन के लिए सर्वाधिक उपयुक्त है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आबद्ध आधार: सभी दिशाओं में घूर्णन और विस्थापन रोकता है।

ये सामान्य आधार हैं; 3D संरचनाओं में अनेक अन्य संयोजन संभव हैं।

19.1.2 संतुलन

आधार-प्रतिक्रियाएँ स्थैतिक संतुलन के उपयुक्त समीकरणों से निर्धारित की जाती हैं।

स्थैतिक तंत्र में बलों और आघूर्णों का योग शून्य होना चाहिए[2]।

3D कार्तीय निर्देशांक तंत्र में संतुलन के कुल 6 स्वतंत्र समीकरण होते हैं:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = \Sigma F_y = \quad \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = \Sigma M_y = \quad \Sigma M_z = 0 \end{aligned}$$

सभी समीकरण सभी संरचनाओं पर लागू नहीं होते। प्रत्येक संरचना-प्रकार के संतुलन समीकरण हैं:

परिभाषा 19.1: संतुलन समीकरण

संरचना का प्रकार	समीकरण					
	बल			आघूर्ण		
	x	y	z	x	y	z
अक्षीय बल-विहीन धरन		ΣF_y				ΣM_z
ग्रिड			ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y	
3D ट्रस, फ्रेम	ΣF_x	ΣF_y	ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y	ΣM_z
वैकल्पिक समुच्चय						
अक्षीय बल-विहीन धरनें					ΣM_z^A;	ΣM_z^B
2 D ट्रस, फ्रेम, धरन	ΣF_x				ΣM_z^A	ΣM_z^B
				ΣM_z^A	ΣM_z^B	ΣM_z^C

आधार-प्रतिक्रियाओं की गणना के लिए बाह्य लागू भार को समतुल्य बल में घटाया जा सकता है; किंतु आंतरिक बलों—अपरूपण और आघूर्ण—के लिए वास्तविक भार-वितरण का उपयोग आवश्यक है।

आघूर्णों का योग किसी भी स्वेच्छ बिंदु के सापेक्ष लिया जा सकता है।

बलों की भाँति आघूर्ण भी सदिश राशियाँ हैं और उन्हें वक्र तीर अथवा दोहरे तीर वाले सदिश से निरूपित किया जाता है।

गणनाओं की जाँच संतुलन के किसी अन्य समीकरण द्वारा करना सदैव श्रेयस्कर है।

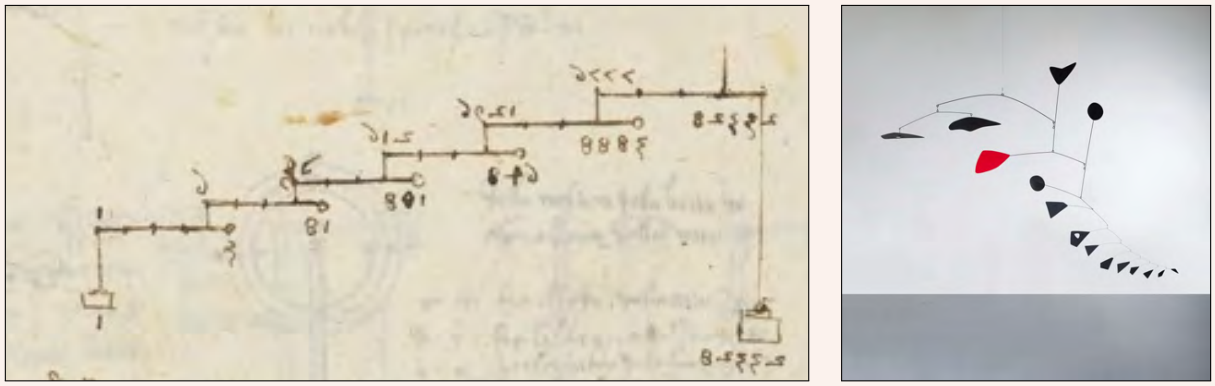
[2]गतिक तंत्र में $\Sigma F = ma$ है, जहाँ m द्रव्यमान और a त्वरण है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- संतुलन का समीकरण लिखने से पहले:
  1. स्वेच्छ रूप से निर्धारित करें कि **+ve** दिशा कौन-सी है।
  2. अज्ञात राशियों की दिशा मान लें।
  3. समीकरण का दायाँ पक्ष शून्य होना चाहिए।

  यदि आधार-प्रतिक्रिया ऋणात्मक हो तो वह मानी गई दिशा के विपरीत होगी।
- बाह्य बलों का योग आंतरिक बलों के समान और विपरीत होता है। अतः परिणामी बल/आघूर्ण शून्य होता है।

15 आघूर्णों के संतुलन पर लियोनार्डो (Da Vinci, 1490 PDF) (follio 94) और अलेक्ज़ेंडर काल्डर ने अपने प्रतिष्ठित गतिशील शिल्पों में विचार किया था, चित्र 19.2।



चित्र 19.2: लियोनार्डो (Da Vinci, 1490 PDF) से काल्डर तक आघूर्णों का संतुलन

16 एक पार्श्व टिप्पणी के रूप में, और जैसा §6.6.7 में पहले कहा गया है, प्रायः त्रुटिपूर्वक यह माना जाता है कि न्यूटन का तीसरा नियम—"प्रत्येक क्रिया की समान और विपरीत प्रतिक्रिया होती है"—समान परिमाण और विपरीत दिशा वाले क्रिया तथा प्रतिक्रिया बलों का संतुलन प्रदान करता है। किंतु नियम वास्तव में कहता है कि यदि पिंड A, बल F_a पिंड B पर लगाता है, तो पिंड B समान और विपरीत बल F_b, पिंड A पर लगाएगा। संतुलन नहीं होता, क्योंकि F_a और F_b अलग-अलग पिंडों पर लगाए जाते हैं—एक पिंड A पर और दूसरा पिंड B पर (Cohen, 2002 PDF)।

17 वारिन्यों प्रमेय , §14.5.14, का स्मरण: *किसी बिंदु के सापेक्ष अनेक समवर्ती बलों के आघूर्णों का योग उन बलों के परिणामी के आघूर्ण के समान होता है; अथवा, किसी बिंदु के सापेक्ष किसी बल का आघूर्ण उसके घटकों के आघूर्णों के योग के समान होता है।*

19.1.3 दशा-समीकरण

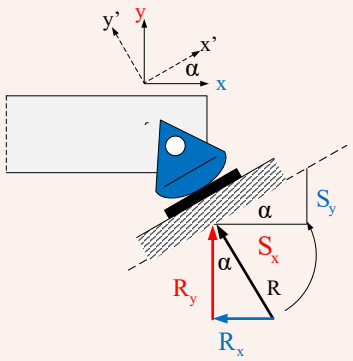
18 यदि किसी संरचना में आंतरिक कब्जा हो—जो दो अथवा अधिक उपसंरचनाओं को जोड़ सकता है—तो वह एक अतिरिक्त समीकरण—कब्जे पर $\Sigma M = 0$—प्रदान करता है, जिसका उपयोग आधार-प्रतिक्रियाएँ निर्धारित करने में किया जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

19 ट्रसों में, जहाँ प्रत्येक संयोजन कब्जा होता है, आधार-प्रतिक्रियाएँ निर्धारित करने के लिए इन समीकरणों का प्रायः उपयोग होता है।

20 S_x और S_y क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर प्रक्षेप वाले आनत रोलर आधार में आधार-प्रतिक्रिया R होगी, चित्र 19.3:

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{S_y}{S_x}$$



चित्र 19.3: आनत रोलर आधार की प्रतिक्रियाएँ

19.1.4 स्थैतिक निर्धार्यता

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §11.4.6 देखें

21 स्थैतिकतः निर्धार्य संरचनाओं में आधार-प्रतिक्रियाएँ केवल ज्यामिति, परिसीमा शर्तों और भारों पर निर्भर करती हैं।

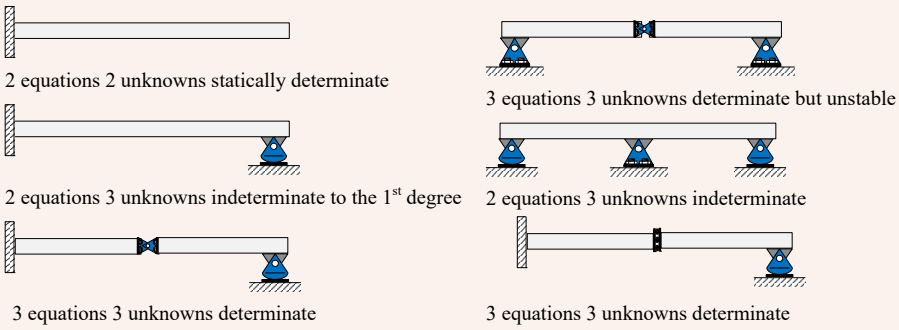
22 आंग्ल-सैक्सन से इतर साहित्य में स्थैतिकतः निर्धार्य और स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं के लिए क्रमशः अधिक सुरुचिपूर्ण पद *समस्थैतिक* और *अतिस्थैतिक* प्रयुक्त होते हैं।

23 यदि आधार-प्रतिक्रियाएँ स्थैतिक संतुलन के समीकरणों—और उपस्थित होने पर दशा-समीकरणों—से सरलता से निर्धारित न की जा सकें, तो संरचना की आधार-प्रतिक्रियाएँ स्थैतिकतः अनिर्धार्य अथवा अतिस्थैतिक कहलाती हैं।

24 स्थैतिक अनिर्धार्यता की कोटि आधार-प्रतिक्रियाओं की संख्या और संतुलन समीकरणों की संख्या के अंतर के समान होती है, चित्र 19.4।

25 स्थैतिकतः निर्धार्य तंत्र में एक आधार की विफलता से संरचना का पतन हो जाता है। अतः स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना स्थैतिकतः निर्धार्य संरचना से अधिक सुरक्षित होती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



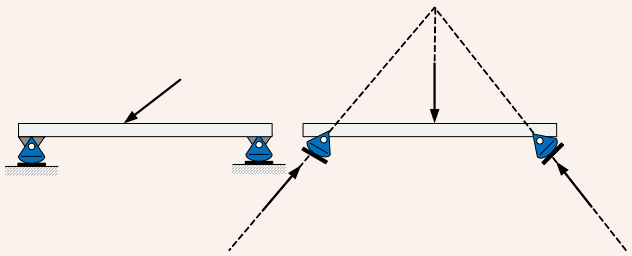
चित्र 19.4: स्थैतिक अनिर्धार्यता की कोटि

26 स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं में आधार-प्रतिक्रियाएँ सामग्री-गुणों—जैसे यंग और/अथवा अपरूपण मापांक—तथा तत्त्वों के अनुप्रस्थ काटों—जैसे लंबाई, क्षेत्रफल और जड़त्व आघूर्ण—पर भी निर्भर करती हैं।

19.1.5 ज्यामितीय अस्थिरता

27 ज्यामितीय अस्थिरता तब उत्पन्न होगी जब:

1. सभी *आधार-प्रतिक्रियाएँ समांतर* हों और संरचना पर असमांतर भार लगाया जाए।
2. सभी *आधार-प्रतिक्रियाएँ समवर्ती* हों, जैसा चित्र 19.5 में है।



चित्र 19.5: समवर्ती आधार-प्रतिक्रियाएँ

3. आधार-प्रतिक्रियाओं की संख्या संतुलन समीकरणों की संख्या से कम हो, अर्थात् संरचना में कोई क्रियाविधि उपस्थित हो।

28 गणितीय रूप से इसे तब दर्शाया जा सकता है जब संतुलन समीकरणों का सारणिक शून्य हो—अथवा समीकरण परस्पर निर्भर हों।

19.1.6 मुक्त-पिंड आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 19.2: मुक्त-पिंड आरेख

मुक्त-पिंड आरेख किसी दी गई परिस्थिति में किसी वस्तु पर कार्य करने वाले सभी बलों/आघूर्णों के सापेक्ष परिमाण और दिशा दर्शाने वाले आरेख हैं। यह मापनीबद्ध रेखाचित्र नहीं, एक आरेख है।

29 मुक्त-पिंड आरेख में सम्मिलित होते हैं:

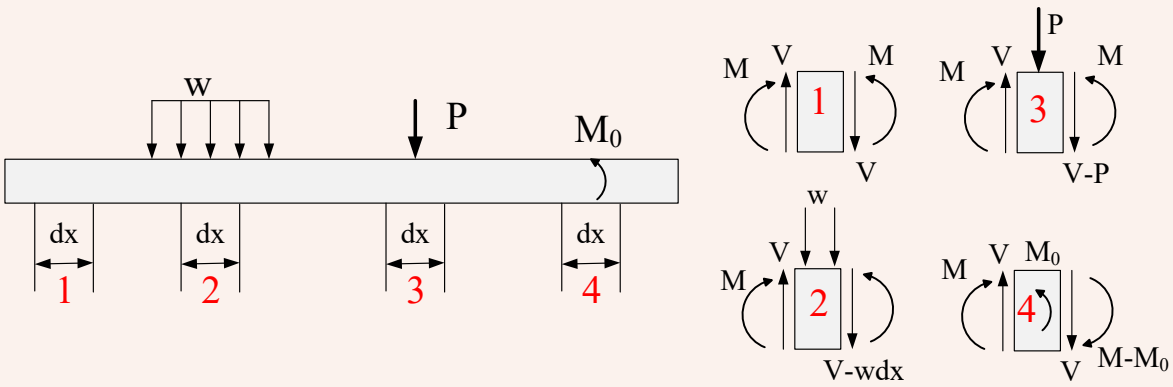
1. पिंड का सरलीकृत रूप।
2. पिंड पर बल जिस दिशा में कार्य करते हैं उस दिशा की ओर संकेत करते सीधे तीर; आघूर्णों को तीर-शीर्ष वाले वक्र अथवा कार्य-दिशा में संकेत करते दो तीर-शीर्ष वाले सदिश से दर्शाया जाता है।
3. एक अथवा अधिक संदर्भ निर्देशांक तंत्र।
4. परंपरानुसार—यद्यपि इसका सदैव पालन नहीं होता—लागू बलों की आधार-प्रतिक्रियाएँ सदिश के दंड पर तिर्यक चिह्नों से दर्शाई जाती हैं।

30 दर्शाए गए बलों और आघूर्णों की संख्या विशिष्ट समस्या तथा मानी गई परिकल्पनाओं पर निर्भर करती है।

31 सभी बलों और आघूर्णों का संतुलन शून्य होना चाहिए।

32 मुक्त-पिंड आरेख आवश्यक नहीं कि संपूर्ण भौतिक पिंड को निरूपित करे। विश्लेषण के लिए पिंड का कोई भाग चुना जा सकता है। इससे आंतरिक बल बाह्य रूप में दिखाई देते हैं और उनकी गणना संभव होती है। भौतिक पिंड के विभिन्न स्थानों पर आंतरिक बलों की गणना के लिए इसका अनेक बार उपयोग किया जा सकता है।

33 विभिन्न प्रकार के भारों के अधीन धरन का मुक्त-पिंड आरेख चित्र 19.6 में दर्शाया गया है।



चित्र 19.6: विभिन्न भारों के अधीन धरन के मुक्त-पिंड आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[34] अधिकांश समस्याओं में FBD अविरूपित आकृति के आधार पर बनाए जाते हैं; कुछ समस्याओं—ज्यामितीय अरैखिकता वाली—में FBD विरूपित आकृति के आधार पर बनाना आवश्यक है (§29), विशेषतः यदि कोई अस्थिरता उत्पन्न हो (§19.1.5)।

19.2 उदाहरण

19.2.1 उदाहरण 19.1: जलस्थैतिक भार

किसी भवन का तलघर भूमि-तल से 12 ft नीचे है। भूजल भूमि-तल से 9 ft नीचे स्थित है। जलस्थैतिक उत्थापन को ठीक संतुलित करने के लिए कंक्रीट पट्टिका की कितनी मोटाई आवश्यक है? जलस्थैतिक दाब का प्रतिरोध कंक्रीट के भार से उत्पन्न दाब द्वारा किया जाना चाहिए। चूँकि $p = \gamma h$ है, अतः दोनों दाबों को समान रखकर कंक्रीट पट्टिका की ऊँचाई h के लिए हल करते हैं:

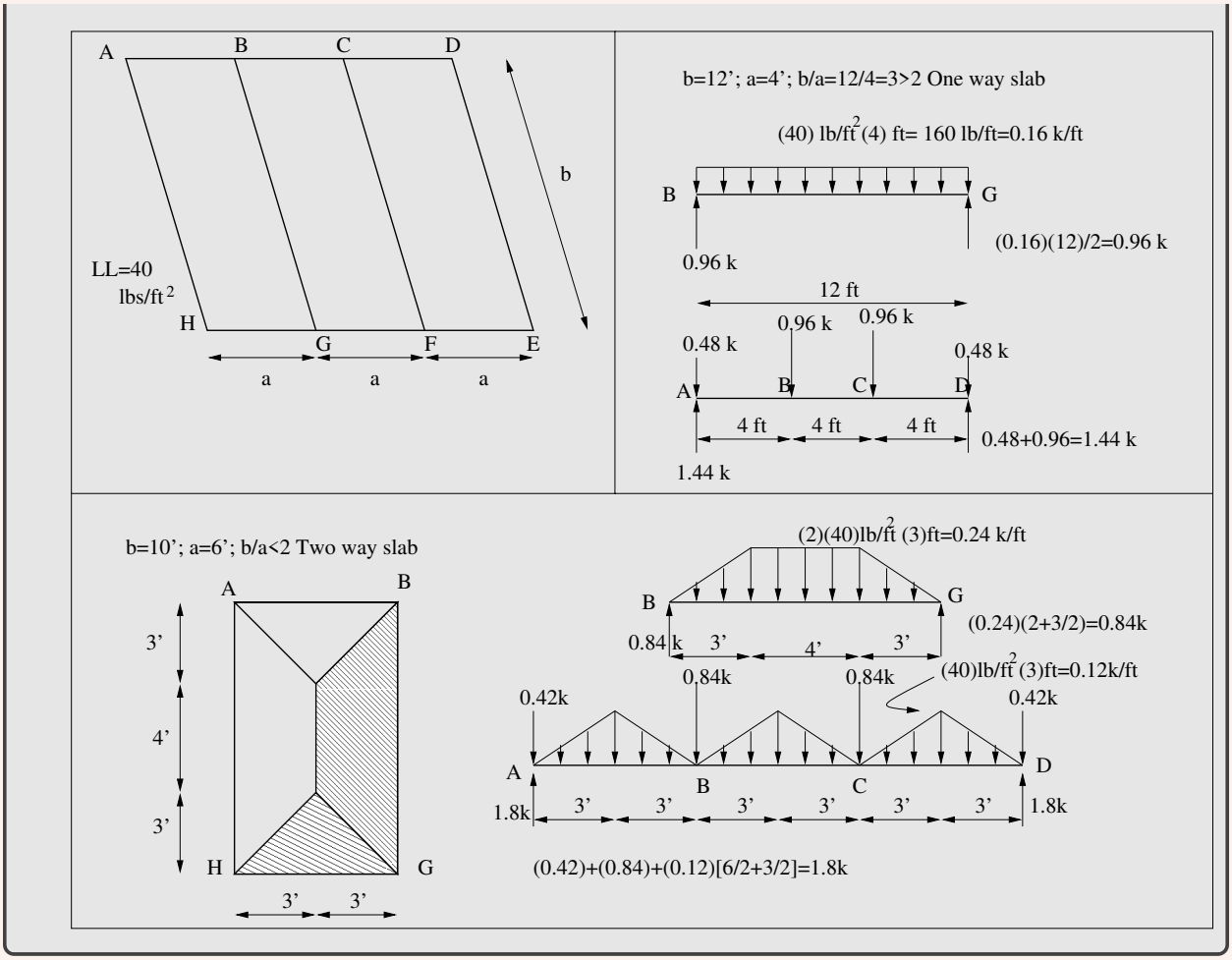
$$\underbrace{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3 \times (12-9)\ \text{ft}}_{\text{water}} = \underbrace{(150)\ \text{lbs/ft}^3 \times h}_{\text{concrete}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3}{(150)\ \text{lbs/ft}^3}(3)\ \text{ft}(12)\ \text{in/ft} = 14.976\ \text{in} \simeq \boxed{15.0\ \text{inch}}$$

19.2.2 उदाहरण 19.2: भार-संचरण

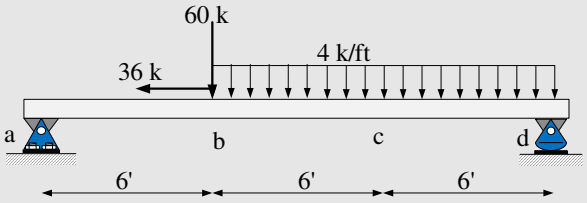
भार-संचरण का एक सरल और स्वयंपूर्ण उदाहरण निम्न चित्र में है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



19.2.3 उदाहरण 19.3: सरलतः समर्थित धरन

निम्न सरलतः समर्थित धरन की आधार-प्रतिक्रियाएँ निर्धारित करें।



धरन की 3 आधार-प्रतिक्रियाएँ और स्थैतिक संतुलन के 3 समीकरण हैं; अतः यह स्थैतिकतः निर्धार्य है।

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow \quad R_{ax} - 36\ \text{k} = 0$$

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow \quad R_{ay} + R_{dy} - 60\ \text{k} - (4)\ \text{k/ft}(12)\ \text{ft} = 0$$

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^c = 0; \Rightarrow \quad 12R_{ay} - 6R_{dy} - (60)(6) = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36 \\ 108 \\ 360 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36 \text{ k} \\ 56 \text{ k} \\ 52 \text{ k} \end{Bmatrix}$$

वैकल्पिक रूप से हम समीकरणों का अन्य समुच्चय उपयोग कर सकते थे:

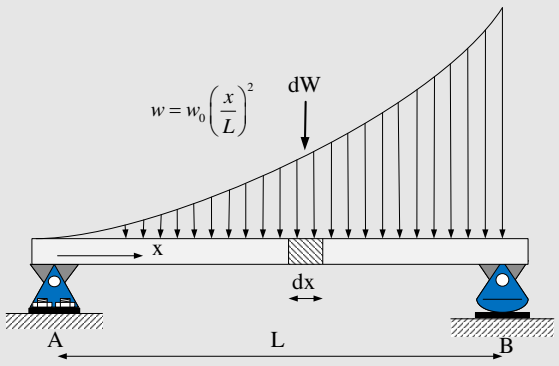
$$\begin{aligned} (+\circlearrowleft)\, \Sigma M_z^a = 0; \quad (60)(6) + (48)(12) - (R_{dy})(18) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_{dy} = 52 \text{ k} \uparrow \\ (+\circlearrowleft)\, \Sigma M_z^d = 0; \quad (R_{ay})(18) - (60)(12) - (48)(6) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_{ay} = 56 \text{ k} \uparrow \end{aligned}$$

जाँच:

$$(+\uparrow)\, \Sigma F_y = 0; 56 + 52 - 60 - 48 = 0 \checkmark$$

19.2.4 उदाहरण 19.4: परवलयिक भार

लंबाई L वाली सरलतः समर्थित धरन पर कार्यरत परवलयिक भार $w = w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2$ के लिए आधार-प्रतिक्रियाएँ निर्धारित करें।



दो अज्ञात और संतुलन के दो समीकरण (ΣF_y तथा ΣM) हैं। हम विवेकपूर्ण रूप से दूसरे से आरंभ करते हैं, क्योंकि उससे B पर आधार-प्रतिक्रिया सीधे प्राप्त होगी। लंबाई dx, भार dW और आघूर्ण dM वाले अतिसूक्ष्म तत्त्व पर विचार करने पर:

$$(+\circlearrowleft)\, \Sigma M_z^A = 0; \int_{x=0}^{x=L} \underbrace{\underbrace{\underbrace{w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2}_{w}\, dx}_{dW} \times x}_{dM} - (R_B)(L) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{1}{L} w_0 \left(\frac{L^4}{4L^2}\right) = \frac{1}{4} w_0 L$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

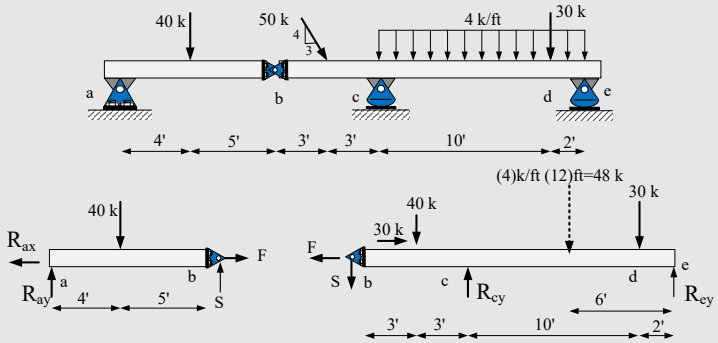
R_B निर्धारित होने पर R_A के लिए हल करते हैं:

$$(+\uparrow)\Sigma F_y = 0; R_A + \underbrace{\frac{1}{4}w_0 L}_{R_b} - \int_{x=0}^{x=L} w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{w_0}{L^2}\frac{L^3}{3} - \frac{1}{4}w_0 L = \frac{1}{12}w_0 L$$

19.2.5 उदाहरण 19.5: तीन-विस्तृति धरन

निम्न तीन-विस्तृति धरन की आधार-प्रतिक्रियाएँ निर्धारित करें।



4 अज्ञात (R_{ax}, R_{ay}, R_{cy} और R_{ey}), संतुलन के तीन समीकरण और एक दशा-समीकरण ($\Sigma M_b = 0$) हैं; अतः संरचना स्थैतिकतः निर्धार्य है। इन चार अज्ञातों के समाधान के अनेक दृष्टिकोण हैं—सभी सही—किंतु कुछ अधिक सरल हैं। इस स्थिति में संरचना को दो उपसंरचनाओं में विभाजित करना और प्रत्येक के मुक्त-पिंड आरेख को पृथक रूप से जाँचना सबसे सरल है। ab को विलग करने पर:

$$(+\circlearrowleft)\Sigma M_z^b = 0; (9)(R_{ay}) - (40)(5) = 0 \quad \Rightarrow R_{Ay} = 22.2 \text{ k} \uparrow$$
$$(+\circlearrowleft)\Sigma M_z^a = 0; (40)(4) - (S)(9) = 0 \quad \Rightarrow S = 17.7 \text{ k} \uparrow$$
$$\Sigma F_x = 0; \quad \Rightarrow R_{ax} = 30 \text{ k} \leftarrow$$

be को विलग करने पर:

$$(+\circlearrowleft)\Sigma M_z^e = 0;$$
$$-(17.7)(18) - (40)(15) - (4)(12)(6) - (30)(2) + R_{cy}(12) = 0$$
$$\Rightarrow R_{cy} = \frac{1,266.6}{12} = 105.6 \text{ k} \uparrow$$
$$(+\circlearrowleft)\Sigma M_z^c = 0;$$
$$-(17.7)(6) - (40)(3) + (4)(12)(6) + (30)(10) - R_{ey}(12) = 0$$
$$\Rightarrow R_{ey} = \frac{361.8}{12} = 30.15 \text{ k} \uparrow$$

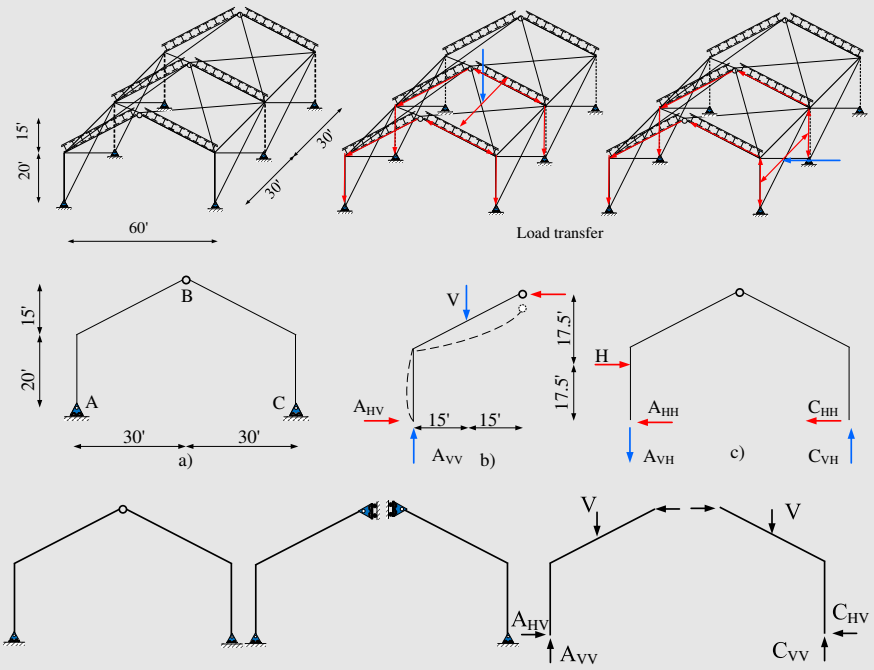
जाँच:

$$\Sigma F_y = 0; \uparrow; 22.2 - 40 - 40 + 105.6 - 4(12) - 30 + 30.15 = -0.050 \simeq 0. \checkmark$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

19.2.6 उदाहरण 19.6: त्रि-कब्जित त्रिकोणिका फ्रेम

केंद्र से केंद्र 30 ft की दूरी पर स्थित त्रि-कब्जित त्रिकोणिका फ्रेमों के लिए निम्न भारों से उत्पन्न आधार-प्रतिक्रिया घटक निर्धारित करें: 1) छत के क्षेत्रफल पर 20 psf का मृत भार; 2) क्षैतिज प्रक्षेप पर 30 psf का हिम भार; 3) ऊर्ध्वाधर प्रक्षेप पर 15 psf का पवन भार। ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज आधार-प्रतिक्रियाओं के निर्णायक अभिकल्प मान निर्धारित करें।



सममिति के कारण हिम और मृत भार के लिए कब्जे द्वारा कोई ऊर्ध्वाधर बल संचारित नहीं होता; अतः हम फ्रेम के केवल बाएँ अथवा दाएँ भाग पर विचार कर सकते हैं। समतुल्य बिंदु-भार:

1. फ्रेम के एक पार्श्व का छत मृत भार है:

$$DL = (20)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}\left(\sqrt{30^2+15^2}\right)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \ \text{lbs/k} = 20.2\ \text{k}\downarrow$$

2. फ्रेम के एक पार्श्व का हिम भार है:

$$SL = (30)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}(30)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \ \text{lbs/k} = 27.\ \text{k}\downarrow$$

3. प्रति फ्रेम पवन भार—चूषण की उपेक्षा करते हुए—है:

$$WL = (15)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}(20+15)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \ \text{lbs/k} = 15.75\ \text{k}\rightarrow$$

4 आधार-प्रतिक्रियाएँ, संतुलन के 3 समीकरण और एक दशा-समीकरण हैं $\Rightarrow$ तंत्र स्थैतिकतः निर्धार्य है। वैकल्पिक रूप से, सममिति के कारण कब्जे C पर कोई अपरूपण नहीं है और उपसंरचना के लिए आधार पर दो आधार-प्रतिक्रियाएँ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तथा कब्जे पर एक क्षैतिज आधार-प्रतिक्रिया होगी। केंद्रित ऊर्ध्वाधर भार से A पर क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर आधार-प्रतिक्रियाओं—क्रमशः A_{HV} और A_{VV}—का संबंध कब्जे के सापेक्ष आघूर्ण लेकर निर्धारित होता है (b):

$$\left.\begin{array}{rcl} (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B &=& 0;\quad 15V - 30A_{VV} + 35A_{HV} = 0 \\ (+\uparrow)\,\Sigma F_y &=& 0;\quad A_{VV} - V = 0; \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} A_{HV} &=& \frac{15A_{VV}}{35} \\ &=& .429A_{VV} \end{array}$$

छत के मृत भार और हिम भार को प्रतिस्थापित करने पर:

$$\begin{array}{rcll} A_{VV}^{DL} = C_{VV}^{DL} &=& & 20.2\ \text{k}\uparrow \\ A_{HV}^{DL} = C_{HV}^{DL} &=& (.429)(20.2) & = 8.66\ \text{k}\rightarrow \\ A_{VV}^{SL} = C_{VV}^{SL} &=& & 27.\ \text{k}\uparrow \\ A_{HV}^{SL} = C_{HV}^{SL} &=& (.429)(27.) & = 11.58\ \text{k}\rightarrow \end{array}$$

बाएँ से बहने वाले पवन भार से उत्पन्न आधार-प्रतिक्रियाएँ निम्न प्रकार निर्धारित होती हैं:

1. A पर ऊर्ध्वाधर आधार-प्रतिक्रिया संपूर्ण संरचना पर विचार करके और C के सापेक्ष आघूर्ण लेकर निर्धारित होती है (c):

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^C = 0; (15.75)(\frac{20+15}{2}) - 60A_{VH} = 0 \qquad \Rightarrow A_{VH} = 4.60\ \text{k}\uparrow$$

   A_{VH} क्षैतिज भार के कारण A पर ऊर्ध्वाधर आधार-प्रतिक्रिया है[a]; y दिशा में बल-संतुलन से $B_{VH} = -A_{VH} = -4.60\downarrow$ है—ध्यान दें कि पवन भार का कोई ऊर्ध्वाधर घटक नहीं है।

2. B पर क्षैतिज आधार-प्रतिक्रिया दाएँ उपसंरचना पर विचार कर और B के आंतरिक कब्जे के सापेक्ष आघूर्ण लेकर निर्धारित होती है:

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^B = 0; 35C_{HH} - (4.6)(30) = 0 \qquad \Rightarrow C_{HH} = 3.95\ \text{k}\leftarrow$$

3. A पर क्षैतिज आधार-प्रतिक्रिया संपूर्ण संरचना पर विचार करके और x दिशा में बलों का योग लेकर प्राप्त होती है:

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0;\quad 15.75 - 3.95 - A_{HH} = 0 \quad \Rightarrow A_{HH} = 11.80\ \text{k}\leftarrow$$

   ध्यान दें कि A अधिकांश क्षैतिज भार वहन करता है।

अंततः आधारों को आधार-प्रतिक्रियाओं के सर्वाधिक निर्णायक—और संभाव्य—संयोजन के लिए अभिकल्पित करना चाहिए:

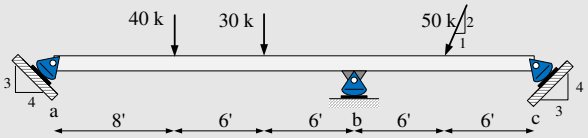
$$\begin{array}{rcl} H &=& 8.66\ \text{k} + 11.58\ \text{k} + 11.8\ \text{k} \quad = 32.04\ \text{k} \\ V &=& 20.2\ \text{k} + 27.0\ \text{k} + 4.60\ \text{k} \quad = 51.8\ \text{k} \end{array}$$

[a] दोहरे अधोलिखित की संकेतन-पद्धति संरचनात्मक विश्लेषण में व्यापक रूप से प्रयुक्त होती है। X_{yz} सामान्यतः राशि X को दर्शाता है, जो y पर किसी क्रिया z के कारण उत्पन्न होती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

19.2.7 उदाहरण 19.7: आनत आधार

आनत आधार वाली धरन का उदाहरण नीचे दर्शाया गया है।



A priori हम 5 आधार-प्रतिक्रियाएँ पहचानेंगे; किंतु 2 दशा-समीकरण—प्रत्येक आनत आधार पर एक—और संतुलन के तीन समीकरण होने के कारण तंत्र स्थैतिकतः निर्धार्य है।

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^b = 0;$$
$$(R_{ay})(20) - (40)(12) - (30)(6) + (44.72)(6) - (R_{cy})(12) = 0$$
$$\Rightarrow 20R_{ay} = 12R_{cy} + 391.68$$
$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0;\ \frac{3}{4}R_{ay} - 22.36 - \frac{4}{3}R_{cy} = 0 \Rightarrow R_{cy} = 0.5625R_{ay} - 16.77$$

इन दोनों समीकरणों का समाधान करने पर:

$$\begin{bmatrix} 20 & -12 \\ 0.5625 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 391.68 \\ 16.77 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.37\ \text{k} \uparrow \\ -8.69\ \text{k} \downarrow \end{Bmatrix}$$

a और c पर आधार-प्रतिक्रियाओं के क्षैतिज घटक हैं:

$$R_{ax} = \frac{3}{4}14.37 \quad = 10.78\ \text{k} \rightarrow$$
$$R_{cx} = \frac{4}{3}8.69 \quad = -11.59\ \text{k} \rightarrow$$

अंत में R_{by} के लिए हल करते हैं:

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^a = 0;$$
$$(40)(8) + (30)(14) - (R_{by})(20) + (44.72)(26) + (8.69)(32) = 0$$
$$\Rightarrow R_{by} = 109.04\ \text{k} \uparrow$$

परिणामों की जाँच:

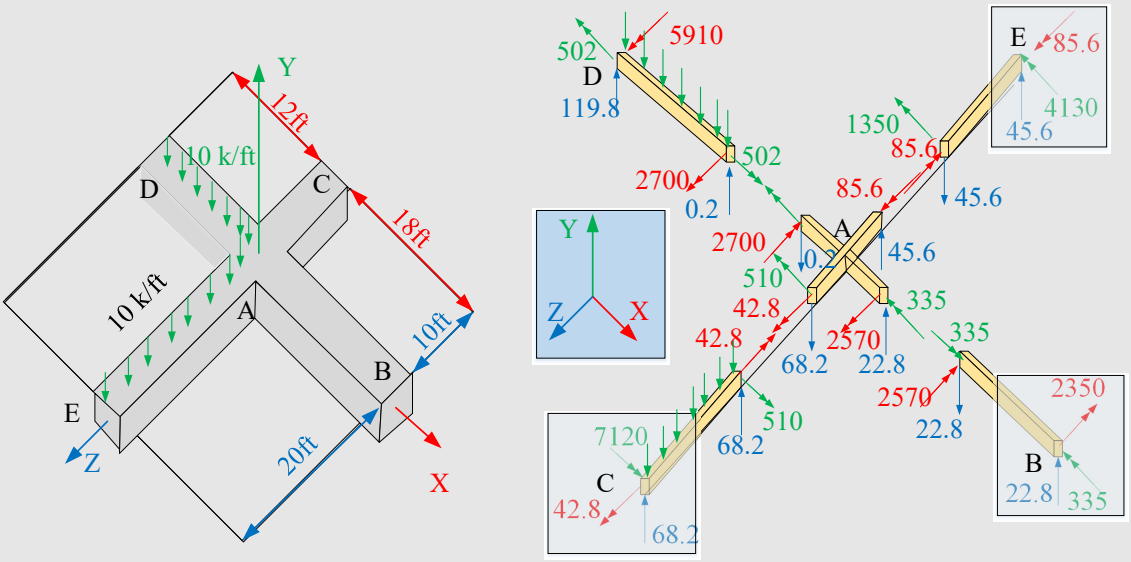
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; 14.37 - 40 - 30 + 109.04 - 44.72 - 8.69 \quad = 0 \checkmark$$
$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; 10.78 - 22.36 + 11.59 \quad = 0 \checkmark$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

19.2.8 उदाहरण 19.8: ग्रिड संरचना

निम्न समतलीय ग्रिड संरचना चार आधारों B, C, D और E पर दृढतापूर्वक जुडी है। स्पष्टतः यह 9^{th} कोटि तक स्थैतिकतः अनिर्धार्य है $(4 \times 3 - 3)$। जैसा आगे देखेंगे, यह तीसरी कोटि तक शुद्धगतिकतः अनिर्धार्य है—A पर तीन अज्ञात विस्थापन। पहले दृढता विधि से इसका विश्लेषण कर B, C और E पर आधार-प्रतिक्रियाएँ निर्धारित की जाती हैं। तब ग्रिड स्थैतिकतः निर्धार्य हो जाता है—तीन बाह्य आधार-प्रतिक्रियाएँ—और सरल स्थैतिकी के तीन संतुलन समीकरणों ΣM_x, ΣF_y और ΣM_z से D पर आधार-प्रतिक्रियाएँ तथा आंतरिक बल निर्धारित किए जा सकते हैं। ध्यान दें कि D पर आधार-प्रतिक्रियाओं के निर्धारण से आरंभ करना आवश्यक नहीं है; हम तीन आधारों में से किसी से केंद्र की ओर बढकर फिर D की ओर "चल" सकते हैं। केवल बाह्य भारों और आधार-प्रतिक्रियाओं को लेकर स्थैतिकी से परिणामों की जाँच की जा सकती है। यह अभ्यास समुचित रूप से बनाए गए मुक्त-पिंड आरेखों का महत्त्व दर्शाता है।

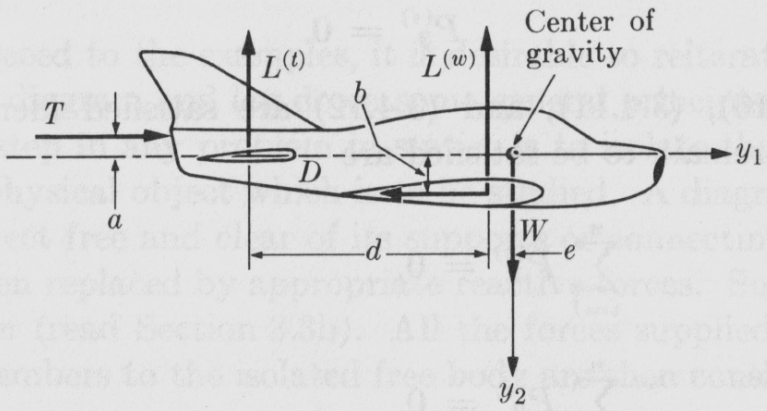


19.2.9 उदाहरण 19.9: वायुयान का संतुलन

Statics of deformable solids
Bisplinghoff, Mar, and Pian, 1965 से हम स्थिर समतल उडान में वायुयान को संतुलन में बनाए रखने के लिए

आवश्यक बलों की गणना करना चाहते हैं। नीचे भार W वाले वायुयान का सरलीकृत मुक्त-पिंड आरेख है। माना गया है कि वायुयान के उडान-वेग पर कर्षण D ज्ञात है। स्थिर समतल उडान के लिए पंख का उत्थापन $L^{(w)}$, पुच्छ का उत्थापन $L^{(t)}$ और इंजन प्रणोद T निर्धारित करना है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



यह स्पष्टतः स्थैतिक संतुलन की समस्या है।

$$\rightarrow \Sigma F_{y1} = 0; \Rightarrow T - D = 0$$
$$\uparrow \Sigma F_{y2} = 0; \Rightarrow -L^{(w)} - L^{(t)} + W = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\, \Sigma M_z^a = 0 \Rightarrow Ta + Db + L^{(t)}(d+e) + L^{(w)}e = 0$$

अथवा

$$T = D$$
$$L^{(t)} = -\frac{D(a+b) + We}{d}$$
$$L^{(w)} = W + \frac{D(a+b) + We}{d}$$

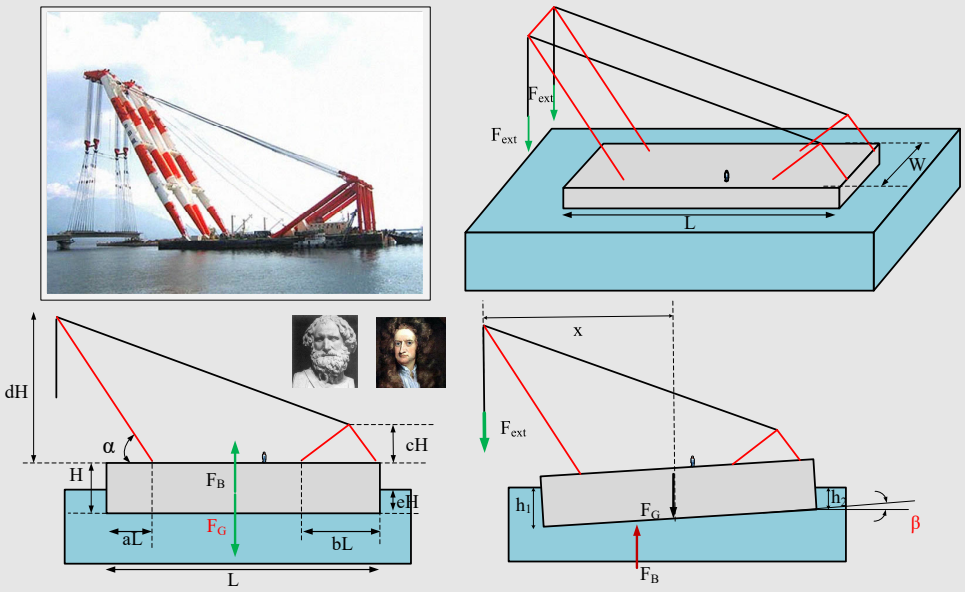
और ध्यान दें कि संतुलन बनाए रखने के लिए पुच्छ पर अधोमुखी बल आवश्यक है।

19.2.10 उदाहरण 19.10: विशाल बजरा

"विशाल बजरे"[a] के आयाम निर्धारित करें, जिसे $2F_{ext}$ भार उठाना है। बजरे के अभिलक्षण नीचे दर्शाए गए हैं, जहाँ L, H, W और W क्रमशः बजरे की लंबाई, ऊँचाई, चौड़ाई और भार हैं; F_G और F_B गुरुत्वीय तथा उत्प्लावन बल हैं। मानें कि गुरुत्व-केंद्र $L/2$, $W/2$ और $H/2$ पर है। गुणांक a, b, c, d और e ज्ञात माने गए हैं।

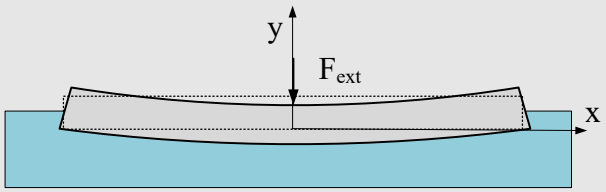
भाग I मानें कि बजरा दृढ है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



1. बाह्य भार के अभाव में e—जल के भीतर बजरे की ऊँचाई का अंश—के लिए हल करें।
2. बाह्य बल F_{ext} के लिए:
   (a) स्पष्ट मुक्त-पिंड आरेख बनाएँ।
   (b) लागू समीकरण लिखकर h_1, h_2 और β के लिए हल करें।
   (c) बजरे के पिछले भाग में जल भरने से पहले उठाए जा सकने वाले अधिकतम बल F_{max} को निर्धारित करें।

भाग II मानें कि बजरा नम्य है, $F_{ext} \gg F_G$ है और $L/2$ पर लागू है। ऊर्ध्वाधर विस्थापन y और समान उत्प्लावन भार q_B के पदों में नियंत्रक अवकल समीकरण व्युत्पन्न करें।



भाग I दृढ बजरा

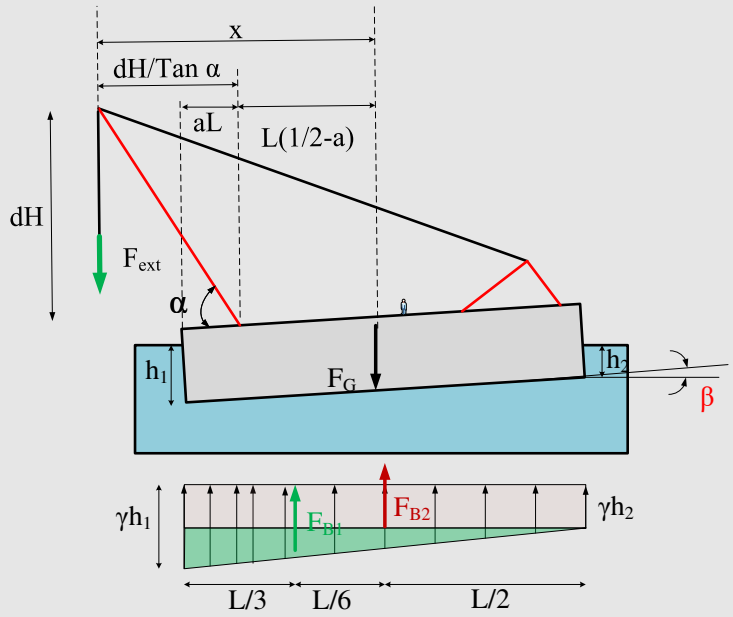
1. आर्किमिडीज़ के नियम से बजरे का भार विस्थापित जल के भार के समान है:

$$F_G = \gamma.W.L.eH \Rightarrow e = \frac{F_G}{\gamma.W.L.W}$$

2. बाह्य बल F_{ext} के लिए:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(a) मुक्त-पिंड आरेख:



(b) लागू समीकरण लिखें:

- उत्प्लावन बल:

$$F_B = F_{B1} + F_{B2}$$
$$F_{B1} = \gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2}$$
$$F_{B2} = \gamma h_2 WL$$

- ज्यामिति:

$$x = \frac{dH}{\tan}\alpha + L\left(\frac{1}{2} - a\right)$$

- केंद्र के सापेक्ष आघूर्णों का योग:

$$F_{ext}x - F_{B1}\frac{L}{6} = 0$$
$$F_{B1} = \frac{6F_{ext}x}{L}$$
$$\gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2} = \underbrace{\frac{6F_{ext}}{L}\left[\frac{dH}{\tan\alpha} + L\left(\frac{1}{2} - a\right)\right]}_{A}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- ऊर्ध्वाधर बलों का योग:

$$\begin{aligned} F_{B1} + F_{B2} - F_G - F_{ext} &= 0 \\ F_{B2} &= F_G + F_{ext} - F_{B1} \\ \gamma h_2 WL &= F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L} \\ h_2 &= \frac{F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}}{\gamma WL} \end{aligned}$$

- h_1 के लिए हल:

$$\begin{aligned} \gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2} &= A \\ h_1 &= \frac{2A}{\gamma WL} - h2 \end{aligned}$$

- β के लिए हल:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{h_1 - h_2}{L}\right)$$

(c) बजरे के "जल से बाहर उठने" के लिए $h_2 = 0$ अथवा:

$$\frac{F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}}{\gamma WL} = 0 \Rightarrow F_{ext} = \frac{F_G}{6x/L - 1}$$

भाग II नम्य बजरा

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{M}{EI} \\ \frac{d^2M}{dx^2} &= q \\ \frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{q}{EI} \\ q &= -\gamma W y \\ \frac{d^4y}{dx^4} &= -\frac{\gamma W y}{EI} \\ k^2 &= \frac{\gamma W}{4EI} \\ \frac{d^4y}{dx^4} + 4k^2 y &= 0 \end{aligned}$$

यह प्रत्यास्थ नींव पर धरन के समीकरण के समान है। समघात चतुर्थ-कोटि अवकल समीकरण का समाधान $y = e^{\alpha x}$ रूप का है, जिससे:

$$\begin{cases} \frac{d^4}{dx^4} - \alpha^4 y = 0 \\ \frac{d^4y}{dx^4} + 4k^2 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^4 = -4k^4 \\ \alpha^2 = \pm 2ik^2 \\ \alpha = \pm\sqrt{\pm 2i}k \\ \quad = \pm(1 \pm i)k \end{cases}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

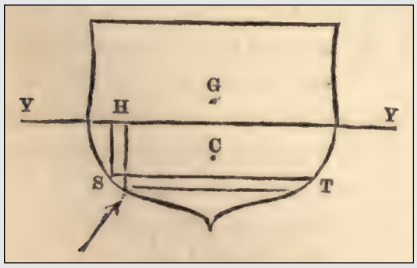
अथवा

$$y = e^{kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{-kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx)$$

[a]इस लेख से प्रेरित।

19.2.11 उदाहरण 19.11: रैंकिन: तैरते पिंड का संतुलन—जलस्थैतिक प्रमाण

यह उदाहरण रैंकिन के शास्त्रीय प्रमाण का अनुसरण करता है कि तैरते पिंड पर तरल की परिणामी क्रिया विस्थापित तरल के भार के समान एक ऊर्ध्वाधर उर्ध्वमुखी बल होती है, जो विस्थापित आयतन के केंद्रक—उत्प्लावन-केंद्र—से होकर कार्य करती है। (Rankine, 1858, Art. 120)



तैरता पिंड (रैंकिन, Art. 120)। YY तरल की क्षैतिज मुक्त सतह को दर्शाए। निमज्जित सतह के क्षेत्रफल S वाले छोटे समतलीय भाग पर विचार करें, जिसका केंद्रक ऊर्ध्वाधर गहराई x पर, YY से नीचे स्थित है। उस गहराई पर जलस्थैतिक दाब की तीव्रता है:

$$p = wx,$$

जहाँ w तरल का प्रति इकाई आयतन भार है। अतः S पर कार्य करने वाला कुल दाब pS है, जो सतह के अभिलंब कार्य करता है।

α समतलीय क्षेत्र S और क्षैतिज मुक्त सतह के बीच का कोण हो—समतुल्य रूप से दाब की दिशा और ऊर्ध्वाधर दिशा के बीच का कोण।

- **प्रक्षेप।** आनत क्षेत्र S का क्षैतिज प्रक्षेप है:

$$S_h = S \cos \alpha,$$

और क्षैतिज प्रिज्म अक्ष के लंबवत् ऊर्ध्वाधर समतल पर S का ऊर्ध्वाधर प्रक्षेप है:

$$S_v = S \sin \alpha.$$

- **क्षैतिज घटक।** दाब pS को घटकों में वियोजित करने पर S पर कार्य करने वाला क्षैतिज घटक है:

$$dF_H = pS_v = (wx)(S \sin \alpha).$$

रैंकिन दर्शाते हैं कि ऐसे प्रत्येक सतही तत्त्व S के लिए समान गहराई पर समान ऊर्ध्वाधर प्रक्षेप वाला अन्य तत्त्व होता है, जो समान और विपरीत क्षैतिज घटक उत्पन्न करता है। फलतः संपूर्ण निमज्जित सतह पर योग करने से:

$$\sum dF_H = 0,$$

और परिणामी तरल-क्रिया का कोई क्षैतिज घटक नहीं होता।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **ऊर्ध्वाधर घटक और विस्थापित तरल।** S पर दाब का ऊर्ध्वाधर घटक है:

$$dF_V = pS_h = (wx)(S\cos\alpha).$$

राशि $(S\cos\alpha)\,x$, S के क्षैतिज प्रक्षेप पर खड़े और मुक्त सतह से गहराई x तक विस्तृत तरल के ऊर्ध्वाधर प्रिज़्मीय स्तंभ का आयतन दर्शाती है। इस आयतन को w से गुणा करने पर उस प्रिज़्म में तरल का भार मिलता है। अतः:

$$dF_V = w\,x\,S\cos\alpha$$

पिंड के उस प्रिज़्मीय भाग द्वारा विस्थापित तरल के भार के समान और विपरीत ऊर्ध्वमुखी बल है।

- **परिणामी उत्प्लावन और उसकी कार्य-रेखा।** निमज्जित सतह के सभी तत्त्वों पर ऊर्ध्वाधर घटकों का योग एक ऊर्ध्वमुखी परिणामी देता है:

$$F_B = wV,$$

जहाँ V कुल विस्थापित आयतन है। प्रत्येक तत्त्वीय योगदान अपने प्रिज़्मीय स्तंभ के केंद्रक से होकर कार्य करता है; अतः परिणामी विस्थापित आयतन के केंद्रक C—उत्प्लावन-केंद्र—से होकर गुजरता है।

- **संतुलन की शर्तें।** तैरते पिंड का भार W उसके गुरुत्व-केंद्र G से होकर कार्य करे। संतुलन के लिए:

$$W = wV \qquad \text{and} \qquad G \text{ and } C \text{ lie on the same vertical line.}$$

आधुनिक समाकल सूत्रीकरण (पूरक)। रैंकिन यह परिणाम ज्यामितीय वियोजन से स्थापित करते हैं, किंतु आधुनिक सातत्यक सूत्रीकरण से भी यही निष्कर्ष सीधे प्राप्त होता है। जलस्थैतिक दाब-क्षेत्र $p = wz$ है, जहाँ z मुक्त सतह से नीचे ऊर्ध्वाधर गहराई है। पिंड पर तरल द्वारा लगाया गया परिणामी बल है:

$$\mathbf{F} = \iint_{\partial V} p\,\mathbf{n}\,dS,$$

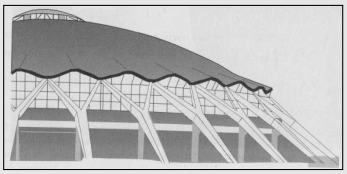
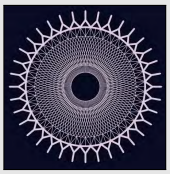
जहाँ $\mathbf{n}$ आर्द्र सतह का बाह्यमुखी इकाई अभिलंब है। ऊर्ध्वाधर घटक पर अपसरण प्रमेय (§R.1.2) लागू करने पर:

$$F_z = \iiint_V \frac{\partial p}{\partial z}\,dV = \iiint_V w\,dV = wV,$$

जो दर्शाता है कि परिणामी जलस्थैतिक बल ऊर्ध्वाधर, ऊर्ध्वमुखी और विस्थापित तरल के भार के समान है। उसकी कार्य-रेखा V के केंद्रक से गुजरती है और रैंकिन के उत्प्लावन-केंद्र से संपाती है।

19.2.12 उदाहरण 19.12: पालात्सेतो देल्लो स्पोर्ट; नेर्वी

Structure: An Architect's Approach
Howard, 1966, *Mécanique des structures*
Voldoire and Bamberger, 2008 और *Structures*
Schodek and Bechthold, 2014 से अनुकूलित।

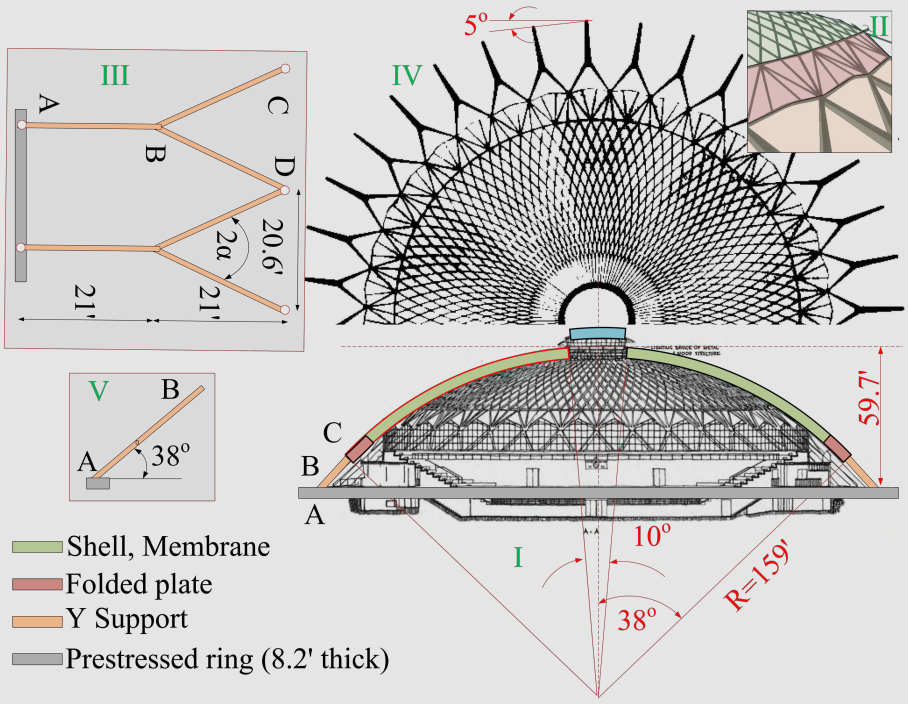




संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रसिद्ध *Palazetto dello Sport*[a] को पियर-लुइजी नेर्वी ने 1958 में रोम में आयोजित 1960 के ओलंपिक खेलों के लिए अभिकल्पित और निर्मित किया था। सौंदर्य, तकनीकी कौशल और निर्माण-विधि—तीनों दृष्टियों से यह चकित करने वाली संरचना थी। सुलिवन के मार्गदर्शक सिद्धांत के अनुरूप यहाँ “रूप कार्य का अनुसरण करता है” वास्तव में उत्सवित होता है।

ज्यामिति

इसमें एक गोलाकार गुंबद—न्यूनतम आघूर्ण/अपरूपण वाला झिल्ली-कवच—है, जिसे वलित पट्टिकाएँ—आनमन की दृष्टि से दृढ—समान रूप से सहारा देती हैं। ये पट्टिकाएँ समान भार को 36 Y-आकृति आधारों तक पहुँचाती हैं, जो आगे भार को तल पर पूर्वप्रतिबलित परिधीय वलय में संचारित करते हैं।



भार

गुंबद का भार[b] प्रति वर्ग फुट औसत भार से निर्धारित होता है। कवच और पसलियों को साथ लेकर, कंक्रीट का भार 150 lb/ft^3 होने पर 61 lb/ft^2 मिलता है; वर्मीक्यूलाइट ऊष्मारोधन और छत जोड़ने पर कुल मृत भार 80 lb/ft^2 होता है। कुपोला की छत का भार 40 lb/ft^2 लिया जाएगा। अक्षांश के दो वृत्तों के बीच गोले के क्षेत्र का क्षेत्रफल $\pi R^2(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)$ है, जहाँ ϕ_1 सह-अक्षांश कोण—उत्तरी ध्रुव अथवा गुंबद के शीर्ष से नीचे मापा गया कोण—है।

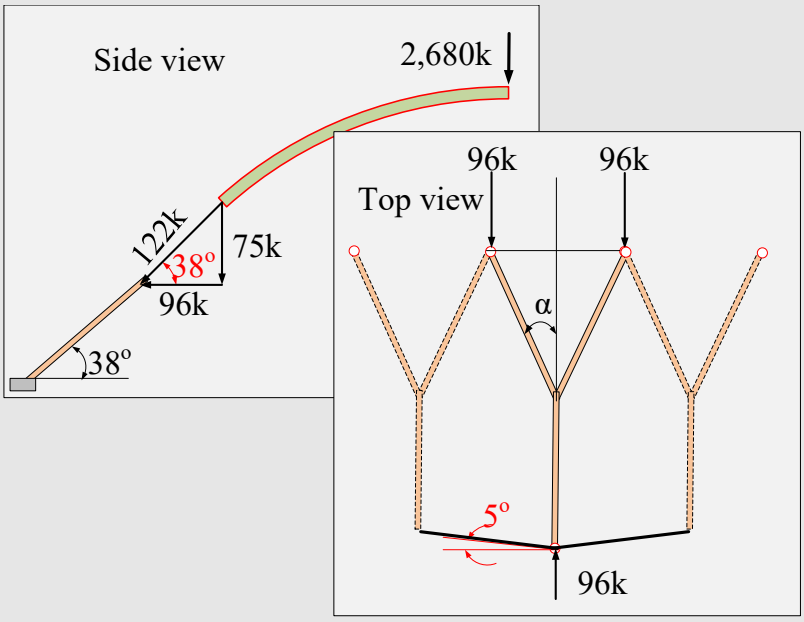
$$\begin{aligned} \text{Cupola} \quad & 2\pi(159)^2(\cos 0^\circ - \cos 5^\circ)(40)\ \text{psf} &&= 25\ \text{k} \\ \text{Shell} \quad & 2\pi(159)^2(\cos 5^\circ - \cos 38^\circ)(80)\ \text{psf} &&= 2,655\ \text{k} \end{aligned}$$

अतः कुल भार 2,680 kips है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बल

प्रत्येक प्रत्यालंब $N_{AB} = 2,655/36 \simeq 75$ kips वहन करेगा। निम्न मुक्त-पिंड आरेखों के अनुसार:



Y-आकृति आधार के शीर्ष पर संगत बल होंगे:

$$N_{AB} = \frac{75}{\sin 38°} = 122 \text{ k}; \quad N_{AB}^{\text{hor}} = \frac{75}{\tan 38°} = 96 \text{ k}$$

ज्यामिति से:

$$\tan \alpha = \frac{20.6}{21} \Rightarrow \alpha = 26°$$

अतः BC में अक्षीय बल होगा:

$$N_{BC} = \frac{122}{2} \frac{1}{\cos 26°} = 68 \text{ k}$$

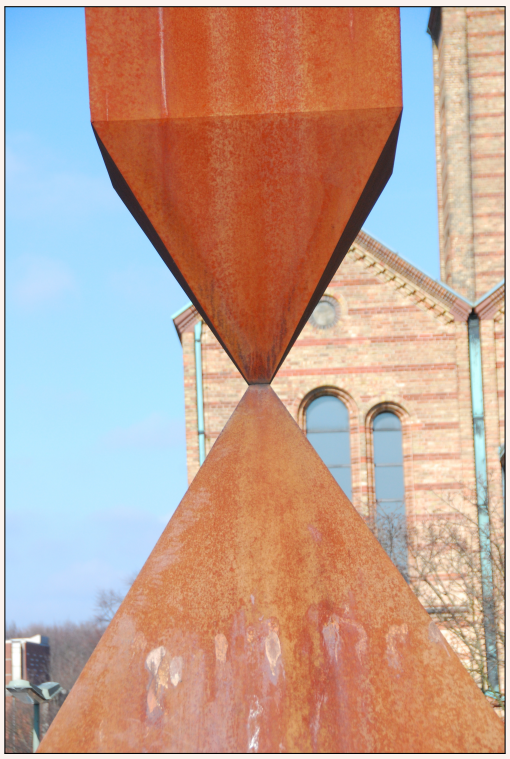
क्षैतिज घटक को संतुलित करने के लिए आवश्यक पूर्वप्रतिबलन बल N_p है:

$$N_p = \frac{N_{AB}^{\text{hor}}}{2 \sin 5°} = 550 \text{ k}$$

[a]उच्च विद्यालय के समय मैं इस प्रतिष्ठित संरचना में हैंडबॉल खेलता था, जिससे मेरा इससे अत्यंत निजी संबंध है।

[b]इस समस्या में बलों को निकटतम kip तक पूर्णांकित किया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Broken Obelisk, Barnett Newman, Berlin (2009)

यह अंतर्ज्ञान को चुनौती देता और संरचनात्मक संतुलन पर बल देता है—ठीक उसी प्रकार जैसे अभियांत्रिकी में आधार-प्रतिक्रियाएँ लागू भारों का प्रतिकार कर स्थिरता सुनिश्चित करती हैं।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

20 ट्रस

सारांश

यह अध्याय ट्रस विश्लेषण का विस्तृत विवेचन प्रस्तुत करता है। आरंभ में आधारभूत मान्यताओं, चिह्न-परिपाटियों तथा आंतरिक और बाह्य स्थैतिक अनिर्धार्यता की परिभाषाओं का परिचय दिया गया है। नियामक समीकरण केवल स्थैतिक संतुलन के समीकरण हैं। इसके पश्चात् तीन प्रमुख विश्लेषण विधियों—संधि-विधि, परिच्छेद-विधि और आव्यूह-विधि—का विवेचन किया गया है। स्पष्टता बढ़ाने और व्यावहारिक बोध सुगम बनाने के लिए प्रत्येक विधि को निदर्शी उदाहरणों सहित चरणबद्ध रूप से समझाया गया है।

20.1 परिचय 886
20.1.1 मान्यताएँ 886
20.1.2 चिह्न-परिपाटी 887
20.1.3 निर्धार्यता और स्थायित्व . . . 888
20.2 विश्लेषण-विधियाँ 889
20.2.1 संधि-विधि 889
20.3 परिच्छेद-विधि 897
20.3.1 परिच्छेद-विधि 897
20.3.2 उदाहरण 20.3: परिच्छेद-विधि . . 897
20.4 संधि/आव्यूह-विधि 898
20.4.1 उदाहरण 20.4: सरल ट्रस; संधि/आव्यूह-विधि 900
20.4.2 उदाहरण 20.5: जटिल ट्रस; संधि/आव्यूह-विधि 902

20.1 परिचय

1 ट्रस (truss) परस्पर संबद्ध त्रिभुजों के रूप में व्यवस्थित अवयवों—जो सामान्यतः सीधे होते हैं—से बनी संरचना है। अवयवों के सिरों को प्रायः ऐसी संधियों से जोड़ा जाता है जिन्हें पिन-संधि माना जाता है; ये कब्जे जैसी जोड़ियाँ आघूर्ण संचारित नहीं करतीं और ट्रस को विशिष्ट यांत्रिक रीति से व्यवहार करने देती हैं।

2 ट्रस के प्रकार चित्र 17.5 में दर्शाए गए हैं।

20.1.1 मान्यताएँ

3 ट्रस-अवयवों के बीच के संयोजनों को पिन-संधियाँ माना जाता है। इसका अर्थ है कि अवयव इस प्रकार जुड़े हैं कि वे केवल अक्षीय बल—तनाव अथवा संपीडन—संचारित कर सकते हैं और आघूर्ण संचारित नहीं करते। इस मान्यता के कारण प्रत्येक संधि का विश्लेषण द्विविमीय बल-तंत्र के नोड के रूप में किया जा सकता है, जिसमें प्रत्येक दिशा में बलों का योग शून्य होना चाहिए।

4 ट्रस-अवयव केवल अपनी लंबाई की दिशा में बल वहन करते माने जाते हैं। अर्थात् प्रत्येक अवयव या तो संपीडन में होता है या तनाव में; उसमें बंकन बलों पर विचार नहीं किया जाता। इससे प्रत्येक अवयव में विचारणीय प्रतिबल-घटकों की संख्या घटती है और विश्लेषण बहुत सरल हो जाता है।

5 भार—बल और आधार-प्रतिक्रियाएँ—केवल ट्रस की संधियों पर लगाए गए माने जाते हैं। यह मान्यता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अत्यंत महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि इससे अवयवों में बंकन आघूर्ण उत्पन्न नहीं होते और केवल अक्षीय बल वाली दूसरी मान्यता का पालन होता है।

6 यद्यपि बल-संचरण के लिए संधियों को पिन-संधि के रूप में प्रतिरूपित किया जाता है, अपने आयामों में उन्हें दृढ माना जाता है। अतः संधियों पर कोई विरूपण नहीं होता और जुडे अवयवों के बीच के कोणीय संबंध अपरिवर्तित रहते हैं।

7 अनेक ट्रस-विश्लेषणों में ट्रस-अवयवों के स्वयं के भार को उनके द्वारा वहन किए जाने वाले भारों की तुलना में प्रायः उपेक्षित किया जाता है। इससे गणनाएँ सरल होती हैं; तथापि व्यावहारिक अनुप्रयोगों में, विशेषकर बडे विस्तारों अथवा भारी पदार्थों के लिए, अवयवों का भार महत्त्वपूर्ण हो सकता है और उसे सम्मिलित करना आवश्यक है।

8 प्रभावी भार-वहन संरचनाओं के रूप में ट्रसों की उपयोगिता पुलों, छतों और बडे विस्तार अपेक्षित करने वाले अन्य संरचनात्मक रूपों में उनके व्यापक प्रयोग से स्पष्ट है।

9 संकल्पनात्मक रूप से ट्रस को दो आधारों के बीच फैले विशाल धरन के समान समझा जा सकता है। यह उपमा ट्रस की कार्यप्रणाली समझने में सहायक है। धरन की भाँति ट्रस अपने ऊपर लगाए गए भारों को सिरों के आधारों तक वितरित करता है। किंतु ठोस धरन के विपरीत, ट्रस परस्पर संबद्ध त्रिभुजी विन्यासों द्वारा यही कार्य पदार्थ की दृष्टि से कहीं अधिक दक्षतापूर्वक करता है। ये त्रिभुज संपूर्ण संरचना में बलों के वितरण में सहायक होते हैं और भार न्यूनतम रखते हुए सामर्थ्य अधिकतम करते हैं।

10 ट्रस की ऊपरी जीवाएँ सामान्यतः संपीडन में होती हैं। ये ट्रस के शीर्ष पर स्थित क्षैतिज अथवा ढलवाँ अवयव हैं, जो एक सिरे से दूसरे सिरे तक फैले होते हैं।

11 इसके विपरीत, ट्रस की निचली जीवाएँ तनाव में होती हैं। ये अवयव ट्रस के तल पर स्थित होते हैं और ऊपरी जीवाओं के समांतर चलते हैं।

12 ट्रस के विकर्ण अवयव, उनके अभिविन्यास और ट्रस की समग्र ज्यामिति के अनुसार, तनाव अथवा संपीडन में हो सकते हैं। ये विकर्ण ऊपरी और निचली जीवाओं के बीच भार संचारित करने तथा ट्रस की संरचनात्मक अखंडता बनाए रखने के लिए अत्यंत महत्त्वपूर्ण हैं। किसी विकर्ण में बल की दिशा और परिमाण भार-वितरण तथा ट्रस के विशिष्ट प्रकार पर निर्भर करते हैं। उदाहरणार्थ, किसी सामान्य प्रैट ट्रस में ऊर्ध्वाधर अवयव संपीडन और विकर्ण अवयव तनाव वहन करते हैं।

20.1.2 चिह्न-परिपाटी

13 तनाव धनात्मक और संपीडन ऋणात्मक लिया जाता है। ट्रस पर अक्षीय बलों को संधियों पर कार्यरत बलों के रूप में दर्शाया जाता है।

14 मूल समीकरण

$$\text{Stress-Force: } \sigma = \frac{P}{A}$$
$$\text{Stress-Strain: } \sigma = E\varepsilon$$
$$\text{Force-Displacement: } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \qquad \text{Equilibrium: } \Sigma \mathbf{F} = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

20.1.3 निर्धार्यता और स्थायित्व

15 किसी ट्रस के अवयवों के आंतरिक बल यदि केवल स्थैतिक संतुलन के समीकरणों से निर्धारित किए जा सकें, तो ट्रस को स्थैतिकतः निर्धार्य कहा जाता है। समतलीय ट्रसों के लिए ये समीकरण बताते हैं कि क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशाओं में बलों का योग तथा किसी भी बिंदु के परितः आघूर्णों का योग अलग-अलग शून्य होना चाहिए।

16 यदि m अवयवों की संख्या, r प्रतिक्रिया-बलों की संख्या और j संधियों की संख्या है, तो कुल $m + r$ अज्ञात और स्थैतिकी के $2j$ (अथवा $3j$) समीकरण होंगे—प्रत्येक 2D अथवा 3D संधि पर क्रमशः इतने समीकरण। यदि स्थैतिकी के पर्याप्त समीकरण न हों तो समस्या अनिर्धार्य है; यदि समीकरण बहुत अधिक हों तो ट्रस अस्थिर है, सारणी 20.1।

17 आधार-प्रतिक्रियाओं के संबंध में कोई ट्रस स्थैतिकतः अथवा बाह्यतः निर्धार्य या अनिर्धार्य हो सकता है (क्रमशः 3 अथवा 6 से अधिक प्रतिक्रियाएँ, 2D अथवा 3D समस्याओं में)।

18 कोई ट्रस आंतरिकतः भी निर्धार्य अथवा अनिर्धार्य हो सकता है, सारणी 20.1।

	2D	3D
स्थैतिक अनिर्धार्यता		
बाह्य	$r > 3$	$r > 6$
आंतरिक	$m + r > 2j$	$m + r > 3j$
अस्थिर	$m + r < 2j$	$m + r < 3j$

तालिका 20.1: ट्रसों की स्थैतिक निर्धार्यता और स्थायित्व

19 यदि $m < 2j - 3$ (2D में), तो ट्रस आंतरिकतः स्थिर नहीं है और आधारों से अलग किए जाने पर वह दृढ पिंड नहीं बना रहेगा। तथापि आधारों से जुडा होने पर ट्रस दृढ रहेगा।

20 आधार-प्रतिक्रियाएँ परिभाषा 19.1 (पृ. 19.1.2) में दर्शाए गए उपयुक्त संतुलन-समीकरणों द्वारा निर्धारित की जा सकती हैं। सारणी 20.2 प्रयोज्य संतुलन-समीकरणों का सार प्रस्तुत करती है।

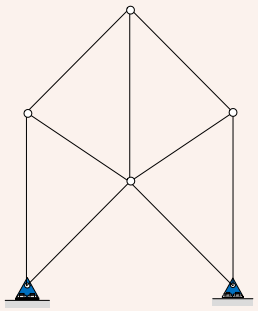
तालिका 20.2: ट्रसों के लिए प्रयोज्य संतुलन-समीकरण

	आधार-प्रतिक्रियाएँ	नोडीय संतुलन
2D	ΣF_X, ΣF_Y, ΣM_Z,	ΣF_X, ΣF_Y
3D	ΣF_X, ΣF_Y, ΣF_Z, ΣM_X, ΣM_Y, ΣM_Z	ΣF_X, ΣF_Y, ΣF_Z

21 चित्र 20.1 के ट्रस में 4 आधार-प्रतिक्रियाएँ हैं; अतः वह बाह्यतः अनिर्धार्य है। उसमें 6 संधियाँ ($j = 6$), 4 प्रतिक्रियाएँ ($R = 4$) और 9 अवयव ($m = 9$) भी हैं। इस प्रकार कुल $m + R = 9 + 4 = 13$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

अज्ञात तथा संतुलन के $2 \times j = 2 \times 6 = 12$ समीकरण हैं; अतः ट्रस आंतरिकतः भी स्थैतिक अनिर्धार्य है।



चित्र 20.1: स्थैतिकतः अनिर्धार्य ट्रस

स्थैतिकतः निर्धार्य ट्रसों के विश्लेषण की विधियाँ हैं:

1. संधि-विधि
2. परिच्छेद-विधि
3. आव्यूह-विधि

20.2 विश्लेषण-विधियाँ

20.2.1 संधि-विधि

संधि-विधि (method of joints) में ट्रस की प्रत्येक संधि का विश्लेषण करके ट्रस-अवयवों के आंतरिक अक्षीय बल निर्धारित किए जाते हैं। इसके चरण हैं:

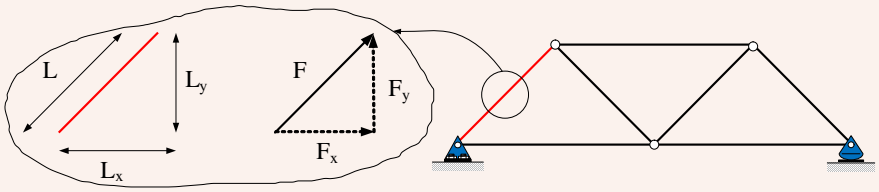
1. निर्धारित करें कि संरचना स्थैतिकतः निर्धार्य है अथवा नहीं।
2. सभी आधार-प्रतिक्रियाओं की गणना करें।
3. सभी संधि-भारों—आधार-प्रतिक्रियाओं सहित—को दर्शाने वाला मुक्त-पिंड आरेख बनाएँ।
4. प्रत्येक संधि पर, भारित संधियों से आरंभ करते हुए, उपयुक्त संतुलन-समीकरण लागू करें (2D में ΣF_x और ΣF_y; 3D में ΣF_x, ΣF_y और ΣF_z)।
5. क्योंकि ट्रस-अवयव केवल अक्षीय बल वहन कर सकते हैं, परिणामी बल ($\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$) अवयव की दिशा में होना चाहिए, चित्र 20.2।

$$\frac{F}{L} = \frac{F_x}{L_x} = \frac{F_y}{L_y}$$

6. सामान्यतः पहले आधार-प्रतिक्रियाओं की गणना करना सर्वोत्तम है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

7. इसके बाद ऐसी संधि पर जाएँ जहाँ दो से अधिक अज्ञात बल न हों; यह प्रायः ट्रस की सीमा पर स्थित होती है।
8. प्रत्येक संधि पर स्थैतिक संतुलन के समीकरण लागू करें।
9. इन समीकरणों को हल करके संलग्न अवयवों के बल निर्धारित करें; धनात्मक मान तनाव और ऋणात्मक मान संपीडन दर्शाते हैं।
10. किसी अवयव-बल के x और y घटकों (F_x, F_y) का सदैव अभिलेख रखें, क्योंकि उस अवयव से जुड़ी किसी अन्य संधि के बल-संतुलन पर विचार करते समय इनकी आवश्यकता पड़ सकती है, चित्र 20.2।



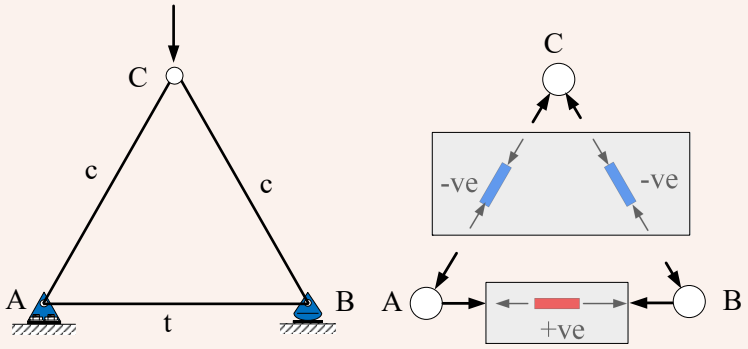
चित्र 20.2: बलों और लंबाइयों के बीच संबंध

11. अगली संधि पर जाएँ और सभी अवयव-बल निर्धारित हो जाने तक प्रक्रिया दोहराएँ।

यह विधि छोटे ट्रसों के लिए अथवा प्रत्येक अवयव की विस्तृत जानकारी अपेक्षित होने पर विशेष रूप से प्रभावी है।

[24] ट्रस-विश्लेषण में कोई निश्चित चिह्न-परिपाटी नहीं होती। किसी अवयव को तनाव (अथवा संपीडन) में माना जाता है। विश्लेषण के बाद बल ऋणात्मक निकले तो इसका अर्थ है कि आरंभिक मान्यता विपरीत थी और अवयव वास्तव में संपीडन (अथवा तनाव) में है।

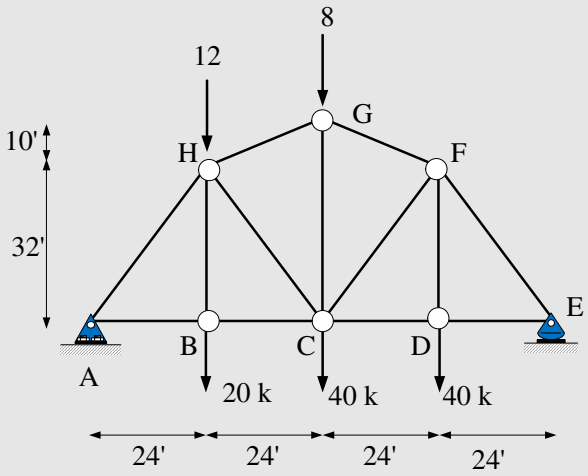
[25] मुक्त-पिंड आरेख पर आंतरिक बलों को अवयव पर अंत्य बलों के रूप में नहीं, बल्कि संधियों पर कार्यरत तीरों से दर्शाया जाता है। तनाव के लिए तीर संधि से बाहर की ओर और संपीडन के लिए संधि की ओर संकेत करता है, चित्र 20.3।



चित्र 20.3: बलों का तीरों द्वारा निरूपण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

20.2.1.1 उदाहरण 20.1: ट्रस-विश्लेषण; संधि-विधि

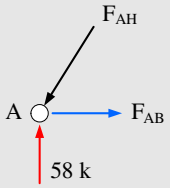


1. $R = 3$, $m = 13$, $2j = 16$, और $m + R = 2j$✓
2. आधार-प्रतिक्रियाओं की गणना करें:

$$
\begin{aligned}
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^E = 0; \quad &\Rightarrow \quad (20+12)(3)(24) + (40+8)(2)(24) + (40)(24) \\
&\quad -R_{A_y}(4)(24) = 0 \Rightarrow R_{A_y} = 58 \text{ kip } \uparrow \\
(+\downarrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad 20 + 12 + 40 + 8 + 40 - 58 - R_{E_y} = 0 \\
&\Rightarrow \quad R_{E_y} = 62 \text{ kip } \uparrow
\end{aligned}
$$

3. प्रत्येक संधि पर अलग-अलग विचार करें:

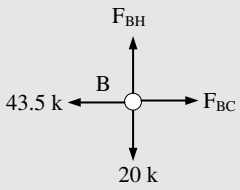
नोड A: स्पष्टतः AH संपीडन और AB तनाव में है।



$$
\begin{aligned}
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad -F_{AH_y} + 58 = 0 \\
&\quad F_{AH} = \tfrac{l}{l_y}(F_{AH_y}) \\
&\quad l_y = 32; l = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40 \\
&\Rightarrow \quad F_{AH} = \tfrac{40}{32}(58) = 72.5 \text{ kip C} \\
(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \quad &\Rightarrow \quad -F_{AH_x} + F_{AB} = 0 \\
&\quad F_{AB} = \tfrac{L_x}{L_y}(F_{AH_y}) = \tfrac{24}{32}(58) = 43.5 \text{ kip T}
\end{aligned}
$$

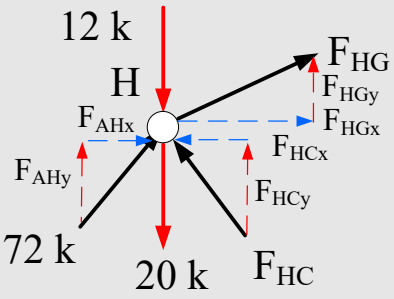
नोड B:

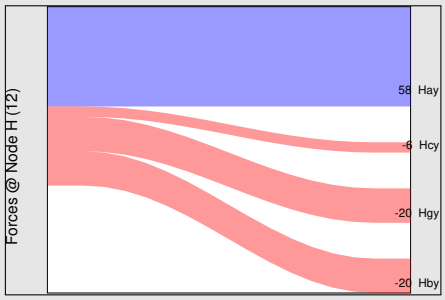
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 43.5 \text{ kip T}$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad \Rightarrow \quad F_{BH} = 20 \text{ kip T}$$

नोड H:





मुक्त-पिंड आरेख के अतिरिक्त दाहिना चित्र नोड H पर "भार-पथ" दर्शाता है[a] अर्थात् नोड H पर ऊर्ध्वाधर बलों का "प्रवाह"।

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{AH_x} - F_{HC_x} + F_{HG_x} = 0$$
$$\Rightarrow 43.5 - \frac{24}{\sqrt{24^2+32^2}}(F_{HC}) + \frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}}(F_{HG}) = 0$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow F_{AH_y} + F_{HC_y} - 12 + F_{HG_y} - 20 = 0$$
$$\Rightarrow 58 + \frac{32}{\sqrt{24^2+32^2}}(F_{HC}) - 12 + \frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}}(F_{HG}) - 20 = 0$$

इसे सर्वाधिक सुविधाजनक रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

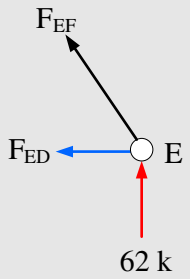
$$\begin{bmatrix} 0.6 & -0.921 \\ -0.8 & -0.385 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43.5 \\ 26.0 \end{Bmatrix}$$

हल करने पर $F_{HC} = -7.5$ और $F_{HG} = -52$ प्राप्त होते हैं। अतः नोड H के मुक्त-पिंड आरेख में की गई मान्यता विपरीत थी और अंतिम उत्तर है:

$$F_{HC} = 7.5 \text{ kip T}$$
$$F_{HG} = 52 \text{ kip C}$$

नोड E:

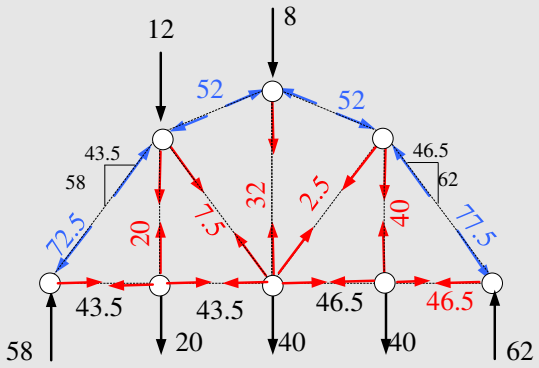
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



$$\Sigma F_y = 0; \Rightarrow F_{EF_y} = 62 \Rightarrow F_{EF} = \frac{\sqrt{24^2 + 32^2}}{32}(62) = 77.5 \text{ kip C}$$

$$\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{ED} = F_{EF_x} \Rightarrow F_{ED} = \frac{24}{32}(F_{EF_y}) = \frac{24}{32}(62) = 46.5 \text{ kip T}$$

इस विश्लेषण के परिणामों का सार नीचे दिया गया है:

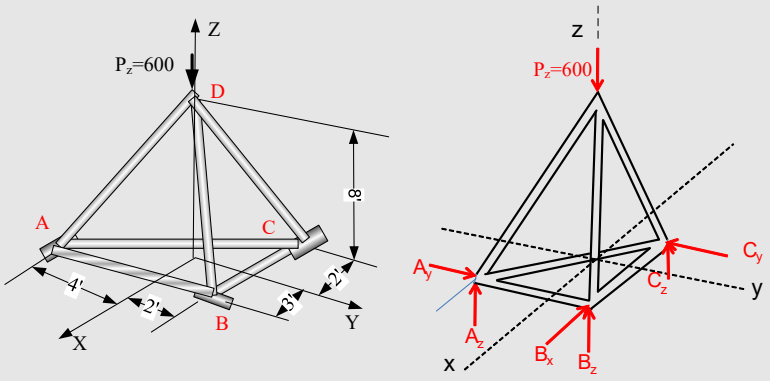


पूर्व में उपयोग न किए गए किसी नोड, जैसे D, पर बल-संतुलन सत्यापित करके गणनाओं की जाँच की जा सकती है।

[a]यह तथाकथित *जलोढ़ आरेख* (alluvial diagram) है।

20.2.1.2 उदाहरण 20.2: 3D ट्रस

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



$A(3,-4,0)$, $B(3,2,0)$, $C(-2,2,0)$, और $D(0,0,8)$। x अथवा y दिशा में कोई आधार-प्रतिक्रिया नहीं है—संरचना बर्फ पर है और कोई पार्श्व भार नहीं है।

प्रक्रिया

निम्न को क्रमशः हल करें:

1. आधार-प्रतिक्रियाएँ

$$\Sigma M_{AB} = 0 \Rightarrow C_z\checkmark$$
$$\Sigma M_{CB} = 0 \Rightarrow A_z\checkmark$$
$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow B_z = 40.0\checkmark$$
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x\checkmark$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y\checkmark; C_y\checkmark$$

2. संधि B

$$L_{BD}$$
$$\Sigma F_z = 0; \Rightarrow F_{BD}\checkmark$$
$$F^x_{BD}$$
$$F^y_{BD}$$
$$\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{BA}\checkmark$$

3. संधि A

$$\alpha\checkmark$$
$$L_{AD}\checkmark$$
$$\Sigma F_z = 0; F_{AD}\checkmark$$
$$\Sigma F_x = 0; F_{AC}\checkmark$$

4. संधि C

$$F^Z_{CD}\checkmark$$
$$\Sigma F_Z = 0 \Rightarrow F_{CD}\checkmark$$

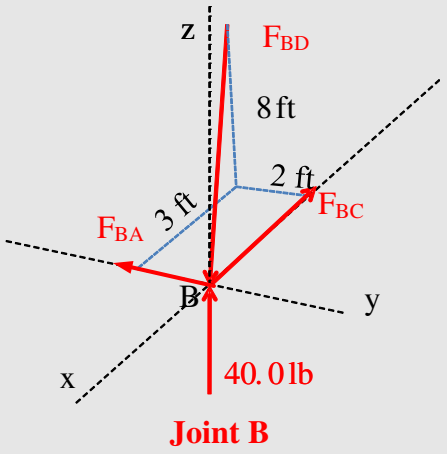
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हल

1. संपूर्ण ट्रस के मुक्त-पिंड आरेख पर विचार करते हुए:

$$\Sigma M_{AB} = 0; C_z(5) - 600(3) = 0 \Rightarrow C_z = 360$$
$$\Sigma M_{CB} = 0; 600(2) - A_z(6) = 0 \Rightarrow A_z = 200$$
$$\Sigma F_z = 0; B_z + 200 + 360 - 600 = 0 \Rightarrow B_z = 40.0$$
$$\Sigma F_x = 0; B_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0; A_y - C_y = 0$$
$$\Sigma M_z = 0; A_y(3) + C_y(2) = 0; \Rightarrow A_y = C_y = 0$$

2. संधि B

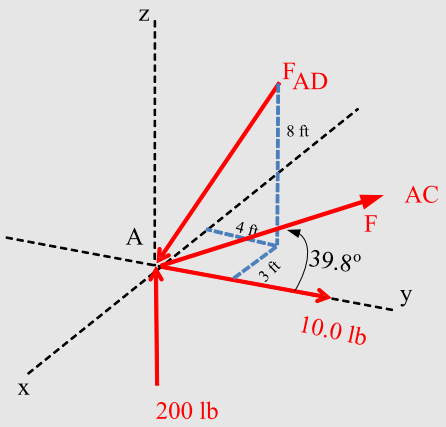


Joint B

$$L_{BD} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{77}$$
$$\Sigma F_z = 0; \frac{-8}{\sqrt{77}} F_{BD} + 40 = 0; \Rightarrow F_{BD} = 43.87 \text{lbf (C)}$$
$$\Sigma F_x = 0; F_{BD}^x - F_{BC} = 0$$
$$F_{BD}^x = \frac{L_x}{L} F_{BD} = \frac{3}{\sqrt{77}}(43.87)$$
$$F_{BC} = 15.0 \text{lbf (T)}$$
$$\Sigma F_y = 0; F_{BD}^y - F_{BA} = 0$$
$$F_{BD}^y = \frac{L_x}{L} F_{BD} = \frac{2}{\sqrt{77}}(43.87)$$
$$F_{BA} = 10.0 \text{lbf (T)}$$

3. संधि A

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



$$\tan(\alpha) = \frac{L_x}{L_y} = \frac{5}{6} \Rightarrow \alpha = 39.8\,\text{deg}$$

$$L_{AD} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{8^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{89}$$

$$\Sigma F_z = 0; \frac{-8}{\sqrt{89}} F_{AD} + 200 = 0 \Rightarrow F_{AD} = 236\text{lbf (C)}$$

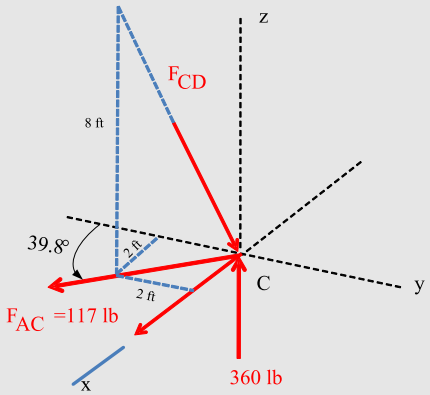
$$\Sigma F_x = 0; F_{AD}^X - F_{AC}^X = 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{89}}(235.9) - F_{AC}\sin(39.8°) = 0 \Rightarrow F_{AC} = 117\text{lbf (T)}$$

जाँच:

$$\Sigma F_y = 0 F_{AC}^Y - F_{AD}^Y + 10 = 0$$

$$117.2\cos(39.81^o) - \frac{4}{\sqrt{89}}(235.9) + 10.0 = 0 \checkmark$$

4. संधि C



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\Sigma F_Z = 0; F_{CD}^Z + 360 = 0$$
$$\frac{-8}{\sqrt{72}} F_{CD} + 360 = 0$$
$$F_{CD} = 382\text{lbf (C)}$$

20.3 परिच्छेद-विधि

20.3.1 परिच्छेद-विधि

26 *परिच्छेद-विधि* (method of sections) विशिष्ट अवयवों के बल ज्ञात करने की अधिक त्वरित विधि है और बड़े ट्रसों के लिए विशेष रूप से उपयोगी है। इसके चरण हैं:

1. संपूर्ण ट्रस के संतुलन का उपयोग करके ट्रस-आधारों की प्रतिक्रियाओं की गणना करना।
2. ऐसा परिच्छेद चुनना जो अज्ञात बलों वाले तीन से अधिक अवयवों को न काटे। इस परिच्छेद को ट्रस को दो भागों में विभाजित करना चाहिए।
3. ट्रस के एक भाग का विश्लेषण करना और यह सुनिश्चित करना कि वह स्थैतिकतः निर्धार्य हो।
4. परिच्छेद पर संतुलन-समीकरण लागू करना।
5. इन समीकरणों को हल करके परिच्छेद द्वारा काटे गए अवयवों के बल निर्धारित करना।

27 किसी विशिष्ट बिंदु—सामान्यतः 2 काटे गए अवयवों के प्रतिच्छेदन—के परितः आघूर्णों का योग लेने से अन्य अवयव-बल निर्धारित किए जा सकते हैं।

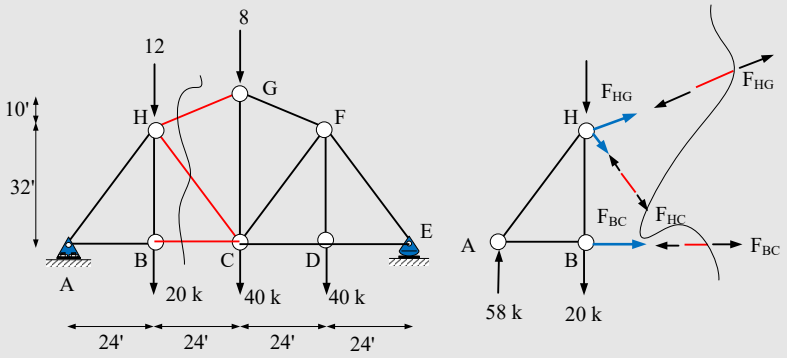
28 ढलवाँ अवयवों के बल निर्धारित करने के लिए सामान्यतः बलों के योग का उपयोग किया जाता है।

20.3.2 उदाहरण 20.3: परिच्छेद-विधि

इस समस्या में पूर्ववर्ती उदाहरण के F_{BC} और F_{HG} निर्धारित करने हैं। HG, HC और BC अवयवों को काटते हुए पहले H के सापेक्ष आघूर्णों का योग लेते हैं:

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Cut through the members, but in drawing FBD, remove them and just show nodal forces

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^H = 0 \Rightarrow R_{A_y}(24) - F_{BC}(32) = 0$$

$$F_{BC} = \frac{24}{32}(58) = 43.5 \quad \text{kip, T}$$

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^C = 0;$$

$$\Rightarrow (58)(24)(2) - (20+12)(24) - F_{HG_x}(32) - F_{HG_y}(24) = 0$$

$$2784 - 768 - (32)(F_{HG})\frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}} - (24)(F_{HG})\frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}} = 0$$

$$2,000 - (29.5)F_{HG} - (9.2)F_{HG} = 0$$

$$\Rightarrow F_{HG} = 52 \text{ kip C}$$

20.4 संधि/आव्यूह-विधि

29 यह मूलतः आव्यूह-रूप में व्यक्त संधि-विधि ही है, किंतु बहुत अधिक समर्थ रूप में। सरलतः, सभी नोडों पर संतुलन के सभी समीकरण लिखे जाते हैं और फिर उन्हें आव्यूह-रूप में व्यवस्थित किया जाता है।

30 अतः वह स्थैतिकी आव्यूह $\mathcal{B}$ निर्धारित करना है जो वैश्विक निर्देशांकों में ट्रस के सभी नोडीय बलों के सदिश $\{\mathbf{P}\}$ को सभी अज्ञात बलों—स्थानीय निर्देशांक तंत्र में अवयवों के आंतरिक बल और संरचना की बाह्य आधार-प्रतिक्रियाएँ—से संबद्ध करता है, §46.2.1.2।

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{FF} & \mathcal{B}_{FR} \\ \mathcal{B}_{RF} & \mathcal{B}_{RR} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}} + \underbrace{\{P\}}_{\mathbf{P}} = 0$$

अथवा

$$\text{Internal Forces-External Forces=0}$$

और $\mathcal{B}$—स्थैतिकी आव्यूह—को एक "भौतिक तंत्र", $\mathbf{F}$ को "अनुक्रिया" तथा $\mathbf{P}$ को "प्रेरक फलन" समझा जा सकता है।

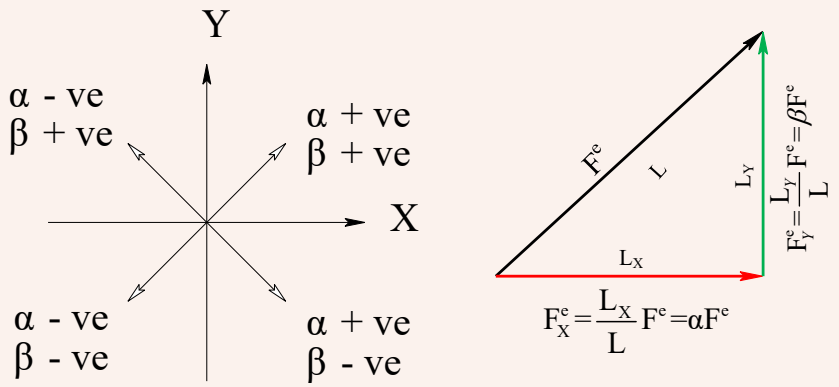
31 इस विधि को इस प्रकार संक्षेपित किया जा सकता है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. निर्देशांक तंत्र चुनें।
2. संधियों और अवयवों को अलग-अलग क्रमांकित करें।
3. मान लें कि:
   (a) सभी अवयव-बल धनात्मक अर्थात् तनाव में हैं।
   (b) सभी आधार-प्रतिक्रियाएँ धनात्मक हैं।
4. प्रत्येक नोड j पर और प्रत्येक अवयव e के लिए दिशा-कोज्याएँ निर्धारित करें, चित्र 20.4a:

$$\alpha_j^e = \frac{L_x}{L}$$
$$\beta_j^e = \frac{L_y}{L}$$

   अवयव e, जो संधि i को j से जोड़ता है, उसके लिए $\alpha_i^e = -\alpha_j^e$ और $\beta_i^e = -\beta_j^e$ होंगे तथा आव्यूह $[B]$ में $2j$ पंक्तियाँ और $m + r$ स्तंभ होंगे। इसका व्युत्क्रम केवल सममित होने पर निकाला जा सकता है—अर्थात् $2j = m + r$, स्थैतिकतः निर्धार्य।
5. प्रत्येक संधि j पर दो संतुलन-समीकरण अज्ञातों—अवयव-बलों और आधार-प्रतिक्रियाओं—के पदों में लिखें।



(a) दिशा-कोज्याएँ (b) संधि-बल

चित्र 20.4: संधि/आव्यूह-विधि: संधि के मुक्त-पिंड आरेख

$$(+\rightarrow)\, \Sigma F_x = 0; \Rightarrow \Sigma_{e=1}^{\#\text{ of elements}} \alpha_j^e F_e + R_{x_j} + P_{x_j} = 0$$
$$(+\uparrow)\, \Sigma F_y = 0; \Rightarrow \Sigma_{e=1}^{\#\text{ of elements}} \beta_j^e F_e + R_{y_j} + P_{y_j} = 0$$

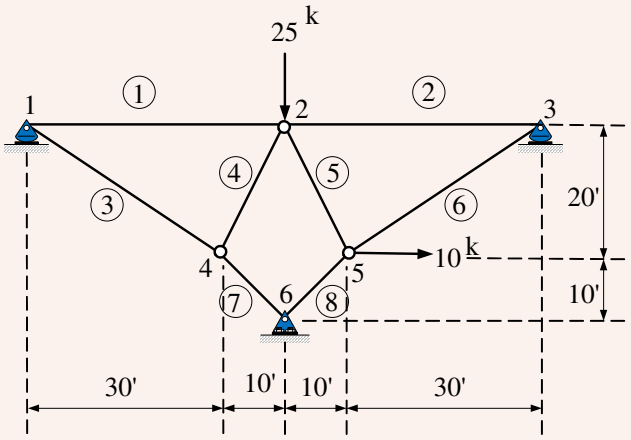
6. $\{F\}$ और $\{R\}$ की गणना के लिए आव्यूह का व्युत्क्रम निकालें।

इसका MATLAB®कूट-कार्यान्वयन §I.1.1 में दिया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

32 इस विधि का लाभ यह है कि $[\mathcal{B}]$ आव्यूह का व्युत्क्रम एक बार निकाल लेने पर उसी संरचना का विभिन्न भार-स्थितियों के लिए पुनर्विश्लेषण सहजता से किया जा सकता है। नए अभिकल्प संहिताओं में मृत भार और चल भार को अलग-अलग गुणांकित किया जाता है (अध्याय 36); अतः यह विधि पुनर्विश्लेषण का पर्याप्त प्रयास बचा सकती है। इसके अतिरिक्त, जब विक्षेप आभासी बल-विधि (अध्याय 24) द्वारा निर्धारित किए जाते हैं, तब दोनों विश्लेषण—वास्तविक भार और इकाई आभासी भार—सहजता से किए जा सकते हैं।

33 कुछ स्थैतिकतः निर्धार्य ट्रस ऐसे होते हैं जिनका हल पूर्ववर्ती दोनों विधियों से सहज नहीं है; उनके विश्लेषण के लिए यही उपयुक्त विधि हो सकती है, चित्र 20.5।

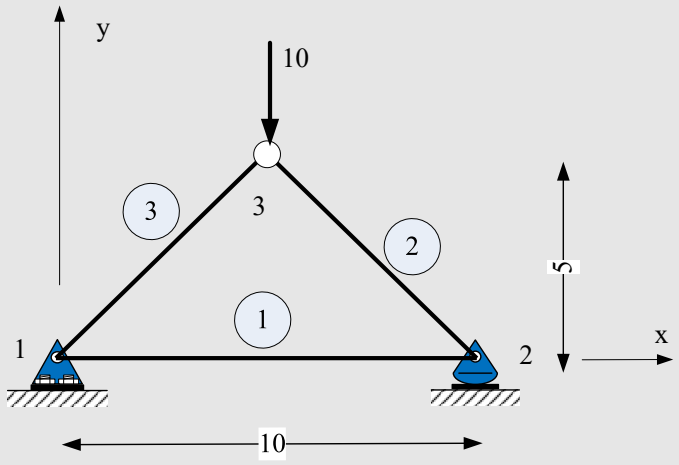


चित्र 20.5: जटिल स्थैतिकतः निर्धार्य ट्रस

20.4.1 उदाहरण 20.4: सरल ट्रस; संधि/आव्यूह-विधि

निम्न ट्रस के सभी अवयव-बल निर्धारित करें:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



1. पहले दिशा-कोज्याएँ निर्धारित करते हैं:

अवयव	नोड	α	β	α	β
1	1-2	नोड 1		नोड 2	
		$\alpha_1^1 = 1$	$\beta_1^1 = 0$	$\alpha_2^1 = -1$	$\beta_2^1 = 0$
2	2-3	नोड 2		नोड 3	
		$\alpha_2^2 = -.7071$	$\beta_2^2 = .707$	$\alpha_3^2 = .707$	$\beta_3^2 = -.707$
3	3-1	नोड 3		नोड 1	
		$\alpha_3^3 = -.707$	$\beta_3^3 = -.707$	$\alpha_1^3 = .707$	$\beta_1^3 = .707$

2. इसके बाद संतुलन-समीकरण लिखते हैं:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & R_{1x} & R_{1y} & R_{2y} \end{matrix} \\
\text{Node 1} & \Sigma F_x = 0 & \left[\begin{matrix} \alpha_1^1 & 0 & \alpha_1^3 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right. \\
 & \Sigma F_y = 0 & \left.\begin{matrix} \beta_1^1 & 0 & \beta_1^3 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right. \\
\text{Node 2} & \Sigma F_x = 0 & \left[\begin{matrix} \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right. \\
 & \Sigma F_y = 0 & \left.\begin{matrix} \beta_2^1 & \beta_2^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. \\
\text{Node 3} & \Sigma F_x = 0 & \left[\begin{matrix} 0 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right. \\
 & \Sigma F_y = 0 & \left.\begin{matrix} 0 & \beta_3^2 & \beta_3^3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]
\end{array}
\underbrace{\left\{\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{matrix}\right\}}_{\{F\}}
+
\underbrace{\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{matrix}\right\}}_{\{P\}}
= 0
$$

प्रारूप प्रति

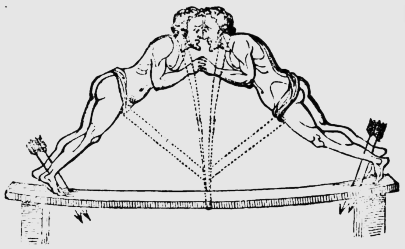
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

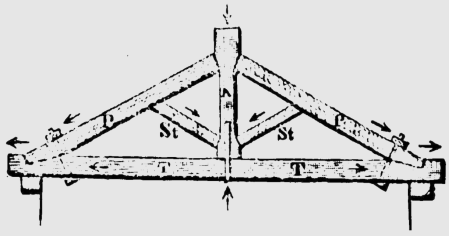
अथवा

$$
\begin{array}{lll}
\text{Node 1} & \Sigma F_x = 0 \\
& \Sigma F_y = 0 \\
\text{Node 2} & \Sigma F_x = 0 \\
& \Sigma F_y = 0 \\
\text{Node 3} & \Sigma F_x = 0 \\
& \Sigma F_y = 0
\end{array}
\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & .707 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & .707 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & -.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & .707 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & .707 & -.707 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -.707 & -.707 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]}_{[\mathcal{B}]}
\underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{array}\right\}}_{\{F\}}
+
\underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{array}\right\}}_{\{P\}}
= 0
$$

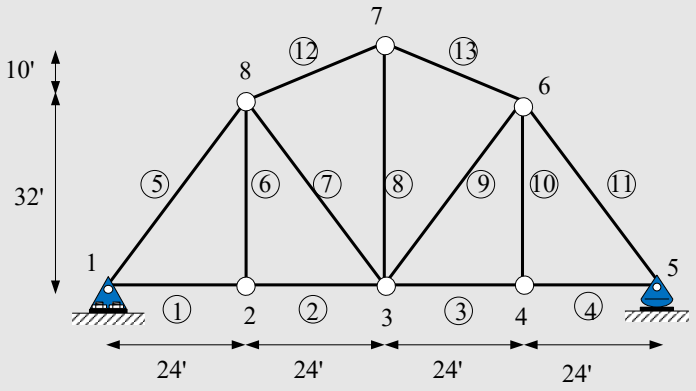
$[\mathcal{B}]$ का व्युत्क्रम लेने पर $F = -[\mathcal{B}]^{-1}P$ से प्राप्त होता है:

$$
\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \hline R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{array}\right\}
=
\left\{\begin{array}{c} 5 \\ -7.07 \\ -7.07 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{array}\right\}
$$





20.4.2 उदाहरण 20.5: जटिल ट्रस; संधि/आव्यूह-विधि



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. दिशा-कोज्याएँ निर्धारित करें:

$$\frac{24}{\sqrt{24^2+32^2}} = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$\frac{32}{\sqrt{24^2+32^2}} = \frac{4}{5} = 0.8$$
$$\frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}} = \frac{10}{26} = 0.38$$
$$\frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}} = \frac{24}{26} = 0.92$$

2. $\mathcal{B}$ आव्यूह स्थापित करें:

$$\begin{array}{ll}
\#\,1 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#\,2 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#\,3 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#\,4 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#\,5 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#\,6 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#\,7 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#\,8 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y
\end{array}
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & & & & .6 & & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & .8 & & & & & & & & & & 1 & \\
\hline
-1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
\hline
 & -1 & 1 & & & & -.6 & & .6 & & & & & & & \\
 & & & & & & .8 & 1 & .8 & & & & & & & \\
\hline
 & & -1 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & -1 & & & & & & & -.6 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & .8 & & & & 1 & \\
\hline
 & & & & & & & & -.6 & & .6 & & -.92 & & & \\
 & & & & & & & & -.8 & -1 & -.8 & & .38 & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & -.92 & .92 & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & -.38 & -.38 & & & \\
\hline
 & & & & -.6 & & .6 & & & & & .92 & & & & \\
 & & & & -.8 & -1 & -.8 & & & & & .38 & & & &
\end{array}\right]}_{[\mathbf{B}]}
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}
F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ \hline R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{5_y}
\end{array}\right\}}_{?}
+
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -20 \\ \hline 0 \\ -40 \\ \hline 0 \\ -40 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -8 \\ \hline 0 \\ -12
\end{array}\right\}}_{\checkmark}
= 0$$

3. व्युत्क्रम निकालें (*Mathematica* का उपयोग करके):

```
b={
{ 1, 0., 0.,  0.,0.6,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   1, 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,0.8,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,  0., 1,  0.},
{-1, 1,  0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,  0., 0., 0.},
{0.,0.,  0.,  0.,  0.,   1,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,  0., 0., 0.},
{0.,-1,   1,  0.,  0.,  0.,-0.6, 0.,  0.6, 0.,  0.,   0.,  0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0., 0.8, 1.,  0.8, 0.,  0.,   0.,  0., 0., 0.},
{0., 0., -1,   1,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,  0.,   0.,  0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 1.,  0.,   0.,  0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  -1,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,-0.6,   0.,  0., 0., 0.},
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0., 0.8,   0.,   0., 0., 0., 1.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0., -0.6, 0., 0.6,   0.,-0.92, 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0., -0.8,-1.,-0.8,   0., 0.38, 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,  0.,-0.92, 0.92, 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., -1,   0., 0.,  0.,-0.38,-0.38, 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0., -0.6, 0., 0.6, 0.,   0., 0.,  0., 0.92,   0., 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,-0.8, -1,-0.8, 0.,   0., 0.,  0., 0.38,   0., 0., 0., 0.}
}
p={0, 0, 0, -20,  0, -40 ,  0, -40,  0, 0,  0, 0, 0, -8,  0, -12}
m=Inverse[b].p
```

4. अंतिम परिणाम
   Out[3]= -43.5, -43.5, -46.5, -46.5, 72.5, -20., -7.66598, -31.7344, -2.66598, -40., 77.5, 52.2822, 52.2822, -1.22125 10 , -58., -62.
   ये मान अज्ञात अवयव-आंतरिक बलों और बाह्य आधार-प्रतिक्रियाओं के अनुरूप हैं।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Anselm Kiefer, Daath (1990)

दृढ, किंतु परस्पर संबद्ध अवयव रूपकतः दर्शाते हैं कि त्रिभुजीकरण द्वारा ट्रस किस प्रकार बलों को दक्षतापूर्वक वितरित करते हुए सामर्थ्य और स्थायित्व दोनों सुनिश्चित करते हैं।

प्रारूप

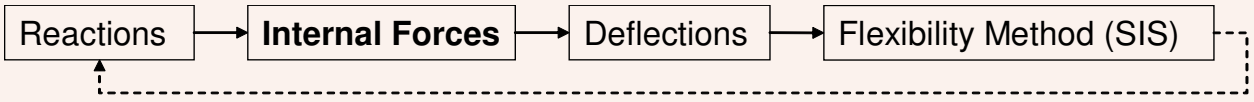
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

21 वंकित अवयवों में आंतरिक बल

सारांश

यह अध्याय संरचनात्मक तंत्रों में बाह्य माँग और आंतरिक क्षमता के आधारभूत संबंध का पुनर्विवेचन करते हुए उस पर बल देता है—यह प्रमुख संकल्पना मानक संरचनात्मक विश्लेषण ग्रंथों में प्रायः उपेक्षित, यदि पूर्णतः अनुपस्थित नहीं, रहती है। अतः अध्याय को जानबूझकर "आंतरिक बल" शीर्षक दिया गया है, जो परंपरागत और कुछ साधारण-से "अपरूपण और आघूर्ण आरेख" शीर्षक से भिन्न है। अध्याय का आरंभ प्रतिबलों और उनसे परिणत आंतरिक बलों के संबंधों से होता है। इसके पश्चात् प्रत्येक संरचना के लिए प्रासंगिक आंतरिक बलों की पहचान की जाती है और फिर भार, अपरूपण तथा आघूर्ण के संबंध व्युत्पन्न किए जाते हैं। अंत में क्रमशः अधिक जटिल होते उदाहरणों की शृंखला दी गई है।

21.1 परिचय 906
21.1.1 अभियांत्रिकी उपागम: प्रतिबलों से आंतरिक बलों तक 906
21.1.2 2d/3d सीधे और वक्र धरनों के आंतरिक बल 908
21.1.3 यह क्यों महत्त्वपूर्ण है 909
21.1.4 अभिकल्प चिह्न-परिपाटियाँ . . . 910
21.2 भार, अपरूपण और आघूर्ण के संबंध . . . 911
21.2.1 अवकल रूप 911
21.2.2 समाकल रूप 912
21.3 उदाहरण 913
21.3.1 उदाहरण 21.1: आनत भार वाला धरन 914
21.3.2 उदाहरण 21.2: आनत फ्रेम . . . 915
21.3.3 उदाहरण 21.3: जलस्थैतिक भार वाला फ्रेम 918
21.3.4 उदाहरण 21.4: रैखिक रूप से परिवर्ती भार 920
21.3.5 उदाहरण 21.5: फ्रेम; आनत छत का उदाहरण 921
21.3.6 उदाहरण 21.6: पारस्परिक फ्रेम 922
21.3.7 उदाहरण 21.7: 3D फ्रेम 926



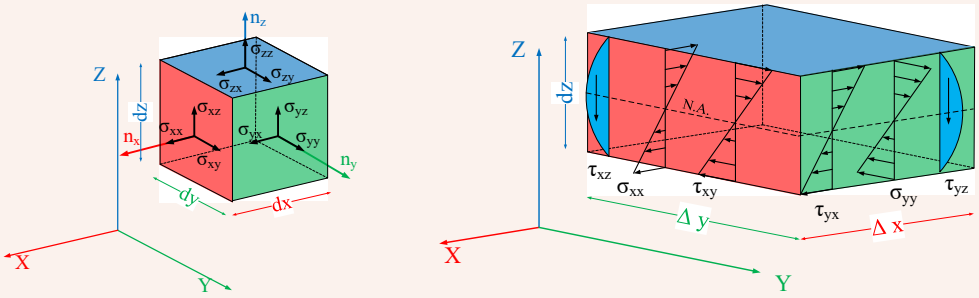
21.1 परिचय

21.1.1 अभियांत्रिकी उपागम: प्रतिबलों से आंतरिक बलों तक

1 प्रतिबल—जिन्हें §O.2.2 में परिभाषित किया गया है—अतिसूक्ष्म बिंदु पर परिभाषित होते हैं, चित्र 21.1a; और मोटाई t वाली पट्टिका के लिए उनका वितरण सामान्यतः चित्र 21.1b में दर्शाए अनुसार रैखिक होता है।

2 आंतरिक बलों की ओर बढ़ने पर ध्यान देना चाहिए कि वे प्रत्यक्षतः देखी जा सकने वाली भौतिक सत्ताएँ नहीं हैं; वास्तव में हम विकृतियों को अभिलिखित और प्रेक्षित कर सकते हैं। ये विकृतियाँ पुनः ऐसे प्रतिबल उत्पन्न करती हैं जिन्हें प्रत्यक्ष रूप से मापा नहीं जा सकता। केवल अत्यंत सीमित और सरल समस्याएँ प्रतिबलों के आधार पर ही विश्लेषणात्मक रूप से हल की जा सकती हैं—जैसे Airy प्रतिबल-फलन अथवा अनुरूप प्रतिचित्रण। संख्यात्मक रूप में, निस्संदेह, संतति परिमित तत्त्व प्रयुक्त होंगे जिनमें हल

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) अतिसूक्ष्म बिंदु पर आंतरिक प्रतिबल

(b) पट्टिका में प्रतिबल-वितरण

चित्र 21.1: आंतरिक प्रतिबल

प्रतिबलों के पदों में व्यक्त होता है। तत्पश्चात् इन प्रतिबलों का समाकलन करके तदनुरूप आंतरिक बलों की गणना की जा सकती है, जो संहिता-आवश्यकताओं के अनुपालन की जाँच के लिए आवश्यक हैं।

3 जटिल परिस्थितियों—अर्थात् व्यावहारिक रूप से लगभग सभी समस्याओं—में विश्लेषण सुगम बनाने के लिए आंतरिक बल की संकल्पना प्रस्तुत की जाती है।

4 अतः आंतरिक बल ऐसी संकल्पनात्मक *अमूर्तताएँ* हैं जिनसे किसी दिए गए क्षेत्रफल पर प्रतिबलों के प्रभाव समझे जाते हैं। गणितीय रूप से वे विशिष्ट क्षेत्रफलों पर प्रतिबल-वितरणों के समाकल हैं।

5 बलों को परिणामी के रूप में *परिभाषित* किया जाता है:

अक्षीय बल $\mathbf{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma dz$

$$N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz;\ N_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} dz;\ N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} dz$$

आघूर्ण $\mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma z dz$

$$M_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz;\ M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z dz;\ M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} z dz$$

अपरूपण $\mathbf{V} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau dz$

$$V_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz;\ V_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6 संरचनात्मक तत्त्व के प्रकार के अनुसार इन्हीं को विभिन्न संयोजनों में आंतरिक बलों के रूप में प्रयुक्त किया जाएगा।

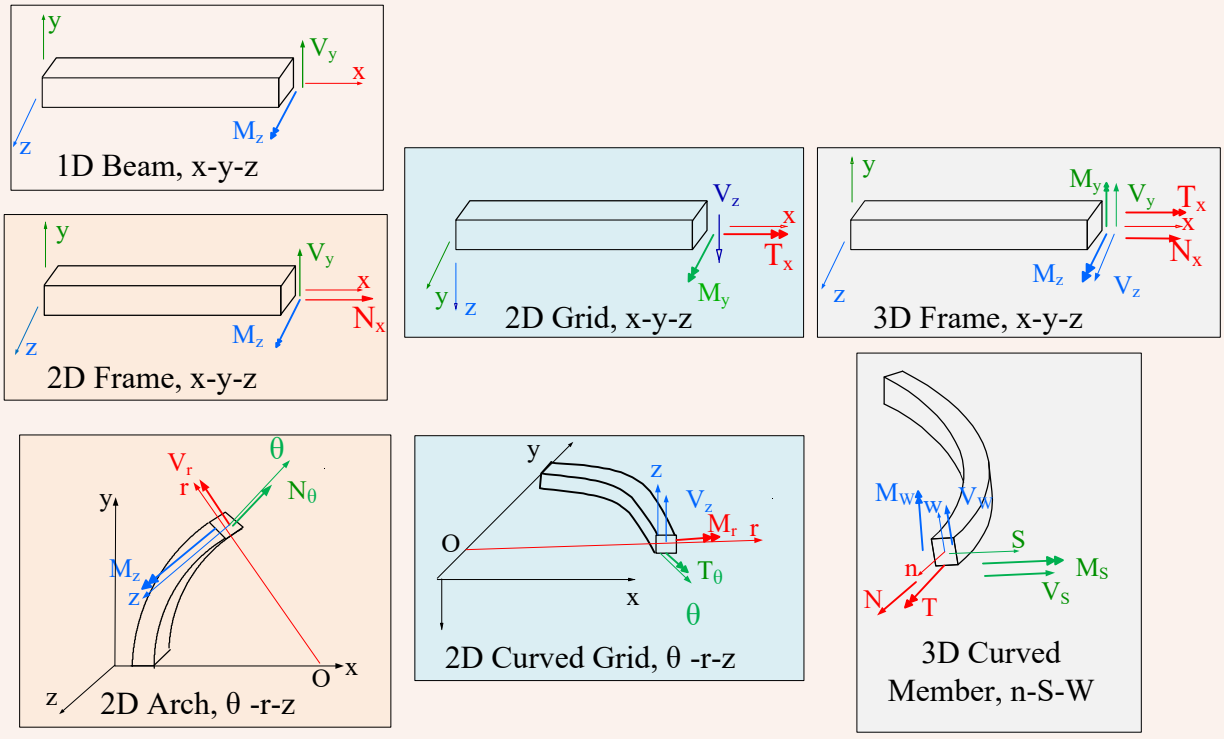
21.1.2 2d/3d सीधे और वक्र धरनों के आंतरिक बल

7 संरचना के प्रकार के अनुसार विचारणीय बलों के समुच्चय भिन्न होंगे, चित्र 21.2। ध्यान दें कि आघूर्णों को वक्र तीरों के स्थान पर द्विशीर्ष सदिशों से दर्शाया गया है—जैसे अनुभाग 19.2.8 के उदाहरण में।

8 परंपरानुसार अवयव को x अक्ष की दिशा में माना जाता है; अक्षीय और अपरूपण बल क्रमशः N और V से, जबकि ऐंठन और आघूर्ण क्रमशः T और M से निरूपित होते हैं।

9 संकेतन में x अक्ष की दिशा के अक्षीय बल को अभिलंब बल कहा और N से निरूपित किया जाता है, जबकि अन्य बल अपरूपण बल V हैं। इसी प्रकार x दिशा का आघूर्ण ऐंठन T और अन्य आघूर्ण M हैं।

10 त्रिविमीय (3D) संदर्भों में आंतरिक बलों पर विचार करते समय इन बलों की दिशा और कार्य-तल स्पष्टतः निर्दिष्ट करना महत्त्वपूर्ण है—जैसे V_x और V_y, M_z[1]।



चित्र 21.2: ऋजुरेखीय और वक्र धरनों में आंतरिक बल

11 प्रयोज्य पद नीचे दिए गए हैं:

[1]पट्टिकाओं और कवचों में दोहरे अधोलिख होंगे, चित्र 33.4 और 34.3।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 21.1: संरचनाओं में आंतरिक बल

	कार्तीय						ध्रुवीय						
	बल			आघूर्ण				बल			आघूर्ण		
	x	y	z	x	y	z		r	θ	z	r	θ	z
धरन		V_y				M_z	मेहराब	V_r	N_θ				M_z
2D फ्रेम	N_x	V_y				M_z							
ग्रिड			V_z	T_x	M_y		वक्र धरन			V_z	M_r	T_θ	
3D फ्रेम	N_x	V_y	V_z	T_x	M_y	M_z							

	बल			आघूर्ण		
	n	s	w	n	s	w
3D वक्र	N_n	V_s	V_w	T_n	M_s	M_w

21.1.3 यह क्यों महत्त्वपूर्ण है

12 संरचनात्मक अभियांत्रिकी में माँग और क्षमता की संकल्पनाओं पर विचार किया जाता है। इस अध्याय में "माँग" बाह्यतः लगाए गए अक्षीय, अपरूपण अथवा आघूर्ण बलों को दर्शाती है। दूसरी ओर "क्षमता" संरचनात्मक अवयव की आंतरिक प्रतिबल-वितरण विकसित करने की योग्यता है। इन आंतरिक प्रतिबलों के समाकल माँग द्वारा लगाए गए समाकलों के बराबर और विपरीत होने चाहिए।

13 इसे चित्र 21.3 में दर्शाया गया है, जहाँ बाह्य भार अवयव में आघूर्ण उत्पन्न करता है। धरन के बाएँ खंड को मुक्त-पिंड आरेख मानने पर निम्न तीन संतुलन-समीकरण संतुष्ट होने चाहिए:

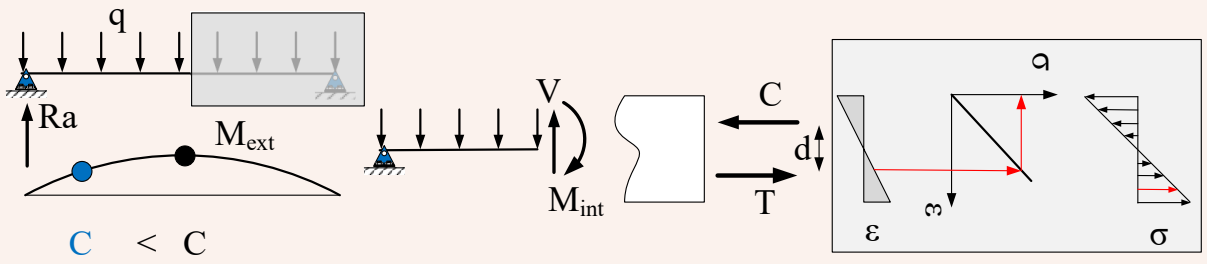
1. ऊर्ध्वाधर y दिशा में बल: $V = R_a - qx$
2. अक्षीय x दिशा में बल: $C = T$
3. आघूर्ण: $M_{ext} = M_{int} = Cd$

14 यहाँ परिभाषित आंतरिक बल केवल अभिकल्प में प्रासंगिक हैं, जहाँ पदार्थ के प्रतिबल-विकृति संबंध का संदर्भ लिया जाता है। समतल परिच्छेद के समतल बने रहने की Euler-Bernoulli मान्यता[2] के अनुसार विकृति-वितरण रैखिक होता है। तब किसी भी प्रतिबल-विकृति संबंध के लिए तदनुरूप प्रतिबल निर्धारित होते हैं। यही प्रतिबल-वितरण C, T और M_{int} उत्पन्न करता है।

15 क्षमता और माँग के बीच संतुलन की आवश्यकता वह मूलभूत सिद्धांत है जिस पर सभी अभिकल्प संहिताएँ आधारित हैं (अध्याय 36)।

[2]जब तक विस्तार/ऊँचाई लगभग 8 से कम अधिक है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



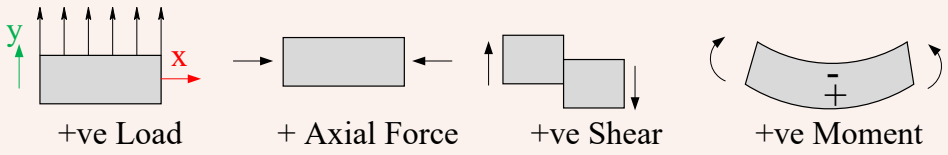
चित्र 21.3: आंतरिक बल

21.1.4 अभिकल्प चिह्न-परिपाटियाँ

16 अपरूपण-आघूर्ण संबंधों को पुनः व्युत्पन्न करने से पहले एक चिह्न-परिपाटी स्वेच्छतः परिभाषित करते हैं।

17 यहाँ अपनाई गई चिह्न-परिपाटी अभिकल्प प्रयोजनों में सामान्यतः प्रयुक्त होती है[3]।

18 चित्र 21.5 के संदर्भ में:



चित्र 21.4: अभिकल्प के लिए अपरूपण और आघूर्ण की चिह्न-परिपाटियाँ

चित्र 21.5: अभिकल्प चिह्न-परिपाटियाँ

भार धरन के स्थानीय y अक्ष की दिशा में धनात्मक—दक्षिणहस्त परिपाटी मानते हुए—अर्थात् ऊपर की ओर धनात्मक।

अक्षीय: तनाव धनात्मक।

वंकन: धनात्मक आघूर्ण वह है जो निचले तंतुओं में तनाव और ऊपरी तंतुओं में संपीडन उत्पन्न करता है। वैकल्पिक रूप से आघूर्ण संपीडन-पक्ष पर खींचे जाते हैं—फ्रेमों के लिए यह ध्यान में रखना उपयोगी है।

अपरूपण: धनात्मक अपरूपण बल ऋणात्मक फलक पर "ऊपर" अथवा धनात्मक फलक पर "नीचे" की ओर होता है। वैकल्पिक रूप से धनात्मक अपरूपण बलों का युग्म दक्षिणावर्त घूर्णन उत्पन्न करेगा।

ऐंठन: वामावर्त धनात्मक।

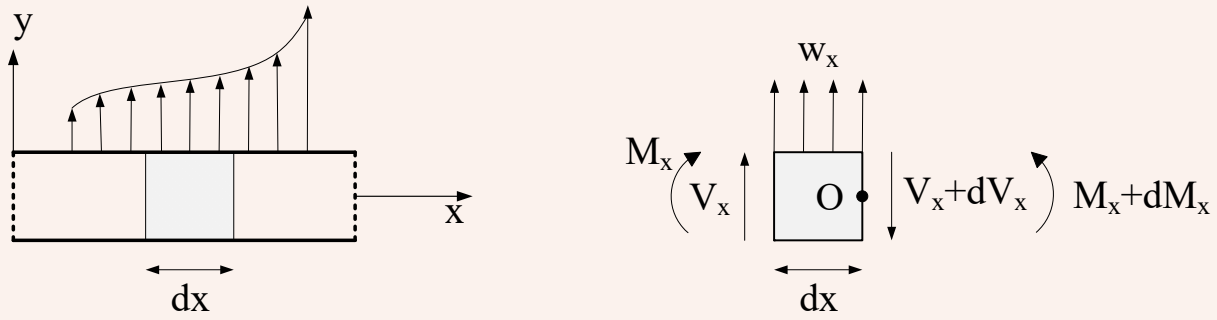
[3]बाद में अधिक उन्नत विश्लेषण पाठ्यक्रमों में भिन्न परिपाटी प्रयुक्त होगी, §26.1.1।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

19 सभी 3D विश्लेषण के लिए द्वितीर सदिशों का उपयोग वरीय है—वक्र तीरों का नहीं। तब बल और आघूर्ण, ऐंठन सहित, दक्षिणहस्त निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष परिभाषित किए जाते हैं।

21.2 भार, अपरूपण और आघूर्ण के संबंध

20 भार, अपरूपण और आघूर्ण के मूल संबंधों को पुनः व्युत्पन्न करते हैं। धरन की अतिसूक्ष्म लंबाई $\mathrm{d}x$ पर विचार करें, जो धनात्मक भार[4] $w(x)$ के अधीन है, चित्र 21.6। अतिसूक्ष्म खंड भी संतुलन में होना



चित्र 21.6: धरन के अतिसूक्ष्म खंड का मुक्त-पिंड आरेख

चाहिए।

21 कोई अक्षीय बल नहीं है[5]; अतः केवल दो संतुलन-समीकरण $\Sigma F_y = 0$ और $\Sigma M_z = 0$ संतुष्ट करने हैं।

22 क्योंकि $\mathrm{d}x$ अतिसूक्ष्म है, इसके अनुदिश भार के छोटे परिवर्तन की उपेक्षा की जा सकती है; अतः $w(x)$ को $\mathrm{d}x$ के अनुदिश नियत माना जाता है।

23 यह दर्शाने के लिए कि तत्त्व की लंबाई $\mathrm{d}x$ पर अपरूपण और आघूर्ण में छोटा परिवर्तन होता है, अवकल राशियाँ $\mathrm{d}V_x$ और $\mathrm{d}M_x$ दाएँ फलक के V_x और M_x में जोड़ी जाती हैं।

21.2.1 अवकल रूप

24 पहले संतुलन-समीकरण पर विचार करें:

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_x + w_x \mathrm{d}x - (V_x + \mathrm{d}V_x) = 0$$

अथवा

[4]इस व्युत्पत्ति में, अन्य सभी व्युत्पत्तियों की भाँति, सभी राशियों को धनात्मक मानना चाहिए।
[5]कुंचन को नियंत्रित करने वाले अवकल समीकरण—Euler समीकरण—में अक्षीय बल सम्मिलित होंगे।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 21.2: अपरूपण; अवकल

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = w(x)$$

अवयव के अक्ष पर किसी बिंदु पर अपरूपण-वक्र की ढाल उस बिंदु के भार-वक्र से दी जाती है।

25 इसी प्रकार

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_x + V_x \mathrm{d}x - w_x \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}x}{2} - (M_x + \mathrm{d}M_x) = 0$$

$\mathrm{d}x^2$ पद की उपेक्षा करने पर यह सरल होकर देता है:

परिभाषा 21.3: आघूर्ण; अवकल

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = V(x)$$

अवयव के अक्ष पर किसी बिंदु पर आघूर्ण-वक्र की ढाल उस बिंदु के अपरूपण से दी जाती है।

21.2.2 समाकल रूप

26 पूर्ववर्ती समीकरणों के वैकल्पिक रूप हैं:

$$V = \int w(x)\mathrm{d}x$$

अथवा

परिभाषा 21.4: अपरूपण; समाकल

$$\Delta V_{21} = V_{x_2} - V_{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} w(x)\mathrm{d}x$$

1 और 2 के बीच अपरूपण का परिवर्तन ΔV_{1-2}, x_1 और x_2 के बीच भार-वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के बराबर है।

इसी प्रकार

$$M = \int V(x)\mathrm{d}x$$

अथवा

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 21.5: आघूर्ण; समाकल

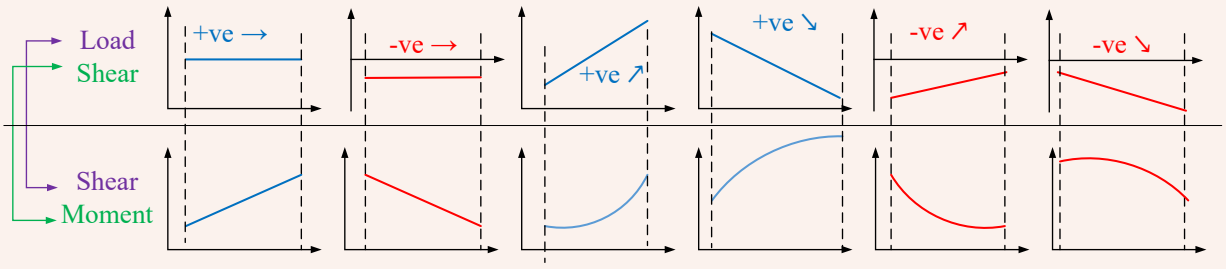
$$\Delta M_{21} = M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V(x)\mathrm{d}x$$

1 और 2 के बीच आघूर्ण का परिवर्तन ΔM_{21}, x_1 और x_2 के बीच अपरूपण-वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के बराबर है।

27 ध्यान दें कि अभी भी V_1 और M_1 ज्ञात होने चाहिए, तभी V_2 और M_2 निर्धारित किए जा सकते हैं।

28 इसी प्रकार के संबंध बाद में (अध्याय 9) वक्रता $\frac{M}{EI}$ और घूर्णन θ के बीच निर्धारित किए जाएँगे (22.16)।

29 विभिन्न भारों के अधीन धरन के अनुदिश अपरूपण और आघूर्ण का परिवर्तन चित्र 21.7 में दर्शाया गया है। यह चित्र अपरूपण/आघूर्ण आरेख बनाने के लिए मार्गदर्शक हो सकता है।



चित्र 21.7: भार, अपरूपण और आघूर्ण के परिवर्तन

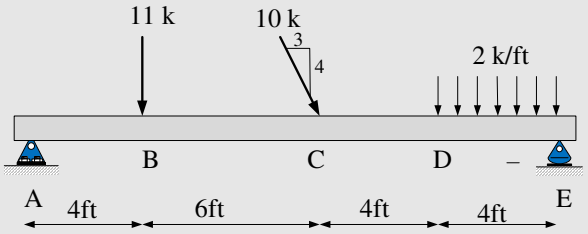
30 अभिकल्प में प्रायः विभिन्न भार-संयोजनों पर विचार करना पड़ता है। प्रत्येक भार-संयोजन के लिए अपरूपण और आघूर्ण आरेख बनाए जाने चाहिए, और फिर अभिकल्प के लिए आघूर्ण आवरण का उपयोग करना चाहिए।

21.3 उदाहरण

31 निम्न कुछ निदर्शी उदाहरण हैं। इन्हें प्रक्रिया की कुछ सूक्ष्म जटिलताओं को उजागर करने अथवा अपरूपण और आघूर्ण आरेख निर्धारित करने के वैकल्पिक उपागम देने के लिए सावधानीपूर्वक चुना गया है। कभी गणनाएँ चित्र से अलग की गई हैं, तो कभी मुक्त-पिंड आरेखों में ही दर्शाई गई हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

21.3.1 उदाहरण 21.1: आनत भार वाला धरन



आधार-प्रतिक्रियाएँ संतुलन-समीकरणों से निर्धारित की जाती हैं:

$$(\leftarrow) \Sigma F_x = 0; \Rightarrow -R_{A_x} + 6 = 0 \Rightarrow R_{A_x} = 6 \text{ k}$$
$$(+\circlearrowleft) \Sigma M_A = 0; \Rightarrow (11)(4) + (8)(10) + (4)(2)(14+2) - R_{F_y}(18) = 0$$
$$\Rightarrow R_{F_y} = 14 \text{ k}$$
$$(+\uparrow) \Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{A_y} - 11 - 8 - (4)(2) + 14 = 0 \Rightarrow R_{A_y} = 13 \text{ k}$$

अपरूपण इसके बाद निर्धारित किया जाता है:

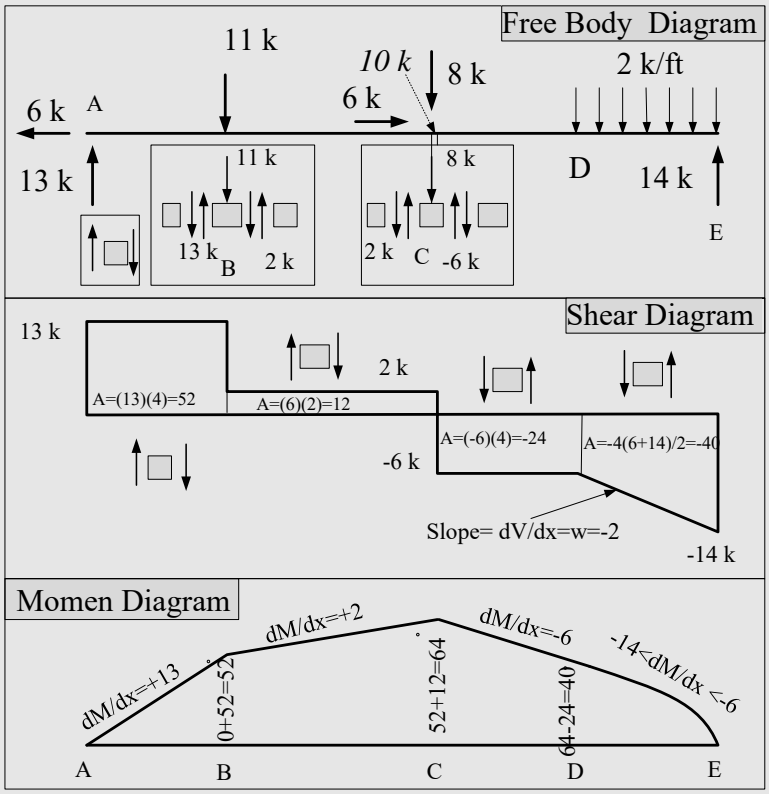
1. A पर अपरूपण आधार-प्रतिक्रिया के बराबर और धनात्मक है।
2. B पर अपरूपण ऋणात्मक भार के कारण 11 k घटकर 2 k हो जाता है।
3. C पर यह पुनः 8 k घटकर −6 k हो जाता है।
4. D तक यह नियत रहता है और फिर प्रति रैखिक फुट 2 k की दर से घटता है—भार एकसमान और ऋणात्मक होने के कारण ढाल नियत ऋणात्मक है—और −14 k तक पहुँचता है।
5. जाँच के रूप में, −14 k वही आधार-प्रतिक्रिया है जो पहले F पर निर्धारित की गई थी।

आघूर्ण अंत में निर्धारित किया जाता है:

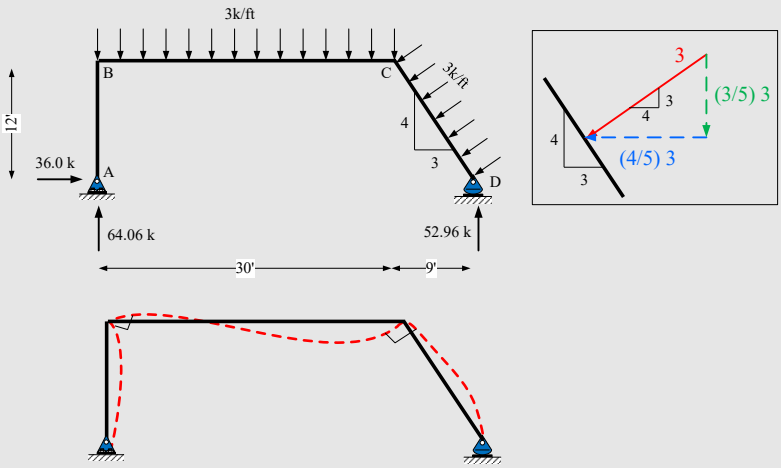
1. A पर आघूर्ण शून्य है—कब्जित आधार।
2. A और B के बीच आघूर्ण का परिवर्तन तदनुरूप अपरूपण आरेख के नीचे के क्षेत्रफल के बराबर है, अर्थात् $\Delta M_{B-A} = (13)(4) = 52$।
3. इत्यादि...

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



21.3.2 उदाहरण 21.2: आनत फ्रेम



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आधार-प्रतिक्रियाएँ पहले निर्धारित की जाती हैं:

$$(\leftarrow\ )\ \Sigma F_x = 0; \Rightarrow R_{A_x} - \underbrace{\frac{4}{5}(3)}_{\text{load}}(15) = 0$$

$$\Rightarrow R_{A_x} = 36 \text{ k}$$

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_A = 0; \Rightarrow (3)(30)(\frac{30}{2}) + \underbrace{\frac{3}{5}(3)(15)\left(30+\frac{9}{2}\right)}_{CD_Y} - \underbrace{\frac{4}{5}(3)(15)\frac{12}{2}}_{CD_X}$$

$$-39R_{D_y} = 0 \Rightarrow R_{D_y} = 52.96 \text{ k}$$

$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{A_y} - (3)(30) - \frac{3}{5}(3)(15) + 52.96 = 0$$

$$\Rightarrow R_{A_y} = 64.06 \text{ k}$$

प्रत्येक अवयव को पृथक करके प्रत्येक बल-घटक के लिए उसका मुक्त-पिंड आरेख बनाते हैं।

अपरूपण:

1. $A-B$ के अनुदिश अपरूपण नियत है, A की क्षैतिज प्रतिक्रिया के बराबर है और पूर्व-परिभाषित चिह्न-परिपाटी के अनुसार ऋणात्मक है: $V_A = -36$ k।
2. अवयव $B-C$ में B पर अपरूपण, $A-B$ के अनुदिश संचारित ऊर्ध्वाधर बल—जो A की ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया के बराबर है—के बराबर होना चाहिए: $V_B = 64.06$।
3. क्योंकि $B-C$ एकसमान ऋणात्मक भार के अधीन है, $B-C$ के अनुदिश अपरूपण की ढाल -3 होगी और x—जिसे B से C तक मापा गया है—के पदों में:

$$V_{B-C}(x) = 64.06 - 3x$$

4. $C-D$ के अनुदिश अपरूपण D की ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया को अक्षीय और अपरूपण घटकों में विघटित करके प्राप्त होता है। अतः D पर अपरूपण $\frac{3}{5}52.96 = 31.78$ k के बराबर और ऋणात्मक है। भार की चिह्न-परिपाटी के आधार पर अपरूपण की ढाल -3, $C-D$ के अनुदिश होनी चाहिए। अतः बिंदु C पर अपरूपण ऐसा है कि $V_c - \frac{5}{3}9(3) = -31.78$ अथवा $V_c = 13.22$। अपरूपण का समीकरण—x को C से D तक लेते हुए—है:

$$V = 13.22 - 3x$$

5. नोड C का संतुलन सत्यापित करके गणनाओं की जाँच करते हैं:

$$(\leftarrow\ )\ \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}(42.37) + \frac{4}{5}(13.22) = 25.42 + 10.58 = 36\checkmark$$

$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}(42.37) - \frac{3}{5}(13.22) = 33.90 - 7.93 = 25.97\checkmark$$

आघूर्ण:

1. $A-B$ के अनुदिश A पर आघूर्ण शून्य है—क्योंकि वहाँ कब्जा है—और इसकी ढाल अपरूपण के बराबर है; अतः B पर आघूर्ण: $M_B = (-36)(12) = -432$ k.ft।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. $B-C$ के अनुदिश आघूर्ण है:

$$\begin{aligned} M_{B-C} &= M_B + \int_0^x V_{B-C}(x)\mathrm{d}x = -432 + \int_0^x (64.06 - 3x)\mathrm{d}x \\ &= -432 + 64.06x - 3\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

जो परवलय है। $x = 30$ रखने पर नोड C पर: $M_C = -432 + 64.06(30) - 3\frac{30^2}{2} = 139.8$ k.ft।

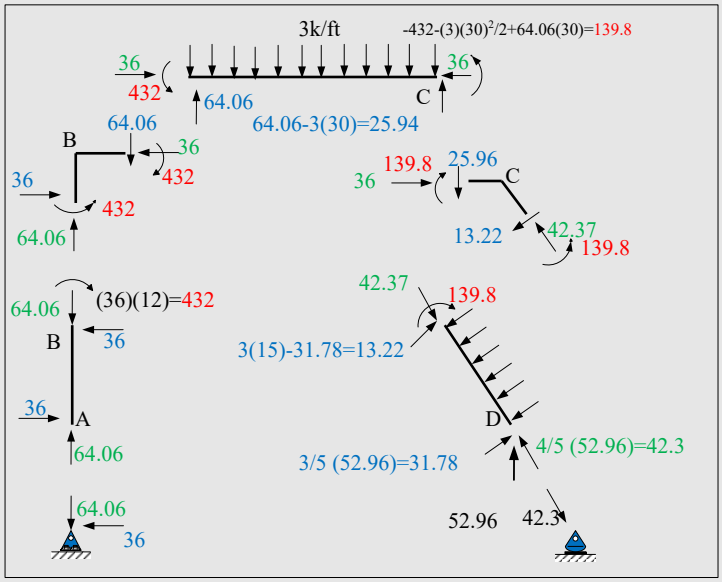
3. $B-C$ के अनुदिश अधिकतम आघूर्ण निर्धारित करना हो, तो ज्ञात है कि $\frac{\mathrm{d}M_{B-C}}{\mathrm{d}x} = 0$ उस बिंदु पर होगा जहाँ $V_{B-C} = 0$ है; अर्थात् $V_{B-C}(x) = 64.06 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{64.06}{3} = 21.35$ ft। दूसरे शब्दों में अधिकतम आघूर्ण वहाँ होता है जहाँ अपरूपण शून्य है। अतः $M_{B-C}^{\max} = -432 + 64.06(21.35) - 3\frac{(21.35)^2}{2} = -432 + 1,367.7 - 683.7 = -251.98$ k.ft।

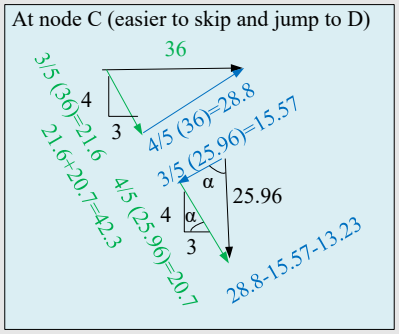
4. अंत में $C-D$ के अनुदिश आघूर्ण द्विघाती रूप से बदलता है—क्योंकि अपरूपण रैखिक था। आघूर्ण पहले बढता है—धनात्मक अपरूपण—और फिर घटता है—ऋणात्मक अपरूपण। $C-D$ के अनुदिश आघूर्ण है:

$$\begin{aligned} M_{C-D} &= M_C + \int_0^x V_{C-D}(x)\mathrm{d}x = 139.8 + \int_0^x (13.22 - 3x)\mathrm{d}x \\ &= 139.8 + 13.22x - 3\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

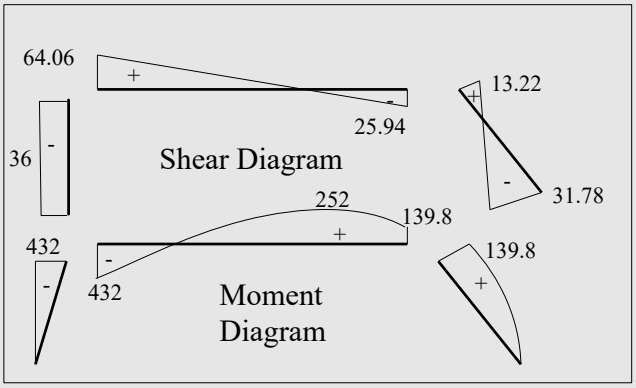
जो परवलय है। $x = 15$ रखने पर नोड C पर: $M_C = 139.8 + 13.22(15) - 3\frac{15^2}{2} = 139.8 + 198.3 - 337.5 = 0$✓।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।





$\cos\alpha = 3/5 = N/25.96$
$N = (25.96)(3)/(5) = 15.57$

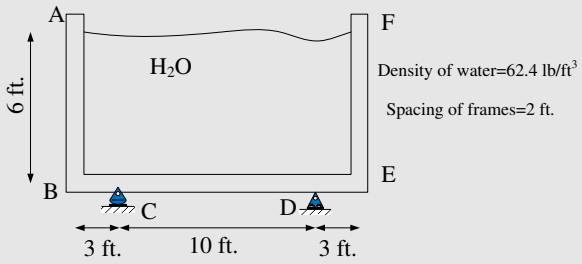


21.3.3 उदाहरण 21.3: जलस्थैतिक भार वाला फ्रेम

निम्न फ्रेम एक जल-नालिका का संरचनात्मक आधार है। यह मानते हुए कि जल-नालिका की लंबाई के अनुदिश फ्रेम 2 ft की दूरी पर हैं, निम्न निर्धारित करने हैं:

1. सभी आंतरिक अवयव-अंत क्रियाएँ।
2. अपरूपण और आघूर्ण आरेख बनाएँ।
3. अधिकतम आंतरिक बंकन आघूर्णों का स्थान और परिमाण निर्धारित करें।
4. यदि यह प्रबलित कंक्रीट फ्रेम है, तो प्रबलन का स्थान दर्शाएँ।

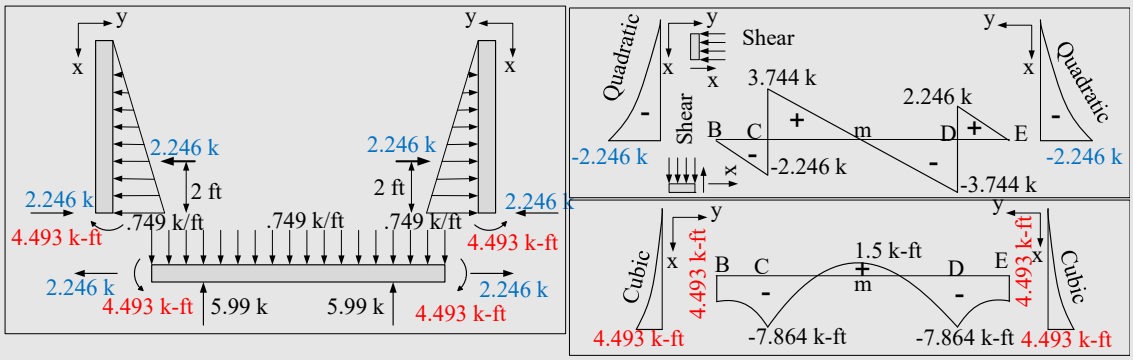
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



जलस्थैतिक दाब ऊर्ध्वाधर अवयवों पर पार्श्व बल उत्पन्न करता है; इन अवयवों को निचले सिरे पर आबद्ध बहुधारक के रूप में माना जा सकता है। दाब रैखिक है और $p = \gamma h$ से दिया जाता है। क्योंकि प्रत्येक फ्रेम जल-नालिका की 2 ft चौड़ी पट्टी को आधार देता है, w का समीकरण—पाउंड/फुट—है:

$$w = (2)(62.4)(h) = 124.8h \text{ lbs/ft}$$

आधार पर $w = (124.8)(6) = 749$ lbs/ft $= .749$ k/ft। ध्यान दें कि यह अंत्य भित्तियों पर पार्श्व दाब और क्षैतिज अवयवों पर एकसमान भार दोनों है।



अंत्य क्रियाएँ

1. B पर आधार-बल $F_{Bx} = (.749)\frac{6}{2} = 2.246$ k है।
2. B पर आधार-आघूर्ण $M_B = (2.246)\frac{6}{3} = 4.493$ k.ft है।
3. B पर अवयव $B-E$ के अंत्य बल बराबर और विपरीत हैं।
4. C पर आधार-प्रतिक्रिया $R_{Cy} = (.749)\frac{16}{2} = 5.99$ k है।

अपरूपण बल:

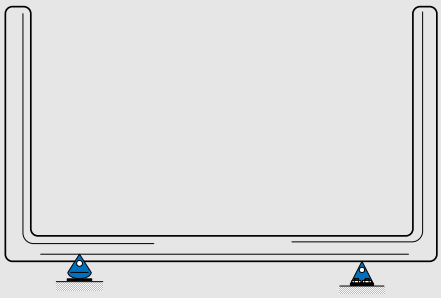
1. B के आधार पर अपरूपण बल पहले 2.246 k निर्धारित हुआ था। $x-y$ अक्षों के अभिविन्यास के आधार पर यह ऋणात्मक अपरूपण है।
2. B पर ऊर्ध्वाधर अपरूपण शून्य है—$A-B$ का भार उपेक्षित है।
3. C के बाईं ओर अपरूपण $V = 0 + (-.749)(3) = -2.246$ k है।
4. C के दाईं ओर अपरूपण $V = -2.246 + 5.99 = 3.744$ k है।

आघूर्ण आरेख:

1. आधार B पर, जैसा ऊपर निर्धारित किया गया, $M = 4.493$ k.ft है।
2. आधार C पर $M_c = -4.493 + (-.749)(3)(\frac{3}{2}) = -7.864$ k.ft है।
3. अधिकतम आघूर्ण $M_{\max} = -7.864 + (.749)(5)(\frac{5}{2}) = 1.50$ k.ft है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अभिकल्प: प्रबलन उन तंतुओं के अनुदिश रखा जाना चाहिए जो तनाव में हैं, अर्थात् क्रणात्मक आघूर्ण की ओर[a]। चित्र वंकन प्रबलन[b] का स्थान आरेखीय रूप से दर्शाता है।



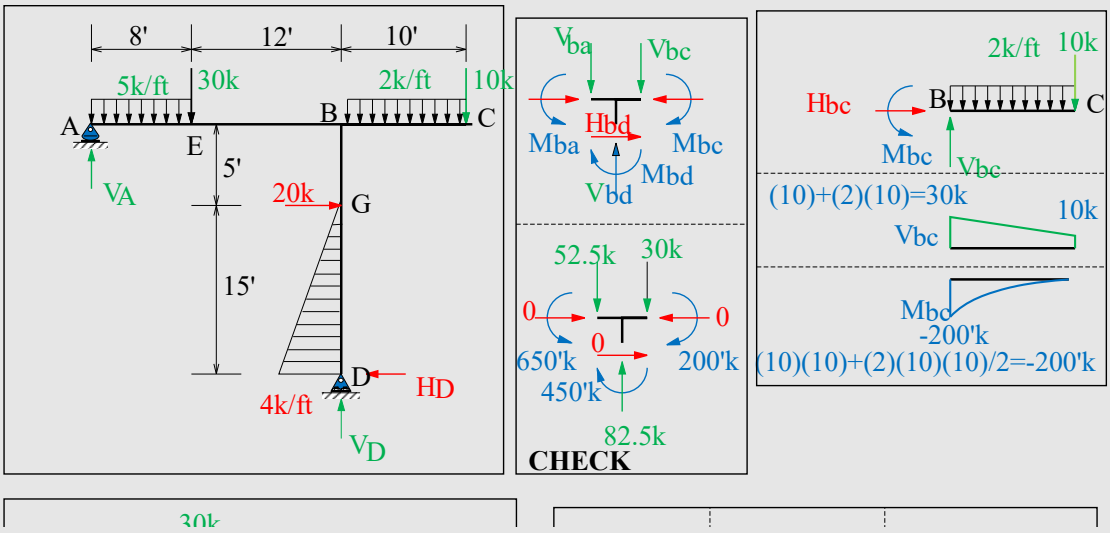
[a]इसीलिए अधिकांश यूरोपीय देशों में अभिकल्प आघूर्णों की चिह्न-परिपाटी U.S.A. में सामान्यतः प्रयुक्त परिपाटी के विपरीत है; प्रबलन वहाँ रखा जाना चाहिए जहाँ आघूर्ण "धनात्मक" है।
[b]अपरूपण प्रबलन ऊर्ध्वाधर रकाबों की शृंखला से बनता है।

21.3.4 उदाहरण 21.4: रैखिक रूप से परिवर्ती भार

इस उदाहरण की विस्तृत गणनाएँ नहीं दी गई हैं। तथापि अपरूपण और आघूर्ण आरेख चरणबद्ध रूप से सहजता से निर्धारित किए जा सकते हैं।

प्रारूप

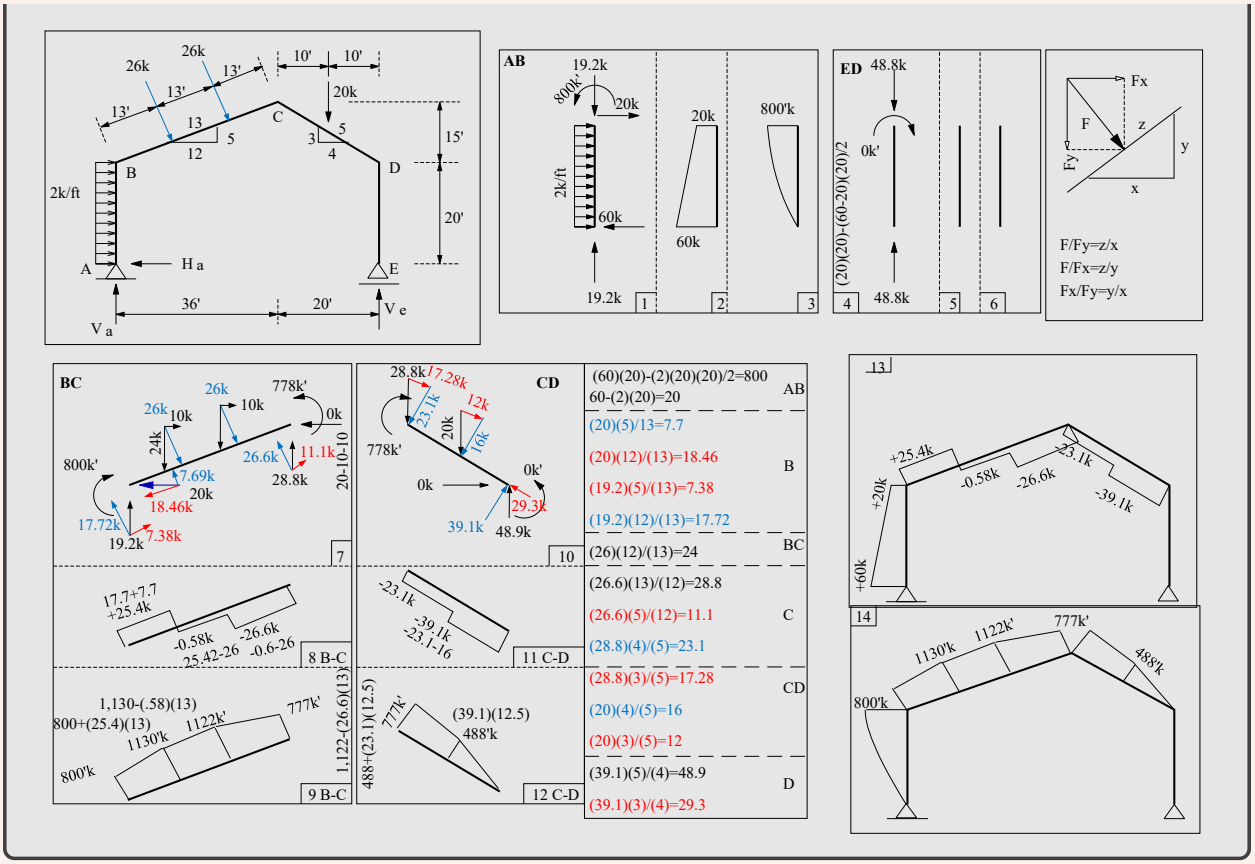
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



21.3.5 उदाहरण 21.5: फ्रेम; आनत छत का उदाहरण

इस उदाहरण की विस्तृत गणनाएँ नहीं दी गई हैं। तथापि अपरूपण और आघूर्ण आरेख चरणबद्ध रूप से सहजता से निर्धारित किए जा सकते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

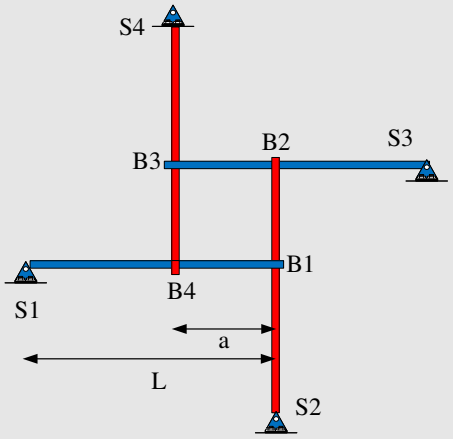


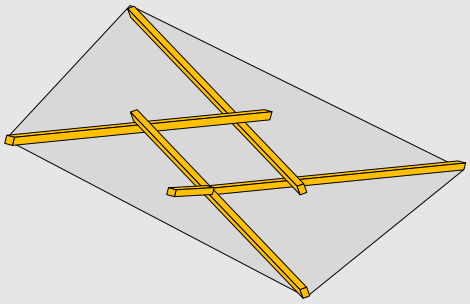
21.3.6 उदाहरण 21.6: पारस्परिक फ्रेम

निम्न अनुभाग Schrama, 2021 "*A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames*" से पुनरुत्पादित है।

सरल पारस्परिक फ्रेम (§15.5.3) चार धरनों से बनता है। प्रत्येक धरन को एक सिरे पर पिनयुक्त परिधीय आधार—S1, S2, S3 और S4—तथा दूसरे सिरे पर अन्य धरन—B1, B2, B3 और B4—से आधार मिलता है। धरनों के बीच का संयोजन आधार की भाँति कार्य करता है। आधार का प्रकार प्रयुक्त संयोजन पर निर्भर करता है। धरन अपने किसी मध्यवर्ती स्थान पर अन्य धरन को आधार देता है। आधारित धरन और आधार देने वाले धरन के बीच की दूरी को *संलग्नता लंबाई* (engagement length) कहा जाता है। आगे आधार की भाँति कार्य करने वाले धरन को निकटस्थ धरन और भार डालने वाले धरन को पूर्ववर्ती धरन कहा जाएगा। विश्लेषण में प्रयुक्त पारस्परिक फ्रेम को नीचे संलग्नता लंबाई a सहित दर्शाया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

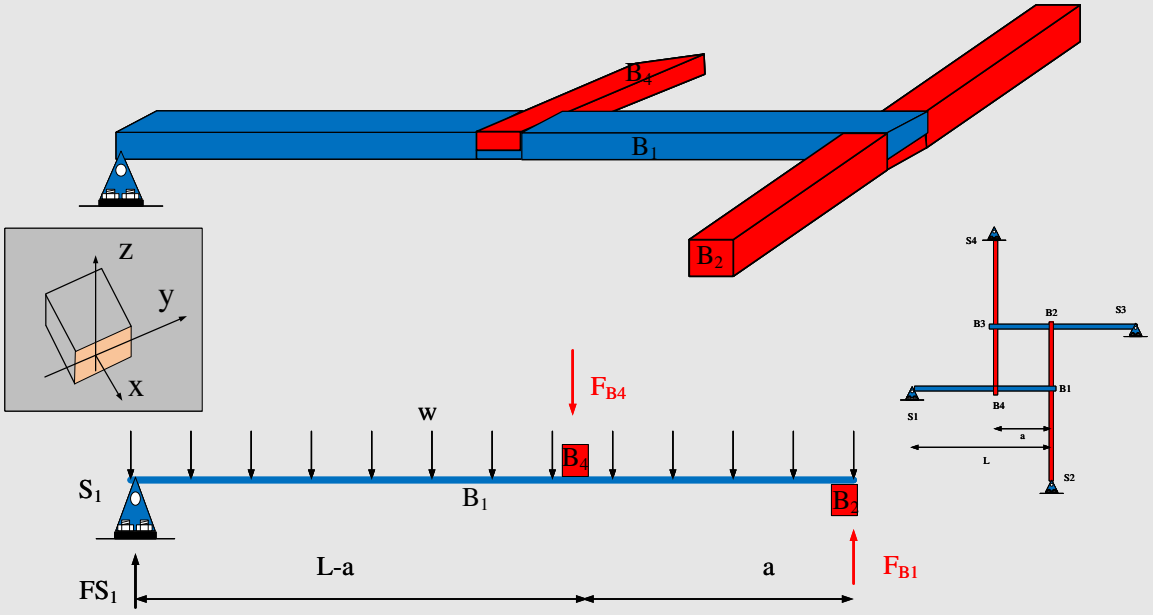




कब्जित संयोजन

पारस्परिक फ्रेम का विश्लेषण अध्यारोपण द्वारा किया जाएगा—अर्थात् खाँचयुक्त दृढ संयोजन नहीं हैं। फ्रेमों पर एकसमान वितरित भार w लगा माना गया है। साथ ही बिंदु-भार F धरन के सिरे से दूरी a पर लगाया गया है, जो पूर्ववर्ती धरन द्वारा आरोपित होता है। क्योंकि धरन कब्जित हैं, दोनों सिरों पर पिनयुक्त आधार हैं। अतः RF-इकाई के एक धरन को सरलतः आधारित धरन के रूप में निरूपित किया जा सकता है।

आधार-प्रतिक्रियाएँ



सममिति के कारण ऊर्ध्वाधर आधार-प्रतिक्रियाएँ केवल वितरित भार को आधारों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होती हैं:

$$4wL - 4FS = 0 \Rightarrow F_{S1} = wL$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ FS चारों प्रतिक्रियाओं का योग है। B1 के कब्जित संयोजन के कारण इस धरन-अंत को पिनयुक्त आधार मिलता है। ये आधार बंकन आघूर्ण वहन नहीं कर सकते; अतः $B2$ पर आघूर्ण शून्य है। इस शर्त से F_{B4} का व्यंजक B के परितः आघूर्ण लेकर निर्धारित किया जा सकता है:

$$\left.\begin{aligned} F_{S1}L - F_{B4}a - wL\frac{L}{2} = 0 \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} F_{B4} = \frac{wL^2}{2a}$$

इसके बाद ऊर्ध्वाधर बलों का योग लेते हैं:

$$\left.\begin{aligned} F_{S1} + F_{B1} - wL - F_{B4} = 0 \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} F_{B1} = F_{B4} = \frac{wL^2}{2a} = F$$

यह आश्चर्यजनक नहीं है, क्योंकि ऊर्ध्वाधर आधार-प्रतिक्रिया F_{S1} निकटस्थ धरन पर बिंदु-भार F बन जाती है। सममिति और समग्र ऊर्ध्वाधर संतुलन के कारण F_{S1} और F परस्पर बराबर ही हो सकते हैं।

आंतरिक बल

परिच्छेदी आंतरिक बल सीधे संतुलन से व्युत्पन्न होते हैं। B4 पर:

$$\left.\begin{aligned} M_{\max} = F_{S1}(L-a) - w\frac{(L-a)^2}{2} \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} M_{\max} = \frac{L^2 - a^2}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{lft}} = F_{S1} - w(L-a) \\ F_{S1} = wL \end{aligned}\right\} V_{\text{lft}} = wa$$

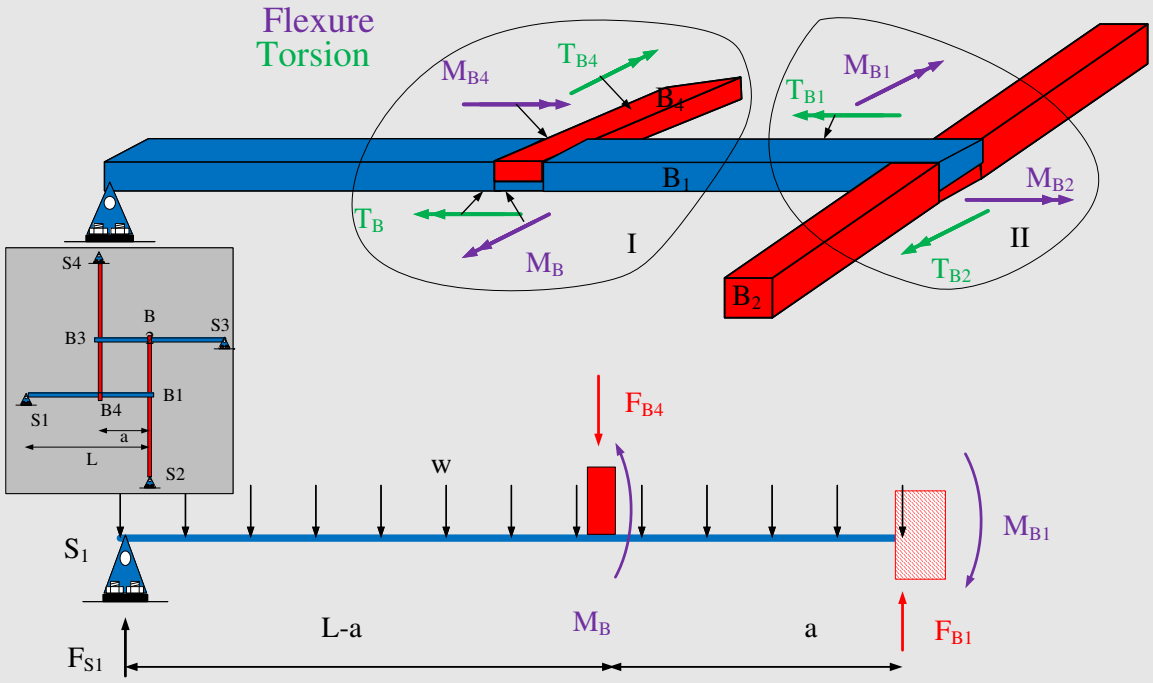
$$\left.\begin{aligned} V_{\text{rgt}} = F_{B1} - wa \\ F_{B1} = \frac{wL^2}{2a} \end{aligned}\right\} V_{\text{rgt}} = w\frac{L^2 - 2a^2}{2a}$$

आबद्ध संयोजन

धरनों के बीच संयोजन आबद्ध—खाँचों द्वारा—होने पर पारस्परिक फ्रेम का व्यवहार भिन्न होता है। इस स्थिति में संयोजन बंकन आघूर्ण वहन कर सकता है। इससे केवल वंकन ही नहीं, ऐंठन भार भी उत्पन्न होते हैं। आबद्ध संयोजनों के कारण पारस्परिक फ्रेम के सभी संयोजनों में बंकन आघूर्ण होंगे। पहले y-अक्ष के सापेक्ष बंकन आघूर्ण M_y के प्रभाव की जाँच की जाती है। ध्यान दें कि यह बंकन आघूर्ण M_y निकटस्थ धरन में ऐंठन आघूर्ण M_x उत्पन्न करता है। इस ऐंठन आघूर्ण का विशिष्ट वितरण परिधीय आधार और संयोजन के प्रकार पर निर्भर करता है। पिनयुक्त आधारों वाले इस पारस्परिक फ्रेम में ऐंठन आघूर्ण पूर्णतः अगले संयोजन तक संचारित होता है। यह ऐंठन आघूर्ण प्रत्येक धरन में पूर्ववर्ती धरन के साथ प्रतिच्छेदन-बिंदु पर बंकन आघूर्ण M_y उत्पन्न करता है, जैसा आरेखित है। प्रत्येक संयोजन में M_y और M_x दोनों होते हैं और निकटस्थ धरन में M_x तथा M_y उत्पन्न होते हैं।

प्रारूप

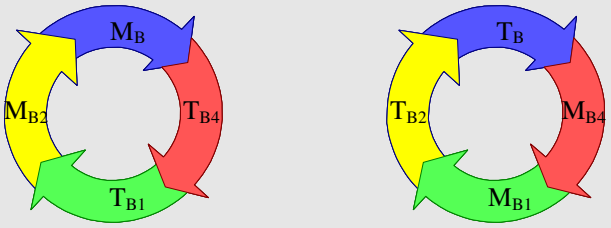
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



केवल ऊर्ध्वाधर बलों पर विचार करने पर अभी भी $F_{B1} = F_{B4}$ है, किंतु उनका परिमाण ज्ञात नहीं है। इस समस्या में एक तत्त्व की ऐंठन आधार देने वाले तत्त्व में वंकन के रूप में संचारित होती है और इसके विपरीत भी। संबंधों का सार है:

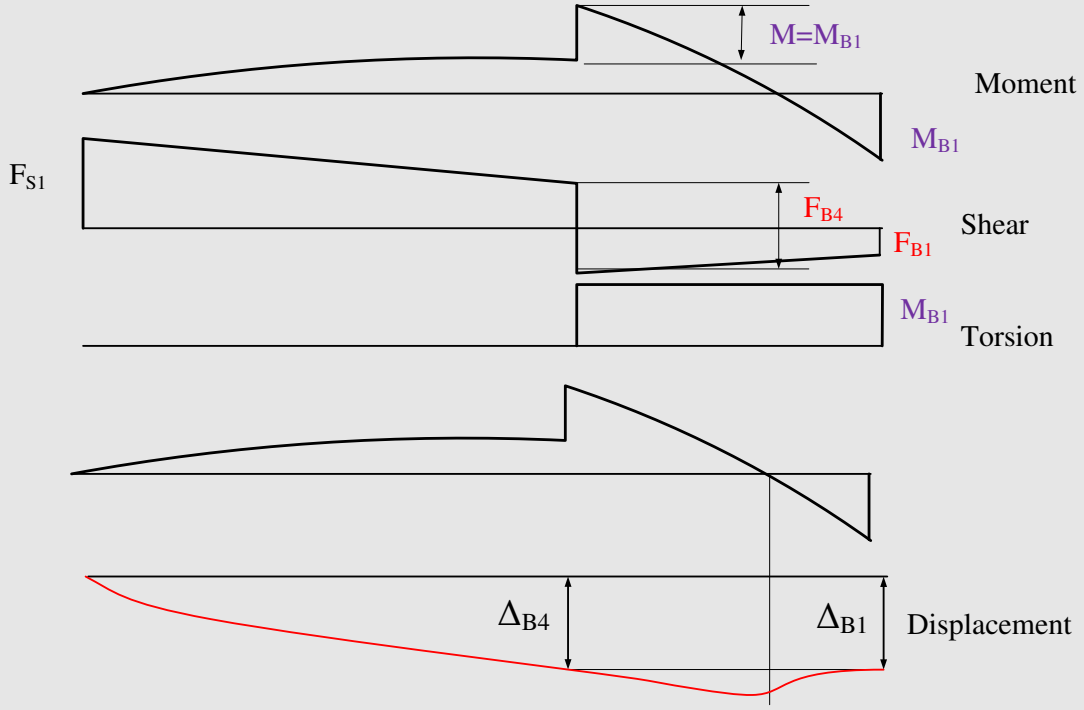
$$\underbrace{I \Rightarrow \begin{cases} M_B = T_{B4} \\ T_B = M_{B4} \end{cases}; \quad II \Rightarrow \begin{cases} T_{B1} = M_{B2} \\ M_{B1} = T_{B2} \end{cases};}_{\text{Statics}} \quad \underbrace{\begin{cases} T_{B4} = T_{B1} \\ M_{B4} = M_{B1} \\ M_{B2} = M_B \\ T_{B2} = T_B \\ F_{B4} = F_{B1} \end{cases}}_{\text{Symmetry}}$$

अथवा



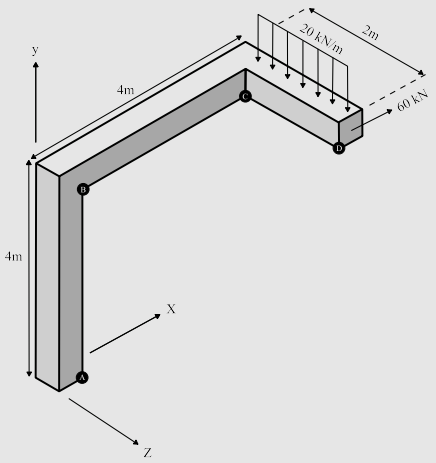
और दोनों समुच्चय प्रतिच्छेद नहीं करते। अतः यह सिद्ध नहीं किया जा सकता कि $M_B = M_{B1}$; निम्न अज्ञात शेष रहते हैं: F_{B1}, M_B, M_{B1}। अंततः आंतरिक बल आरेख होंगे:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



किंतु सममिति से $\Delta_{B1} = \Delta_{B4}$ है और B1 तथा B4 पर ढाल शून्य होनी चाहिए। हल पूर्ण करने के लिए आघूर्ण-वक्रता प्रमेय लागू किए जा सकते हैं।

21.3.7 उदाहरण 21.7: 3D फ्रेम



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. फ्रेम के आधार पर कुल 6 प्रतिक्रियाएँ–3 बल और 3 आघूर्ण–हैं और संतुलन के कुल 6 समीकरण हैं; अतः यह स्थैतिकतः निर्धार्य है।
2. प्रत्येक अवयव में निम्न आंतरिक बल होते हैं–प्रत्येक अवयव के *स्थानीय निर्देशांक तंत्र* $x' - y' - z'$ के पदों में परिभाषित, जहाँ x अवयव की दिशा में है:

अवयव	आंतरिक बल					
अवयव	अक्षीय	अपरूपण		आघूर्ण		ऐंठन
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
$C-D$		✓	✓	✓	✓	
$B-C$	✓		✓	✓	✓	✓
$A-B$	✓	✓		✓	✓	✓

3. इस विशिष्ट समस्या में प्रतिक्रियाएँ पहले निर्धारित करने के स्थान पर प्रत्येक अवयव के अंत पर आंतरिक बल निर्धारित करना अधिक सरल है; आरंभ अवयव $C-D$ से करते हैं। ध्यान दें कि अस्थायी रूप से स्थानीय निर्देशांक तंत्रों के अनुरूप चिह्न-परिपाटी अपनाई गई है।

C-D

$$\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V^C_{y'} = (20)(2) = +40\text{kN}$$
$$\Sigma F_{z'} = 0 \Rightarrow V^C_{z'} = +60\text{kN}$$
$$\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M^C_{y'} = -(60)(2) = -120\text{kN.m}$$
$$\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M^C_{z'} = (20)(2)\frac{2}{2} = +40\text{kN.m}$$

B-C

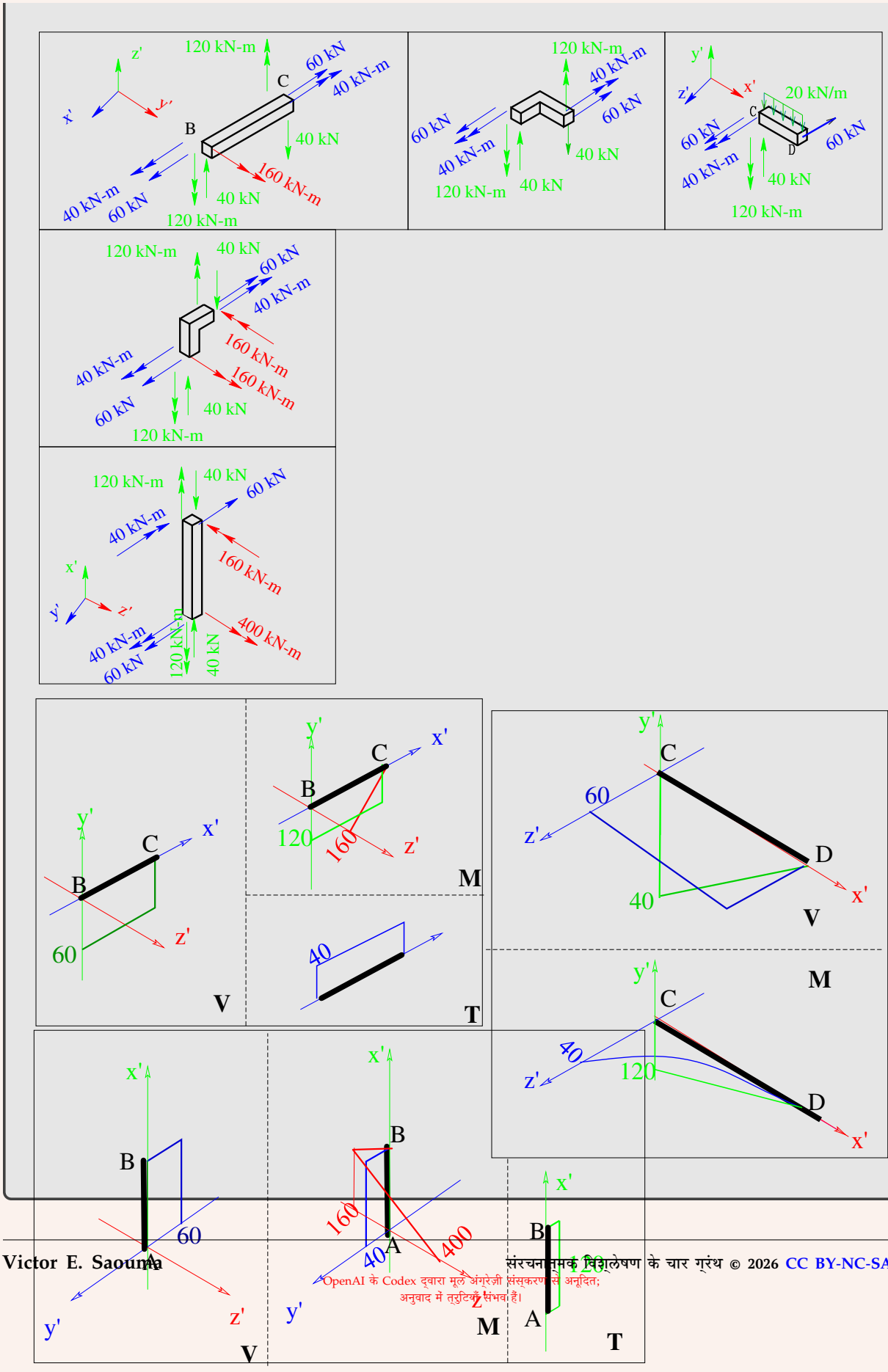
$$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow N^B_{x'} = V^C_{z'} = -60\text{kN}$$
$$\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V^B_{y'} = V^C_{y'} = +40\text{kN}$$
$$\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M^B_{y'} = M^C_{y'} = -120\text{kN.m}$$
$$\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M^B_{z'} = V'^{C}_{y}(4) = (40)(4) = +160\text{kN.m}$$
$$\Sigma T_{x'} = 0 \Rightarrow T^B_{x'} = -M^C_{z'} = -40\text{kN.m}$$

A-B

$$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow N^A_{x'} = V^B_{y'} = +40\text{kN}$$
$$\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V^A_{y'} = N^B_{x'} = +60\text{kN}$$
$$\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M^A_{y'} = T^B_{x'} = +40\text{kN.m}$$
$$\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M^A_{z'} = M^B_{z'} + N^B_{x'}(4) = 160 + (60)(4) = +400\text{kN.m}$$
$$\Sigma T_{x'} = 0 \Rightarrow T^A_{x'} = M^B_{y'} = -120\text{kN.m}$$

यह उदाहरण अक्षीय बल N और अपरूपण V के बीच तथा आघूर्ण M और ऐंठन T के बीच अंतःक्रिया को स्पष्टतः दर्शाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Viaducte de Chillon (1969), Monod-Piguet, Switzerland

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

22 विक्षेप; प्रत्यास्थ वक्र

सारांश

यह अध्याय वंकित अवयवों के विक्षेप का अध्ययन नियामक अवकल समीकरण अथवा उससे संबद्ध विकृति-वक्रता संबंध द्वारा करता है। दूसरा उपागम वक्रता-क्षेत्रफल विधि तक ले जाता है, जिसमें संयुग्मी धरन-विधि एक उपसमुच्चय के रूप में सम्मिलित है। विश्लेषणात्मक जटिलता के विभिन्न स्तरों वाली समस्याएँ प्रस्तुत की गई हैं।

22.1 परिचय 930
22.2 अवकल समीकरण 931
22.2.1 उदाहरण 22.1: द्वि-समाकलन . . 932
22.2.2 उदाहरण 22.2: अधिकतम विक्षेप 933
22.2.3 उदाहरण 22.3: इष्टतम स्की-आकृति 934
22.2.4 उदाहरण 22.4: तैरता धरन . . . 934
22.3 वक्रता 937
22.3.1 उदाहरण 22.5: साइकिल का पहिया 939
22.3.2 उदाहरण 22.6: कुंडलित स्प्रिंग की दृढता 945
22.3.3 वक्रता–विकृति संबंध 946
22.3.4 वक्रता-क्षेत्र विधि (आघूर्ण-क्षेत्र) 949



22.1 परिचय

1 विक्षेपों का निर्धारण संरचनात्मक विश्लेषण का अभिन्न अंग है। सभी संहिताएँ अनुमेय विक्षेप पर सीमा लगाती हैं—कंपन, टकराव और अन्य अवांछनीय प्रभाव घटाने के लिए। इसके अतिरिक्त, बल-विधि द्वारा स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं के विश्लेषण में विक्षेप की गणना महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है—अध्याय 25।

2 सेवायोग्यता आवश्यकताओं को संतुष्ट करने के लिए संरचनाओं के विक्षेप निर्धारित किए जाने चाहिए; अर्थात् *सेवा* भारों के अधीन विक्षेपों को स्वीकार्य मानों तक सीमित करना चाहिए—जैसे $\frac{\Delta}{L} \leq 360$।

3 इस अध्याय में ज्यामितीय विचारों के आधार पर संरचनाओं के विक्षेपों का परीक्षण किया जाएगा। बाद में ऊर्जा-विचारों पर आधारित अधिक शक्तिशाली विधि प्रस्तुत की जाएगी—अध्याय 24।

4 दोनों ही स्थितियों में विक्षेप की गणना स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं के बल-आधारित विश्लेषण की महत्त्वपूर्ण अवस्था है।

5 दो परस्पर संबद्ध विधियाँ प्रस्तुत की जाएँगी:

- धरनों के नियामक अवकल समीकरण का समाकलन द्वारा उपयोग।
- आघूर्ण-वक्रता संबंध का उपयोग।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

22.2 अवकल समीकरण

6 प्रत्यास्थ स्थिति के लिए:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{E}\\ \sigma &= -\frac{M(x)y}{I}\end{aligned}\right\} \varepsilon = -\frac{M(x)y}{EI}$$

इस अंतिम समीकरण को समीकरण 22.15 के साथ संयोजित करने पर मिलता है:

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{22.1}$$

7 दो बार अवकलन करते हैं:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2\frac{M(x)}{EI}}{dx^2} = \frac{1}{EI}\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

8 किंतु पूर्ववर्ती अध्याय में निर्धारित आघूर्ण-अपरूपण-बल संबंध भी उपलब्ध हैं:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV(x)}{dx} &= w(x)\\ \frac{dM(x)}{dx} &= V(x)\end{aligned}\right\} \frac{d^2M(x)}{dx^2} = w(x)$$

प्रतिस्थापन करने पर:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

इस समीकरण का सामान्यीकरण किया जा सकता है:

परिभाषा 22.1: वंकन का नियामक अवकल समीकरण

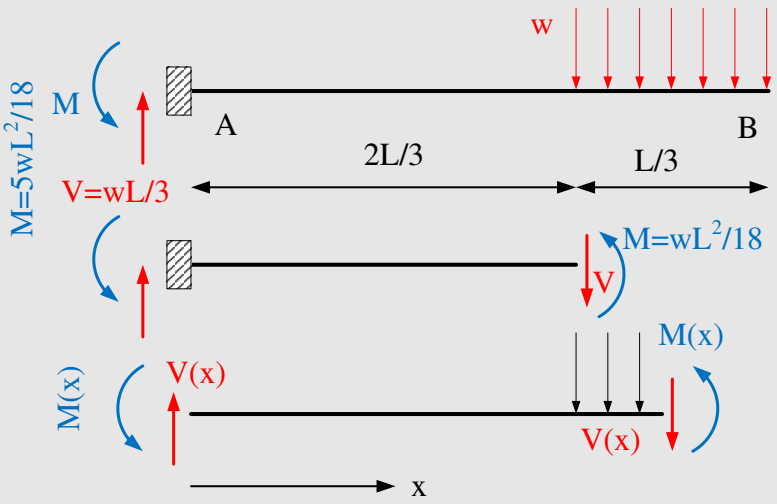
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}EI\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = w(x) \quad \text{or} \quad \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{w(x)}{EI} \tag{22.2}$$

यह धरनों का मूलभूत अवकल समीकरण है। इसी प्रकार के समीकरण बाद में केबलों और धरन-स्तंभों के लिए व्युत्पन्न किए जाएँगे।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

22.2.1 उदाहरण 22.1: द्वि-समाकलन

निम्न बहुधारक धरन के B पर विक्षेप की गणना करनी है:



जब: $0 \le x \le \frac{2L}{3}$

1. आघूर्ण समीकरण

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = \frac{wL}{3}x - \frac{5}{18}wL^2$$

2. एक बार समाकलन

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{6}x^2 - \frac{5}{18}wL^2x + C_1$$

किंतु $x = 0$ पर $\frac{dy}{dx} = 0$ है, $\Rightarrow C_1 = 0$।

3. दो बार समाकलन

$$EIy = \frac{wL}{18}x^3 - \frac{5wL^2}{36}x^2 + C_2$$

पुनः $x = 0$ पर $y = 0$ है, $\Rightarrow C_2 = 0$।

जब: $\frac{2L}{3} \le x \le L$

1. आघूर्ण समीकरण

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = \frac{wL}{3}x - \frac{5}{18}wL^2 - w(x - \frac{2L}{3})(\frac{x - \frac{2L}{3}}{2})$$

2. एक बार समाकलन

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{6}x^2 - \frac{5}{18}wL^2x - \frac{w}{6}(x - \frac{2L}{3})^3 + C_3$$

$x = \frac{2L}{3}$ पर सीमा-शर्त लगाने पर $\frac{dy}{dx}$ बाईं ओर से प्राप्त मान के बराबर होना चाहिए, $\Rightarrow C_3 = 0$।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. दो बार समाकलन

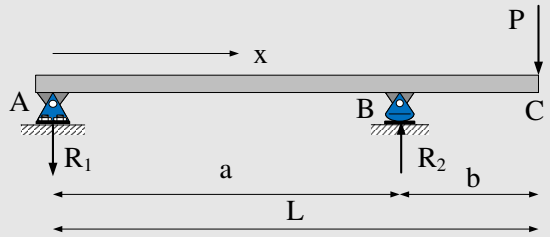
$$EIy = \frac{wL}{18}x^3 - \frac{5}{36}wL^2x^2 - \frac{w}{24}(x - \frac{2L}{3})^4 + C_4$$

पुनः ऊपर के समान तर्क से $C_4 = 0$।

$x = L$ रखने पर मिलता है:

$$y = \frac{163}{1944}\frac{wL^4}{EI}$$

22.2.2 उदाहरण 22.2: अधिकतम विक्षेप



निकटस्थ धरन का अधिकतम विक्षेप निर्धारित करना है।
आधार-प्रतिक्रियाएँ

$$sigmccw_z^B = 0; \Rightarrow aR_1 - bP = 0 \Rightarrow edR_1 = \frac{b}{a}P$$

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^A = 0; \Rightarrow aR_2 - PL = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{L}{a}P$$

अवकल समीकरण

$$EIy'' = -\frac{b}{a}Px + \frac{L}{a}P < x - a >$$

$$EIy' = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{L}{2a}P < x - a >^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{b}{6a}Px^3 + \frac{L}{6a}P < x - a >^3 + C_1x + C_2$$

सीमा-शर्तें लागू करें: $x = 0$ पर $y = 0$, अतः $C_2 = 0$; और $x = a$ पर $y = 0$, अतः $0 = -[b/(6a)]Pa^3 + aC_1$ अथवा $C_1 = (ab/6)P$। भार के नीचे ढाल—ध्यान दें $x = a + b = L$:

$$\begin{aligned} EIy' &= -\frac{b}{2a}P(a+b)^2 + \frac{a+b}{2a}Pb^2 + \frac{ab}{6}P \\ &= -\frac{b}{2a}P(a^2 + 2ab + b^2) + \frac{ab^2 + b^3}{2a}P + \frac{ab}{6}P \\ &= \ldots \\ &= -\frac{1}{6}b(2L + b)P \end{aligned}$$

भार P के नीचे विक्षेप:

$$\begin{aligned} EIy &= -\frac{b}{6a}P(a+b)^3 + \frac{a+b}{6a}Pb^3 + \frac{ab}{6}P(a+b) \\ &= \ldots \\ &= -\frac{1}{3}Lb^2P \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आधारों के बीच अधिकतम विक्षेप वहाँ होगा जहाँ $y' = 0$।

$$EIy' = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{L}{2a} < x-a >^2 + \frac{ab}{6}P$$

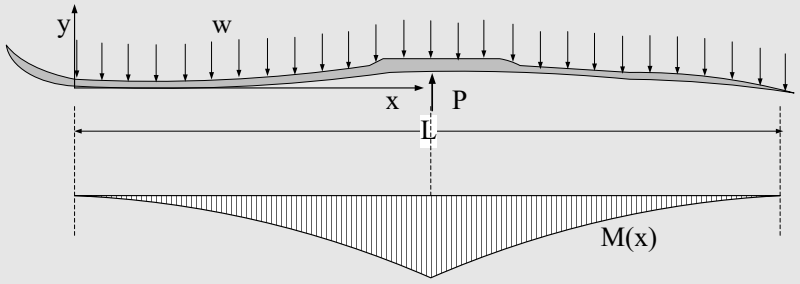
$y' = 0$ पर , $x-a >$ अस्तित्व में नहीं है; अतः $0 = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{ab}{6}P$। a के लिए हल करने पर $a = \frac{1}{\sqrt{3}}a$; अतः लिख सकते हैं:

$$\begin{aligned} EIy_{max} &= -\frac{b}{6a}P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^3 + \frac{ab}{6}P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right) \\ &= \dots \\ &= \frac{a^2 b}{9\sqrt{3}}P \end{aligned}$$

22.2.3 उदाहरण 22.3: इष्टतम स्की-आकृति

ऐसी स्की की आकृति निर्धारित करनी है कि बल P लगाने पर उसके नीचे परिणामी बल एकसमान रूप से वितरित हो।

समस्या को निम्न चित्र द्वारा वर्णित किया जा सकता है, और



निम्न संतुष्ट होना चाहिए:

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

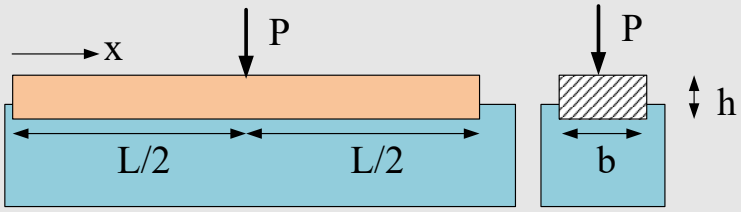
जहाँ $M(x) = wx^2/2$, $w = P/L$, और सीमा-शर्तें $y = 0$, $x = 0$ तथा L पर हैं।

22.2.4 उदाहरण 22.4: तैरता धरन

निम्न अनुभाग Feodossiev, 1977 *Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis* से पुनरुत्पादित है।

चीड की लकडी का धरन, चौडाई $b = 20\text{cm}$, लंबाई $l = 10\text{m}$, $h = 10\text{cm}$, बिंदु-बल $P = 50\text{kgf}$ के अधीन, जल पर है। चीड का घनत्व $\gamma = 0.6\text{gf/cm}^3$ तथा $E \simeq 10^5\text{kgf/cm}^2$ है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



1. नियामक अवकल समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x)$$

जहाँ $q(x)$ प्रति इकाई लंबाई विस्थापित जल का भार है—Archimedes का नियम।

$$w(x) = -\gamma y(x)$$

2. निम्न प्रस्तुत करें:

$$4k^4 = \frac{b\gamma}{EI} = \frac{3\gamma}{Eh^3}$$

तब नियामक अवकल समीकरण सरल होकर:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0 \tag{22.3}$$

होता है, जो प्रत्यास्थ नींव पर धरन का भी अवकल समीकरण है।

3. हल का रूप है:

$$y(x) = A\cosh(kx)\cos(kx) + \frac{1}{2}B\left(\cosh(kx)\sin(kx) + \sinh(kx)\cos(kx)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}C\sinh(kx)\sin(kx) + \frac{1}{4}D\left(\cosh(kx)\sin(kx) - \sinh(kx)\cos(kx)\right)$$

4. इसे पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$y = y_0Y_1(kx) + y_0'\frac{1}{k}Y_2(kx) + \frac{M_0}{EI}\frac{1}{k^2}Y_3(kx) + \frac{V_0}{EI}\frac{1}{k^2}Y_4(kx)$$

जहाँy_0, y_0', M_0 और N_0, $x = 0$ पर क्रमशः विस्थापन, घूर्णन, आघूर्ण और अपरूपण हैं। अतः:

$$N_0 = 0; \qquad M_0 = 0$$

5. y_0 और y_0' को $x = L/2$ पर ऐसे निर्धारित करना शेष है कि $y_0' = 0$ और $N = P/2$ हों।
6. निम्न सारणी का उपयोग करके:

n	$Y_n(kx)$	$Y_n'(kx)$	$Y_n''(kx)$	$Y_n'''(kx)$	$Y_n^{IV}(kx)$
1	$\cosh(kx)\cos(kx)$	$-4kY_4$	$-4k^2Y_3$	$-4k^3Y_2$	$-4k^4Y_1$
2	$\frac{1}{2}\left(cosh(kx)\sin(kx) + \sinh(kx)\cos(kx)\right)$	kY_1	$-4k^2Y_4$	$-4k^3Y_3$	$-4k^4Y_2$
3	$\frac{1}{2}\sinh(kx)\sin(kx)$	kY_2	k^2Y_1	$-4k^3Y_4$	$-4k^4Y_3$
4	$\frac{1}{4}\left(cosh(kx)\sin(kx) - \sinh(kx)\cos(kx)\right)$	kY_3	k^2Y_2	k^3Y_1	$-4k^4Y_4$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्राप्त होता है:

$$\frac{1}{k}y' = -4y_0 Y_4(kx) + y_0' \frac{1}{k} Y_1(kx)$$
$$\frac{1}{k}y'' = -4y_0 Y_3(kx) + y_0' \frac{4}{k} Y_4(kx)$$
$$\frac{1}{k}y''' = -4y_0 Y_2(kx) + y_0' \frac{4}{k} Y_3(kx)$$

7. सीमा-शर्तें इस प्रकार व्यक्त होती हैं[a]:

$$-4y_0 Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) + y_0' \frac{1}{k} Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) = 0$$
$$-4y_0 Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) + y_0' \frac{4}{k} Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) = \frac{P}{2EIk^3}$$

8. $x = 0$ के लिए प्राप्त होता है:

$$y_0 = \frac{P}{8EIk^3} \frac{-Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$
$$\frac{y_0'}{k} = \frac{P}{8EIk^3} \frac{-4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$

9. अतः विस्थापन और ढाल होंगे:

$$y = -P_0 \left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) Y_1(kx) + 4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) Y_2(kx) Y_1(kx) \right]$$
$$y'' = 4P_0 k^2 \left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) Y_3(kx) + 4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4(kx) \right]$$

जहाँ

$$P_0 = \frac{P}{8EIk^3} \frac{1}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$

10. संख्यात्मक मान प्रतिस्थापित करने पर:

$$k^4 = 3 \times 10^{-11} \Rightarrow k = 2.34 \times 10^{-3} \text{cm}^{-1} \Rightarrow \frac{kl}{2} = 1.17$$

और

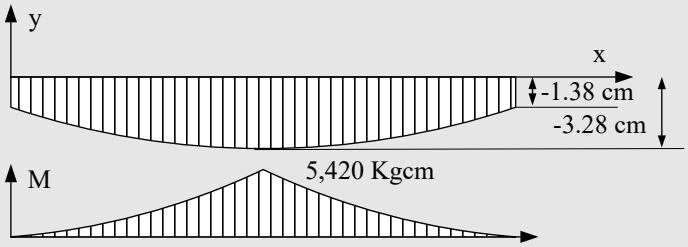
$$Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) = 0.689$$
$$Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) = 1.097$$

11. अंतिम उत्तर है:

$$P_0 = 0.0401P$$
$$y(x) = -0.0401P \left[0.689 Y_1(kx) - 1.058 Y_2(kx) \right] \quad \text{cm}$$
$$M(x) = 146.2P \left[0.689 Y_3(kx) + 1.058 Y_4(kx) \right] \quad \text{kgfcm}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

12. यह हल तब तक वैध है जब तक धरन का पूरा ऊपरी पृष्ठ जल के ऊपर है।



इसी हल को, यद्यपि अधिक कठिनाई के साथ, पट्टिकाओं तक विस्तारित किया जा सकता है। किंतु प्रकृति पहले ही निर्धारित कर चुकी है कि *Victoria-Regia*—विश्व की सबसे बडी पत्ती—को बडे आघूर्णों का प्रतिरोध करते हुए तैरने के लिए उचित रूप से दृढित होना चाहिए।



प्रसंगवश, इससे पाठक को वृक्षों से समान रूप से प्रेरित तथाकथित *शाखित स्थापत्य* की स्मृति होनी चाहिए।

[a] स्मरण करें कि $V = EI\frac{d^3y}{dx^3}$।

22.3 वक्रता

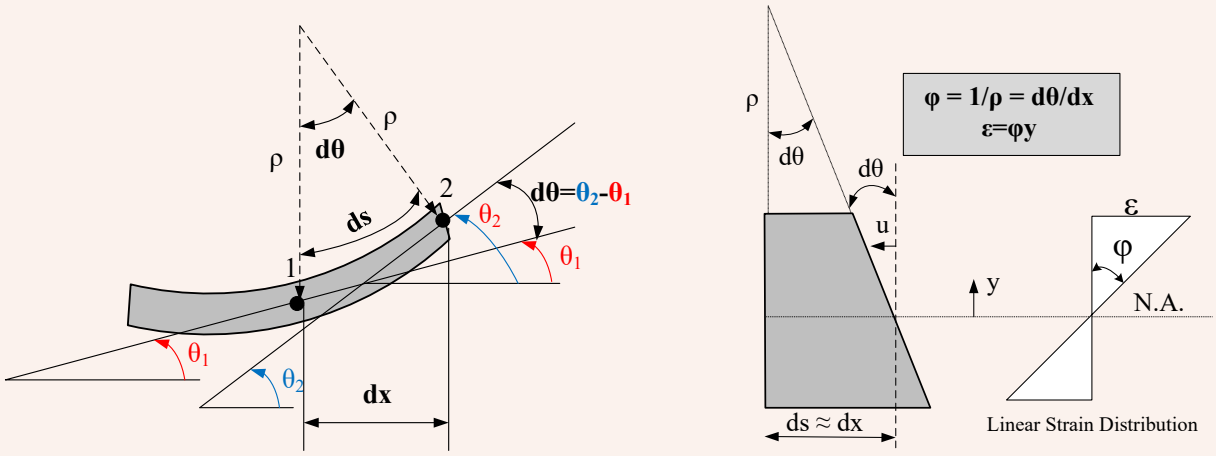
9 वक्रता, चित्र 22.1a, वंकन में अत्यंत महत्त्वपूर्ण पद है—और विद्यार्थी इसे प्रायः भूल जाते हैं। पहले इसका यथार्थ संबंध व्युत्पन्न किया जाएगा और फिर उसे सरल बनाया जाएगा।

यथार्थ व्यंजक

10 वक्रता के व्यंजक की सामान्य व्युत्पत्ति से आरंभ करते हैं, चित्र 22.1a, और पहले वक्रता ϕ को परिभाषित करते हैं:

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\theta}{ds}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) वक्रता की परिभाषा (b) वक्रता-विकृति संबंध

चित्र 22.1: वक्रता और विकृतियाँ

ज्यामिति से $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$ है; अब $t = \frac{dy}{dx}$ परिभाषित करने पर $\theta = \tan^{-1} t$ मिलता है। ϕ पर शृंखला-नियम लगाने से:

$$\phi = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{ds} \tag{22.4}$$

ds को पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\left.\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\ t &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} ds = \sqrt{1+t^2}\,dx \tag{22.5}$$

[11] इसके बाद समीकरण 22.4 और 22.5 संयोजित करने पर:

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}dx} \\ \theta &= \tan^{-1} t \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{dt}{dx} \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} \phi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[12] इस प्रकार ढाल θ, वक्रता ϕ और वक्रता-अर्धव्यास ρ, विस्थापन y से—वंकित अवयव के अनुदिश बिंदु x पर—इस प्रकार संबद्ध हैं:

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{22.6}$$

सन्निकट व्यंजक

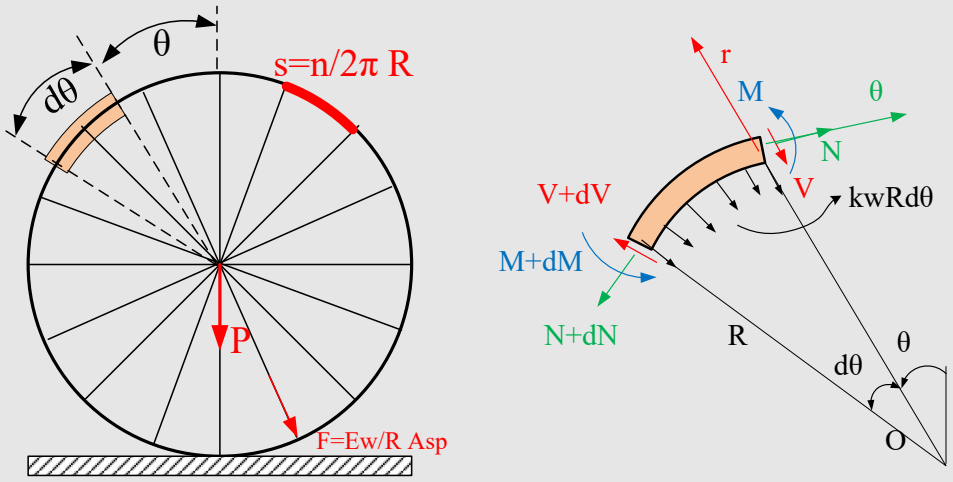
[13] यदि विस्थापन अत्यंत छोटे हों, $\frac{dy}{dx} << 1$, तो समीकरण 22.6 सरल होकर देता है:

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{22.7}$$

22.3.1 उदाहरण 22.5: साइकिल का पहिया

निम्न अनुभाग Feodossiev, 1977 *Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis* से पुनरुत्पादित है।

तीलियों में बलों को उनके अभिविन्यास θ के पदों में निर्धारित करना है[a]।



1. तीलियाँ परस्पर इतनी निकट हैं कि माना जा सकता है कि बाहरी रिम को उनसे सतत आधार मिलता है। अतः सभी व्यावहारिक प्रयोजनों के लिए यह प्रत्यास्थ नींव पर परिधीय धरन है।
2. प्रत्येक तीली की प्रभावी लंबाई $n/2\pi R$ है। इसी प्रकार प्रत्येक तीली अपने अरीय विस्थापन w के समानुपाती बल $F = Ew/RA_{sp}$ वहन करती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. अतः रिम की प्रति इकाई लंबाई पर बल है:

$$\underbrace{\frac{EwA_{sp}}{R}}_{\text{Force per spoke}} \quad \underbrace{\frac{n}{2\pi R}}_{\text{Trib. length/spoke}} = kw_s$$

4. इस प्रकार स्प्रिंग नियतांक है:

$$k = \frac{EA_s n}{2\pi R^2}$$

5. संतुलन के तीन समीकरण लिखते हैं:

$$\Sigma F_r = 0 \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = N + kRw_s$$
$$\Sigma F_\theta = 0 \Rightarrow \frac{dN}{d\theta} + V = 0$$
$$\Sigma_z^O = 0 \Rightarrow R\frac{dN}{d\theta} + \frac{dM}{d\theta} = 0$$

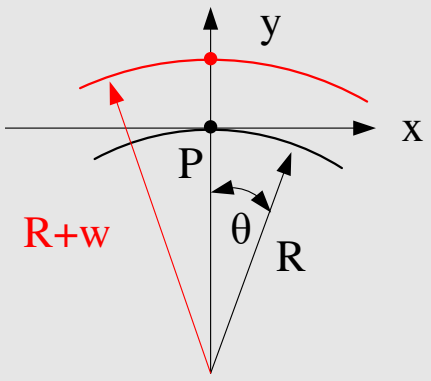
6. V और N का विलोपन करें:

$$kR^2\frac{dw}{d\theta} = \frac{dM}{d\theta} + \frac{d^3M}{d\theta^3}$$

7. वक्रता का परिवर्तन $\Delta(1/\rho)$ आघूर्ण से संबंधित है:

$$M = EI\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

8. अब वक्रता के परिवर्तन का व्यंजक व्युत्पन्न करना है—प्रक्रिया Prof. F. Vernerey के सौजन्य से।



विरूपण से पहले P पर वक्रता $\kappa = \frac{1}{R}$ है; विरूपण के बाद $R = R + w$ है। पहले विरूपित वक्र के चाप का सन्निकटन खोजते हैं:

$$x^2 + (y - (R + w))^2 = R^2 \tag{22.8}$$
$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R} - \left(1 + \frac{w}{R}\right)\right)^2 = 1 \tag{22.9}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$\xi = x/R$, $\eta = y/R$, और $\zeta = w/R$ परिभाषित करें:

$$\xi^2 + \big(\eta + (1+\zeta)\big)^2 = 1$$
$$\xi^2 - \eta^2 - 2\eta - 2\eta\zeta + 1 + 2\zeta + \zeta^2 = 1$$

उच्चतर कोटि के पदों—η^2, $\eta\zeta$ और ζ^2, जो सभी 1 की तुलना में अत्यंत छोटे हैं—को छोड़कर और पुनर्व्यवस्थित करके:

$$\xi^2 - 2\eta + 2\zeta = 0$$
$$\eta = \frac{\xi^2}{2} + \zeta$$
$$y = \frac{x^2}{2R} + w \quad \text{Nice parabolic approximation of a circular arc}$$

अब x को $R\theta$ से प्रतिस्थापित करते हैं:

$$y = \frac{x^2}{2R} + w \simeq \frac{1}{2R}(R\theta)^2 + w \simeq \frac{R_0 + w}{2}\theta^2 + w$$

वक्रता है:

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R^2}\frac{d^2y}{d\theta^2}$$
$$= \frac{1}{R} + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\theta}$$

अतः वक्रता का परिवर्तन है:

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\theta}\right) = -\frac{w}{R^2} - \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d^2\theta}$$

अतः वृत्त के केंद्र से बाहर की ओर निर्देशित धनात्मक विस्थापन w के लिए रिंग की वक्रता घटती है। इस व्यंजक में वक्रता-परिवर्तन के दो घटक हैं। पहला पद w/R^2 रिंग के सरल प्रसार के कारण वक्रता-परिवर्तन को दर्शाता है। दूसरा पद $\frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d^2\theta}$, जो d^2w/ds^2 के बराबर है, सीधे दंड में होने वाले सामान्य वक्रता-परिवर्तन को दर्शाता है।

9. M प्रतिस्थापित करने पर अंतिम नियामक अवकल समीकरण है:

$$\frac{d^5w}{d\theta^5} + 2\frac{d^3w}{d\theta^3} + a^2\frac{dw}{d\theta} = 0$$

जहाँ

$$a^2 = \frac{R^4k}{EI} + 1$$

10. इस अवकल समीकरण के हल का रूप है:

$$w = C_0 + C_1\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta + C_2\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta + C_3\cosh\alpha\theta + C_4\sinh\alpha\theta\cos\beta\theta$$

जहाँ

$$\alpha = \sqrt{\frac{a-1}{2}}; \qquad \beta = \sqrt{\frac{a+1}{2}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11. प्रतिस्थापित करने पर:

$$M = -\frac{EI}{R^2}\left(C_0 - 2\alpha\beta C_1 \sinh\alpha\theta \sin\beta\theta + 2\alpha\beta C_2 \cosh\alpha\theta\cos\beta\theta\right)$$
$$V = 2\alpha\beta\frac{EI}{R^3}\left[(\alpha C_1 - \beta C_2)\cosh\alpha\theta\sin\beta\theta + (\beta C_1 - \alpha C_2)\sinh\alpha\theta\cos\beta\theta\right]$$

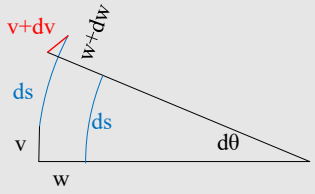
12. रिम ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष सममित रूप से विरूपित होता है; अतः w सम फलन होना चाहिए—अर्थात् θ का चिह्न बदलने पर नहीं बदलना चाहिए। इसलिए C_3 और C_4 शून्य होने चाहिए।
13. सीमा-शर्तें:

$$\begin{aligned}\tfrac{dw}{d\theta} &= 0; \quad \theta = \pi\\ V &= -\tfrac{P}{2}; \quad \theta = \pi\\ \int_0^\pi w d\theta &= 0\end{aligned}$$

14. अंतिम शर्त का अर्थ है कि भार के अधीन ऊपरी और निचले बिंदु ऊर्ध्वाधर बने रहते हैं। वास्तव में विरूपण से पहले और बाद में रिम के अतिसूक्ष्म खंड पर विचार करने पर अविस्तार्यता की शर्त होगी:

$$dv + wd\theta = 0 \Rightarrow v = -\int wd\theta$$

जहाँ v चाप के अनुदिश स्पर्शरेखीय विस्थापन है।



15. तीनों सीमा-शर्तें लागू करें:

$$\begin{aligned}&C_1\left[\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi - \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right]\\ &\quad + C_2\left[\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi + \alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] &&= 0 \qquad (22.10)\\ &C_1\left[\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi + \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right]\\ &\quad - C_2\left[\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi - \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] &&= -\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta} \qquad (22.11)\\ &C_0\pi + \frac{C_1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi + \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right)\\ &\quad + \frac{C_2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi - \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right) &&= 0 \qquad (22.12)\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16. नियतांकों के लिए हल करें:

$$C_0 = \frac{PR^3}{2\pi a^2 EI}$$

$$C_1 = -\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi + \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi\right)}$$

$$C_2 = \frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi - \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi\right)}\pi$$
$$+ \frac{C_1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi + \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right)$$
$$+ \frac{C_2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi - \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right) = 0$$

17. w और M के अंतिम व्यंजक:

$$w(\theta) = \frac{PR^3}{4\alpha\beta EI}\left(\frac{2\alpha\beta}{\pi a^2} - A\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta + B\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta\right) \tag{22.13}$$

$$M(\theta) = -\frac{PR}{2}\left(\frac{1}{\pi a^2} + A\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta + B\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta\right) \tag{22.14}$$

जहाँ

$$A = \frac{\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi + \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi\right)}$$

$$B = \frac{\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi - \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi\right)}$$

18. तीली में बल होगा:

$$P_r(\theta) = \frac{EA_{sp}}{R}w(\theta)$$

19. **संख्यात्मक अनुप्रयोग।** रिम और तीलियों के प्रत्यास्थता गुणांक समान मानते हुए निम्न गुणों वाले पहिए पर विचार करते हैं:

राशि	प्रतीक	मान
तीलियों की संख्या	n	36
रिम की त्रिज्या	R	31.2 cm
तीली का अनुप्रस्थ काट	A_{sp}	0.22 cm^2
रिम का जड़त्व आघूर्ण	I	0.3 cm^4

समीकरणों (4) और (9) से, यह ध्यान रखते हुए कि E निरस्त हो जाता है:

$$a^2 = \frac{A_{sp}\,n\,R^2}{2\pi I} + 1 = \frac{0.22\cdot 36\cdot 31.2^2}{2\pi\cdot 0.3} + 1 = 577.7, \qquad a = 24.04$$

समीकरण (10) से:

$$\alpha = \sqrt{\frac{24.04-1}{2}} = 3.395, \qquad \beta = \sqrt{\frac{24.04+1}{2}} = 3.539$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

$\theta = \pi$ पर अतिपरवलयिक फलन संतुष्ट करते हैं: $\sinh \alpha\pi \approx \cosh \alpha\pi \approx \tfrac{1}{2} e^{10.66}$, जबकि त्रिकोणमितीय मान हैं: $\sin \beta\pi = -0.992$ और $\cos \beta\pi = +0.1223$। A और B के व्यंजकों में प्रतिस्थापित करने पर:

$$A = -0.245\, e^{-10.66}, \qquad B = +0.326\, e^{-10.66}$$

तब लगाए गए भार P—kgf में—के लिए व्यंजक (22.13)–(22.14) हो जाते हैं:

$$M(\theta) = P\big(-0.00855 + 3.80\, e^{-10.66} \sinh \alpha\theta \sin \beta\theta - 5.05\, e^{-10.66} \cosh \alpha\theta \cos \beta\theta\big) \ \text{kgf cm}$$

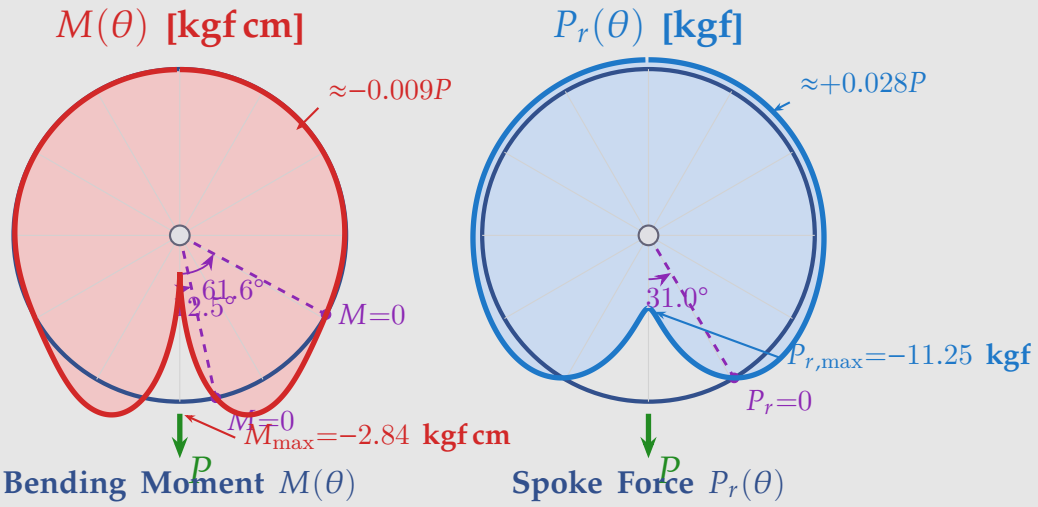
$$P_r(\theta) = P\big(\ \ 0.0278 + 0.514\, e^{-10.66} \cosh \alpha\theta \cos \beta\theta + 0.683\, e^{-10.66} \sinh \alpha\theta \sin \beta\theta\big) \ \text{kgf}$$

गुणक $e^{-10.66}$ के कारण M और P_r दोनों भार-बिंदु $\theta = \pi$ से दूर अत्यंत तीव्रता से क्षीण होते हैं; π से थोड़ा-सा हटे कोणों पर भी दोलनी पद नगण्य हैं और अधिकांश रिम में $M \approx -0.00855\, P$ तथा $P_r \approx 0.0278\, P$ हैं।

$P = 40$ kgf के लिए भार-बिंदु पर शिखर मान हैं:

$$M_{\max} = 88 \ \text{kgf cm}, \qquad P_{r,\max} = 11.2 \ \text{kgf}$$

पहिए के चारों ओर बंकन आघूर्ण और तीली-बल के वितरण नीचे दर्शाए गए हैं।



टिप्पणी: पहिए के परितः बंकन आघूर्ण $M(\theta)$ और तीलियों का बल $P_r(\theta)$ ($P = 40$ kgf, $n = 36$, $R = 31.2$ cm)। खंडित त्रिज्याएँ शून्य-पार बिंदुओं को दर्शाती हैं; कोणों को भार की दिशा से मापा गया है। दूर-क्षेत्र: $M_\infty = -PR/(2\pi a^2) \approx -0.009P$ kgf cm।

20. **तीलियों के पूर्व-तनाव का प्रभाव।** उपर्युक्त विश्लेषण तीलियों को एक निष्क्रिय प्रत्यास्थ माध्यम मानता है और पहिए के समंजन (truing) के समय दिए गए आरंभिक पूर्व-तनाव T_0 को सम्मिलित नहीं करता। सेवा-अवस्था में तीलियाँ केवल तनन वहन कर सकती हैं; ढीली हुई तीली कोई प्रत्यास्थ प्रतिरोध नहीं देती, जिससे सतत-नींव प्रतिरूप अमान्य हो जाता है। ऊपर परिकलित राशि $P_{r,\max}$ आरोपित भार से तीलियों के बल में होने वाली *अधिकतम कमी* को निरूपित करती है। भार P के अधीन पहिए को संरचनात्मक रूप से सुरक्षित रखने के लिए समंजन पूर्व-तनाव को अतः संतुष्ट करना चाहिए

$$T_0 > P_{r,\max}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दूसरे शब्दों में, भार लगाए जाने के बाद प्रत्येक तीली में धनात्मक अवशिष्ट तनन बना रहना चाहिए। संख्यात्मक उदाहरण में इसके लिए प्रत्येक तीली हेतु $T_0 > 11.2$ kgf आवश्यक है। सामान्य प्रतिस्पर्धी साइकिल-पहियों में प्रत्येक तीली को 80–120 kgf तक समंजित किया जाता है, जिससे पर्याप्त सुरक्षा-अंतर मिलता है।

इस समस्या को सर्वप्रथम Joukowsky, 1948[b] ।

[a]समस्या Caroline Saouma को समर्पित है।

[b]Nikolai Yegorovich Joukowsky (1847–1921), मॉस्को टेक्निकल स्कूल में यांत्रिकी के प्रोफेसर, रूसी विमानन के जनक और Kutta–Joukowsky उत्थापन प्रमेय के प्रवर्तक के रूप में अधिक विख्यात हैं। प्रत्यास्थ नींव पर वलय के रूप में साइकिल-पहिए का उनका हल Feodossiev, 1977 से कई दशक पूर्व का है और मॉस्को यांत्रिकी परंपरा के माध्यम से प्रसारित हुआ।

22.3.2 उदाहरण 22.6: कुंडलित स्प्रिंग की दृढता

हम तार की कुंडलियों से बने एक कुंडलित स्प्रिंग की दृढता k व्युत्पन्न करना चाहते हैं।

व्यास d के तार से निर्मित और माध्य व्यास D की कुंडली में लिपटा कुंडलित स्प्रिंग, अक्षीय बल F लगाए जाने पर मुख्यतः अपरूपण द्वारा विरूपित होता है। बल F लगाने पर स्प्रिंग, हुक के नियम के अनुसार, विस्थापन Δ (या ΔL) से खिंचता है:

$$F = k\delta$$

जहाँ k वह स्प्रिंग-दृढता है जिसे हम व्युत्पन्न करना चाहते हैं।

प्रत्येक कुंडली में मरोड स्प्रिंग पर बल F लगाने पर प्रत्येक कुंडली में ऐंठन अथवा मरोड उत्पन्न होता है। एक कुंडली के लिए यह बल कुंडली के अक्ष के परितः बलाघूर्ण T उत्पन्न करता है, जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$T = F \cdot \frac{D}{2}$$

मरोडी विरूपण और ऐंठन कोण बेलनाकार दंड (या स्प्रिंग-कुंडली) के लिए ऐंठन कोण θ, बलाघूर्ण T के कारण, इस प्रकार परिकलित किया जा सकता है:

$$\theta = \frac{T \cdot L_{\text{coil}}}{JG}$$

जहाँ:

- $L_{\text{coil}} = 2\pi D$ एक कुंडली की लंबाई है (क्योंकि प्रत्येक कुंडली मूलतः तार का एक वृत्ताकार फंदा है),
- $J = \frac{\pi d^4}{32}$, व्यास d वाले वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट का ध्रुवीय जडत्व आघूर्ण है,
- G स्प्रिंग-सामग्री का अपरूपण मापांक है।

अतः एक कुंडली के लिए ऐंठन कोण होगा:

$$\theta = \frac{T \cdot 2\pi D}{\frac{\pi d^4}{32} \cdot G} = \frac{32 \cdot T \cdot D}{d^4 \cdot G}$$

स्प्रिंग का कुल विरूपण चूँकि प्रत्येक कुंडली θ कोण से ऐंठती है और कुल n कुंडलियाँ हैं, इसलिए पूरे स्प्रिंग का कुल कोणीय ऐंठन Θ है:

$$\Theta = n \cdot \theta$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्प्रिंग के सिरे का अक्षीय विस्थापन Δ, कुल कोणीय ऐंठन से इस प्रकार संबंधित है:

$$\Delta = \Theta \cdot \frac{D}{2} = n \cdot \theta \cdot \frac{D}{2}$$

प्रतिस्थापन और सरलीकरण $\theta = \frac{32 \cdot T \cdot D}{d^4 \cdot G}$ और $T = F \cdot \frac{D}{2}$ प्रतिस्थापित करें:

$$\Delta = n \cdot \frac{32 \cdot F \cdot \frac{D}{2} \cdot D}{d^4 \cdot G} \cdot \frac{D}{2}$$

सरलीकरण से प्राप्त होता है:

$$\Delta = \frac{16 F n D^3}{d^4 G}$$

दृढता k की व्युत्पत्ति हुक के नियम $F = k\Delta$ से k के लिए हल करने पर:

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{G d^4}{16 n D^3}$$

अथवा, जैसा कि पारंपरिक रूप से लिखा जाता है:

$$k = \frac{G d^4}{8 D^3 n}$$

लंबाई L का दृढता k से संबंध चूँकि $L = n \cdot p$, जहाँ p स्प्रिंग की पिच है, अतः n को L के पदों में व्यक्त किया जा सकता है:

$$n = \frac{L}{p}$$

दृढता-समीकरण में n प्रतिस्थापित करने पर:

$$k = \frac{G d^4}{8 D^3 \left(\frac{L}{p}\right)} = \frac{G d^4 \cdot p}{8 D^3 L}$$

यह अंतिम रूप दर्शाता है कि दृढता k, लंबाई L के व्युत्क्रमानुपाती है:

$$k \propto \frac{1}{L}$$

अतः स्प्रिंग की लंबाई बढाने पर (कुंडलियों की संख्या बढाकर) उसकी दृढता घटती है, क्योंकि प्रत्येक कुंडली भार के अधीन स्प्रिंग के कुल विरूपण में योगदान देती है। उदाहरण 24.3.15 भी देखें।

22.3.3 वक्रता–विकृति संबंध

14 वक्रता–विकृति संबंध चित्र 22.1b में दर्शाया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[15] धनात्मक $d\theta$ का धनात्मक y (ऊपरी तंतुओं) पर प्रभाव, ऊपरी तंतुओं में संकुचन $du = -yd\theta$ उत्पन्न करेगा। दोनों पक्षों को dx से भाग देने पर,

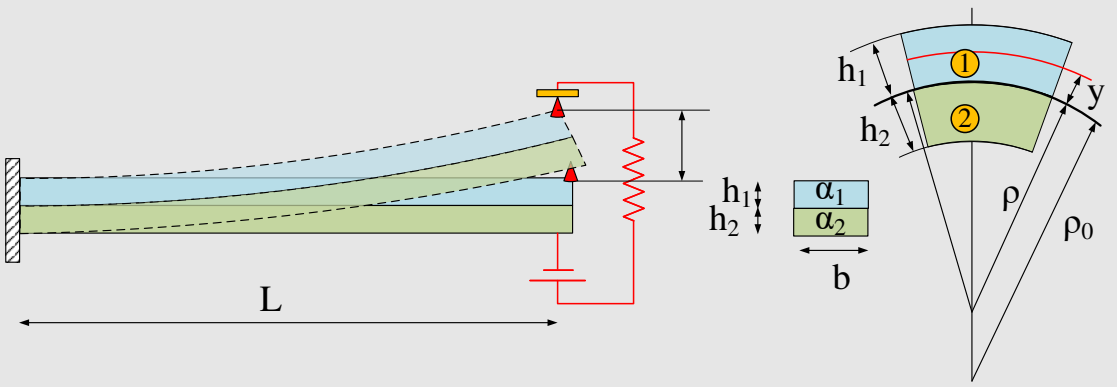
$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = -y\frac{d\theta}{dx}$$

इसे समीकरण 22.7 के साथ संयोजित करने पर, वक्रता (ϕ), प्रत्यास्थ वक्र (अर्थात् विस्थापन) (y), और रैखिक विकृति (ε) के बीच मूलभूत संबंध प्राप्त होता है।

$$\frac{1}{\rho} = \phi = -\frac{\varepsilon}{y} \tag{22.15}$$

[16] ध्यान दें कि अभी तक सामग्री के गुणों के विषय में कोई धारणा नहीं बनाई गई है; अर्थात् सामग्री प्रत्यास्थ अथवा अप्रत्यास्थ हो सकती है।

22.3.3.1 उदाहरण 22.7: द्विधात्विक स्विच



कक्ष के तापमान को नियंत्रित करने वाले तापस्थापी स्विचों में द्विधात्विक अवयवों का प्रायः उपयोग होता है। द्विधात्विक अवयव, भिन्न तापीय प्रसार गुणांकों वाली दो दृढतापूर्वक जुडी धातु-पट्टियों से बनता है। गर्म किए जाने पर उसके घटकों के असमान प्रसार के कारण द्विधात्विक पट्टी मुडती है। यदि एक सिरा दृढता से आबद्ध हो, तो दूसरा मुक्त सिरा एक निश्चित मात्रा Δv से विस्थापित होगा। अवयव को प्रायः आरंभिक वक्रता $\frac{1}{\rho_0}$ सहित वक्र बनाया जाता है। हम वक्रता में परिवर्तन, विस्थापन के अधिकतम होने की शर्त, और $\Delta_v^{\max}$ निर्धारित करना चाहते हैं।

अतः हम लंबाई ds का एक खंड लेते हैं, जिसकी संधि-सतह पर आरंभिक वक्रता $\frac{1}{\rho_0}$ है। संधि से y दूरी पर स्थित तंतु की विकृति है

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तापीय विस्तार को घटाकर और परिणामी अंतर को संबंधित प्रत्यास्थता मापांक से गुणा करके, संधि से y दूरी पर तंतु में प्रतिबल निर्धारित किया जा सकता है

$$\sigma_1 = E_1\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_1 \Delta T\right] \qquad 0 \le y \le h_1$$
$$\sigma_2 = E_2\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_2 \Delta T\right] \qquad -h_2 \le y \le 0$$

परंतु द्विधात्विक अवयव के काट पर अभिलंब बल और आघूर्ण दोनों शून्य होने चाहिए

$$b\int_0^{h_1}\sigma_1 dy + b\int_{-h_2}^{0}\sigma_2 dy = 0$$
$$b\int_0^{h_1}\sigma_1 y dy + b\int_{-h_2}^{0}\sigma_2 y dy = 0$$

σ_1 और σ_2 प्रतिस्थापित करके समाकलन करने पर प्राप्त होता है

$$\varepsilon_0(E_1h_1+E_2h_2) - (\alpha_1E_1h_1+\alpha_2E_2h_2)\Delta T + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^2 - E_2h_2^2) = 0$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon_0(E_1h_1^2 - E_2h_2^2) - \frac{1}{2}(E_1\alpha_1h_1^2 - E_2\alpha_2h_2^2)\Delta T + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^3 + E_2h_2^3) = 0$$

ε_0 का विलोपन करने पर वक्रता में परिवर्तन मिलता है

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0} = \frac{6\Delta T(\alpha_1-\alpha_2)}{\frac{(E_1h_1^2-E_2h_2^2)^2}{E_1E_2h_1h_2(h_1+h_2)} + 4(h_1+h_2)}$$

वक्रता में परिवर्तन, तापमान के परिवर्तन और तापीय प्रसार गुणांकों के अंतर के समानुपाती है। वक्रता में अधिकतम परिवर्तन तब होता है जब घटक पट्टियों की मोटाइयाँ इस प्रकार चुनी जाएँ कि

$$E_1h_1^2 = E_2h_2^2$$

तब

$$\Delta\kappa = \frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0} = \frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1-\alpha_2}{h_1+h_2}$$

द्वितीय वक्रता-क्षेत्र प्रमेय लागू करके अब कैंटिलीवर धरन के अग्रभाग का विक्षेप निर्धारित किया जा सकता है। धरन के अनुदिश वक्रता (में परिवर्तन) नियत है

$$\Delta_V^{\max} = \Delta kappa \times L \times \frac{L}{2}$$
$$= \frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1-\alpha_2}{h_1+h_2}\frac{L^2}{2}$$

निःसंदेह, द्वितीय वक्रता-क्षेत्र प्रमेय से वही परिणाम प्राप्त होगा जो आभासी कार्य विधि से मिला था

$$\Delta_V^{\max} = \int_o^L \underbrace{(1)(x)}_{\delta\overline{M}}\underbrace{\Delta\kappa}_{M/EI}dx$$
$$= \frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1-\alpha_2}{h_1+h_2}\frac{L^2}{2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

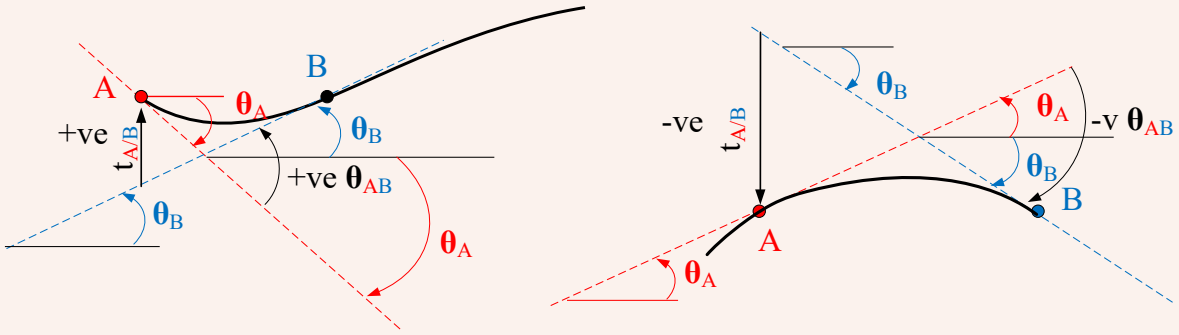
22.3.4 वक्रता-क्षेत्र विधि (आघूर्ण-क्षेत्र)

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §11.4.2 देखें

17 *वक्रता-क्षेत्र विधि* (जिसे प्रायः त्रुटिवश *आघूर्ण-क्षेत्र विधि* कहा जाता है), प्रत्यास्थ वक्र के आधार पर विस्थापनों को हल करने की एक ज्यामितीय विधि है (द्वि-समाकलन की विश्लेषणात्मक विधि के विपरीत)। इस विधि से दो प्रमेय संबद्ध हैं।

22.3.4.1 चिह्न परिपाटी

18 वक्रता-क्षेत्र विधि लागू करते समय चिह्नों के प्रति विशेष सावधानी आवश्यक है। चित्र 22.2 इसे स्पष्ट करने का प्रयास करता है।



चित्र 22.2: धरन की विपरीत वक्रताओं के लिए वक्रता-क्षेत्र विधि की चिह्न परिपाटी

22.3.4.2 प्रथम वक्रता-क्षेत्र प्रमेय

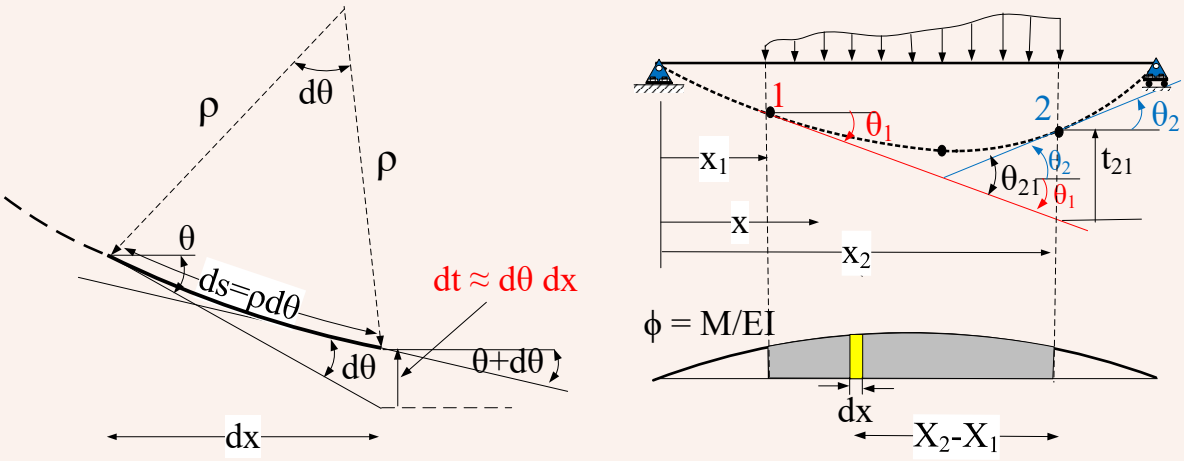
19 चित्र 22.3 और समीकरण 22.1 के अनुसार $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$ है; चित्र 22.3 के संदर्भ में इसे इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है

$$\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1 = \int_{x_1}^{x_2} d\theta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{EI} dx = \int_{x_1}^{x_2} \kappa(x) dx \tag{22.16}$$

परिभाषा 22.2: प्रस्ताव; प्रथम वक्रता-क्षेत्र प्रमेय

भारित नम्य अवयव के किन्हीं दो काटों के बीच ढाल (अर्थात् वक्रता) का अंतर, उन दोनों बिंदुओं के बीच के M/EI आरेख के क्षेत्रफल के बराबर होता है। अथवा बंकन अनुभव कर रही धरन में

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 22.3: वक्रता-क्षेत्र विधियाँ

ढाल (θ) का परिवर्तन—धरन के अनुदिश बिंदु A (जहाँ x_A) और बिंदु B (जहाँ x_B) के बीच—इन दोनों बिंदुओं के बीच धरन की वक्रता के समाकल के बराबर होता है।

परिभाषा 21.4 से समानता पर ध्यान दें:

$$\Delta V_{21} = V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx$$

22.3.4.3 द्वितीय वक्रता-क्षेत्र प्रमेय

[20] पुनः, चित्र 22.3 के संदर्भ में t_{21} द्वारा बिंदु 2 और बिंदु 1 पर स्पर्शरेखा के बीच की दूरी परिभाषित करते हैं। अतिसूक्ष्म दूरी $ds = \rho d\theta$ के लिए और लघु विस्थापनों की दशा में इससे प्राप्त होगा

$$\left.\begin{aligned} dt &= d\theta(x_2 - x_1) \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{M}{EI} \end{aligned}\right\} dt = \frac{M}{EI}(x_2 - x_1)dx$$

अथवा

$$t_{21} = \int_{x_1}^{x_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{EI}(x_2 - x_1)dx$$

सावधान रहें कि $t_{AB} \neq t_{BA}$। t_{AB}, A और B पर स्पर्शरेखा के बीच की दूरी है। दूसरी ओर, t_{BA} नोड B और A पर स्पर्शरेखा के बीच की दूरी है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 22.3: प्रस्ताव: द्वितीय वक्रता-क्षेत्र प्रमेय

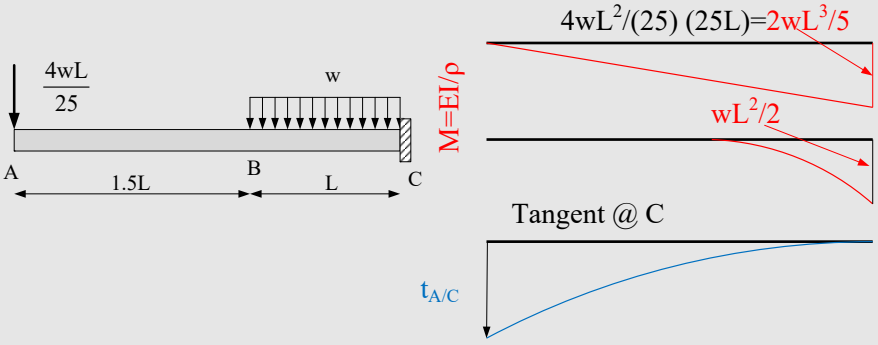
भारित नम्य अवयव पर बिंदु 2 का, बिंदु 1 पर विक्षेप-वक्र की स्पर्शरेखा से स्पर्शरेखीय विचलन (t_{21}), 1 और 2 के बीच वक्रता-आरेख के क्षेत्रफल के बिंदु 2 के परितः आघूर्ण के बराबर होता है।

[21] परिभाषा 21.5 से समानता पर ध्यान दें

$$\Delta M_{21} = M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V(x)dx \tag{22.17}$$

22.3.4.3.1 उदाहरण 22.8: वक्रता-क्षेत्र, कैंटिलीवर धरन

हम बिंदु A का मान निर्धारित करना चाहते हैं



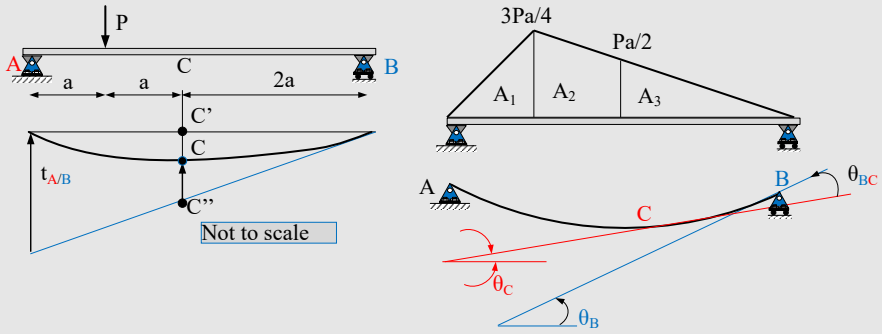
$$EIt_{A/C} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{-2wL^2}{5}\right)\left(\frac{5L}{2}\right)}_{\text{area}}\underbrace{\left(\frac{2}{3}\frac{5L}{2}\right)}_{\text{Moment wrt A}} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{-wL^2}{2}\right)(L)}_{\text{area}}\underbrace{\left(\frac{9L}{4}\right)}_{\text{Moment wrt A}}$$
$$= -\frac{29wL^4}{24}$$

अतः, $\Delta_A = \frac{29wL^4}{24EI}$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

22.3.4.3.2 उदाहरण 22.9: आघूर्ण-वक्रता, सरल आलंबित धरन

निम्नलिखित उदाहरण के लिए हम Δ_C और θ_C निर्धारित करना चाहते हैं



विक्षेप Δ_C ज्यामिति से $\Delta_C = c'c = c'c" - c"c$, $c"c = t_{C/B}$, और $c'c" = \frac{t_{A/B}}{2}$ द्वारा निर्धारित होता है

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{3Pa}{4}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}\right)}_{A_1} + \underbrace{\left(\frac{3Pa}{4}\right)\left(\frac{3a}{2}\right)\left(a+\frac{3a}{3}\right)}_{A_2+A_3}\right]$$

$$\text{Moment} \qquad \text{Moment}$$

$$= \frac{5Pa^3}{2EI}$$

यह धनात्मक है, अतः B से खींची गई स्पर्शरेखा के ऊपर है

$$t_{C/B} = \frac{1}{EI}\left(\frac{Pa}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{Pa^3}{3EI}$$

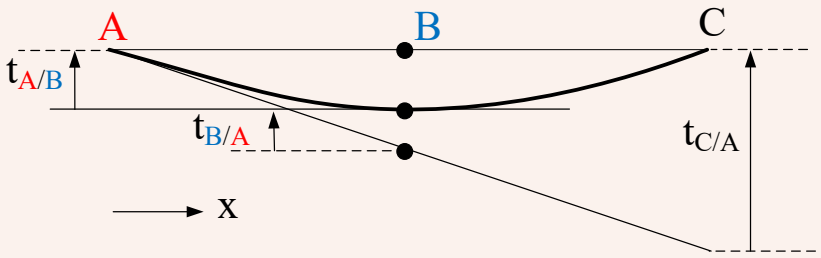
यह भी धनात्मक है, अतः B से खींची गई स्पर्शरेखा के ऊपर है। अंततः,

$$\Delta_C = \frac{5Pa^3}{4EI} - \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{11}{12}\frac{Pa^3}{EI}$$

घूर्णन θ_C है

$$\left.\begin{aligned}\theta_C &= \theta_B - \theta_{BC}\\ \theta_{BC} &= A_3\\ \theta_B &= \frac{t_{A/B}}{L}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_C = \frac{5Pa^3}{2EI(4a)} - \left(\frac{Pa}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right) = \frac{Pa^2}{8EI}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 22.4: आघूर्ण-क्षेत्र विधि द्वारा अधिकतम विक्षेप

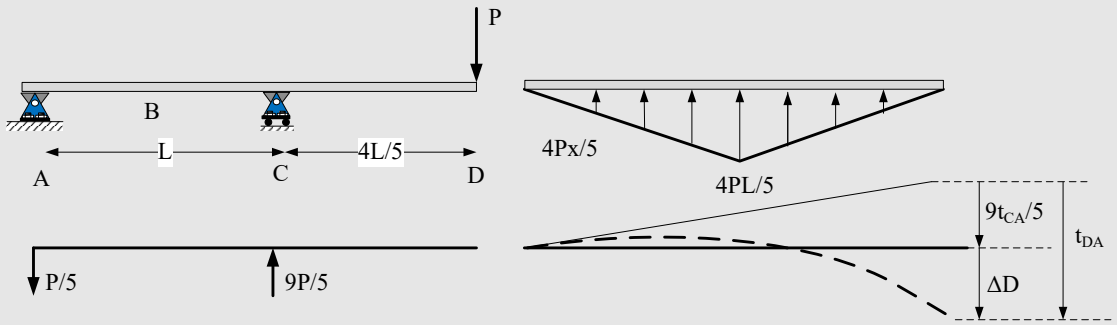
22.3.4.4 अधिकतम विक्षेप

[22] धरन के अनुदिश किसी संधि का सापेक्ष विक्षेप अधिकतम (अथवा न्यूनतम) होगा यदि $\frac{dy}{dx} = 0$ अथवा $\theta = 0$ हो। अतः Δ_{max} निर्धारित किया जा सकता है यदि x ज्ञात हो, चित्र 22.4। x निर्धारित करने के लिए:

1. $t_{C/A}$ परिकलित करें।
2. $\theta_A = \frac{t_{C/A}}{L}$
3. $\theta_B = 0$ और $\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B$, अतः $\theta_{AB} = \theta_A$। इसलिए प्रथम प्रमेय का उपयोग करके θ_{AB} को x के पदों में परिकलित करें।
4. मद 2 और 3 को समान रखें, फिर x के लिए हल करें।

22.3.4.4.1 उदाहरण 22.10: अधिकतम विक्षेप

हम D पर विक्षेप और B पर अधिकतम विक्षेप निर्धारित करना चाहते हैं



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D पर विक्षेप:

$$\Delta_D = t_{D/A} - \frac{9}{5} t_{C/A}$$
$$EI t_{C/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)(L)\left(\frac{L}{3}\right)$$
$$t_{C/A} = -\frac{2PL^3}{15EI}$$
$$EI t_{D/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)(L)\left(\frac{17L}{15}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)\left(\frac{4L}{5}\right)\left(\frac{8L}{15}\right)$$
$$t_{D/A} = -\frac{234}{375}\frac{PL^3}{EI}$$

प्रतिस्थापन करने पर प्राप्त होता है

$$\Delta_D = -\frac{48}{125}\frac{PL^3}{EI}$$

B पर अधिकतम विक्षेप:

$$t_{C/A} = -\frac{2PL^3}{15EI}$$
$$\theta_A = \frac{t_{C/A}}{L} = -\frac{2PL^2}{15EI}$$
$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{4Px}{5}\right)(x)\right] = -\frac{2}{5}\frac{Px^2}{EI}$$
$$\theta_A = \theta_{AB} \Rightarrow -\frac{2}{15}\frac{PL^2}{EI} = -\frac{2}{5}\frac{Px^2}{EI} \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$
$$\Delta_{max} = \left(\frac{4Px}{5EI}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x\right) \text{ at } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \Delta_{max} = \frac{4PL^3}{45\sqrt{3}EI}$$

22.3.4.5 तापमान–वक्रता संबंध

23 अनेक स्थितियों में तापीय भारों से उत्पन्न नम्य विक्षेपों को निर्धारित करना होता है (जैसे भिन्न तापीय प्रसार गुणांकों वाली द्वि-सामग्री, अथवा ऊपर और नीचे भिन्न तापमान होने पर)।

24 तापमान में रैखिक परिवर्तन मानते हुए

$$\Delta_T = \alpha \Delta T_T dx \quad \text{Top}$$
$$\Delta_B = \alpha \Delta T_B dx \quad \text{Bottom}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

25 अब विचार करें

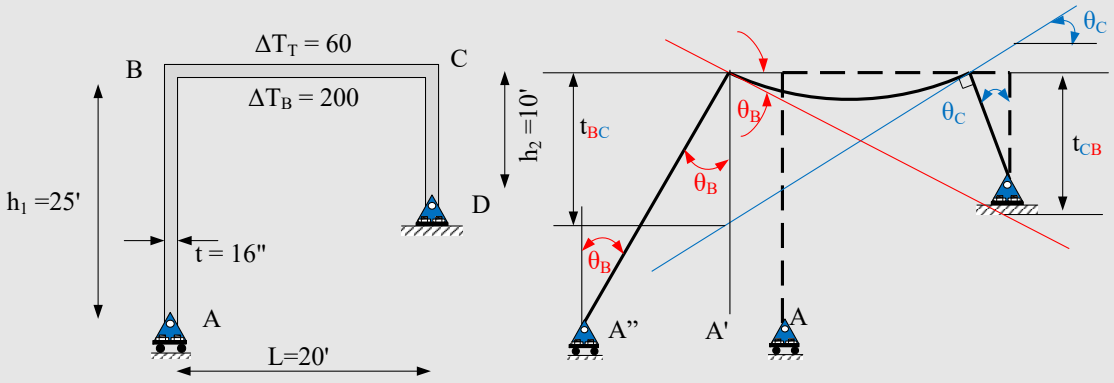
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varepsilon}{y}$$

इस स्थिति में $\varepsilon = \alpha \Delta T_T$ को $y = \frac{h}{2}$ पर लिया जा सकता है अथवा $\varepsilon = \alpha(T_T - T_B)$ को $y = h$ पर, अतः

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_T - T_B)}{h}$$

22.3.4.5.1 उदाहरण 22.11: तापमान-भार के अधीन फ्रेम

अक्षीय विरूपण की उपेक्षा करते हुए, निम्नलिखित फ्रेम के लिए A पर विस्थापन परिकलित करना है



1. पहले विरूपित आकृति का रेखाचित्र बनाएँ।
2. BC नमित होता है $\Rightarrow \theta_B = \theta_C \neq 0$
3. B और C पर दृढ संधियाँ तथा AB और CD पर कोई भार नहीं।
4. A पर विक्षेप

$$\Delta_A = AA'' = AA' + A'A''$$
$$AA' = \Delta_B = \Delta_C = |\theta_C| h_2$$
$$A''A' = |\theta_B| h_1$$

5. हमें θ_B & θ_C परिकलित करने हैं

$$\theta_B = \frac{t_{C/B}}{L}$$
$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B \text{ or } \theta_C = \frac{t_{B/C}}{L}$$

6. वक्रता-क्षेत्र प्रमेय लागू करने के लिए, हमें एक वक्रता (अथवा आघूर्ण) आरेख चाहिए।

$$\frac{1}{\rho} = \alpha\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right) = \frac{M}{EI}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

7. द्वितीय प्रमेय लागू करते हुए वक्रता का B के परितः आघूर्ण लेते हैं; वक्रता-आरेख के नीचे के क्षेत्रफल को $\mathcal{A}$ से निरूपित करते हैं

$$t_{C/B} = \mathcal{A}\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow |\theta_B| = A\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{\mathcal{A}}{2} \quad \text{or} \quad \theta_B = -\frac{\mathcal{A}}{2} \quad \text{(-ve)}$$

8.

$$\left.\begin{aligned} \theta_{CB} &= \mathcal{A} \\ \theta_C &= \theta_{CB} + \theta_B \end{aligned}\right\} \theta_C = \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}}{2} = \frac{\mathcal{A}}{2} \quad \text{(+ve)}$$

9. उपर्युक्त से,

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{A}} &= |\theta_C| h_2 + |\theta_B| h_1 \\ &= \frac{\mathcal{A}}{2} h_2 + \frac{\mathcal{A}}{2} h_1 = \frac{\mathcal{A}}{2}(h_2 + h_1) \\ \mathcal{A} &= \frac{\alpha(T_B - T_T)}{h} L \end{aligned}\right\} \Delta_A = \alpha(T_B - T_T)\frac{L}{h}\left(\frac{1}{2}\right)(h_2 + h_1)$$

10. प्रतिस्थापित करें

$$\begin{aligned} \Delta_A &= (6.5 \times 10^{-6})(200 - 60)\frac{(20)(12)}{(16)}(\frac{1}{2})(10 + 25)(12) \\ &= 2.87 \text{ in} \end{aligned}$$

11. अन्य संख्यात्मक मान:

$$\begin{aligned} \theta_B = \theta_C = \frac{A}{2} &= \frac{1}{2}\frac{\alpha(T_B - T_T)}{h} L \\ &= \frac{1}{2}(6.5 \times 10^{-6})\frac{(200 - 60)}{(16)}(20)(12) \\ &= .00683 rad. = .39^\circ \Rightarrow \frac{dy}{dx} << 1 \end{aligned}$$

टिप्पणी: $\sin(.00683) = .006829947$ और $\tan(.00683) = .006830106$

$$\begin{aligned} \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} &= \alpha\frac{(T_B - T_T)}{h} \\ &= (6.5 \times 10^{-6})\frac{(200 - 60)}{16} = 5.6875 \times 10^{-5} \\ \Rightarrow \rho = \frac{1}{5.6875 \times 10^{-5}} &= 1.758 \times 10^4 \text{ in} = 1,465 \text{ ft} \end{aligned}$$

12. M प्राप्त करने के लिए हमें E & I चाहिए।
13. $\sigma = \frac{My}{I} = \frac{EI}{\rho}\frac{y}{I} = \frac{Ey}{\rho}$
14. ρ नियत है $\Rightarrow$ BC वृत्त के चाप पर स्थित है। M नियत है & $\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = C \Rightarrow y = C\frac{x^2}{2} + dx + e$।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

26 आइए परवलय की ढाल से वक्रता प्राप्त कर उसकी तुलना ρ से करें

$$y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$$
$$\frac{dy}{dx} = cx + d$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = c$$

$x = 0$ पर, $y = 0$, अतः $e = 0$
$x = 0$ पर, $\frac{dy}{dx} = \theta_B = -.00683$, अतः $d = -.00683$
$x = 20$ ft पर, $\frac{dy}{dx} = \theta_C = .00683$, अतः $c(20) - .00683 = .00683$, और इसलिए $c = 6.83 \times 10^{-4}$ अतः

$$y = 6.83 \times 10^{-4} \left(\frac{x^2}{2} - 10x \right)$$
$$\frac{dy}{dx} = 6.83 \times 10^{-4}(x - 10)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6.83 \times 10^{-4}$$
$$\kappa = 6.83 \times 10^{-4}$$
$$\rho = \frac{1}{6.83 \times 10^{-4}} = 1,464 \text{ ft} \quad \text{as expected!}$$

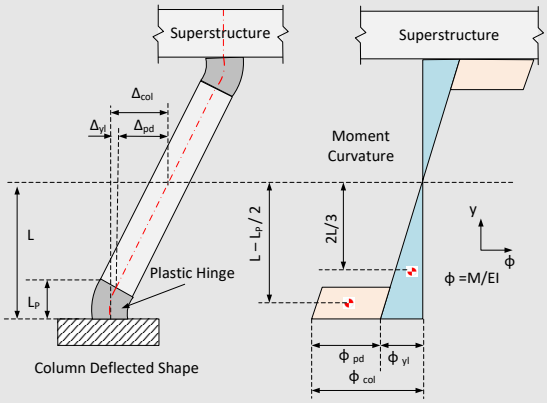
यदि यथार्थ वक्रता-सूत्र का उपयोग किया जाए

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + (\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6.83 \times 10^{-4}}{[1 + (.00683)^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$= 6.829522 \times 10^{-4}$$
$$\Rightarrow \rho = 1464.23 \text{ ft} \quad \text{(compared with 1465ft)}$$

22.3.4.6 उदाहरण 22.12: प्लास्टिक लंबाई

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



पुशओवर विश्लेषण में पार्श्वतः आरोपित बल और उसके अनुरूप अप्रत्यास्थ विरूपण के बीच संबंध निर्धारित करना होता है। यह मानना युक्तिसंगत है कि समस्त प्लास्टिक विरूपण आधार पर तथाकथित *प्लास्टिक कब्जा*.

मान लें कि स्तंभ का व्यास d_c *7 feet, कंक्रीट की संपीडन सामर्थ्य* f'_c *5,000 psi, और आघूर्ण 15,839 k-ft है।* विरूपण को वक्रता-क्षेत्र प्रमेय से निर्धारित किया जा सकता है। रोचक रूप से, हम यह विधि ऐसे अवयव पर लागू कर रहे हैं जिसमें प्रत्यास्थ और अप्रत्यास्थ दोनों वक्रताएँ हैं। यह उदाहरण अध्याय 69.4.1 से लिया गया है।

स्तंभ की विक्षेपित आकृति और वक्रता-आरेख; AASHTO, Seismic, 2011, Fig. C4.9-2 से अनुकूलित

1st (प्रथम) प्रमेय से वक्रता प्राप्त होती है

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P$$

2nd (द्वितीय) प्रमेय से

$$\Delta_e = \left(\Phi_{yld} \frac{L}{2}\right) \times \frac{2}{3} L$$

समीकरण 22.1 से

$$\Phi_{yld} = \frac{M_y}{E_C I_C}$$

प्रत्यास्थता मापांक और जडत्व आघूर्ण के लिए हल करने पर

$$E_c = 57\sqrt{f'_{cc}} = 57\sqrt{5,000} = 4,031 \text{ (ksi)}$$
$$I_C = \frac{\pi d_C^4}{64} = \frac{\pi \times 7^4 \times 12^4}{64} = 2,443,920 \text{ (in}^4\text{)}$$

अंततः प्रतिस्थापित करने पर

$$\Phi_{yld} = \frac{15,839 \times 12}{4031 \times 2,443,920} = 1.93 \times 10^{-5}$$
$$\Delta_e = \left(1.93 \times 10^{-5} \frac{50 \times 12}{2}\right) \times \frac{2}{3}(50 \times 12) = 2.32 \text{ inch}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

22.3.4.7 प्रत्यास्थ भार/संयुग्मी धरन

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §11.4.2 देखें

26 दोनों वक्रता-क्षेत्र प्रमेयों और अपरूपण तथा आघूर्ण की समाकली परिभाषा (जिन्हें पहले रेखांकित किया गया था) के बीच सादृश्य का सारांश सारणी 22.1 में दिया गया है।

आंतरिक बल	वक्रता-क्षेत्र
w	$1/\rho$
$V_{21} = \int_{x_1}^{x_2} w dx$	$\theta_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\rho} dx$
$M_{21} = \int_{x_1}^{x_2} V dx$	$t_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \theta dx$

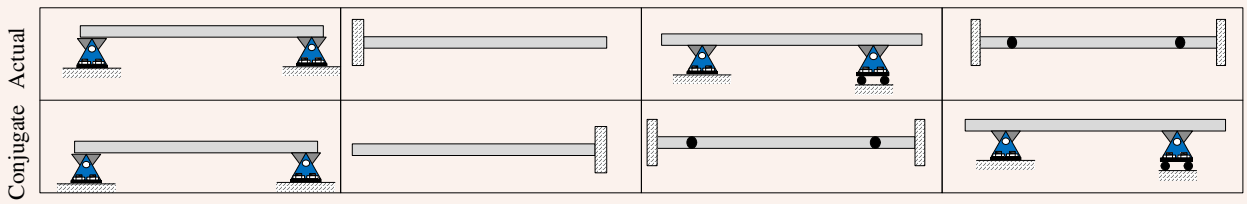
तालिका 22.1: संबंधों के दो समुच्चयों के बीच सादृश्य

27 अतः *संयुग्मी* धरन की कल्पना ऐसी काल्पनिक धरन के रूप में की जा सकती है जिसकी विमाएँ (लंबाई) मूल धरन के समान हों, किंतु संयुग्मी धरन के किसी बिंदु पर भार उस बिंदु की वक्रता के बराबर हो। ऐसी "धरन" में अपरूपण मूल वास्तविक धरन की ढाल के बराबर और आघूर्ण उसके विस्थापन के बराबर होगा।

28 परिसीमा प्रतिबंध सारणी 22.2 और चित्र 22.5 से निर्धारित किए जाते हैं।

वास्तविक धरन			संयुग्मी धरन		
कब्जा	$\theta \neq 0;$	$y = 0$	$V \neq 0$	$M = 0$	"कब्जा"
आबद्ध सिरा	$\theta = 0;$	$y = 0$	$V = 0;$	$M = 0$	मुक्त सिरा
मुक्त सिरा	$\theta \neq 0;$	$y \neq 0$	$V \neq 0;$	$M \neq 0$	आबद्ध सिरा
आंतरिक कब्जा	$\theta \neq 0;$	$y \neq 0$	$V \neq 0;$	$M \neq 0$	आंतरिक आलंब
आंतरिक आलंब	$\theta \neq 0;$	$y = 0$	$V \neq 0;$	$M = 0$	आंतरिक कब्जा

तालिका 22.2: संयुग्मी धरन के परिसीमा प्रतिबंध



चित्र 22.5: संयुग्मी धरन

29 यद्यपि वक्रता-क्षेत्र विधि का आधार सुव्यवस्थित है, उसका प्रत्यक्ष अनुप्रयोग कभी-कभी भ्रमित कर सकता है।

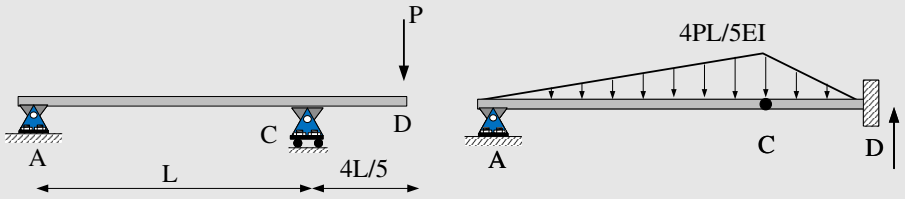
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[30] ध्यान दें कि केवल वितरित भार हो सकता है, तथा धनात्मक आघूर्ण के लिए भार धनात्मक और ऋणात्मक आघूर्ण के लिए ऋणात्मक होता है। "अपरूपण" और "आघूर्ण" आरेख उसी के अनुरूप बनाए जाने चाहिए।

[31] "वितरित भार" w^* की इकाइयाँ $\frac{FL}{EI}$ (बल गुणा लंबाई, जिसे EI से भाग दिया गया है) हैं। अतः "अपरूपण" की इकाइयाँ $w^* \times L$ अथवा $\frac{FL^2}{EI}$ होंगी और "आघूर्ण" की इकाइयाँ $(w^* \times L) \times L$ अथवा $\frac{FL^3}{EI}$ होंगी। यह स्मरण रखते हुए कि EI की इकाइयाँ $FL^{-2}L^4 = FL^2$ हैं, स्पष्ट है कि "अपरूपण" वास्तव में रेडियन में घूर्णन और "आघूर्ण" विस्थापन के अनुरूप है।

22.3.4.7.1 उदाहरण 22.13: संयुग्मी धरन; बिंदु भार

निम्नलिखित धरन का विश्लेषण करें



संयुग्मी धरन में संतुलन के 3 समीकरण और 1 प्रतिबंध समीकरण हैं, जिनका योग प्रतिक्रियाओं की संख्या के बराबर है।

D पर विक्षेप, संबद्ध संयुग्मी धरन के D पर अपरूपण के अनुरूप होगा।

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^C = 0 \Rightarrow R_A(L) - \left(\frac{4PL}{5EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{2PL^2}{15EI}$$

जो वास्तविक धरन में A पर ढाल है, जैसा पहले परिकलित किया गया था!

आइए संयुग्मी धरन का आघूर्ण-आरेख A से x दूरी पर स्थित एक बिंदु के लिए बनाएँ। A से C तक

$$M = \frac{P}{EI}\left[\frac{2}{15}L^2x - \left(\frac{4}{5}x\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{P}{EI}\left(\frac{2}{15}L^2x - \frac{2}{15}x^3\right)$$

$$= \frac{2P}{15EI}\left(L^2x - x^3\right)$$

अधिकतम आघूर्ण (Δ_{max}) का बिंदु तब होता है जब $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{2P}{15EI}(L^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow 3x^2 = L^2 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

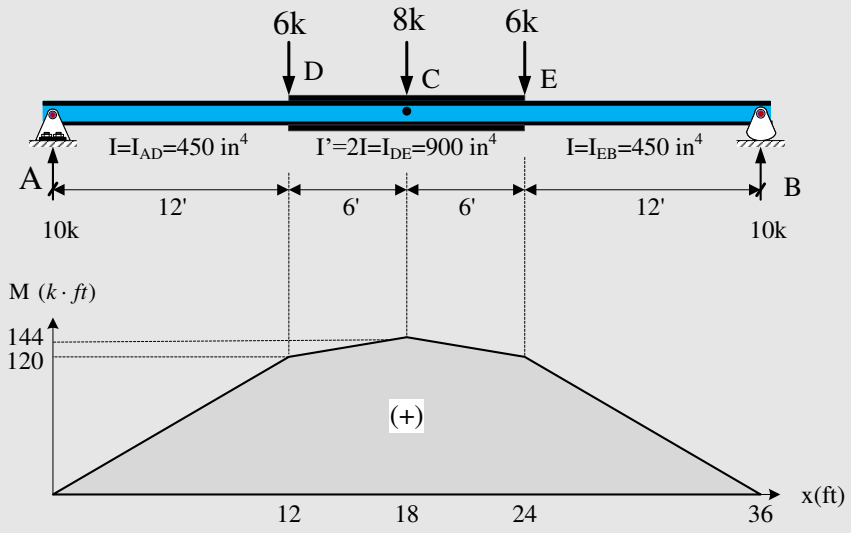
जैसा पहले निर्धारित किया गया था

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow M = \frac{2P}{15EI}\left(\frac{L^2 L}{\sqrt{3}} - \frac{L^3}{3\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{4PL^3}{45\sqrt{3}EI}$$

पहले की ही भाँति।

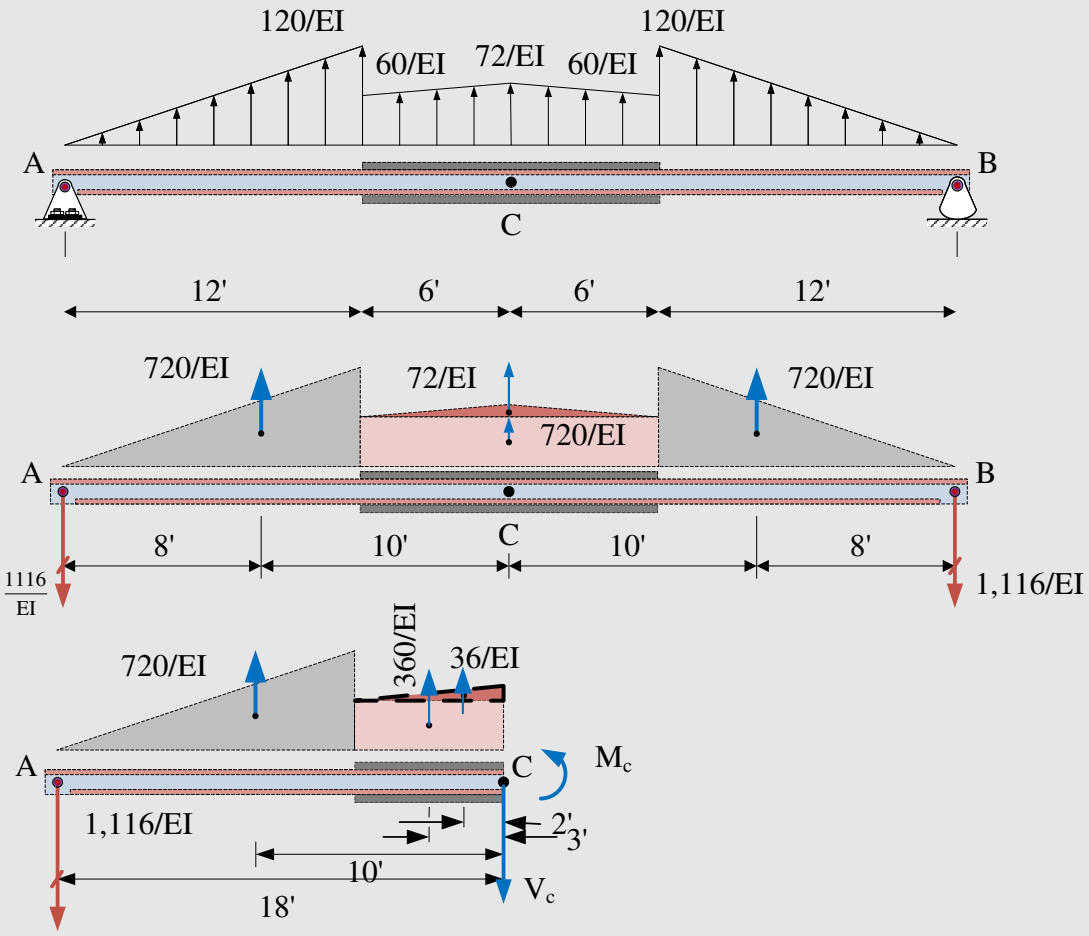
22.3.4.7.2 उदाहरण 22.14: संयुग्मी धरन; परिवर्ती I

निम्नलिखित धरन के बिंदु C पर विक्षेप निर्धारित करें



सरल निरीक्षण से A और B पर प्रतिक्रियाएँ 10 k के बराबर हैं। संयुग्मी धरन पर प्रत्यास्थ भार है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अब संयुग्मी धरन में C' पर आंतरिक आघूर्ण निर्धारित करते हैं; यह संतुलन से प्राप्त होता है:

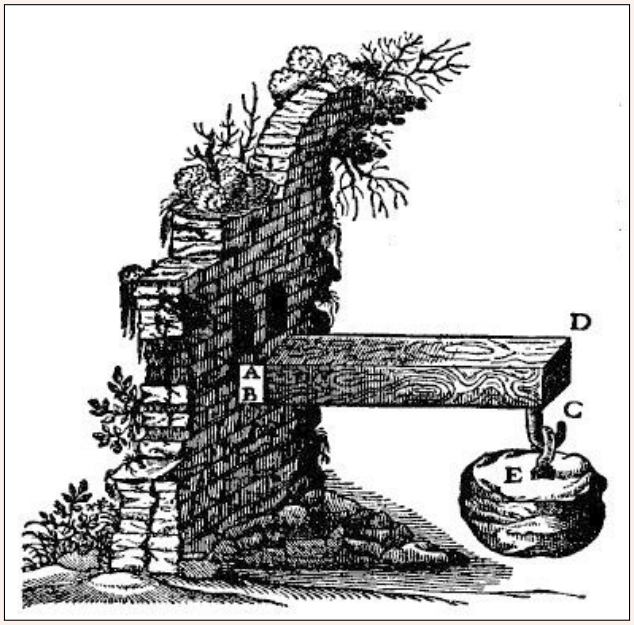
$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B = -;\ \frac{1,116}{EI}(18) - \frac{720}{EI}(10) - \frac{360}{EI}(3) - \frac{36}{EI}(2) + M_C = 0$$

$$\Rightarrow M_{C'} = -\frac{11,736\text{k.ft}^3}{EI}$$

प्रतिस्थापन करने पर

$$\Delta_C = M_{C'} = -\frac{11,736\text{k.ft}^3(12^3)\text{in}^3/\text{ft}^3}{(29\times10^3)\text{k/in}^2(450)\text{in}^4} = -1.55"$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Galileo द्वारा कैंटिलीवर धरन का चित्रण, Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences (1638) से

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

23 अपरूपण और ऐंठन

सारांश

संरचनात्मक विश्लेषण में अपरूपण और ऐंठन प्रायः बंकन की अपेक्षा कम महत्त्व पाते हैं। फिर भी अनेक स्थितियों में उनकी भूमिका अत्यंत महत्त्वपूर्ण है और वे निश्चय ही इस पुस्तक में एक अध्याय के अधिकारी हैं। यहाँ विवेचन प्रारंभिक स्तर से आगे बढ़कर Timoshenko और Vlasov दोनों प्रतिरूपों को सम्मिलित करता है।

व्युत्पन्न किए गए कुछ समीकरण अध्याय 26 के समीकरणों के पूरक होंगे और दृढता-विधियों की भूमिका तैयार करेंगे।

23.1 अपरूपण-विरूपण (अनुप्रस्थ) 964
23.1.1 अपरूपण, अतिसूक्ष्म अवयव . . 965
23.1.2 अपरूपण-वितरण; $\tau(y)$ 966
23.1.3 अपरूपण गुणांक 967
23.1.4 अपरूपण गुणक 968
23.1.5 अपरूपण-विरूपण v_s, Timoshenko 969
23.2 ऐंठन-विरूपण 970
23.2.1 S^t Venant अथवा एकसमान ऐंठन 970
23.2.2 Vlasov अथवा असमान ऐंठन . . 971

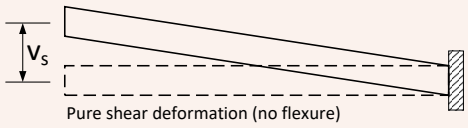
23.1 अपरूपण-विरूपण (अनुप्रस्थ)

[1] सामान्यतः बंकन से उत्पन्न अपरूपण-विरूपण, चित्र 23.1, अत्यल्प होते हैं। परंतु कम विस्तृति-गहराई अनुपात वाली धरनों में इन विरूपणों की उपेक्षा नहीं की जा सकती। अतः हम निम्नलिखित में अंतर करते हैं

Bernouilli धरन में अपरूपण-विरूपण को सम्मिलित नहीं किया जाता और समतल काट समतल ही रहता है।

Timoshenko धरन में अपरूपण-विरूपण सम्मिलित होता है और समतल काट की परिकल्पना अब मान्य नहीं रहती।

अतः इस अनुभाग में अपरूपण-विरूपण (बंकन के बिना) और बाद में दृढता गुणांकों पर उसके प्रभाव को निर्धारित किया जाएगा।



चित्र 23.1: शुद्ध अपरूपण-विरूपण

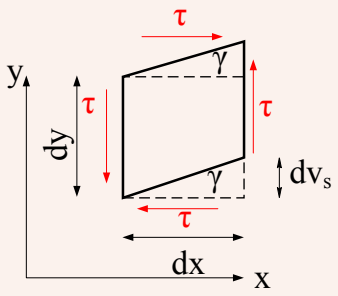
प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

23.1.1 अपरूपण, अतिसूक्ष्म अवयव

[2] रैखिक प्रत्यास्थ सामग्री मानते हुए, अपरूपण-विकृति (लघु विस्थापन, अर्थात् $\tan\gamma \approx \gamma$), चित्र 23.2, इस प्रकार दी जाती है

$$\tan\gamma \approx \gamma = \underbrace{\frac{dv_s}{dx}}_{\text{Kinematics}} = \underbrace{\frac{\tau}{G}}_{\text{Stress-strain}} \tag{23.1}$$



चित्र 23.2: अपरूपण प्रतिबल के अधीन अतिसूक्ष्म अवयव

जहाँ $\frac{dv_s}{dx}$ क्षैतिज दिशा के सापेक्ष धरन के उदासीन अक्ष की ढाल है। ऊर्ध्वाधर काट अविरूपित रहता है। G अपरूपण मापांक, τ अपरूपण प्रतिबल, और v_s *अपरूपण-जनित विस्थापन* है।

23.1.1.1 उदाहरण 23.1: कैंटिलीवर धरन का विक्षेप

प्रति प्रकाशक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

एक कैंटिलीवर (आयताकार bxh) धरन पर विचार करें, जिसके मुक्त सिरे पर बिंदु भार P लगा है। पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत से (और यह ध्यान रखते हुए कि $\delta M = (1)x$, $M = Px$, $\delta\tau = 1$, तथा τ समीकरण 23.3 से दिया गया है):

$$
\begin{aligned}
(1)\Delta &= \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx}_{\text{Flexure}} + \underbrace{\int_{Vol} \delta\overline{\tau}\frac{\tau}{G}dVol}_{\text{Shear}} \\
&= \int_0^L x\frac{Px}{EI}dx + \frac{1}{G}\int_{-h/2}^{h/2} \underbrace{(1)}_{\delta\tau} \underbrace{\left\{\frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]\right\}}_{\tau} \underbrace{Lbdy}_{dVol} \\
&= \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\Delta_{flex}} + \underbrace{\frac{6}{5}\frac{PL}{AG}}_{v_s} \\
\Delta &= \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

$E/G = 2.5$ (इस्पात का सामान्य मान) के लिए, $\Delta = EI\left(1 + 0.75\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)\Delta_{flex}$

$L = h$ के लिए कुल विक्षेप केवल बंकन से उत्पन्न विक्षेप का 1.75 गुना है, और $L = 10h$ के लिए अपरूपण से उत्पन्न विक्षेप 1% से कम है, Δ_{felx} के सापेक्ष।

23.1.2 अपरूपण-वितरण; $\tau(y)$

3 हम अनुप्रस्थ अपरूपण प्रतिबल का ऊर्ध्वाधर वितरण निर्धारित करना चाहते हैं, चित्र 23.3a। लंबाई dx के उस खंड पर विचार करें जिसे N.A. से y दूरी पर काटा गया है; संतुलन की आवश्यकता है

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \int_y^{y^{\text{top}}} \sigma_x^{\text{lft}} bdy - \int_y^{y^{\text{top}}} \sigma_x^{\text{rgt}} bdy + \tau_{xy} bdx = 0$$

प्रतिबलों के परिमाण प्रतिस्थापित करने पर:

$$\int_y^{y^{\text{top}}} \frac{M(x)y}{I} bdy - \int_y^{y^{\text{top}}} \frac{M(x) + dM(x)y}{I} bdy + \tau_{xy} bdx = 0$$

सरलीकरण करके dx और b से भाग देने पर

$$\tau_{xy} = \frac{dM(x)}{dx}\frac{1}{Ib}\int_y^{y^{\text{top}}} ybdy$$

परंतु चूँकि $V(x) = dM(x)/dx$, अतः अपरूपण प्रतिबल-वितरण है

$$\tau(xy) = \frac{V(x)}{Ib}\int_y^{y^{\text{top}}} ybdy = \frac{V(x)Q(y)}{Ib} = \frac{VQ(y)}{Ib}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

V अपरूपण बल, Q उदासीन अक्ष के परितः अनुप्रस्थ काट के उस क्षेत्रफल-भाग का प्रथम आघूर्ण (अथवा स्थैतिक आघूर्ण) है जो उस काट से बाहर है जहाँ अपरूपण प्रतिबल निर्धारित करना है; I जड़त्व आघूर्ण और b चौड़ाई है।

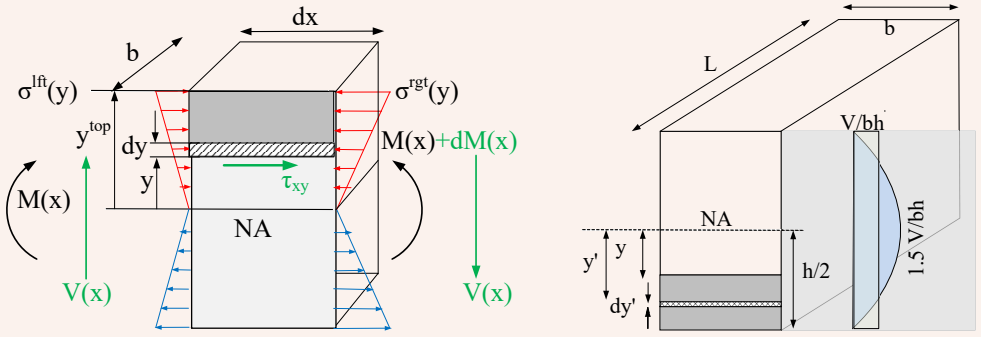
23.1.3 अपरूपण गुणांक

4 *परिभाषित करें*: अपरूपण गुणांक α_s, उदासीन अक्ष पर अपरूपण प्रतिबल $\tau(y=0)$ और औसत अपरूपण प्रतिबल ($\tau = V/bh$) का अनुपात है।

$$\tau(y) = \frac{VQ(y)}{Ib} \tag{23.2}$$

$$= \frac{1}{Ib}\int_y^{h/2} V \underbrace{\underbrace{b dy'}_{dA}\, y'}_{dF} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$= \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{23.3}$$



(a) लंबाई dx का खंड, जिसे N.A. से y दूरी पर काटा गया है

(b) अपरूपण गुणांक

चित्र 23.3: अपरूपण प्रतिबल और गुणांक

- $y = h/2$ के लिए अपरूपण प्रतिबल शून्य है और उदासीन अक्ष पर अधिकतम है, जहाँ ($y = 0$ और $\tau_{max} = 1.5\frac{V}{bh}$)। $\Rightarrow \alpha_s = 1.5$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

23.1.4 अपरूपण गुणक

जैसे हमारे पास $\sigma = P/A$ था, क्या हम $\tau = V/A$ मान सकते हैं?

अपरूपण बल V को A से सामान्यीकृत करना ($\tau = V/A$, जैसे $\sigma = P/A$) अशुद्ध है, क्योंकि अपरूपण प्रतिबल गहराई के अनुदिश समान रूप से वितरित नहीं होता।

हम परिभाषित करते हैं

$$\tau \overset{\text{def}}{=} V/A_s \Rightarrow A_s \overset{\text{def}}{=} \frac{A}{\lambda_s} \tag{23.4}$$

जहाँ A_s अपरूपण के लिए प्रभावी अनुप्रस्थ काट है। हम λ_s, अर्थात् *अपरूपण गुणक*, निर्धारित करना चाहते हैं।

λ_s निर्धारित करने के लिए हम *औसत अपरूपण-विकृति ऊर्जा* U को

$$U_{aver} = \int_0^L \frac{V^2}{2GA_s} dx = \lambda_s^? \int_0^L \frac{V^2}{2GA} dx \tag{23.5}$$

वास्तविक अपरूपण प्रतिबल-वितरण से निर्धारित *यथार्थ* मान के बराबर रखते हैं

$$U_{exact} = \frac{1}{2}\int_\Omega \underbrace{\gamma}_{\tau} \underbrace{G\gamma}\, d\Omega = \int_\Omega \frac{\tau^2}{2G} d\Omega = \iiint \frac{\tau^2}{2G} dxdydz \tag{23.6}$$

ध्यान दें कि संरचनात्मक यांत्रिकी में Ω आयतन को और Γ (अथवा $\delta\Omega$) संगत पृष्ठ को निरूपित करता है।

अपरूपण प्रतिबल के यथार्थ व्यंजक से आरंभ करते हैं

$$\tau(y) = \frac{VQ(y)}{Ib}; \qquad Q(y) = \int_y^{h/2} by'dy' = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

यथार्थ विकृति-ऊर्जा निर्धारित करने के लिए समीकरण 23.6 में प्रतिस्थापित करें।

$$\begin{aligned}
U_{exact} &= \int_0^L \left[\int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{V^2}{8GI^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dydz\right] dx \\
&= \int_0^L \frac{V^2 b}{8GI^2}\left[\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2y^2}{2} + y^4\right) dy\right] dx \\
&= \int_0^L \frac{V^2 b}{8GI^2}\left[\frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2 y^3}{6} + \frac{y^5}{5}\right]_{-h/2}^{h/2} dx \\
&= \int_0^L \frac{V^2 b h^5}{240GI^2} dx
\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11 आयताकार काट के लिए $I = bh^3/12$

$$U_{exact} = \frac{3}{5}\int_0^L \frac{V^2}{GA}dx = \underbrace{\frac{6}{5}}_{1.2}\int_0^L \frac{V^2}{2GA}dx$$

12 समीकरण 23.5 से तुलना करने पर अपरूपण रूप-गुणक $\lambda_s = 1.2$ मिलता है। अतः

$$\tau = V/A_s; \qquad A_s = \frac{A}{1.2} \tag{23.7}$$

13 अपरूपण-विरूपण के लिए अतः $\tau = V/A_s$ स्वीकार करते हैं और समीकरण 23.1 से प्राप्त होता है

$$\tan\gamma \simeq \gamma = \frac{dv_s}{dx} = \frac{V}{GA_s} = \frac{\lambda_s V}{AG} \tag{23.8}$$

14 $\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{P}{AE}$ से सादृश्य पर ध्यान दें।

23.1.5 अपरूपण-विरूपण v_s, Timoshenko

15 एक सिरे पर आबद्ध और दूसरे सिरे पर बिंदु भार के अधीन धरन का अपरूपण-विरूपण (जैसा दृढता गुणांक-पद की परिभाषा में है) अब निर्धारित किया जाएगा।

16 समीकरण 23.8 से, और V को नियत मानते हुए,

$$\int dv_s = \int \frac{V}{GA_s}dx \Rightarrow v_s = \frac{V}{GA_s}x + C_1 \tag{23.9}$$

17 यदि धरन के विपरीत सिरे पर विस्थापन v_s शून्य हो, तो $C_1 = -\frac{V}{GA_s}(x-L)$ और

$$v_s = \frac{V}{GA_s}(x-L) \tag{23.10}$$

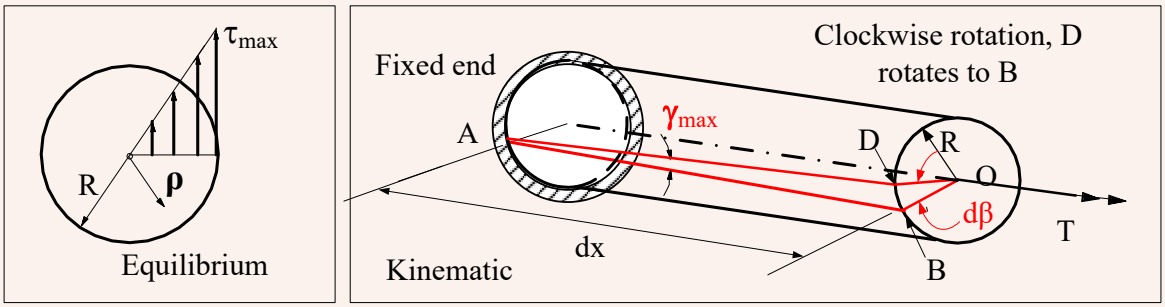
18 $x = 0$ पर

परिभाषा 23.1: अपरूपण-विरूपण

$$v_s = \frac{V}{GA_s}L \tag{23.11}$$

19 Timoshenko धरन के संदर्भ में इस व्यंजक पर §41.7 में पुनर्विचार किया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 23.4: ऐंठन–घूर्णन संबंध

23.2 ऐंठन-विरूपण

20 किसी संरचनात्मक अवयव पर ऐंठन लगाए जाने पर उस अवयव के अनुप्रस्थ काट ऐंठने के साथ-साथ वार्प भी कर सकते हैं। यदि अवयव को स्वतंत्र रूप से वार्प करने दिया जाए, तो आरोपित बलाघूर्ण का प्रतिरोध केवल *Saint-Venant* अपरूपण प्रतिबलों द्वारा होता है। इस प्रकार के व्यवहार को शुद्ध अथवा *एकसमान* ऐंठन कहते हैं। दूसरी ओर, यदि अवयव को स्वतंत्र वार्पन से रोका जाए, तो आरोपित बलाघूर्ण का प्रतिरोध Saint-Venant अपरूपण प्रतिबलों और वार्पन-ऐंठन के संयोजन से होता है; इसे *असमान* ऐंठन (अथवा Vlasov ऐंठन) कहते हैं।

23.2.1 S^{t} Venant अथवा एकसमान ऐंठन

21 रैखिक प्रत्यास्थ सामग्री और ऐंठन-भार के अधीन वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट की त्रिज्या के अनुदिश रैखिक विकृति (और अतः प्रतिबल) वितरण मानते हुए, चित्र 23.4, प्राप्त होता है:

$$T_{SV} = \underbrace{\underbrace{\int_A \underbrace{\frac{\rho}{c}\tau_{max}}_{stress}\underbrace{dA}_{area}}_{Force}\underbrace{\rho}_{arm}}_{torque} = \frac{\tau_{max}}{c}\underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{J} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T_{SV}\,c}{J} \tag{23.12}$$

इस अंतिम समीकरण और $\sigma = \frac{Mc}{I_{zz}}$ के बीच सादृश्य पर ध्यान दें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

22 $\int_A \rho^2 dA$ ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण J है। इसे St. Venant ऐंठन नियतांक भी कहा जाता है। वृत्ताकार अनुप्रस्थ काटों के लिए

$$\begin{aligned} J &= \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 \left(2\pi\rho d\rho\right) \\ &= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \end{aligned}$$

आयताकार काटों $b \times d$ के लिए, जहाँ $b < d$, एक सन्निकट व्यंजक है

$$\begin{aligned} J &= kb^3 d \\ k &= \frac{0.3}{1 + \left(\frac{b}{d}\right)^2} \end{aligned}$$

अन्य काटों के लिए J प्रायः सारणीबद्ध होता है।

23 ध्यान दें कि J, I_{xx} के अनुरूप है, जहाँ x अवयव के अनुदिश अक्ष है।

24 ऐंठन और अपरूपण प्रतिबल के बीच संबंध विकसित करने के बाद, अब ऐंठन और ऐंठन-घूर्णन के बीच संबंध चाहते हैं। चित्र 23.4 में चाप-लंबाई BD पर विचार करते हैं

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{max} dx &= d\beta R \\ \Rightarrow \frac{d\beta}{dx} &= \frac{\gamma_{max}}{R} \\ \gamma_{max} &= \frac{\tau_{max}}{G} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dx} &= \frac{\tau_{max}}{GR} \\ \tau_{max} &= \frac{T_{SV} R}{J} \end{aligned}\right\} \frac{d\beta}{dx} = \frac{T_{SV}}{GJ}$$

25 अंततः इस अंतिम समीकरण को $\int T_{SV} dx = \int GJ d\beta$ के रूप में पुनर्लिखकर प्राप्त करते हैं:

$$T_{SV} = \frac{GJ}{L}\beta \tag{23.13}$$

इस समीकरण और समीकरण 26.1 के बीच समानता पर ध्यान दें।

23.2.2 Vlasov अथवा असमान ऐंठन

26 वृत्ताकार काटों को छोड़कर सभी अनुप्रस्थ काट अपने स्थान से बाहर वार्प करेंगे। अतः अनुदैर्ध्य अवरोध अवयव की पर्याप्त लंबाई में प्रतिबल-वितरण और दृढ़ता को बदल सकता है, जो सामान्यतः लाभकारी होता है, क्योंकि इससे वार्पन अवरुद्ध होता है[1]।

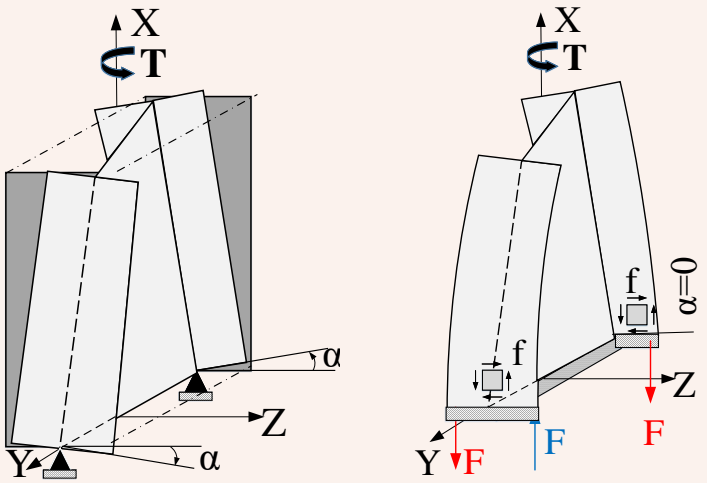
27 Vlasov, 1961 का ऐंठन-सिद्धांत अवरुद्ध वार्पन के प्रभाव को सम्मिलित करता है, चित्र 23.5। पारंपरिक धरन-सिद्धांत की तुलना में Vlasov सिद्धांत दो अतिरिक्त राशियाँ प्रस्तुत करता है: वार्पन

[1] व्युत्पत्ति (McGuire and Winter, 1968) पर आधारित है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

नियतांक C_w और *द्विवआघूर्ण* B। वार्पन नियतांक अनुप्रस्थ काट का गुण है और वार्पन कम करने के लिए आवश्यक प्रयास का माप है। वार्पन नियतांक की इकाई $[L^6]$ है। द्विवआघूर्ण इस प्रकार परिभाषित है

$$B = Md \tag{23.14}$$



(a) वार्पन, किंतु ऐंठन नहीं

(b) अवरुद्ध ऐंठन और बलाघूर्ण

चित्र 23.5: वार्पन क्यों होता है

[28] इस नए आघूर्ण की परिभाषा की आवश्यकता इस तथ्य से उत्पन्न होती है कि, यद्यपि $M_y = M_z = \mathbf{N} = 0$, फिर भी अनुप्रस्थ काट पर अभिलंब प्रतिबल विद्यमान रहते हैं। अतः यह धरन-अवयवों के लिए एक ऐसी स्वतंत्रता-कोटि प्रस्तुत करेगा जो अवरुद्ध वार्पन के कारण बलाघूर्ण को निरूपित करती है।

[29] एक I-काट, जो एक सिरे पर पूर्णतः मुक्त और दूसरे सिरे पर ऐंठन से अवरुद्ध किंतु वार्पन से मुक्त है, चित्र 23.5a के अनुसार विरूपित होगा। व्यावहारिक रूप से यह उस शाफ्ट के संरचनात्मक रूप से समान है जो दोनों सिरों पर मुक्त हो, किंतु समान और विपरीत बलाघूर्णों के अधीन हो।

[30] यदि आधार को वार्पन और ऐंठन दोनों से रोका जाए, तो स्थिति भिन्न होती है। फ्लैंजों के झुकाव को रोकने के लिए आधार द्वारा बल $\mathbf{F}$ विकसित और आरोपित होते हैं, जो उन्हें उनके प्रमुख अक्ष के परितः आयताकार धरन की भाँति मोड़ते हैं, चित्र 23.5b। इनके परिणामस्वरूप प्रत्येक फ्लैंज में अनुप्रस्थ अपरूपण बल $\mathbf{H}_f$ उत्पन्न होता है, चित्र 23.6a। इससे दृढ अक्ष के परितः आयताकार धरन जैसा बंकन होगा[2]।

[31] फ्लैंज में अनुप्रस्थ बल और उनके बीच की दूरी का गुणनफल एक बलयुग्म है जिसकी दिशा प्रतिरोधी बलाघूर्ण के समान होती है।

[2] वेब में भी बंकन होता है, किंतु उसकी दुर्बल दिशा में अल्प दृढता के कारण उसकी उपेक्षा की जा सकती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[32] वार्पन-अवरोध सामान्यतः लाभकारी होता है। यद्यपि शाफ्ट के अनुदिश कुल बलाघूर्ण नियत रहता है, ऐंठन की दर सामान्यतः बदलती है। आधार पर, चित्र 23.5b, यह शून्य होनी चाहिए और संपूर्ण प्रतिरोध वार्पन-बलाघूर्ण में होता है। फिर सिरे के अवरोध का प्रभाव क्षीण होता जाता है और शाफ्ट के अनुदिश वार्पन क्रमशः बढ़ता है, जब तक आधार से दूर किसी काट पर यह व्यावहारिक रूप से शुद्ध ऐंठन जैसा न हो जाए; तब तक संपूर्ण बलाघूर्ण ऐंठन-अपरूपण द्वारा प्रतिरोधित होता है, चित्र 23.6b।

[33] अतः कुल ऐंठन दो घटकों में विघटित होती है

$$T = T_{SV} + T_V \tag{23.15}$$

प्रथम पद समीकरण 23.12 से प्राप्त होता है

$$T_{SV} = GJ\theta = GK\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} \tag{23.16}$$

[34] दूसरे पद के लिए प्रत्येक फ्लैंज को उसके प्रमुख अक्ष के परितः नमित आयताकार धरन माना जा सकता है, और चूँकि अपरूपण बल आघूर्ण का अवकलज है

$$\frac{M_f}{EI_f} = -\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{d}{2}\frac{d^2\beta}{dx^2} \tag{23.17}$$

अतः

$$H_f = \frac{\mathrm{d}M_f}{\mathrm{d}x} = -EI_f\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}$$

जहाँ M_f फ्लैंज का बंकन आघूर्ण, I_f (एकल) फ्लैंज का जड़त्व आघूर्ण, z आधार से x दूरी पर किसी काट में प्रत्येक फ्लैंज के केंद्र का अनुप्रस्थ विक्षेप (काट का ऐंठन कोण β है), चित्र 23.6।

[35] वेब की उपेक्षा करने पर I_f पूरे काट के दुर्बल अक्ष के जड़त्व आघूर्ण का आधा है; अतः, चित्र 23.6a,

$$\begin{aligned} I_f &= I_{yy}/2 \\ z &= \beta d/2 \\ H_f &= T_V/d \end{aligned}$$

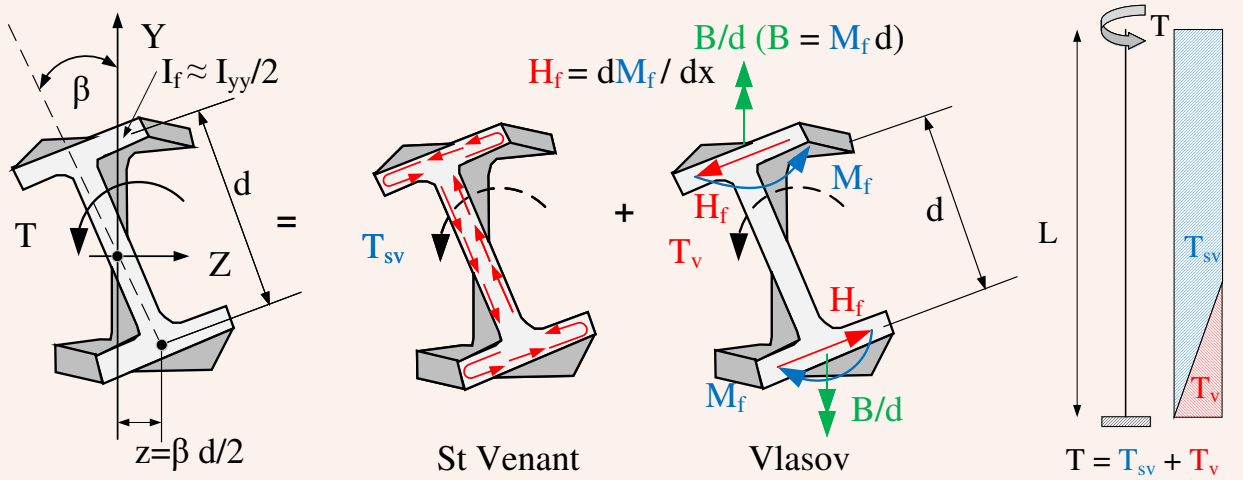
प्रतिस्थापन से

$$T_V = \frac{\mathrm{d}M_f}{\mathrm{d}x} = -E\underbrace{\frac{I_{yy}}{2}\frac{d^2}{2}}_{C_w}\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3} \tag{23.18}$$

जहाँ C_w एक काट-गुण है जिसे *वार्पन नियतांक* कहते हैं।

[36] समीकरणों 23.16 और 23.18 को समीकरण 23.15 में प्रतिस्थापित करने पर:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) बलाघूर्ण

(b) बलाघूर्ण का विघटन

चित्र 23.6: असमान ऐंठन ((McGuire and Winter, 1968) से अनुकूलित)

परिभाषा 23.2: एकसमान और असमान ऐंठन

$$T = \underbrace{GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}}_{T_{SV}} - \underbrace{EC_w\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3}}_{T_V} \tag{23.19}$$

37 वैकल्पिक रूप से B का उपयोग करते हैं, जिसे M_f और d के गुणनफल के रूप में परिभाषित किया गया है

$$\left.\begin{aligned} B &= M_f d \\ M_f &= -EI_f z'' \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} B &= -EI_f z'' d \\ z &= \frac{\beta d}{2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} B &= -EI_f \tfrac{d^2}{2}\beta'' \\ I_f &= \tfrac{I_{yy}}{2} \end{aligned}\right\} B = -E\underbrace{I_{yy}\frac{d^2}{4}}_{C_w}\beta''$$

38 अतः समीकरण 23.19 को इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है

$$T = GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} + \frac{dB}{dx}$$

39 नियामक अवकल समीकरण की पहचान सुगम बनाने के लिए समीकरण 23.19 को इस प्रकार पुनर्लिख सकते हैं

$$\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3} - p^2\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} = -\frac{T}{EC_w}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

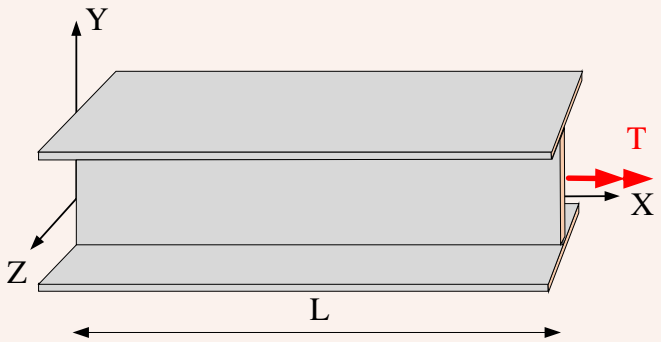
जहाँ

$$p^2 = \frac{GJ}{EC_w} \tag{23.20}$$

और इसका व्यापक हल है

$$\beta = C_1 + C_2 px + C_3 \cosh px + C_4 \sinh px \tag{23.21}$$

नियतांक चित्र 23.7 में लागू परिसीमा प्रतिबंधों द्वारा निर्धारित किए जाएँगे।



चित्र 23.7: ऐंठन के अधीन I-धरन

दोनों सिरों पर आबद्ध धरन

40 निम्नलिखित परिसीमा प्रतिबंध लागू करते हुए,

$$\begin{aligned} &\text{End 1} \quad x = 0, \quad \beta = \beta_1, \quad \beta' = \beta'_1, \\ &\text{End 2} \quad x = L, \quad \beta = \beta_2, \quad \beta' = \beta'_2, \end{aligned} \tag{23.22}$$

चार नियतांक निर्धारित किए जाते हैं (Bhatt, 1986)

$$C_1 = \frac{(SpL - C + 1)\beta_1 + (1 - C)\beta_2 + p^{-1}(pL - C - S)\beta'_1 + p^{-1}(S - pL)\beta'_2}{D}$$

$$C_2 = \frac{-S\beta_1 + S\beta_2 + p^{-1}(1 - C)\beta'_1 + p^{-1}(1 - C)\beta'_2}{D}$$

$$C_3 = \beta_1 - C_1$$

$$C_4 = p^{-1}\beta'_1 - C_2$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $D = 2(1-C) + SpL$, $S = \sinh pL$, और $C = \cosh pL$। अब समीकरण 23.21 को आकृति फलनों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है

$$\begin{aligned}
\beta &= N_1\beta_1 + N_2\beta_2' + N_3\beta_2 + N_4\beta_2' \\
N_1 &= \frac{(pL - px + \sinh px)S + (1-C)(1+\cosh px)}{D} \\
N_2 &= \frac{kx(1-C) - (CpL - S)(\cosh px - 1) + (SpL + 1 - C)\sinh px}{D} \\
N_3 &= \frac{(C-1)(\cosh px - 1) - S(\sinh px - px)}{D} \\
N_4 &= \frac{(C-1)(\sinh px - px) - (S - pL)(\cosh px - 1)}{pD}
\end{aligned}$$

[41] समीकरण 23.22 में परिसीमा प्रतिबंध ऊपर विस्थापनों के पदों में व्यक्त किए गए थे; उन्हें बलाघूर्ण $T = GJ\beta' - EC_w\beta'''$ के पदों में व्यक्त करना और फ्लैंज के बंकन आघूर्ण के स्थान पर द्विआघूर्ण B का उपयोग करना बेहतर है, जिसकी परिभाषा है

$$B = d\underbrace{EI_f z''}_{M_f} = EC_w\frac{d^2\beta}{dx^2}$$

जिससे समीकरण 23.19 को अब इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है

$$T = GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} - EC_w\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}$$

[42] समीकरण 23.21 और समाकलन नियतांकों के मानों का उपयोग करके बलों को अंतिम नोडीय विस्थापनों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\begin{aligned}
T &= \frac{GJ}{LD}\left[(\beta_2 - \beta_1)SpL - (\beta_1' + \beta_2')(C-1)L\right] \\
B &= \frac{GJ}{D}\left\{(\beta_2 - \beta_1)\left[(C-1)\cosh px - S\sinh px\right]\right. \\
&\quad + p^{-1}\left[(S - CpL)\cosh px + (SpL + 1 - C)\sinh px\right]\beta_1' \\
&\quad \left. + p^{-1}\left[(pL - S)\cosh px + (C-1)\sinh px\right]\beta_2'\right\}
\end{aligned}$$

एक सिरे पर आबद्ध धरन

[43] इस स्थिति में परिसीमा प्रतिबंध हैं

$$\begin{aligned}
&\text{End } 1; x = 0, \beta = 0; \frac{d\beta}{dx} = 0 \\
&\text{End } 2; x = L, \qquad \frac{d^2\beta}{dx^2} = 0
\end{aligned} \tag{23.23}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रतिबंधों का प्रथम समुच्चय बताता है कि उस सिरे पर ऐंठन और ऐंठन की दर शून्य हैं। दूसरा समुच्चय बताता है कि प्रत्येक फ्लैंज का उसके प्रमुख अक्ष के परितः बंकन शून्य है (समीकरण 23.17)।

44 इन परिसीमा प्रतिबंधों को समीकरण 23.21 और उसके अवकलजों पर लागू करने से हल मिलता है

$$\beta = \frac{T}{GJ}\left[x + \frac{\sinh p(L-x) - \sinh\ pL}{p\cosh pL}\right] \tag{23.24}$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{T}{GJ}\left[1 - \frac{\cosh p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.25}$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} = \frac{T}{GJ}\left[\frac{p\sinh\ p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.26}$$

$$\frac{d^3\beta}{dx^3} = -\frac{T}{GJ}\left[\frac{p^2\cosh\ p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.27}$$

23.2.2.1 उदाहरण 23.2: I-काट की असमान ऐंठन

यह उदाहरण McGuire and Winter, 1968, example 5.17 से लिया गया है।

10 ft लंबा, 14 W 74 काट का शाफ्ट एक सिरे पर ऐंठन की दृष्टि से आबद्ध और दूसरे पर मुक्त है। मुक्त सिरे पर बलाघूर्ण T लगाया गया है; ऐंठन कोण तथा St. Venant बलाघूर्ण और वार्पन बलाघूर्ण के बीच T का विभाजन आलेखित करें। हम आंतरिक प्रतिबल निर्धारित करना चाहते हैं।

भौतिक गुण

(in x lb/ft)	h (in)	w (in)	t_w (in)	$b_f(in)$	t_f (in)	I_x (in^4)	I_y (in^4)	J (in^4)	C_w
W 14 x 74	14.17	10.070	0.450	10.07	0.785	796	134	3.88	5,990
प्रयुक्त*	14.17	10.070	0.450	10.07	0.785	796	134	3.6	6,000

अंतर उदाहरण में अपनाए गए पुराने काट-गुणों के कारण है।

$E = 30\times10^6$ psi, $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{1+0.3}$

बलाघूर्ण

केवल जाँच के लिए!

$$J = \Sigma\frac{bt^3}{3} = \frac{2\times10.07\times(0.783)^3}{3} + \frac{12.62\times(0.450)^2}{3} = 3.60\ \text{in}^4\checkmark$$

$$C_w = \frac{d^2I_y}{4} = \frac{(14.19-0.78)^2(133.5)}{4} = 6,000\ \text{in}^6\checkmark$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पूर्व-व्युत्पन्न समीकरणों का उपयोग करते हुए:

$$\text{Eq. 23.20; } p = \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}} = \sqrt{\frac{E \times 3.6}{2(1+0.3)E \times 6,000}} = \frac{1}{65.9}\left(\frac{1}{\text{in.}}\right)$$

$$GJ = \frac{30 \times 10^6}{2(1+0.3)} \times 3.60 = 41.5 \times 10^6 \text{lbs-in}^2$$

$$\text{Eq. 23.24; } \beta = \frac{T}{41.5 \times 10^6}\left[x + \frac{\sinh\left(\frac{120-x}{65.9}\right) - \sinh\left(\frac{120}{65.9}\right)}{\frac{1}{65.9}\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right]$$

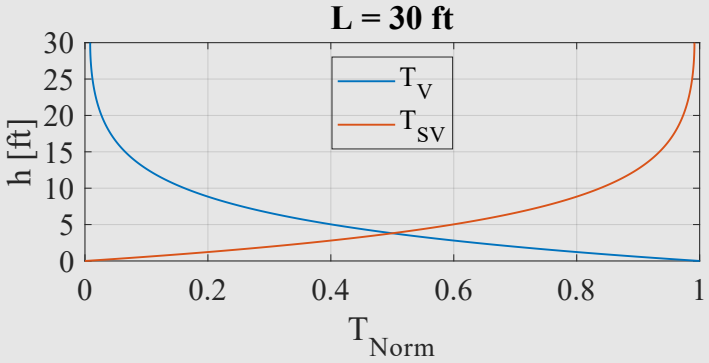
$$= \frac{T}{41.5 \times 10^6}\left[x - 62.4 + 20.8\sinh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

$$\text{Eqs. 23.16 \& 23.25; } T_{SV} = GJ\frac{d\beta}{dx} = T\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)}{\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right] = T\left[1 - \frac{1}{3.17}\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

$$\text{Eqs. 23.18 \& 23.26; } T_V = -EC_w\frac{d^3\beta}{dx^3} = T\left[\frac{\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)}{\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right] = T\left[\frac{1}{3.17}\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

यदि आधार ऐंठन की दृष्टि से सरल होता, तो $T_{SV} = T$, और $\beta = T_X/GJ = T_x/(41.5 \times 10^6)$।

निम्नलिखित चित्र[a] शाफ्ट के अनुदिश सामान्यीकृत ऐंठन-वितरण दर्शाते हैं। वास्तव में सभी लंबाइयों के लिए आधार पर $T_V/T = 1$, और $T_{SV}/T = 0$ है। आधार से दूर जाने पर अवरोध का प्रभाव घटता जाता है और उसका प्रभाव (इस उदाहरण में) केवल $L = 30$ ft पर समाप्त होता है। उस बिंदु से आगे ऐंठन का प्रतिरोध पूर्णतः Saint-Venant घटक द्वारा होता है।



आंतरिक प्रतिबल

आधार : $T_{SV} = 0$, $T_V = T$

$$3M_f = -EI_f\left[\frac{d^2z}{dx^2}\right]_{x=0} = -\frac{EI_f d}{2}\left[\frac{d^2\beta}{dx^2}\right]_{x=0}$$

$$= -\frac{EI_y d}{4}\left[\frac{Tp}{GJ}\tanh(pL)\right] = -\frac{T}{pd}\tanh(pL)$$

$$= -T\left(\frac{65.9}{14.19 - 0.78}\right)\tanh\left(\frac{120}{65.9}\right) = -4.65T$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रैखिक वितरण मानें

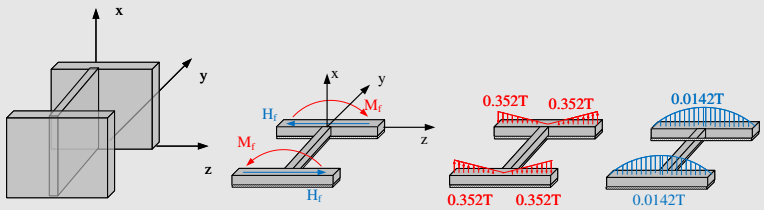
$$\sigma = \pm\frac{M_f}{t_f b_f^2/6} = \pm\frac{6\times 4.65T}{0.783(10.07)^2} = \pm 0.352T$$

अनुप्रस्थ अपरूपण

$$H = \frac{T_V}{d} = \frac{T}{14.19-0.78} = \frac{T}{13.41}$$

परवलयिक वितरण मानें

$$\tau = \frac{3H}{2b_f t_f} = \frac{1.5T}{13.41(10.07\times 0.783)} = 0.0142T$$



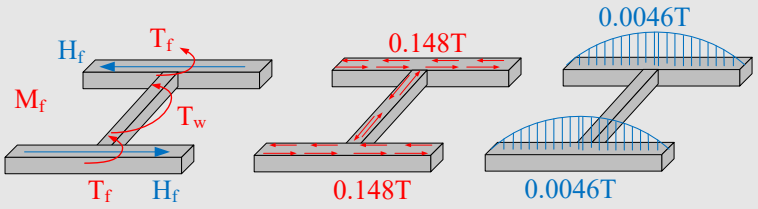
मुक्त सिरा T_V और T_{SV} के व्यंजकों से $T_{SV} = 0.687T$ और $T_V = 0.32T$ प्राप्त होते हैं।

अनुप्रस्थ अपरूपण

$$\tau = 0.32(0.0142T) = 0.00455T$$

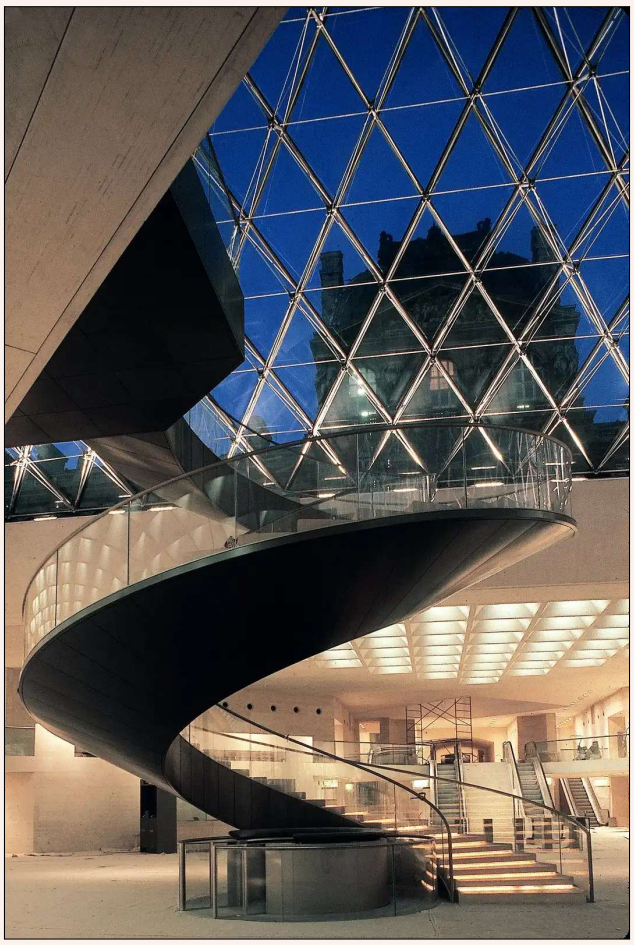
ऐंठन-अपरूपण

$$\begin{aligned}\tau_{fm} &= \frac{t_f T_{SV}}{J} = \frac{0.783(0.68T)}{3.60} = 0.148T \quad \text{Flange}\\ \tau_{wm} &= \frac{t_w T_{SV}}{J} = \frac{0.450(0.687T)}{3.60} = 0.085T \quad \text{web}\end{aligned}$$



[a] इन्हें उत्पन्न करने वाला MATLAB®कोड §I.2.3 में है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Louvre संग्रहालय, सीढी (I.M. Pei)

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

24 पूरक आभासी कार्य

सारांश

पिछले अध्याय में विक्षेप निर्धारित करने की ज्यामितीय विधियाँ प्रस्तुत की गई थीं, जो नम्य अवयवों तक सीमित थीं। यह अध्याय ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम पर आधारित एक मूलतः भिन्न उपागम अपनाता है, जो सभी प्रकार के संरचनात्मक अवयवों पर लागू होता है (चित्र 17.2 देखें)। यद्यपि अधिकांश पाठ्यपुस्तकों में इसे प्रायः "ऊर्जा विधियाँ" कहा जाता है, यहाँ अधिक परिशुद्ध शीर्षक अपनाया गया है ताकि अध्याय 48 में ऊर्जा-आधारित विधियों के विस्तृत विवेचन से संगति बनी रहे। अंततः, इस अध्याय को सरल से लेकर विशेषतः जटिल तक अनेक उदाहरणों से समृद्ध किया गया है, जो इन विधियों के व्यावहारिक अनुप्रयोग को दर्शाते हैं।

24.1 परिचय 981
24.2 पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत की सरलीकृत व्युत्पत्ति 982
24.2.1 व्युत्पत्ति 982
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti पारस्परिक प्रमेय 985
24.2.3 बाह्य आभासी कार्य δW^* . . . 986
24.2.4 आंतरिक आभासी कार्य δU^* . . 986
24.3 उदाहरण 987
24.3.1 उदाहरण 24.1: धरन 987
24.3.2 उदाहरण 24.2: फ्रेम; विक्षेप . . 988
24.3.3 उदाहरण 24.3: फ्रेम, घूर्णन . . 990
24.3.4 उदाहरण 24.4: नम्य कोष्ठक . . 991
24.3.5 उदाहरण 24.5: केबल-आलंबित कैंटिलीवर धरन 993
24.3.6 उदाहरण 24.6: ऐंठन और नम्य विरूपण 994
24.3.7 उदाहरण 24.7: धरन में नम्य और अपरूपण-विरूपण 996
24.3.8 उदाहरण 24.8: धरन में तापीय प्रभाव 997
24.3.9 उदाहरण 24.9: पाइपलाइन 998
24.3.10 उदाहरण 24.10: ट्रस; सरल . . 999
24.3.11 उदाहरण 24.11: ट्रस; जटिल . . 1000
24.3.12 उदाहरण 24.12: आरंभिक कैम्बर वाला ट्रस 1001
24.3.13 उदाहरण 24.13: द्वितीयक प्रतिबलों वाला ट्रस 1002
24.3.14 उदाहरण 24.14: वृत्ताकार वलय . 1004
24.3.15 उदाहरण 24.15: स्प्रिंग 1006



24.1 परिचय

1 पिछले अध्याय में विक्षेपों की गणना हेतु ज्यामितीय विधि का विस्तार किया गया था। किंतु वह सीमित (केवल नम्य अवयवों के लिए) और अपेक्षाकृत "दीर्घवृत्तीय" थी।

2 यह अध्याय एक व्यापक उपागम प्रस्तुत करेगा जो सभी संरचनात्मक प्रकारों पर लागू हो सकता है और रैखिक निकायों तक सीमित नहीं है। किंतु यहाँ विधि का विकास "प्रारंभिक" होगा; अधिक तर्कसंगत व्युत्पत्ति 48.3.1 में प्रस्तुत की जाएगी।

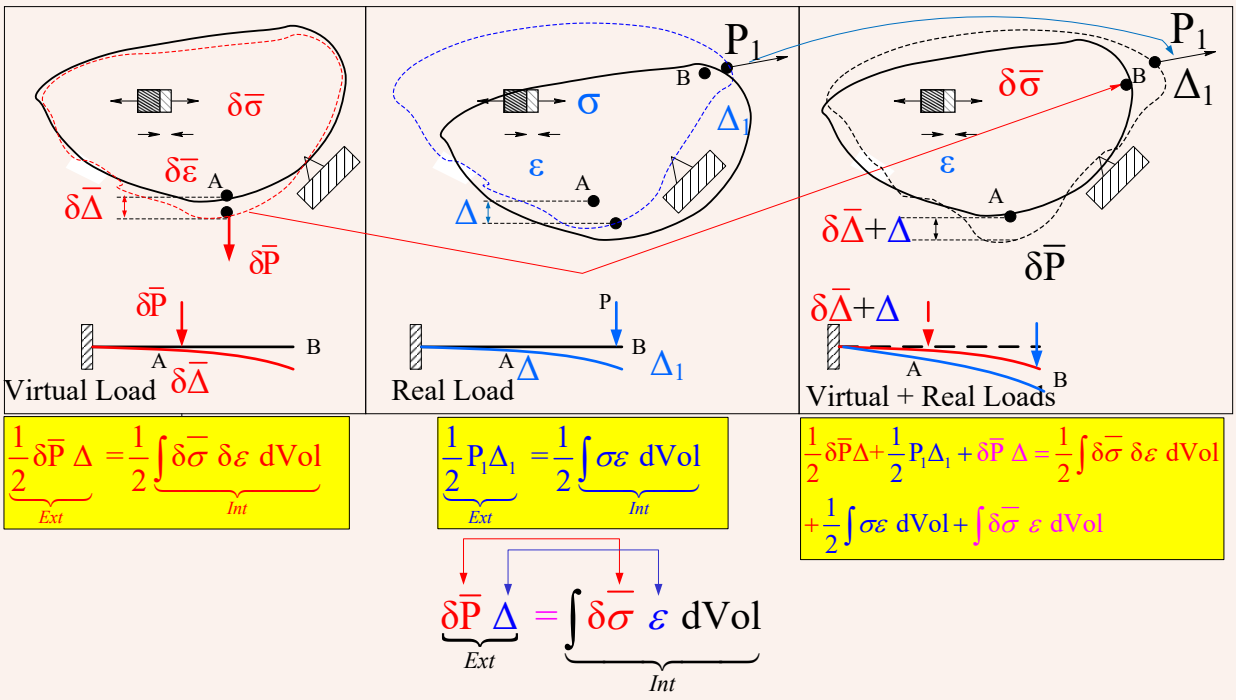
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[3] संकेत-पद्धति पर एक टिप्पणी। इस अध्याय में वास्तविक और आभासी राशियों का मिश्रण होगा। बाद वाली राशियाँ उनके ऊपर अधिरेखा और उनके पूर्व लगे δ चिह्न से पहचानी जाती हैं (इसे अवकलज न समझें)।

24.2 पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत की सरलीकृत व्युत्पत्ति

24.2.1 व्युत्पत्ति

[4] चित्र 24.1 में दर्शाई गई स्वेच्छ संरचना और भार पर विचार करके सिद्धांत व्युत्पन्न करेंगे। सरलता के लिए मान लें (अथवा विचार करें) कि इस संरचना में केवल आंतरिक अक्षीय प्रतिबल और विकृतियाँ (σ और ε) विकसित होती हैं। संरचना दो प्रकार के बलों के अधीन होगी:



चित्र 24.1: स्वेच्छ संरचना में आभासी और वास्तविक बल

आभासी बल उस स्थान A पर और उस दिशा (स्वतंत्रता-कोटि) में लगाया जाता है जहाँ विस्थापन (अथवा घूर्णन) परिकलित करना है। यह आभासी है और इसका मान अप्रासंगिक है, किंतु प्रायः इसे इकाई माना जाता है। आभासी बलों को संतुलन में होना चाहिए।

वास्तविक वास्तविक बाह्य आरोपित भार B के अनुरूप।

संबद्ध विस्थापनों को परिसीमा प्रतिबंधों का पालन करना चाहिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5 अब *आभासी कार्य* के व्यंजक व्युत्पन्न करेंगे, जो वास्तविक विस्थापन के साथ कार्यरत आभासी बल द्वारा किया गया कार्य है[1]। यह निम्नलिखित क्रम से किया जाएगा:

- केवल A पर आभासी भार लगाएँ (समीकरण 1 प्राप्त करें)[2]
- A पर आभासी भार लगाएँ और फिर B पर वास्तविक भार लगाएँ (जबकि आभासी भार अभी भी लगा है)।

6 इस बिंदु पर व्युत्पत्ति को विराम देकर निम्नलिखित स्मरण करते हैं

परिभाषा 24.1: ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम

कुल ऊर्जा (अर्थात् गतिज ऊर्जा K और आंतरिक ऊर्जा U का योग) के परिवर्तन की समय-दर, बाह्य बलों द्वारा किए गए कार्य की दर We और प्रति इकाई समय ऊष्मा-सामग्री में परिवर्तन H के योग के बराबर होती है

$$\frac{d}{dt}(K+U) = W_e + H$$

रुद्धोष्म निकाय (ऊष्मा-विनिमय नहीं) में और भारों को अर्ध-स्थैतिक ढंग से लगाने पर (गतिज ऊर्जा नहीं), उपर्युक्त संबंध सरल होकर बनता है:

$$W_e = U$$

7 सरल शब्दों में, हमारी स्थिति में बाह्य कार्य को आंतरिक विकृति-ऊर्जा के बराबर होना चाहिए। फलतः:

1. जब A पर आभासी भार लगाते हैं, तब बाह्य कार्य पूरे आयतन की आंतरिक विकृति-ऊर्जा के बराबर होना चाहिए; अतः:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\delta\overline{P}\delta\overline{\Delta}}_{\text{External virtual work}} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{dVol}} \delta\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon}\,\text{dVol}}_{\text{Internal virtual strain energy}}$$

   - गुणक 1/2 इसलिए आता है कि भार को 0 से उसके पूर्ण मान तक रैखिक रूप से क्रमशः बढ़ाकर लगाया जाता है। वक्र के नीचे का क्षेत्रफल बाह्य कार्य को निरूपित करता है (और इसी प्रकार आंतरिक विकृति-ऊर्जा को भी)।
   - विकृति-ऊर्जा आंतरिक कार्य है और इसका समाकलन आयतन पर किया जाता है।

[1] अथवा आभासी विस्थापन के साथ कार्यरत वास्तविक बल।

[2] अथवा केवल B पर वास्तविक भार लगाकर आरंभ कर सकते थे (समीकरण 2 प्राप्त करें), और फिर आभासी भार लगाते। भार-क्रम अप्रासंगिक है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. इसी प्रकार B पर वास्तविक भार लगाने से प्राप्त होगा

$$\underbrace{\frac{1}{2}P_1\Delta_1}_{\text{External real work}} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{dVol}}\sum \varepsilon \text{dVol}}_{\text{Internal real strain energy}}$$

3. अब पहले आभासी भार लगाया जाता है और फिर विरूपित निकाय पर वास्तविक (वास्तविकता में लगा) भार लगाया जाता है। किंतु दूसरा वास्तविक भार लगाते समय $\delta\overline{P}$ नियत रहा, फिर भी उसमें अतिरिक्त विस्थापन Δ हुआ। अतः उस स्थान पर *अतिरिक्त* बाह्य कार्य $\delta\overline{P}\Delta$ के बराबर होता है, जो है

$$\delta\overline{P}\Delta = \int_{\text{Vol}} \delta\overline{\sigma}\varepsilon \text{dVol}$$

1/2 पद की अनुपस्थिति पर ध्यान दें। अतः किया गया कुल कार्य बनता है

4. समीकरणों 1, 2 और 3 का योग करने पर प्राप्त होता है:

$$\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\delta\overline{P}\delta\overline{\Delta}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2}P_1\Delta_1}_{B}}^{\text{Uncoupled}} + \overbrace{\underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{A-B}}^{\text{Coupled}} = \overbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{Vol}}\delta\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon}\text{dVol}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{Vol}}\sum\varepsilon\text{dVol}}_{B}}^{\text{Uncoupled}} + \overbrace{\underbrace{\int_{\text{Vol}}\delta\overline{\sigma}\varepsilon\text{dVol}}_{A-B}}^{\text{Coupled}}$$

5. चूँकि विकृति-ऊर्जा और किया गया कार्य समान होने चाहिए, चाहे भारों को साथ लगाया जाए अथवा अलग-अलग, अतः समीकरणों 2 और 1 के योग को 4 से घटाकर और व्यापक रूप देने पर प्राप्त होता है

$$\underbrace{\int_{\text{Vol}}\delta\overline{\sigma}\varepsilon\text{dVol}}_{\delta\overline{U}^*} = \underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\delta\overline{W}^*}$$

[8] यह अंतिम समीकरण आभासी बल-विधि की कुंजी है। बायाँ पक्ष आंतरिक आभासी विकृति-ऊर्जा $\delta\overline{U}^*$ है[3]। इसी प्रकार दायाँ पक्ष बाह्य आभासी कार्य है।

[9] अंतिम समीकरण को इस प्रकार कहा जा सकता है

[3] आभासी विस्थापन विधि (जिसे बाद में लिया जाएगा) से प्राप्त आंतरिक आभासी विकृति-ऊर्जा $\delta\overline{U}$ से भेद करने के लिए * का उपयोग किया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 24.2: (पूरक) आभासी कार्य का सिद्धांत

यदि संतुलन में स्थित और दिए गए भार-समुच्चय को वहन करने वाली विरूपणशील संरचना किसी अतिरिक्त क्रिया के फलस्वरूप आभासी विरूपण के अधीन हो, तो दिए गए भार-समुच्चय का बाह्य आभासी कार्य, उसी भार-समुच्चय से उत्पन्न प्रतिबलों के आंतरिक आभासी कार्य के बराबर होता है।

24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti पारस्परिक प्रमेय

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §11.4.1 देखें

[10] स्मरण करें कि f_{ij}, dof i पर विस्थापन है, जो dof j पर इकाई बल के कारण उत्पन्न होता है।

$$\text{Displacement at dof } i \text{ due to point load at } i \quad \Delta_i = \int \delta\overline{M}_i \frac{M_i}{EI} \mathrm{d}x$$

$$\text{Displacement at dof } i \text{ due to a unit force at } j \quad f_{ij} = \int \delta\overline{M}_i \frac{M_j}{EI} \mathrm{d}x$$

$$\text{Displacement at dof } j \text{ due to a unit force at } i \quad f_{ji} = \int \delta\overline{M}_j \frac{M_i}{EI} \mathrm{d}x$$

चूँकि आभासी और वास्तविक दोनों भार इकाई हैं, $\delta\overline{M}_i = M_i, \delta\overline{M}_j = M_j$, अतः $f_{ij} = f_{ji}$।

परिभाषा 24.3: Maxwell-Betti का पारस्परिक प्रमेय

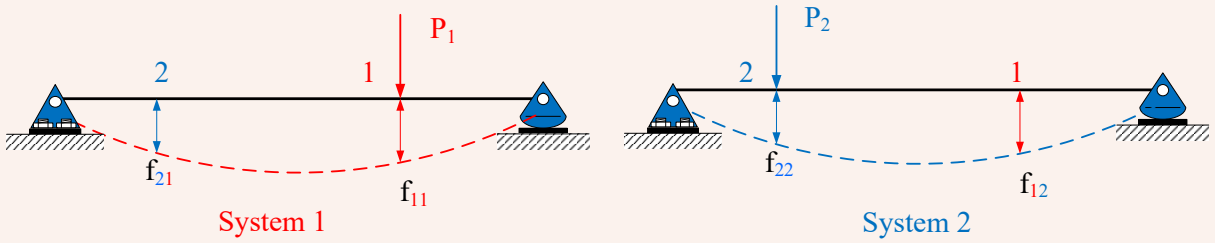
बिंदु A का दिशा 1 में विक्षेप, जो बिंदु B पर दिशा 2 में इकाई भार के कारण उत्पन्न होता है, बिंदु B के दिशा 2 में उस विक्षेप के परिमाण के बराबर है जो बिंदु A पर दिशा 1 में लगाए गए इकाई भार से उत्पन्न होता है।

$$f_{ij} = f_{ji}$$

अथवा, विस्तार से: यदि किसी रैखिक प्रत्यास्थ संरचना पर दो भार-समुच्चय कार्य करें, तो दूसरे भार-समुच्चय से उत्पन्न विस्थापनों के साथ कार्य करते हुए प्रथम भार-समुच्चय द्वारा किया गया कार्य, प्रथम भार-समुच्चय से उत्पन्न विस्थापनों के साथ कार्य करते हुए दूसरे भार-समुच्चय द्वारा किए गए कार्य के बराबर होता है।

$$P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 24.2: Maxwell-Betti पारस्परिक प्रमेय

24.2.3 बाह्य आभासी कार्य $\delta\overline{W}^*$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §10.3.2.2 देखें

11 बिंदु भारों अथवा आघूर्णों के अधीन संरचना का बाह्य आभासी कार्य है

$$\delta\overline{W}^* = \sum_{i=1}^{n}(\Delta_i)\delta\overline{P}_i + \sum_{i=1}^{n}(\theta_i)\delta\overline{M}_i$$

ध्यान दें कि वितरित आभासी भार जैसी कोई वस्तु नहीं होती। स्मरण रखें कि अधिरेखित सभी राशियाँ आभासी और अन्य राशियाँ वास्तविक हैं।

24.2.4 आंतरिक आभासी कार्य $\delta\overline{U}^*$

12 समीकरण eq:pvwd से आंतरिक आभासी कार्य का व्यापक व्यंजक है

$$\delta\overline{U}^* = \int \delta\overline{\sigma}\varepsilon \mathrm{dVol}$$

13 रैखिक प्रत्यास्थ निकायों ($\sum = E\varepsilon$) के लिए इसे बलों और आघूर्णों से संबंधित करने हेतु विस्तारित किया जा सकता है,

अक्षीय अवयव

14 प्रतिस्थापनों की एक शृंखला से प्राप्त होगा

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_{\mathrm{dVol}} \varepsilon(x)\delta\overline{\sigma}(x)d\mathrm{Vol} \\ \delta\overline{\sigma}(x) &= \frac{\delta\overline{P}^{(e)}(x)}{A} \\ \varepsilon(x) &= \frac{P^{(e)}(x)}{AE} \\ dV &= Adx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{P}^{(e)}(x)\underbrace{\frac{P^{(e)}(x)}{AE}}_{\Delta}dx \tag{24.1}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15 ध्यान दें कि n अवयवों वाले ट्रस के लिए उपर्युक्त व्यंजक बनता है

$$\delta\overline{U}^* = \sum_{1}^{n} \delta\overline{P}^{(i)} \frac{P^{(i)} L_i}{A_i E_i}$$

यह ध्यान रखना चाहिए कि P वास्तविक भार से उत्पन्न अक्षीय बल और $\delta\overline{P}$ आभासी भार से उत्पन्न अक्षीय बल है। ये बल ट्रस-विश्लेषण से निर्धारित किए जाते हैं।

16 ध्यान दें कि यह समीकरण Maxwell द्वारा §15.5.4.2 में दिए गए समीकरण के समान है।

नम्य अवयव

17 अनुरूप उपागम का अनुसरण करते हुए:

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_{\text{Vol}} \varepsilon(x) \underbrace{E\delta\overline{\varepsilon}(x)}_{\delta\overline{\sigma}(x)} \,\text{dVol} \\ \delta\overline{\sigma}_x(x) &= \frac{\delta\overline{M}_z(x) y}{I_z} \\ \varepsilon(x) &= \frac{M_z(x) y}{E I_z} \\ d\text{Vol} &= dA\, dx \\ I_z &= \int_A y^2 dA \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{M}(x) \underbrace{\frac{M(x)}{E I_z}}_{\Phi(x)} dx$$

18 पुनः, ध्यान रखें कि $M(x)$ वास्तविक भार से उत्पन्न आघूर्ण-आरेख और $\delta\overline{M}(x)$ आभासी भार से उत्पन्न आघूर्ण-आरेख है।

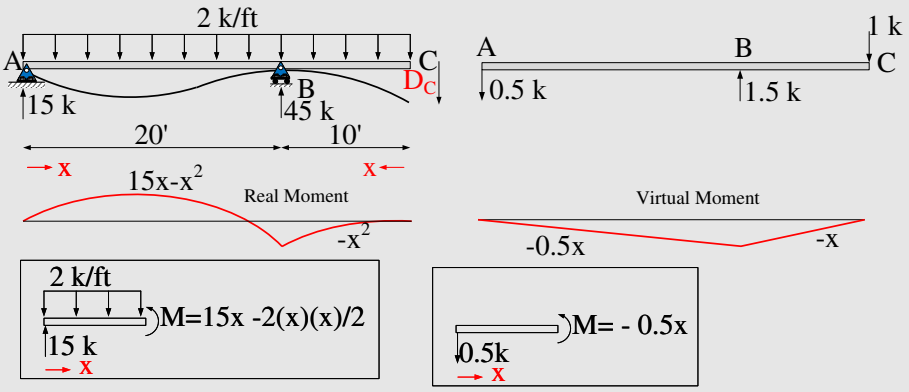
19 स्पष्टतः हमें *आघूर्णों के विश्लेषणात्मक व्यंजकों* की आवश्यकता होगी।

24.3 उदाहरण

24.3.1 उदाहरण 24.1: धरन

हम बिंदु C पर विक्षेप निर्धारित करना चाहते हैं। $E = 29{,}000$ ksi, $I = 100$ in^4।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



आभासी बल-विधि के लिए आघूर्ण के दो व्यंजक चाहिए—एक वास्तविक भार से और दूसरा (इकाई) आभासी भार से उत्पन्न। धरन के आभासी और वास्तविक आघूर्ण नीचे सारांशित हैं

अवयव	$x = 0$	$M(x)$	$\delta\overline{M}(x)$
AB	A	$15x - x^2$	$-0.5x$
BC	C	$-x^2$	$-x$

आभासी कार्य का सिद्धांत लागू करने पर प्राप्त होता है

$$\underbrace{\Delta_C \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$(1)k(\Delta_C)ft = \int_0^{20}(-0.5x)\frac{(15x - x^2)}{EI}dx + \int_0^{10}(-x)\frac{-x^2}{EI}dx$$

$$= \frac{2,500}{EI}$$

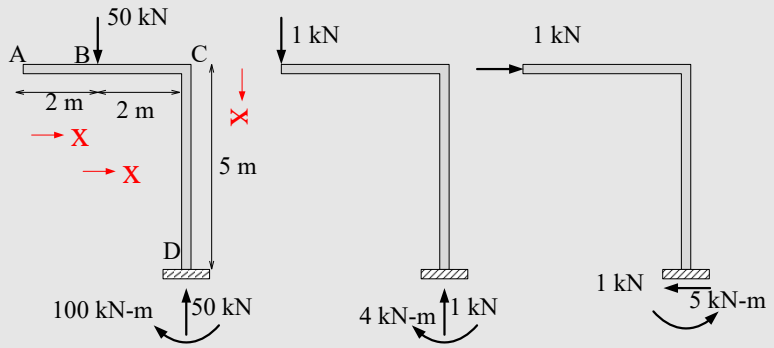
$$(1)k(\Delta_C)\ \text{in} = \frac{(2,500)\ \text{k}^2 - \ \text{ft}^4(1,728)\ \text{in}^3/\ \text{ft}^3}{(29,000)\ \text{k}/\ \text{in}^2(100)\ \text{in}^4}$$

$$= 1.49\ \text{in}$$

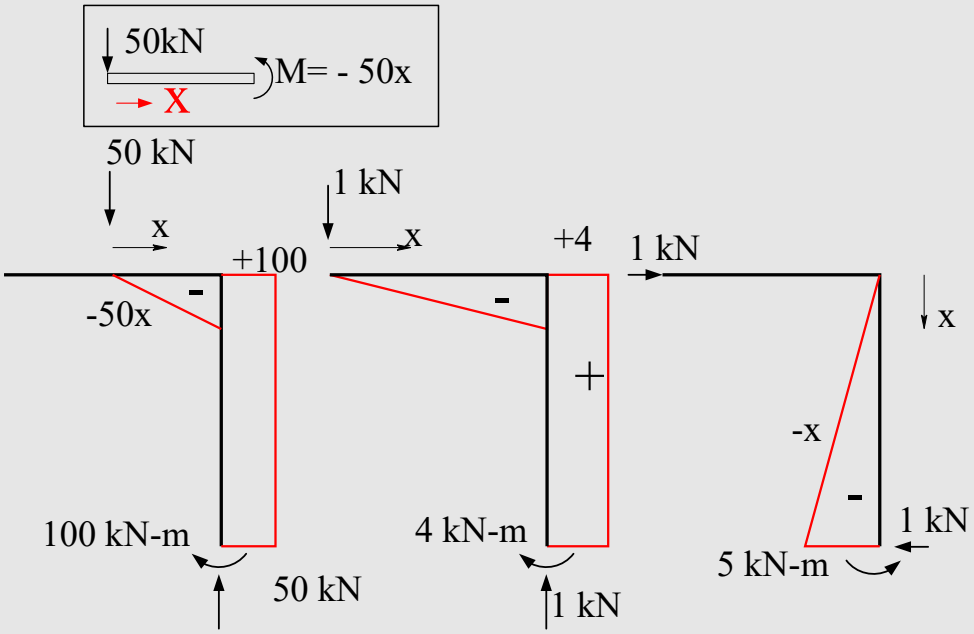
24.3.2 उदाहरण 24.2: फ्रेम; विक्षेप

निम्नलिखित फ्रेम के लिए A पर ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दोनों विक्षेप निर्धारित करने हैं। $E = 200\times10^6$ kN/ m^2, $I = 200 \times 10^6$ mm^4।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



इस फ्रेम के विश्लेषण के लिए वास्तविक भार और दोनों आभासी भारों से प्रत्येक अवयव के अनुदिश आघूर्णों के विश्लेषणात्मक व्यंजक निर्धारित करने होंगे। एक आभासी भार A पर इकाई क्षैतिज भार है और दूसरा भी A पर इकाई ऊर्ध्वाधर भार। आवश्यक भार-समुच्चयों के आघूर्ण-आरेख, जिन्हें विश्लेषणात्मक रूप में व्यक्त किया जाएगा, नीचे दर्शाए गए हैं



अवयव	$x = 0$	M	$\delta\overline{M}_v$	$\delta\overline{M}_h$
AB	A	0	$-x$	0
BC	B	$-50x$	$-2-x$	0
CD	C	100	4	$-x$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इकाइयाँ: kN & m अब प्रतिस्थापित करते हैं

$$\underbrace{\Delta_v \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$\begin{aligned}(1)kN(\Delta_v)m &= \int_0^2 (-x)\frac{(0)}{EI}dx + \int_0^2 (-2-x)\frac{-50x}{EI}dx + \int_0^5 (4)\frac{100}{EI}dx \\ &= \frac{2,333\ \text{kN}^2\ \text{m}^4}{EI} \\ &= \frac{(2,333)\ \text{kN}^2\ \text{m}^4(10^3)^4\ \text{mm}^4/\ \text{m}^4}{(200\times10^6)\ \text{kN}/\ \text{m}^2(200\times10^6)\ \text{mm}^4} \\ &= 0.058\ \text{m} = 5.8\ \text{cm}\end{aligned}$$

इसी प्रकार क्षैतिज विस्थापन के लिए:

$$\underbrace{\Delta_h \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$\begin{aligned}(1)kN(\Delta_h)m &= \int_0^2 (0)\frac{(0)}{EI}dx + \int_0^2 (0)\frac{-50x}{EI}dx + \int_0^5 (-x)\frac{100}{EI}dx \\ &= \frac{-1,250\ \text{kN}^2\ \text{m}^4}{EI} \\ &= \frac{(-1,250)\ \text{kN}^2\ \text{m}^4(10^3)^4\ \text{mm}^4/\ \text{m}^4}{(200\times10^6)\ \text{kN}/\ \text{m}^2(200\times10^6)\ \text{mm}^4} \\ &= -0.031\ \text{m} = -3.1\ \text{cm}\end{aligned}$$

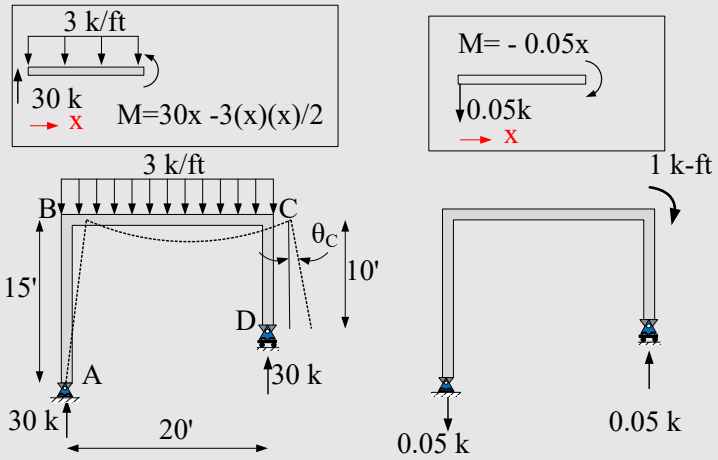
ध्यान दें कि क्षैतिज विक्षेप बाईं ओर है (आभासी बल की दिशा के विपरीत)।

24.3.3 उदाहरण 24.3: फ्रेम, घूर्णन

हम संधि C का घूर्णन निर्धारित करना चाहते हैं। $E = 29,000$ ksi, $I = 240$ in^4।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



इस समस्या में आभासी बल, संधि C पर आरोपित इकाई आघूर्ण $\delta\overline{M}_e$ है। यह आंतरिक आघूर्ण $\delta\overline{M}_i$ उत्पन्न करेगा, जिसे इस प्रकार व्यक्त किया गया है

अवयव	$x=0$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	0	0
BC	B	$30x-1.5x^2$	$-0.05x$
CD	D	0	0

प्रतिस्थापन से मिलता है:

$$\underbrace{\theta_C\delta\overline{M}_e}_{\delta\overline{W}^*}=\underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$(1)k-ft(\theta_C)\text{rad}=\int_0^{20}(-0.05x)\frac{(30x-1.5x^2)}{EI}dx \quad \text{k}^2\ \text{ft}^3$$

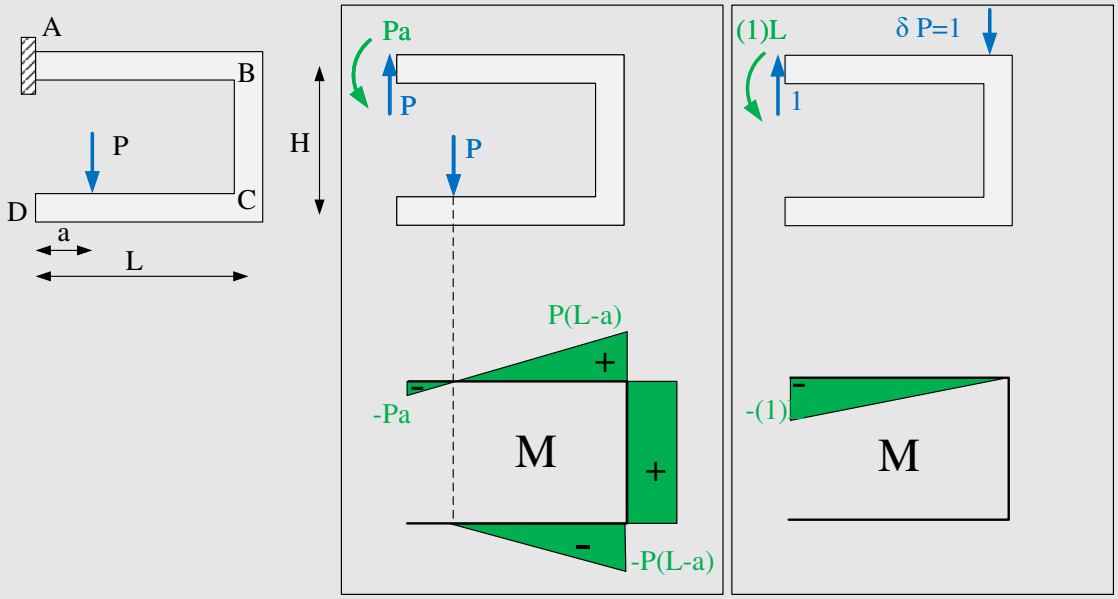
$$=-\frac{(1,000)k^2\ \text{ft}^2(144)\ \text{in}^2/\ \text{ft}^2}{(29,000)\ \text{k}/\ \text{in}^2(240)\ \text{in}^4}$$

$$=-0.021\ \text{radians}$$

24.3.4 उदाहरण 24.4: नम्य कोष्ठक

हम a इस प्रकार निर्धारित करना चाहते हैं कि B पर ऊर्ध्वाधर विक्षेप शून्य हो।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



वास्तविक और आभासी बलों के अनुरूप प्रतिक्रियाएँ तथा आघूर्ण-आरेख सरलता से निर्धारित होते हैं और ऊपर संबद्ध आरेखों में दर्शाए गए हैं; उनके विश्लेषणात्मक रूप नीचे सारांशित हैं।

अवयव	$x=0$ @	M	$\delta\overline{M}$
DE	D	0	0
EC	E	$-Px$ 0	
CB	C	$-P(L-a)$	0
BF	B	$P(L-a-x)$	x
FA	F	Px	$L-a+x$

$$\underbrace{\Delta_B \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}_*} == \int_L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx$$

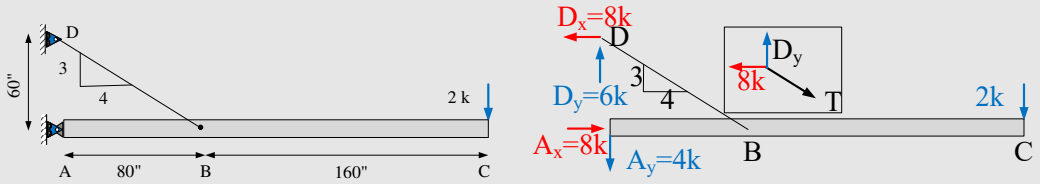
$$\Delta_B(1) = \int_0^{L-a} \frac{P(L-a-x)x}{EI}dx + \int_0^{a} \frac{-Px(L-a+x)}{EI}dx$$

$$\Delta_B = \frac{PL^2}{6EI}(L-3a) \Rightarrow a = \frac{L}{3}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

24.3.5 उदाहरण 24.5: केबल-आलंबित कैंटिलीवर धरन

पूरवेश-छज्जा ऐलूयूमिनियम की केबल ($A = 1$ in^2; E=10^7 psi) और ऐलूयूमिनियम की ही धरन ($A = 10$ in^2; $I = 171$ in^4, $E = 10^7$ psi) द्वारा आलंबित है। हम C पर विस्थापन निर्धारित करना चाहते हैं।



पहले वास्तविक भार से संबद्ध बल परिकलित करते हैं।

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^A = 0; \Rightarrow D_x(60) - 2(240) = 0 \Rightarrow D_x = 8k$$
$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow -D_x + A_x = 0 \Rightarrow A_x = 8k$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow -A_y + D_y - 2 = 0$$

परंतु आनत केबल केवल अक्षीय बल वहन कर सकती है, अतः

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{5}T - D_y &= 0\\ \frac{4}{5}T - D_x &= 8k\end{aligned}\right\} T = 10k$$

और अतः $D_y = 6k$ तथा $A_y = 4k$। इसके बाद परिणामों को आंतरिक बलों के अनुरूप विश्लेषणात्मक व्यंजकों सहित सारणीबद्ध करते हैं

अवयव	$x = 0$ at	P	$\delta\overline{P}$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	-8	-4	$-4x$	$-2x$
BC	B	0	0	$2x - 320$	$x - 160$
DB	D	10	5		

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इन दोनों सारणियों से

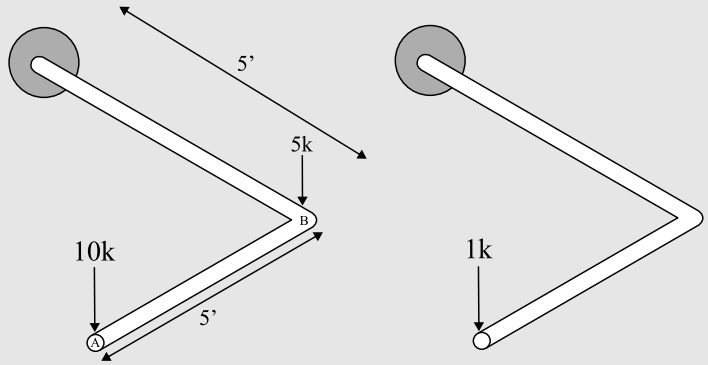
$$\underbrace{\delta\overline{P}\Delta_c}_{\delta W*} = \underbrace{\int_L \delta\overline{P}\frac{P}{AE}dx + \int \delta\overline{M}\frac{M}{Ei}dx}_{\delta\overline{U}*}$$

$$\begin{aligned}
(1)\Delta_C &= \int_0^{100}\frac{(5)(10)}{A_cE}dx + \int_0^{80}\frac{(-4)(-8)}{A_bE}dx \\
&\quad + \int_0^{80}\frac{(-2x)(-4x)}{EI_b} + \int_0^{160}\frac{(x-160)(2x-320)}{EI_b}dx \\
&= \int_0^{100}\frac{(5)(10)}{(1\text{in}^2)(10^7\text{psi})}dx + \int_0^{80}\frac{(-4)(-8)}{(10\text{in}^2)(10^7\text{psi})}dx \\
&\quad + \int_0^{80}\frac{(-2x)(-4x)}{(10^7\text{psi})(171\text{in}^4)} + \int_0^{160}\frac{(x-160)(2x-320)}{(10^7\text{psi})(171\text{in}^4)}dx \\
\Delta_C &= 0.0005 + 0.0000256 + 0.0007984 + 0.001597 \\
&= \underbrace{0.000526}_{\text{Axial}} + \underbrace{0.00239}_{\text{flexural}} \\
&= 0.0029\text{in}(\downarrow)
\end{aligned}$$

24.3.6 उदाहरण 24.6: ऐंठन और नम्य विरूपण

अब नीचे दर्शाई गई संरचना में A पर ऊर्ध्वाधर विक्षेप निर्धारित करना है ($E = 30,000$ ksi, $I = 144$ in^4, $G = 12,000$ ksi, $J = 288$ in^4)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



1. इस समस्या में नम्य और ऐंठन दोनों विरूपण हैं। अतः वास्तविक और इकाई आभासी दोनों भारों के लिए आंतरिक आघूर्ण और ऐंठन-वितरण निर्धारित करना चाहिए।
2. फिर निम्नलिखित संबंध का उपयोग करेंगे

$$\overbrace{\delta\overline{P}\Delta_A}^{\delta\overline{W}} = \overbrace{\underbrace{\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x}_{\text{flexure}} + \underbrace{\int \delta\overline{T}\frac{T}{GJ}\mathrm{d}x}_{\text{Torsion}}}^{\delta\overline{U}}$$

3. आघूर्ण और ऐंठन के व्यंजक हैं

अवयव	$x=0$	M	$\delta\overline{M}$	T	$\delta\overline{T}$
AB	A	$10x$	x	0	0
BC	B	$15x$	x	50	5

4. प्रतिस्थापन करने पर,

$$\begin{aligned}
\delta\overline{P}\Delta_A &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x + \int \delta\overline{T}\frac{T}{GJ}\mathrm{d}x \\
1\Delta_A &= \int_0^5 x\frac{10x}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^5 x\frac{15x}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^5 (5)\frac{50}{GJ}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(1,042)(1,728)}{(30,000)(144)} + \frac{(1,250)(1,728)}{(12,000)(288)} \\
&= \underbrace{0.417}_{\text{Flexure}} + \underbrace{0.625}_{\text{Torsion}} \\
&= 1.04 \text{ in}
\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

24.3.7 उदाहरण 24.7: धरन में नम्य और अपरूपण-विरूपण

लंबाई L की कैंटिलीवर धरन का विक्षेप निर्धारित करें, जो अंतिम बल P के अधीन है और जिसमें नम्य तथा अपरूपण दोनों विरूपण होते हैं। $G = 0.4E$ और ठोस वर्गाकार धरन-काट मानें।

1. आभासी कार्य-समीकरण है

$$\underbrace{\delta\overline{P}}_{1}\cdot\Delta = \int_0^L \delta\overline{M}d\phi + \int_0^L \delta\overline{V}\gamma_{xy}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx + \int_0^L \delta\overline{V}\lambda\frac{V}{GA}\mathrm{d}x$$

2. प्रथम समाकल $M = Px$ और $\delta\overline{M} = (1)(x)$ के लिए देता है

$$\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{P}{EI}\int_0^L x^2dx$$
$$= PL^3/3EI$$

3. दूसरा समाकल कुल आंतरिक आभासी कार्य और अतः कुल विस्थापन में अपरूपण-क्रिया के योगदान को निरूपित करता है।
4. वास्तविक अपरूपण V और आभासी अपरूपण $\delta\overline{V}$ दोनों अवयव की लंबाई के अनुदिश नियत हैं, अतः

$$\int_0^L \delta\overline{V}\lambda\frac{V}{GA}\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{GA}\int_0^L 1(P)\mathrm{d}x = \frac{\lambda PL}{GA}$$

5. चूँकि वर्गाकार धरन के लिए λ= 1.2; अतः

$$1\cdot\Delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{1.2PL}{GA}$$
$$= \frac{PL}{3E}\left[\frac{L^2}{I} + \frac{3.6}{0.4A}\right] = red\frac{PL}{3E}\left[\frac{L^2}{I} + \frac{9}{A}\right]$$

6. विमा h वाली वर्गाकार धरन के लिए

$$I = \frac{h^4}{12} \quad \text{and} \quad A = h^2$$

तब

$$\Delta = \frac{PL}{3E}\left[\frac{12L^2}{h^4} + \frac{9}{h^2}\right] = \frac{3PL}{Eh^2}\left[\frac{1.33L^2}{h^2} + 1\right]$$

7. $L = 20$ ft और $h = 1.5$ ft चुनने पर $(L/h = 13.3)$

$$\Delta = \frac{3PL}{Eh^2}[1.33\left(\frac{20}{1.5}\right)^2 + 1] = \frac{3PL}{Eh^2}(237 + 1)$$

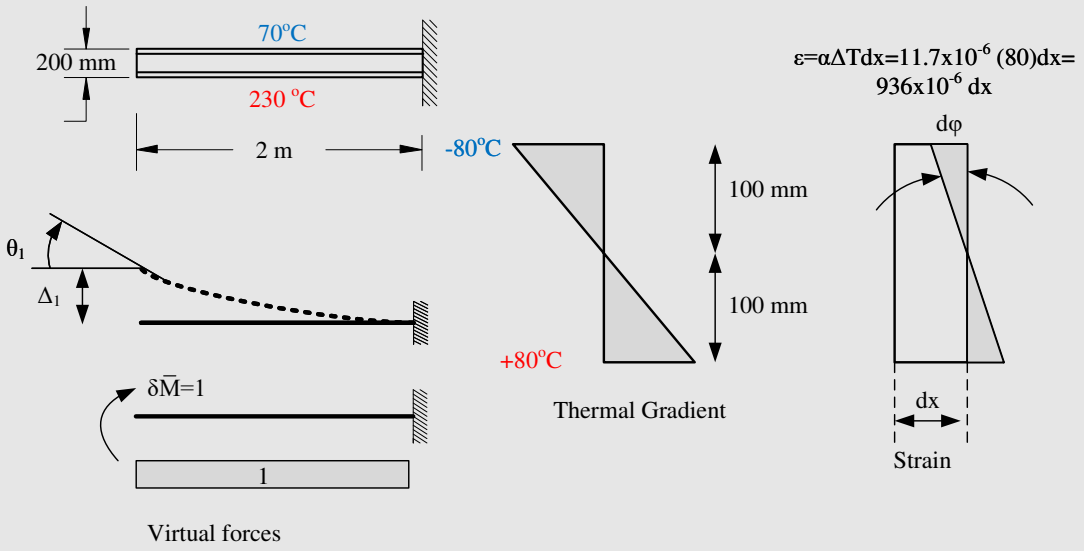
अतः नम्य विरूपण, अपरूपण विस्थापन का 237 गुना है। यह तुलना स्पष्ट करती है कि धरनों में सामान्यतः अपरूपण-विरूपण की उपेक्षा क्यों की जाती है। धरन के छोटी अथवा अधिक गहरी होने पर, या L/h घटने पर, अपरूपण विस्थापन के सापेक्ष नम्य विरूपण घटता है। $L/h = 5$ पर नम्य विरूपण घटकर अपरूपण विस्थापन का $1.33(5)^2 = 33$ गुना रह जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

24.3.8 उदाहरण 24.8: धरन में तापीय प्रभाव

निम्नलिखित अनुभाग White, Gergely, and Sexmith, 1976 *Structural Engineering* से पुनरुत्पादित है।

निम्नलिखित कैंटिलीवर धरन में तापमान के प्रभाव से धरन के सिरे पर उत्पन्न घूर्णन कोण, θ_1, निर्धारित करना है।



धरन इस्पात का विस्तृत-फ्लैंज काट है, 2 m लंबा और 200 mm गहरा। धरन का मूल एकसमान तापमान 40°C था।

1. वांछित वास्तविक विस्थापन θ_1 के अनुरूप बाह्य आभासी बल, कैंटिलीवर के अग्रभाग पर आघूर्ण $\delta\overline{M} = 1$ है, जिससे आघूर्ण गुणा घूर्णन का बाह्य कार्य-पद उत्पन्न होता है। इस कैंटिलीवर धरन के लिए आंतरिक आभासी बल-निकाय एकसमान आघूर्ण $\delta\overline{M}_{int} = 1$ है।
2. वास्तविक आंतरिक विरूपण के दो कारण हैं: (a) धरन का औसत तापमान 150°C, जो मूल तापमान से 110°C अधिक है, और (b) धरन की गहराई में 160°C का तापमान-प्रवणता।
3. तापीय प्रभाव का प्रथम भाग केवल धरन की लंबाई बढ़ाता है और कार्य-समीकरण में प्रवेश नहीं करता, क्योंकि आभासी भारण धरन की लंबाई में अक्षीय परिवर्तन के अनुरूप कोई अक्षीय बल उत्पन्न नहीं करता।
4. दूसरा प्रभाव (तापीय प्रवणता) घूर्णन $d\phi$ और आंतरिक आभासी कार्य-पद $\int_0^L \delta\overline{M}\phi \mathrm{d}x$ उत्पन्न करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5. ऊपर दर्शाई गई चरम तंतु की तापीय विकृति पर विचार करके $d\phi$ का मान निर्धारित करते हैं। लंबाई $\mathrm{d}x$ में कोणीय घूर्णन, चरम तंतु की तापीय विकृति को धरन की आधी गहराई से भाग देने पर मिलता है, अथवा

$$\begin{aligned} 1 \cdot \theta_1 &= \int_0^L \delta\overline{M}\phi \mathrm{d}x \\ &= \int_0^L (1)\frac{\alpha(T_b - T_t)}{h}\mathrm{d}x \\ &= \frac{(11.7 \times 10^{-6})m/m(230-70)^o\mathrm{C}(2)\ \mathrm{m}}{(0.2)\ \mathrm{m}} \\ &= 0.01872 \text{ radians} \end{aligned}$$

6. यह उदाहरण निम्नलिखित बिंदु उठाता है:

   (a) θ_1 का मान 200 mm गहरी किसी भी आकार की इस्पात धरन के लिए समान होगा, बशर्ते उसका बंकन उदासीन अक्ष मध्य-गहराई पर हो।

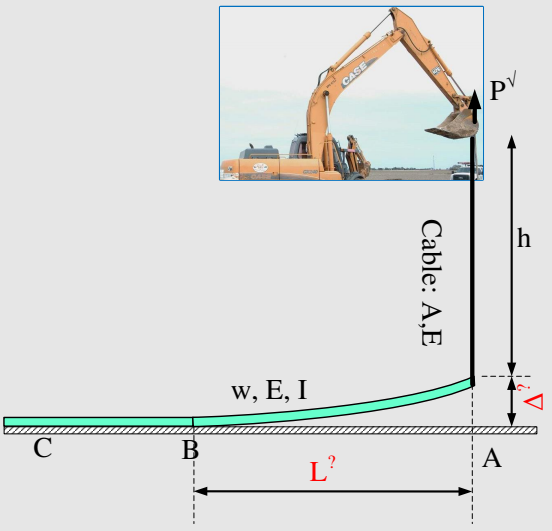
   (b) वक्रता केवल तापीय प्रवणता से उत्पन्न होती है और तापमान के निरपेक्ष मानों से स्वतंत्र है।

   (c) आभासी बल-विधि से घूर्णनों की गणना सरल और प्रत्यक्ष है; आरोपित आभासी बल उस बिंदु पर कार्यरत आघूर्ण है जहाँ घूर्णन परिकलित करना है।

   (d) आंतरिक कोणीय विरूपण $d\phi$ की गणना भार-जनित प्रतिबलों से भिन्न प्रभाव के लिए की गई है। अप्रत्यास्थ विस्थापनों के लिए आभासी बल-विधि का विस्तार स्पष्ट है—केवल अप्रत्यास्थ आंतरिक विरूपण निर्धारित करने की विधि ज्ञात होनी चाहिए।

24.3.9 उदाहरण 24.9: पाइपलाइन

मान लें कि हम कृषेत्र-अभियंता हैं और स्वभार w (प्रति इकाई लंबाई), जडत्व आघूर्ण I, प्रत्यास्थता मापांक E_p, और Poisson अनुपात ν वाली पाइपलाइन बिछा रहे हैं। पाइपलाइन BC का एक सिरा भूमि पर समतल पड़ा है; दूसरे पाद AB को ऊँचाई Δ तक उठाना है। यह कार्य बल $P^{\checkmark}$ द्वारा किया जाता है, जो लंबाई h, कृषेत्रफल A और प्रत्यास्थता मापांक E_c वाली केबल से लगाया जाता है।



क्रेन-चालक हमसे पूछता है कि

1. ज्ञात बल $P^{\checkmark}$ के पदों में पाइपलाइन की वह लंबाई $L^{?}$ निर्धारित करें जो भूमि से अलग होती है (AB)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. पाइपलाइन के उठे हुए भाग का अपरूपण और आघूर्ण-आरेख बनाएँ।
3. विस्थापन $\Delta^{?}$, बिंदु A का, इन राशियों के पदों में परिकलित करें: P, w, L, h, E, A, और I।

हल निम्नलिखित है

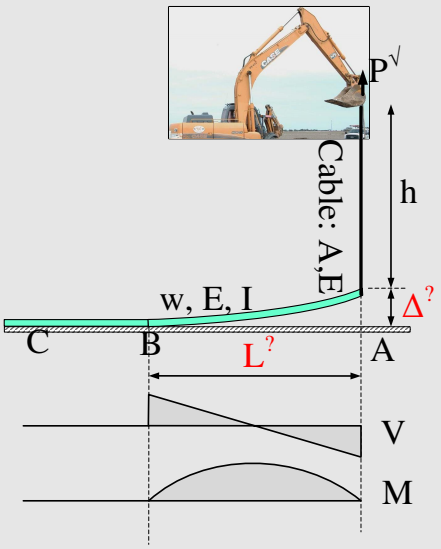
1. B पर वक्रता शून्य है ($d\theta/dx = 0$), अतः आघूर्ण शून्य है।

$$PL = wL^2/2 \Rightarrow L = 2P/w$$

और B पर दायाँ आलंब कब्जा है। पृथक्करण-बिंदु पर ध्यान दें:

$$+ve \uparrow \sum F_Y = 0; P - wL + R_B = 0; \Rightarrow R_B = w\left(\frac{2P}{w}\right) - P = P \uparrow$$

वास्तव में P का संकेंद्रित बल है।



2. A पर $x = 0$ लेते हुए विक्षेप:

$$\delta\overline{P}\Delta_C = \int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}\mathrm{d}x + \delta\overline{P}^{(e)}\frac{Ph}{AE}$$

$$M(x) = Px - w\frac{x^2}{2}$$

$$\delta\overline{M}(x) = (1)x$$

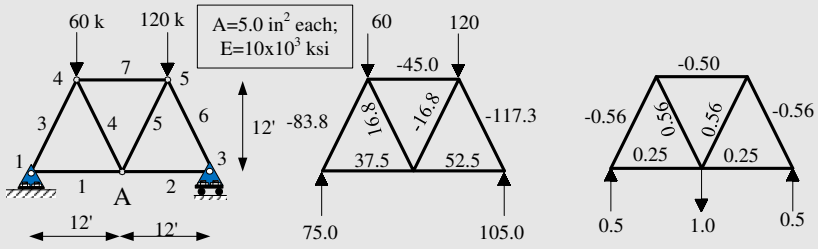
$$\delta\overline{P} = 1$$

$$(1)\Delta_C = \int_0^L x\frac{Px - w\frac{x^2}{2}}{EI}\mathrm{d}x + (1)\frac{Ph}{AE}$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) + \frac{Ph}{AE}$$

24.3.10 उदाहरण 24.10: ट्रस; सरल

हम निम्नलिखित ट्रस के नोड A पर विक्षेप निर्धारित करना चाहते हैं



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

गणनाओं का सारांश निम्नलिखित सारणी में व्यक्त है

अवयव	$\delta\overline{P}^{(e)}$ kips	$P^{(e)}$, kips	L, ft	A, in^2	E, ksi	$\delta\overline{P}^{(e)}\frac{P^{(e)}L}{AE}$
1	+0.25	+37.5	12	5.0	10×10^3	$+22.5\times10^{-4}$
2	+0.25	+52.5	12	5.0	10×10^3	$+31.5\times10^{-4}$
3	-0.56	-83.8	13.42	5.0	10×10^3	$+125.9\times10^{-4}$
4	+0.56	+16.8	13.42	5.0	10×10^3	$+25.3\times10^{-4}$
5	+0.56	-16.8	13.42	5.0	10×10^3	-25.3×10^{-4}
6	-0.56	-117.3	13.42	5.0	10×10^3	$+176.6\times10^{-4}$
7	-0.50	-45.0	12	5.0	10×10^3	$+54.0\times10^{-4}$
						$+410.5\times10^{-4}$

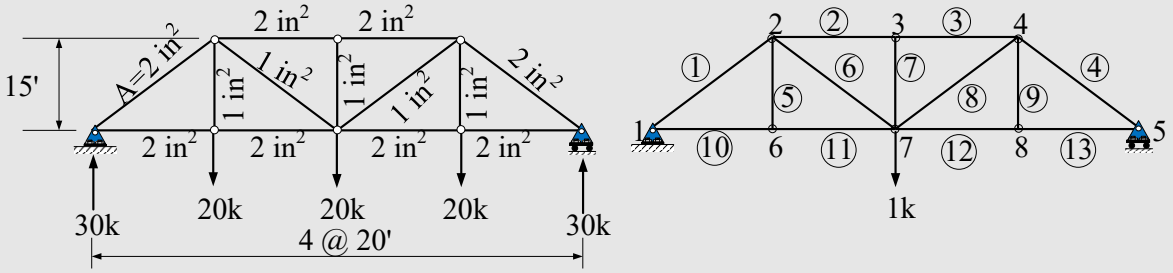
अतः

$$(\delta\overline{P})\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = \sum_1^7 \delta\overline{P}^{(e)}\frac{PL}{AE}$$

$$(1)\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = (410.5\times10^{-4})\frac{\text{k}^2\ \text{ft}}{\text{in}^2\ \text{k/ in}^2}(12\ \text{in/ ft}) = 0.493\ \text{in}$$

24.3.11 उदाहरण 24.11: ट्रस; जटिल

हम संधि 7 का ऊर्ध्वाधर विक्षेप निर्धारित करना चाहते हैं। $E = 30,000$ ksi।



दो विश्लेषण आवश्यक हैं—एक वास्तविक भार के साथ और दूसरा संधि 7 पर इकाई ऊर्ध्वाधर भार के साथ। उन विश्लेषणों के परिणाम नीचे सारांशित हैं। ध्यान दें कि भार और संरचना की सममिति का लाभ लिया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवयव	A in^2	L ft	$P^{(e)}$ k	$\delta\overline{P}^{(e)}$ k	$\frac{\delta\overline{P}^{(e)}P^{(e)}L}{A}$ k.ft/ in^2	n	$\frac{n\delta\overline{P}^{(e)}P^{(e)}L}{A}$ k.ft/ in^2
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1,037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268.0	2	536.0
11 & 12	2	20	40	0.67	268.0	2	536.0
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693.0
2& 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1,417.8
7	1	15	0	0	0	1	0
कुल							4,220.3

$$\underbrace{\Delta\delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{P}\frac{P}{AE}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

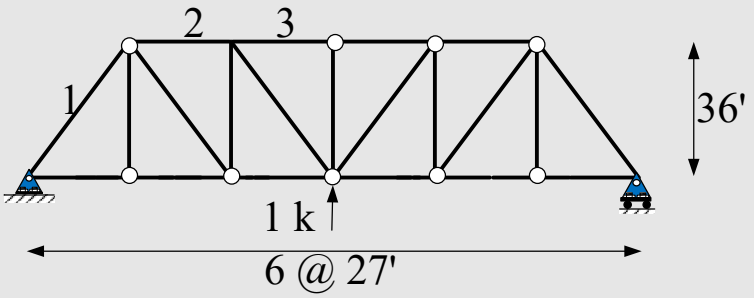
$$= \sum \delta\overline{P}^{(e)}\frac{P^{(e)}L}{AE}$$

$$(1)\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = \frac{(4,220.3)\ \text{k}^2\ \text{ft}/\ \text{in}^2(12)\ \text{in/ft}}{30,000\ \text{ksi}}$$

$$= 1.69\ \text{in}$$

24.3.12 उदाहरण 24.12: आरंभिक कैम्बर वाला ट्रस

नीचे दर्शाए गए ट्रस के केंद्र पर 3 in. कैम्बर प्रदान करने के लिए अंतिम स्तंभों और ऊपरी जीवा के अवयवों को अतिरिक्त लंबा बनाना है। प्रत्येक अंतिम स्तंभ और ऊपरी जीवा के प्रत्येक पैनल की लंबाई कितनी बढ़ाई जाए?



पहले मानते हैं कि प्रत्येक अंतिम स्तंभ और ऊपरी जीवा के प्रत्येक खंड को 0.1 in. बढ़ाया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवयव	$\delta\overline{P}^{(e)}_{int}$	ΔL	$\delta\overline{P}^{(e)}_{int}\Delta L$
1	+0.625	+0.1	+0.0625
2	+0.750	+0.1	+0.0750
3	+1.125	+0.1	+0.1125
			+0.2500

जिससे मिलता है

$$(1)\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = (2)(0.250)\ \text{k in} \Rightarrow \Delta = 0.50\ \text{in}$$

चूँकि संरचना रैखिक और प्रत्यास्थ है, प्रत्येक खंड के लिए लंबाई में आवश्यक वृद्धि होगी

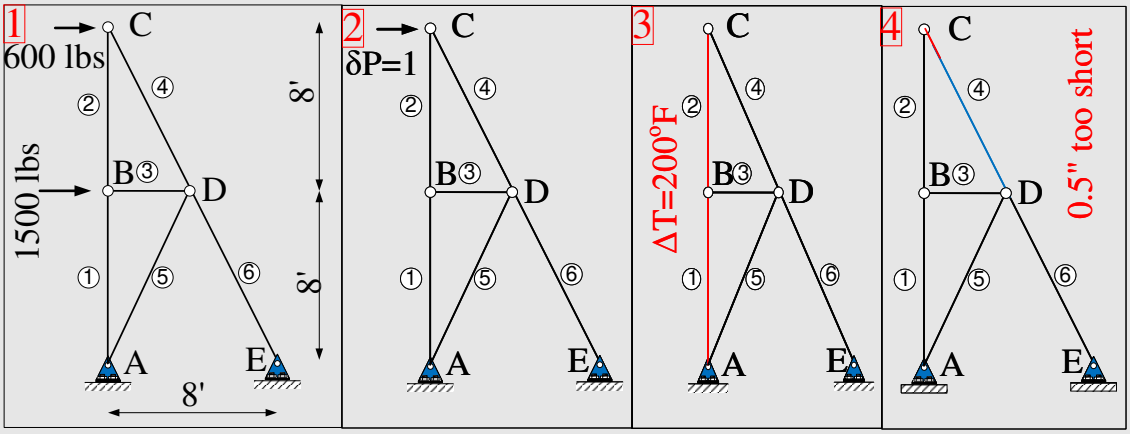
$$\left(\frac{3.0}{0.50}\right)(0.1) = 0.60\ \text{in}$$

यदि 0.625 in. का व्यावहारिक मान लिया जाए, तो सैद्धांतिक कैम्बर होगा

$$\frac{(6.25)(0.50)}{0.1} = 3.125\ \text{in}$$

24.3.13 उदाहरण 24.13: द्विवतीयक प्रतिबलों वाला ट्रस

हम विभिन्न भार-दशाओं में नोड C का क्षैतिज विस्थापन निर्धारित करना चाहते हैं: a) बल (1); 2) दो अवयवों में तापमान-वृद्धि (3); और निर्माण त्रुटि (4)। अलग-अलग परिकलित अवयव-बल उपयुक्त रूप से सारणीबद्ध किए जाएँगे।



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पार्श्व बल

अवयव	$\delta\overline{P}$ (lbf)	P (lbf)	L (in)	AE	$\delta\overline{p}\frac{PL}{AE}$
1	2	1,200.0	96.00	AE	230,400/AE
2	2	1,200.0	96.00	AE	230,400/AE
3	0	-1,500.0	48.00	AE	0
4	-2.24	-1,341.6	107.33	AE	322,560/AE
5	0	1,677.0	107.33	AE	0
6	-2.24	-3,018.7	107.33	AE	725,760.0/AE
					1,509,120/AE

अतः $\Delta_C = \frac{1{,}509{,}120}{AE}$ lb-in $\rightarrow$

तापमान भार

अवयव	L (in)	α (1/°F)	ΔT (in)	$\Delta L = \alpha \Delta T L$ (in)	$\delta\overline{P}$ (lbf)	$\delta\overline{P}\Delta L$ (lbf in)
1	96	10^{-6}	200	0.0192	2	0.0384
2	96	10^{-6}	200	0.0192	2	0.0384
3	48	10^{-6}	0	0	0	0
4	107.33	10^{-6}	0	0	-2.24	0
5	107.33	10^{-6}	0	0	0	0
6	107.33	10^{-6}	0	0	-2.24	0
						0.0768

चूँकि $\delta\overline{P} = 1$, $\Delta_C = 0.0768$ in $\rightarrow$

निर्माण त्रुटि

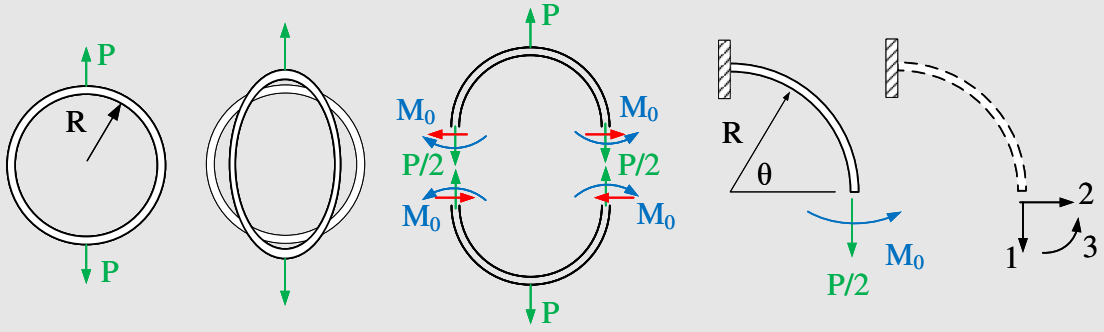
अवयव	L (in)	ΔL (in)	$\Delta\overline{P}$ (lbf)	$\Delta\overline{P}\delta L$ (lbf in)
1	96	0	2	0
2	96	0	2	0
3	48	0	0	0
4	107.33	-0.5	-2.24	1.12
5	107.33	0	0	0
6	107.33	0	0	0
				0.0768

चूँकि $\delta\overline{P} = 1$, $\Delta_C = 1.12$ in $\rightarrow$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

24.3.14 उदाहरण 24.14: वृत्ताकार वलय

एक वलय दो विपरीत संकेंद्रित बलों P के अधीन है। हम ऊर्ध्वाधर दीर्घीकरण Δ_y और क्षैतिज संकुचन Δ_x निर्धारित करना चाहते हैं।



Strength of materials
Den Hartog, 1961 सममिति का उपयोग करके वलय को दो भागों में काटते हैं और मुक्त-पिंड आरेख बनाते हैं,

1. यदि चार सिरों में से किसी एक पर अपरूपण बल को एक दिशा में मानें और अन्य बलों को उसी के अनुरूप बनाएँ, तो निरीक्षण से स्पष्ट होता है कि ऊपरी अर्धभाग पार्श्वतः विस्तृत होगा, जबकि उसी स्थान पर निचला वलय संकुचित होगा। अतः अपरूपण बल शून्य हैं।
2. अक्षीय बल $P/2$ के बराबर हैं और अब केवल आघूर्ण निर्धारित करने हैं।
3. तब केवल एक चतुर्थांश का विश्लेषण करेंगे, जो ऊर्ध्वाधर बल $P/2$ और आघूर्ण M_0 के अधीन है; इस आघूर्ण को अभी R तथा P के पदों में निर्धारित करना है।

हल इस प्रकार आगे बढता है:

1. आघूर्ण (यदि भीतर तनन उत्पन्न करें तो धनात्मक):

ऊर्ध्वाधर भार $P/2$	$M_{P/2}$	$-\frac{PR}{2}(1-\cos\theta)$
अंत्य आघूर्ण (दक्षिणावर्त)	M_0	M_0
आभासी इकाई ऊर्ध्वाधर (नीचे की ओर) बल	$\delta\overline{M}_V$	$-R(1-\cos\theta)$
आभासी इकाई क्षैतिज (बाहर की ओर) बल	$\delta\overline{M}_H$	$R\sin\theta$
आभासी इकाई घूर्णन	$\delta\overline{M}_M$	1

2. ऊर्ध्वाधर भार के कारण घूर्णन:

$$f_{32} = \theta_{P/2} = \int \delta M_M \frac{M_{P/2}}{EI} R d\theta = -\int_0^{\pi/2} (1)\frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta)Rd\theta = -\frac{PR^2}{2EI}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)d\theta$$
$$= -\frac{PR^2}{2EI}\left[\theta+\sin\theta\right]_0^{\pi/2} = -\frac{PR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. आघूर्ण M_0 के कारण घूर्णन

$$f_{33} = \theta_{M_0} = \int M_M \frac{M_0}{EI} R d\theta = \int_0^{\pi/2} (1) \frac{M_0}{EI} R d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{M_0 R}{EI}$$

4. सममिति से घूर्णनों का योग शून्य होना चाहिए

$$\theta_{P/2} + \theta_{M_0} = 0$$
$$-\frac{PR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}\frac{M_0 R}{EI} = 0$$
$$M_0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) PR = 0.182PR \tag{24.2}$$

5. ऊर्ध्वाधर भार के कारण ऊर्ध्वाधर विक्षेप:

$$\begin{aligned} f_{22} = \Delta^V_{P/2} &= \int \delta M_V \frac{M_{P/2}}{EI} = \int_0^{\pi/2} R(1-\cos\theta)\frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta)Rd\theta \\ &= \frac{PR^3}{2EI}\int_0^{\pi/2}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta \\ &= \frac{PR^3}{2EI}\left[\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{PR^3}{8EI}(3\pi - 8) \end{aligned}$$

6. ऊर्ध्वाधर भार के कारण क्षैतिज विक्षेप

$$\begin{aligned} f_{12} = \Delta^H_{P/2} &= \int \delta M_H \frac{M_{P/2}}{EI} = -\int_0^{\pi/2} R\sin\theta \frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta)Rd\theta \\ &= -\frac{PR^3}{2EI}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)\sin\theta d\theta \\ &= -\frac{PR^3}{2EI}\left[-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = -\frac{PR^3}{4EI} \end{aligned}$$

7. आघूर्ण के कारण ऊर्ध्वाधर विक्षेप

$$\begin{aligned} f_{23} = \Delta^V_{M_0} &= \int \delta M_V \frac{M_0}{EI} = -\int_0^{\pi/2} R(1-\cos\theta)M_0 R d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

8. आघूर्ण के कारण क्षैतिज विक्षेप

$$\begin{aligned} f_{13} = \Delta^H_{M_0} \int \delta M_H \frac{M_0}{EI} &= \int_0^{\pi/2} R\sin\theta M_0 R d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI}\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI} \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9. कुल क्षैतिज विक्षेप

$$\Delta^H = 2(\Delta^H_{P/2} + \Delta^H_{M_0}) = 2\left[-\frac{PR^3}{4EI} + \frac{M_0R^2}{EI}\right]$$

समीकरण 24.2 से M_0 का हल प्रतिस्थापित करने पर

$$\Delta^H = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right) = -0.135\frac{PR^3}{EI} \quad \text{Contraction}$$

10. कुल ऊर्ध्वाधर विक्षेप

$$\Delta^V = 2(\Delta^V_{P/2} + \Delta^V_{M_0} = 2\left[\frac{PR^3}{8EI}(3\pi - 8) + \frac{M_0R^2}{EI}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

समीकरण 24.2 से M_0 का हल प्रतिस्थापित करने पर

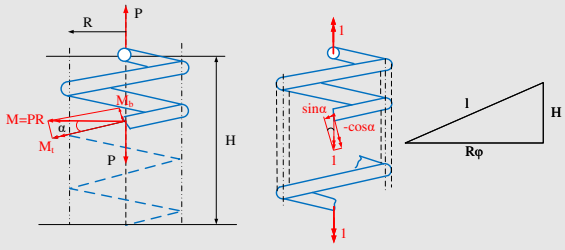
$$\Delta^V = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) = 0.150\frac{PR^3}{EI} \quad \text{Elongation}$$

11. ध्यान दें कि ऐसी संकेत-पद्धति प्रस्तुत की गई है जिसका आगे उपयोग होगा: f_{ij} उस विस्थापन के लिए है जो दिशा i में, दिशा j के बल के कारण उत्पन्न होता है; फलतः

$$\begin{bmatrix} f_{12} & f_{13} \\ f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

यह अभी नम्यता आव्यूह नहीं है, क्योंकि आरोपित बल इकाई नहीं हैं और प्रथम स्तंभ अनुपस्थित है (कोई आरोपित क्षैतिज बल नहीं)।

24.3.15 उदाहरण 24.15: स्प्रिंग



कुंडली कोण α और कुंडली त्रिज्या R वाला कुंडलित स्प्रिंग बल P द्वारा खींचा जाता है। हम स्प्रिंग की ऊँचाई और व्यास में परिवर्तन तथा कुंडलियों की संख्या में परिवर्तन निर्धारित करना चाहते हैं।

स्प्रिंग को त्रिविमीय दंड मानते हैं। खिंचे हुए स्प्रिंग की कुंडली के प्रत्येक काट पर ऐंठन $M_t = PR\cos\alpha$ और आघूर्ण $M_b = PR\sin\alpha$ होता है।

1. पहले स्प्रिंग की ऊँचाई में वृद्धि निर्धारित करते हैं

$$\Delta H = \int_l \frac{\delta\overline{M}_b M_b}{EI} ds + \int_l \frac{\delta\overline{M}_t M_t}{EI} ds$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $\delta\overline{M}_b$ और $\delta\overline{M}_t$, बलों P के स्थान पर लगाए गए इकाई आभासी बलों के कारण बंकन और ऐंठन आघूर्ण हैं तथा इनके मान हैं

$$\delta\overline{M}_b = R\sin\alpha, \qquad \delta\overline{M}_t = R\cos\alpha$$

अतः प्रतिस्थापन और समाकलन के बाद

$$\Delta H = \frac{PR^2 l}{EI}\sin^2\alpha + \frac{PR^2 l}{GJ}\cos^2\alpha \tag{24.3}$$

जहाँ l स्प्रिंग की कुंडलियों की कुल लंबाई है।

2. अब वह कोण ज्ञात करें जिससे स्प्रिंग का ऊपरी सिरा क्षैतिज तल में निचले सिरे के सापेक्ष घूमता है। अतः स्प्रिंग के सिरे पर इकाई आघूर्ण लगाते हैं:

$$\delta\overline{M}_b = -\cos\alpha, \qquad \delta\overline{M}_t = \sin\alpha$$

और

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int_l \frac{\delta\overline{M}_b M_b}{EI}ds + \int_l \frac{\delta\overline{M}_t M_t}{GJ}ds \\ &= PRl\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned} \tag{24.4}$$

3. खुले हुए स्प्रिंग पर विचार करने से प्राप्त होता है

$$R^2\phi^2 + H^2 = l^2$$

अवकल लेते हैं और चूँकि l नियत रहता है

$$2R\phi^2\Delta R + R^2 2\phi\Delta\phi + 2H\Delta H = 0$$

जहाँ इस स्थिति में Δ संगत (परिमित) प्राचल की वृद्धि है। इस व्यंजक से प्राप्त होता है

$$\Delta R = -\frac{R}{\phi}\Delta\phi - \frac{H}{R\phi^2}\Delta H$$

4. $\Delta\phi$ और ΔH प्रतिस्थापित करने पर मिलता है

$$\Delta R = -\frac{PR^2 l}{\phi}\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{PHRl}{\phi^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI} + \frac{\cos^2\alpha}{GJ}\right) \tag{24.5}$$

5. त्रिभुज से प्राप्त होता है

$$l = \frac{\phi R}{\cos\alpha}, \qquad H = \phi R\tan\alpha$$

यह भी है

$$\phi = 2\pi n, \qquad \Delta\phi = 2\pi\Delta n$$

जहाँ n कुंडलियों की संख्या है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6. l, H, और ϕ का समीकरणों 24.3, 24.4 और 24.5 से विलोपन करने पर मिलता है

$$\Delta H = \frac{PR^3 n 2\pi}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI} + \frac{\cos^2}{GJ}\right)$$
$$\Delta n = PR^2 n\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha$$
$$\Delta R = -\frac{2PR^3\sin\alpha}{GJ} + \frac{PR^3}{EI}\sin\alpha(1-\tan^2\alpha)$$

7. व्यास d के गोल तार से बने स्प्रिंग के लिए,

$$GJ = G\frac{\pi d^4}{32}$$
$$EI = 2G(1+\nu)\pi\frac{d^4}{64} = G(1+\nu)\frac{\pi d^4}{32}$$

और प्राप्त होता है

$$\Delta H = +\frac{64PR^3 n}{Gd^4}\frac{1+\nu\cos^2\alpha}{(1+\nu)\cos\alpha}$$
$$\Delta n = +\frac{32PR^2 n}{G\pi d^4}\frac{\nu\sin\alpha}{1+\nu}$$
$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\frac{\sin\alpha}{1+\nu}\frac{1+2\nu\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

उपर्युक्त व्यंजकों के दाएँ पक्षों के आगे के चिह्न बताते हैं कि स्प्रिंग के विस्तार के समय उसकी लंबाई बढती है ($\Delta H > 0$), कुंडलियों की संख्या बढती है ($\Delta n > 0$), और त्रिज्या घटती है ($\Delta R < 0$)।

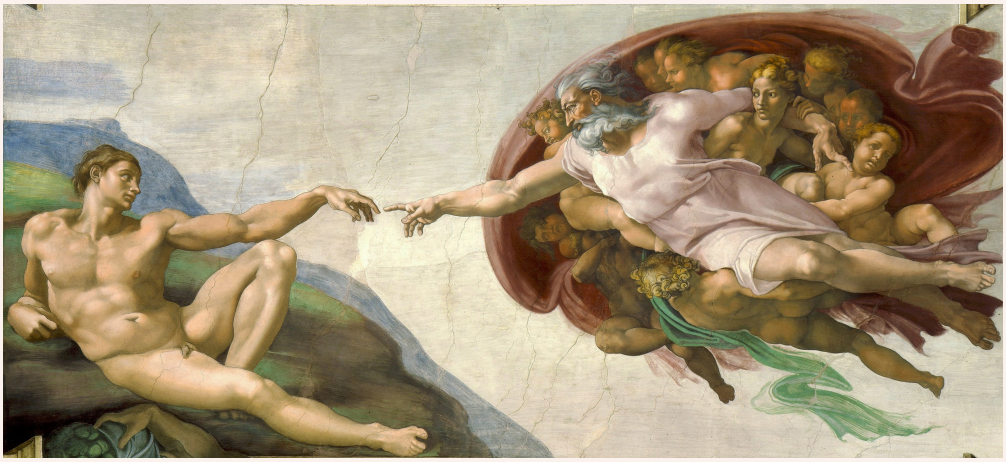
8. यदि कोण α छोटा हो, तो

$$\Delta H = +\frac{64PR^3 n}{Gd^4}$$
$$\Delta n = +\frac{32PR^2 n}{G\pi d^4}\frac{\nu\alpha}{1+\nu}$$
$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\frac{1+2\nu}{1+\nu}\alpha$$

उदाहरण 22.3.2 भी देखें।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Adam की रचना, *Michelangelo*, भित्तिचित्र, *Sistine Chapel*, *Vatican City*।

आभासी कार्य का सशक्त रूपक: लगभग स्पर्श करते हाथ अतिसूक्ष्म विस्थापन के प्रतीक हैं—आभासी कार्य की मूल अवधारणा, जिसमें कल्पित लघु विक्षोभ संतुलन के विश्लेषण में सहायक होते हैं।

प्रारूप

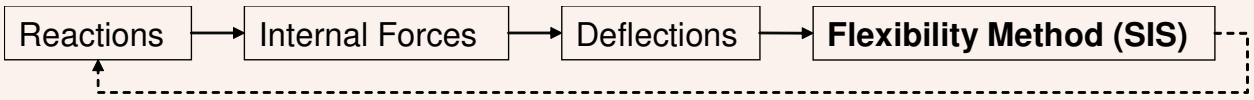
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

25 लचीलापन विधि

सारांश

यह अध्याय लचीलापन विधि (flexibility method), जिसे बल-आधारित विधि (force-based method) भी कहा जाता है, द्वारा स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं के हल पर विचार करता है। यह विधि कंप्यूटर कार्यान्वयन के लिए सुविधाजनक नहीं है। इस विधि में पर्याप्त संख्या में आधारों अथवा आंतरिक बलों को हटाकर स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना को स्थैतिकतः निर्धार्य प्राथमिक संरचना में परिवर्तित किया जाता है। तत्पश्चात दिए गए बाह्य भारों के अधीन इस प्राथमिक संरचना के विस्थापन परिकलित किए जाते हैं। फिर जिन स्थानों पर आधार अथवा आंतरिक बल हटाए गए थे, वहाँ एक-एक करके इकाई बल लगाए जाते हैं और इन इकाई बलों से उत्पन्न विस्थापन परिकलित किए जाते हैं। वास्तविक भारों तथा इकाई बलों से प्राप्त विस्थापनों का उपयोग करके संगतता समीकरण बनाए और हल किए जाते हैं, ताकि संपूर्ण संरचना संगत तथा साम्यावस्था में रहे। इन समीकरणों के हल से अज्ञात अतिरिक्त बल प्राप्त होते हैं और उनके उपयोग से मूल स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना के अंतिम आंतरिक बल तथा विस्थापन परिकलित किए जाते हैं। अध्याय का आरंभ स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं के लाभों से होता है। इसके बाद कुछ सरल उदाहरणों द्वारा विधि का परिचय देकर उसका औपचारिक निरूपण किया गया है। तीन आघूर्ण समीकरण का संक्षिप्त विवेचन भी सम्मिलित है। अध्याय के अंत में क्रमशः बढ़ती जटिलता वाले अनेक उदाहरण दिए गए हैं।

25.1 परिचय 1010
25.2 बल/लचीलापन विधि 1016
25.2.1 उदाहरण 1017
25.3 तीन आघूर्ण समीकरण 1036
25.3.1 उदाहरण 25.9: सतत बीम 1039
25.3.2 उदाहरण 25.10: सतत बीम . . . 1040



ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §11.4.5 देखें

25.1 परिचय

1 किसी स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना में अज्ञातों की संख्या साम्य समीकरणों (और जहाँ लागू हों वहाँ शर्तों के समीकरणों) की संख्या से अधिक होती है।

2 स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं के लाभ हैं:

वर्धित अतिरिक्तता: स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं में साम्य बनाए रखने के लिए आवश्यक संख्या से अधिक आधार और संयोजन होते हैं। इस अतिरिक्तता के कारण किसी एक आधार अथवा अवयव की विफलता पर भार अन्य आधारों या अवयवों में पुनर्वितरित हो सकता है, जिससे संरचना की समग्र सुरक्षा और विश्वसनीयता बढ़ती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बेहतर भार वितरण: ये संरचनाएँ भारों को संपूर्ण संरचना में अधिक समान रूप से वितरित करती हैं, जिससे स्थानीय विफलता की संभावना घटती है। प्रतिबल और विकृति का यह सम वितरण सामग्री के अधिक दक्ष तथा किफायती उपयोग में सहायक हो सकता है।

अधिक दृढता: स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाएँ सामान्यतः अधिक दृढ होती हैं, क्योंकि वे भार के अधीन विरूपण का बेहतर प्रतिरोध करती हैं। यह बढी हुई दृढता उन अनुप्रयोगों में लाभप्रद है जहाँ विक्षेप न्यूनतम रखना आवश्यक हो, जैसे सेतुओं अथवा बहुमंजिला भवनों में।

उन्नत संरचनात्मक निष्पादन: अनेक भार-पथ होने के कारण ये संरचनाएँ गतिक भार, कंपन और आघात का बेहतर सामना कर सकती हैं। यह गुण उन संरचनाओं में विशेष महत्त्व रखता है जिन पर समय के साथ बदलने वाले भार, जैसे पवन, यातायात अथवा भूकंपीय गतिविधि से उत्पन्न भार, लगते हैं।

सौंदर्य और अभिकल्प लचीलापन: अतिरिक्त आधार और अवयव अधिक जटिल तथा सौंदर्यपूर्ण अभिकल्प संभव बनाते हैं। वास्तुकार और अभियंता विशिष्ट आकारों तथा रूपों वाली अभिनव संरचनाएँ बना सकते हैं, जो स्थैतिकतः निर्धार्य अभिकल्पों में संभव न हों।

सामग्री का अनुकूलन: बेहतर भार वितरण और दृढता से सामग्री का प्रायः अधिक दक्ष उपयोग किया जा सकता है। इस अनुकूलन से सामर्थ्य और सुरक्षा से समझौता किए बिना कम सामग्री वाली हल्की संरचनाएँ प्राप्त हो सकती हैं।

अवसादन और तापमान परिवर्तन के प्रति बेहतर प्रतिक्रिया: स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाएँ आधारों के विभेदी अवसादन तथा तापीय प्रसार या संकुचन को बेहतर समायोजित कर सकती हैं। यह अनुकूलनशीलता उन दरारों और क्षति को रोक सकती है जो स्थैतिकतः निर्धार्य संरचनाओं में उत्पन्न हो सकती हैं।

वर्धित सुरक्षा: अतिरिक्तता और भारों के पुनर्वितरण की क्षमता संरचना की समग्र सुरक्षा बढाती है। यह सेतुओं, भवनों तथा अन्य आवश्यक संरचनाओं जैसी महत्त्वपूर्ण अवसंरचनाओं में विशेष रूप से आवश्यक है, जहाँ विफलता के गंभीर परिणाम हो सकते हैं।

[3] इसका एकमात्र दोष यह है कि इसका विश्लेषण अधिक जटिल होता है।

[4] स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं की विश्लेषण विधियों को तीन आवश्यकताएँ *अवश्य संतुष्ट करनी चाहिए*

1. बलों का साम्य
2. बल-विस्थापन (अथवा प्रतिबल-विकृति) संबंध (इस पाठ्यक्रम में रैखिक प्रत्यास्थ)।
3. विस्थापनों की संगतता (अर्थात कोई असांतत्य नहीं)

[5] इसे हल की दो श्रेणियों द्वारा प्राप्त किया जा सकता है

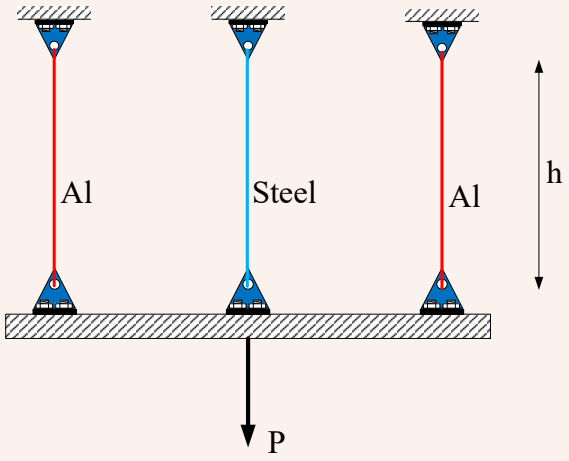
बल अथवा लचीलापन विधि, इस अध्याय में

विस्थापन अथवा दृढता विधि, जिसका विवेचन अध्यायों 44 और 27 में किया जाएगा। पहले में "हस्त-गणना आधारित" विधियाँ (आघूर्ण वितरण और ढाल-विक्षेप) तथा दूसरे में कंप्यूटर-आधारित विधि दी जाएगी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

व्याख्यात्मक उदाहरण 1

[6] लचीलापन विधि को पहले निम्न स्थैतिकतः अनिर्धार्य केबल संरचना की समस्या द्वारा समझाया गया है, जिसमें एक दृढ पट्टिका को दो ऐलुमिनियम केबलों और एक इस्पात केबल का आधार प्राप्त है। हमें प्रत्येक केबल में बल निर्धारित करना है, चित्र 25.1।



चित्र 25.1: स्थैतिकतः अनिर्धार्य 3-केबल संरचना

1. हमारे पास तीन अज्ञात और साम्य के केवल दो स्वतंत्र समीकरण हैं। अतः समस्या प्रथम कोटि तक स्थैतिकतः अनिर्धार्य है।
2. साम्य समीकरण लागू करने पर

$$\begin{aligned} \Sigma M_z = 0; &\Rightarrow P_{Al}^{\text{left}} = P_{Al}^{\text{right}} \\ \Sigma F_y = 0; &\Rightarrow 2P_{Al} + P_{St} = P \end{aligned} \tag{25.1}$$

   अतः प्रभावी रूप से हमारे पास दो अज्ञात और एक समीकरण है।
3. तीन अज्ञातों के हल के लिए तीसरे समीकरण की आवश्यकता है। इसे तीनों केबलों में *विस्थापनों की संगतता* से प्राप्त किया जाएगा, अर्थात तीनों विस्थापन समान होने चाहिए:

$$\Delta_{Al} = \Delta_{St}$$

4. अंततः ये विस्थापन *बल-विस्थापन* संबंधों से प्राप्त होते हैं:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{P}{A} \\ \varepsilon &= \frac{\Delta L}{L} \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta L = \frac{PL}{AE}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\underbrace{\frac{P_{Al}L}{E_{Al}A_{Al}}}_{\Delta_{Al}} = \underbrace{\frac{P_{St}L}{E_{St}A_{St}}}_{\Delta_{St}} \Rightarrow \frac{P_{Al}}{P_{St}} = \frac{(EA)_{Al}}{(EA)_{St}}$$

अथवा

$$-(EA)_{St}P_{Al} + (EA)_{Al}P_{St} = 0$$

5. समीकरणों 25.1 और 4 के हल से मिलता है

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2(EA)_{Al} + (EA)_{St}}}_{\text{सारणिक}} \begin{bmatrix} (EA)_{Al} & -1 \\ (EA)_{St} & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6. हम देखते हैं कि सुथैतिकतः निर्धार्य समस्याओं के विपरीत, इस समस्या का हल प्रत्यास्थ गुणों पर निर्भर करता है।

व्याख्यात्मक उदाहरण 2

7 दूसरा उदाहरण L लंबाई का आधारयुक्त कैंटिलीवर बीम है, चित्र 25.2

1. पहले रोलर आधार हटाते हैं, जिससे कैंटिलीवर प्राथमिक संरचना के रूप में शेष रहता है।
2. फिर बिंदु B पर लगाए गए भार P के कारण विक्षेप आभासी बल विधि द्वारा निर्धारित करते हैं

$$1.\Delta = \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{L/2} 0\frac{-px}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^{L/2} -(x)\frac{\left(\frac{PL}{2} + Px\right)}{EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{PL}{2}x + Px^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{PLx^2}{4} + \frac{Px^3}{3}\right]\Bigg|_0^{L/2} = \frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

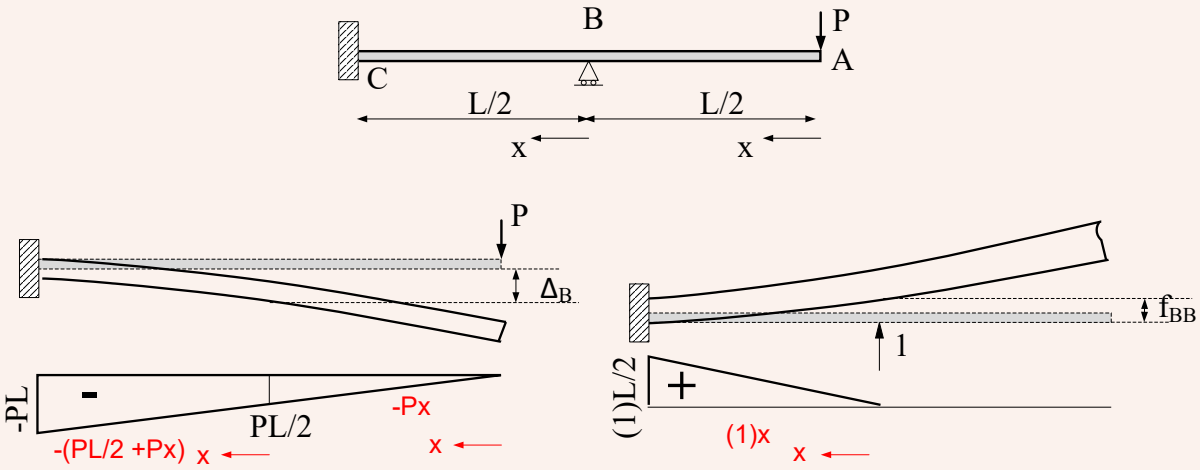
3. इसके बाद बिंदु B पर इकाई भार लगाकर आभासी बल विधि से B पर विस्थापन ज्ञात करते हैं

$$1f_{BB} = \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x = \int_0^{L/2}(x)\frac{x}{EI}\mathrm{d}x = \frac{(1)L^3}{24EI}$$

4. चूँकि बिंदु B पर विस्थापन शून्य है, अतः विस्थापन f_{BB} को R_B से इस प्रकार गुणा करना चाहिए कि

$$R_B f_{BB} = \Delta$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 25.2: आधारयुक्त कैंटिलीवर बीम

जिससे विस्थापनों की संगतता सुनिश्चित हो; अतः

$$R_B = \frac{\Delta}{f_{BB}} = \frac{\frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}}{\frac{(1)L^3}{24EI}} = \frac{5}{2}P$$

व्याख्यात्मक उदाहरण 3

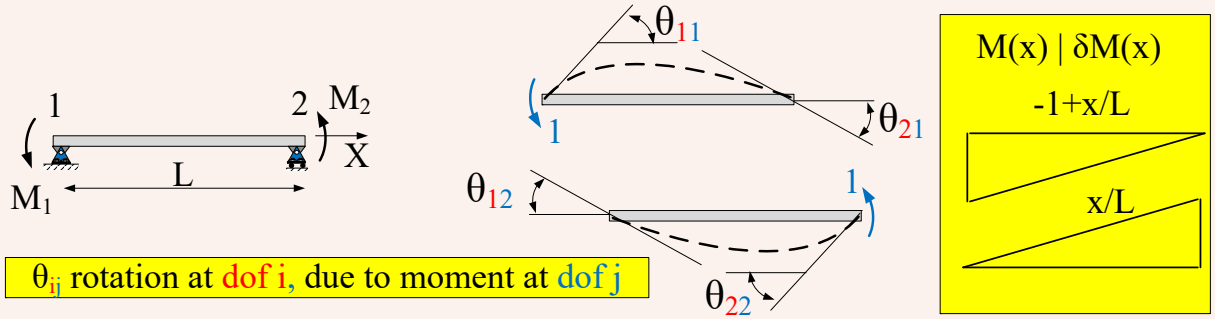
[8] हमें चित्र 25.3 में दर्शाए स्थैतिकतः निर्धार्य बीम के लिए लचीलापन आव्यूह निर्धारित करना है। यहाँ लचीलापन आव्यूह 2×2 होगा और प्रत्येक पद d_{ij} स्वतंत्रता कोटि i पर वह विस्थापन निरूपित करता है जो स्वतंत्रता कोटि j पर इकाई बल के कारण होता है।

- दोनों सिरों के घूर्णनों के अनुरूप हमारे पास दो स्वतंत्रता कोटियाँ हैं।
- अब *बल-विस्थापन* संबंध इस प्रकार व्यक्त होता है

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} M_1 & M_2 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{25.2}$$

जहाँ M_i बाह्य रूप से लगाए गए आघूर्णों के अनुरूप हैं, $d_{ij} = \theta_{ij}$, और θ_i स्वतंत्रता कोटि i पर संगत अज्ञात घूर्णन है, जो स्वतंत्रता कोटि j पर आघूर्ण के कारण उत्पन्न होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 25.3: लचीलापन विधि के लिए व्याख्यात्मक समस्या

- इस समस्या के विश्लेषण के लिए पूरक *आभासी* कार्य, अथवा अधिक विशिष्ट रूप से आभासी बल विधि, का उपयोग करने पर:

$$d_{ij} = \underbrace{\int_0^l \delta\overline{M}(x)_i \frac{M(x)_j}{EI_z} dx}_{\text{आंतरिक}} = \underbrace{\delta\overline{P}_i \, \Delta_j + \delta\overline{M}_i \, \theta_j}_{\text{बाह्य}}$$

  जहाँ $\delta\overline{M}(x)$, $\frac{M(x)}{EI_z}$, $\delta\overline{P}$ और Δ क्रमशः आभासी आंतरिक बल, वास्तविक आंतरिक विस्थापन, आभासी बाह्य भार और वास्तविक बाह्य विस्थापन हैं।
- यहाँ बाह्य आभासी बल और आघूर्ण दोनों को इकाई माना गया है।

$$EI \underbrace{1}_{\delta\overline{M}} \underbrace{d_{11}}_{\Delta} = \int_0^L \underbrace{\left(-1+\frac{x}{L}\right)}_{\delta\overline{M}(x)} \underbrace{\left(-1+\frac{x}{L}\right)}_{M(x)} dx = \frac{L}{3} \tag{25.3}$$

- इसी प्रकार हमें प्राप्त होगा:

$$EId_{22} = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{3}$$
$$EId_{12} = \int_0^L \left(-1+\frac{x}{L}\right)\frac{x}{L} dx = -\frac{L}{6} \quad = \quad EId_{21}$$

- इन परिणामों को आव्यूह रूप में इस प्रकार संक्षेपित किया जा सकता है:

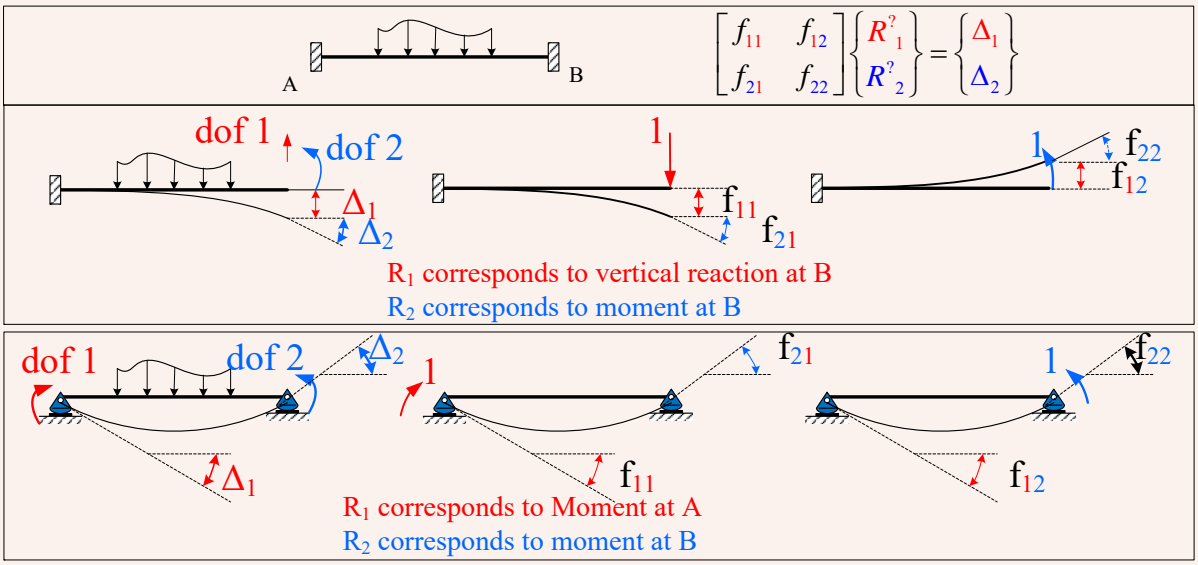
$$[\mathbf{d}] = \frac{L}{6EI_z}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

  और तब बाह्य आघूर्णों के कारण विस्थापनों (घूर्णनों) का हल प्राप्त किया जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

व्याख्यात्मक उदाहरण 4

9 चित्र 25.4 द्वारा इस विधि को संक्षिप्त रूप में और स्पष्ट किया गया है।



चित्र 25.4: दो अज्ञातों वाली लचीलापन विधि का निरूपण

25.2 बल/लचीलापन विधि

10 पिछले व्याख्यात्मक उदाहरणों के आधार पर अब हम स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं के रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण की एक सामान्य विधि विकसित करेंगे।

परिभाषा 25.1: लचीलापन समीकरण

1. *स्थैतिक अनिर्धार्यता की कोटि* (बाह्य और/अथवा आंतरिक) n पहचानें।
2. भारित संरचना में n *अतिरिक्त अज्ञात बल और/अथवा युग्म* तथा उनसे संबद्ध n विमोचन (कोणीय अथवा स्थानांतरीय) चुनें: *प्राथमिक संरचना*।
3. विमोचनों के अनुरूप *प्राथमिक संरचना में* n *विस्थापन* (भार लगाए हुए) Δ_i निर्धारित करें।
4. प्राथमिक संरचना पर (बाह्य भार के बिना) प्रत्येक विमोचन j पर एक इकाई बल लगाएँ और सभी विमोचनों i पर विस्थापन निर्धारित करें: *लचीलापन गुणांक* f_{ij}, अर्थात विमोचन i पर वह विस्थापन जो j पर इकाई बल के कारण होता है। दिशा का चयन महत्त्वपूर्ण नहीं

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

है; प्रतिक्रिया धनात्मक होने पर निर्दिष्ट दिशा में और ऋणात्मक होने पर विपरीत दिशा में होगी।

5. ध्यान दें कि f_{ij} की इकाई प्रति इकाई भार विस्थापन है।
6. *विस्थापन-संगतता संबंध* लिखें

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{R}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \\ \cdots \\ \Delta_n^0 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}_i^0} \tag{25.4}$$

7. तब लचीलापन आव्यूह का प्रतिलोम लेकर प्रतिक्रियाएँ प्राप्त होती हैं।

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}^{-1} \left(\boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\Delta}_i^0 \right)$$

एक ही अज्ञात होने पर $\mathbf{f}^{-1}$ के स्थान पर $1/f_{11}$ प्रयुक्त होता है।

[11] ध्यान दें कि $\boldsymbol{\Delta}_i^0$ प्रारंभिक विस्थापनों का सदिश है, जो सामान्यतः शून्य होता है, जब तक कि आधार का कोई प्रारंभिक विस्थापन (जैसे आधार-अवसादन) न हो।

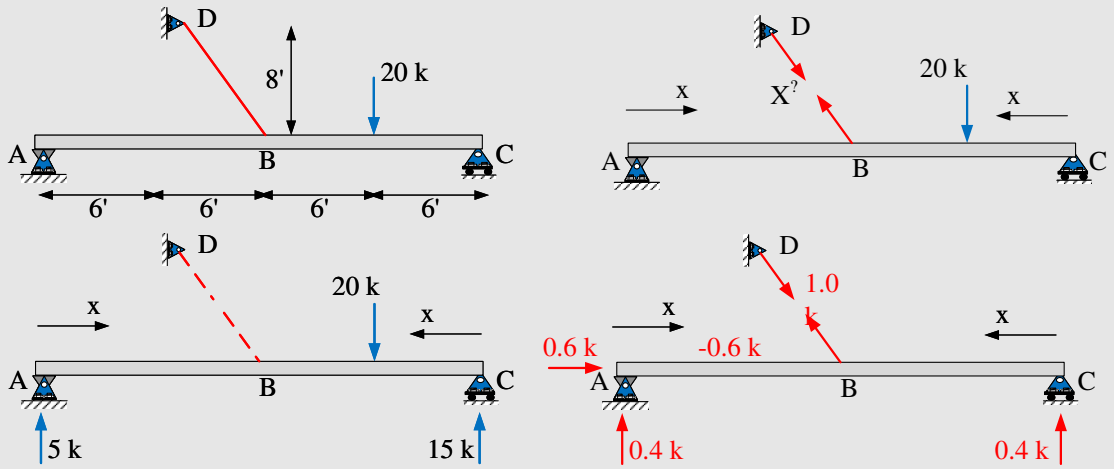
[12] मैक्सवेल–बेट्टी के व्युत्क्रम प्रमेय, §24.2.2, से लचीलापन आव्यूह $[\mathbf{f}]$ सदैव सममित होता है।

25.2.1 उदाहरण

25.2.1.1 उदाहरण 25.1: टाई-छड़ सहित बीम

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



हमें टाई-छड में अक्षीय बल परिकलित करना है। बीम: I=600 in^4, A=20 in^2; छड के लिए A-2in^2 है।

संरचना प्रथम कोटि तक अनिर्धार्य है। हम टाई को काटकर छड-बल को अतिरिक्त अज्ञात चुनते हैं। तब

$$\Delta + X\delta = 0.$$

हम आभासी बल विधि से Δ और δ का मूल्यांकन करते हैं तथा आनमनी और अक्षीय दोनों विरूपण सम्मिलित करते हैं।

अवयव	$x=0$	L	A	I	P	$\delta\overline{P}$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	12	20	600	0	-0.6	$5x$	$-0.4x$
CE	C	6	20	600	0	0	$15x$	$-0.4x$
EB	C	6	20	600	0	0	$120-5x$	$-0.4x$
DB	-	10	2	-	0	1	0	0

Δ और δ के लिए आभासी कार्य का सिद्धांत लागू करने पर

$$\begin{aligned}(1)\Delta &= \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} + \sum\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \\ &= 0 + \int_0^{12}(5x)\frac{-0.4x}{EI}dx + \int_0^{6}(15x)\frac{-0.4x}{EI} + \int_6^{12}(120-5x)\frac{-0.4x}{EI}dx \\ \Rightarrow EI\Delta &= -3,168\text{kft}^3\end{aligned}$$

और

$$\begin{aligned}(1)\delta &= \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} + \sum\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \\ &= (-0.6)\frac{(-0.6)^2(12)}{EA_2} + (1)\frac{(1)(10)}{EA_1} + 2\int_0^{12}(-0.4x)\frac{(-0.4x}{EI}dx \\ \Rightarrow EI\delta &= 206.05\text{kft}^3\end{aligned}$$

चूँकि

$$\frac{I}{A_2} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{20}\right) = \left(\frac{30}{144}\right) \quad \text{तथा} \quad \frac{I}{A_1} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{2}\right) = \left(\frac{300}{144}\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः संगतता समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{-3,168}{EI} + \frac{206.05}{EI} = 0 \Rightarrow X = +15.38 \quad \text{तनन}$$

यदि अक्षीय बलों के कारण विरूपण की उपेक्षा की जाती, तो

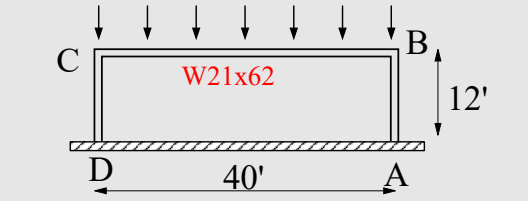
$$X = \frac{3,168}{184.32} = +17.2$$

25.2.1.2 उदाहरण 25.2: इस्पात भवन ढाँचे का विश्लेषण

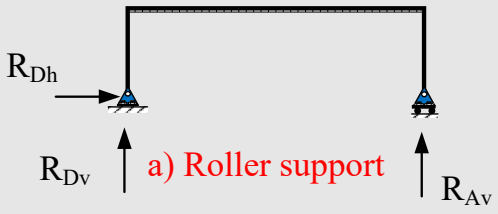
Structural Engineering
White, Gergely, and Sexmith, 1976 से बड़े पैमाने पर निर्मित एक छोटे औद्योगिक भवन को नीचे दर्शाई विशिष्ट अनुप्रस्थ काट वाले संरचनात्मक इस्पात से ढाँचा देना है। तीन अभिकल्पों पर विचार किया जा रहा है

a) एक आधार पर हिंज और दूसरे पर रोलर; इसे तब अपनाया जाता है जब मृदा की दशाएँ दुर्बल अथवा अज्ञात हों और ढाँचे की नींव अपने आधारों पर विश्वसनीय क्षैतिज बल विकसित न कर सके।
b) दोनों बिंदुओं A और D पर हिंज; उत्कृष्ट मृदा दशाओं के लिए।
c) बिंदुओं A और D (दोनों हिंज) के बीच केवल तनन वहन करने योग्य इस्पात टाई-अवयव का उपयोग। इस स्थिति में नींव से किसी क्षैतिज अवरोध की अपेक्षा नहीं की जाएगी।

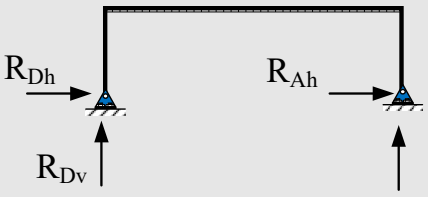
हम मानेंगे कि ढाँचा 21 in. गहरे तथा 62 lb/ft भार वाले इस्पात बीम परिच्छेदों (W 21 × 62) से बना है और अभिकल्प (*c*) के लिए टाई-अवयव अस्थायी रूप से 2-in.^{2} की छड़ चुना गया है।



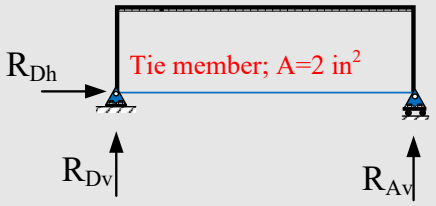
Structure cross section; spaced at 15'



a) Roller support



b) Hinged support



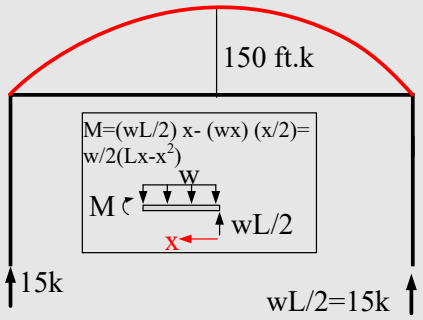
c) Roller with tie

30 psf हिम भार और 20 psf अनुमानित कुल मृत भार लें। भवन की लंबाई में ढाँचों की केंद्र-से-केंद्र दूरी 15 ft होने पर अभिकल्प भार 15 (30 + 20) = 750 lb/ft है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

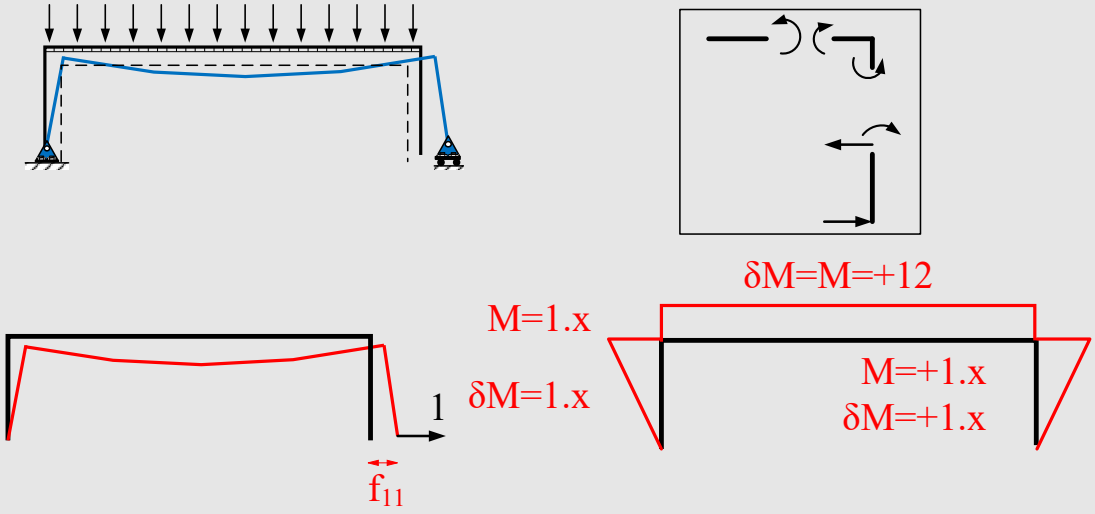
विकल्प a

यह विकल्प स्थैतिकतः निर्धार्य है, क्योंकि तीन अज्ञात प्रतिक्रियाएँ और साम्य के तीन समीकरण हैं।



विकल्प b

संरचना b प्रथम कोटि तक स्थैतिकतः अनिर्धार्य (एक अतिरिक्त अज्ञात) है। A पर विमोचन लगाएँ; अतिरिक्त कर्तन बल R_1 है। Δ_1:



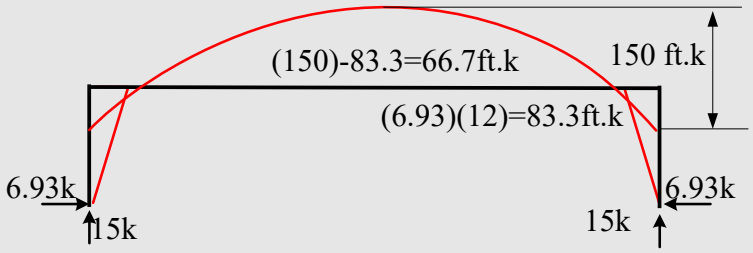
Δ_1 और f_{11} का हल करें:

$$1(\text{ k})\cdot\Delta_1(\text{ ft}) = \int_0^L (12)\frac{w}{2}\frac{LX-x^2}{EI}dx = \int_0^{40}(12)\frac{(1/2)(.75)(40x-x^2)}{EI}$$
$$= \frac{48,000}{EI}\ \text{k}^2\ \text{ft}^3$$
$$1(\text{ k})\cdot f_{11}(\text{ ft}) = 2\left[\int_0^{12} x\frac{x\,dx}{EI} + \int_0^{20} 12\frac{12dx}{EI}\right] = \frac{6,912}{EI}\ \text{k}^2\ \text{ft}^3$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

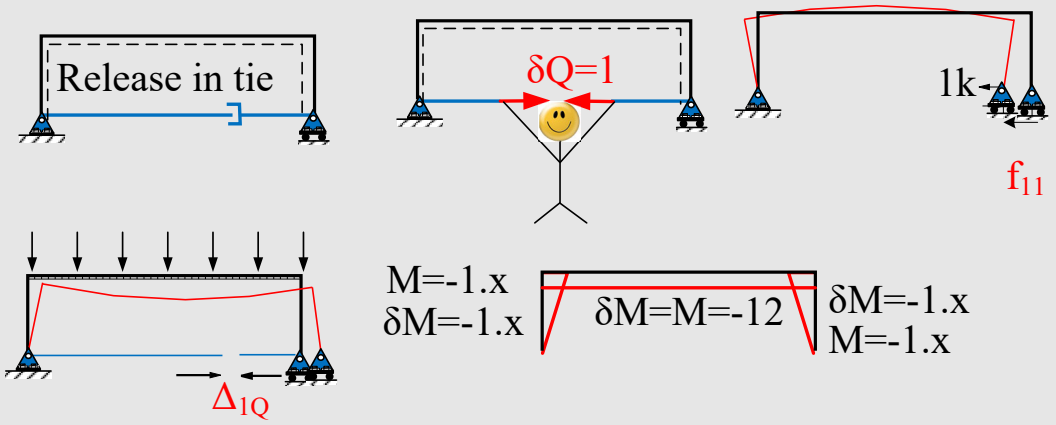
R_1 का हल करने पर

$$\frac{1}{EI}[48,000 + 6,912R_1] = 0 \Rightarrow R_1 = -6.93 \text{ k} \leftarrow$$



विकल्प c

तीन अज्ञात बाह्य बल हैं, किंतु टाई-अवयव द्वारा एक कोटि की आंतरिक अतिरिक्तता दिए जाने के कारण संरचना प्रथम कोटि तक स्थैतिकतः अनिर्धार्य है। टाई-अवयव को उसके संबद्ध अनुदैर्घ्य विस्थापन और अक्षीय बल सहित विमोचित करें।



संगतता समीकरण: विमोचन बिंदु पर टाई के दोनों भागों का सापेक्ष विस्थापन शून्य होना चाहिए, अथवा $\Delta_1 + f_{11}R_1 = 0$, जहाँ

Δ_1 = प्राथमिक संरचना में विमोचन 1 पर विस्थापन
f_{11} = टाई-अवयव में इकाई अक्षीय बल के लिए विमोचन 1 पर सापेक्ष विस्थापन, Δ_1 को स्थिति b से निर्धारित किया जाता है:
R_1 = मूल संरचना में टाई-अवयव का बल।

$$\Delta_1 = \frac{(48,000)\ \text{k ft}^3(1,728)\ \text{in}^3/\ \text{ft}^3}{(30 \cdot 10^3)\ \text{ksi}(1,327)\ \text{in}^4} = 2.08\ \text{in} \rightarrow$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

f_{11} आनमनी और अक्षीय दोनों विरूपणों से उत्पन्न होता है

$$1 \cdot f_{11} = \underbrace{2\left[\int_0^{12}(-x)\frac{(-x)dx}{EI} + \int_0^{20}(-12)\frac{(-12)dx}{EI}\right]}_{\text{आनमन}} + \underbrace{\delta\overline{P}\frac{PL}{EA}}_{\text{अक्षीय}}$$

$$= \frac{6,912}{EI} + \frac{1(1)(40)}{EA}$$

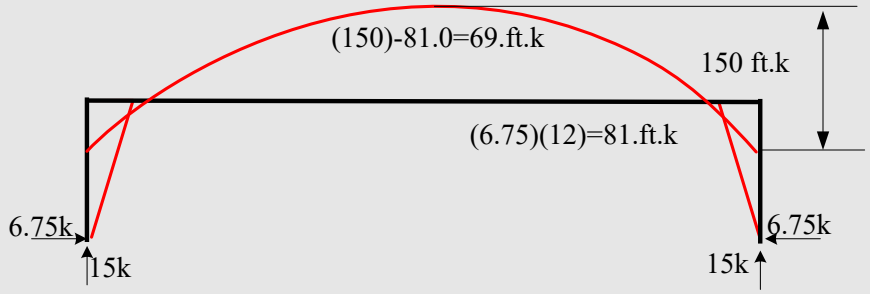
$$= \frac{(6,912)\ \text{k ft}^3(1,728)\ \text{in}^3/\ \text{ft}^3}{(30\cdot 10^3)\ \text{ksi}(1,327)\ \text{in}^4} + \frac{(40)\ \text{ft}(12)\ \text{in}/\ \text{ft}}{(30\cdot 10^3)\ \text{ksi}(2)}$$

$$= 0.300 + 0.008 = 0.308$$

अतः f_{11} = 0.308 in./k संगत विरूपण:

$$\Delta_1 + f_{11}R_1 = 0 \Rightarrow 2.08 + .308R_1 = 0 \Rightarrow R_1 = -6.75\ \text{k}$$

दिशाओं के अंतर को व्यक्त करने के लिए समीकरण के दोनों विस्थापन पदों के विपरीत चिह्न होने चाहिए।

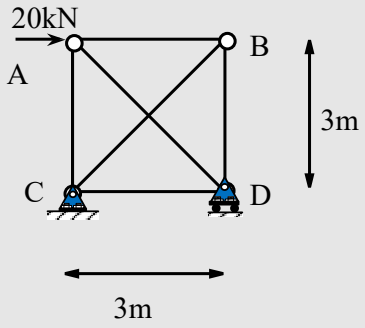


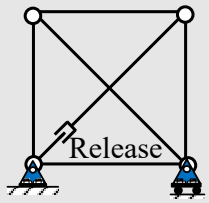
टिप्पणियाँ

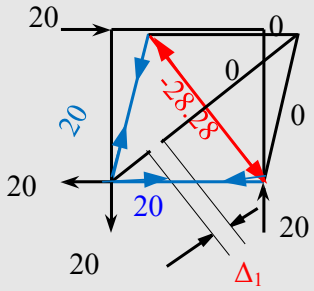
c में M आरेख, b के M आरेख के अत्यंत निकट है। केबल बहुत दृढ था। केबल का क्षेत्रफल घटाने से आघूर्ण बढेगा। टाई-अवयवों वाले ढाँचों का औद्योगिक भवनों में व्यापक उपयोग होता है। ढाँचों (b) और (c) का अधिकतम आघूर्ण लगभग 55% है, यदि (a) के मान को आधार लिया जाए। सातत्य से धनात्मक आघूर्ण घटता और ऋणात्मक आघूर्ण बढता है। यह अधिक अनुकूलतम अभिकल्प है। क्षैतिज आधार दशाओं से ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाएँ प्रभावित नहीं होतीं।

25.2.1.3 उदाहरण 25.3: ट्रस, एक अतिरिक्त बल

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।





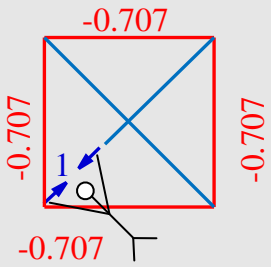


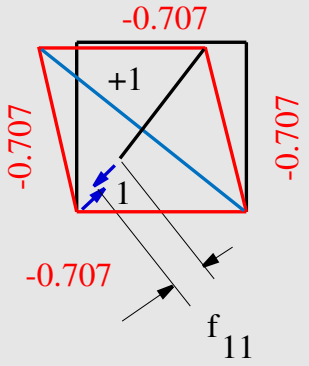
1. जाँच: $2\times4=8$ समीकरण, 6 अवयव + 3 प्रतिक्रियाएँ $\Rightarrow$ अनिर्धार्यता की एक कोटि। छह छड़ों में से किसी में भी अनुदैर्घ्य विमोचन चुना जा सकता है।
2. विकर्ण अवयव BC को विमोचित करें।
3. Δ_1 सापेक्ष विस्थापन: संधि B का संधि C के सापेक्ष विस्थापन।
4. CD की दिशा में संगतता समीकरण

$$\Delta_1 + f_{11}F_1 = 0$$

$$1\cdot\Delta_1 = \Sigma\delta\overline{P}\frac{PL}{AE}$$

$$f_{11} = \Sigma\delta\overline{P}\frac{\overline{P}L}{AE}$$





5. इन योगों का सारणीबद्ध रूप में मूल्यांकन:

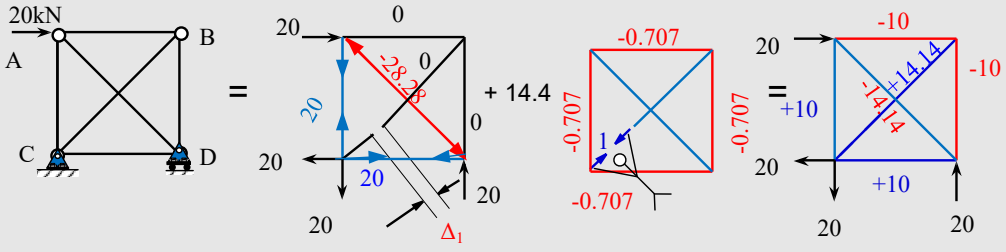
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवयव	P	$\delta\overline{P}$	L	$\delta\overline{P}PL$ (Δ_1)	$\delta\overline{P}\overline{P}L$ (f_{11})
AB	0	−0.707	3	0	1.5
BD	0	−0.707	3	0	1.5
CD	+20	−0.707	3	−42.42	1.5
AC	+20	−0.707	3	−42.42	1.5
AD	−28.28	+1	4.242	−119.96	4.242
BC	0	+1	4.242	0	4.242
				-204.8	14.484

$$\Delta_1 = \Sigma\delta\overline{P}\frac{PL}{AE} = -\frac{-204.8}{AE}\text{m.kN}^2$$
$$f_{11} = \frac{14.484}{AE}\text{m.kN}^2$$
$$0 = \frac{1}{AE}[-204.8 + 14.484F_1]$$
$$F_1 = 14.14 \text{ kN}$$

.

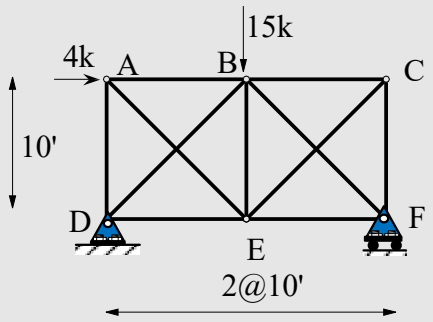
6. अंतिम बल, अतिरिक्त बल से उत्पन्न बलों और वास्तविक भारण से उत्पन्न बलों का अध्यारोपण करके प्राप्त होते हैं।
7. अतिरिक्त बल का प्रभाव: अवयव बलों को 14.14 (अतिरिक्त बल) से गुणा करें।

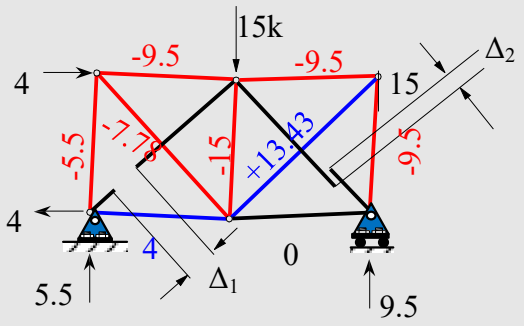


अवयव	$\delta\overline{P}$	$F_1\delta\overline{P}$	P	P_{total}
AB	−0.707	−10.0	0.0	−10.0
BD	−0.707	−10.0	0.0	−10.0
CD	−0.707	−10.0	+20.0	+10.0
AC	−0.707	−10.0	+20.0	+10.0
AD	+1.0	+14.14	−28.28	−14.14
BC	+1.00	+14.14	0	+14.14

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

25.2.1.4 उदाहरण 25.4: ट्रस: दो अतिरिक्त बल





पिछले उदाहरण के ट्रस में दूसरे अतिरिक्त अवयव सहित एक और पैनल जोडा गया है

1. दो विकर्णों (DB और BF) को विमोचित करें।
2. वास्तविक भारण तथा अवयवों DB और BF में दो अतिरिक्त बलों के लिए अवयव बल और आवश्यक विस्थापन निर्धारित करें।
3. यद्यपि वास्तविक भारण सामान्यतः संपूर्ण ट्रस के सभी अवयवों में प्रतिबल उत्पन्न करता है, अतिरिक्त बलों के अनुरूप इकाई बल केवल उसी पैनल के अवयवों में प्रतिबल उत्पन्न करते हैं जिसमें वह अतिरिक्त अवयव है; अन्य सभी छड-बल शून्य हैं।
4. इस तथ्य की पहचान हमें बहु-अतिरिक्तता वाले ढाँचे की अपेक्षा दोहरे-विकर्ण ट्रस की समस्या अधिक शीघ्र हल करने देती है।
5. छह आवश्यक विस्थापनों (भार के कारण दो और चार लचीलेपन) के परिकलन हेतु आभासी कार्य समीकरण हैं

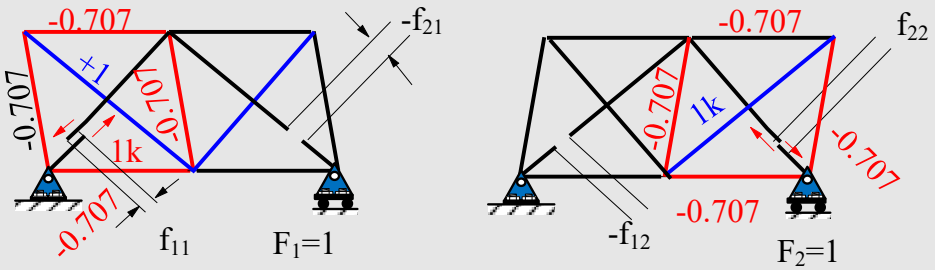
$$1 \cdot \Delta_1 = \Sigma \delta \overline{P}_1 \left(\frac{PL}{AE} \right) \qquad 1 \cdot \Delta_2 = \Sigma \delta \overline{P}_2 \left(\frac{PL}{AE} \right)$$

$$1 \cdot f_{11} = \Sigma \delta \overline{P}_1 \left(\frac{\overline{P}_1 L}{AE} \right) \qquad 1 \cdot f_{21} = \Sigma \delta \overline{P}_2 \left(\frac{\overline{P}_1 L}{AE} \right)$$

$$f_{12} = f_{21} \quad \text{व्युत्क्रम प्रमेय से} \qquad 1 \cdot f_{22} = \Sigma \delta \overline{P}_2 \frac{\overline{P}_2 L}{AE}$$

6. तनन इकाई बल (धनात्मक) मानें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



7. सारणीबद्ध करें:

					विस्थापन		लचीलेपन		
					Δ_1	Δ_2	f_{11}	f_{21}	f_{22}
अवयव	P	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	L	$\delta\overline{P}_1PL$	$\delta\overline{P}_2PL$	$\delta\overline{P}_1\overline{P}_1L$	$\delta\overline{P}_2\overline{P}_1L$	$\delta\overline{P}_2\overline{P}_2L$
AB	-9.5	-0.707	0	120	+806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	120	0	+806	0	0	60
CF	-9.5	0	-0.707	120	0	+806	0	0	60
EF	0	0	-0.707	120	0	0	0	0	60
DE	+4	-0.707	0	120	-340	0	60	0	0
AD	-5.5	-0.707	0	120	+466	0	60	0	0
AE	+7.78	+1	0	170	+1,322	0	170	0	0
BE	-15.0	-0.707	-0.707	120	+1,272	+1272	60	60	60
CE	+13.43	0	+1	170	0	+2,280	0	0	170
BD	0	+1	0	170	0	0	170	0	0
BF	0	0	+1	170	0	0	0	0	170
					+3,528	+5,164	+580	+60	+580

$$\Delta_1 + f_{11}F_1 + f_{12}F_2 = 0$$
$$\Delta_2 + f_{21}F_1 + f_{22}F_2 = 0$$

अथवा

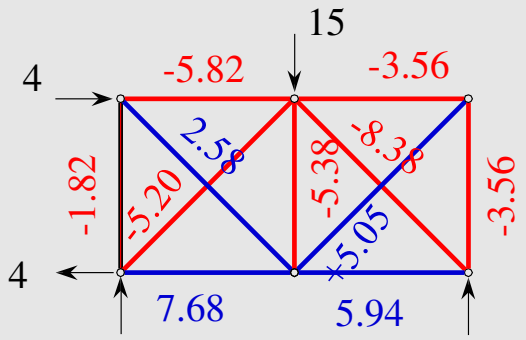
$$\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 580 & 60 \\ 60 & 580 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 3,528 \\ 5,164 \end{bmatrix}$$

और F_1 = -5.20 kip तथा F_2 = -8.38 kip

8. बलों का अंतिम समुच्चय: प्रत्येक अवयव के लिए तीनों पृथक प्रभाव जोड़ें: $F = P + F_1\overline{P}_1 + F_2\overline{P}_2$

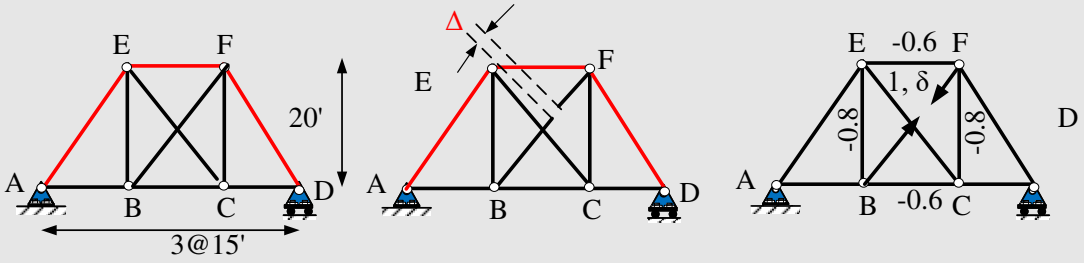
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवयव	P	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	$F_1\overline{P}_1$	$F_2\overline{P}_2$	P_{tot}
AB	-9.5	-0.707	0.0	3.676	0.0	-5.82
BC	-9.5	0.0	-0.707	0	5.925	-3.56
CF	-9.5	0.0	-0.707	0	5.925	-3.56
EF	0.0	0.0	-0.707	0	5.925	5.94
DE	+4	-0.707	0.0	3.676	0.0	7.68
AD	-5.5	-0.707	0.0	3.676	0.0	-1.82
AE	+7.78	+1	0.0	-5.20	0.0	2.58
BE	-15.0	-0.707	-0.707	3.676	5.925	-5.38
CE	+13.43	0.0	+1	0.0	-8.38	5.05
BD	0.0	+1	0.0	-5.20	0.0	-5.20
BF	0.0	0.0	+1	0.0	-8.38	-8.38



25.2.1.5 उदाहरण 25.5: ट्रस: तापीय भार

हमें निम्न ट्रस (प्रथम कोटि तक अनिर्धार्य) का विश्लेषण करना है, जिसके अवयवों AE, EF और FD में तापमान $\Delta T = 60°\text{F}$ बढता है। $\alpha = 1/150,000$ प्रति °F, $E = 30 \times 10^3$k/sq in लें। सभी अनुप्रस्थ काट 10 in sq के समान हैं। इस समस्या में हम छड BF को काटकर उसके छड-बल को अतिरिक्त अज्ञात चुनते हैं।



तब

$$\Delta + X\delta = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हमारे पास अभी भी

$$(1)\delta = \frac{1}{E}\sum \delta\overline{P}\frac{PL}{A}$$

है, किंतु Δ के लिए रूप थोडा भिन्न है।

$$(1)\Delta = \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE}$$

इस पुस्तक में आभासी और वास्तविक राशियों को स्पष्टतः पृथक रखा गया है। अतः वास्तविक विस्थापन को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\frac{P}{AE} = \varepsilon = \alpha\Delta T$$

जहाँ α तापीय प्रसार गुणांक और ΔT तापमान परिवर्तन है। अतः इस समस्या के लिए हमें उपयोग करना चाहिए

$$(1)\Delta = \alpha\sum \delta\overline{P}\Delta TL$$

परिणामों को सारणीबद्ध करने पर

छड	L	A	$\frac{L}{A}$	$\delta\overline{P} = P$	$\delta\overline{P}\frac{PL}{A}$	ΔT	$\delta\overline{P}\Delta TL$	$X\delta\overline{p}$
	ft	in^2	ft/in^2	k	k^2ft/in^2	°F	k°F ft	k
EF	15	10	1.5	-0.6	+0.54	+60	-540	-7.5
BC	15	10	1.5	-0.6	+0.54	0	0	-7.5
EB	20	10	2	-0.8	+1.28	0	0	-10.0
FC	20	10	2	-0.8	+1.28	0	0	-10.0
EC	25	10	2,5	+1.0	+2.5	0	0	+12.5
BF	25	10	2.5	+1.0	+2.5	0	0	+12.5
Σ					+8.64		-540	

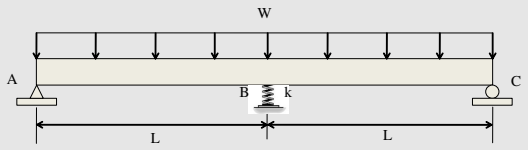
$$\Delta = (-540)\frac{1}{150,000} = -0.0036 \text{ ft}$$

$$\delta = \frac{8.64}{30\times 10^3} = 0.000288 \text{ ft}$$

अतः

$$-0.0036 + 0.000288X = 0 \Rightarrow X = +12.5 \quad \text{k (तनन)}$$

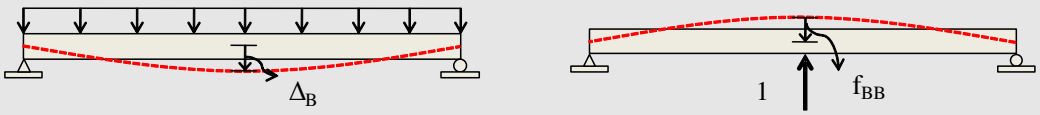
25.2.1.6 उदाहरण 25.6: स्प्रिंग-आधारित बीम



बीम को A पर पिन, k दृढता वाले स्प्रिंग द्वारा B पर और रोलर द्वारा C पर आधार प्राप्त है। स्प्रिंग द्वारा बीम पर लगाया गया बल निर्धारित करें। EI नियत है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. स्प्रिंग हटाकर प्राथमिक संरचना परिभाषित करें और इस स्थान पर वास्तविक भार तथा इकाई भार के लिए विक्षेप निर्धारित करें। यह ज्यामिति अत्यंत सामान्य है, अतः L विस्तार के लिए विस्थापन ज्ञात करें।



एकसमान भार

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} = \frac{1}{2}w(LX - x^2)$$
$$\delta\overline{M} = \frac{1}{2}x$$
$$1.\Delta = 2\int_0^{L/2} \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = 2\int_0^{L/2} \frac{1}{2}x\frac{w(Lx - x^2)}{2EI}dx$$
$$= \frac{2w}{4EI}\int_0^{L/2}(Lx^2 - x^3)dx = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{L/2} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

बिंदु भार:

$$M = \frac{P}{2}x = \frac{Px}{2}$$
$$\delta\overline{M} = \frac{\delta\overline{P}}{2}x = \frac{x}{2}$$
$$1.f_{BB} = 2\int_0^{L/2} \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = 2\int_0^{L/2} \frac{x}{2}\frac{Px}{2EI} = \frac{2P}{4EI}\int_0^{L/2} x^2dx$$
$$\Rightarrow f_{BB} = \frac{PL^3}{48EI}$$

2. कुल भार और इकाई भार के कारण विक्षेप परिकलित करें। यहाँ स्प्रिंग होने से विक्षेप शून्य नहीं, बल्कि स्प्रिंग नियतांक k द्वारा प्रतिक्रिया बल के समानुपाती है।

$$\Delta_B + f_{BB} = \Delta_{sp} \quad \text{तथा} \quad \Delta_{sp} = \frac{F_{sp}}{k}$$

अब पहले व्युत्पन्न समीकरणों में L के स्थान पर 2L लंबाई के बीम के लिए विस्थापनों को समायोजित करें।

$$\Delta_B^* = \frac{5wL_{AC}^4}{384EI} = \frac{5w(2L)^4}{384EI} = \frac{5wL^4}{24EI}$$
$$f_{BB}^* = \frac{PL_{AC}^3}{48EI} = \frac{F_{sp}(2L)^3}{48EI} = \frac{F_{sp}}{L^3}6EI$$

प्रतिस्थापित करने पर

$$\Delta_B^* + f_{BB}^* = \Delta_{sp} \Rightarrow \frac{5WL^4}{24EI} + \left(-\frac{F_{sp}L^3}{6EI}\right) = \frac{F_{sp}}{k} \Rightarrow F_{sp} = \frac{5wkL^4}{4(6EI + kL^3)}$$

प्रतिक्रिया

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मध्य आधार की प्रतिक्रिया ज्ञात होने पर समस्या अब स्थैतिकतः निर्धार्य है।

इसी प्रकार की, किंतु अत्यधिक जटिल, समस्या—प्रत्यास्थ बीम पर आधारित बैरल शेल—के लिए पाठक परिशिष्ट F देखें।

25.2.1.7 उदाहरण 25.7: क्वीन पोस्ट

एक इस्पात फर्श-बीम को 3 k/ft भार वहन करने के लिए 24 ft के साधारण विस्तार पर अभिकल्पित किया गया था। भवन के उपयोग में परिवर्तन के कारण नया स्वामी फर्श पर ऐसी सामग्री रखना चाहता है जिससे कुल भारण 4.8 k/ft हो जाएगा। एक अभियंता नीचे दर्शाए अनुसार एक संपीडन स्ट्रट और दो तनन टाइयों द्वारा बीम को प्रबलित करके "किंग पोस्ट ट्रस" बनाने का प्रस्ताव करता है। नए अवयव बीम के नीचे अभारवाही विभाजन में छिपे रहेंगे। हमें नए बीम का आघूर्ण आरेख बनाना और इस पुनःसुदृढीकरण योजना की दक्षता का मूल्यांकन करना है। बीम W 18x60 परिच्छेद (I=984 in^4), स्ट्रट W 4x13 परिच्छेद (A=4.83 in^2), और इस्पात केबल का A=1 in^2 है।

1. यह स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना है; बीम के तीन आधार (A, B और C) हैं।
2. प्राथमिक संरचना के लिए मध्य आधार हटाकर मध्य-विस्तार विक्षेप Δ ज्ञात करें। ($\Delta = -\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}$).
3. B पर इकाई बल लगाकर f_{BB} ज्ञात करें; ध्यान रखें कि बीम में आनमन, दोनों केबलों (AD और DC) में अक्षीय विरूपण तथा अवयव BD में अक्षीय विरूपण होगा।
4. B पर प्रतिक्रिया ज्ञात करें।

1. अवयव BD के अक्षीय बल को अतिरिक्त बल चुनें।
2. बीम का विक्षेप निर्धारित करें।

$$D_B = -\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI} = -\frac{5}{384}\frac{(4.8)\ \text{k.ft}(24)^4\ \text{ft}^4(12)^4\ \text{in}^4/\ \text{ft}^4}{E(984)\ \text{in}^4} = -\frac{36,414}{E}$$

3. ज्यामिति से प्रत्येक केबल की लंबाई $L = \sqrt{7^2+12^2} = 13.89$ ft है।
4. स्थैतिकी से, अवयव BD में इकाई बल केबल में निम्न बल उत्पन्न करेगा $\frac{13.89}{7}0.5 = 0.9923$ kips
5. ध्यान दें कि गर्डर पर इकाई भार लगाने पर हम B पर दृढ आधार मानते हैं, न कि प्रत्यास्थ आधार (अक्षीय अवयव और केबल का संयोजन)।
6. लचीलापन पद निर्धारित करें।

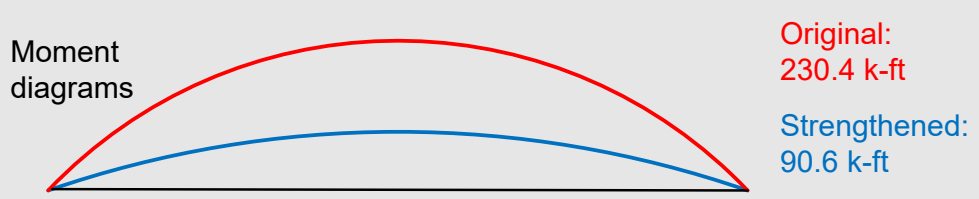
$$\begin{aligned} f_{BB} &= 2\left[\int_0^{12\times12} 0.5x\frac{0.5x}{EI}dx + (0.992)\frac{(0.992)(13.89)(12)}{E}\right] + (1)\frac{(1)(7)(12)}{(3.83)E} \\ &= 2\frac{(0.25)(144)^3}{3E(984)} + 2\frac{(0.992)^2(13.89)(12)}{(1)E} + \frac{(7)(12)}{3.83E} \\ &= \frac{1}{E}(505.7 + 328 + 21.93) = \frac{855.63}{E} \end{aligned}$$

7. विस्थापनों की संगतता की आवश्यकता है कि

$$Rf_{BB} + D_B = 0 \Rightarrow R = -\frac{D_B}{f_{BB}} = -\frac{-36,414}{855.63} = 42.5\ \text{k}$$

8. संगत और मूल आघूर्ण आरेख हैं

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप



और हम देखते हैं कि अधिकतम आघूर्ण 230.4 k-ft से घटकर 90.6 k.ftहो गया।

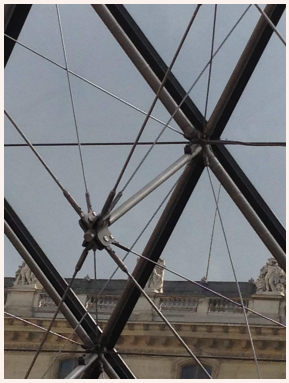
13 चित्र 25.5 क्वीन-पोस्ट संकल्पना पर आधारित अभिकल्पों के कुछ उदाहरण दर्शाता है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।




(a) वॉशिंगटन डलेस विमानतल (किंग पोस्ट)

(b) पिरामिद दु लूव्र (I.M. Pei)




(c) सोनी सेंटर, बर्लिन (Helmut Jahn)

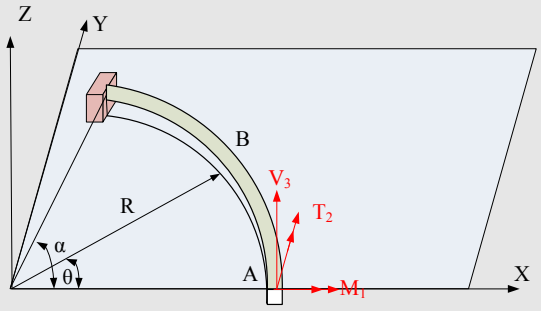
चित्र 25.5: क्वीन-पोस्ट से प्रेरित संरचनाओं के उदाहरण

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

25.2.1.8 उदाहरण 25.8: लचीलापन आव्यूह; वक्र बीम

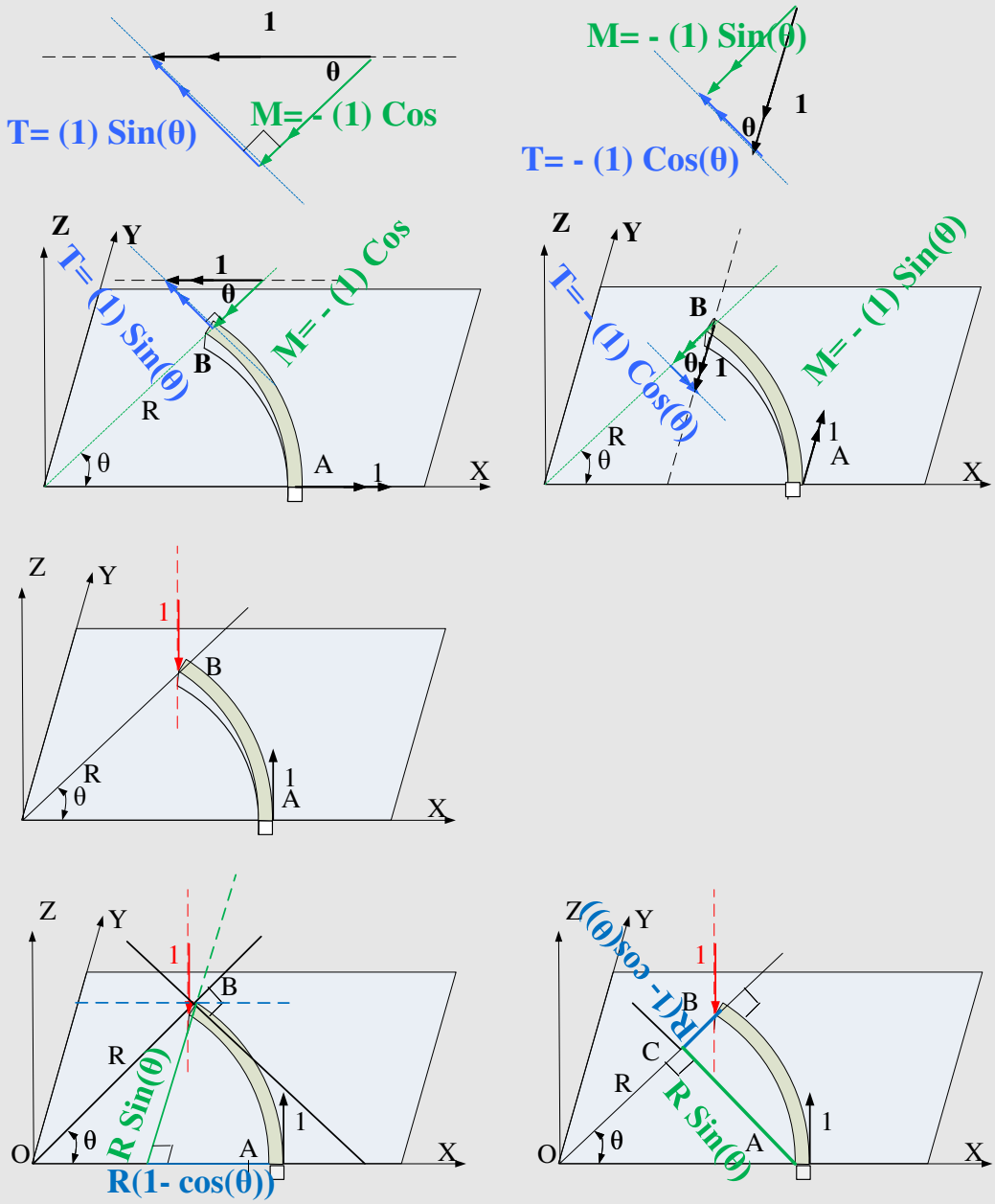
हमें त्रिज्या R और कोण α वाले वृत्तीय बॉक्स-गर्डर का लचीलापन आव्यूह व्युत्पन्न करना है। चाप एक सिरे पर आबद्ध और दूसरे पर मुक्त है।



1. तीन स्वतंत्रता कोटियाँ आघूर्ण, ऐंठन और कर्तन के अनुरूप हैं।
2. A पर लगाए गए इकाई बाह्य आघूर्ण अथवा ऐंठन से उत्पन्न आघूर्ण और ऐंठन ज्यामिति से सरलता से प्राप्त होते हैं।
3. A पर लगाए गए इकाई बाह्य बल के लिए दोनों आघूर्ण-भुजाएँ ज्यामिति से निर्धारित करनी हैं।

$$
\begin{aligned}
AC &= R\sin(\theta) \\
M &= (1)R\sin(\theta) \\
BC &= R(1-\cos(\theta)) \\
T &= (1)R\,(1-\cos(\theta))
\end{aligned}
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



स्वतंत्रता कोटि:	$i=1$	$i=2$	$i=3$
	M_A=1	$T_A=1$	$V_A=1$
$V_i(\theta)$	0	0	-1
$M_i(\theta)$	-cos θ	$-\sin\theta$	-Rsin(θ)
$T_i(\theta)$	sin θ	$-\cos\theta$	$R(1-\cos(\theta))$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. लागू करना है

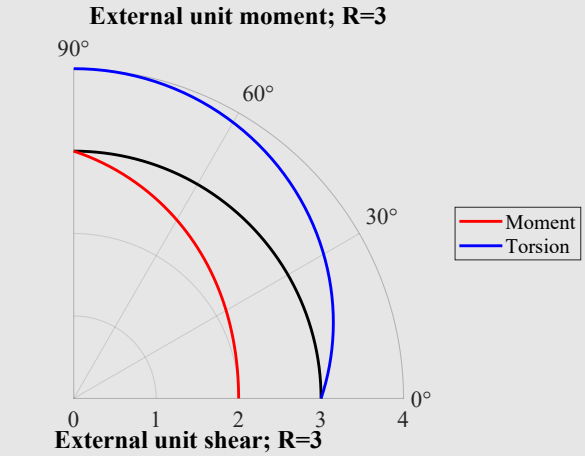
$$d_{ij} = \int_0^\alpha \delta\overline{M}_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_i(\theta)\frac{T_j(\theta)}{EI}Rd\theta$$

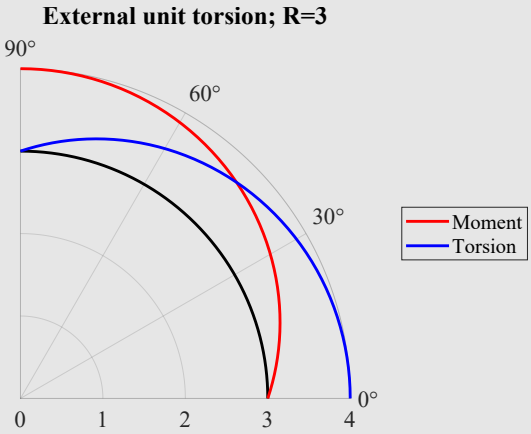
जहाँ $1 \le i, j \le 3$, अर्थात हम पंक्ति 2 अथवा 4 पर संक्रिया करते हैं। अतः (d_{x3} के चिह्न बदले गए हैं; समाकलन के परिणाम त्रुटिपूर्ण हो सकते हैं):

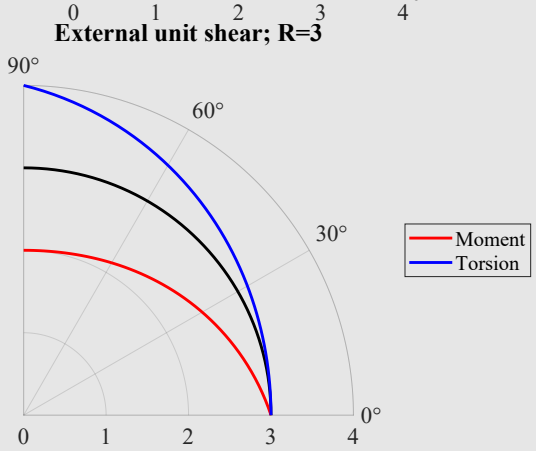
$$\begin{aligned}
d_{11} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_1}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta T_1\frac{T_1}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{\sin\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{12} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\frac{\sin^2\alpha}{2} \\
d_{13} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \cos\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha + \cos^2\alpha\right) \\
d_{22} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\sin\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{23} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(-\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{33} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_3\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_3\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha R\sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha R(1-\cos\theta)\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R^2}{GJ}\left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)
\end{aligned}$$

अप्रकाशित प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।







	बाह्य इकाई					
	आघूर्ण		ऐंठन		बल	
आंतरिक बल	आरंभ	अंत	आरंभ	अंत	आरंभ	अंत
आघूर्ण	1	0	0	1	0	1
ऐंठन	0	1	1	0	0	1

25.3 तीन आघूर्ण समीकरण

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §11.3.2 देखें

14 तीन-आघूर्ण समीकरण, जिसे क्लैपेरॉन का तीन आघूर्ण प्रमेय भी कहा जाता है, फ्रांसीसी अभियंता बेनुआ क्लैपेरॉन ने 1857 में विकसित किया था (§10.3.2.9)। प्रत्यास्थता सिद्धांत और संरचनात्मक विश्लेषण पर क्लैपेरॉन के कार्य ने सतत बीमों के विश्लेषण की नींव रखी। तीन-आघूर्ण समीकरण स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं के विश्लेषण की आरंभिक विधियों में से एक था और सतत बीम के तीन क्रमागत आधारों पर आघूर्णों को संबद्ध करने का उपाय देता है।

15 आज इसका उपयोग संभवतः कम होता है, फिर भी ऐतिहासिक महत्त्व और इसके हल की सुरुचि के कारण इसे सम्मिलित किया गया है।

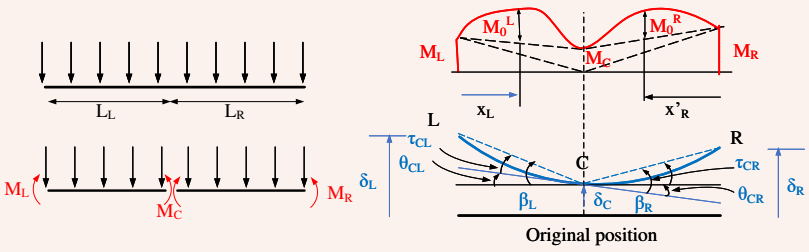
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16 "तीन आघूर्ण समीकरण", जिसे *तीन-आघूर्ण प्रमेय* अथवा *क्लैपेरॉन प्रमेय* भी कहते हैं, यह नाम इसलिए प्राप्त करता है क्योंकि यह बीम के तीन आसन्न बिंदुओं पर बंकन आघूर्णों को संबद्ध करता है।

17 मूलतः यह विधि तीन आधारों वाले सतत बीम के केंद्रीय आधार पर बंकन आघूर्ण परिकलित करने के लिए एक सरल सूत्र देती है।

18 इस विधि को बहु-आधार वाले बीमों तक भी विस्तारित किया जा सकता है, जिससे त्रि-विकर्ण आव्यूह बनाने वाली समीकरण-शृंखला प्राप्त होती है।

19 अवयव[1] को सीधा माना गया है और चित्र 25.6 में दर्शाए बिंदुओं को L, C और R से निरूपित किया गया है। आधारों के बीच जडत्व आघूर्ण नियत माने गए हैं और उन्हें I_L तथा I_R से निरूपित किया गया है। मूल स्थिति से विक्षेप δ_L, δ_C और δ_R माने गए हैं तथा दर्शाए अनुसार ऊपर की ओर धनात्मक हैं।



चित्र 25.6: तीन आघूर्ण समीकरण की व्युत्पत्ति

20 इन तीन बिंदुओं पर आघूर्ण M_L, M_C और M_R हों। बीम के निचले तंतुओं में तनन उत्पन्न करने वाले बंकन आघूर्ण धनात्मक हैं। भाग LC अथवा CR का आघूर्ण आरेख तीन पृथक प्रभावों के अध्यारोपण से उत्पन्न माना जा सकता है:

1. पृथक रूप से कार्यरत प्रत्येक सिरा-आघूर्ण का योगदान, जो खंडित रेखाओं से दर्शाए त्रिभुजों की कोटियों द्वारा दिया जाता है।
2. सिरा-आघूर्ण हटाकर अकेले लगाए गए भार का योगदान, जो M_0^L की कोटियों द्वारा भाग LC में दिया जाता है।
3. यही योगदान M_0^R द्वारा भाग CR में दिया जाता है।

21 चित्र 25.6 से

$$\theta_{CL} = \beta_L - \tau_{CL} \quad \text{तथा} \quad \theta_{CR} = \tau_{CR} - \beta_R$$

22 किंतु प्रत्यास्थ वक्र बिंदु C से सतत होना चाहिए (इसी कारण यह विधि लचीलापन विधियों में आती है[2])

$$\theta_{CL} = \theta_{CR} \Rightarrow \beta_L - \tau_{CL} = \tau_{CR} - \beta_R \tag{25.5}$$

[1] व्युत्पत्ति Norris and Wilbur, 1960 द्वारा दी गई व्युत्पत्ति पर आधारित है।

[2] ढाल-विक्षेप विधि (§27.2) से समानता देखें, जहाँ हम संधि पर साम्य समीकरण लिखते हैं, जबकि तीन आघूर्ण समीकरण में विस्थापनों की संगतता का समीकरण लिखते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[23] ये कोण छोटे हैं, अतः हम मान सकते हैं

$$\beta_L = \frac{\delta_L - \delta_C}{L_L} \quad \beta_R = \frac{\delta_R - \delta_C}{L_R} \tag{25.6}$$

[24] यदि आघूर्ण आरेख को M/EI आरेख (वक्रता) में परिवर्तित किया जाए, तो τ_{CL} और τ_{CR} का मूल्यांकन द्वितीय आघूर्ण-क्षेत्र प्रमेय[3] (§22.3.4.3) से किया जा सकता है:

$$\begin{aligned}
\tau_{CL} &= \frac{1}{EI_L L_L}\left(\frac{M_L L_L^2}{6} + \frac{M_C L_L^2}{3} + \int_0^{L_L} M_0^L x_L dx_L\right) \\
\tau_{CR} &= \frac{1}{EI_R L_R}\left(\frac{M_R L_R^2}{6} + \frac{M_C L_R^2}{3} + \int_0^{L_R} M_0^R x'_R dx'_R\right)
\end{aligned} \tag{25.7}$$

मानें

$$(\mathcal{M}_0)_L = \int_0^{L_L} M_0^L x_L dx_L \quad \text{तथा} \quad (\mathcal{M}_0)_R = \int_0^{L_R} M_0^R x'_R dx'_R \tag{25.8}$$

[25] समीकरण 25.8 से समीकरण 25.7 में और तत्पश्चात समीकरणों 25.6 तथा 25.7 से समीकरण 25.5 में प्रतिस्थापित करने पर तथाकथित *तीन आघूर्ण समीकरण* प्राप्त होता है।

$$M_L \frac{L_L}{I_L} + 2M_C\left(\frac{L_L}{I_L} + \frac{L_R}{I_R}\right) + M_R \frac{L_R}{I_R} = -\frac{\mathcal{L}_0}{I_L} - \frac{\mathcal{R}_0}{I_R} + 6E\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_c\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{L_R}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right] \tag{25.9}$$

जहाँ भार पद हैं

$$\mathcal{L}_0 = \frac{6(\mathcal{M}_0)_L}{L_L} \quad \text{तथा} \quad \mathcal{R}_0 = \frac{6(\mathcal{M}_0)_R}{L_R}$$

जहाँ

1. M_L, M_C और M_R निचले तंतुओं में तनन उत्पन्न करने पर धनात्मक हैं।
2. δ_L, δ_C और δ_R मूल स्थिति से ऊपर की ओर धनात्मक हैं।
3. $\mathcal{L}_0$ और $\mathcal{R}_0$ क्रमशः विस्तारों LC और CR में लगाए गए भार पर निर्भर भार पद हैं।
4. किसी अवयव का M_0 आरेख वह बंकन-आघूर्ण आरेख है जो अवयव को साधारण सिरा-आधारित बीम मानकर बनाया जाता है।
5. $(\mathcal{M}_0)_L$ इस आरेख के नीचे के क्षेत्र का बाएँ सिरे से गुजरने वाले अक्ष के परितः स्थैतिक आघूर्ण दर्शाता है।
6. $(\mathcal{M}_0)_R$ इस आरेख के नीचे के क्षेत्र का दाएँ सिरे से गुजरने वाले अक्ष के परितः स्थैतिक आघूर्ण दर्शाता है।

[3] भारित आनमनी अवयव पर बिंदु 2 का, बिंदु 1 पर विक्षेप वक्र की स्पर्शरेखा से स्पर्शरेखीय विचलन (t_{21}), 1 और 2 के बीच वक्रता आरेख के क्षेत्र के बिंदु 2 के परितः आघूर्ण के बराबर होता है।

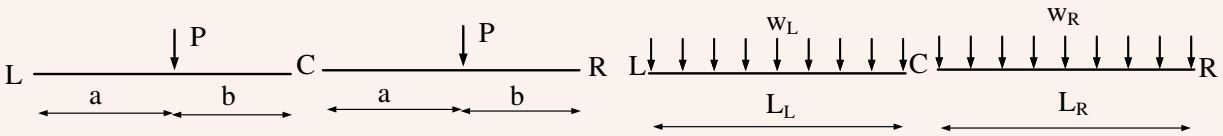
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंतिम दोनों स्थैतिक आघूर्णों का चिह्न केवल M_0 आरेख की कोटियों के चिह्न पर निर्भर करता है।

[26] यदि $I_L = I_R = I$, तो समीकरण 25.9 सरल होकर

$$M_L L_L + 2M_C (L_L + L_R) + M_R L_R = -\mathcal{L}_0 - \mathcal{R}_0 + 6EI \left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_c \left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{L_R} \right) + \frac{\delta_R}{L_R} \right] \quad (25.10)$$

[27] पूर्ण एकसमान और संकेंद्रित भार के लिए भार पद चित्र 25.7 में दर्शाए तथा सारणी 25.1 में दिए गए हैं।

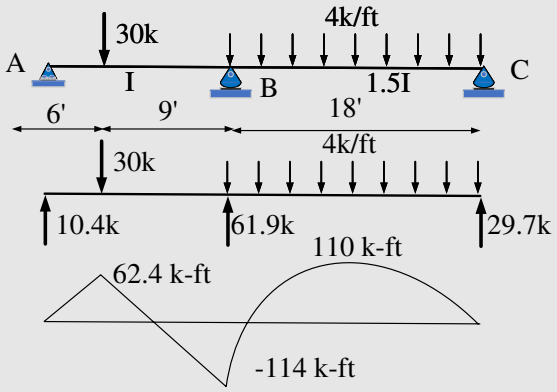


चित्र 25.7: तीन आघूर्ण समीकरण के भार पद

तालिका 25.1: बिंदु और एकसमान भारों के भार पद

संकेंद्रित भार	$\mathcal{L}_0 = \frac{Pab(2a+b)}{L_L}$	$\mathcal{R}_0 = \frac{Pab(a+2b)}{L_R}$
एकसमान भार	$\mathcal{L}_0 = \frac{w_L L_L^3}{4}$	$\mathcal{R}_0 = \frac{w_R L_R^3}{4}$

25.3.1 उदाहरण 25.9: सतत बीम



समीकरण 25.9 लागू करें और A, B तथा C को क्रमशः L, C और R लें:

$$M_a = 0 \quad M_B = ? \quad M_C = 0$$

तथा

$$\delta_A = \delta_B = \delta_C = 0$$

सारणी 25.1 से

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(30)(6)(9)(21)}{15} = 2,268$$

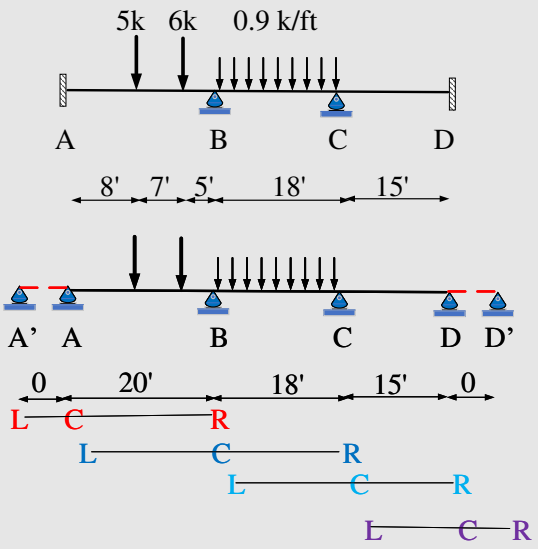
$$\mathcal{R}_0 = \frac{(4)(18)^2}{4} = 5,832$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंततः

$$0 + 2M_B\left(\frac{15}{I} + \frac{18}{1.5I}\right) + 0 = -\frac{2,268}{I} - \frac{5,832}{1.5I}$$
$$54M_B = -6,156 \Rightarrow M_B = -114\text{k-ft}$$

25.3.2 उदाहरण 25.10: सतत बीम



इस स्थिति में चार अज्ञात आघूर्ण M_A, M_B, M_C और $M_D d$ हैं। अतः चार समीकरण आवश्यक हैं। आबद्ध सिरे को दर्शाए अनुसार लगभग शून्य लंबाई के एक अतिरिक्त विस्तार से प्रतिस्थापित करके निरूपित किया जा सकता है। तब संकेतित क्रम में L, C और R पर विचार करते हुए समीकरण 25.10 को चार बार पृथक रूप से लागू करके आवश्यक समीकरण प्राप्त किए जा सकते हैं।

$$\delta_{A'} = \delta_A = \delta_B = \delta_C = \delta_D = \delta_{D'} = 0$$

1. A', A और B को L, C और R मानें।

$$\mathcal{L}_0 = 0 \quad \mathcal{R}_0 = \frac{(5)(8)(12)(32)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(25)}{20} = 1,330.5 \quad M'_A = 0$$
$$\Rightarrow 40M_A + 20M_B = -1,330.5$$

2. A, B और C को L, C और R मानें।

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(5)(8)(12)(28)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(35)}{20} = 11,459.5 \quad \mathcal{R}_0 = \frac{(0.9)(18)^2}{4} = 1,312.2$$
$$\Rightarrow 20M_A + 76M_B + 18M_C = -2,771.7$$

3. B, C और D को L, C और R मानें।

$$\mathcal{L}_0 = 1,312.2 \quad \mathcal{R}_0 = 0 \Rightarrow 18M_B + 66M_C + 15M_D = -1,312.2$$

4. C, D और D' को L, C और R मानें।

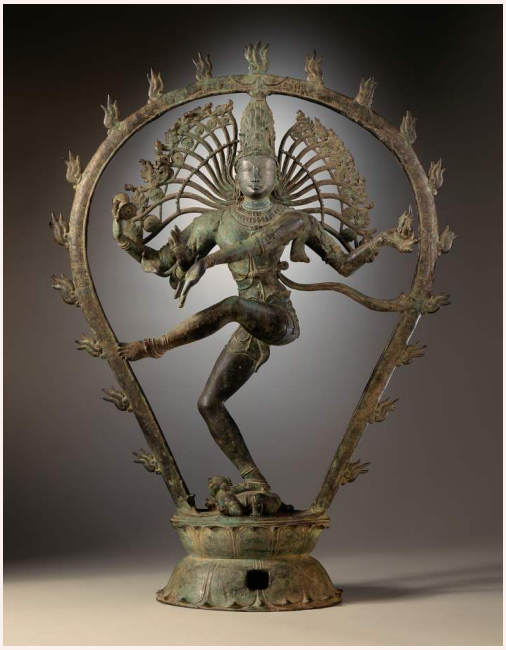
$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{R}_0 = 0 \quad M_{D'} = 0 \Rightarrow 15M_C + 30M_D = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इन चार समीकरणों को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 76 & 18 & 0 \\ 0 & 18 & 66 & 15 \\ 0 & 0 & 15 & 30 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -1,330.5 \\ -2,771.7 \\ -1,312.2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -19.17 \\ -28.20 \\ -13.74 \\ +6.87 \end{Bmatrix} \text{k-ft}$$

(प्राप्त अपेक्षित त्रि-विकरण आव्यूह पर ध्यान दें।)



शिव, चोल राजवंश

शिव के ब्रह्मांडीय नृत्य की गतिशील मुद्रा और प्रवाही गति लचीलेपन तथा अनुकूलनशीलता का प्रतीक हैं, ठीक वैसे ही जैसे लचीली संरचनाएँ साम्य बनाए रखते हुए भार के अधीन विरूपित होती हैं।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

26 विस्थापनों के पदों में बल

सारांश

पिछले अध्यायों में हमने बलों के पदों में विस्थापन परिकलित करने की विधियों (लचीलापन/बल विधि का सार) का अध्ययन किया था; इस अध्याय में इसका विपरीत किया जाएगा। हम ज्ञात विस्थापनों के पदों में बल निर्धारित करेंगे। यही दृढता/विस्थापन विधि का सार है। यह विवेचन आगे आने वाली हस्त-गणना विधियों (केवल आनमनी अवयवों के लिए ढाल-विक्षेप और आघूर्ण वितरण) तथा तत्पश्चात जटिल संरचनाओं के कंप्यूटर-आधारित विश्लेषण (प्रत्यक्ष दृढता विधि) की तैयारी मात्र है। यह अध्याय केवल आनमन तक सीमित है; कर्तन और ऐंठन के लिए पाठक अध्याय 23 देखें।

26.1 परिचय 1042
26.1.1 चिह्न परिपाटी 1043
26.1.2 विश्लेषण विधियाँ 1043
26.2 अक्षीय विरूपण 1044
26.3 आनमन 1044
26.3.1 अवकल समीकरण 1044
26.3.2 प्रारंभिक विकृतियों के लिए संधि-सिरा बल 1048
26.3.3 आनमनी अवयवों के लिए संधि समतुल्य बल 1049

26.1 परिचय

1 §40.8 से स्मरण करें कि संरचनात्मक विश्लेषण एक परिसीमा-मान समस्या है, जिसमें बलों और विस्थापनों के बीच द्वैत होता है। इनमें से एक ज्ञात होता है और उपयुक्त विश्लेषण द्वारा दूसरे को निर्धारित किया जाता है।

2 अब तक हमने Γ_t (चित्र 40.8) पर कार्य किया है, जहाँ बल ज्ञात है और हमें विस्थापन निर्धारित करने हैं। वास्तव में लचीलापन विधि को *बल विधि* भी कहा जाता है।

3 अब इस अध्याय में हम Γ_u पर कार्य करेंगे, जहाँ विस्थापन ज्ञात हैं और हमें उनके अनुरूप बल निर्धारित करने हैं (जो साम्य संतुष्ट करें और उन्हीं ज्ञात विस्थापनों को उत्पन्न करें)।

4 यह *आगे* चलकर दृढता विधि विकसित करने का महत्त्वपूर्ण चरण है, जो पहले विवेचित लचीलापन/बल विधि की पूरक है, सारणी 26.1।

तालिका 26.1: दृढता और लचीलापन विधियों की तुलना

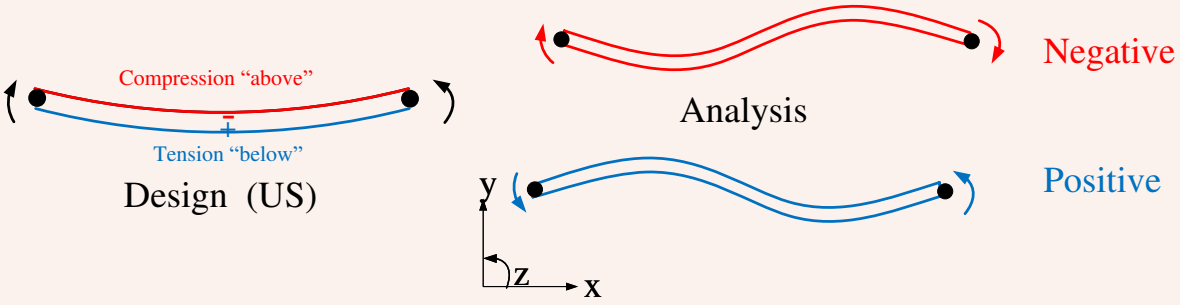
	लचीलापन	**दृढता**
प्राथमिक चर (d.o.f.)	बल	विस्थापन
अनिर्धार्यता	स्थैतिक	शुद्धगतिक
बल-विस्थापन	विस्थापन(बल)/संरचना	बल(विस्थापन)/अवयव
नियंत्रक संबंध	विस्थापन की संगतता	साम्य

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

26.1.1 चिह्न परिपाटी

5 लचीलापन विधि में चिह्न परिपाटी मनमाने ढंग से चुनी गई थी, चित्र 21.5; किंतु दृढता विधि की चिह्न परिपाटी स्थानीय अवयव निर्देशांक तंत्र के अनुरूप है। अतः वामावर्त आघूर्ण को धनात्मक परिभाषित करते हैं, 26.1।



चित्र 26.1: दृढता विधि की चिह्न परिपाटी

26.1.2 विश्लेषण विधियाँ

6 यह अध्याय दृढता विधि में लागू होने वाली प्रारंभिक संकल्पनाएँ प्रस्तुत करता है। इस विधि पर आधारित तीन उपागम हैं:

ढाल-विक्षेप: (Mohr, 1892) n अज्ञातों वाले n रैखिक समीकरण, जहाँ n शुद्धगतिक अनिर्धार्यता की कोटि है (अर्थात स्वतंत्र विस्थापनों/घूर्णनों की कुल संख्या)।

आघूर्ण वितरण: (Cross, 1930) आनमनी संरचनाओं में n विस्थापनों और संगत आंतरिक बलों के हल की पुनरावृत्तीय विधि।

प्रत्यक्ष दृढता विधि: (≃1960) दृढता विधि का औपचारिक आव्यूह निरूपण, जो संरचनात्मक विश्लेषण की सर्वाधिक शक्तिशाली विधि है।

पहली दो विधियाँ हस्त-गणना (अध्याय 27) के अनुकूल हैं और तीसरी कंप्यूटर-आधारित विश्लेषण के लिए (भाग 39 के अनेक अध्यायों में विस्तृत विवेचन) है।

7 सभी दृढता विधियों में विश्लेषण आरंभ करने से पहले ज्ञात विस्थापनों के पदों में बलों के समीकरण आवश्यक होंगे।

8 ध्यान दें कि लचीलापन और दृढता विधियाँ भिन्न स्तरों पर कार्य करती हैं तथा भिन्न अज्ञात निर्धारित करती हैं, चित्र 26.2।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 26.2: दृढता और लचीलापन विश्लेषणों की तुलना

विधि	स्तर	विश्लेषण
लचीलापन	संरचना	बलों के पदों में विस्थापन
दृढता	अवयव	विस्थापन के पदों में बल

26.2 अक्षीय विरूपण

9 पदार्थ-सामर्थ्य से:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \underbrace{A\sigma}_{P} = \frac{AE}{L}\underbrace{\Delta}_{1} \tag{26.1}$$

10 इकाई विस्थापन के लिए लगाया गया बल $\frac{AE}{L}$ के बराबर होना चाहिए।

11 स्थैतिकी से दूसरे सिरे का बल बराबर और विपरीत होना चाहिए।

26.3 आनमन

12 उद्देश्य: बीम में *ज्ञात विस्थापनों के पदों में बल ज्ञात करना*: चार अज्ञात बलों ($V_1^?, V_2^?, M_1^?$ और $M_2^?$) को चार ज्ञात विस्थापनों ($v_1^\checkmark$, $v_2^\checkmark$, $\theta_1^\checkmark$ और $\theta_2^\checkmark$) के पदों में व्यक्त करना, चित्र 26.2।

$$\begin{aligned} V_1^? &= V_1^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark) \\ M_1^? &= M_1^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark) \\ V_2^? &= V_2^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark) \\ M_2^? &= M_2^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark) \end{aligned}$$

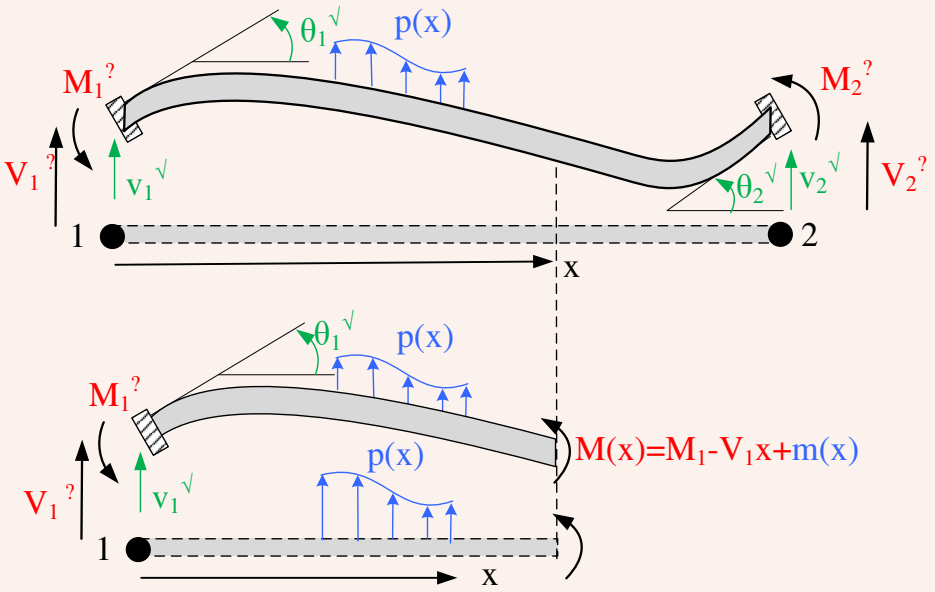
चार अज्ञातों के लिए चार समीकरण आवश्यक हैं; दो आनमन को नियंत्रित करने वाले *द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण* से और दो *साम्य के दो समीकरणों* से मिलेंगे।

26.3.1 अवकल समीकरण

13 आरंभ करें

$$M = \underbrace{-EI\frac{d^2v}{dx^2}}_{\text{अवकल समीकरण}} = \underbrace{M_1^? - V_1^? x + m(x)}_{\text{स्थैतिकी}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 26.2: दृढता पदों के लिए आनमनी समस्या का सूत्रीकरण

जहाँ $m(x)$ लगाए गए भार $q(x)$ के कारण काट x पर आघूर्ण है (एकसमान वितरित भार के लिए: $m(x) = -\frac{1}{2}wx^2$)। दो बार समाकलन करने पर

$$-EIv' = M_1^? x - \frac{1}{2}V_1^? x^2 + f(x) + C_1$$
$$-EIv = \frac{1}{2}M_1^? x^2 - \frac{1}{6}V_1^? x^3 + g(x) + C_1 x + C_2$$

जहाँ $f(x) = \int m(x)dx$, और $g(x) = \int f(x)dx$। $x = 0$ पर परिसीमा शर्तें लागू करें

$$\left.\begin{array}{rl} v' & = \theta_1^\checkmark \\ v & = v_1^\checkmark \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} C_1 & = -EI\theta_1^\checkmark \\ C_2 & = -EIv_1^\checkmark \end{array}\right.$$

तब $x = L$ पर, तथा C_1 और C_2 के साथ संयोजित करने पर

$$\left.\begin{array}{rl} v' & = \theta_2^\checkmark \\ v & = v_2^\checkmark \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} -EI\theta_2^\checkmark & = M_1^? L - \frac{1}{2}V_1^? L^2 + f(L) - EI\theta_1^\checkmark \\ -EIv_2^\checkmark & = \frac{1}{2}M_1^? L^2 - \frac{1}{6}V_1^? L^3 + g(L) - EI\theta_1^\checkmark L - EIv_1^\checkmark \end{array}\right. \tag{26.2}$$

यद्यपि हम $M_1^?$ और $V_1^?$ को $v_1^\checkmark$, $v_2^\checkmark$, $\theta_1^\checkmark$ और $\theta_2^\checkmark$ के पदों में हल कर सकते हैं, फिर भी आगे बढ़ते हैं।

[14] साम्य से,

$$V_1^? + q + V_2^? = 0 \qquad M_1^? - V_1^? L + m(L) + M_2^? = 0$$

जहाँ $q = \int_0^L w(x)dx$,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15 अतः

$$V_1^? = \frac{(M_1^? + M_2^?)}{L} + \frac{1}{L}m(L) \qquad V_2^? = -(V_1^? + q) \tag{26.3}$$

16 V_1 को θ_2 और v_2 में प्रतिस्थापित करने पर (समीकरण 26.2)

$$\begin{cases} M_1^? - M_2^? &= \frac{2EI_z}{L}\theta_1^{\checkmark} + \frac{2EI_z}{L}\theta_2^{\checkmark} + m(L) - \frac{2}{L}f(L) \\ 2M_1^? - M_2^? &= \frac{6EI_z}{L}\theta_1^{\checkmark} - \frac{6EI_z}{L^2}v_1^{\checkmark} - \frac{6EI_z}{L^2}v_2^{\checkmark} + m(L) - \frac{6}{L^2}g(L) \end{cases}$$

17 आघूर्णों का हल करें

$$M_1 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(2\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{12}}_{II} \tag{26.4}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(\theta_1^{\checkmark} + 2\theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{21}}_{II} \tag{26.5}$$

जहाँ समीकरणों 26.4 और 26.5 में यदि $\Delta = v_2 - v_1$ (*सापेक्ष विस्थापन*), $\psi = \Delta/L$ (*अवयव की जीवा का घूर्णन*), और $K = I/L$ (*दृढता गुणक*[1]) मानें, तो NEF *संधि समतुल्य बल* हैं; अर्थात अवयव भार को समतुल्य संधि बलों के समुच्चय से प्रतिस्थापित किया जाता है।

18 अंततः इन समीकरणों को पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) + NEF_1 \tag{26.6}$$

$$M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) + NEF_2 \tag{26.7}$$

ध्यान दें कि ψ वामावर्त होने पर धनात्मक, अन्यथा ऋणात्मक होगा।

19 समीकरणों 26.6 और 26.7 से, यदि किसी संधि का विस्थापन Δ है, तो आसन्न अवयवों के दोनों आघूर्णों के चिह्न समान होंगे। किंतु संधि के दोनों ओर स्थित अवयवों के आघूर्णों के चिह्न भिन्न होंगे।

$$\begin{aligned} \Psi_{21} &= \frac{v_2 - v_1}{2} \\ K &= \frac{I}{L} \quad \text{सापेक्ष दृढता} \\ NEF_1 &= \frac{2}{L^2}\left[Lf(L) - 3g(L)\right] \\ NEF_2 &= -\frac{1}{L^2}\left[L^2 m(L) - 4Lf(L) + 6g(L)\right] \end{aligned}$$

20 NEF_1 और NEF_2 *आबद्ध-सिरा आघूर्ण* हैं, जब $\theta_1 = \theta_2 = 0$ और $v_1 = v_2 = 0$। इन्हें §26.3.3 में पृथक रूप से व्युत्पन्न किया जाएगा। सर्वाधिक सामान्य भार प्रकारों के लिए इन्हें सारणी 26.3 में दिया गया है।

[1] आघूर्ण वितरण विधि में K को $K = 4EI/L$ तथा प्रत्यक्ष दृढता विधि में आव्यूह के रूप में परिभाषित किया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 26.3: सरल भारों के लिए संधि समतुल्य बल

भार	NEF_1	NEF_2
एकसमान भार w	$\frac{wL^2}{12}$	$-\frac{wL^2}{12}$
केंद्रीय बिंदु भार	$\frac{PL}{8}$	$-\frac{PL}{8}$

[21] समीकरणों 26.4 और 26.5 में हम देखते हैं कि अवयव के सिरे पर विकसित आघूर्णों के कारण हैं: I) सिरा-घूर्णन और विस्थापन; तथा II) आबद्ध-सिरा आघूर्ण।

[22] इन व्यंजकों को समीकरण 26.3 में प्रतिस्थापित करके कर्तन बलों का हल किया जा सकता है:

$$V_1 = \underbrace{\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_1^F}_{II} \tag{26.8}$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) + \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_2^F}_{II} \tag{26.9}$$

जहाँ

$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right]$$
$$V_2^F = -\left[\frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right] + q\right]$$

[23] यह ध्यान रखना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है कि व्युत्पन्न समीकरण निम्न पर आधारित हैं: *साम्य*, *प्रतिबल-विकृति*, और *संगतता*।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 26.1: बीम में बल-विस्थापन संबंध

$$V_1 = \underbrace{\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_1^F}_{II}$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) + \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_2^F}_{II}$$

$$M_1 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(2\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{12}}_{II}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(\theta_1^{\checkmark} + 2\theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{21}}_{II}$$

26.3.2 प्रारंभिक विकृतियों के लिए संधि-सिरा बल

[24] *तापीय* भार (अथवा प्रारंभिक विकृतियों) की उपस्थिति में संधि समतुल्य बल सरलता से इस प्रकार निर्धारित किए जा सकते हैं:

ट्रस

$$F_1^T = -AE\alpha\Delta T \qquad F_2^T = AE\alpha\Delta T$$

बीम

$$F_1^T = -AE\alpha\Delta T^{avg}; \qquad F_2^T = AE\alpha\Delta T^{avg}$$
$$M_1^T = \frac{EI\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})}{h}; \qquad M_2^T = -\frac{EI\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})}{h}$$

जहाँ α तापीय प्रसार गुणांक है और

$$T^{avg} = \frac{\Delta T^{top} + \Delta T^{bot}}{2}$$

[25] प्रारंभिक बलों (जैसे पूर्वप्रतिबलित अवयवों) के लिए पूर्वप्रतिबलन से उत्पन्न प्रारंभिक विकृति हेतु केवल $\alpha\Delta T$ निर्दिष्ट करना होता है।

[26] भार निवेश आँकड़ा संचिका में तापीय रूप से भारित ट्रस के लिए केवल $\alpha\Delta T$, और बीमों के लिए $\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})$ तथा h निर्दिष्ट करने होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

26.3.3 आनमनी अवयवों के लिए संधि समतुल्य बल

[27] पिछले समीकरणों से,

$$m(x) = \text{ काट पर लगाए गए भारों के कारण आघूर्ण } x$$
$$f(x) = \int m(x)dx; \quad g(x) = \int f(x)dx; \quad q(x) = \int p(x)dx$$
$$\text{विस्तार पर कुल भार}$$

और

$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[Lf(L) - 3g(L)\right]$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2 m(L) - 4Lf(L) + 6g(L)\right]$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right]$$
$$V_2^F = -\frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right] - q$$

26.3.3.1 एकसमान वितरित भार

[28] संपूर्ण विस्तार पर एकसमान वितरित भार w के लिए,

$$m(x) = -\frac{1}{2}wx^2; \quad f(x) = -\frac{1}{6}wx^3; \quad g(x) = -\frac{1}{24}wx^4; \quad q = wL$$

[29] प्रतिस्थापित करने पर

$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 3\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL^2}{12}$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2\left(-\frac{1}{2}wL^2\right) - 4L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) + 6\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL^2}{12}$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 2\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL}{2}$$
$$V_2^F = -\frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 2\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] - wL = \frac{wL}{2}$$

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

26.3.3.2 संकेंद्रित भार

30 $m(x)$ ज्ञात करने के लिए इकाई सोपान फलन का उपयोग करें। बाएँ सिरे से कार्यरत संकेंद्रित भार P के लिए, जिसकी दूरी a है, जहाँ $b = L - a$,

$$\begin{aligned} m(x) &= -P(x-a)H_a && \rightarrow m(L) = -Pb \\ f(x) &= -\frac{1}{2}P(x-a)^2H_a && \rightarrow f(L) = -\frac{1}{2}Pb^2 \\ g(x) &= -\frac{1}{6}P(x-a)^3H_a && \rightarrow g(L) = -\frac{1}{6}Pb^3 \end{aligned}$$

जहाँ $H_a = 0$ परिभाषित करते हैं यदि $x < a$, और $H_a = 1$ यदि $x \geq a$, तथा

$$\begin{aligned} q &= P \\ M_1^F &= \frac{2}{L^2}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 3\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = \frac{Pb^2a}{L^2} \\ M_2^F &= -\frac{1}{L^2}\left[L^2(-Pb) - 4L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) + 6\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = \frac{Pb}{1^2}\left(L^2 - 2Lb + b^2\right) = \frac{Pba^2}{L^2} \\ V_1^F &= \frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 2\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = -\frac{Pb^2}{L^3}(3L - 2b) = \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b) \\ V_2^F &= -\left(\frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 2\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] + P\right) = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b) \end{aligned}$$

31 यदि भार मध्य-विस्तार पर लगाया जाए ($a = B = L/2$), तो पिछला समीकरण सरल होकर

$$\begin{aligned} M_1^F &= -\frac{PL}{8}; & M_2^F &= \frac{PL}{8}; \\ V_1^F &= -\frac{P}{2}; & V_2^F &= -\frac{P}{2}; \end{aligned}$$

स्थिरांक पदार्थ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



डिस्कोबोलस (5वीं शताब्दी ईसा-पूर्व, प्राचीन यूनान)

तनाव की चरम अवस्था में शरीर को दर्शाता है, जहाँ विस्थापन डिस्कस फेंकने के लिए आवश्यक बलों को निर्धारित करते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

27 हस्त-गणना द्वारा दृढता

सारांश

विस्थापन विधि (अर्थात दृढता) पर आधारित दो विधियाँ 20वीं शताब्दी के आरंभ में विकसित हुईं और हस्त-गणना के अनुकूल हैं। ये विधियाँ आज तक संरचनात्मक विश्लेषण की पाठ्यपुस्तकों में परंपरागत रूप से बनी हुई हैं, यद्यपि आधुनिक काल में उनका महत्त्व मुख्यतः शैक्षणिक है। फिर भी यह अध्याय कुछ संकल्पनाओं (जैसे संयोजनों की सापेक्ष दृढताओं के आधार पर आघूर्ण वितरण) को स्पष्ट करेगा और कभी-कभी सरल संरचना के विश्लेषण की विधि भी देगा। दोनों विधियाँ आनमनी अवयवों तक सीमित हैं। अंतिम खंड ढाल-विक्षेप (Gauss-Jordan) और आघूर्ण वितरण (Gauss-Seidel) विधियों के हलों के गणितीय समकक्षों पर विचार करता है।

27.1 परिचय 1052
27.2 ढाल-विक्षेप; प्रत्यक्ष हल 1052
27.2.1 उदाहरण 1054
27.3 आघूर्ण वितरण 1063
27.3.1 परिचय 1063
27.4 ढाल-विक्षेप; आघूर्ण वितरण; Gauss-Seidel 1069
27.4.1 उदाहरण 27.8: ढाल-विक्षेप/आघूर्ण वितरण/Gauss-Seidel . . . 1069

27.1 परिचय

1 पिछले अध्याय में आनमनी अवयवों के ज्ञात विस्थापनों के पदों में बल-संबंध विकसित करके दृढता (विस्थापन) विधि की आधारभूमि तैयार की गई थी। कर्तन और ऐंठन के समतुल्य संबंध अध्याय 23 में विकसित किए गए थे।

2 लचीलापन (बल) विधि केवल हस्त-गणना के अनुकूल है, जबकि दृढता विधि के दो रूप हैं: हस्त-गणना और कंप्यूटर प्रोग्राम द्वारा स्वचालन (प्रत्यक्ष दृढता विधि, अध्याय 44)।

3 अतः इस अध्याय में पारंपरिक हस्त-गणना विधियाँ—ढाल-विक्षेप और आघूर्ण वितरण—दी जाएँगी।

27.2 ढाल-विक्षेप; प्रत्यक्ष हल

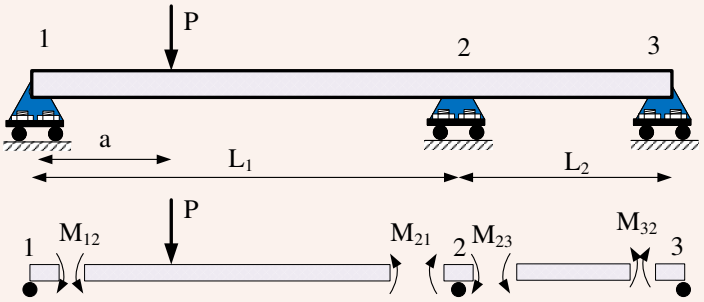
ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §11.5.2 देखें

4 इस विधि को Bendixen, 1914 ने व्युत्पन्न और Maney, 1915 ने परिष्कृत किया (§11.5.2)।

5 विधि को पहले चित्र 27.1 द्वारा समझाया गया है, जहाँ एक साधारण आधारित बीम प्रथम कोटि तक स्थैतिकतः अनिर्धार्य है।

हम शुद्धगतिक अनिर्धार्यता की कोटि पहचानते हैं (§40.5): आधारों पर तीन घूर्णन θ_1, θ_2 और θ_3 (अर्थात *तीन स्वतंत्रता कोटियाँ*)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 27.1: ढाल-विक्षेप विधि का व्याख्यात्मक उदाहरण

6 अवरोधों के दोनों ओर संरचना को विभाजित करके मुक्त-पिंड आरेख बनाएँ और प्रत्येक खंड के सिरे पर धनात्मक आघूर्ण मानें। तब आघूर्णों को अज्ञात घूर्णनों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

7 समीकरणों 26.6 और 26.7 का उपयोग करने पर

$$\begin{aligned} M_{12} &= 2EK_{12}(2\theta_1 + \theta_2) + FEM_{12}; \quad M_{21} = 2EK_{12}(\theta_1 + 2\theta_2) + FEM_{21}; \\ M_{23} &= 2EK_{23}(2\theta_2 + \theta_3); \qquad\qquad M_{32} = 2EK_{23}(\theta_2 + 2\theta_3); \end{aligned} \tag{27.1}$$

स्मरण करें कि $K = I/L$।

8 हमारे पास 3 अज्ञात θ_1, θ_2 और θ_3 हैं तथा साम्य के तीन समीकरण चाहिए[1]। हम प्रत्येक *आधार के लिए एक साम्य समीकरण* लिखते हैं

$$\begin{aligned} M_{12} &= 0 \\ M_{21} + M_{23} &= 0 \\ M_{32} &= 0 \end{aligned}$$

प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 4K_{12} & 2K_{12} & 0 \\ 2K_{12} & 4(K_{12}+K_{23}) & 2K_{23} \\ 0 & 2K_{23} & 4K_{23} \end{bmatrix}}_{\text{दृढता आव्यूह}} \begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \\ \theta_3^? \end{Bmatrix}}_{F_{int}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{FEM_{12}}{2EK_{12}} \\ -\frac{FEM_{21}}{2E} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{F_{ext}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

जहाँ आबद्ध-सिरा आघूर्ण पृथक रूप से निर्धारित किया जा सकता है। यह वैश्विक *साम्य* का समीकरण है।

[1]तीन आघूर्ण समीकरण विधि (§25.3) से समानता देखें, जहाँ संधि पर घूर्णन-संगतता समीकरण लिखा था, जबकि यहाँ साम्य समीकरण लिखा जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[9] पहले विस्थापनों का हल करते हैं और फिर समीकरण 27.1 में प्रतिस्थापित करके बीम खंड के प्रत्येक सिरे पर आघूर्ण निर्धारित करते हैं।

[10] परिकलन की आवश्यकता लचीलापन विधि (अथवा संगत विरूपण विधि) की अपेक्षा बहुत कम है, क्योंकि बल-विस्थापन संबंधों को अंतर्निहित रूप से सम्मिलित किया गया है (यद्यपि यहाँ स्थैतिक और शुद्धगतिक अज्ञातों की तुलना की जा रही है)।

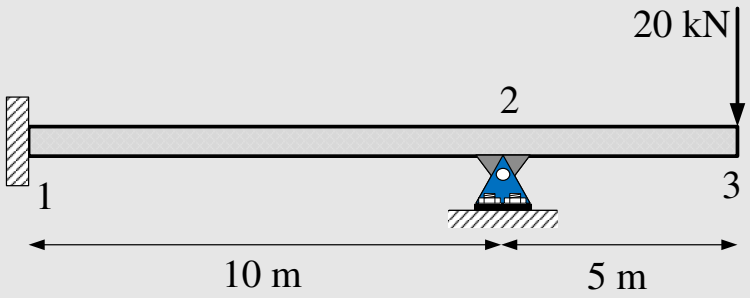
परिभाषा 27.1: ढाल-विक्षेप विधि

1. विक्षेपित आकृति का रेखाचित्र बनाएँ।
2. आधारों की अज्ञात स्वतंत्रता कोटियाँ (घूर्णन और विक्षेप) पहचानें।
3. सभी आधारों पर सिरा-आघूर्णों के पदों में साम्य समीकरण लिखें।
4. सिरा-आघूर्णों को आधार-घूर्णनों, विक्षेपों और आबद्ध-सिरा आघूर्णों के पदों में व्यक्त करें।
5. पिछले चरण में प्राप्त व्यंजकों को साम्य समीकरणों में प्रतिस्थापित करें।
6. अज्ञात आधार-घूर्णन और/अथवा विक्षेप निर्धारित करने के लिए साम्य समीकरण हल करें।
7. सिरा-आघूर्ण निर्धारित करने के लिए ढाल-विक्षेप समीकरणों का उपयोग करें।
8. आघूर्ण आरेख बनाएँ; ढाल-विक्षेप आघूर्णों और आघूर्ण आरेख की चिह्न परिपाटियों के अंतर का ध्यान रखें।

27.2.1 उदाहरण

27.2.1.1 उदाहरण 27.1: कैंटिलीवर बीम

हमें निम्न बीम के लिए M_{12} निर्धारित करना है



1. बीम तृतीय कोटि तक शुद्धगतिकतः अनिर्धार्य है (θ_2, Δ_3, θ_3); किंतु लटकते भाग को +100 kN.m के

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आबद्ध-सिरा आघूर्ण से आधार 2 पर प्रतिस्थापित करने पर शुद्धगतिक अनिर्धार्यता की कोटि घटकर एक (θ_2) हो जाती है।

2. साम्य संबंध $M_{21} + M_{23} = 0$ अथवा $M_{21} + 100 = 0$ है।
3. घूर्णनों के पदों में अवयवों के सिरा-आघूर्ण हैं (समीकरण 26.6 और 26.7)

$$M_{21} = 2EK_{12}(\theta_1 + 2\theta_2) = \frac{4}{10}EI\theta_2 \quad \theta_2 \text{ का हल करें}$$
$$M_{12} = 2EK_{12}(2\theta_1 + \theta_2) = \frac{2}{10}EI\theta_2 \quad \text{सिरा-आघूर्ण का हल करें}$$

4. साम्य समीकरणों में प्रतिस्थापित करके θ_2 का हल करें।

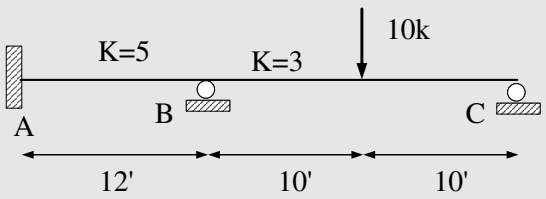
$$\theta_2 = \frac{10}{4EI}M_{21}$$
$$= \frac{10}{4EI}(-100) = -\frac{250}{EI}$$

(दक्षिणावर्त घूर्णन: -ve)

5. प्रतिस्थापित करके M_{12} का हल करें।

$$M_{12} = \frac{2}{10}EI\theta_2 = -\frac{2}{10}EI\frac{250}{EI} = -50 \text{ kN.m}$$

27.2.1.2 उदाहरण 27.2: सतत बीम



1. FEM $= PL/8 = (10)(20)/8 = 25$
2. साम्य समीकरण

$$M_{BA} + M_{BC} = 0; \quad M_{CB} = 0$$

3. आघूर्ण व्यंजक

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\theta_B = 2EK_{AB}\theta_B = 10E\theta_B$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_A) = 4EK_{AB}\theta_B = 20E\theta_B$$
$$M_{BC} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_C) + 25 = 4EK_{BC}\theta_B + 2EK_{BC}\theta_C + 25 = 12E\theta_B + 6E\theta_C + 25$$
$$M_{CB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_C + \theta_B) - 25 = 4EK_{BC}\theta_C + 2EK_{BC}\theta_B - 25 = 6E\theta_B + 12E\theta_C - 25$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. साम्य समीकरणों में प्रतिस्थापित करें

$$\begin{cases} 32E\theta_B + 6E\theta_C = -25 \\ 6E\theta_B + 12E\theta_C = 25 \end{cases}$$

5. हल करने पर

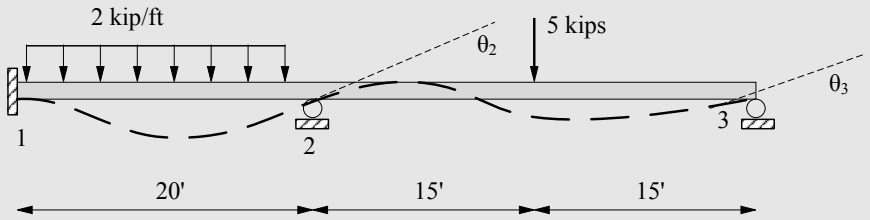
$$\theta_B = -\frac{75}{58E} = -\frac{1.293}{E}$$
$$\theta_C = -\frac{475}{174E} = \frac{2.730}{E}$$

6. आघूर्ण प्राप्त करने के लिए प्रतिस्थापित करें।

$$M_{AB} = 10E\theta_B = -10E\frac{75}{58E} = -12.9310$$
$$M_{BA} = 20E\theta_B = -20E\frac{75}{58E} = -25.8621$$
$$M_{BC} = 12E\theta_B + 6E\theta_c + 25 = -12E\frac{75}{58E} + 6E\frac{475}{174E} + 25 = 25.8621$$
$$M_{CB} = 6E\theta_B + 12E\theta_C - 25 = -6E\frac{75}{58E} + 12\frac{475}{174E} - 25 = 0\checkmark$$

27.2.1.3 उदाहरण 27.3: दो-विस्तार बीम

हमें निम्न बीम का आघूर्ण आरेख बनाना है।



1. अज्ञात θ_2 और θ_3 हैं।
2. साम्य संबंध $M_{21} + M_{23} = 0$ और $M_{32} = 0$ हैं।
3. आबद्ध-सिरा आघूर्ण हैं

$$FEM_{12} = -FEM_{21} = \frac{wL^2}{12} = \frac{(2)(20)^2}{12} = 66.67 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{23} = -FEM_{32} = -\frac{PL}{8} = \frac{(5)(30)}{8} = 18.75 \text{ k.ft}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. घूर्णनों के पदों में अवयवों के सिरा-आघूर्ण हैं (समीकरण 26.6 और 26.7)

$$M_{12} = 2EK_{12}(\theta_2) + FEM_{12} = \frac{2EI}{L_1}\theta_2 + FEM_{12} = \frac{EI}{10}\theta_2 + 66.67 \quad \text{प्रयुक्त नहीं}$$
$$M_{21} = 2EK_{12}(2\theta_2) + FEM_{21} = \frac{4EI}{L_1}\theta_2 + FEM_{21} = \frac{EI}{5}\theta_2 - 66.67$$
$$M_{23} = 2EK_{23}(2\theta_2 + \theta_3) + FEM_{23} = \frac{2EI}{L_2}(2\theta_2 + \theta_3) + FEM_{23} = \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + 18.75$$
$$M_{32} = 2EK_{23}(\theta_2 + 2\theta_3) + FEM_{32} = \frac{2EI}{L_2}(\theta_2 + 2\theta_3) + FEM_{32} = \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 - 18.75$$

5. साम्य समीकरणों में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{EI}{5}\theta_2 - 66.67 + \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + 18.75 = 0$$
$$\frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 - 18.75 = 0$$

अथवा

$$\underbrace{EI\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{\text{दृढता आव्यूह}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 718.8 \\ 281.25 \end{Bmatrix}}_{\text{बाह्य बल}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

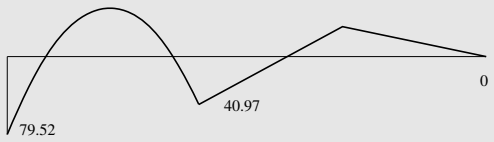
आंतरिक बल

जिससे $EI\theta_2 = 128.48$ और $EI\theta_3 = 76.38$ प्राप्त होंगे।

6. आघूर्णों के लिए पुनः प्रतिस्थापित करने पर

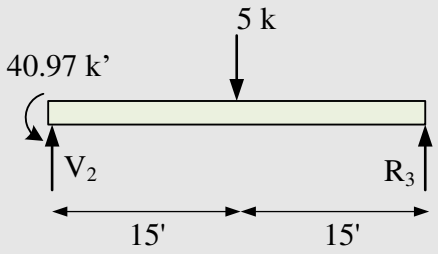
$$M_{12} = \frac{128.48}{10} + 66.67 = 79.52 \text{ k.ft}$$
$$M_{21} = \frac{128.48}{5} - 66.67 = -40.97 \text{ k.ft}$$
$$M_{23} = \frac{128.48}{7.5} + \frac{76.38}{15} + 18.75 = 40.97 \text{ k.ft}\checkmark$$
$$M_{32} = \frac{128.48}{15} + \frac{76.38}{7.5} - 18.75 = 0 \text{ k.ft}\checkmark$$

ध्यान दें कि अंतिम दो समीकरण केवल परिकलनों की जाँच के लिए लिखे गए थे।



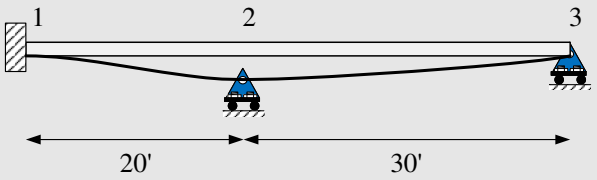
7. आरेख पूर्ण करने के लिए मध्य-विस्तार आघूर्ण को साम्य समीकरणों से पृथक रूप से परिकलित करना होगा।
8. 3 पर प्रतिक्रिया स्थैतिकी से प्राप्त होती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



$$15(5) - 30R_3 - 40.97 = 0 \Rightarrow R_3 = 1.134$$
$$V_2 = 5 - 1.134 = 3.77$$

27.2.1.4 उदाहरण 27.4: दो-विस्तार बीम, प्रारंभिक विक्षेप



1. चूँकि हम रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण कर रहे हैं, आधार-अवसादन के लिए बीम का पृथक विश्लेषण करके प्राप्त आघूर्णों को लगाए गए भारों के कारण आघूर्णों में जोड़ा जा सकता है।
2. अज्ञात θ_2 और θ_3 हैं।
3. साम्य संबंध $M_{21} + M_{23} = 0$ और $M_{32} = 0$ हैं।
4. घूर्णनों के पदों में अवयवों के सिरा-आघूर्ण हैं (समीकरण 26.6 और 26.7)

$$\begin{aligned}
M_{12} &= 2EK_{12}\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\left(\theta_2 + 3\frac{0.5}{20}\right) \\
&= \frac{EI}{10}\theta_2 + \frac{3EI}{400} \\
M_{21} &= 2EK_{12}\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\left(2\theta_2 + 3\frac{0.5}{20}\right) \\
&= \frac{EI}{5}\theta_2 + \frac{3EI}{400} \\
M_{23} &= 2EK_{23}\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{0.5}{30}\right) \\
&= \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + \frac{EI}{300} \\
M_{32} &= 2EK_{23}\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{0.5}{30}\right) \\
&= \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 + \frac{EI}{300}
\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5. साम्य समीकरणों में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{EI}{5}EI\theta_2 + \frac{3EI}{400} + \frac{EI}{15}\theta_3 + \frac{EI}{300} = 0$$
$$\frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 + \frac{5EI}{300} = 0$$

अथवा

$$\underbrace{\underbrace{EI\begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{\text{दृढता आव्यूह}} - \underbrace{EI\begin{Bmatrix} -\frac{13}{4} \\ -1 \end{Bmatrix}}_{\text{बाह्य बल}}}_{\text{आंतरिक बल}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

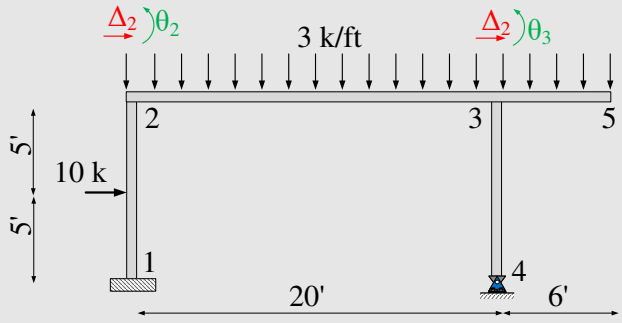
जिससे $\theta_2 = -\frac{5.5}{180} = -0.031$ radians और $\theta_3 = \frac{-1+\frac{5.5}{9}}{40} = -0.0097$ radians प्राप्त होंगे।

6. अतः अवसादन के कारण अतिरिक्त आघूर्ण हैं

$$M_{12} = \frac{EI}{10}(-0.031) + \frac{3EI}{400} = 0.0044EI$$
$$M_{21} = \frac{EI}{5}(-0.031) + \frac{3EI}{400} = 0.0013EI$$
$$M_{23} = \frac{EI}{7.5}(-0.031) + \frac{EI}{15}(-0.0097) + \frac{EI}{300} = -0.0013EI\checkmark$$
$$M_{32} = \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}(0.0097) + \frac{EI}{300} = 0.\checkmark$$

27.2.1.5 उदाहरण 27.5: ढाँचा

निम्न ढाँचे के सिरा-आघूर्ण निर्धारित करें, जहाँ ऊर्ध्वाधर अवयवों के लिए $I = 60$ in^4 और क्षैतिज अवयवों के लिए 24 in^4 है।



1. 35 कैंटिलीवर के प्रभाव को उसके सिरा-आघूर्ण से प्रतिस्थापित करके सम्मिलित किया जा सकता है।

$$M_3 = -wL\frac{L}{2} = -(3)(6)(3) = -54 \text{ k.ft}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. अज्ञात विस्थापन और घूर्णन हैं

   - संधि 2 पर Δ_2 और θ_2।
   - संधियों 3 और 4 पर θ_3 और θ_4।

   सममिति के अभाव के कारण ढाँचे में पार्श्व विस्थापन होगा और अक्षीय विरूपणों की उपेक्षा करने पर $\Delta_2 = \Delta_3$।

3. साम्य संबंध हैं

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{23} &= 0 \\ M_{32} + M_{34} &= -54 \\ M_{43} &= 0 \\ V_{12} + V_{43} - 10 &= 0 \end{aligned}$$

   अतः हमारे पास चार अज्ञात विस्थापन और चार समीकरण हैं। किंतु अंतिम दो समीकरण कर्तन बलों के पदों में हैं और हमें उन्हें सिरा-आघूर्णों के पदों में चाहिए। इसे निम्न साम्य संबंधों से प्राप्त किया जा सकता है

$$V_{12} = \frac{M_{12} + M_{21} + 50}{L_{12}}$$
$$V_{43} = \frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}}$$

   अतः अब चारों समीकरण आघूर्णों के पदों में हैं।

4. अवयव 23 के आबद्ध-सिरा आघूर्ण हैं

$$M_{21}^F = -\frac{PL}{8} = -\frac{-(10)(10)}{8} = 12.5 \text{ k.ft}$$
$$M_{23}^F = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{-(3)(20)^2}{12} = 100 \text{ k.ft}$$

5. घूर्णनों के पदों में अवयवों के सिरा-आघूर्ण हैं (समीकरण 26.6 और 26.7)

$$M_{12} = 2EK_{12}\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{12}^F = 0.2EI(\theta_2 - 0.3\Delta_2) + 12.5$$
$$M_{21} = 2EK_{12}\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{21}}\right) + M_{21}^F = 0.2EI(2\theta_2 - 0.3\Delta_2) - 12.5$$
$$M_{23} = 2EK_{23}\,(2\theta_2 + \theta_3) + M_{23}^F = 0.1EI(2\theta_2 + \theta_3) + 100.$$
$$M_{32} = 2EK_{32}\,(\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32}^F = 0.1EI(\theta_2 + 2\theta_3) - 100.$$
$$M_{34} = 2EK_{34}\left(2\theta_3 + \theta_4 - \frac{3\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI(2\theta_3 + \theta_4 - 0.3\Delta_2)$$
$$M_{43} = 2EK_{43}\left(\theta_3 + 2\theta_4 - \frac{3\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI(\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2)$$

6. साम्य समीकरणों में प्रतिस्थापित करके EI से भाग देने पर

$$6\theta_2 + \theta_3 - 0.6\Delta_2 = -\frac{875}{EI}$$
$$\theta_2 + 6\theta_3 + 2\theta_4 - 0.6\Delta_2 = \frac{460}{EI}$$
$$\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2 = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और अंतिम साम्य समीकरण V_{12} तथा V_{43} प्रतिस्थापित करके और $10/EI$ से गुणा करके प्राप्त होता है:

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 0.4\Delta_2 = -\frac{83.3}{EI}$$

अथवा

$$\underbrace{EI\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & -0.6 \\ 1 & 6 & 2 & -0.6 \\ 0 & 1 & 2 & -0.3 \\ 1 & 1 & 1 & -0.4 \end{bmatrix}}_{\text{दृढता आव्यूह}} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -875 \\ 460 \\ 0 \\ -83.3 \end{Bmatrix}$$

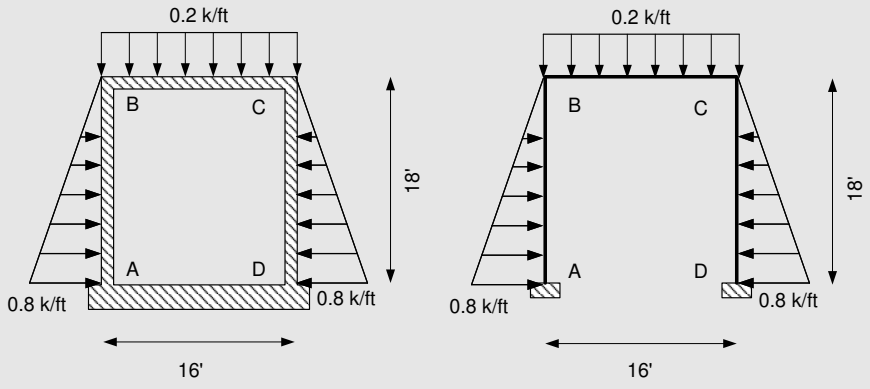
जिससे प्राप्त होगा

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -294.8 \\ 68.4 \\ -240.6 \\ -1,375.7 \end{Bmatrix}$$

7. ढाल-विक्षेप समीकरणों में प्रतिस्थापन से सिरा-आघूर्ण प्राप्त होते हैं

$$\begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{23} \\ M_{32} \\ M_{34} \\ M_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36.0 \\ -47.88 \\ 47.88 \\ -115.80 \\ 61.78 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

27.2.1.6 उदाहरण 27.6: बॉक्स कल्वर्ट



1. सममिति से $\theta_B = -\theta_C$, और आधार पर $\theta_A = \theta_D = 0$; अतः केवल एक अज्ञात है (कोई पार्श्व विस्थापन या सापेक्ष ऊर्ध्वाधर विस्थापन नहीं)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. आबद्ध-सिरा आघूर्ण हैं

$$FEM_{BC} = \frac{wL^2}{12} = \frac{(0.2)(16)^2}{12} = 4.267 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(0.2)(16)^2}{12} = -4.267 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{AB} = \frac{wL^2}{20} = \frac{(0.8)(18)^2}{20} = 12.96 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{BA} = \frac{wL^2}{30} = \frac{(0.8)(18)^2}{30} = -8.64 \text{ k.ft}$$

3. आघूर्ण हैं

$$M_{BC} = \frac{2EI}{16}(2\theta_B + \underbrace{\theta_C}_{-\theta_B}) + 4.267 = \frac{EI}{8}\theta_B + 4.267$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{18}(2\theta_B + 0) - 8.64 = \frac{2EI}{9}\theta_B - 8.64$$
$$M_{AB} = \frac{2EI}{18}(\theta_B) + 12.96$$

4. संधि B पर साम्य

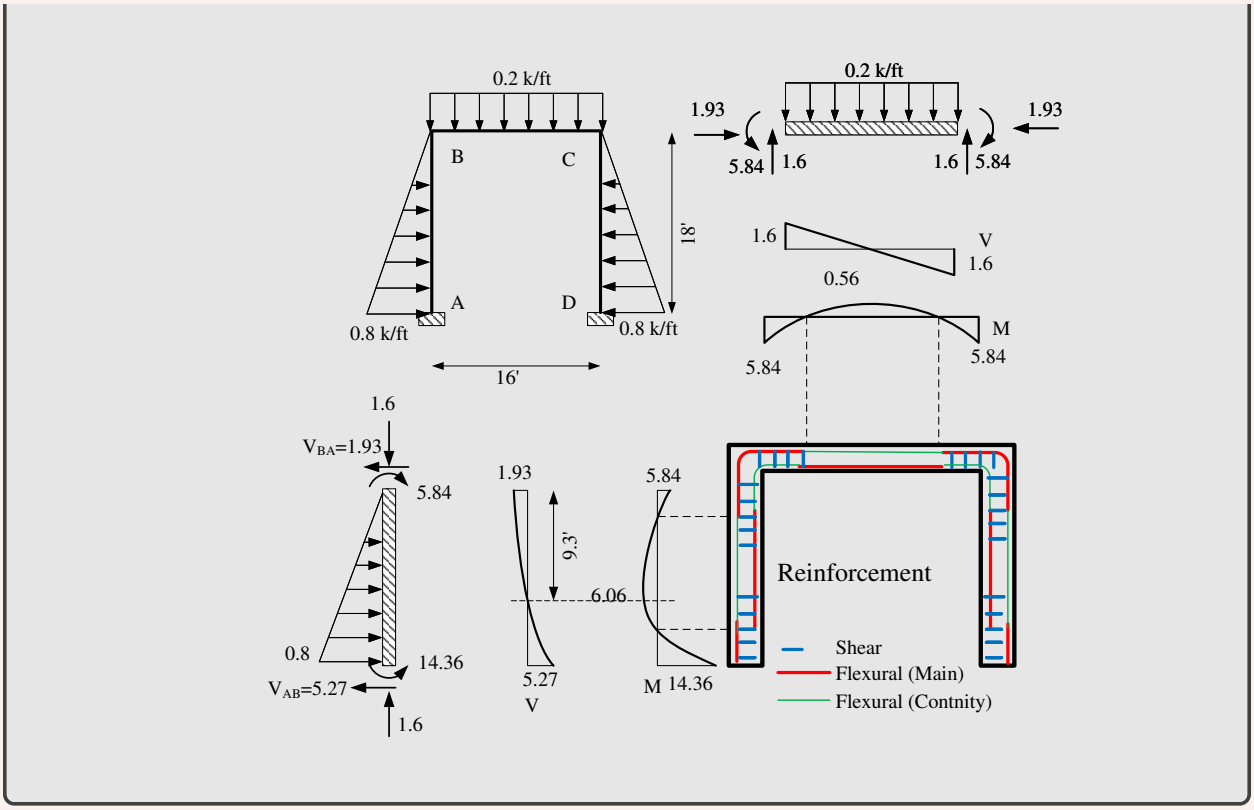
$$\begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ \tfrac{2EI}{9}\theta_B - 8.64 + \tfrac{EI}{8}\theta_B + 4.267 &= 0 \\ \theta_B &= -\tfrac{12.61}{EI} \end{aligned}$$

5. आघूर्ण प्राप्त करने के लिए θ_B प्रतिस्थापित करें।

$$M_{BC} = \frac{EI}{8}\left(\frac{12.61}{EI}\right) + 4.266 = 5.84 \text{ k.ft}$$
$$M_{AB} = \frac{EI}{9}\left(\frac{12.61}{EI}\right) + 12.96 = 14.36 \text{ k.ft}$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{9}\left(\frac{12.61}{EI}\right) - 8.64 = -5.84 \text{ k.ft}$$

6. अवयव बल स्थैतिकी से निर्धारित किए जाते हैं। ध्यान दें कि आघूर्ण आरेख अब तथाकथित “अभिकल्प” चिह्न परिपाटी पर आधारित है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



27.3 आघूर्ण वितरण

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §11.5.3 देखें

27.3.1 परिचय

11 ढाल-विक्षेप विधि में $n \times n$ आव्यूह का प्रतिलोम लेना पड़ता है। जब केवल स्लाइड रूल अथवा यांत्रिक परिकलक उपलब्ध थे ($\simeq$ 1030's), तब सरल हल-प्रक्रिया की आवश्यकता थी।

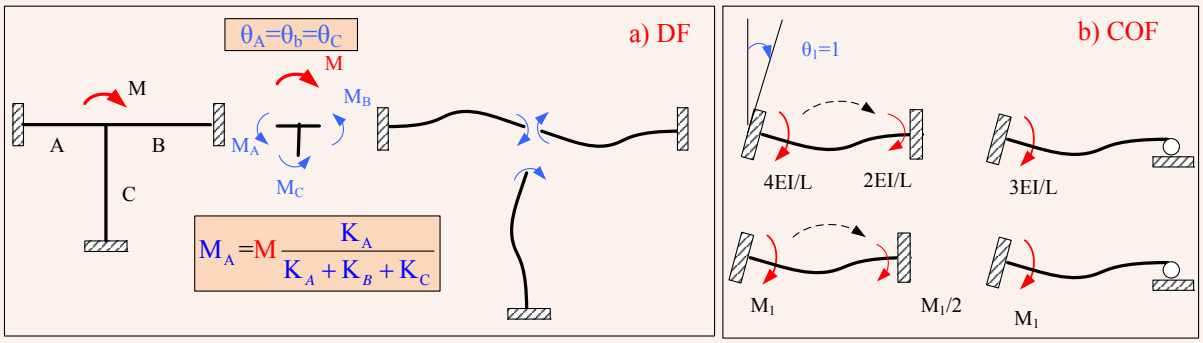
12 व्यावहारिक दृष्टि से, ढाल-विक्षेप विधि के सापेक्ष आघूर्ण-वितरण विधि का वही संबंध है जो रैखिक समीकरणों के हल में Gaus-Jordan विधि के सापेक्ष Gaus-Seidel विधि का है। आव्यूह के प्रत्यक्ष प्रतिलोमन को पुनरावृत्तीय हल से प्रतिस्थापित किया जाएगा।

13 भौतिक रूप से इसका आशय है सभी संधियों को *आबद्ध करना* → उन्हें क्रमशः (एक समय में एक) *मुक्त करना* → आंतरिक आघूर्णों को तब तक *"वितरित" और संतुलित करना*, जब तक सभी संधियाँ अपनी अंतिम (अथवा लगभग अंतिम) साम्य स्थिति तक न घूम जाएँ[2]।

14 विधि को बेहतर समझने के लिए पहले कुछ प्रमुख पद परिभाषित करने होंगे, चित्र 27.2।

[2]यह Southwell की विधि के अनुरूप एक *विश्रांति तकनीक* है (Southwell, 1935)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 27.2: आघूर्ण वितरण की प्रमुख संकल्पनाएँ

चिह्न परिपाटी

15 चिह्न परिपाटी ढाल-विक्षेप विधि में अपनाई गई परिपाटी के समान है; *अवयव* के सिरे पर वामावर्त आघूर्ण धनात्मक है।

आबद्ध-सिरा आघूर्ण

16 आबद्ध-सिरा आघूर्ण पुनः वही बल-समुच्चय है जिसे ढाल-विक्षेप विधि में दोनों सिरों पर दृढता से जुडे बीम के लिए परिभाषित किया गया था।

17 चिह्न परिपाटी के अनुरूप, आबद्ध-सिरा आघूर्ण लगाए गए भार के कारण बीम के सिरों पर उत्पन्न आघूर्ण हैं (बीम को दृढता से जुडा मानते हुए)।

दृढता गुणक

18 *दृढता गुणक को बीम के एक सिरे को एक रेडियन के इकाई कोण से घुमाने के लिए आवश्यक आघूर्ण, जबकि दूसरा सिरा आबद्ध हो* के रूप में परिभाषित करते हैं। समीकरण 26.4 में $\theta_2 = v_1 = v_2 = 0$ और $\theta_1 = 1$ रखने पर

$$K = \frac{4EI}{L} \quad \text{दूरस्थ सिरा आबद्ध}$$

19 यह ढाल-विक्षेप विधि में दी गई परिभाषा (I/L) से थोडा भिन्न है।

20 यदि बीम का दूरस्थ सिरा आबद्ध के स्थान पर हिंजित हो, तो *लघुकृत दृढता गुणक* प्राप्त होगा। समीकरणों 26.4 और 26.5 में $M_2 = v_1 = v_2 = 0$ रखने पर

$$M_2 = \frac{2EI_z}{L}(\theta_1 + 2\theta_2) = 0$$
$$\Rightarrow \theta_2 = -\frac{\theta_1}{2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

M_1 में प्रतिस्थापित करने पर

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{2EI_z}{L}(2\theta_1+\theta_2)\\ \theta_2 &= -\frac{\theta_1}{2}\end{aligned}\right\} M_1 = \frac{3EI}{L}\theta_1 \text{ दूरस्थ सिरा पिनित}$$

21 इस लघुकृत दृढता $\frac{3EI}{L}$ की बीम की दृढता से तुलना करके *लघुकृत दृढता गुणक* परिभाषित करते हैं

$$\text{लघुकृत दृढता गुणक} = \frac{K_{red}}{K} = \frac{3}{4} \text{ दूरस्थ सिरा पिनित}$$

वितरण गुणक (DF)

22 यदि किसी दृढ-संयोजन संधि से कुल n अवयव जुडे हों, तो साम्य से:

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$$

किंतु समीकरण 26.6 से, और *अवयव के दूसरे सिरे को आबद्ध मानने* पर,

$$M = K_1\theta + K_2\theta + \cdots + K_n\theta$$

अथवा

$$DF_i = \frac{M_i}{M} = \frac{K_i}{\Sigma K_i}$$

23 अतः यदि किसी संधि पर आघूर्ण M लगाया जाए, तो इस संधि से जुडे अवयव द्वारा वहन किया गया M का भाग वितरण गुणक के समानुपाती होता है। अवयव जितना अधिक दृढ होगा, वह उतना ही अधिक आघूर्ण वहन करेगा।

24 इसी प्रकार आबद्ध सिरे के लिए $DF = 0$, और पिन आधार के लिए $DF = 1$ है।

वहन गुणक

25 पुनः समीकरणों 26.6 और 26.7 से

$$\begin{aligned} M_1 &= 2EK(2\theta_1+\theta_2-3\psi)+M_1^F\\ M_2 &= 2EK(\theta_1+2\theta_2-3\psi)+M_2^F\end{aligned}$$

यदि बीम का एक सिरा अवरुद्ध हो ($\theta_2=\psi=0$) और कोई अवयव भार न हो, तो पिछले समीकरण सरल होकर

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= 2EK(2\theta_1)\\ M_2 &= 2EK(\theta_1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow M_2 = \frac{1}{2}M_1$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[26] अतः इस स्थिति में वहन गुणक M के उस अंश को निरूपित करता है जो घूमते सिरे से आबद्ध सिरे तक "वहन" होता है।

$$CO = \frac{1}{2} \quad \text{दूरस्थ सिरा आबद्ध}$$

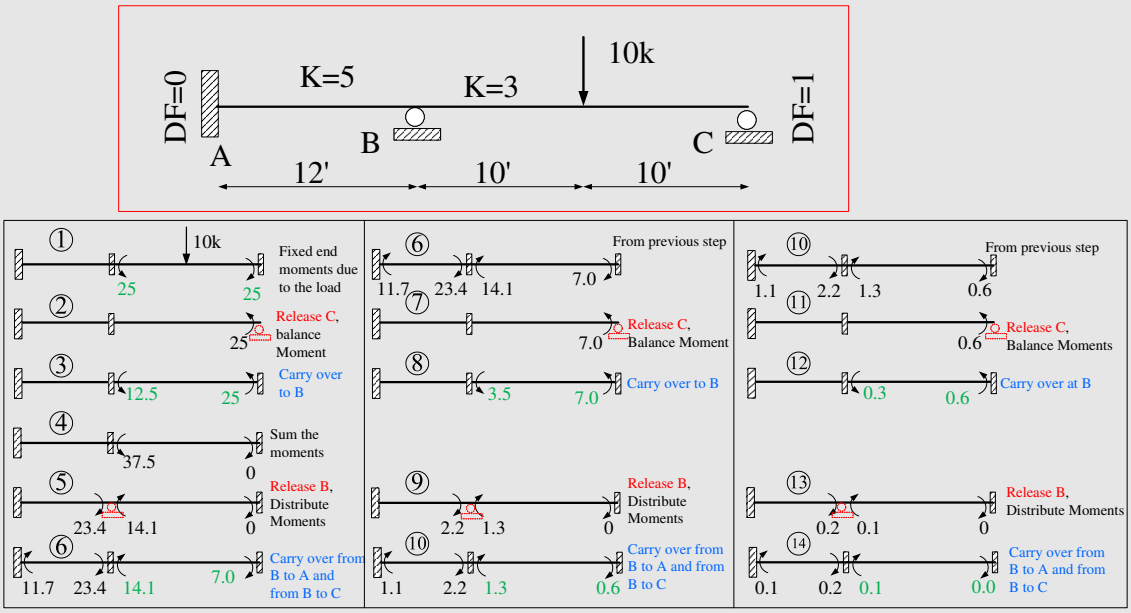
[27] यदि दूरस्थ सिरा पिनित हो, तो कोई वहन नहीं होता।

परिभाषा 27.2: आघूर्ण वितरण

1. सभी घूर्णनों और स्थानांतरणों को अवरुद्ध करें।
2. भार लगाएँ और आबद्ध-सिरा आघूर्ण निर्धारित करें (जो अवयव भारण अथवा आधार-स्थानांतरण से उत्पन्न हो सकते हैं)।
3. किसी संधि i पर साम्य संतुष्ट नहीं है, $M^F_{left} \neq M^F_{right}$, और परिणामी आघूर्ण M_i है।
4. संधि पर $-M_i$ लगाकर साम्य लागू करते हैं; दूसरे शब्दों में संधि पर बलों को संतुलित करते हैं।
5. M_i का कितना भाग संधि i से जुड़े प्रत्येक अवयव में जाता है, यह वितरण गुणक पर निर्भर करता है।
6. किंतु बीम के एक सिरे पर $-M_i$ का एक भाग लगाने पर, जबकि दूसरा सिरा अभी अवरुद्ध है, समीकरण 26.6 से उस आघूर्ण का आधा दूसरे सिरे तक भी वहन होना चाहिए।
7. इसके बाद संधि i को आबद्ध करके संधि j पर जाते हैं, जहाँ ये संक्रियाएँ दोहराई जाती हैं
   (a) आघूर्णों का योग करें।
   (b) आघूर्णों को संतुलित करें।
   (c) आघूर्ण वितरित करें (K, DF)।
   (d) आघूर्णों का वहन करें (CO)।
   (e) संधि आबद्ध करें।
8. उपर्युक्त संक्रियाएँ तब तक दोहराएँ जब तक सभी संधियाँ संतुलित न हो जाएँ; फिर सभी आघूर्णों का योग करें।
9. इन संक्रियाओं को उचित सारणी द्वारा सरलता से किया जा सकता है।

27.3.1.1 उदाहरण 27.7: सतत बीम

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



1. इस उदाहरण के लिए (जिसका पहले §27.2.1.2 में ढाल-विक्षेप विधि से विश्लेषण किया गया था), आबद्ध-सिरा आघूर्ण इस प्रकार परिकलित होते हैं:

$$M^F_{BC} = \frac{PL}{8} = \frac{(10)(20)}{8} = +25.0 \text{ k.ft}$$
$$M^F_{CB} = -25.0 \text{ k.ft}$$

2. प्रत्येक विस्तार में सापेक्ष दृढता दी होने के कारण वितरण गुणक हैं

$$DF_{AB} = \frac{K_{AB}}{\Sigma K} = \frac{5}{\infty + 5} = 0,$$
$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{5}{5+3} = 0.625,$$
$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{3}{5+3} = 0.375,$$
$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{\Sigma K} = \frac{3}{3} = 1.$$

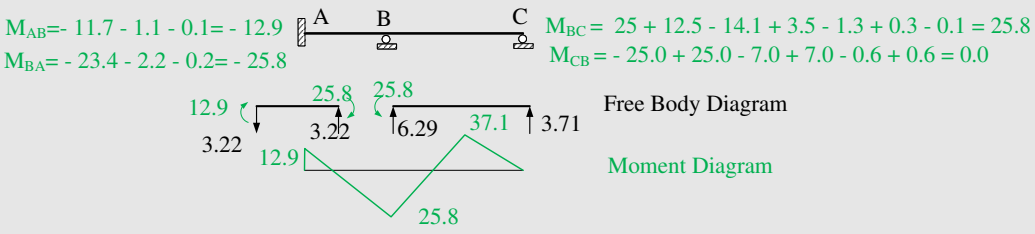
3. संतुलन परिकलन नीचे दर्शाए गए हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संधि	A		B		C	चरण	सं-तुलन	वहन
अवयव	AB	BA	BC	CB				
K	5	5	3	3				
DF	0	0.625	0.375	1				
FEM			+25.0	-25.0		①		
			+12.5	+25.0		② ③	C	BC
	-11.7	-23.4	-14.1	-7.0		④ ⑤ ⑥	B	AB; CB
			+3.5	+7.0		⑦ ⑧	C	BC
	-1.1	-2.2	-1.3	-0.6		⑨ ⑩ ❶	B	AB; CB
			+0.3	+0.6		❷ ❸	C	BC
	-0.1	-0.2	-0.1			❹	B	AB
कुल	-12.9	-25.8	+25.8	0				

4. ध्यान दें कि हमें ढाल-विक्षेप विधि §27.2.1.2 से प्राप्त परिणामों के समान परिणाम मिलते हैं।
5. प्रत्येक संधि पर $\Sigma M = 0$ की जाँच करके उत्तरों की शुद्धता का कुछ सीमा तक परीक्षण किया जा सकता है। किंतु *यद्यपि अंतिम उत्तर प्रत्येक संधि पर इस समीकरण को संतुष्ट करते हैं, यह प्रारंभिक आबद्ध-सिरा आघूर्णों की किसी प्रकार की जाँच नहीं है।* अतः संतुलन संक्रिया आरंभ करने से पहले इन आघूर्णों को बहुत सावधानी से जाँचना चाहिए। कभी-कभी संतुलन में परस्पर-क्षतिपूरक त्रुटियाँ भी हो सकती हैं, जो प्रत्येक संधि पर $\Sigma M = 0$ की जाँच में प्रकट नहीं होंगी।
6. अंतिम कर्तन और आघूर्ण आरेख बनाने के लिए पहले परिकलित आघूर्णों सहित प्रत्येक बीम खंड का मुक्त-पिंड आरेख बनाते हैं, फिर स्थैतिकी से प्रतिक्रियाएँ ज्ञात करते हैं:

$$12.9 + 25.8 - 12V_A = 0 \Rightarrow V_A = R_A = 3.22 \text{ k} \downarrow$$
$$V_A + V_B^L = 0 \Rightarrow V_B^L = -3.22 \text{ k} \uparrow$$
$$25.8 + (10)(10) - 20V_B^R = 0 \Rightarrow V_B^R = 6.29 \text{ k} \uparrow$$
$$6.29 + V_C - 10 = 0 \Rightarrow V_C = R_C 3.71 \text{ k} \uparrow$$
$$-V_B^L - V_B^R + R_B = 0 \Rightarrow R_B = 9.51 \text{ k} \uparrow$$
$$\text{जाँच: } R_A + R_B + R_C - 10 = -3.22 + 9.51 + 3.71 - 10 = 0 \checkmark$$
$$M_{BC}^{+} = (3.71)(10) = 37.1 \text{ k.ft}$$



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

27.4 ढाल-विक्षेप; आघूर्ण वितरण; Gauss-Seidel

28 उसी बीम का विश्लेषण क्रमशः ढाल-विक्षेप और आघूर्ण-वितरण विधियों से §27.2.1.2 तथा §27.3.1.1 में किया गया है। दूसरी विधि पुनरावृत्तीय थी और इसलिए स्वाभाविक रूप से रैखिक समीकरण तंत्र के हल की Gauss-Seidel विधि का स्मरण कराती है (§L.2.3.1)।

29 सरलता से दर्शाया जा सकता है कि

परिभाषा 27.3: आघूर्ण वितरण, ढाल-विक्षेप और Gauss-Seidel

ढाल-विक्षेप विधि से संबद्ध रैखिक समीकरण तंत्र को Gauss-Seidel विधि द्वारा पुनरावृत्तीय रूप से हल करने पर प्रत्येक चरण आघूर्ण-वितरण विधि के संगत पुनरावृत्तीय चरण से ठीक मेल खाता है। अतः समान पुनरावृत्तियों के बाद दोनों विधियाँ समान अंतिम सन्निकट परिणाम देती हैं।

30 इसे अगले उदाहरण में दर्शाया गया है।

27.4.1 उदाहरण 27.8: ढाल-विक्षेप/आघूर्ण वितरण/Gauss-Seidel

उसी बीम का विश्लेषण ढाल-विक्षेप विधि (§27.2.1.2) और आघूर्ण-वितरण विधि (§27.3.1.1) से किया गया था।

1. अब ढाल-विक्षेप सूत्रीकरण का हल करके इस समस्या पर पुनः विचार करेंगे और इसे इस प्रकार लिखेंगे

$$E\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 32 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

   अब इसे Gauss-Seidel पुनरावृत्तीय विधि से हल करेंगे। और आघूर्ण-वितरण पुनरावृत्तियों की Gauss-Seidel पुनरावृत्तियों से तुलना करेंगे।
2. $\theta_C = \theta_B = 0$ से आरंभ करें और अभिसरण तक $\theta_C \to \theta_B \to \theta_C \cdots$ के लिए क्रमशः हल करें।
3. निम्न सारणी प्रत्येक Gauss-Seidel चरण का सार प्रस्तुत करती है।

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$E\theta_C$	0.0	2.083	2.670	2.724	2.729	2.730
$E\theta_B$	0.0	-1.172	-1.282	-1.292	-1.293	-1.293
M_{AB}	0.0	-11.72	-12.82	-12.92	-12.93	-12.93
M_{BA}	0.0	-23.44	-25.63	-25.84	-25.86	-25.86
M_{BC}	0.0	23.44	25.63	25.84	25.86	25.86
M_{CB}	0.0	-7.03	-0.658	-0.062	-0.006	0.000

4. पाँचवीं पुनरावृत्ति तक पहले परिकलित आघूर्ण वास्तव में पुनः प्राप्त हो गए।
5. ध्यान दें कि आघूर्ण वितरण में आघूर्णों का प्रत्यक्ष हल किया जाता है, जबकि ढाल-विक्षेप विधि में पहले घूर्णन और फिर आघूर्ण निर्धारित किए जाते हैं।
6. अंततः आघूर्ण वितरण के मध्यवर्ती मानों की ढाल-विक्षेप विधि के संगत मानों से तुलना करते हैं।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

	विधि	$n=1$	$n=2$
M_{AB}	MD	-11.7	-11.7-1.1=-12.8
	SD	-11.7	-12.82
M_{BA}	MD	-23.4	-23.4-2.2=-25.6
	SD	-23.44	-25.63
M_{BC}	MD	25+12.5-14.1=23.4	23.4+3.5-1.3=25.7
	SD	23.44	25.63
M_{CB}	MD	-25.0+25.0-7.0=-7.0	-7.0+7.0-0.6=-0.6
	SD	-7.03	-0.658

स्पष्टतः आघूर्ण वितरण के मध्यवर्ती चरण Gauss-Seidel पुनरावृत्तीय विधि के चरणों के अनुरूप हैं। यदि हमने θ_B का हल पहले किया होता, तब भी समान निष्कर्ष प्राप्त होता।



ब्रिज ऑफ साइज, वेनिस (1603)। Antonio Contino।

मंद वक्र चाप बंकन आघूर्णों और विक्षेपों का वितरण करता है, जो ढाल-विक्षेप और आघूर्ण वितरण के लिए उपयुक्त उपमा है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

28 प्रभाव रेखाएँ

सारांश

प्रभाव रेखाएँ (influence lines) किसी संरचना में गतिमान भार से उत्पन्न अधिकतम संभावित अभिकल्प अभिक्रियाओं अथवा आंतरिक बलों को निर्धारित करने की विधि प्रदान करती हैं। वे संरचनात्मक अभिकल्प का अभिन्न अंग हैं। यह अध्याय जानबूझकर संक्षिप्त रखा गया है और भार-स्थापन के पूर्व विवेचन का पूरक है। इसमें प्रभाव रेखाएँ निर्धारित करने की प्रक्रिया को रेखांकित किया गया है तथा Müller-Breslau सिद्धांत और प्रभाव रेखाओं में उसके अनुप्रयोग की व्याख्या की गई है।

28.1 परिचय 1071
28.2 प्रक्रिया 1072
28.2.1 उदाहरण 28.1: सरल आलंबित धरन की प्रभाव रेखाएँ 1072
28.2.2 उदाहरण 28.2: अधिलंबों सहित सरल आलंबित धरन 1075
28.3 Müller-Breslau सिद्धांत 1075
28.3.1 व्युत्पत्ति 1075

28.1 परिचय

[1] अब तक भार स्थिर था और हमने स्थिर (मृत) भार तथा परिवर्ती (जीवित) भार के बीच कोई भेद नहीं किया था। चूँकि परिवर्ती/जीवित भार गति कर सकता है, अतः एक प्रमुख प्रश्न यह है कि जीवित भार की स्थिति किसी निर्दिष्ट बिंदु पर अभिक्रिया अथवा आंतरिक बल को किस प्रकार प्रभावित करेगी। इसलिए हम प्रभाव रेखा की संकल्पना प्रस्तुत करते हैं।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 28.1: प्रभाव रेखा

प्रभाव रेखा यह दर्शाती है कि किसी संरचना के एक विशिष्ट बिंदु पर अनुक्रिया (जैसे अपरूपण बल, बंकन आघूर्ण अथवा अभिक्रिया) संरचना के ऊपर एकांक भार के गतिमान होने पर किस प्रकार परिवर्तित होती है।

2 इससे किसी आंतरिक बल (अपरूपण अथवा आघूर्ण) को अधिकतम करने के लिए भार के स्थापन में सुविधा होगी। गणितीय रूप में, प्रभाव रेखा को IL_{ij} से व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ IL स्वतंत्रता-कोटि i पर विचाराधीन राशि (पुनः, अभिक्रिया, अपरूपण अथवा आघूर्ण) है, जो स्वतंत्रता-कोटि j पर एकांक भार के कारण उत्पन्न होती है।

28.2 प्रक्रिया

3 स्थैतिकतः निर्धार्य संरचनाओं के लिए, प्रभाव रेखा के क्रांतिक कोटि-मानों के बीच केवल *सरल रेखा* खंड होंगे।

4 किसी निर्दिष्ट स्थान पर अपरूपण बल की प्रभाव रेखा में उसी स्थान पर स्थानांतरी असांतत्य होगा। इस स्थान पर धनात्मक और ऋणात्मक अपरूपण बलों का योग एकांक के बराबर होता है।

5 आंतरिक कब्जे के स्थान को छोड़कर, क्रांतिक परिच्छेद के दोनों ओर अपरूपण-बल प्रभाव रेखा की ढाल समान होगी, क्योंकि क्रांतिक परिच्छेद पर बंकन आघूर्ण सतत होता है।

6 इसी प्रकार, बंकन आघूर्ण की प्रभाव रेखा में उस बिंदु पर एकांक घूर्णी असांतत्य होगा जहाँ बंकन आघूर्ण का मूल्यांकन किया जा रहा है।

7 दो विधियाँ हैं:

साम्य: निर्धारित किए जा रहे फलन के लिए समीकरण लिखें; उदाहरणार्थ, संरचना पर किसी अन्य स्थान पर एकांक भार लगाने से किसी बिंदु पर उत्पन्न अपरूपण, आघूर्ण अथवा अक्षीय बल का समीकरण।

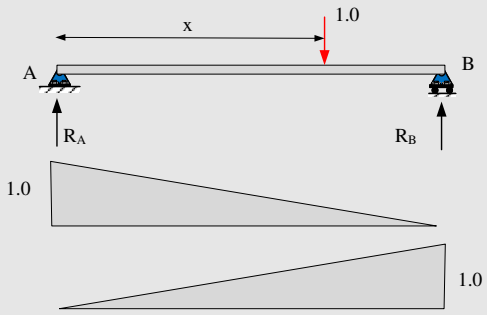
Müller Breslau सिद्धांत गुणात्मक प्रभाव रेखाएँ खींचने के लिए, जो वास्तविक प्रभाव रेखा के सीधे समानुपाती होती हैं।

28.2.1 उदाहरण 28.1: सरल आलंबित धरन की प्रभाव रेखाएँ

1 एकांक परिमाण का अधोमुखी संकेंद्रित भार सरल आलंबित धरन AB पर A से B तक चलता है। हमें A और B पर अभिक्रियाओं तथा C पर अपरूपण और आघूर्ण की प्रभाव रेखाएँ खींचनी हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अभिक्रिया



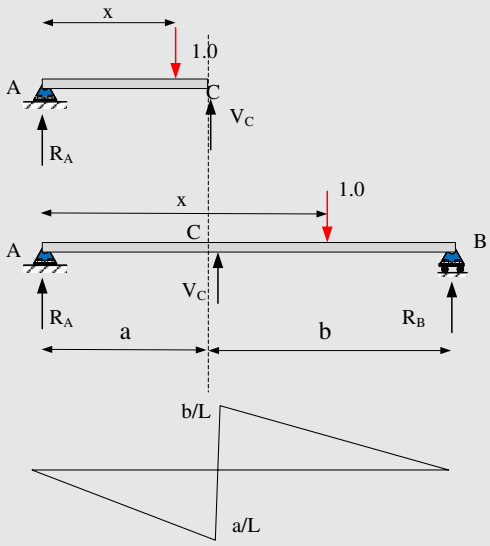
साम्य से

$$\Sigma M_B = 0$$
$$R_A L = 1.(L - x)$$
$$\Rightarrow R_{Ax} = 1 - \frac{x}{L}$$

अभिक्रिया के लिए x में रैखिक समीकरण प्राप्त होता है। इसी प्रकार

$$\Sigma M_A = 0$$
$$R_B L = 1.0x \Rightarrow R_{Bx} = \frac{x}{L}$$

अपरूपण



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

खंड AC

$$\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow R_A(L) - (L-x)(1) = 0 \Rightarrow R_A = 1 - \frac{x}{L}$$

V का C पर मान, x पर एकांक भार (C के बाईं ओर) के कारण:

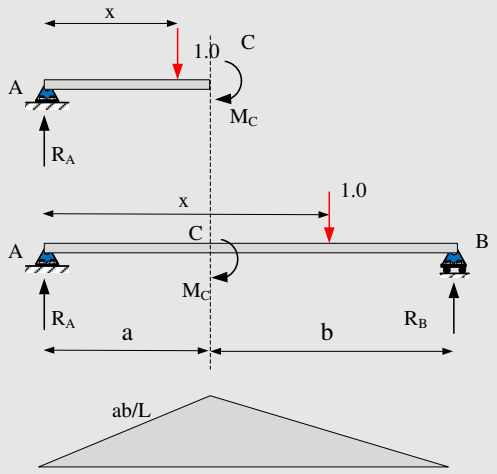
$$V_{Cx}^{-} = R_A - 1.0 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) - 1.0 = -\frac{x}{L}$$

जब $x = 0$, तब $V_{CA} = 0$, और जब $x = a$ (बिंदु C के ठीक पहले), तब $V_{CC} = -a/L$ एकांक भार खंड AC से आगे है।

$$V_{Cx}^{+} = R_A = 1 - \frac{x}{L}$$

जब $x = a$ (बिंदु C के ठीक बाद), तब $V_{CC} = 1 - a/L = (L-a)/L = b/L$, और जब $x = L$, तब $V_{CB} = 1 - L/L = 0$

आघूर्ण



$$M_{Cx}^{-} = aR_A - 1.0(a-x) = a\left(1 - \frac{x}{L}\right) - (a-x) = a - \frac{ax}{L} - a + x = -\frac{ax}{L} + x$$

जब $x = 0$, तब $M_{Cx} = 0$, और जब $x = a$ (बिंदु C के ठीक पहले), तब

$$M_{CC} = -a^2/L + a = (-a^2 + aL)/L = a(L-a)/L = ab/L$$

एकांक भार खंड AC से आगे है।

$$M_{Cx}^{+} = aR_A = a(1 - \frac{x}{L}) = a - \frac{ax}{L}$$

जब $x = a$ (बिंदु C के ठीक बाद),

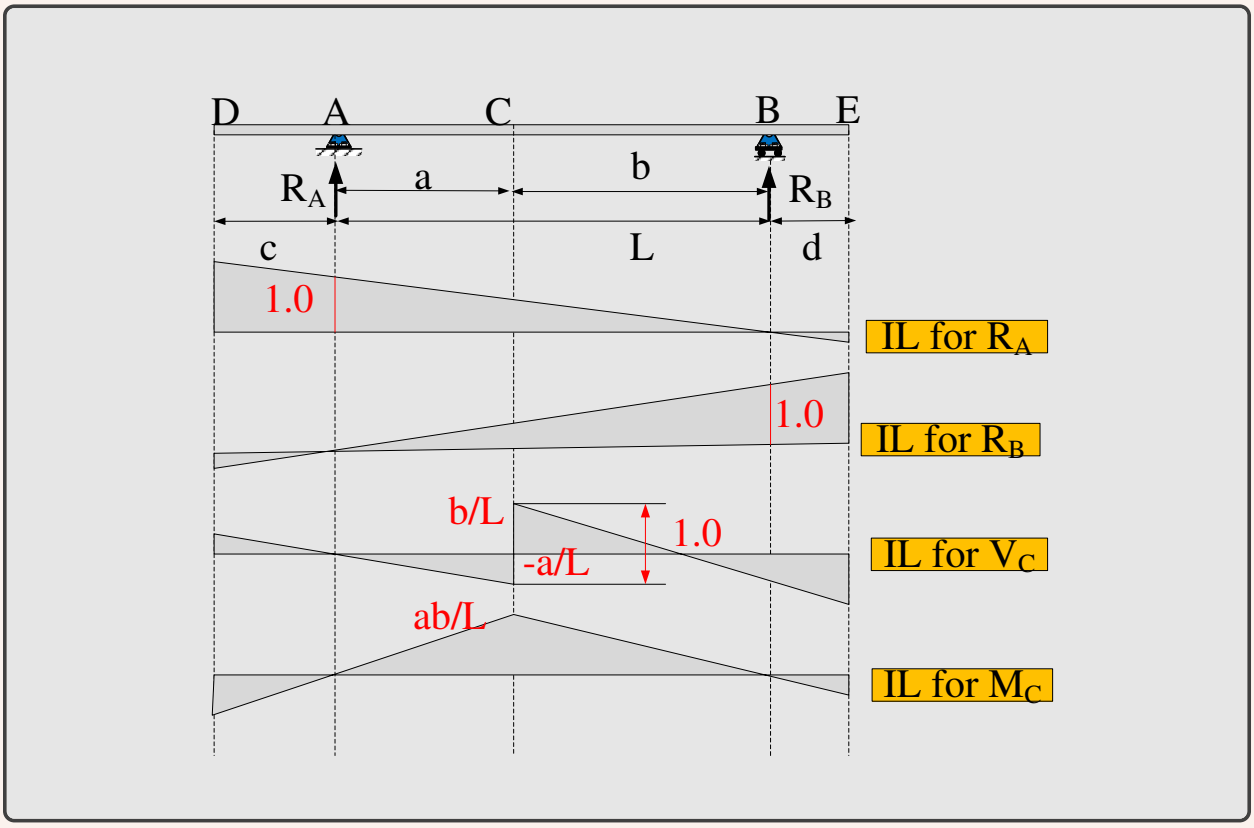
$$M_{CC} = a - a^2/L = (aL - a^2)/L = a(L-a)/L = ab/L$$

और जब $x = L$,

$$M_{CB} = a - aL/L = a - a = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

28.2.2 उदाहरण 28.2: अधिलंबों सहित सरल आलंबित धरन



28.3 Müller-Breslau सिद्धांत

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §11.4.4 देखें

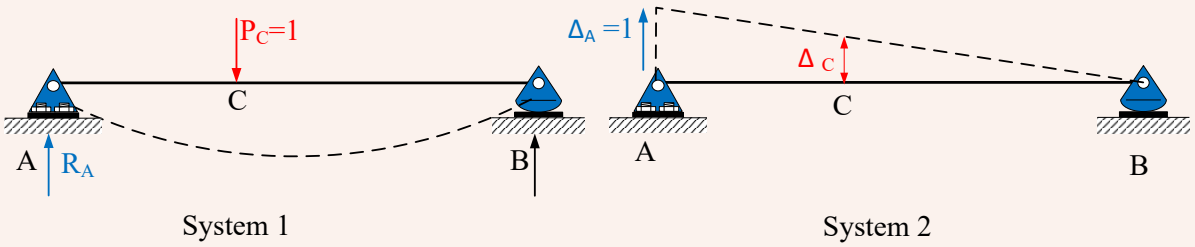
28.3.1 व्युत्पत्ति

8 Maxwell-Betti पारस्परिक प्रमेय (MBRT) (§24.2.2) को स्मरण करें: *निकाय 1 के बलों द्वारा निकाय 2 के संगत विस्थापनों से गुजरते हुए किया गया आभासी कार्य, निकाय 2 के बलों द्वारा निकाय 1 के संगत विस्थापनों से गुजरते हुए किए गए आभासी कार्य के बराबर होना चाहिए।*

9 अब हम चित्र 28.1 में दर्शाए गए दो निकायों पर विचार करते हैं। यहाँ एकांक बल P_C, A और B के बीच "गतिमान" हो सकता है (अर्थात् उस गतिमान एकांक भार के अनुरूप, जो A पर संगत अभिक्रिया उत्पन्न करेगा); अब MBRT लागू करने पर

$$\underbrace{P_C}_{1}\,\Delta_C = R_A\,\underbrace{\Delta_A}_{1} \Rightarrow \Delta_C = R_A$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



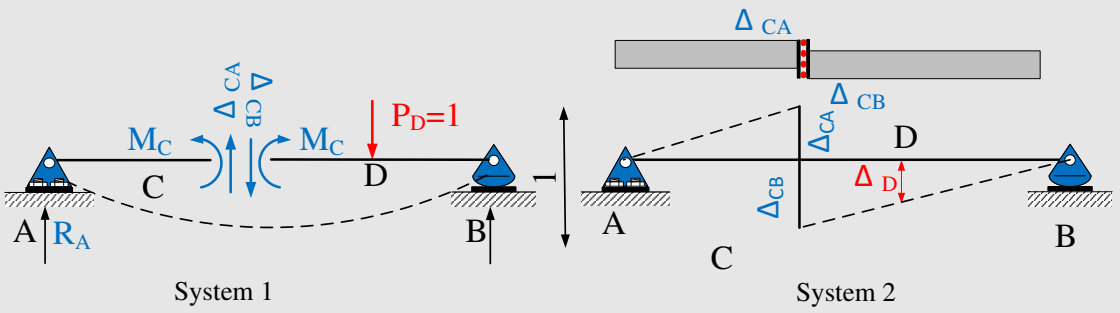
चित्र 28.1: Müller-Breslau सिद्धांत

अतः C पर विस्थापन A पर अभिक्रिया के बराबर है। यही Müller-Breslau प्रमेय है।

परिभाषा 28.2: Müller-Breslau सिद्धांत

किसी भी अभिक्रिया अथवा आंतरिक बल की प्रभाव रेखा उस विकृषेपित आकृति के अनुरूप होती है जो संरचना की उस बल को वहन करने की क्षमता हटाकर और तत्पश्चात् संशोधित (अथवा विमोचित) संरचना में हटाए गए अवरोध के अनुरूप एकांक विरूपण आरोपित करने से उत्पन्न होती है।

28.3.1.1 उदाहरण 28.3: Müller-Breslau; अपरूपण प्रभाव रेखा



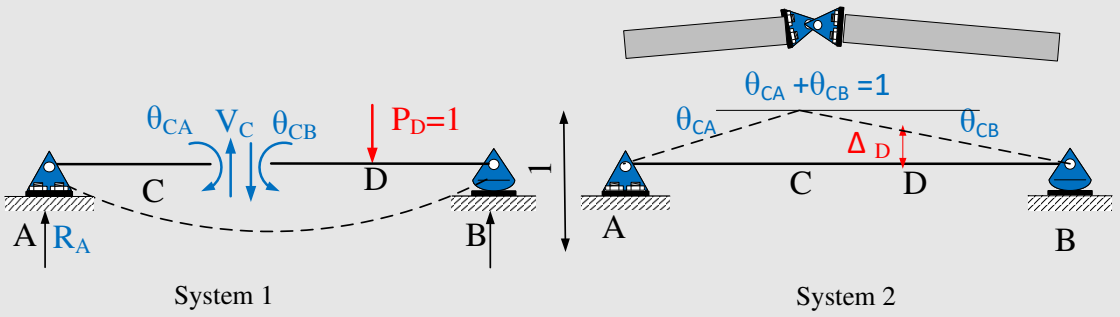
C पर अपरूपण विमोचन (परंतु आघूर्ण विमोचन नहीं) लागू करें; Maxwell-Betti से

$$\underbrace{(P_D)}_{1}\,\Delta_D = V_C\,\underbrace{(\Delta_{CA}+\Delta_{CB})}_{1} \Rightarrow \Delta_D = V_C$$

अतः निकाय 2 की विकृषेपित आकृति अपरूपण बल V_C की प्रभाव रेखा निरूपित करती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

28.3.1.2 उदाहरण 28.4: Müller-Breslau; आघूर्ण प्रभाव रेखा



C पर आघूर्ण विमोचन (परंतु अपरूपण विमोचन नहीं) लागू करें। पुनः, Maxwell-Betti से (पूर्ववत्)

$$\underbrace{(P_D)}_{1}\,\Delta_D = M_C\,\underbrace{(\theta_{CA}+\theta_{CB})}_{1} \Rightarrow \Delta_D = M_C$$

अतः निकाय 2 की विक्षेपित आकृति आघूर्ण M_C की प्रभाव रेखा निरूपित करती है।



अरब घोड़े की सरपट चाल, Etienne-Jules Marey, 1887। कालानुक्रमिक छायाचित्रण अध्ययन

गतिमान भार का प्रभाव—यह दर्शाता है कि प्रभाव रेखाएँ संरचनाओं में बलों के परिवर्तन का किस प्रकार अनुसरण करती हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

29 द्वितीय-कोटि प्रत्यास्थ विश्लेषण

सारांश

यह अध्याय उन संरचनाओं के विश्लेषण से संबंधित है जिनमें विरूपण (विस्थापन) समग्र अनुक्रिया (साम्य समीकरणों) को उल्लेखनीय रूप से प्रभावित करता है, जबकि सामग्री स्वयं रैखिक प्रत्यास्थ व्यवहार बनाए रखती है। विश्लेषण का यह रूप द्वितीय-कोटि (प्रत्यास्थ) विश्लेषण कहलाता है।

अध्याय दो मुख्य खंडों में विभाजित है। प्रथम खंड बड़े विस्थापनों वाली किंतु स्थिर संरचनाओं की समस्याओं से संबंधित है। द्वितीय खंड छोटे विस्थापनों वाली उन समस्याओं पर केंद्रित है जो अंततः अस्थिर हो सकती हैं; इसे Euler कुंचन भी कहा जाता है।

Euler कुंचन के नियंत्रक अवकल समीकरण और मुक्त कंपनों के नियंत्रक समीकरण के बीच सादृश्य भी प्रस्तुत किया गया है।

अंत में, अध्याय प्रभावी लंबाई (अभिकल्प-संबंधी संकल्पना) और अप्रत्यास्थ अनुक्रिया को ध्यान में रखने वाले स्तंभ आरेख के संक्षिप्त परिचय के साथ समाप्त होता है।

इस अध्याय का संख्यात्मक प्रतिरूप बाद में ज्यामितीय अरैखिकता के अंतर्गत अध्याय में प्रस्तुत किया जाएगा।

29.1 परिचय 1078
29.2 बड़े विस्थापन, स्थिर 1079
29.2.1 उदाहरण 29.1: ज्यामितीय अस्थिरता 1079
29.2.2 उदाहरण 29.2: आनमनी विरूपण पर अक्षीय भार का प्रभाव . . . 1080
29.2.3 उदाहरण 29.3: कैंटिलीवर धरन का बड़ा विक्षेप 1083
29.3 छोटे विस्थापन, अस्थिर 1087
29.3.1 विविक्त दृढ़ दंड 1087
29.3.2 सतत निकाय 1091

29.1 परिचय

1 अब तक हमने छोटे विस्थापनों वाली रैखिक प्रत्यास्थ संरचनाओं का विश्लेषण किया है, जिससे हम ऐसे अत्यल्प विस्थापन मान सके जो मुक्त-पिंड आरेख को प्रभावित नहीं करते थे।

2 द्वितीय-कोटि विश्लेषण (Second Order Analysis, SOA) में यह धारणा अब मान्य नहीं रहती। मुक्त-पिंड आरेख में भार के अधीन विरूपण को ध्यान में रखना आवश्यक है, जैसा कि केबल संरचनाओं के मामले में होता है (अध्याय 30)। यह संकल्पना चित्र 54.5 में दर्शाई गई है।

3 SOA में विश्लेषण के मूलभूत पक्ष अपरिवर्तित रहते हैं। उन्हीं नियंत्रक समीकरणों (साम्य, संगतता और प्रतिबल-विकृति संबंधों) को संतुष्ट करना आवश्यक है। तथापि, मुख्य अंतर यह है कि मुक्त-पिंड आरेख में परिमित विस्थापनों को सम्मिलित करना होता है। यद्यपि इन विस्थापनों को छोटा माना जा सकता है (जिससे $\sin\theta \simeq \theta$ जैसे सरलीकरण संभव होते हैं), परंतु वे अत्यल्प नहीं होते।

4 परिणामतः, समाधान प्रक्रिया सामान्यतः अधिक जटिल होती है और इसमें ऐसे अवकल समीकरणों को हल करना पड़ सकता है जिनके नियतांक ज्ञात सीमा-प्रतिबंधों से निर्धारित होते हैं।

5 यह ध्यान रखना महत्त्वपूर्ण है कि SOA में मूलतः समस्याओं के दो वर्ग हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

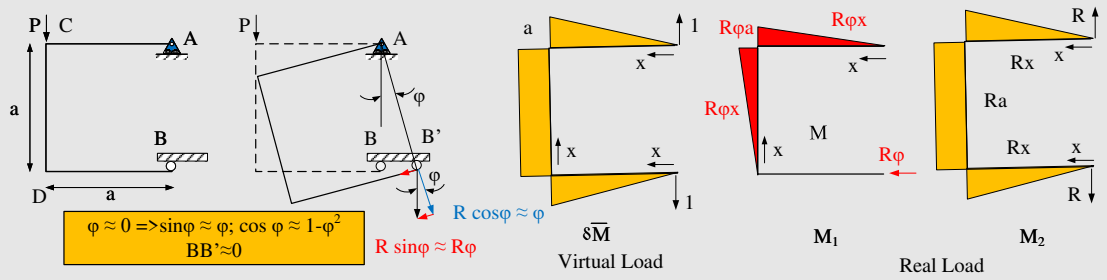
बड़े विस्थापन, स्थिर संरचनाएँ भारों की क्रिया के अधीन अपना विन्यास बनाए रखने तथा भार हटाए जाने के बाद अपनी मूल स्थिति में लौटने में सक्षम होती हैं।

छोटे विस्थापन, अस्थिर संरचनाएँ भारों के अधीन ऐसे परिमित छोटे विरूपण अनुभव करती हैं जो अपने मूल विन्यास में वापस नहीं लौटते, फलतः साम्य नष्ट हो सकता है और संभावित विफलता (कुंचन) हो सकती है।

6 हम अनेक निदर्शी उदाहरणों द्वारा दोनों वर्गों की समस्याओं का परीक्षण करेंगे।

29.2 बड़े विस्थापन, स्थिर

29.2.1 उदाहरण 29.1: ज्यामितीय अस्थिरता



यदि हम निचले आलंब पर अभिक्रिया निर्धारित करने का प्रयास करें, तो

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Pa = R \times 0 \Rightarrow R = \pm\infty$$

अतः दर्शाई गई स्थिति में निकाय साम्य में नहीं है।

इसके अतिरिक्त, यह सरलता से देखा जा सकता है कि यहाँ ज्यामितीय अस्थिरता है, क्योंकि सभी अभिक्रियाएँ एक ही बिंदु पर अभिसरित होती हैं (§19.1.5, §46.2.1.5)।

अभिक्रिया केवल तभी निर्धारित की जा सकती है जब हम निचले रोलर के क्षैतिज विस्थापन पर विचार करें।

कोण ϕ को अत्यल्प मानने पर चित्र में दर्शाए गए निम्न बल प्राप्त होते हैं:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Pa - R\phi a \Rightarrow P = R\phi$$

इसके बाद AB के AB' में दीर्घन के लिए दो पृथक व्यंजक व्युत्पन्न करके हम ϕ को विलोपित करना चाहते हैं।

पहले हम विरूपित आकृति की ज्यामिति पर विचार करते हैं। खंड AB बढ़कर AB' हो जाता है:

$$\Delta v = AB' - AB = a(1 - cos\phi) \simeq \frac{a\phi^2}{2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अब आभासी बल विधि से इसी राशि का निर्धारण करते हैं:

$$\begin{aligned}(1)\Delta v &= \int_0^a (1)x\frac{Rx}{EI}dx + \int_0^a (1)a\frac{R\phi x + Ra}{EI}dx + \int_0^a (1)x\frac{R\phi x + Rx}{EI}dx \\ &= \frac{Ra^3}{EI}\left(\frac{1}{3} + \frac{\phi}{2} + 1 + \frac{\phi}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{5}{3}\frac{Ra^3}{EI}\left(1 + \frac{\phi}{2}\right)\end{aligned}$$

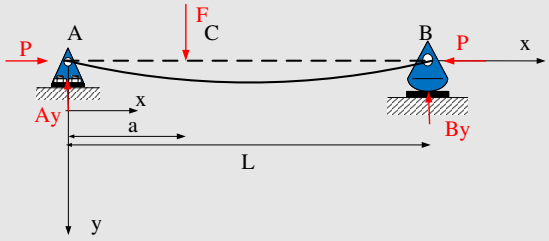
चूँकि $\phi \ll 1$, अतः

$$\Delta v \simeq \frac{5}{3}\frac{Ra^3}{EI} \simeq \frac{a\phi^2}{2}$$

ऊपर से $\phi = \frac{P}{R}$ प्रतिस्थापित करके R का समाधान प्राप्त किया जा सकता है:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3P^2EI}{10a^2}}$$

29.2.2 उदाहरण 29.2: आनमनी विरूपण पर अक्षीय भार का प्रभाव



हम ऐसे धरन-स्तंभ की दृढता पर अक्षीय भार के प्रभाव का परीक्षण करते हैं जो प्रत्येक सिरे पर घूर्णन के लिए स्वतंत्र है और जिस पर एक नियत अक्षीय बल के साथ संकेंद्रित बल कार्य करता है। हम संबद्ध धरन के विक्षेप और आंतरिक बलों के व्यंजक व्युत्पन्न करना चाहते हैं। इस उदाहरण में समस्या का वैश्लेषिक समाधान किया गया है; इसी समस्या को बाद में §60.1.2.4 में परिमित अवयव विश्लेषण द्वारा संख्यात्मक रूप से हल किया जाएगा।

$$\begin{aligned}EI\tfrac{d^2y_1}{dx^2} &= -Py_1 - A_y x &&= -Py - F(L-a) && x \le a \\ EI\tfrac{d^2y_2}{dx^2} &= -Py_1 - B_y(L-x) &&= -Py - F\tfrac{a}{L}(L-x) && x > a\end{aligned}$$

इन समीकरणों का व्यापक समाधान है:

$$\begin{aligned}y_1 &= C_1\cos(nx) + D_1\sin(nx) - \frac{F(L-a)}{PL}x \\ y_2 &= C_2\cos(nx) + D_2\sin(nx) - \frac{Fa}{PL}(L-x)\end{aligned}$$

जहाँ $n^2 = P/EI$।

हम देखते हैं कि दोनों फलन F पर रैखिक रूप से और अक्षीय बल P पर अरैखिक रूप से निर्भर हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

A और B पर सीमा-प्रतिबंध लागू करने पर विस्थापन शून्य हैं, जिससे $C_! = 0$ और $C_2 = -D_2 \tan(nL)$ प्राप्त होते हैं:

$$\begin{aligned} y_1 &= D_1 \sin(nx) - \frac{F(L-a)}{PL} x \\ y_2 &= D_2 \tan(nL)\cos(nx) + D_2 \sin(nx) - \frac{Fa}{PL}(L-x) \end{aligned}$$

परंतु हम जानते हैं कि C पर विस्थापन और ढाल सतत हैं:

$$y_1 = y_2\big|_{x=a} \quad \text{and} \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}\bigg|_{x=a}$$

विस्तार करने पर

$$\begin{aligned} D_1 \sin(na) &= D_2 \left(\sin(na) - \tan(nL)\cos(na)\right) \\ D_1 n \cos(na) &= D_2 n \left(\cos(na) + \tan(nL)\sin(na)\right) + \frac{F}{P} \end{aligned}$$

D_1 और D_2 के लिए हल करने पर

$$D_1 = \frac{F \sin(n(L-a))}{Pn \sin(nL)} \quad \text{and} \quad D_2 = -\frac{F \sin(na)}{Pn \tan(nL)}$$

अतः आघूर्ण होगा:

$$M(x) = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Fn \sin(n(L-a))}{P \sin(nL)} \sin(nx)$$

यदि $a = L/2$, तो अधिकतम आघूर्ण होगा; तब $x = L/2$ के लिए

$$\begin{aligned} y\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{FL^3}{48EI} \underbrace{\frac{3(\tan\phi - \phi)}{\phi^3}}_{\lambda_y} \quad \text{where} \quad \phi = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}} \\ M\left(\frac{L}{2}\right) &= -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{FL}{4} \underbrace{\frac{\tan\phi}{\phi}}_{\lambda_M} \end{aligned}$$

जहाँ λ आवर्धन गुणक हैं। यह स्पष्ट है कि संपीडन बल की उपस्थिति विस्थापन और आघूर्ण दोनों को बढ़ाएगी। विस्थापन और आघूर्ण F पर रैखिक रूप से तथा P पर अरैखिक रूप से निर्भर हैं।

हम $P = 0$ (और इस प्रकार $\phi = 0$) रखकर पूर्ववर्ती समीकरणों की यथार्थता सत्यापित करना चाहते हैं; किंतु यह सीधा नहीं है क्योंकि तब $0/0$ प्राप्त होगा। अतः हम सीमा $P \to 0$ $(\phi \to 0)$ पर विचार करते हैं और l'Hospital नियम लागू करते हैं:

$$\lim_{\phi\to 0} \frac{3(\tan\phi - \phi)}{\phi^3} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{\phi\to 0} \frac{\tan\phi}{\phi} = 1$$

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI} \quad \text{and} \quad M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL}{4}$$

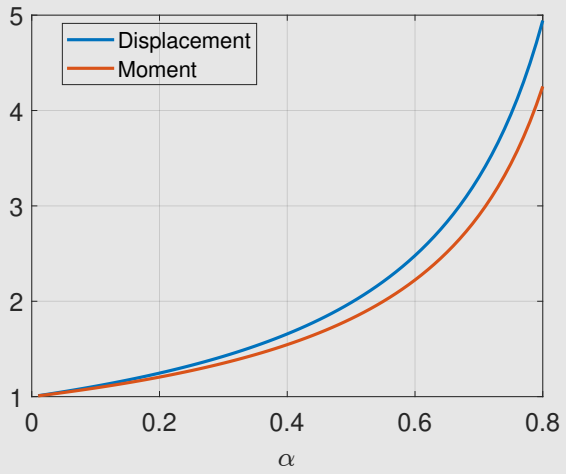
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस प्रकार केंद्रीय बिंदु-भार वाली सरल आलंबित धरन के शास्त्रीय समाधान पुनः प्राप्त होते हैं।

यदि हम $P = \alpha P_{cr}$ रखें, जहाँ इस धरन-स्तंभ के लिए $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$, तो ϕ निम्न रूप में सरल हो जाता है:

$$\phi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}$$

और हम दोनों आवर्धन गुणकों का आलेखन करते हैं। अपेक्षानुसार, यदि $\phi \to 1$, तो दोनों आवर्धन गुणक अनंत की ओर जाएँगे।



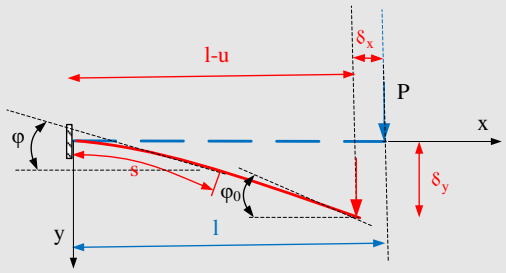
[7] कैंटिलीवर धरन के बड़े विक्षेप का समाधान प्रारंभिक धरन सिद्धांत से प्राप्त नहीं किया जा सकता, क्योंकि उसकी मूल धारणाएँ अब मान्य नहीं रहतीं। विशेषतः, प्रारंभिक सिद्धांत वक्रता सूत्र में प्रथम अवकलज के वर्ग की उपेक्षा करता है और धरन के भारित सिरे के विक्षेपित होने पर आघूर्ण-भुजा के छोटा होने के लिए कोई संशोधन नहीं देता (Bisshopp and Drucker, 1945)। बड़े परिमित भारों के लिए यह धरन की लंबाई से भी अधिक विक्षेप देता है! प्रथम अवकलज का वर्ग और आघूर्ण-भुजा के छोटा होने के संशोधन गुणक बड़े-विक्षेप समस्याओं के समाधान में प्रमुख योगदान बन जाते हैं।

[8] निम्न व्युत्पत्ति अब भी मूल Bernoulli-Euler प्रमेय पर आधारित है, जिसके अनुसार वक्रता बंकन आघूर्ण के समानुपाती होती है। यह भी माना गया है कि बंकन धरन की लंबाई को परिवर्तित नहीं करता।

प्रति प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

29.2.3 उदाहरण 29.3: कैंटिलीवर धरन का बड़ा विक्षेप



एक लंबी, पतली कैंटिलीवर पत्ती-कमानी पर विचार करें। L धरन की लंबाई, u धरन के भारित सिरे के विस्थापन का क्षैतिज घटक, v संगत ऊर्ध्वाधर विस्थापन, P मुक्त सिरे पर संकेंद्रित ऊर्ध्वाधर भार और EI आनमनी दृढता को निरूपित करें।

ध्यान दें कि यह एक सर्वोत्कृष्ट *elastica* समस्या है, जिसका विवेचन §8.2 में किया गया है।

ठीक इसी समस्या का बाद में परिमित अवयव विधि द्वारा §60.2.1 में विश्लेषण किया जाएगा।

सूत्रीकरण

प्रत्यास्थ रेखा की वक्रता का यथार्थ व्यंजक चाप-लंबाई और ढाल-कोण के पदों में सुविधापूर्वक लिखा जा सकता है, जिन्हें क्रमशः s और ϕ से निरूपित किया गया है। यदि x धरन के आबद्ध सिरे से मापा गया क्षैतिज निर्देशांक है, तो EI और धरन की वक्रता का गुणनफल बंकन आघूर्ण M के बराबर होता है:

$$EI\frac{d\phi}{ds} = P(L - x - \delta_x) = M \tag{29.1}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\frac{dx}{ds} = -\alpha^2\cos\phi \tag{29.2}$$

जहाँ $\alpha^2 = P/EI$।

ध्यान दें कि $dx/ds = \cos\phi$ और $dy/ds = \sin\phi$।

यदि समीकरण 29.2 के दोनों पक्षों को $d\phi/ds$ से गुणा करें, तो

$$\frac{d\phi}{ds}\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\alpha^2\cos\phi\frac{d\phi}{ds}$$

s के सापेक्ष समाकलन करके तथा $\phi = \phi_o$ और $d\phi/ds = 0$ को $x = l$ पर रखने से प्राप्त होता है:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = -\alpha^2\sin\phi + \alpha^2\sin\phi_0$$

अतः

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi} \tag{29.3}$$

हम धनात्मक मूल लेते हैं क्योंकि $d\phi/ds$ धनात्मक है, और

$$ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}} \tag{29.4}$$

ϕ_0 का समाधान पहले ϕ_0 का समाधान आवश्यक है। यह पहचानते हुए कि धरन *अविस्तार्य* है:

$$l = \int_0^l ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}$$

और ϕ_0 को संख्यात्मक रूप से हल किया जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

δ_y का समाधान

पहले:

$$\frac{dy}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{dy}{ds} = \sin\phi$$

समीकरण 29.3 को प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{dy}{d\phi}\underbrace{\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}_{d\phi/ds} = \sin\phi \Rightarrow dy = \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi$$

अंततः,

$$\begin{aligned}\delta_y &= \int_0^{\delta_y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0}\frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi\end{aligned}$$

सामान्यीकृत करने पर,

$$\frac{\delta_y}{l} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2\beta}\int_0^{\phi_0}\frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi}_{L} \tag{29.5}$$

जहाँ $\beta^2 = \alpha^2 L^2$।

यह एक "अंतर्निहित" दीर्घवृत्तीय समाकल (elliptic integral) है[a]।

दीर्घवृत्तीय समाकलों में रूपांतरण (Bisshopp and Drucker, 1945) के अनुसार निम्न प्रतिस्थापन प्रस्तुत किया जाता है:

$$1 + \sin\phi = 2k^2\sin^2\theta = \left(1 + \sin\phi_0\right)\sin^2\theta \tag{29.6}$$

जहाँ

$$k = \sqrt{\frac{1 + \sin\phi_0}{2}}$$

समीकरण 29.5 से मानक दीर्घवृत्तीय समाकल रूप में विस्तृत रूपांतरण निम्न प्रकार है।

समीकरण 29.6 से:

$$\sin\phi = 2k^2\sin^2\theta - 1 \tag{29.7}$$

इसके बाद,

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi} &= \sqrt{\left(1 + \sin\phi_0\right) - \left(1 + \sin\phi\right)} \\ &= \sqrt{2k^2 - 2k^2\sin^2\theta} = \sqrt{2}k\cos\theta\end{aligned} \tag{29.8}$$

समीकरण 29.6 की प्रथम समानता के दोनों पक्षों का अवकलन करने पर प्राप्त होता है:

$$\cos\phi\, d\phi = 4k^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \Longrightarrow d\phi = \frac{4k^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\cos\phi} \tag{29.9}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समीकरण 29.7 का उपयोग करके 29.9 के हर को पुनः लिखने पर

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)^2}\\ &= \sqrt{4k^2\sin^2\theta - 4k^4\sin^4\theta} = 2k\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\end{aligned} \tag{29.10}$$

29.7-29.10 को 29.5 में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}L &= \frac{\sqrt{2}}{2\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)\times 4k^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{2}k\cos\theta\times 2k\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\\ &= \frac{1}{\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\end{aligned} \tag{29.11}$$

जहाँ θ_1 और θ_2, θ के वे मान हैं जो क्रमशः $\phi=0$ तथा $\phi=\phi_0$ के संगत हैं। 29.6 का उपयोग करने पर प्राप्त होता है:

$$1=\left(1+\sin\phi_0\right)\sin^2\theta_1 \Longrightarrow \theta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin\phi_0}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}k}\right) \tag{29.12}$$

$$1+\sin\phi_0=\left(1+\sin\phi_0\right)\sin^2\theta_2 \Longrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} \tag{29.13}$$

पूर्ण दीर्घवृत्तीय समाकलों द्वारा व्यंजक स्मरण करें कि प्रथम और द्वितीय प्रकार के पूर्ण दीर्घवृत्तीय समाकल क्रमशः इस प्रकार परिभाषित हैं:

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

और अपूर्ण दीर्घवृत्तीय समाकल हैं:

$$F(\psi,k)=\int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad E(\psi,k)=\int_0^{\psi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

समीकरण 29.11 के समाकल को इस प्रकार विभाजित किया जा सकता है:

$$\int_{\theta_1}^{\pi/2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2}(\cdots)\,d\theta - \int_0^{\theta_1}(\cdots)\,d\theta$$

0 से $\pi/2$ तक के समाकल को विघटित करने पर:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 2k^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - K(k)$$

सर्वसमिका का उपयोग करते हुए:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{k^2}\left[K(k)-E(k)\right]$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्राप्त होता है:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta - 1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 2\left[K(k) - E(k)\right] - K(k) = K(k) - 2E(k)$$

इसी प्रकार, 0 से θ_1 तक के समाकल के लिए:

$$\int_0^{\theta_1} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta - 1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(\theta_1, k) - 2E(\theta_1, k)$$

अतः δ_y/l का पूर्ण व्यंजक है:

$$\frac{\delta_y}{l} = \frac{1}{\beta}\left[\left(K(k) - 2E(k)\right) - \left(F(\theta_1, k) - 2E(\theta_1, k)\right)\right] \tag{29.14}$$

जहाँ $\theta_1 = \arcsin(1/(\sqrt{2}k))$, समीकरण 29.12 से प्राप्त होता है।

Bisshopp & Drucker के सूत्र के साथ तुल्यता Bisshopp and Drucker, 1945 द्वारा दिया गया व्यंजक है:

$$\frac{\delta_y}{l} = 1 - \frac{2}{\beta}\left[E(k) - E(\theta_1, k)\right] \tag{29.15}$$

तुल्यता दर्शाने के लिए हम अविस्तार्य धरन के अवरोध समीकरण का उपयोग करते हैं। चाप-लंबाई अवरोध से:

$$l = \int_0^l ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}$$

जो समान प्रतिस्थापन के पश्चात् बन जाता है:

$$1 = \frac{1}{\beta}\int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{\beta}\left[K(k) - F(\theta_1, k)\right]$$

अतः:

$$\beta = K(k) - F(\theta_1, k) \tag{29.16}$$

समीकरण 29.16 को समीकरण 29.14 में प्रतिस्थापित करके और सरलीकृत करने पर (यह ध्यान रखते हुए कि अनेक पद निरस्त हो जाते हैं), समीकरण 29.15 यथार्थ रूप से पुनः प्राप्त होता है।

अतः केवल एक समाधान है; समीकरण 29.14 और 29.15, δ_y/l के गणितीय रूप से तुल्य व्यंजक हैं।

δ_x का समाधान

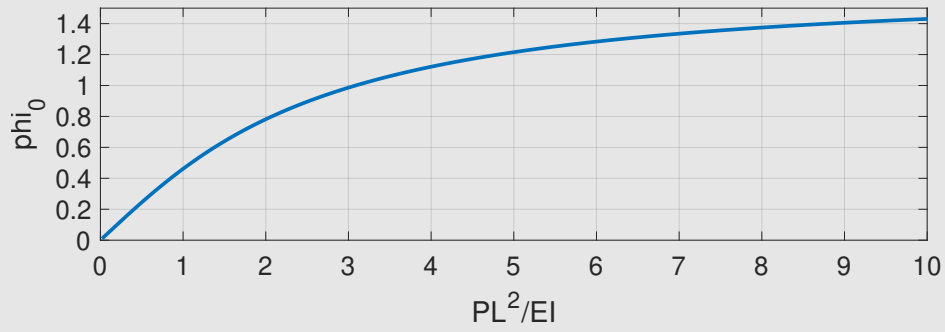
भारित सिरे का क्षैतिज विस्थापन समीकरण 29.1 और 29.3 से, $x = \phi = 0$ रखकर, परिकलित किया जाता है। अतः

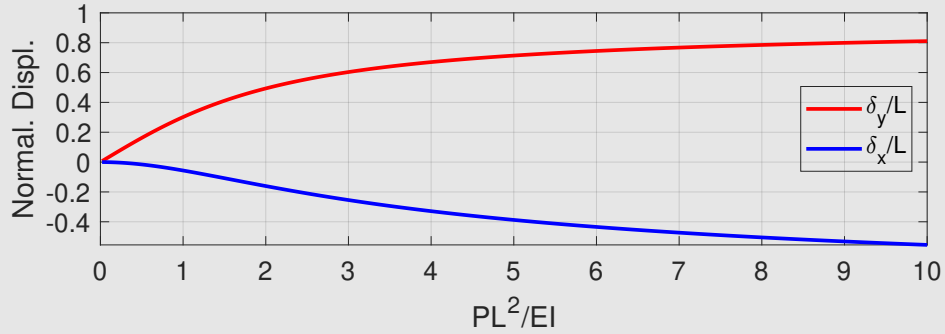
$$P(l - \delta_x) = EI\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0}$$

अथवा

$$\frac{l - \delta_x}{l} = \frac{\sqrt{2}}{\beta}\sqrt{\sin\phi_0} \tag{29.17}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।





इस समाधान को कार्यान्वित करने वाले तीनों Matlab कोड §I.1.6 में सूचीबद्ध हैं।

[a]दीर्घवृत्तीय समाकल व्यापक रूप $f(x) = \int \frac{A(x)+B(x)}{C(x)+D(x)\sqrt{S(x)}}$ वाला कोई भी समाकल है, जहाँ $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ और $D(x)$, x में बहुपद हैं तथा $S(x)$ घात 3 अथवा 4 का बहुपद है।

29.3 छोटे विस्थापन, अस्थिर

29.3.1 विविक्त दृढ दंड

9 स्थिरता समस्याओं (और कुंचन) के आकलन की एक प्रमुख आवश्यकता यह है कि पहले विरूपित अवस्था का मुक्त-पिंड आरेख बनाया जाए। हम दो सरल मामलों का परीक्षण करेंगे।

29.3.1.1 एकल-दंड निकाय

10 परिचय के रूप में, एक ऐसे दृढ दंड पर विचार करें जो एक कमानी द्वारा आलंब से जुडा है और दूसरे सिरे पर अक्षीय रूप से भारित है, चित्र 29.1। छोटा घूर्णन मानकर बिंदु A के परितः आघूर्ण लेने पर:

$$\Sigma M_A = P\Delta - k\theta = 0 \Rightarrow \Delta = L\theta \Rightarrow P\theta L - k\theta = 0 \Rightarrow (P - \frac{k}{L}) = 0$$

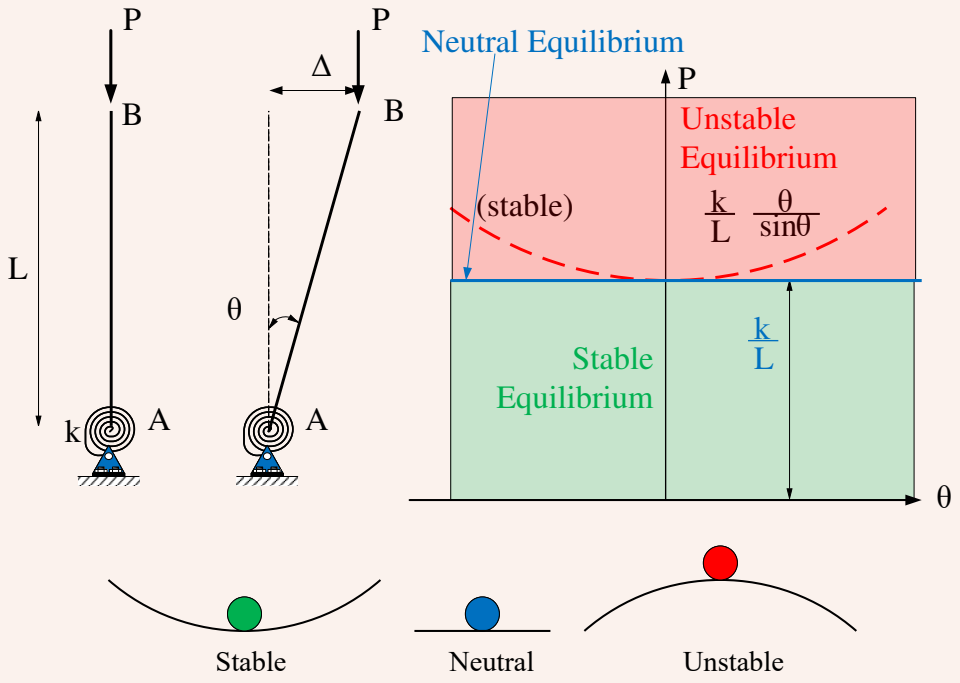
अतः तीन संभावनाएँ हैं, चित्र 29.1:

स्थिर साम्य: $P < k/L$ के लिए, $\theta = 0$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

उदासीन साम्य: $P = k/L$ के लिए, और θ कोई भी मान ले सकता है

अस्थिर साम्य: $P = P_{cr} > k/L$ के लिए, $\theta = 0$



चित्र 29.1: दृढ दंड की स्थिरता

11 इस प्रकार हम निम्न प्रकार परिभाषित क्रांतिक भार प्रस्तुत करते हैं:

$$P_{cr} = \frac{k}{L}$$

12 बड़े घूर्णन के लिए हमें प्राप्त होता:

$$\Sigma M_A = P\Delta - k\theta = 0 \Rightarrow \Delta = L\sin(\theta)P\theta L - k\theta = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{L}\frac{\theta}{\sin(\theta)}$$

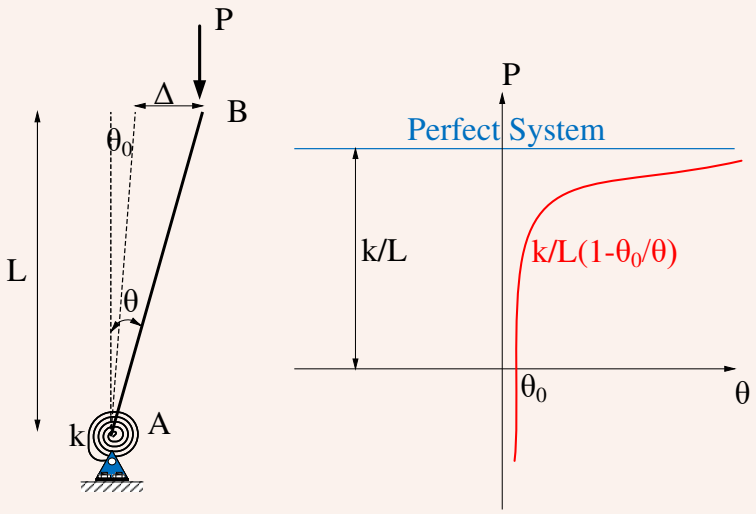
13 चूँकि एक से अधिक संभावित पथ (θ) हैं जब $P = P_{cr}$, हम इस बिंदु को *द्विशाखन बिंदु* (bifurcation point) कहते हैं।

14 यदि अब हम मानें कि स्तंभ में प्रारंभिक अपूर्णता है, अर्थात् स्तंभ प्रारंभ में "टेढा" है, चित्र 29.2, तो

$$\Sigma M_A = PL\theta - k(\theta - \theta_0) = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{L}(1 - \frac{\theta_0}{\theta})$$

15 ध्यान दें कि यहाँ *अस्थिरता* की समस्या है; इसे कुंचन से भ्रमित नहीं करना चाहिए (कुंचन अस्थिरता का एक रूप है)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

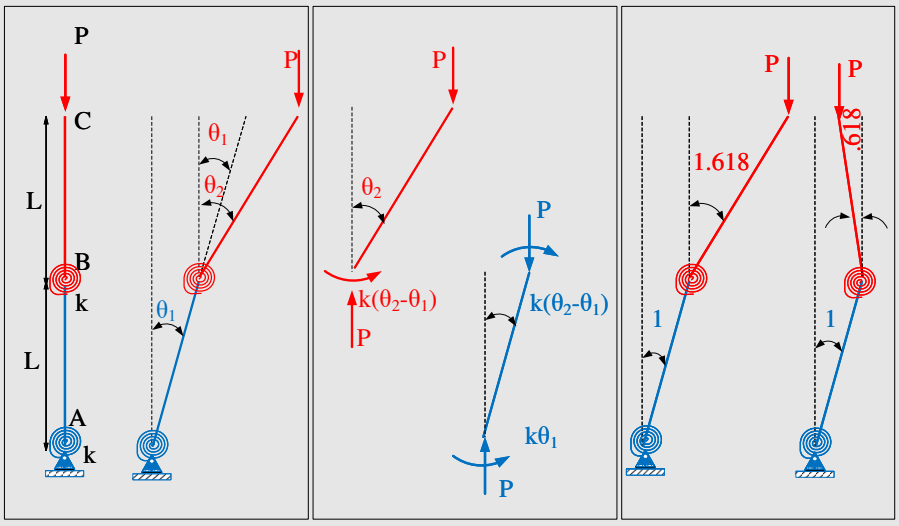


चित्र 29.2: प्रारंभिक अपूर्णता सहित दृढ दंड की स्थिरता

ध्यान दें कि इस खंड में पुलवमान अवयव (चित्र और/अथवा सारणियाँ) हैं जिन्हें अगले खंड से पहले मुद्रित करना आवश्यक है। परिणामस्वरूप यहाँ रिक्त स्थान अथवा अंतराल दिखाई दे सकते हैं।

29.3.1.1.1 उदाहरण 29.4: दो कब्जेदार दृढ स्तंभों का कुंचन

हम प्रत्येक सिरे पर k दृढता वाली कमानियों द्वारा जुडे दो दृढ दंडों की स्थिरता पर विचार करते हैं। हमारा उद्देश्य निकाय की स्थिरता का आकलन करना है। इस समस्या में विद्यमान बडे विरूपण के कारण हमें *विरूपित अवस्था* (अविरूपित अवस्था के स्थान पर) के साम्य पर विचार करना होगा:



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\Sigma M_B = PL\theta_2 - k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \qquad \Rightarrow -\theta_1 + \theta_2 = \frac{PL}{k}\theta_2$$
$$\Sigma M_A = PL\theta_1 + k(\theta_2 - \theta_1) - k\theta_1 = 0 \Rightarrow 2\theta_1 - \theta_2 = \frac{PL}{k}\theta_1$$

इन दोनों समीकरणों को आव्यूह रूप में लिखा जा सकता है:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

जहाँ $\lambda = PL/k$; यह एक *अभिलाक्षणिक मान* (eigenvalue) सूत्रीकरण है और इसे इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \lambda \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

अतः अब दो क्रांतिक भार हैं:

$$\begin{aligned} P_{cr_1} &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{k}{L} = 0.382\frac{k}{L} \\ P_{cr_2} &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{k}{L} = 2.618\frac{k}{L} \end{aligned}$$

अब हम प्रथम क्रांतिक भार के लिए विरूपित आकृति निर्धारित करना चाहते हैं:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \begin{bmatrix} 2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1.618 & -1 \\ -1 & 0.618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

अब स्वेच्छया $\theta_1 = 1$ रखते हैं, तब $\theta_2 = 1/0.618 = 1.618$; अतः प्रथम अभिलाक्षणिक विधा है:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंततः हम द्वितीय विधा-आकृति का परीक्षण करते हैं:

$$
\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\
\begin{bmatrix} 2-\frac{3+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -0.618 & -1 \\ -1 & -1.618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
$$

अब स्वेच्छया $\theta_1 = 1$ रखते हैं, तब $\theta_2 = -1/1.618 = -0.618$; अतः द्वितीय अभिलाक्षणिक विधा है:

$$
\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{Bmatrix}
$$

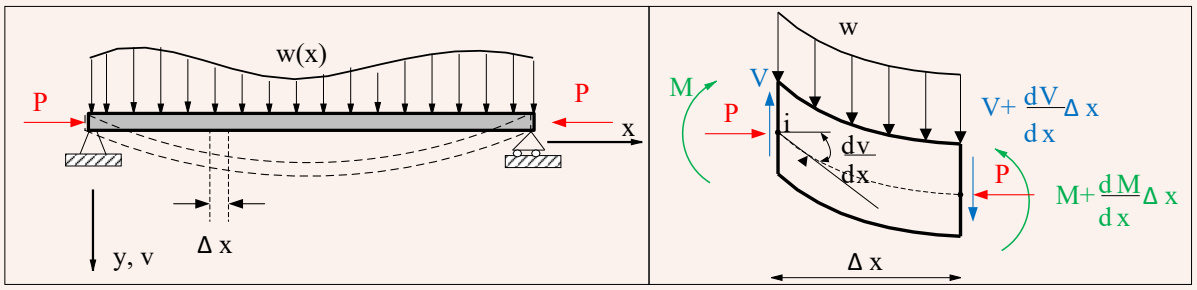
29.3.2 सतत निकाय

29.3.2.1 Euler कुंचन भार

16 पूर्ववर्ती उपागम में निर्दिष्ट अनिवार्य सीमा-प्रतिबंधों (विस्थापन और ढाल) वाले स्तंभ के लिए कुंचन भार प्राप्त किए गए थे, जिससे द्वितीय-कोटि अवकल समीकरण प्राप्त हुआ।

17 इस अगले उपागम में हम प्राकृतिक सीमा-प्रतिबंधों पर भी विचार करेंगे (अपरूपण और आघूर्ण, जिन्हें विस्थापनों के तृतीय और चतुर्थ अवकलजों के रूप में व्यक्त किया जाता है)। इससे चतुर्थ-कोटि अवकल समीकरण प्राप्त होगा।

18 अक्षीय और अपरूपण बलों के साथ-साथ आघूर्ण के अधीन धरन-स्तंभ पर विचार करें, चित्र 29.3 (केबल संरचना, चित्र 30.2, के साथ सादृश्य पर ध्यान दें)।



चित्र 29.3: सरल आलंबित धरन-स्तंभ; अवकल खंड; अक्षीय बल p का प्रभाव

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

19 धरन खंड के लिए i के परितः आघूर्णों का योग लेने और धरन के अक्ष तथा क्षैतिज अक्ष के बीच कोण $\frac{dv}{dx}$ को छोटा मानने पर प्राप्त होता है:

$$\underbrace{M-\left(M+\frac{dM}{dx}\Delta x\right)+w\frac{(\Delta x)^2}{2}+\left(V+\frac{dV}{dx}\Delta x\right)\Delta x}+\underbrace{P\left(\frac{dv}{dx}\right)\Delta x}=0$$

ध्यान दें कि प्रथम अधोकोष्ठित पद वही है जिसका उपयोग धरन के अवकल समीकरण की पूर्व व्युत्पत्ति में किया गया था (समीकरण 22.2)।

20 छोटे dx^2 वाले पदों की उपेक्षा करके और फिर प्रत्येक पद का x के सापेक्ष अवकलन करने पर प्राप्त होता है:

$$\frac{d^2M}{dx^2}-\frac{dV}{dx}-P\frac{d^2v}{dx^2}=0 \tag{29.18}$$

परंतु y दिशा में साम्य पर विचार करने से प्राप्त होता है:

$$\frac{dV}{dx}=-w \tag{29.19}$$

21 धरन सिद्धांत से, अक्षीय और अपरूपण विरूपणों की उपेक्षा करने पर:

$$M=-EI\frac{d^2v}{dx^2} \tag{29.20}$$

22 समीकरण 29.19 और 29.20 को 29.18 में प्रतिस्थापित करके तथा एकसमान परिच्छेद वाली धरन मानकर प्राप्त होता है:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}-P\frac{d^2v}{dx^2}=w$$

$\lambda=\sqrt{\frac{P}{EI}}$ और $w=0$ प्रतिस्थापित करने पर अंततः प्राप्त होता है:

$$\frac{d^4v}{dx^4}+\lambda^2\frac{d^2v}{dx^2}=0 \tag{29.21}$$

पुनः, ध्यान दें कि विरूपित अवस्था में साम्य पर विचार करके हमने उस समीकरण में दूसरा पद जोड़ा है जो अन्यथा आनमनी अवयवों (धरनों) का नियंत्रक अवकल समीकरण होता।

अंततः, इस समीकरण और केबल संरचना के नियंत्रक अवकल समीकरण, समीकरण 30.5, के बीच सादृश्य पर ध्यान दें।

23 सीमा-प्रतिबंधों के किसी भी समुच्चय के लिए इस चतुर्थ-कोटि अवकल समीकरण का व्यापक समाधान है:

$$v=C_1+C_2x+C_3\sin\lambda x+C_4\cos\lambda x \tag{29.22}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 29.1: स्तंभों के अनिवार्य और प्राकृतिक सीमा-प्रतिबंध

अनिवार्य (Dirichlet)	प्राकृतिक (Neumann)
v	$\dfrac{d^3v}{dx^3}$ (V)
$\dfrac{dv}{dx}$	$\dfrac{d^2v}{dx^2}$ (M)

नियतांक $C's$ सीमा-प्रतिबंधों से प्राप्त होते हैं। स्तंभों के लिए इन्हें सारणी 29.1 में दर्शाया गया है। अनिवार्य सीमा-प्रतिबंध विस्थापन और ढाल से तथा प्राकृतिक सीमा-प्रतिबंध अपरूपण और आघूर्ण से (विस्थापन के साथ उनके संबंधित संबंधों के माध्यम से) संबद्ध होते हैं।

[24] ध्यान दें कि प्रत्येक नोड पर दो सीमा-प्रतिबंध होने चाहिए। एक ही पंक्ति के युग्मों को छोड़कर सभी संयोजन संभव हैं (अर्थात् ज्ञात विस्थापन और अपरूपण, अथवा ज्ञात ढाल और आघूर्ण एक साथ नहीं हो सकते)।

29.3.2.1.1 उदाहरण 29.5: कब्जेदार-कब्जेदार स्तंभ का कुंचन

यदि कब्जेदार-कब्जेदार स्तंभ की स्थिरता पर विचार करें, तो दोनों सिरों पर सीमा-प्रतिबंध विस्थापन (v) और आघूर्ण ($\frac{d^2v}{dx^2}EI$) के शून्य होने के हैं, अर्थात्

$$\begin{aligned} &\textbf{Essential:} && v|_{x=0} = 0; && v|_{x=L} = 0; \\ &\textbf{Natural:} && \underbrace{v_{,xx}|_{x=0}}_{M|_{x=0}} = 0; && \underbrace{v_{,xx}|_{x=L}}_{M|_{x=L}} = 0 \end{aligned}$$

$x=0$ पर दोनों प्रतिबंधों के प्रतिस्थापन से $C_1 = C_4 = 0$ प्राप्त होता है। शेष प्रतिबंधों से प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} C_3 \sin \lambda L + C_2 L &= 0 \\ -C_3 k^2 \sin \lambda L &= 0 \end{aligned}$$

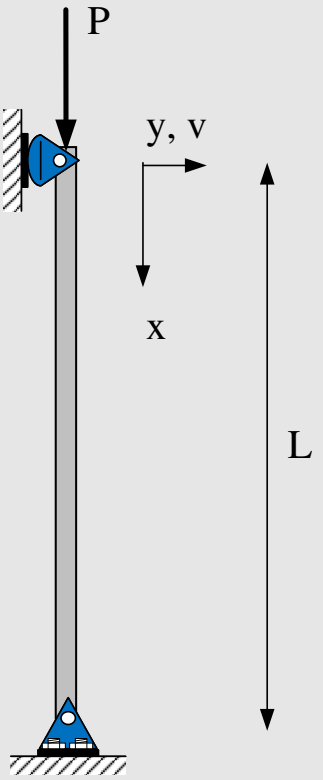
ये संबंध या तो $C_2 = C_3 = 0$ होने पर, अथवा $\sin \lambda L = C_2 = 0$ होने पर संतुष्ट होते हैं। प्रथम विकल्प सभी भारों पर साम्य का तुच्छ समाधान देता है, और द्वितीय से $\lambda L = n\pi$, $n = 1, 2, 3 \cdots$ के लिए, प्राप्त होता है। क्रांतिक भार है:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

जिसे पहले निम्नतर-कोटि अवकल समीकरण से व्युत्पन्न किया गया था। कुंचित स्तंभ की आकृति है:

$$y = C_3 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

और केवल आकृति (परंतु ज्यामिति नहीं) निर्धारित की जा सकती है। सामान्यतः हम $C_3 = 1$ मानकर y का आलेखन करेंगे।

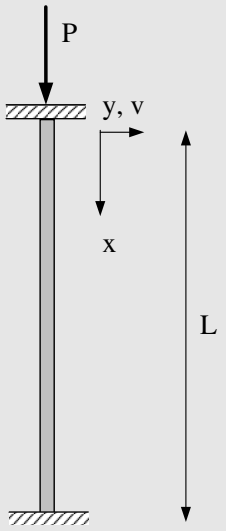


प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

29.3.2.1.2 उदाहरण 29.6: आबद्ध-आबद्ध स्तंभ का कुंचन

यदि अब स्तंभ को दोनों सिरों पर घूर्णन के विरुद्ध अवरुद्ध किया जाए, तो समीकरण 29.22 का उपयोग करने पर सीमा-प्रतिबंध हैं:



$$\textbf{Essential:}\quad v|_{x=0}=0;\quad v|_{x=L}=0;\quad \underbrace{v_{,x}|_{x=L}}_{\theta|_{x=L}}=0;$$

$$\textbf{Natural:}\quad \underbrace{v_{,xx}|_{x=0}}_{M|_{x=0}}=0$$

$$\begin{aligned}
v(0)=0 &\Rightarrow C_1+C_4=0\\
v'(0)=0 &\Rightarrow C_2+C_3\lambda=0\\
v(L)=0 &\Rightarrow C_1+C_2L+C_3\sin\lambda L+C_4\cos\lambda L=0\\
v'(L)=0 &\Rightarrow C_2+C_3\lambda\cos(\lambda L)-C_4\sin(\lambda L)=0
\end{aligned}$$

इन समीकरणों को आव्यूह रूप में लिखा जा सकता है:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 0\\ 1 & L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 0\\ 1 & L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}=0$$

सारणिक निम्न से प्राप्त होता है:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0\\ L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda\\ 1 & L & \sin\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} L & \cos\lambda L\\ 1 & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & \sin\lambda L\\ 0 & \lambda\cos\lambda L \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} 1 & L\\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$-2\lambda+\lambda^2L\sin\lambda L+2\lambda\cos\lambda L=0$$

प्रथम समाधान, $\lambda=0$, तुच्छ है और अगला समाधान है:

$$\begin{aligned}
\lambda L\sin\lambda L+2\cos\lambda L-2 &= 0\\
\lambda L\sin\lambda L &= 2(1-\cos\lambda L)
\end{aligned}$$

इस अबीजीय समीकरण का समाधान है:

$$\begin{aligned}
\lambda L &= 2n\pi\\
\sqrt{\frac{P}{EI}} &= \frac{2n\pi}{L}
\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः क्रांतिक भार और प्रतिबल इस प्रकार दिए जाते हैं:

$$P_{cr} = \frac{4n^2\pi^2EI}{L^2}$$
$$\sigma_{cr} = \frac{4n^2\pi^2E}{(L/r)^2}$$

λ का मान $c's$ में प्रतिस्थापित करके विक्षेपित आकृति (अथवा अभिलाक्षणिक विधाएँ) प्राप्त की जा सकती हैं।

29.3.2.1.3 उदाहरण 29.7: आबद्ध-कब्जेदार स्तंभ का कुंचन

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हम उस स्तंभ का कुंचन भार निर्धारित करना चाहते हैं जो $x = L$ पर आबद्ध और $x = 0$ पर कब्जेदार है।
सीमा-प्रतिबंध हैं:

$$\begin{aligned} v &= 0, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \text{ at } x = 0 \quad \text{Natural B.C.} \\ v &= 0, \quad \frac{dv}{dx} = 0 \text{ at } x = L \quad \text{Essentia B.C.} \end{aligned}$$

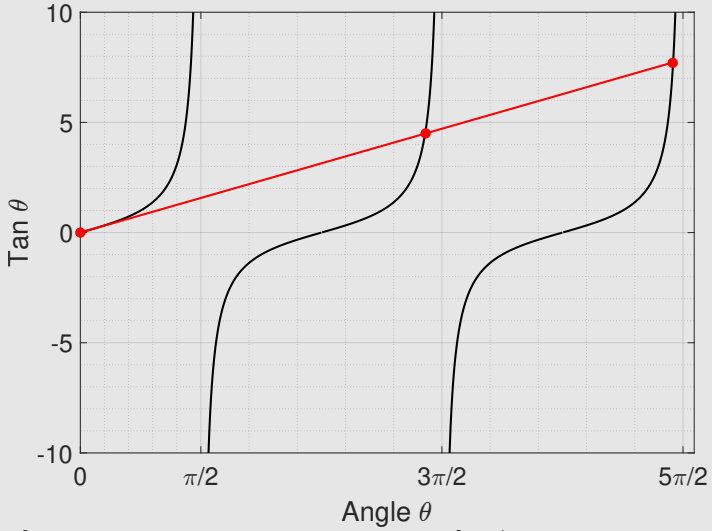
प्रथम दो सीमा-प्रतिबंधों से $C_1 = C_4 = 0$ प्राप्त होता है, और अन्य दो से

$$\sin \lambda L - \lambda L \cos \lambda L = 0$$

परंतु चूँकि $\cos \lambda L$ शून्य नहीं हो सकता, अतः पूर्ववर्ती समीकरण को इस रूप में सरल किया जा सकता है:

$$\tan \lambda L = \lambda L \tag{29.23}$$

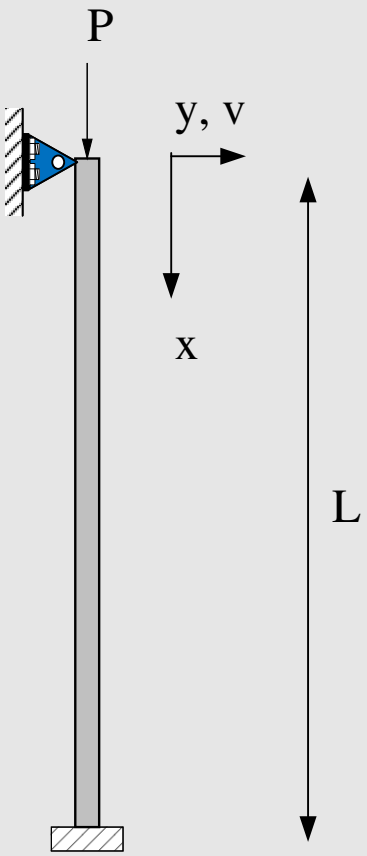
यह एक अबीजीय बीजीय समीकरण है जिसे केवल संख्यात्मक रूप से हल किया जा सकता है। मूलतः हम $y = x$ और $y = \tan x$ का प्रतिच्छेद खोज रहे हैं।



और लघुतम धनात्मक मूल $\lambda L = 4.4934$ है। चूँकि $k^2 = \frac{P}{EI}$, अतः लघुतम क्रांतिक भार है:

$$P_{cr} = \frac{(4.4934)^2}{L^2} EI = \frac{\pi^2}{(0.699L)^2} EI$$

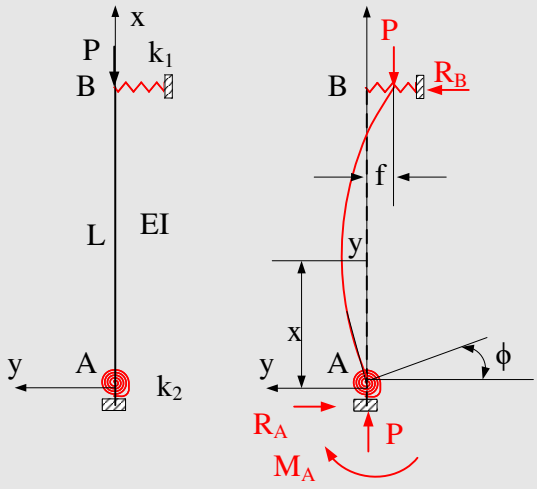
ध्यान दें कि यदि x को इस प्रकार हल करें कि $v_{,xx} = 0$ (अर्थात् नति-परिवर्तन बिंदु), तो $x = 0.699L$।
इस स्तंभ का कुंचन भार §60.1.2.1 में संख्यात्मक रूप से निर्धारित किया जाएगा।



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

29.3.2.1.4 उदाहरण 29.8: प्रत्यास्थ आलंबों वाला स्तंभ



सन्निकट स्तंभ के दोनों सिरों पर प्रत्यास्थ आलंब हैं: $R_B = k_1 f$ और $M_A = k_2\phi$। हम कुंचन भार P_{cr} निर्धारित करना चाहते हैं।
किसी बिंदु X पर आघूर्ण है:

$$M(x) = -P(f+y) + k_1 f(L-x)$$

$EId^2y/dx^2 = M(x)$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = f\,[k_1(L-x) - P] \qquad (29.24)$$

यह द्वितीय-कोटि असमघात अवकल समीकरण है। यदि हम परिभाषित करें:

$$f* = f\left[\frac{k_1}{P}(L-x) - 1\right]$$

तब समीकरण 29.24 का व्यापक समाधान और संगत ढाल हैं:

$$y = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x + y*$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -C_1\lambda\sin\lambda x + C_2\lambda\cos\lambda x - \frac{fk_1}{P}$$

जहाँ

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI}$$

निम्न सीमा-प्रतिबंधों से दो नियतांकों C_1 और C_2 तथा f का समाधान करते हैं:

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = \phi; \qquad y(L) = -f$$

प्रथम सीमा-प्रतिबंध से प्राप्त होता है:

$$C_1 + f\left(\frac{k_1 L}{\lambda} - 1\right) = 0$$

आलंब A पर, $M_A = f(k_1L - P)$; अतः घूर्णन कोण है:

$$\phi = \frac{M_A}{k_2} = \frac{f}{k_2}(k_1L - P)$$

अतः द्वितीय सीमा-प्रतिबंध से प्राप्त होता है:

$$C_2\lambda - f\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1L - P}{k_2}\right) = 0$$

अंततः, तृतीय सीमा-प्रतिबंध से प्राप्त होता है:

$$C_1\cos\lambda L + C_2\sin\lambda L = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इन तीन समीकरणों को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1 L}{P} - 1 \\ 0 & \lambda & -\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) \\ \cos \lambda L & \sin \lambda L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

यह समघात समीकरण है; अतः इसके सारणिक को शून्य रखकर सुनिश्चित करना होगा कि एक (अतुच्छ) समाधान विद्यमान है। तृतीय पंक्ति में एक छोटे प्रतिस्थापन के बाद प्राप्त होता है:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1 L}{P} - 1 \\ 0 & \lambda & -\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) \\ 1 & \tan \lambda L & 0 \end{vmatrix} = 0$$

सारणिक लेने पर समीकरण को λ के सापेक्ष अबीजीय रूप में पुनः लिखा जा सकता है:

$$\tan \lambda L = \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} \tag{29.25}$$

विशेष मामले

1-a: शीर्ष मुक्त, आधार कमानी: $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$ सीधे प्रतिस्थापन से प्राप्त होता है:

$$\tan \lambda L = \frac{k_2 \sqrt{\frac{P}{EI}}}{P}$$

2-a: शीर्ष आबद्ध, आधार कमानी: $k_1 = \infty,\ k_2 \neq 0$ समीकरण 29.25 से अनिर्धारित रूप $(\infty / infty)$ प्राप्त होगा; अतः L'Hôpital नियम लागू करते हैं:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

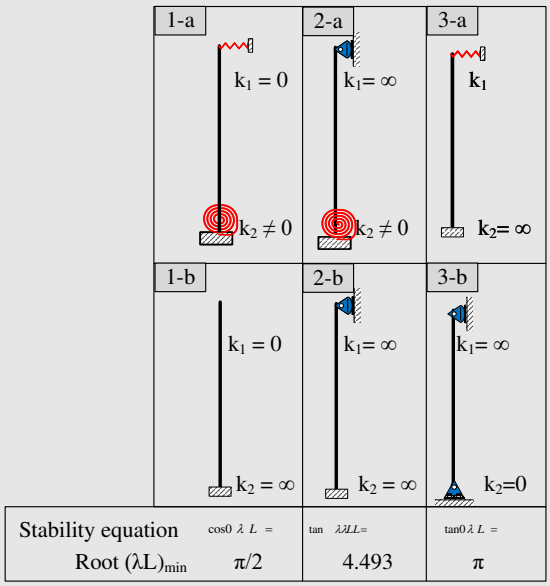
अथवा

$$\tan \lambda L = \lim_{k_1 \to \infty} \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} = \frac{k_2 L \lambda}{k_2 + LP} = \frac{k_2 L \sqrt{\frac{P}{EI}}}{k_2 + LP}$$

3-a: शीर्ष कमानी, आधार आबद्ध: $k_1 \neq 0,\ k_2 = \infty$ पुनः L'Hôpital नियम लागू करना आवश्यक है:

$$\tan \lambda L = \lim_{k_2 \to \infty} \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} = L \sqrt{\frac{P}{EI}} \left(1 - \frac{P}{k1L}\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



इन समीकरणों से हम समीकरणों को व्युत्पन्न (अथवा पूर्व-व्युत्पन्न समीकरणों को पुनः प्राप्त) कर सकते हैं।

1-b: शीर्ष मुक्त, आधार आबद्ध: $k_1 = 0, k_2 = \infty$ केवल निरीक्षण से प्राप्त होता है:

$$\tan \lambda L = \infty \Rightarrow (\lambda L)_{min} = \frac{\pi}{2}$$

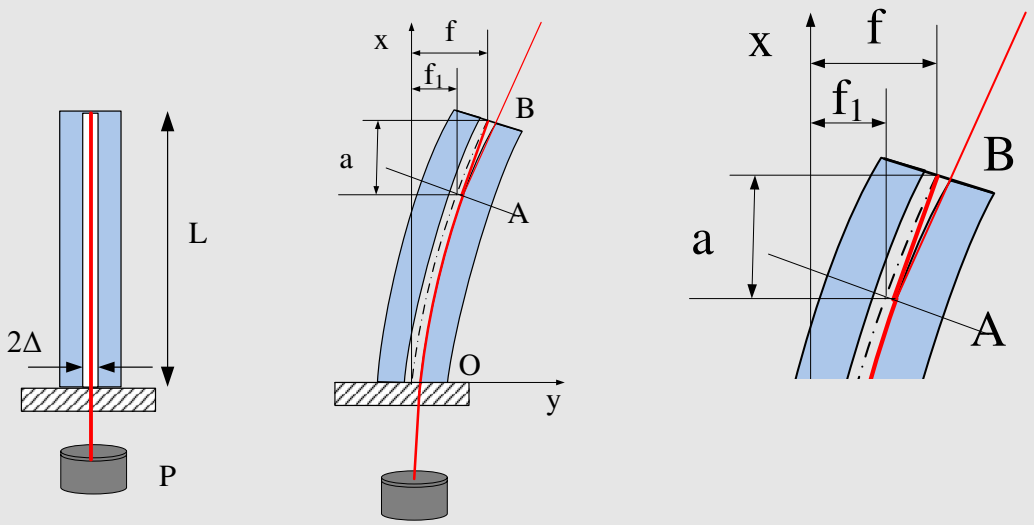
2-b: शीर्ष आबद्ध, आधार आबद्ध: $k_1 = \infty;\ k_2 = \infty$

$$\tan \lambda L = \lim_{k_2 \to \infty} \frac{k_2 L \sqrt{\frac{P}{EI}}}{k_2 + LP} \Rightarrow (\lambda L)_{min} = 4.493$$

3-b: शीर्ष आबद्ध, आधार कब्जेदार: $k_1 = \infty;\ k_2 = 0$ यह पूर्ववर्ती समीकरणों का ठीक-ठीक विशेष मामला नहीं है; अतः समीकरण 29.25 पर पुनः विचार करते हैं। निर्दिष्ट सीमा-प्रतिबंधों से स्पष्टतः प्राप्त होता है:

$$\tan \lambda L = 0 \Rightarrow (\lambda L)_{min} = \pi$$

29.3.2.1.5 उदाहरण 29.9: अवरुद्ध कुंचन



नली का कुंचन तब होगा जब $P = \pi^2 EI/4L^2$। जब तक विक्षेप f, Δ से अधिक नहीं होता, यही सीमांत बल बना रहता है।

परंतु किसी अवस्था में रस्सी नली की वक्र दीवार के संपर्क में आएगी; तब दो भागों, OA और AB, पर विचार करना होगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भाग OA में आघूर्ण केवल $P\Delta$ के बराबर है और नली द्विघात वक्र में मुडती है (स्मरण करें $M/EI = d^2y/dx^2$; दो बार समाकलन करके और आधार पर सीमा-प्रतिबंध लागू करके):

$$y = \frac{P\Delta}{2EI}x^2$$

A पर विक्षेप है:

$$f_1 = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2$$

अब f का समाधान आवश्यक है। ज्यामितीय विचारों से, यदि भाग AB में दंड मुडा न होता, तो B पर विस्थापन होता:

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L-a} a = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \frac{P\Delta}{EI}(L-a)a$$

परंतु द्वितीय भाग इतना वक्र होता है कि B, स्पर्शरेखा AB से Δ दूरी हट जाता है। अतः

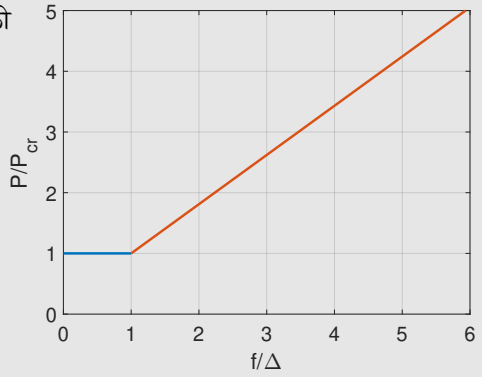
$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \frac{P\Delta}{EI}(L-a)a + \Delta$$

अथवा

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L^2-a^2) + \Delta$$

परंतु अभी भी a ज्ञात नहीं है। a उस एक सिरे पर आबद्ध दंड की लंबाई है जो बल P के अधीन स्थिरता खो देता है:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{\pi^2 EI}{4P}$$



f में प्रतिस्थापित करने पर

$$f = \Delta\left(\frac{PL^2}{2EI} - \frac{\pi^2}{8} + 1\right)$$

अथवा

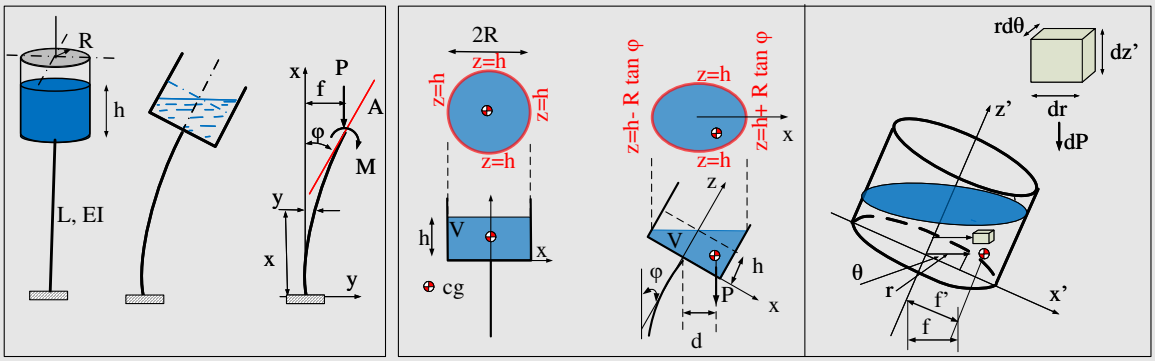
$$\frac{f}{\Delta} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{P}{P_{cr}} - 1\right) + 1$$

जहाँ $P_{cr} = \pi^2 EI/4L^2$।

29.3.2.1.6 उदाहरण 29.10: जल मीनार

जल मीनार का अभिकल्प करते समय स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि क्या संरचना स्थिर है। टंकी में जल के किस स्तर पर आलंबी स्तंभ स्थिरता खो देगा (Feodossiev, 1977)?

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



नियंत्रक अवकल समीकरण

हम छोटे विरूपण सहित मुक्त-पिंड आरेख बनाकर आरंभ करते हैं। दंड के प्रत्यास्थ वक्र का अवकल समीकरण निम्न है:

$$EIy'' = P(f - y) + M$$

बल P स्पष्टतः जल के भार के बराबर है:

$$P = \gamma \pi R^2 h$$

जहाँ γ जल का विशिष्ट भार है।

आरोपित आघूर्ण

अब झुके हुए बेलनाकार पात्र में जल के कारण उत्पन्न आघूर्ण M व्युत्पन्न करना है। झुकाव कोण ϕ है और आघूर्ण z-अक्ष के परितः है, जो ऊर्ध्वाधर आलंब के लंबवत है।

जब बेलन कोण ϕ से झुकता है, तब द्रव्यमान-केंद्र स्थानांतरित होता है। हम आलंब बिंदु से गुजरने वाले ऊर्ध्वाधर अक्ष से द्रव्यमान-केंद्र का क्षैतिज विस्थापन d व्युत्पन्न करते हैं।

हम बेलनाकार निर्देशांकों का उपयोग करते हैं, जिसमें z' अक्ष बेलन के सममिति-अक्ष के अनुदिश और x-अक्ष बेलन के झुकाव की दिशा के अनुदिश है। हम θ को इस प्रकार परिभाषित करते हैं कि $x = r\cos\theta$। इस निकाय में जल की मुक्त सतह का समीकरण है:

$$z = h + \alpha x = h + \alpha r\cos\theta$$

जहाँ $\alpha = \tan\phi$। तब समाकलन आयतन निम्न है:

$$0 \le r \le R \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le z \le h + \alpha r\cos\theta$$

तब $dV = rdrd\theta dz$, और जल के भार का परिमाण $P = \gamma\pi hR^2$ है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हम जल का केंद्रक (x' अक्ष के अनुदिश) निर्धारित करना चाहते हैं; एकमात्र जटिलता यह है कि समाकलों के मूल्यांकन-क्रम में सावधानी रखनी होगी।

$$\begin{aligned} df' &= \frac{\gamma}{P}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{h+\alpha r\cos\theta}(r\cos\theta)r\,dr\,d\theta\,dz \\ &= \frac{\gamma}{P}\int_0^R\int_0^{2\pi}(hr^2\cos\theta+\alpha r^3\cos^2\theta)\,dr\,d\theta \\ &= \frac{\gamma\pi}{P}\int_0^R(\alpha r^3)\,dr \\ &= \frac{\alpha\gamma R^4}{4P}=\frac{\alpha R^2}{4h} \end{aligned}$$

अंततः हमें केंद्रक के x निर्देशांक में रुचि है; प्रतिस्थापन करने पर प्राप्त होता है:

$$f = f'\cos\phi = \frac{\tan\phi R^2}{4h}\cos\phi = \frac{R^2}{4h}\sin\phi \simeq \frac{R^2}{4h}\phi$$

तब परिणामी आघूर्ण होगा:

$$M = Pd = (\gamma\pi R^2 h)\frac{R^2}{4h}\phi = \frac{\gamma\pi R^4}{4}\phi$$

यह व्यंजक h से स्वतंत्र है और स्पष्टतः व्युत्पत्ति त्रुटिपूर्ण है।

अतः हम Feodossiev, 1977 द्वारा दिया गया समीकरण अपनाते हैं (यद्यपि वहाँ व्युत्पत्ति नहीं दी गई है):

$$M = \frac{\gamma\pi R^2}{4}(2h^2+R^2)\phi$$

समाधान

नियंत्रक अवकल समीकरण का समाधान करते हैं:

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + f + \frac{2h^2+R^2}{4h}\phi$$

जहाँ $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$।

सीमा-प्रतिबंध

जब $x=0$, तब $y=0$ और $y'=0$; जब $x=l$, तब $y=f$ और $y'=\phi$। इन प्रतिबंधों से प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} B + f + \frac{2h^2+R^2}{4h}\phi &= 0 \\ A &= 0 \\ A\sin\alpha l + B\cos\alpha l + \frac{2h^2+R^2}{4h}\phi &= 0 \\ A\alpha\cos\alpha l - B\alpha\sin\alpha l &= \phi \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंतिम दो समीकरणों से प्राप्त होता है:

$$\frac{\alpha l \tan \alpha l}{4\frac{h}{l}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+\frac{R^2}{l^2}\right)=1$$

P का मान प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है:

$$\alpha l=\sqrt{\frac{P}{EI}}l=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2 l^3}{EI}}\sqrt{\frac{h}{l}}$$

तब अपेक्षित राशि h/l निम्न अबीजीय समीकरण से निर्धारित होती है:

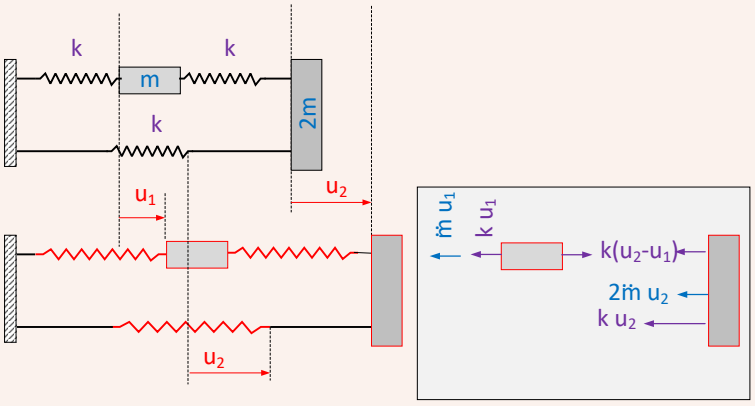
$$\frac{a}{4}\frac{\tan a\sqrt{\frac{h}{l}}}{\sqrt{\frac{h}{l}}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+b^2\right)=1$$

जहाँ

$$a=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2 l^3}{EI}}\quad\text{and}\quad b=\frac{R}{L}$$

29.3.2.2 मुक्त कंपन के साथ सादृश्य

25 अभी विचार की गई समस्या दो स्वतंत्रता-कोटि वाले द्रव्यमान-कमानी निकाय के कंपन, चित्र 29.4, से अत्यधिक समानता रखती है; वह भी एक *अभिलाक्षणिक मान समस्या* है।



चित्र 29.4: दो स्वतंत्रता-कोटि वाला गतिक निकाय

26 प्रत्येक द्रव्यमान पर द्रव्यमान और त्वरण के गुणनफल के बराबर जड़त्व बल तथा कमानी बल कार्य करते हैं:

$$2m\ddot{\mathbf{u}}_2+k\mathbf{u}_2+k(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)=0$$
$$m\ddot{\mathbf{u}}_1+k\mathbf{u}_1+k9\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_10=0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा आव्यूह रूप में

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{U}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

27 अभिलाक्षणिक समीकरण $|\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}|$ है, जहाँ $\lambda = \omega^2$, और ω प्राकृतिक आवृत्ति है।

$$\begin{vmatrix} 2h - \lambda & -h \\ -h & 2h - 2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

जहाँ $h = k/m$। यह निम्न बहुपद में सरल हो जाता है:

$$\lambda^2 - 3h\lambda + \frac{3}{2}h^2 = 0$$

हल करने पर, $\lambda = (3 \pm -\sqrt{3})h/2$, अथवा

$$\omega_1 = 0.796\sqrt{k/m}$$
$$\omega_1 = 1.538\sqrt{k/m}$$

28 विधा-आकृतियाँ ϕ_1 और ϕ_2 (स्वतंत्रता-कोटियों के सापेक्ष परिमाण) ज्ञात करने के लिए अभिलाक्षणिक समीकरण में प्रतिस्थापन करते हैं और प्रथम अवयव को 1 के बराबर रखते हैं:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.3660 \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.3660 \end{Bmatrix}$$

29.3.2.3 प्रभावी लंबाई गुणक K

29 स्मरण करें कि Euler कुंचन भार पिनित स्तंभ के लिए व्युत्पन्न किया गया था। अनेक मामलों में स्तंभ के सीमा-प्रतिबंध भिन्न होंगे। यह दर्शाया जा सकता है कि सभी मामलों में कुंचन भार निम्न होगा:

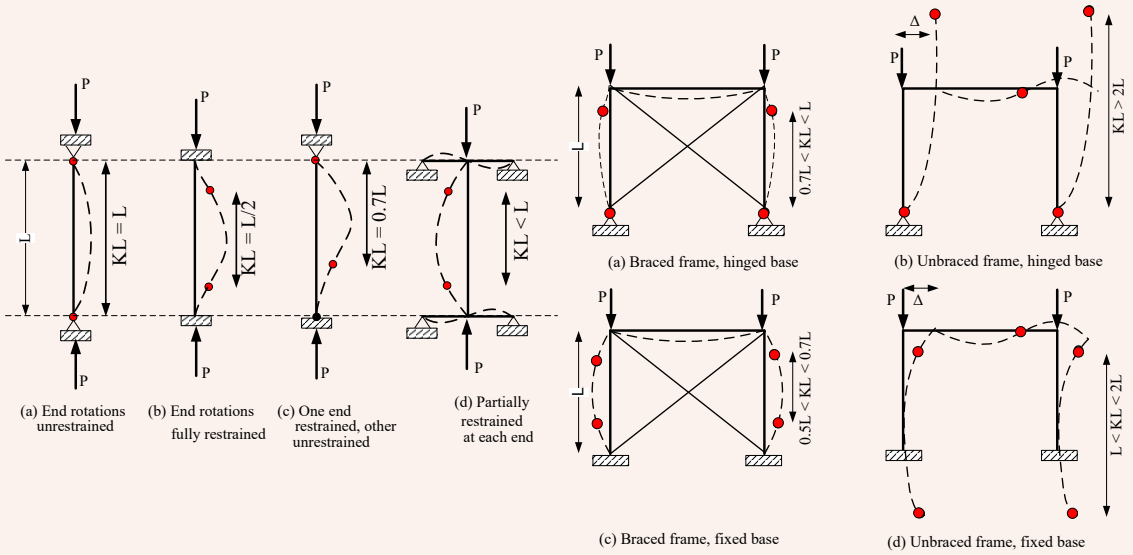
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \tag{29.26}$$

जहाँ K को *प्रभावी लंबाई गुणक* और KL को *प्रभावी लंबाई* कहते हैं। अतः

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r_{\min}}\right)^2}$$

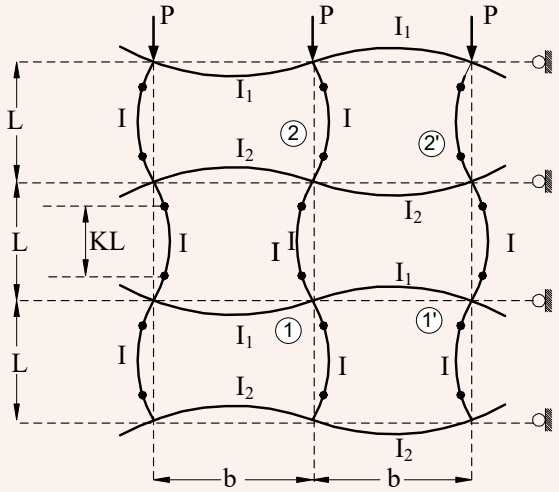
अनुपात $\frac{KL}{r_{\min}}$ को तनुता अनुपात कहते हैं। ध्यान दें कि $r_{\min}$ अनाबंधित दिशा (अथवा दिशाओं) में न्यूनतम परिभ्रमण त्रिज्या होनी चाहिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) धरनें (b) ढाँचे

चित्र 29.5: धरनों और ढाँचों की प्रभावी लंबाइयाँ



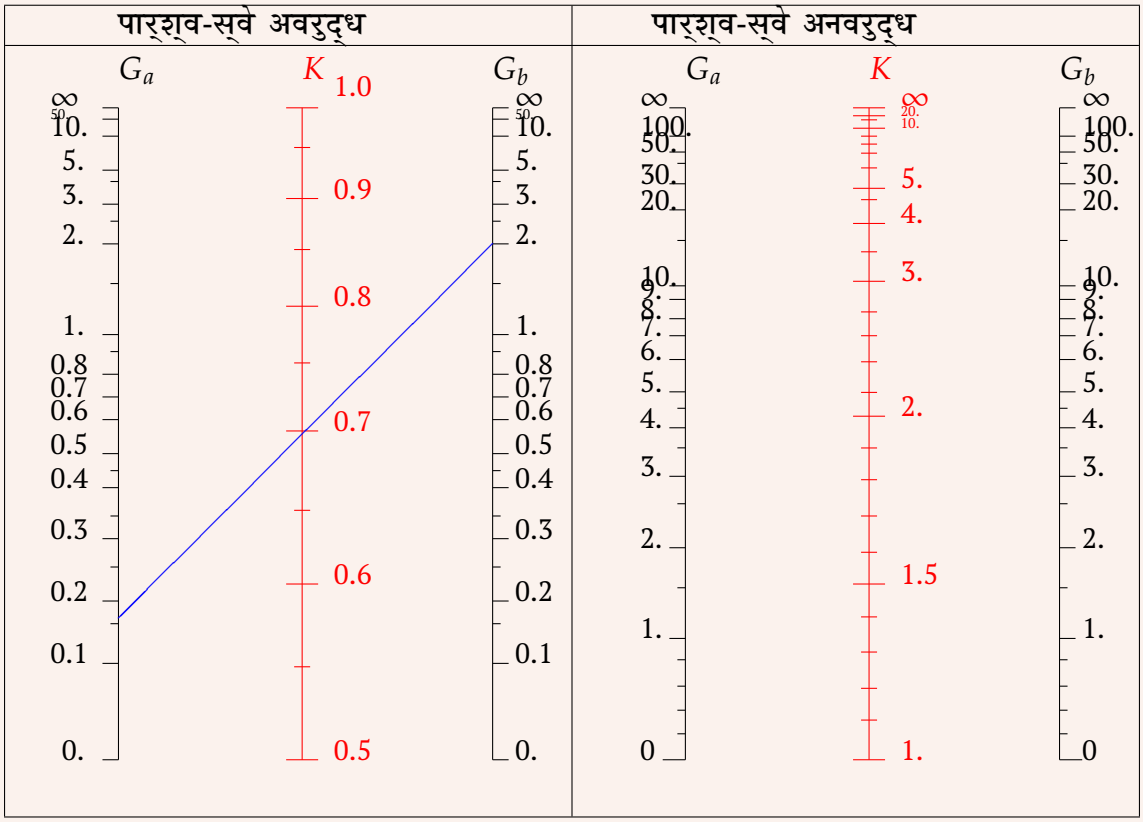
चित्र 29.6: बहु-खण्डीय, बहु-मंजिला ढाँचों में स्तंभों की प्रभावी लंबाइयाँ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

30 प्रभावी लंबाई केवल संख्यात्मक अथवा सन्निकट विधियों से निर्धारित की जा सकती है और वह दो सन्निकट (वास्तविक अथवा आभासी) नति-परिवर्तन बिंदुओं के बीच की दूरी है, चित्र 29.5:

31 प्रभावी लंबाई के निर्धारण के लिए सर्वाधिक प्रयुक्त आलेख Structural Stability Research Council द्वारा निर्मित हैं। किसी एक स्तंभ के लिए संरेखण आलेख, चित्र 29.6, चित्र 29.7 में दर्शाया गया है[1]। ध्यान दें कि यह आलेख मानता है कि सभी अवयव अभी भी प्रत्यास्थ परिसर में हैं।

32 इस प्रकार के आलेख को *नामालेख* अथवा *nomograph* कहते हैं। दुर्भाग्यवश यह अब लगभग विस्मृत कला है, जो गणितीय संबंधों को आलेखीय रूप से निरूपित करती है। दूसरे शब्दों में, यह द्विविमीय आरेख है जिसे (सामान्यतः जटिल) गणितीय फलनों की सन्निकट आलेखीय गणना संभव बनाने के लिए बनाया जाता है। अनेक वर्षों तक इसका व्यापक उपयोग अभियंताओं को जटिल सूत्रों की व्यावहारिक परिशुद्धता वाली तीव्र आलेखीय गणनाएँ प्रदान करने में हुआ। यह दुर्भाग्यपूर्ण है कि अब यह चलन से बाहर होकर कंप्यूटर द्वारा प्रतिस्थापित हो गया है और हम कंप्यूटर द्वारा दिए गए सभी सार्थक अंकों पर विश्वास करने लग सकते हैं। यही बात स्लाइड-रूल पर भी लागू होती है।



चित्र 29.7: अर्ध-लचीले संयोजनों के लिए संरेखण आलेख (American Institute of Steel Construction, 2016)

[1]चित्र में G_a और G_b क्रमशः 0.18 और 2.0 हैं; अतः संगत K का मान 0.7 है। नीली रेखा को सूचक रेखा अथवा *सममान* रेखा और मध्य की लाल रेखा को *मापनी अक्ष* कहते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

33 संरेखण आलेख के उपयोग में निम्न सूत्र द्वारा स्तंभ के प्रत्येक सिरे पर G की गणना की जाती है:

$$G_a = \frac{\sum \frac{I_c}{L_c}}{\sum \frac{I_g}{L_g}}$$

जहाँ G_a स्तंभ के सिरे a पर दृढता है तथा I_c, I_g क्रमशः स्तंभों और गर्डरों के जडत्व आघूर्ण हैं। योग में केवल वे अवयव सम्मिलित किए जाने चाहिए जो उस संधि से दृढतापूर्वक जुडे हों और उस तल में स्थित हों जिसके लिए कुंचन पर विचार किया जा रहा है।

34 अतः G_a और G_b निर्धारित हो जाने पर उन मानों को उपयुक्त आलेख में सरल रेखा से जोडा जाता है, और k उस रेखा तथा मध्य अक्ष का प्रतिच्छेद बिंदु है।

35 वैकल्पिक रूप से:

$$\frac{G_A G_B}{4}\left(\frac{\pi}{K}\right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2}\right)\left(1 - \frac{\pi/K}{\tan \pi/K}\right) + \frac{2\tan \pi/2K}{\pi/K} = 1$$

McGuire and Winter, 1968, pg. 467

29.3.2.4 अप्रत्यास्थ स्तंभ

36 स्तंभ के लिए दो सीमांत भार हैं:

1. सकल परिच्छेद का पराभव $P_{cr} = F_y A_g$, जो छोटे दृढ स्तंभों में होता है
2. प्रत्यास्थ (Euler) कुंचन, समीकरण 29.26, $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$, जो लंबे तनु स्तंभों में होता है।

37 ये दोनों व्यंजक वास्तविक स्तंभ-कुंचन के अनंतस्पर्शी मान हैं। मध्यवर्ती विफलता भार अवशिष्ट प्रतिबलों की उपस्थिति से उत्पन्न होते हैं, जो आगे *अप्रत्यास्थ कुंचन* को जन्म देते हैं।

38 अप्रत्यास्थ कुंचन तब होता है जब (औसत) प्रतिबल अभी पराभव प्रतिबल तक नहीं पहुँचे हों; यह स्पर्शरेखा मापांक E_t पर आधारित है, जो प्रारंभिक मापांक E से कम होता है।

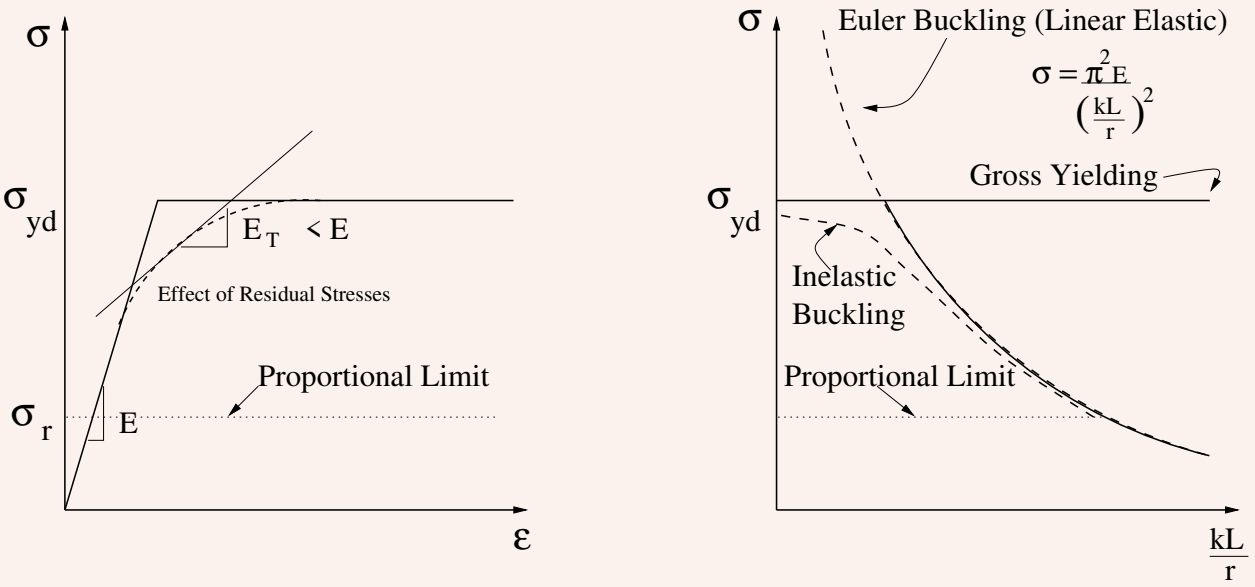
39 अवशिष्ट प्रतिबल (असमान शीतलन से उत्पन्न) अप्रत्यास्थ कुंचन आरंभ करेंगे, चित्र 29.8।

40 अप्रत्यास्थ कुंचन वक्र को Euler प्रत्यास्थ कुंचन (तनु स्तंभों के लिए) और पराभव प्रतिबल (दृढ स्तंभों के लिए), दोनों के प्रति अनंतस्पर्शी होना चाहिए।

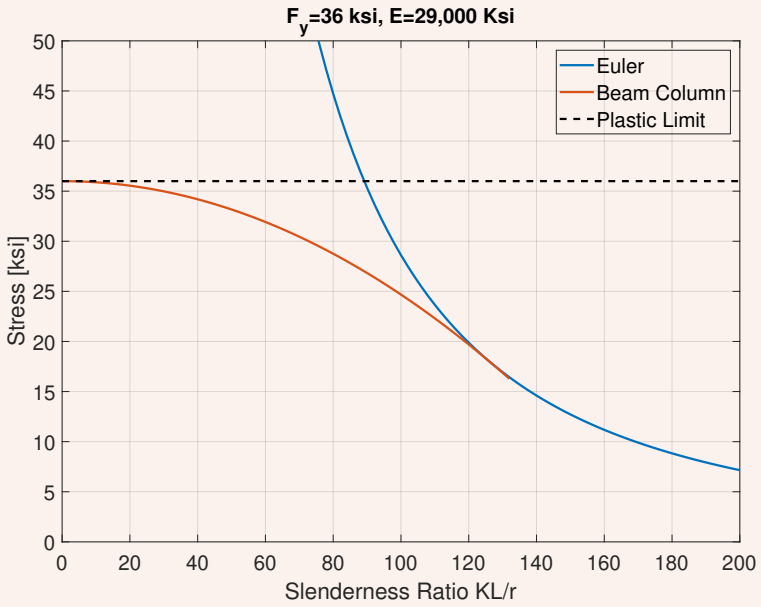
41 Structural Stability Research Council (SSRC) ने एक परवलयी वक्र प्रस्तावित किया है जो प्रत्यास्थ कुंचन और पराभव के बीच संक्रमण प्रदान करता है तथा इस प्रकार अवशिष्ट प्रतिबलों की उपस्थिति और परिणामी अप्रत्यास्थ कुंचन को समाहित करता है, चित्र 29.9।

$$\sigma_{cr} = \sigma_y \left[1 - \frac{\sigma_y}{4\pi^2 E}\left(\frac{KL}{r_{min}}\right)^2\right]$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

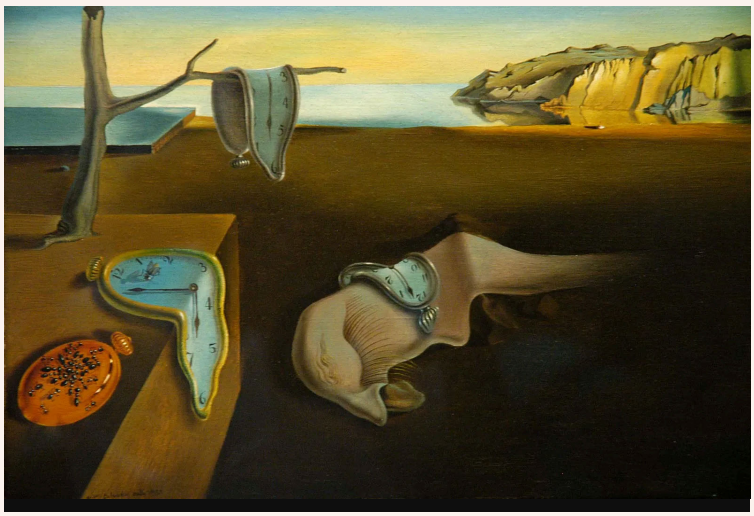


चित्र 29.8: अप्रत्यास्थ कुंचन



चित्र 29.9: Euler कुंचन और SSRC स्तंभ वक्र

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



स्मृति की दृढता, Salvador Dalí, 1931

अतियथार्थवादी पिघलती घड़ियाँ चरम विरूपणों का निरूपण करती हैं; अतः यह चित्रकला उन बड़े विस्थापनों का उपयुक्त रूपक है जहाँ संरचनाएँ लघु-विकृति धारणाओं से परे व्यवहार करती हैं।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

30 केबल संरचनाएँ

सारांश

केबल ऐसी संरचनाएँ हैं जो बड़े विरूपण सह सकती हैं, भारों को समायोजित करने के लिए अपनी ज्यामिति को निरंतर अनुकूलित करती हैं और केवल तनन बल वहन करती हैं। ये विशेषताएँ केबलों को उपयोगी बनाने के साथ-साथ उनके विश्लेषण को चुनौतीपूर्ण भी बनाती हैं; इन जटिलताओं का इस अध्याय में अन्वेषण किया जाएगा। हम बिंदु-भारों और फनिकुयुलर केबलों से आरंभ करते हैं और फिर वितरित भारों पर विचार करते हैं। वितरित भार दो प्रकार के होते हैं: प्रक्षेपित लंबाई पर वितरित भार, जिससे परवलयी आकृति बनती है; और केबल की चाप-लंबाई पर वितरित भार, जिससे कैटेनरी आकृति उत्पन्न होती है। दोनों मामलों में भिन्न आरंभिक स्थितियों (लंबाई, झोल, आलंब आदि) के लिए भिन्न समीकरण-समुच्चय आवश्यक होते हैं। हम तापमान, केबल की विस्तार्यता और उसके पूर्वप्रतिबलन के प्रभाव का भी अन्वेषण करेंगे। अंततः विषय का व्यापक विवेचन करने के लिए अध्याय को बढ़ती जटिलता वाले अनेक उदाहरणों से स्पष्ट किया जाएगा।

30.1 परिचय 1110
30.2 संकेंद्रित भार 1111
30.2.1 उदाहरण 30.1: फनिकुयुलर केबल 1111
30.2.2 उदाहरण 30.2: झुका हुआ फनिकुयुलर केबल 1113
30.2.3 उदाहरण 30.3: द्विव-केबल गोंडोला 1114
30.3 वितरित भार 1115
30.3.1 साम्य समीकरण 1115
30.3.2 qdx; पार्श्व भार; परवलय . . . 1116
30.3.3 qds; कैटेनरी 1135
30.3.4 परवलय तथा कैटेनरी पर आधारित हलों की तुलना 1142

30.1 परिचय

1 केबल शून्य अथवा नगण्य आनमनी दृढता वाला तनु लचीला अवयव है; अतः वह केवल तनन बल संचारित कर सकता है।

2 किसी भी बिंदु पर तनन बल केबल की स्पर्शरेखा की दिशा में कार्य करता है (क्योंकि कोई अन्य घटक आनमन उत्पन्न करेगा)।

3 इसकी सामर्थ्य भार-वितरण को समायोजित करने के लिए ज्यामिति में व्यापक परिवर्तन (भार-प्रयोग बिंदुओं पर ढाल) सहने की क्षमता से उत्पन्न होती है।

4 केबल झोल (h) ग्रहण करके ऊर्ध्वाधर बलों का प्रतिरोध करते हैं और इस प्रकार तनन बल विकसित करते हैं।

5 इस बल के क्षैतिज घटक (H) को प्रणोद कहते हैं।

6 केबल आलंबों के बीच की दूरी को जीवा (विस्तृति) कहते हैं।

7 झोल-विस्तृति अनुपात को निम्न से निरूपित किया जाता है:

$$r = \frac{h}{l}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

8 जब (अपेक्षाकृत) नगण्य भार वाले केबल पर संकेंद्रित भारों का समुच्चय लगाया जाता है, तब केबल रैखिक खंडों की शृंखला में विक्षेपित होता है और परिणामी आकृति फनिक्युलर बहुभुज कहलाती है।

9 यदि केबल केवल ऊर्ध्वाधर बलों को आलंबित करता है, तो क्षैतिज घटक H, केबल तनन T का, नियत रहता है (अतः दोनों क्षैतिज अभिक्रियाएँ बराबर और विपरीत होती हैं)।

10 केबल संरचनाओं (और सामान्यतः लचीली संरचनाओं) की एक अद्वितीय विशेषता यह है कि केवल आंतरिक बल ही नहीं, ज्यामिति भी अज्ञात होती है। दूसरे शब्दों में, चूँकि ज्यामिति भार के साथ बदलती है (साम्य समीकरण विरूपित विन्यास के मुक्त-पिंड आरेख पर आधारित होते हैं), अतः उसे भी निर्धारित करना होता है। इसे ज्यामितीय अरैखिकता भी कहते हैं। इसलिए केबल संरचनाओं के विश्लेषण में अभिक्रियाएँ और आंतरिक (अक्षीय) बल ही नहीं, ज्यामिति भी सम्मिलित होती है।

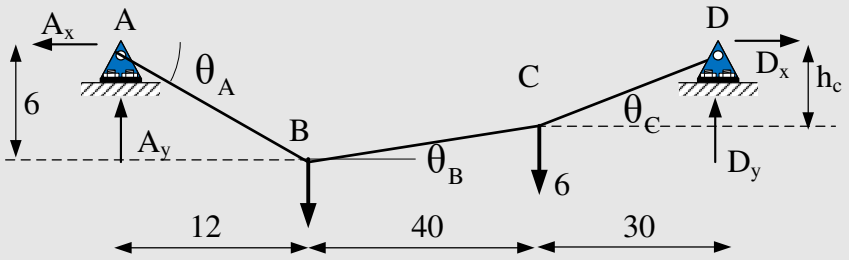
11 यदि भार लगाने से पहले भाररहित, अतनित केबल से आरंभ करें, तो समस्या को पुनरावृत्तीय रूप से हल करना होगा (क्योंकि यह ज्यामितीय रूप से अरैखिक है)। दूसरी ओर, सामान्यतः हम भार लगाने से पहले तनित केबल से आरंभ करते हैं। इस मामले में अतिरिक्त विरूपण सामान्यतः छोटे होते हैं; अतः केबल को अविस्तार्य माना जा सकता है और साम्य समीकरण समस्या के समाधान के लिए पर्याप्त होते हैं।

30.2 संकेंद्रित भार

12 बिंदु-भारों को आलंबित करने वाले केबल को फनिक्युलर केबल कहते हैं। इसका विश्लेषण *a priori* अत्यंत सरल है और मूल साम्य समीकरणों का उपयोग करता है।

13 हम एक सरल उदाहरण से आरंभ करेंगे और फिर फनिक्युलर की आकृति को नियंत्रित करने वाला फनिक्युलर केबल प्रमेय परिभाषित करेंगे।

30.2.1 उदाहरण 30.1: फनिक्युलर केबल



4 बाह्य अभिक्रियाएँ हैं; किंतु क्षैतिज अभिक्रियाएँ बराबर हैं और साम्य के तीन समीकरणों के अतिरिक्त हम अनेक प्रतिबंध-समीकरणों में से किसी एक का उपयोग कर सकते हैं। पहले A_y, D_y और $H = A_x = D_x$ का समाधान करते हैं। इस समस्या के लिए स्थैतिक साम्य के निम्न 3 समीकरण $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M = 0$ उपयोग किए जा सकते थे; किंतु x दिशा में कोई बल न होने के कारण दूसरा समीकरण उपयोगी नहीं है। इसके स्थान पर हम समुच्चय

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$\Sigma F_y = \Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$ पर विचार करेंगे। ध्यान दें कि इस समस्या में 8 अज्ञात ($A_x, A_y, D_x, D_y, \theta_A, \theta_B, \theta_C$ और h_C) हैं तथा चार नोड हैं, जिनमें से प्रत्येक पर साम्य के दो समीकरण हैं।

1. पहले D_y का समाधान करते हैं:

$$(+\circlearrowright)\ \Sigma M_A = 0; \Rightarrow 12(30) + 6(70) - D_y(100) = 0 \Rightarrow D_y = 7.8 \text{ kip}$$

2. फिर A_y का समाधान करते हैं:

$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; \Rightarrow A_y - 12 - 6 + 7.8 = 0 \Rightarrow A_y = 10.2 \text{ kip}$$

3. मुक्त-पिंड आरेख AB को पृथक करके क्षैतिज बल का समाधान करें:

$$(+\circlearrowright)\ \Sigma M_B = 0; \Rightarrow A_y(30) - H(6) = 0 \Rightarrow H = 51 \text{ kip}$$

4. अब मुक्त-पिंड आरेख CD को पृथक करके बिंदु C पर झोल का समाधान कर सकते हैं:

$$(+\circlearrowright)\ \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -D_Y(30) + H(h_c) = 0$$
$$\Rightarrow h_c = \frac{30D_y}{H} = \frac{30(7.8)}{51} = 4.6 \text{ ft}$$

5. अब इस मामले में केबल के आंतरिक बलों अथवा कर्षणों का समाधान करते हैं:

$$\tan\theta_A = \frac{6}{30} = 0.200 \Rightarrow \theta_A = 11.31\,\text{deg}$$
$$T_{AB} = \frac{H}{\cos\theta_A} = \frac{51}{0.981} = 51.98 \text{ kip}$$
$$\tan\theta_B = \frac{6-4.6}{40} = 0.035 \Rightarrow \theta_B = 2\,\text{deg}$$
$$T_{BC} = \frac{H}{\cos\theta_B} = \frac{51}{0.999} = 51.03 \text{ kip}$$
$$\tan\theta_C = \frac{4.6}{30} = 0.153 \Rightarrow \theta_C = 8.7\,\text{deg}$$
$$T_{CD} = \frac{H}{\cos\theta_C} = \frac{51}{0.988} = 51.62 \text{ kip}$$

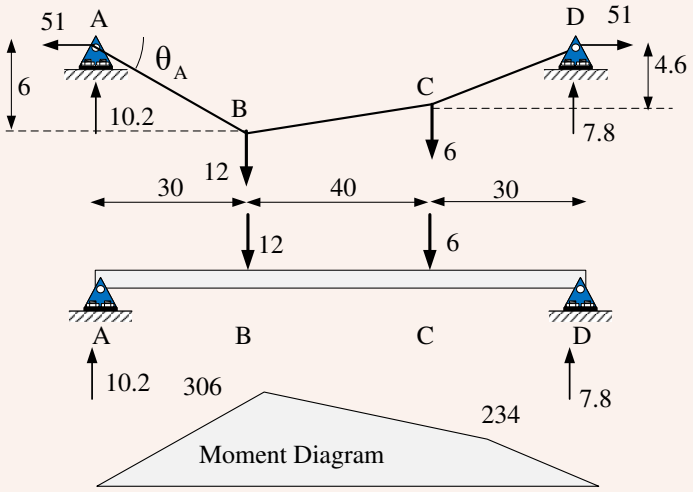
14 पूर्ववर्ती उदाहरण की गणनाएँ आगे बढ़ाने पर स्पष्ट है कि चरण उस सरल आलंबित धरन के विश्लेषण के समान हैं जिसकी विस्तृति केबल के बराबर है और जो समान ऊर्ध्वाधर भार वहन करती है। यह भी ध्यान दें कि केबल की आकृति और समतुल्य धरन का आघूर्ण आरेख एकसमान हैं, चित्र 30.1।

15 संयोगवश नहीं, बल्कि $Hh = M$ है:

$$(51)(6) = (10.2)(30) = 306\checkmark$$
$$(51)(4.6) = (7.8)(30) = 234\checkmark$$

16 अतः हम कह सकते हैं कि

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 30.1: केबल सिद्धांत का सत्यापन

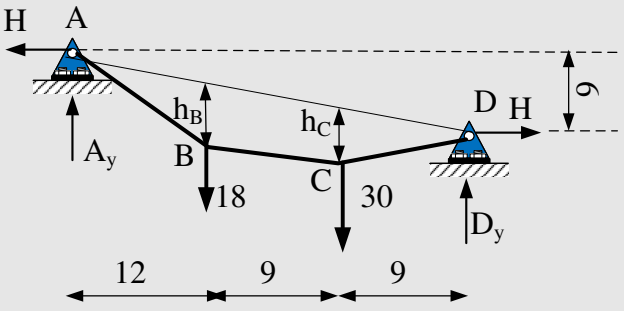
परिभाषा 30.1: सामान्य केबल

ऊर्ध्वाधर भारों के अधीन केबल के किसी भी बिंदु पर केबल तनन के क्षैतिज घटक और उस बिंदु से केबल जीवा तक की ऊर्ध्वाधर दूरी का गुणनफल उस बंकन आघूर्ण के बराबर होता है जो उसी परिच्छेद पर तब उत्पन्न होता यदि केबल द्वारा वहन किए जाने वाले भार, केबल के समान विस्तृति वाली सरल आलंबित धरन पर कार्य करते।

[17] इसे निम्न उदाहरण द्वारा और स्पष्ट किया जाएगा।

30.2.2 उदाहरण 30.2: झुका हुआ फनिक्युलर केबल

निम्न फनिक्युलर के लिए B और C पर अभिक्रियाएँ तथा झोल निर्धारित करने हैं।



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

साम्य समीकरणों का उपयोग करने पर

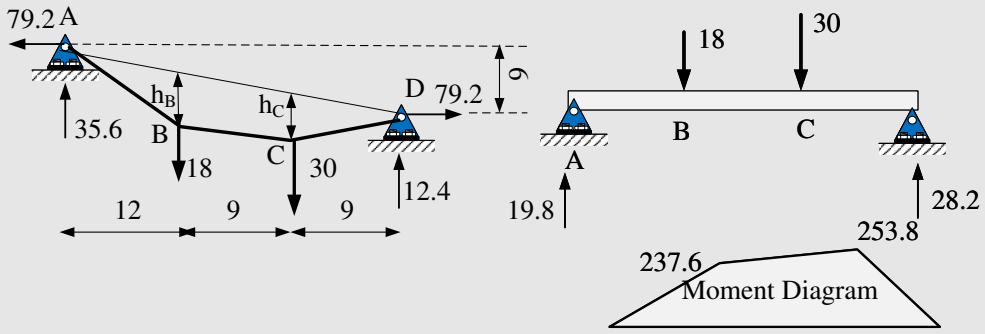
$$(+\circlearrowright)\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 12(18) + 21(30) - 6H - 30D_y = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_D = 0 \Rightarrow 18(18) + 9(30) - 30A_y + 6H = 0$$
$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y A_y + D_y - 30 - 18 = 0$$

इन तीन समीकरणों का समाधान है:

$$\lfloor\ A_y \quad D_y \quad H\ \rfloor = \lfloor\ 35.6 \quad 12.4 \quad 79.2\ \rfloor$$

संगत आघूर्ण आरेख नीचे दर्शाया गया है और झोल निम्न से सरलता से निर्धारित होते हैं:

$$h_B = \frac{M_B}{H} = \frac{237.6}{79.2} = 3$$
$$h_C = \frac{M_C}{H} = \frac{253.8}{79.2} = 3.2$$



18 अतः साम्य समीकरणों और सामान्य केबल प्रमेय से केबल के झोल सरलता से निर्धारित किए जा सकते हैं।

19 ध्यान दें कि विस्तारतः, जीवा पर एकसमान वितरित भार वहन करने वाले केबल की आकृति परवलयी होगी (संगत आघूर्ण आरेख की आकृति)।

30.2.3 उदाहरण 30.3: द्वि-केबल गोंडोला

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

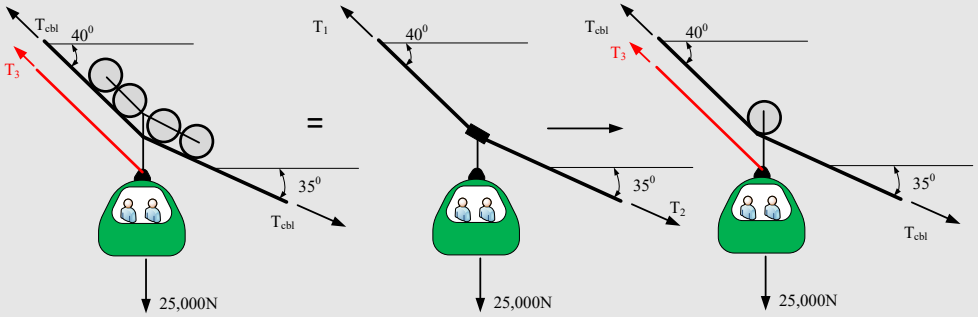
एक वहन केबल (काला) द्वारा आलंबित गोंडोला को, जो निचली मीनार से ऊँची मीनार की ओर नियत वेग से चल रहा है, ऊपर खींचने (लाल केबल द्वारा) के लिए आवश्यक बल निर्धारित करना है। पहले मानते हैं कि गोंडोला आलंबी केबल से आबद्ध (क्लैंपित) है; अतः खींचने वाले केबल की उपेक्षा करने पर:

$$\left\{\begin{array}{rll} (\leftarrow\ )\,\Sigma F_x = 0 & \Rightarrow & T_1\cos(40) - T_2\cos(35) \\ (+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0 & \Rightarrow & T_1\sin(40) - T_2\sin(35) - 25,000 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 234,900 \\ 219,700 \end{array}\right\}\ \text{N}$$

ध्यान दें कि केबल तनन गोंडोला के भार के लगभग 10 गुने हैं और $T_1 > T_2$। यदि गोंडोला को क्लैंप से मुक्त करें, तो वह नीचे फिसलेगा, जब तक कि उसे T_3 द्वारा रोका न जाए; और (आलंब निकाय में शून्य घर्षण मानकर) केबल T_{cbl} में नियत तनन होना चाहिए। अतः

$$T_3 = T_1 - T_2 = 234,900 - 219,700 = 15,200\ \text{N}$$
$$T_{cbl} = 234,900 - 15,200 = 219,700\ \text{N}$$



30.3 वितरित भार

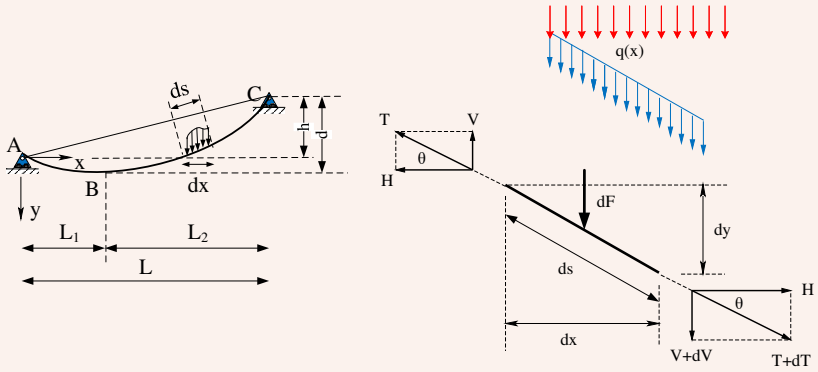
20 अगले खंडों में हम दो मामलों का परीक्षण करेंगे। पहले में भार केबल की प्रक्षेपित लंबाई पर एकसमान वितरित है (जैसे एकसमान भारित पुल को आलंबित करने वाला केबल), और दूसरे में केबल केवल अपना भार वहन करता है (जो चाप-लंबाई पर एकसमान वितरित है)।

21 आगे बढ़ने से पहले ध्यान दें कि केबल विश्लेषण की एक चुनौती किसी दी गई समस्या के अनेक सही समाधान-रूप हैं; अर्थात् समाधान क्षैतिज बल, झोल, अधिकतम तनन अथवा केबल लंबाई के संयोजन के पदों में हो सकता है। इससे कभी-कभी समाधान अथवा अन्य समाधानों से उसकी तुलना उलझनपूर्ण हो सकती है।

30.3.1 साम्य समीकरण

22 एकसमान वितरित भार वाले निलंबित केबल का मुक्त-पिंड आरेख चित्र 30.2 में दर्शाया गया है। सामान्यतः विस्तृति L, अधिकतम झोल d और आलंबों के बीच ऊर्ध्वाधर दूरी h ज्ञात होती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप



चित्र 30.2: केबल ज्यामिति # 1

23 किसी क्षैतिज भार के अभाव में H =नियत है।

24 ऊर्ध्वाधर बलों का योग देने पर:

$$(+\downarrow)\,\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V + dF + (V + \mathrm{d}V) = 0 \tag{30.1}$$

$$dV + dF = 0 \tag{30.2}$$

जहाँ V, x पर केबल तनन का ऊर्ध्वाधर घटक है।

25 चूँकि केबल को T की स्पर्शरेखा होना चाहिए, अतः:

$$\tan\theta = \frac{V}{H}$$

V को विलोपित करके और समीकरण 30.2 में प्रतिस्थापन द्वारा केबल के अनुदिश नियत H के पदों में पुनः लिखने पर:

$$\mathrm{d}(H\tan\theta) + dF = 0 \tag{30.3}$$

30.3.2 qdx; पार्श्व भार; परवलय

30.3.2.1 ज्यामिति

26 केबल ज्यामिति के लिए दो समतुल्य समीकरण व्युत्पन्न किए जाएँगे, क्योंकि आगामी व्युत्पत्तियों में दोनों की आवश्यकता होगी।

I H, q, L के पदों में

27 यह प्रथम व्युत्पत्ति क्षैतिज बल H, भार q, तथा ज्यामिति L और h के पदों में होगी, चित्र 30.2।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[28] x के अनुदिश एकसमान वितरित भार (जैसे पुल-पट्ट को आलंबित करने वाला केबल) के लिए $dF = qdx$ है और समीकरण 30.3 को इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(H\tan\theta) = q$$

चूँकि H नियत है (कोई क्षैतिज भार लागू नहीं है),

$$-H\frac{d}{\mathrm{d}x}(\tan\theta) = q \tag{30.4}$$

और $\tan\theta = \frac{dy}{\mathrm{d}x}$ को समीकरण 30.4 में प्रतिस्थापित करने पर केबलों का नियंत्रक अवकल समीकरण प्राप्त होता है:

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{H} \tag{30.5}$$

[29] आनमन के साथ सादृश्य पर ध्यान दें:

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI}$$

[30] दोहरा समाकलन देने पर:

$$Hy' = -qx + C_1 \tag{30.6}$$

$$Hy = -q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \tag{30.7}$$

C_1 तथा C_2 सीमा प्रतिबंधों से प्राप्त होते हैं: $y = 0$, जब $x = 0$, तथा $y = -h$, जब $x = L$।

[31] इससे प्राप्त होगा

$$C_2 = 0$$

$$-Hh = -q\frac{L^2}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{qL}{2} - H\frac{h}{L}.$$

अतः समीकरण 30.6 तथा 30.7 का रूप हो जाता है

$$y' = -\frac{q}{H}x + \frac{qL}{2H} - \frac{h}{L} \tag{30.8}$$

$$y = -\frac{q}{2H}x^2 + \left(\frac{qL}{2H} - \frac{h}{L}\right)x \tag{30.9}$$

इस प्रकार केबल का आकार परवलयी है और यह समीकरण आकार $y(x)$ को, अभी निर्धारित किए जाने वाले क्षैतिज बल H के पदों में, देता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

II s, L के पदों में

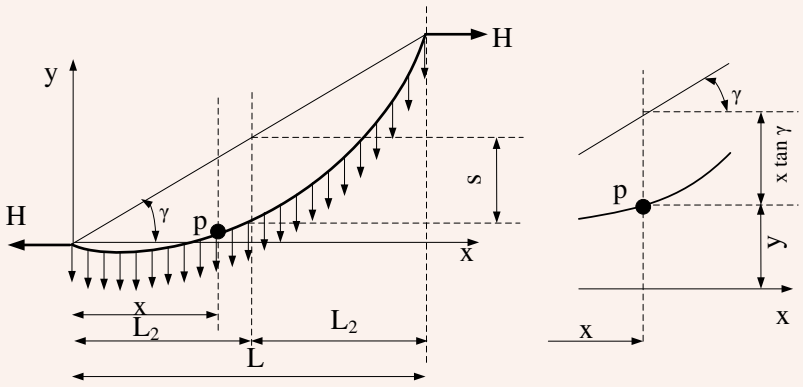
32 केबल का आकार समीकरण 30.9 (y के लिए) तथा H के लिए समीकरण 30.23 को संयोजित करके प्राप्त किया जा सकता है; फलतः

$$\frac{x\left(2d\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)(L-x)+h(x-2L)\right)}{L^2}$$

जो चित्र 30.3 के सापेक्ष है।

33 जीवा के सापेक्ष तथा लटकाव s के पदों में वक्र का समीकरण प्राप्त करने के लिए, चित्र 30.3 में हम h=0 रखते हैं

$$y=\frac{4sx}{L^2}(L-x)$$



चित्र 30.3: केबल ज्यामिति # 2

34 अब वापस लौटकर हम क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष केबल का समीकरण निर्धारित करते हैं

$$y=\frac{4sx}{L^2}(L-x)+x\tan\gamma \tag{30.10}$$

लटकाव का परिमाण

35 जीवा के सापेक्ष अधिकतम लटकाव होगा

$$s=\frac{qL^2}{8H} \tag{30.11}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

36 उच्चतर आलंब के सापेक्ष लटकाव d निम्न दो समीकरणों में से किसी एक द्वारा दिया जाएगा

$$d = \frac{hL^2 - 2hLL_1 + hL_1^2}{L(L-2L_1)} \qquad h \text{ और } L_1 \text{ के पदों में}$$

$$d = \frac{\left(2hH + L^2q\right)^2}{8HL^2q} \qquad q \text{ और } H \text{ के पदों में}$$

अधिकतम लटकाव का स्थान

37 अधिकतम लटकाव d के बिंदु (L_1 पर) पर $y' = 0$ होता है; अतः समीकरण 30.8 से

$$0 = -\frac{q}{H}x + \frac{0}{qL}2H - \frac{h}{L} \Rightarrow x = \frac{L}{2} - \frac{Hh}{qL} = L_1 \;\&\; L_2 = \frac{L}{2} + \frac{Hh}{qL}$$

क्रमशः A तथा B के परितः AB तथा BC के आघूर्ण लेने पर

$$H(d-h) - q\frac{L_1^2}{2} = 0 \Rightarrow H = q\frac{L_1^2}{2d-h}$$

$$Hd - q\frac{L_2^2}{2} = 0 \Rightarrow H = q\frac{L_2^2}{2d} \tag{30.12}$$

H को समान रखने पर

$$q\frac{L_1^2}{2d-h} = q\frac{L_2^2}{2d} \Rightarrow L_1 = \sqrt{\frac{d-h}{d}}L_2$$

परंतु $L_1 + L_2 = L$; अतः

$$L2 = \frac{L}{\left[\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1\right]} \tag{30.13}$$

जिससे प्राप्त होता है

$$L_1 = L - \frac{L}{\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1}$$

केबल की चाप-लंबाई

38 सामान्यतः केबल की आरंभिक लंबाई L_{cbl} दी हुई नहीं होती; उदाहरणार्थ, इसे इस प्रकार निर्धारित करना पडता है कि केबल का कोई निर्दिष्ट लटकाव पार न हो। वांछित लटकाव प्राप्त होने तक L_{cbl} तथा आरंभिक पूर्वतनन σ_0 में परिवर्तन करके यह किया जा सकता है।

39 केबल की लंबाई निम्न प्रकार दी जाती है

$$L_{cbl} = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{30.14}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

40 हम लंबाई के दो व्यंजकों पर विचार करेंगे: पहला H के पदों में तथा दूसरा s और L के पदों में।

I H के पदों में

41 द्विपद प्रमेय के अनंत श्रेणी-विस्तार को स्मरण करें:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$
$$(1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{3!} + \cdots \tag{30.15}$$
$$\Rightarrow \text{जब } b^2 << 1; \sqrt{1+b} = (1+b)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2$$

अतः हम समीकरण 30.14 को इस प्रकार सरल करते हैं

$$L_{cbl} = \int_0^L \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right\} dx \tag{30.16}$$

dy/dx समीकरण 30.8 से और H समीकरण 30.23 से प्राप्त होता है; Mathematica की कुछ सहायता से हमें मिलता है

$$L_{cbl} \simeq \frac{1}{120L^3}\left\{-3d^4\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)^8 + 10d^2\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)^4\left(2L^2-3h^2\right) - 15h^4 + 60h^2L^2 + 120L^4\right\} \tag{30.17}$$

42 वैकल्पिक रूप से, H के पदों में

$$L_{cbl} = -\frac{h^4}{8L^3} + \frac{Lq^2\left(2L^2-3h^2\right)}{48H^2} + \frac{h^2}{2L} - \frac{L^5q^4}{640H^4} + L \tag{30.18}$$

II s तथा L के पदों में

43 कृषैतिज जीवा के लिए हम समीकरण 30.10 से आरंभ करते हैं और मूलबिंदु को निम्नतम बिंदु (जो मध्य-विस्तार पर है) तक स्थानांतरित करते हैं; इससे

$$y = \frac{4s}{L^2}x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{8sx}{L^2}$$

समीकरण 30.14 में प्रतिस्थापित करने पर

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2}\left(1 + \frac{64h^2x^2}{L^4}\right)dx$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हम पुनः द्विपद प्रमेय, समीकरण 30.15, का उपयोग करते हैं और परिणामी श्रेणी के प्रथम कुछ पद रखते हैं

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2}\left[1+\frac{1}{2}(64)\frac{h^2}{L^4}x^2-\frac{1}{4}(64)^2\frac{h^4}{L^8}x^4+\cdots\right]dx$$

जिससे प्राप्त होता है

$$L_{cbl} \simeq L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right) \tag{30.19}$$

जहाँ अब θ को इस प्रकार परिभाषित किया गया है

$$\theta = h/L \tag{30.20}$$

[44] आनत केबल के लिए हमें समीकरण 30.10 से dy/dx का उपयोग करना होगा; किंतु इससे (Mathematica के माध्यम से) एक अत्यंत जटिल समीकरण प्राप्त होगा

$$\begin{aligned} L_{cbl} \simeq \frac{1}{8\theta}\Big\{&\sqrt{\sec^2(\gamma)}(-L\tan(\gamma)-4L\theta+4s)\\ &+L\left[(\tan(\gamma)+4\theta)\sqrt{8\theta(\tan(\gamma)+2\theta)+\sec^2(\gamma)}+\sinh^{-1}(\tan(\gamma)+4\theta)\right]\\ &-L\sinh^{-1}(\tan(\gamma))\Big\}\end{aligned} \tag{30.21}$$

[45] एक सरलीकृत व्यंजक इस धारणा से निर्धारित किया जा सकता है कि केबल की लंबाई उतनी ही है जितनी क्षैतिज केबल-जीवा वाले केबल की होती। यहाँ विस्तार आनत केबल-जीवा की लंबाई, अर्थात् $L\sec\gamma$, के बराबर और लटकाव $s\cos\gamma$ के बराबर है; उत्तरार्द्ध केबल से केबल-जीवा तक अधिकतम लंब दूरी का सन्निकट व्यंजक है। इन धारणाओं के साथ:

$$\theta' = \frac{s\cos\gamma}{L\sec\gamma} = \frac{\theta}{\sec^2\gamma}$$

समीकरण 30.19 में प्रतिस्थापन करने पर

$$L_{cbl} = L\left(\sec\gamma+\frac{8}{3}\frac{\theta^2}{\sec^3\gamma}\right) \tag{30.22}$$

30.3.2.2 आंतरिक बल

क्षैतिज बल

[46] आगे, समीकरण 30.12 को समीकरण 30.13 के साथ संयोजित करने पर

$$H = \frac{qL^2}{2d\left[\sqrt{\frac{d-h}{d}}+1\right]^2} \tag{30.23}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अधिकतम तनन

47 चित्र 30.2 से[1]

$$\frac{T}{H} = \frac{ds}{dx} \Rightarrow T(x) = H\frac{ds}{dx}$$

किंतु

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \Rightarrow T(x) = H\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{30.24}$$

48 आनत केबल की सामान्य स्थिति के लिए, और समीकरण 30.10 का उपयोग करते हुए

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{8sx}{L^3} - \frac{4s}{L} + \tan\gamma \\ &= \frac{8\theta x}{L^3} - 4\theta + \tan\gamma\end{aligned}$$

जहाँ $\theta = s/L$ है और यह लटकाव अनुपात के अनुरूप है। अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$T(x) = H\left(1 + \frac{64\theta^2x^2}{L^2} + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - \frac{64\theta^2x}{L} + \frac{16\theta x}{L}\tan\gamma - 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \tag{30.25}$$

अधिकतम तनन केबल के सिरों पर उत्पन्न होगा

$$\begin{aligned}x\text{=0 के लिए };& T_{max} = H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ x\text{=L के लिए };& T_{max} = H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{30.26}$$

30.3.2.3 प्रत्यास्थ दीर्घन

θ तथा H के पदों में

49 भारित केबल में प्रत्यास्थ दीर्घन होगा, जो लटकाव को उल्लेखनीय रूप से प्रभावित कर सकता है। लटकाव केवल $\Delta L = FL/AE$ होगा।

50 यद्यपि केबल का तनन $T(x)$ लंबाई के साथ बदलता है, हम ऐसा औसत तनन निर्धारित करते हैं जो केबल की संपूर्ण लंबाई पर लगाए जाने पर समान कुल प्रत्यास्थ दीर्घन उत्पन्न करे (Norris and Wilbur, 1960)

$$\frac{T_{avg}L_{cbl}}{AE} = \int_0^{L_{cbl}} \frac{T(l)dl}{AE}$$

[1]Norris, C. H., तथा J. B. Wilbur, "Elementary Structural Analysis. 1960 से अनुकूलित।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

A तथा E नियत होने के कारण

$$T_{avg} = \frac{1}{L_{cbl}}\int_0^{L_{cbl}} T(x)dl = \frac{1}{L_{cbl}}\int_0^{L_{cbl}} H\frac{dl}{dx}dl$$
$$= \frac{H}{L_{cbl}}\int_0^{L}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx$$

कृषैतिज लंबाई के प्रति एकसमान भारण तथा आनत केबल-जीवा के लिए, dy/dx समीकरण 30.10 से प्राप्त किया जा सकता है और हमें मिलता है

$$T_{avg} = \frac{HL}{L_{cbl}}\left(1+\frac{16}{3}\theta^2+\tan^2\gamma\right) \tag{30.27}$$

अंततः केबल का दीर्घन निर्धारित करने के लिए हम समीकरण 30.22 का उपयोग करते हैं

$$\Delta L = \frac{HL}{AE}\frac{1+16\theta^2/3+\tan^2\gamma}{\sec\gamma+8/3(\theta^2/\sec^3\gamma)} \tag{30.28}$$

q, L तथा L_{cbl} के पदों में

[51] विरूपित अवस्था में आनत केबल की लंबाई इस प्रकार व्यक्त की जा सकती है

$$L_{cbl}^{ext} = \int_0^L\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$
$$= L_{cbl}\left(1+\alpha_T\Delta T-\frac{\sigma_0}{E}\right)+\int_0^L\frac{T\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{EA}dx \tag{30.29}$$

जिसमें तापीय प्रसार $\alpha\Delta T$, आरंभिक प्रतिबल σ_0 तथा केबल तनन T सम्मिलित हैं। दाईं ओर के दूसरे पद को (समीकरण 30.24 का उपयोग करके) पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\int_0^L\frac{T\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{EA}dx = \frac{H}{EA}\int_0^L\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)dx$$
$$= \frac{H}{EA}\int_0^L\left(\tan\gamma+\frac{V(x)}{H}\right)^2dx \tag{30.30}$$

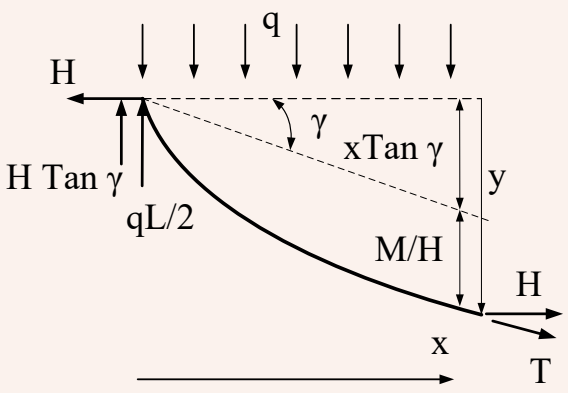
और चित्र 30.4 से

$$y = \frac{M(x)}{H}+x\tan\gamma;\quad y' = \frac{V(x)}{H}+\tan\gamma;\quad V(x) = H\tan\gamma+q\frac{L}{2}-qx$$

समीकरण 30.30 तथा 30.29 में प्रतिस्थापन करने पर यह सरल होकर देता है

$$L_{cbl}^{ext} = L_{cbl}\left(1+\alpha_T\Delta T-\frac{\sigma_0}{E}\right)+\frac{L^2q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right) \tag{30.31}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 30.4: एकसमान क्षैतिज अनुप्रस्थ भार के अधीन आनत केबल की ज्यामिति

30.3.2.4 तुल्य अक्षीय दृढता

[49] दृढता-पद प्रति इकाई विस्थापन बल के अनुरूप होता है; केबल के लिए यह केवल L/AE है।

[50] भारित केबल के लिए दृढता प्रति इकाई संगत दीर्घन क्षैतिज बल होगी। चित्र 30.5a में यह dH/du होगी। जैसा आगे दर्शाया गया है, यह दृढता नम्यता-पद (प्रति इकाई बल विरूपण) के व्युत्क्रम द्वारा निर्धारित की जाती है। विधि अपेक्षाकृत सीधी है:

1. H लगाएँ; केबल में $u_1 = HL/AE$ का दीर्घन होता है।
2. तनन H बनाए रखते हुए अनुप्रस्थ भार q लगाएँ; इससे संकुचन होगा (समीकरण 30.16)

$$u_2 = \int_0^L \left\{ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 \right\} dx$$

और $y(x)$ समीकरण 30.37 द्वारा दिया गया है; प्रतिस्थापन से प्राप्त होता है

$$u_2 = \frac{L}{24}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{L}{640}\left(\frac{qL}{H}\right)^4$$

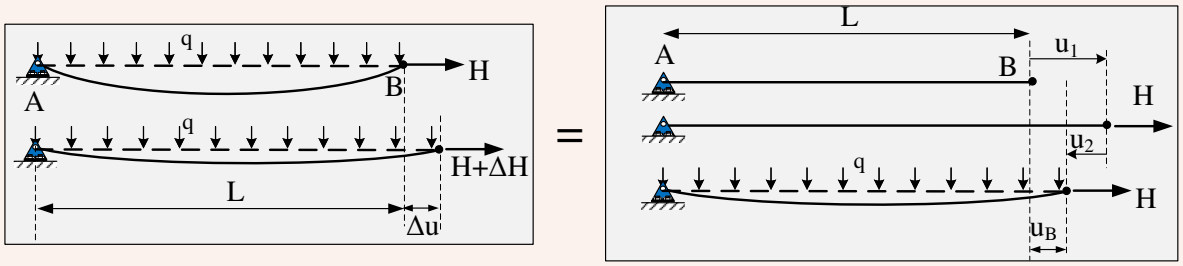
3. अतः परिणामी विस्थापन तथा H के सापेक्ष उसके अवकलज होंगे

$$u_B = u_1 - u_2 = \frac{HL}{AE} - \frac{L}{24}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 + \frac{L}{640}\left(\frac{qL}{H}\right)^4 \tag{30.32}$$

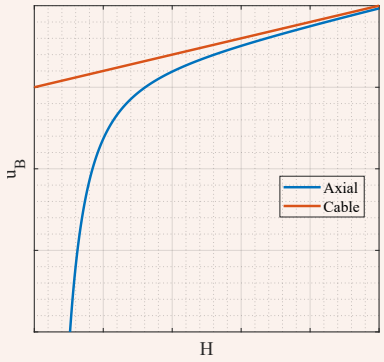
$$\frac{du_B}{dH} = \frac{L}{AE} + \frac{L}{12H}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{L}{160H}\left(\frac{qL}{H}\right)^4$$

$$= \frac{L}{AE}\left\{ 1 + \frac{1}{12}\frac{AE}{H}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{1}{160}\frac{AE}{H}\left(\frac{qL}{H}\right)^4 \right\}$$

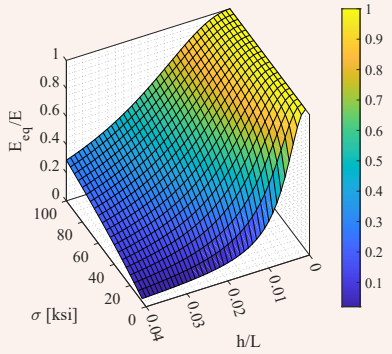
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) केबल की अक्षीय दृढता



(b) अनुप्रस्थ भार का मृदुकरण प्रभाव



(c) प्रतिबल तथा लटकाव के पदों में तुल्य E

चित्र 30.5: केबल की दृढता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समीकरण 30.32 को चित्र 30.5b में आलेखित किया गया है और अनुप्रस्थ भार का मृदुकरण प्रभाव[2] स्पष्टतः पहचाना जा सकता है।

4. किंतु हमारी वास्तविक रुचि दृढता-पद में है

$$\frac{dH}{du_B} = k_t = \left(\frac{1}{1 + (1/12)(AE/H)(qL/H)^2 - (1/160)(AE/H)(qL/H)^4} \right) \frac{AE}{L} \tag{30.33}$$

51 स्पर्शरेखीय दृढता को तुल्य प्रत्यास्थता मापांक E_{eq} के पदों में भी व्यक्त किया जा सकता है

$$E_{eq} = \left(\frac{E}{1 + (1/12)(AE/H)(qL/H)^2 - (1/160)(AE/H)(qL/H)^4} \right) \frac{AE}{L} \tag{30.34}$$

ध्यान दें कि पार्श्व भार दृढता को घटाएगा; अतः सदैव $E_{eq} < E$ होगा।

52 हम प्रतिस्थापित कर सकते हैं

$$\sigma = \frac{H}{A}; \quad \text{तथा} \quad \frac{qL}{H} = 8\frac{H}{L}$$

अतः समीकरण 30.34 का रूप हो जाता है अर्थात्

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{16}{3}\frac{E}{\sigma}\left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{128}{5}\frac{E}{\sigma}\left(\frac{h}{L}\right)^4} \tag{30.35}$$

इस प्रकार तुल्य मापांक केबल के आरंभिक प्रतिबल तथा लटकाव अनुपात, दोनों पर निर्भर करता है। चित्र 30.5c में इसका आगे विवेचन है, जहाँ हम देखते हैं कि लटकाव बढ़ने अथवा अक्षीय तनन घटने पर E_{eq} घटता है।

[2]यह संपीडन भार के अधीन स्तंभों में $P - \delta$ प्रभाव के अनुरूप है, जिसकी चर्चा §29.2.2 तथा 60.1.2.4 में की जाएगी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

30.3.2.5 विशेष स्थिति: कृषैतिज जीवा

[53] जिस केबल के आलंब समान स्तर पर हों, अर्थात् $h = 0$, उसके लिए पूर्ववर्ती कुछ समीकरण सरल होकर निम्न रूप लेते हैं:

$$\text{समी. } 30.9 \rightarrow y = \frac{4xs}{L^2}(L - x) \tag{30.36}$$

$$\text{समी. } 30.9 \rightarrow y = \frac{qx}{2H}(L - x) \tag{30.37}$$

$$\text{समी. } 30.23 \rightarrow H = \frac{qL^2}{8s} \tag{30.38}$$

$$\text{समी. } 30.17 \rightarrow L_{cbl} \simeq -\frac{32s^4}{5L^3} + \frac{8s^2}{3L} + L \tag{30.39}$$

$$\text{समी. } 30.18 \rightarrow L_{cbl} = -\frac{L^5 q^4}{640H^4} + \frac{L^3 q^2}{24H^2} + L \tag{30.40}$$

$$\text{समी. } 30.28 \rightarrow \Delta L = \frac{HL}{AE}\frac{1 + 16\theta^2/3}{1 + 8\theta^2/3} \tag{30.41}$$

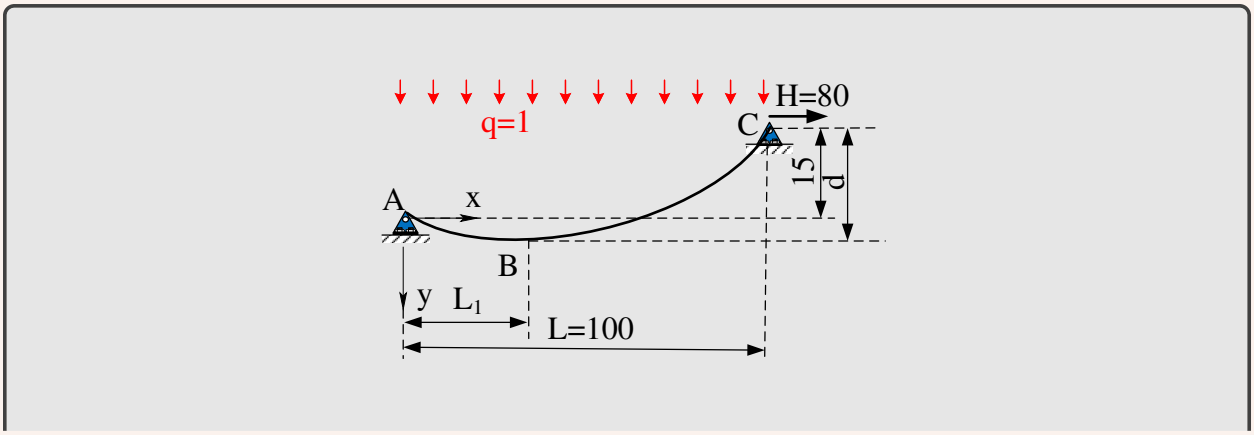
$$\text{समी. } 30.26 \rightarrow T_{max} = H\sqrt{1 + 16r^2} \tag{30.42}$$

$$\text{समी. } 30.30 \rightarrow L_{cbl}^{ext} = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T \Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q\left(8\theta^2 + 3\right)}{12AE\theta} \tag{30.43}$$

जहाँ s लटकाव है; समीकरण 30.42 में $r = s/L$ (चित्र 30.3) तथा चित्र 30.2 में $r = d/L$ है। समीकरण 30.15 द्वारा (केवल पहला पद रखते हुए) इसे सरल किया जा सकता है:

$$T_{max} = H\sqrt{1 + 16r^2} \approx H(1 + 8r^2) \tag{30.44}$$

30.3.2.5.1 उदाहरण 30.4: आनत केबल की ज्यामिति



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दिया है: $H = 80$, $L = 100$, $h = 15$ तथा $q = 1$। समीकरण 30.18 से केबल की लंबाई प्राप्त होती है और यह देती है

$$L_{cbl} = -\frac{15^4}{8(100)^3} + \frac{(100)(1)^2\left(2(100)^2 - 3(15)^2\right)}{48(80)^2} + \frac{(15)^2}{2(100)} - \frac{(100)^5(1)^4}{640(80)^4} + 100 = 107.03$$

इसके बाद समीकरण 30.23 से d के लिए हल करते हैं,

$$80 = \frac{5000}{\left(\sqrt{\frac{d-15}{d}} + 1\right)^2 d}$$

जिससे $d = 24.025$ प्राप्त होता है। समीकरण 30.17 से L_{cbl} की गणना करके हम परिणाम की जाँच करते हैं; प्रतिस्थापन पर

$$L_{cbl} \simeq \frac{1}{120(100)^3}\left\{-3(24.02)^4\left(\sqrt{1-\frac{15}{24.02}}+1\right)^8 + 10(24.02)^2\left(\sqrt{1-\frac{15}{24.02}}+1\right)^4\left(2(100)^2 - 3(15)^2\right) - 15(15)^4 + 60(15)^2(100)^2 + 120(100)^4\right\}$$

$$= 107.03$$

वैकल्पिक रूप से, H के पदों में समीकरण 30.18

$$L_{cbl} = -\frac{(15)^4}{8(100)^3} + \frac{(100)(1)^2\left(2(100)^2 - 3(15)^2\right)}{48(80)^2} + \frac{(15)^2}{2(100)} - \frac{(100)^5(1)^4}{640(80)^4} + (100) = 107.03$$

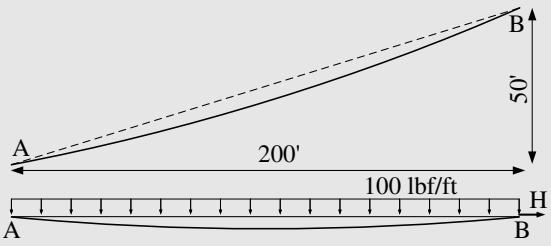
अंततः समीकरण 30.3.2.1 से निम्नतम बिंदु बाएँ आलंब से L_1 दूरी पर है,

$$L_1 = 100 - \frac{100}{\sqrt{\frac{24.02-15}{24.02}} + 1} = 38$$

30.3.2.5.2 उदाहरण 30.5: आनत केबल के बल

प्रति क्षैतिज फुट 100 lbf का एकसमान भार वहन करने वाला केबल क्षैतिज दिशा में 200 ft दूर स्थित दो बिंदुओं के बीच निलंबित है और एक आलंब-बिंदु दूसरे से 50 ft ऊँचा है। केबल में तनन को तब तक समायोजित किया जाता है जब तक मध्य-विस्तार पर लटकाव (अर्थात् मध्य-विस्तार पर केबल-जीवा से ऊर्ध्वाधर दूरी) 12.5 ft न हो जाए। हमें केबल का अधिकतम तनन तथा लंबाई निर्धारित करनी है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



तनन का क्षैतिज घटक समीकरण 30.38 द्वारा दिया जाता है

$$H = \frac{qL^2}{8s} = \frac{100(200)^2}{8(12.5)} = 40,000 \text{ lbf}$$

θ तथा $\tan\gamma$ क्रमशः समीकरण 30.20 तथा चित्र 30.3 से प्राप्त होते हैं

$$\theta = \frac{h}{L} = \frac{12.5}{200} = 0.0625$$
$$\tan\gamma = \frac{50}{200} = 0.25 \Rightarrow \gamma = 0.245 \text{ rad}$$

अधिकतम तनन आलंब के ऊँचे बिंदु पर होता है और समीकरण 30.26 द्वारा दिया जाता है

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &= 40,000\left(1 + 16(0.0625)\theta^2 + (0.25)^2 + 8(0.0625)(0.25)\right)^{1/2} \\ &= 44,700 \text{ lbf} \end{aligned}$$

अब केबल की लंबाई पूर्व में व्युत्पन्न दो समीकरणों से निर्धारित की जाएगी। पहले लगभग यथार्थ हल, समीकरण 30.21, से

$$\begin{aligned} L_{cbl} \simeq \frac{1}{8(0.0625)}\Bigg\{ &\sqrt{\sec^2(0.245)}\left[-(200)\tan(0.245) - 4(200)(0.0625) + 4(12.5)\right] \\ &+ 200\Bigg[\tan(0.245) + 4(0.0625)\sqrt{8(0.0625)(\tan(0.245) + 2(0.245)) + \sec^2(0.245)} \\ &\quad + \sinh^{-1}(\tan(0.245) + 4(0.0625))\Bigg] - (200)\sinh^{-1}(0.245)\Bigg\} \\ = 214.1 \text{ ft} \end{aligned} \tag{30.45}$$

फिर सन्निकटन, समीकरण 30.22, से

$$L_{cbl} = L\left(\sec(0.245) + \frac{8}{3}\frac{0.0625^2}{\sec^3(0.245)}\right) = 208.1\text{ft}$$

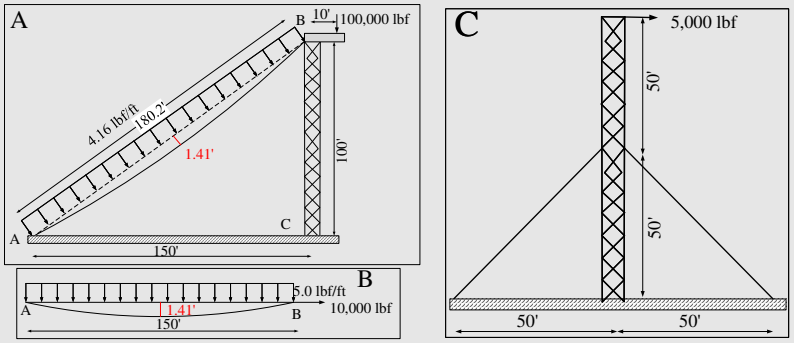
अधिक यथार्थ हल से अंतर 3% से कम है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

30.3.2.5.3 उदाहरण 30.6: गाइ-केबल युक्त मीनार

निम्न अंश Norris and Wilbur, 1960 *Elementary Structural Analysis* से पुनरुत्पादित है।

मान लें कि 4.16 lb/ft भार वाला केबल गाइ के रूप में प्रयुक्त किया जाना है और 100,000 lbf भार लगाए जाने पर इस गाइ को मस्तूल BC को ऊर्ध्वाधर रखना है[a]।



आलंब के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$$100H - 100,000(10) = 0 \Rightarrow H = 10,000 \text{ lbf}$$

मस्तूल को ऊर्ध्वाधर रखने के लिए तब H विकसित होना चाहिए। चूँकि केबल के अनुदिश भार 4.16 lbf/ft है, इसलिए तुल्य ऊर्ध्वाधर भार q' (चित्र B में तुल्य केबल का उपयोग करते हुए) होगा

$$q' = 4.16\frac{180.2}{150} = 5.0 \text{ lbf प्रति क्षैतिज फुट}$$

केबल के लटकाव को समीकरण 30.38 संतुष्ट करना चाहिए

$$H = \frac{qL^2}{8h} \Rightarrow h = \frac{qL^2}{8H} = \frac{5(150)^2}{8(10,000)} = 1.41 \text{ ft}$$

चूँकि इस सन्निकट हल में केबल को परवलयी तथा निम्न एकसमान भार के अधीन माना गया है

$$q = 4.16(180.2/150) = 5.0 \text{ lbf प्रति क्षैतिज फुट}$$

अतः समीकरण 30.26 के अनुसार गाइ में अधिकतम तनन B पर होगा

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &= 10,000\left[1.0 + 16\left(\frac{1.41}{150}\right)^2 + \left(\frac{100}{150}\right)^2 + 8\left(\frac{141}{150}\right)\left(\frac{100}{150}\right)\right]^{1/2} \\ &= 12,240 \text{ lbf} \end{aligned}$$

ध्यान दें कि केबल को जीवा AB के अनुदिश स्थित सीधी टाई-छड मानकर पूर्ववर्ती हल का निकट सन्निकटन प्राप्त किया जा सकता है। इस जीवा की लंबाई 180.2 ft है; तब तनन होगा

$$T_{max} = 10,000\left(\frac{180.2}{150}\right) = 12,000 \text{ lbf}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस सन्निकटन में एकमात्र त्रुटि इस तथ्य से आती है कि B पर केबल की ढाल वास्तव में जीवा की ढाल से अधिक है। जब तक केबल का लटकाव अनुपात बड़ा न हो, ढाल का यह अंतर महत्त्वपूर्ण होने की संभावना नहीं है।

मस्तूल

अथवा अन्य गाइ-युक्त संरचना को एक से अधिक दिशाओं में पलटने से रोकने के लिए सामान्यतः एक से अधिक गाइ आवश्यक होते हैं। इन परिस्थितियों में गाइ को किसी निश्चित आरंभिक तनन पर समायोजित किया जाता है; प्रायः ऐसा आरंभिक तनन लिया जाता है जो भार के अधीन उत्पन्न होने वाले अधिकतम तनन का लगभग आधा हो। अब मान लें कि गाइ AB तथा AC के लटकाव इस प्रकार समायोजित किए गए हैं कि मस्तूल पर कोई क्षैतिज भार न होने पर प्रत्येक गाइ में केबल-तनन का क्षैतिज घटक 6,000 lbf हो। इन परिस्थितियों में सुझाई गई सन्निकट विश्लेषण-विधि के अनुसार प्रत्येक गाइ में अधिकतम आरंभिक प्रतिबल $6,000 \times 1.414 = 8,500$ lbf होगा। मस्तूल के शीर्ष पर 5,000 lbf भार लगाने पर गाइ AC में तनन के क्षैतिज घटक को उतनी ही मात्रा से बढ़ाकर 10,000 lbf का परिणामी क्षैतिज बल लगाया जाता है; फलतः $H_{AB} = 11,000$ lbf तथा $H_{AC} = 1,000$ lbf होते हैं। तब गाइ का अधिकतम तनन होगा

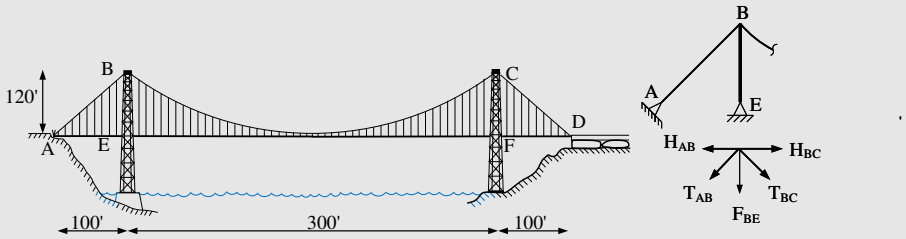
$$T_{max} = 11,000 \times 1.414 = 15,500 \text{ lbf}$$

वास्तव में मस्तूल के शीर्ष पर 5,000 lbf भार लगाने पर बिंदु A दाईं ओर चलता है। गाइ AB इस गति की अनुमति देता है, क्योंकि उसमें अतिरिक्त प्रत्यास्थ दीर्घन होता है और उसका लटकाव घटता है। गाइ AC का लटकाव बढ़ता है और उस गाइ की लंबाई प्रत्यास्थ रूप से घटती है। लंबाई के प्रत्यास्थ परिवर्तन तथा लटकाव के परिवर्तन को ध्यान में रखकर यथार्थ विश्लेषण किया जा सकता है, किंतु वह अपेक्षाकृत जटिल है।

[a]Norris, C. H., तथा J. B. Wilbur, "Elementary Structural Analysis. 1960 से अनुकूलित।

30.3.2.5.4 उदाहरण 30.7: झूला पुल

190 ksi की अनुज्ञेय केबल सामर्थ्य σ_{all} मानकर हमें झूला पुल के केबलों के प्रारंभिक व्यास निर्धारित करने हैं। बड़े बंकन आघूर्णों से बचने के लिए मीनार के आधार किलकित हैं।



कुल मृत भार 200 psf आकलित किया गया है। लटकाव-विस्तार अनुपात $\frac{1}{5}$ मानें। प्रत्येक केबल द्वारा वहन किया गया मृत भार कुल मृत भार का आधा होगा, अर्थात् $p_1 = \frac{1}{2}(200)$ psf(50) ft$\frac{1}{1,000} = 5.0$ k/ft। HS 20 ट्रक (अथवा उसके प्रति लेन 0.64 k/ft तुल्य वितरित भार) का उपयोग करने पर, प्रति केबल एकसमान अतिरिक्त भार है

$$p_2 = (2)\text{लेन/केबल}(.64)\text{k/ft/लेन} = 1.28 \text{ k/ft/केबल}$$

अतः कुल अभिकल्प भार है

$$p_1 + p_2 = 5 + 1.28 = 6.28 \text{ k/ft}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

क्षैतिज प्रणोद H समीकरण 30.38 से निर्धारित होता है

$$H = \frac{pl^2}{8h} = \frac{(6.28)\ \text{k/ft}(300)^2\ \text{ft}^2}{(8)\,(60)\ \text{ft}} = 1,177\ \text{k}$$

ध्यान दें कि h, $r = h/L = 1/5$ से दिया गया है। समीकरण 30.44 से अधिकतम तनन है

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\sqrt{1+16r^2} \\ &= (1,177)\ \text{k}\sqrt{1+(16)\left(\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= 1,507\ \text{k} \end{aligned}$$

ध्यान दें कि यदि हम समीकरण 30.44 का सन्निकट सूत्र प्रयुक्त करते, तो हमें मिलता

$$\begin{aligned} T_{max} &= H(1+8r^2) \\ &= 1,177\left(1+8\left(\frac{1}{5}\right)^2\right) \\ &= 1,554\ \text{k} \end{aligned}$$

अर्थात् 3% का अंतर! मुख्य विस्तार के अनुदिश केबल का अपेक्षित अनुप्रस्थ-काट क्षेत्रफल $A = \frac{T_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{1,507\ \text{k}}{190\ \text{ksi}} = 7.93\ \text{in}^2$ होना चाहिए, जो व्यास $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{(4)(7.93)}{\pi}} = 3.18$ in. अब हमें AB में केबल बल निर्धारित करना है। चूँकि स्तंभिका कोई क्षैतिज बल नहीं ले सकती, T_{max} का क्षैतिज घटक T_{AB} के क्षैतिज घटक के बराबर तथा विपरीत होना चाहिए, अथवा $\frac{T_{AB}}{H} = \frac{\sqrt{(100)^2+(120)^2}}{100}$; अतः

$$T_{AB} = H\frac{\sqrt{(100)^2+(120)^2}}{100} = (1,177)(1.562) = 1,838\ \text{k}$$

केबल का क्षेत्रफल $A = \frac{1,838\ \text{k}}{190\ \text{ksi}} = 9.68\ \text{in}^2$ होना चाहिए, जो व्यास $d = \sqrt{\frac{(4)(9.68)}{\pi}} = 3.51$ in के अनुरूप है। स्तंभिका पर कार्यरत ऊर्ध्वाधर भार निर्धारित करने के लिए हमें T_{max} तथा T_{AB} के ऊर्ध्वाधर घटकों (क्रमशः V_{BC} तथा V_{AB}) को जोडना होगा। हम V_{BC} को H तथा T_{max} से निर्धारित कर सकते हैं; अतः

$$P = \underbrace{\frac{120}{100}(1,177)}_{V_{AB}} + \underbrace{\sqrt{(1,507)^2-(1,177)^2}}_{V_{BC}} = 1,412+941 = 2,353\ \text{k}$$

A36 इस्पात, जिसका अनुज्ञेय प्रतिबल 21 ksi है, का उपयोग करने पर मीनार का अनुप्रस्थ-काट क्षेत्रफल $A = \frac{2,353}{21} = 112\ \text{in}^2$ होना चाहिए। ध्यान दें कि इतनी ऊँची मीनार का व्याकुंचन अंतिम विमाओं को नियंत्रित कर सकता है। यदि केबलों को कंक्रीट खंड में स्थिरित किया जाए, तो खंड का आयतन कम-से-कम $V = \frac{(1,412)\ \text{k}(1,000)}{150\ \text{lbs/ft}^3} = 9,413\ \text{ft}^3$ अथवा लगभग 21 ft भुजा वाले घन के बराबर होना चाहिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

30.3.2.5.5 उदाहरण 30.8: अविस्तार्य केबल; तापमान

300 ft लंबे कृषैतिज केबल में 50 ft का केंद्रीय लटकाव तथा 2 k/ft का एकसमान भार है। तापमान में 150°F वृद्धि के कारण ज्यामिति में परिवर्तन निर्धारित करना है; $\alpha_T = 6.6^{-6}/°\text{F}$। कृषैतिज बल समीकरण से निर्धारित होता है

$$H = \frac{qL^2}{8s} = 450 \text{ kip}$$

केबल की लंबाई (समीकरण 30.39)

$$\begin{aligned}
L_{cbl} &\simeq -\frac{32s^4}{5L^3} + \frac{8s^2}{3L} + L = 320.7 \text{ ft} \\
\Delta L_{cbl} &= \alpha \Delta T L_{cbl} = 0.317 \text{ ft} \\
\frac{\Delta L}{\Delta s} &\simeq -\frac{128}{5}\left(\frac{s}{L}\right)^3 + \frac{16}{3}\frac{s}{L} = 0.770 \\
\Delta s &\simeq \frac{0.317}{0.770} = 0.412 \text{ ft} \\
s + \Delta s &= 50.41 \text{ ft} \\
\Delta H &= 450 - \frac{qL^2}{8(s+ds)} = 3.68 \text{ kip}
\end{aligned}$$

अर्थात् केवल 0.82 %!

30.3.2.5.6 उदाहरण 30.9: विस्तार्य केबल; लटकाव

40.5 m लंबा केबल (L_{cbl}), जिसमें $E = 195$ kN/mm^2 तथा $A = 100$ mm^2 हैं, $L = 40$ m की कृषैतिज दूरी पाटता है और उस पर $q = 1.5$ kN/m का एकसमान वितरित भार है। उसका लटकाव समीकरण 30.31 से निर्धारित किया जा सकता है; किंतु केबल की वास्तविक लंबाई अज्ञात है, अतः हम समीकरण 30.19 का उपयोग करते हैं, जिससे

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T \Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right)$$

प्रतिस्थापन करने पर[a] $\gamma = 0$, $\alpha_T = 0$ तथा $\Sigma M_0 = 0$ से $\theta = 0.0900$ प्राप्त होता है; अतः

$$\begin{aligned}
L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) &= 40000\left(-\frac{32\theta^4}{5} + \frac{8\theta^2}{3} + 1\right) \\
\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) &= \frac{10.2564\left(8\theta^2 + 3\right)}{\theta} \\
40000\left(-\frac{32\theta^4}{5} + \frac{8\theta^2}{3} + 1\right) &= 40.5 + \frac{10.2564\left(8\theta^2 + 3\right)}{\theta}
\end{aligned}$$

न्यूनतम मूल $\theta = 0.09$ है; अतः

$$\text{लटकाव } = \theta L = 0.090(40) = 3.6 \text{ m}$$

तब कृषैतिज तनन H समीकरण 30.23 से $h = 0$ रखकर निर्धारित होता है

$$H = \frac{qL^2}{8d} = \frac{1.5(40)^2}{8(3.6)} = 83.3 \text{ kN}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[a]Mathematica द्वारा हल किया गया।

30.3.2.5.7 उदाहरण 30.10: विस्तार्य केबल; तापीय प्रभाव

हमें केबल की आरंभिक लंबाई L_{cbl} निर्धारित करनी है, जिसका विस्तार $L = 40m$ है और जिसमें $E = 195$ kN/mm^2, $A = 100$ mm^2 तथा $\alpha_T = 10^{-5}/°\text{C}$ हैं, ताकि $q = 1$ kN/m और $\Delta T = 40°\text{C}$ के अधीन 3m का लटकाव प्राप्त हो। पुनः हम निम्न समीकरण का उपयोग करते हैं

$$L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1+\alpha_T\Delta T\right)+\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right)$$

अतः

$$\theta = \frac{3}{40} = 0.075$$
$$L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right) = 40.591 \text{ m}$$
$$1+\alpha_T\Delta T = 1.0004$$
$$\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right) = 0.2776 \text{ m}$$
$$40.591 = 1.0004 L_{cbl} + 0.2776 \Rightarrow L_{cbl} = 40.297 \text{ m}$$

30.3.2.5.8 उदाहरण 30.11: विस्तार्य केबल; पूर्वप्रतिबल

हमें 1 m लटकाव प्राप्त करने हेतु आवश्यक पूर्वप्रतिबलन बल निर्धारित करना है, जहाँ भार $q = 2$ kN/m, $L_{cbl} = L = 40.5m$, $E = 195$ kN/mm^2 तथा $A = 100$ mm^2 हैं। पुनः निम्न का उपयोग करते हुए

$$L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1-\frac{\sigma_0}{E}\right)+\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right)$$

अतः

$$\theta = \frac{1}{40} = 0.025$$
$$L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right) = 40,067 \text{ mm}$$
$$L_{cbl}\left(1-\frac{\sigma_0}{E}\right) = 40,000-\frac{\sigma_0}{195} \text{ mm}$$
$$\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right) = 1,644 \text{ mm}$$
$$40,0067 = \left(40,000-\frac{\sigma_0}{195}\right)+1,644 \Rightarrow \sigma_0 = 7.688 \text{ kN/mm}^2$$

तब कृषैतिज तनन H समीकरण 30.23 से $h = 0$ रखकर निर्धारित होता है

$$H = \frac{qL^2}{8d} = \frac{2.0(40)^2}{8(1)} = 400 \text{ kN}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

30.3.3 $q\mathrm{d}s$; कैटेनरी

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §30.3.3 देखें

30.3.3.1 ज्यामिति

54 अब उस स्थिति पर विचार करें जिसमें केबल अपने स्वभार (और यदि हों तो हिम तथा पवन) के अधीन है। तब $q\mathrm{d}x$ को $q_g\mathrm{d}s$ से समीकरण 30.2 में प्रतिस्थापित करना होगा। इस नई स्थिति का अवकल समीकरण ठीक पहले की भाँति व्युत्पन्न होगा और समीकरण 30.5 का रूप हो जाएगा

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\underbrace{\frac{q_g}{H}}_{a}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \tag{30.46}$$

55 किंतु $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + dy^2$; अतः:

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{30.47}$$

56 इस अवकल समीकरण का हल समीकरण 30.5 की अपेक्षा पर्याप्त अधिक जटिल है। हम $dy/\mathrm{d}x = p$ रखते हैं; तब

$$\frac{dp}{\mathrm{d}x} = a\sqrt{1+p^2} \tag{30.48}$$

पुनर्व्यवस्थित करने पर

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int a\mathrm{d}x \tag{30.49}$$

बायाँ पक्ष निम्न के बराबर है

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \ln(p+\sqrt{1+p^2}) + c_1$$

दायाँ पक्ष होगा

$$\int a dx = ax + c_2 \tag{30.50}$$

समीकरण 30.49 में प्रतिस्थापित करने पर

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = ax + c_3$$

किंतु $x = 0$ पर $\theta = dy/dx = p = 0$ है; अतः $c_3 = 0$ और

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = ax$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सरल करने पर

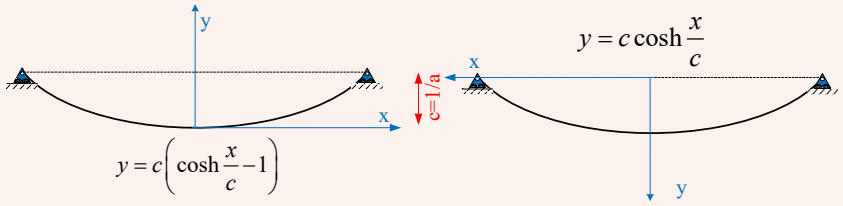
$$\begin{aligned} p + \sqrt{1+p^2} &= e^{ax} \\ \sqrt{1+p^2} &= e^{ax} - p \\ 1 + p^2 &= p^2 - 2pe^{ax} + e^{2ax} \\ p = \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{2ax}-1}{2e^{ax}} = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2} = \sinh ax \\ y &= \int \sinh ax dx \\ &= \frac{\cosh ax}{a} \end{aligned}$$

अंतिम समीकरण का एक वैकल्पिक रूप है

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{30.51}$$

जहाँ $c = 1/a = H/q_g$। अतः $x = 0$ पर $y = c = 1/a$; यह चित्र 30.6 की दाईं निर्देशांक-प्रणाली के अनुरूप है। यदि हम बाईं निर्देशांक-प्रणाली का उपयोग करें, तो संगत समीकरण होगा

$$y = c\left(\cosh \frac{x}{c} - 1\right) \tag{30.52}$$



चित्र 30.6: कैटेनरी के वैकल्पिक संदर्भ निर्देशांक

[57] समीकरण 30.46 को पुनर्व्यवस्थित करके चाप-लंबाई प्राप्त होती है

$$H\frac{d^2y}{dx^2}dx = q_g ds$$

समाकलन करने पर

$$\begin{aligned} L_{cbl} &= 2\int_0^{L/2} \frac{H}{q_g}\frac{d^2y}{dx^2}dx = \frac{2}{q_g}H\frac{dy}{dx}\Big|_0^{L/2} \\ &= \frac{2H}{q_g}\sinh\left(\frac{q_g L}{2H}\right) \end{aligned} \tag{30.53}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

30.3.3.2 बल

58 केबल के अनुदिश तनन निम्न द्वारा दिया जाता है

$$T(x) = H\frac{ds}{dx}$$

समीकरण 30.51 से

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{x}{c}$$
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

अथवा केवल

$$T(x) = H\cosh\left(\frac{q_g x}{H}\right) \tag{30.54}$$

और अधिकतम तनन आलंब $x = L/2$ पर होता है

$$T_{max} = H\cosh\left(\frac{q_g L}{2H}\right) \tag{30.55}$$

30.3.3.3 आनत जीवा वाली कैटेनरी

59 अब हम आनत जीवा वाली कैटेनरी की ज्यामिति व्युत्पन्न करते हैं। हम (Cella, 1999) की व्युत्पत्ति का अनुसरण करेंगे और चित्र 30.7 को संदर्भित करेंगे।

60 समीकरण 30.51 से आरंभ करके हम s को सरलता से इस प्रकार व्युत्पन्न कर सकते हैं

$$s = \int_0^x \sqrt{1+(\sinh x/c)^2}dx = \int_0^x \cosh\frac{x}{c}dx = c\sinh\frac{x}{c} \tag{30.56}$$

समीकरण 30.51 का अवकलज लेने पर

$$y' = c\cosh\frac{x'}{c}, \quad y'-v = c\cosh\frac{d-x'}{c}, \tag{30.57}$$

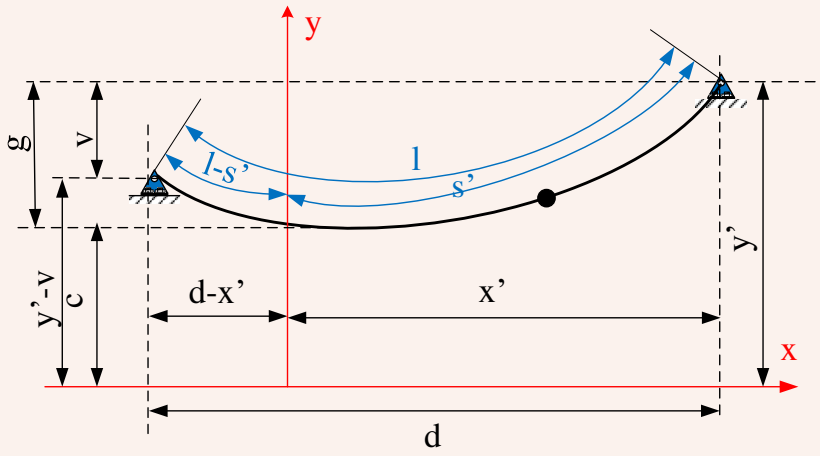
और समीकरण 30.56 देगा

$$s' = c\sinh\frac{x'}{c}, \quad l-s' = c\sinh\frac{d-x'}{c}. \tag{30.58}$$

समीकरण 30.57 से

$$v = c\cosh\frac{x'}{c} - c\cosh\frac{d-x'}{c}. \tag{30.59}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप



चित्र 30.7: आनत जीवा वाली कैटेनरी, (Cella, 1999)

और तब l निम्न से प्राप्त होता है

$$l = c \sinh \frac{x'}{c} + c \sinh \frac{d - x'}{c}, \tag{30.60}$$

अतः

$$\frac{v}{l} = \frac{\cosh\left(x'/c\right) - \cosh\left(\left(d - x'\right)/c\right)}{\sinh\left(x'/c\right) + \sinh\left(\left(d - x'\right)/c\right)}.$$

अतिपरवलयी सर्वसमिकाएँ लगाने पर

$$\cosh a - \cosh b = 2 \sinh \frac{a + b}{2} \cdot \sinh \frac{a - b}{2}$$
$$\sinh a + \sinh b = 2 \sinh \frac{a + b}{2} \cdot \cosh \frac{a - b}{2}$$

निरसन के पश्चात हमें प्राप्त होता है

$$\frac{v}{l} = \tanh \frac{2x' - d}{2c}$$

जिसे x'/c के लिए हल करने पर मिलता है

$$\frac{x'}{c} = \frac{d}{2c} + \tanh^{-1} \frac{v}{l} \tag{30.61}$$

समीकरण 30.60 में प्रतिस्थापन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$l = c \sinh \left(\frac{d}{2c} + \tanh^{-1} \frac{v}{l} \right) + c \sinh \left(\frac{d}{2c} - \tanh^{-1} \frac{v}{l} \right) \tag{30.62}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

c निर्धारित करने के लिए इसी समीकरण का उपयोग किया जाता है, जब अज्ञात g हो। अंततः चित्र 30.7 से $y' = c + g$, और समीकरण 30.57 से हमें प्राप्त होता है

$$c + g = c \cosh \frac{x'}{c} \tag{30.63}$$

अतः c ज्ञात होने पर हम g निर्धारित कर सकते हैं

30.3.3.3.1 उदाहरण 30.12: आनत केबल में लटकाव

110' लंबे केबल के ऊपरी आलंब के नीचे लटकाव निर्धारित करना है; केबल ऐसे आलंबों के बीच निलंबित है जो क्षैतिज रूप से 100' और ऊर्ध्वाधर रूप से 20' अलग हैं। समीकरण 30.62 लगाने पर हम इस अरैखिक समीकरण में c के लिए हल करते हैं

$$110 = c \sinh\left(\frac{100}{2c} + \tanh^{-1}\frac{20}{110}\right) + c \sinh\left(\frac{100}{2c} - \tanh^{-1}\frac{20}{110}\right) \Rightarrow c = 72.288$$

समीकरण 30.61 में प्रतिस्थापन से $x' = 63.291$ प्राप्त होता है और अंततः समीकरण 30.63 से हमें $g = 29.523'$ मिलता है। इसी प्रकार उन स्थितियों के लिए समीकरण व्युत्पन्न किए जा सकते हैं जहाँ अज्ञात चर v, d अथवा l हो।

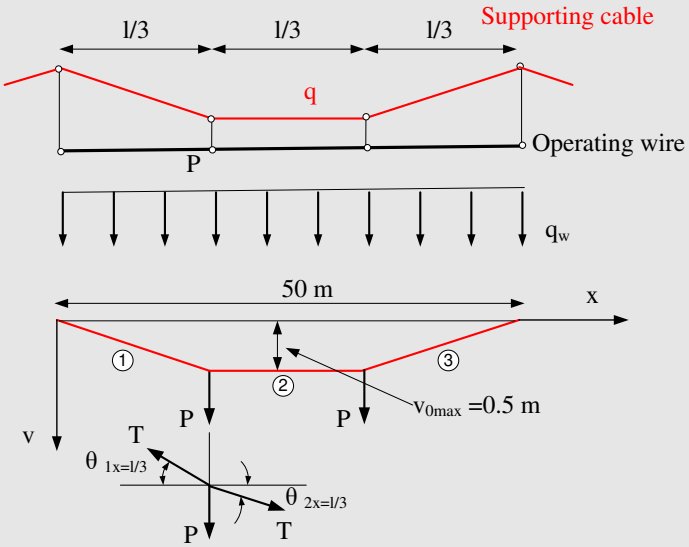
30.3.3.3.2 उदाहरण 30.13: ट्रॉली-बस केबल आलंब

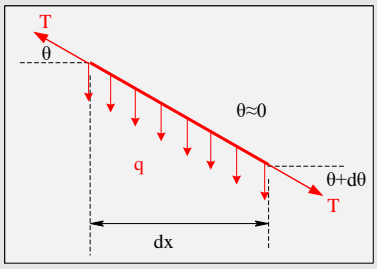
निम्न अंश Feodossiev, 1977 *Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis* से पुनरुत्पादित है।

हमें ट्रॉली-बस लाइन के परिचालन तार के आलंबी केबल में तनन तथा लटकाव-विक्षेप वक्र निर्धारित करना है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।





$l = 50\text{m}$ तथा v_{0max}=0.5m लें। इस्पात आलंबी केबल का अनुप्रस्थ-काट क्षेत्रफल $A = 0.6\text{cm}^2$ और प्रत्यास्थता का न्यूनित मापांक[a] $E = 8 \times 10^5$ kgf/cm^2 है; प्रति इकाई लंबाई तार का भार q_w, केबल के भार q से 1.5 गुना अधिक है।

सर्वप्रथम ध्यान दें कि यह अत्यंत "उथली" केबल संरचना है, जिसका लटकाव-विस्तार अनुपात $r = 1/100$ है; अतः कोण θ बहुत छोटे होंगे।

समस्या दो संकेंद्रित बलों $P = q_w l/3$ से भारित केबल के विश्लेषण तक घट जाती है। समीकरण 30.38 से हमें प्राप्त होता है

$$T_0 = \frac{ql^2}{8v_{0\,\max}} \tag{30.64}$$

और केबल खंड पर साम्य समीकरण लगाने पर

$$T\theta - qdx - T(\theta + d\theta \Rightarrow \frac{q}{T} = -\frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \theta = \frac{q}{T}(C - x)$$

$x = l/2$ पर $T = T_0$ तथा $\theta_0 = 0$ हैं; अतः $C - l/2$ और

$$\theta_0 = \frac{q}{T_0}\left(\frac{l}{2} - x\right) \tag{30.65}$$

जहाँ θ_0 तथा T_0 क्रमशः लटकाव-विक्षेप वक्र की ढाल और निचला तार निलंबित किए जाने से पहले केबल का तनन हैं।

केबल के बाएँ भाग (1) तथा मध्य भाग के आधे (2) पर विचार करें। इन भागों के अनुरूप हमारे पास है

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= \tfrac{q}{T}(C_1 - x),\\ v_1 &= \tfrac{q}{T}\left(A_1 + C_1 x - \tfrac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\right\}\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{3}\right);$$

$$\left.\begin{aligned}\theta_2 &= \tfrac{q}{T}(C_2 - x),\\ v_2 &= \tfrac{q}{T}\left(A_2 + C_2 x - \tfrac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\right\}\left(\frac{l}{3} \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right).$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

नियतांक A_1, A_2, C_1 तथा C_2 निम्न प्रतिबंधों से निर्धारित होते हैं: जब $x = 0, v_1 = 0$; जब $x = l/2$, तब $\theta_2 = 0$; जब $x = l/3, \quad v_1 = v_2$, तब $T\theta_1 - T\theta_2 = P$। इस स्थिति में

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{Pl}{3q}, \quad C_1 = \frac{P}{q} + \frac{l}{2}, \quad C_2 = \frac{l}{2}.$$

समीकरण 30.14 पर पुनः विचार करने पर हमारे पास है

$$L_{cbl} = \int_0^L \sqrt{1 + \theta^2} dx$$

द्विपद विस्तार का उपयोग करके और छोटे कोण मानकर हमें प्राप्त होगा

$$L_{cbl} \simeq \int_0^L 1 + \frac{\theta^2}{2} dx$$

इसके बाद बल T को स्वतंत्र रूप से लटके और तने हुए केबल की लंबाइयों के अंतर को तनन-दीर्घन के बराबर रखकर निर्धारित किया जाता है

$$\int_0^{l/3} \left(1 + \frac{\theta_1^2}{2}\right) dx + \int_{l/3}^{l/2} \left(1 + \frac{\theta_2^2}{2}\right) dx - \int_0^{l/2} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right) dx = \frac{(T - T_0)\, l}{2EA}$$

अथवा θ के मानों तथा समीकरण 30.65 के प्रतिस्थापन के पश्चात

$$\frac{q^2}{T^2} \int_0^{l/3} (C_1 - x)^2 \, dx + \frac{q^2}{T^2} \int_{l/3}^{l/2} (C_2 - x)^2 \, dx - \frac{q^2}{T_0^2} \int_0^{l/2} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 dx = \frac{(T - T_0)\, l}{EA}$$

अतः समाकलन द्वारा हमें प्राप्त होता है

$$\frac{q^2}{T^2} \left(\frac{P^2}{q^2} \frac{l}{3} + \frac{P}{q} \frac{2l^2}{9} + \frac{l^3}{24}\right) - \frac{q^2}{T_0^2} \frac{l^3}{24} = \frac{(T - T_0)\, l}{EA}.$$

T_0 का प्रतिस्थापन करने पर (समीकरण 30.64) हमें प्राप्त होता है

$$\left(\frac{T v_{0\max}}{ql^2}\right)^3 + \left(\frac{T v_{0\max}}{ql^2}\right)^2 \left[\frac{8}{3} \frac{EA v_{0\max}^3}{ql^4} - \frac{1}{8}\right] = = \frac{1}{3} \frac{EA v_{0\max}^8}{ql^4} \left(\frac{P^2}{q^2 l^2} + \frac{2}{3} \frac{P}{ql} + \frac{1}{8}\right)$$

संख्यात्मक गणना करें:

$$P = \frac{q_v l}{3} = \frac{1.5ql}{3}, \quad \frac{P}{ql} = 0.5,$$
$$q = 0.6 \times 0.0078 = 0.00468 \text{kgf/cm},$$

जहाँ 0.0078kgf/cm^3 इस्पात का विशिष्ट भार है; अतः हमें प्राप्त होता है

$$\frac{EA v_{0\max}^3}{ql^4} = 0.0205.$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस स्थिति में अभिकल्प समीकरण सरल होकर निम्न हो जाता है:

$$\left(\frac{Tv_{0\,\max}}{ql^2}\right)^3 - 0.0704\left(\frac{Tv_{0\,\max}}{ql^2}\right)^2 - 0.00484 = 0,$$

अतः

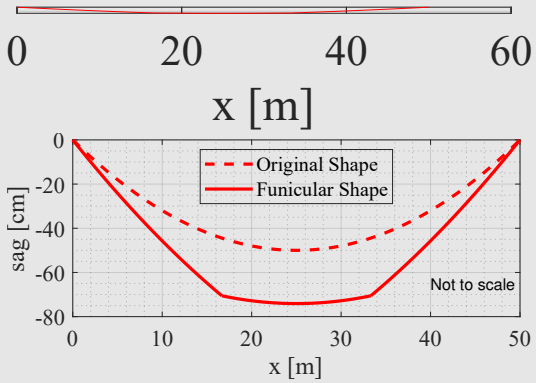
$$\frac{Tv_{0\,\max}}{ql^2} = 0.196, \quad T = 460\text{kgf}$$

लटकाव-विक्षेप वक्र का समीकरण (बाहरी भाग का लटकाव v_1 और मध्य भाग का v_3 है) निम्न हो जाता है

$$v_1 = 254\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)\text{cm}$$

$$v_2 = 254\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)\text{cm}$$

ध्यान दें कि वास्तव में लटकाव मुश्किल से दिखाई देते हैं!



यह चित्र बिंदु-भारों को वहन करने के लिए केबल के आकार में परिवर्तन स्पष्ट रूप से दर्शाता है।

[a]तनन में केबल का दीर्घन केवल उसके प्रत्यास्थ विरूपण से ही नहीं, बल्कि आंशिक बंकन और ऐंठन से भी होता है। तनन में केबल का प्रत्यास्थता का न्यूनित मापांक नियत नहीं रहता; अर्थात् केबल का तनन-परीक्षण आरेख प्रत्यास्थ विकृतियों पर भी रैखिक नहीं होता। आरंभ में केबल के विस्तार से वह कसता है और तारों के बीच की रिक्ति क्रमशः घटती है। आगे विस्तार होने पर तारों के संपर्क-क्षेत्रों में होने वाले स्थानीय विरूपण का प्रभाव अधिकाधिक स्पष्ट होता जाता है।

30.3.4 परवलय तथा कैटेनरी पर आधारित हलों की तुलना

61 समीकरण 30.11 तथा 30.3.2.1 को संयोजित करने पर प्राप्त होता है

$$y = \frac{q}{2H}x^2 \quad \text{परवलय}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62 अंततः हम परवलय तथा कैटेनरी की तुलना करना चाहते हैं। परवलय के लिए, समीकरण 30.11 तथा 30.3.2.1 को संयोजित करने पर प्राप्त होता है

$$y = \frac{q}{2H}x^2 \Rightarrow \frac{q}{H}y = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{H}x\right)^2$$

और कैटेनरी के लिए हम समीकरण 30.52 को पुनः लिखते हैं

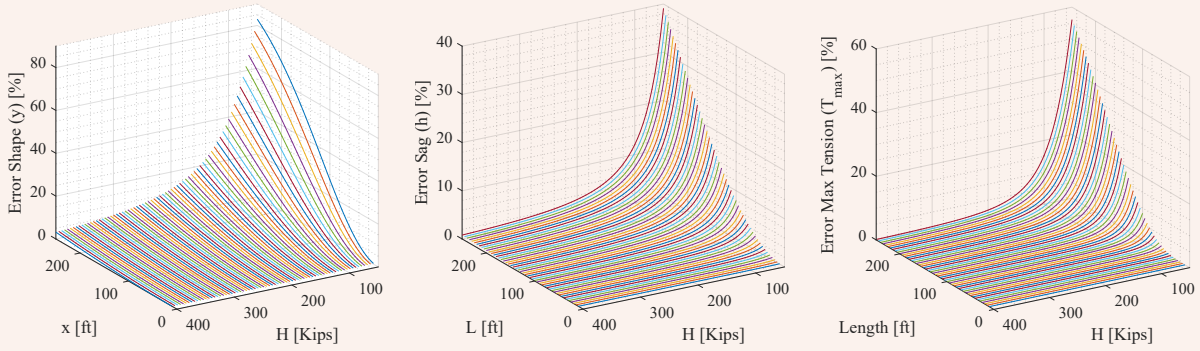
$$\frac{q}{H}y = \cosh\left(\frac{q}{H}x\right) - 1 \quad \text{कैटेनरी}$$

प्रत्यक्ष तुलना संभव करने के लिए हम अतिपरवलयी कोज्या को टेलर घात-श्रेणी के रूप में व्यक्त करते हैं

$$\frac{qy}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{qx}{H}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{qx}{H}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\frac{qx}{H}\right)^6 + \ldots \tag{30.66}$$

इस विस्तार का प्रथम पद परवलय के सूत्र के समान है और अन्य पद दोनों के बीच अंतर निर्मित करते हैं। अंतर केवल बड़े qx/H के लिए, अर्थात् विस्तार की तुलना में बड़े लटकाव के लिए, महत्त्वपूर्ण होता है (चित्र 30.8b)।

63 1.0 k/ft स्वभार वाले केबल के लिए परवलय तथा कैटेनरी पर आधारित हलों के बीच त्रुटियाँ क्रमशः ज्यामिति, लटकाव तथा अधिकतम तनन के लिए चित्र 30.8a, 30.8b तथा 30.8c में दर्शाई गई हैं।



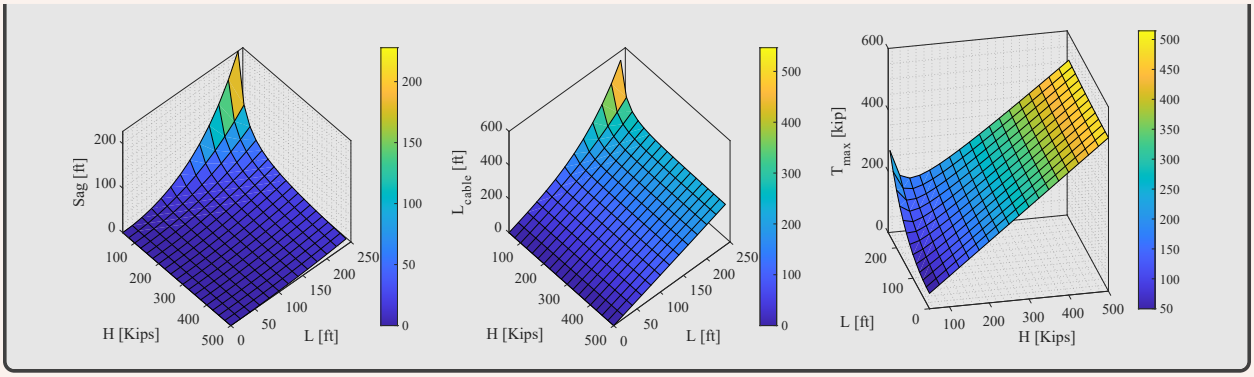
(a) आकार (b) लटकाव (c) अधिकतम तनन

चित्र 30.8: कैटेनरी तथा परवलय पर आधारित हलों की तुलना

30.3.4.1 उदाहरण 30.14: कैटेनरी बनाम परवलय

1.0 kip/ft स्वभार वाले केबल के लिए हमें अधिकतम तनन T_{max}, लटकाव h तथा केबल की लंबाई L_{cable} को H और L के पदों में निर्धारित करना है। समीकरण 30.53 तथा 30.55 का क्रमशः लटकाव, केबल की लंबाई तथा अधिकतम तनन के लिए उपयोग करने पर परिणाम निम्न चित्रों द्वारा सर्वोत्तम रूप से प्रदर्शित होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।





इंका पुल, पेरू

नम्य संरचनाओं में कैटेनरी क्रिया, भार-वितरण तथा साम्य—आधुनिक झूला पुलों की एक ऐतिहासिक अनुरूपता।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

31 चिनाई मेहराबों का विश्लेषण (वूस्वार)

सारांश

मेहराबों का "आविष्कार" रोमनों ने किया और उनका उपयोग सदियों से होता आया है। 19वीं शताब्दी के उत्तरार्ध तक ये वूस्वार (voussoir), अथवा चिनाई मेहराब, होते थे।

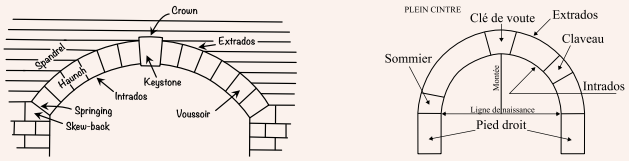
वे परिशुद्धता से काटे गए पच्चराकार खंडों से निर्मित होते हैं। प्रत्येक खंड निकटवर्ती खंडों की सतह पर दृढता से दबता है और भार को एकसमान रूप से स्थानांतरित करता है। उनका उपयोग मेहराबों, वाल्टों, उडते पुश्तों तथा अन्य संरचनाओं में होता है।

यह अध्याय व्यापक न होते हुए भी इन काल-परीक्षित संरचनाओं का परिचय देगा, जिनका विश्लेषण 18वीं शताब्दी तक समझा नहीं गया था (यद्यपि अनेक अनुभवाधारित नियम निश्चय ही पहले ज्ञात हो चुके थे)।

31.1 परिचय 1145
31.2 कुछ ऐतिहासिक टिप्पणियाँ 1146
31.2.1 De la Hire; 1640-1718 1146
31.2.2 Belidor; 1698-1761 1147
31.2.3 Couplet; 1670-1744 1150
31.2.4 Danyzy; 1698-1777 1151
31.2.5 Coulomb;1736-1806 1152
31.2.6 Moseley; 1801-1872 1154
31.2.7 प्रत्यास्थ हल 1154
31.2.8 Pippard; 1891-1969 1155
31.3 Pippard की विधि का सामान्यीकरण; Smars 1162
31.4 कलनविधि 1166
31.5 अंतिम टिप्पणियाँ 1169
31.5.1 Jacques Heyman; 1925 . . . 1169
31.5.2 प्रणोद रेखा 1170
31.5.3 प्रणोद रेखा तथा Pippard . . . 1171

31.1 परिचय

1 वूस्वार मेहराब की प्राचीनता के बावजूद, चित्र 31.1, और उनके व्यापक उपयोग के बाद भी, उसके



(a) परिभाषाएँ (Pippard, Tranter, and Chitty, 1936) (b) फ्रांसीसी पदावली

चित्र 31.1: वूस्वार क्या है

व्यवहार के सिद्धांत की कभी पर्याप्त जाँच हुई प्रतीत नहीं होती। यद्यपि उसके अभिकल्प पर पर्याप्त साहित्य उपलब्ध है, सुझाई गई विधियाँ अधिकांशतः अनुभवाश्रित हैं और संरचना की यांत्रिकी के अनिवार्य

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

लक्षणों को ध्यान में नहीं रखतीं (Pippard, Tranter, and Chitty, 1936)। वास्तव में वूस्वार मेहराबों के नए अभिकल्प में रुचि कम हो सकती है, किंतु विश्वभर के पुलों में ऐसे अभिकल्प बड़ी संख्या में विद्यमान हैं।

2 अप्रबलित चिनाई मेहराब के विश्लेषण की जटिलता निम्न उद्धरण में सर्वोत्तम रूप से व्यक्त होती है

> पश्चिमी जगत में नए भवन-निर्माण से पारंपरिक अप्रबलित चिनाई वास्तुकला लुप्त हो चुकी है। फिर भी चिनाई की वास्तु-विरासत का संरक्षण आवश्यक है और इसमें संरचनात्मक विश्लेषण सम्मिलित है। अज्ञात सीमा प्रतिबंधों वाली ऐसी विषम संरचनाओं पर संरचनाओं का शास्त्रीय सिद्धांत अच्छी तरह लागू नहीं होता। तथापि, सामग्री के संबंध में सरल धारणाओं पर आधारित चिनाई संरचनाओं का एक सिद्धांत विद्यमान है: अच्छी संपीडन सामर्थ्य, लगभग नगण्य तनन सामर्थ्य और सर्पण-विफलता से बचने हेतु निर्माण में सावधानी। इस सिद्धांत का जन्म 17वीं शताब्दी के अंत में हुआ, 18वीं शताब्दी में इसका विकास हुआ और 19वीं शताब्दी में इसे लागू किया गया। 20वीं शताब्दी के प्रारंभ में इसे त्याग दिया गया और अंततः भुला दिया गया। आधी शताब्दी पश्चात, 1960 के दशक में, Heyman ने पुराने सिद्धांत को आधुनिक सीमा-विश्लेषण के ढाँचे में समाहित किया, जिसमें आलोचनात्मक प्रेक्षण और अनुभव की अंतर्निहित निधि थी। सुरक्षित प्रमेय साम्य समीकरणों तथा सामग्री-संबंधी उक्त सरल कथनों के उपयोग की अनुमति देता है। सीमा प्रतिबंधों के संबंध में—जिन्हें जानना असंभव है और जो मूलतः बदलते रहते हैं—कोई अभिकथन नहीं किया जाता (सामर्थ्य तथा छोटे विस्थापनों से संबंधित सामान्य धारणाओं के अतिरिक्त)।
>
> Huerta, 2008 *"The analysis of masonry architecture: A historical approach: To the memory of professor Henry J. Cowan"*

31.2 कुछ ऐतिहासिक टिप्पणियाँ

31.2.1 De la Hire; 1640-1718

3 अपने पिता, Louis XIV के दरबार के सुप्रसिद्ध चित्रकार, के पदचिह्नों पर चलने के लिए नियत de La Hire[1] इटली में बीमारी से लंबे स्वास्थ्यलाभ के बाद ज्यामिति की ओर उन्मुख हुए, चित्र 31.2।

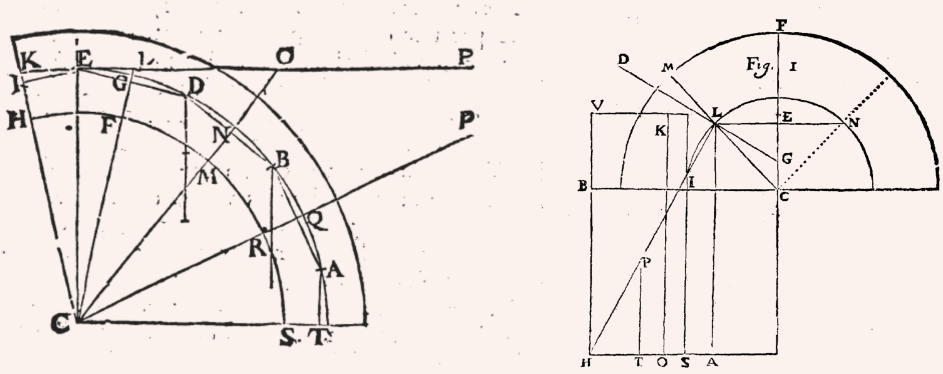
4 de La Hire, Philippe, 1695 ने अपना *Traite de Mécanique* प्रकाशित किया और मेहराब की समस्या पर फनिक्युलर बहुभुज की संकल्पना लागू करने वाले पहले व्यक्ति थे। बाद में उन्होंने अधिक व्यापक अध्ययन प्रकाशित किया। तत्पश्चात (de la Hire, 1712) ने पच्चर-सर्पण पतन क्रियाविधि पर आधारित पुश्तों के बलों की गणना की एक प्रक्रिया प्रकाशित की (त्रुटिपूर्ण, किंतु सुरक्षित)।

5 वे समस्या की जटिलता का वर्णन करते हुए आरंभ करते हैं

> C'est un Probleme des plus difficiles qu'il y ait dans l'Architecture, que de connoîitre la force que doivent avoir les pieds-droits des Voûtess pour en foutenir fa pouflee, & les Architecles n' ont trouvée jufqu'à prefent aucune regle certaine pour la déterminer. Ce probleme appartient à La Mécanique, & c'est par fon moyen que nous pouvons le réfoudre, en faifant quelques ffuppofitions, dont on convient affé facilement dans la conflruction de ces fortes d' ouvrages.
>
> de la Hire, 1712 *"Sur la construction des voûtes dans les édifices"*

[1] de la Hire की उत्कृष्ट जीवनी (Academie Royale des Sciences, 1741) में उपलब्ध है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

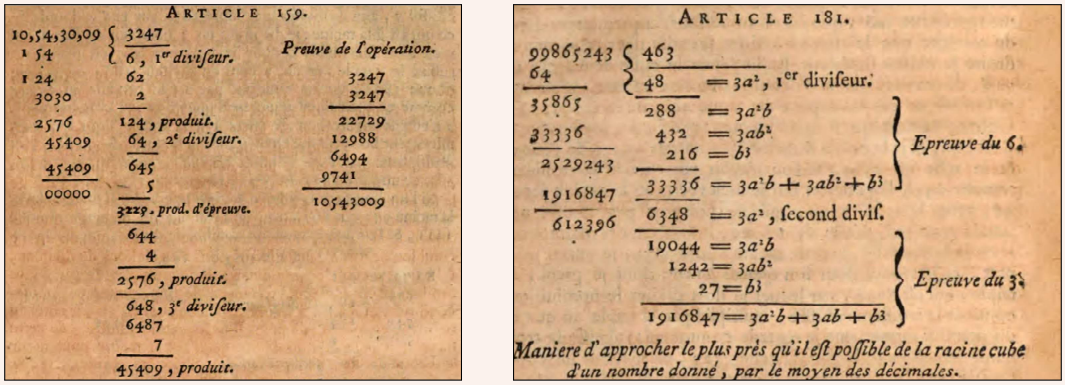


(a) de La Hire, Philippe, 1695 (b) de la Hire, 1712

चित्र 31.2: de la Hire द्वारा मेहराबों का विश्लेषण

31.2.2 Belidor; 1698-1761

6 Belidor सर्वप्रथम एक सैन्य अभियंता थे (de Belidor, B. F., 1757)। इस प्रकाशन में वे ज्यामिति, त्रिकोणमिति तथा बीजगणित में असाधारण प्रतिभा प्रदर्शित करते हैं। उदाहरणार्थ, चित्र 31.3 में वे किसी संख्या का वर्गमूल और घनमूल निर्धारित करने की प्रक्रियाएँ दर्शाते हैं।



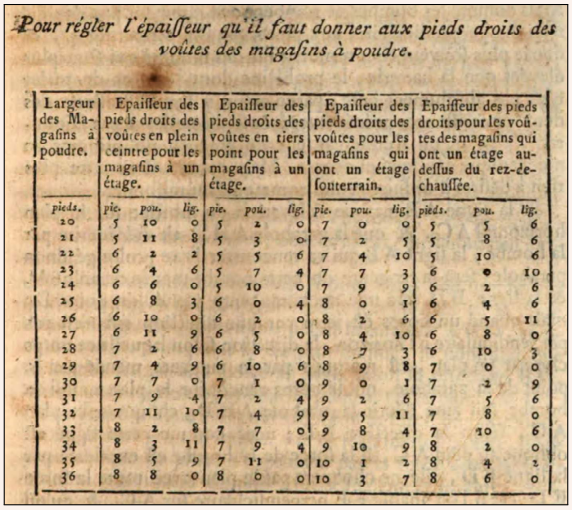
(a) 10,543,009 का वर्गमूल=3,247 (b) 99,865,243 का घनमूल=463.9

चित्र 31.3: बड़ी संख्याओं के वर्गमूल तथा घनमूल निकालने की de Belidor, B. F., 1757 की विधियाँ

7 इसी प्रकाशन में वे de La Hire की विधि पर आधारित मेहराबों के *pieds droits*[2] के विमा-निर्धारण हेतु एक सारणी देते हैं, चित्र 31.4[3]।

[2]यह पद मेहराब को आलंबित करने वाले ऊर्ध्वाधर संरचनात्मक अवयव (अंत्याधार) को सूचित करता है, चित्र 31.1b।
[3]रोचक रूप से, Belidor बारूद रखने वाले वाल्ट के लिए विमाएँ दे रहे हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Pour régler l'épaiſſeur qu'il faut donner aux pieds droits des voûtes des magaſins à poudre.

Largeur des Magasins à poudre.	Epaiſſeur des pieds droits des voûtes en plein ceintre pour les magasins à un étage.			Epaiſſeur des pieds droits des voûtes en tiers point pour les magasins à un étage.			Epaiſſeur des pieds droits des voûtes pour les magasins qui ont un étage ſouterrain.			Epaiſſeur des pieds droits pour les voûtes des magasins qui ont un étage au-deſſus du rez-de-chauſſée.		
pieds.	pie.	pou.	lig.	pie.	pou.	lig.	pie.	pou.	lig.	pieds.	pou.	lig.
20	5	10	0	5	2	0	7	0	0	5	5	6
21	5	11	8	5	3	0	7	2	5	5	8	6
22	6	2	2	5	5	6	7	4	10	5	10	6
23	6	4	6	5	7	4	7	7	3	6	0	10
24	6	6	0	5	10	0	7	9	9	6	2	6
25	6	8	3	6	0	4	8	0	1	6	4	6
26	6	10	0	6	2	0	8	2	6	6	5	11
27	6	11	9	6	5	0	8	4	10	6	8	0
28	7	2	6	6	8	0	8	7	3	6	10	3
29	7	4	9	6	10	6	8	9	8	7	0	0
30	7	7	0	7	1	0	9	0	1	7	2	9
31	7	9	4	7	2	4	9	2	6	7	5	6
32	7	11	10	7	4	9	9	5	11	7	8	0
33	8	2	8	7	7	0	9	8	4	7	10	6
34	8	3	11	7	9	4	9	10	9	8	2	0
35	8	5	9	7	11	0	10	1	2	8	4	2
36	8	8	0	8	0	0	10	3	7	8	6	0

चित्र 31.4: de La Hire के अनुसार मेहराबों के ऊर्ध्वाधर आलंब (*pied-droit*) के विमा-निर्धारण हेतु Belidor की सारणी; de Belidor, B. F., 1757

8 Belidor का कार्य मेहराबों (वूस्वारों) के अभिकल्प की अपेक्षा अंत्याधारों के विमा-निर्धारण पर अधिक केंद्रित है।

9 (de Belidor, B. F., 1729) में Belidor अंत्याधार के विवेचन को दो भागों में विभाजित करते हैं: a) कठोर सिद्धांत (अध्याय 2 तथा 3); और b) सरलीकृत विधियाँ (अध्याय 4)। प्रत्येक में वे विभिन्न (सीमा) प्रतिबंधों की जाँच करते हैं और सिद्धांत/विधि के पश्चात एक संख्यात्मक अनुप्रयोग उदाहरण देते हैं।

10 चौथे अध्याय की आरंभिक टिप्पणी है

> Qui comprend des règles pour trouver l'epaisseur des piedroits des voûtes de toute sorte d'espèces , par le seul calcul des nombres, pour l'intelligence de ceux qui ne savent pas l'algèbre.
>
> ...
>
> Je me suis engagée au commencement de ce second livre à donner des regles pour trouver l'epaisseur des piedroits des voûtes, afin de se passer du calcul algebrique, et contribuer à la satisfaction des personnes qui, quoique très-habiles d'ailleurs dans l'architecture militaire ou civile, ne s'y sont point appliquées. Quand on ecrit pour le public, et qu'il s'agit d'un ouvrage comme celui-ci, il faut autant qu'il est possible faire en sorte d'etre entendu de tout le monde, principalement de ceux qui se contentent de savoir la pratique des choses, et qui veulent bien s'en rapporter a la bonne-foi d'un auteur.
>
> de Belidor, B. F., 1729 *La science des Ingegnieurs*

11 पहले भाग में "सारांश" है, किंतु अधिक रोचक दूसरा भाग है, जिसका अनुवाद है

> *मैंने इस दूसरे ग्रंथ के आरंभ में वाल्टों के अंत्याधारों की मोटाई ज्ञात करने के नियम देने का संकल्प किया था, ताकि बीजगणितीय गणना से आगे बढ़ा जा सके और उन लोगों को संतुष्टि मिले जो सैन्य अथवा असैनिक वास्तुकला में अत्यंत कुशल होते हुए भी इसमें प्रवृत्त नहीं*

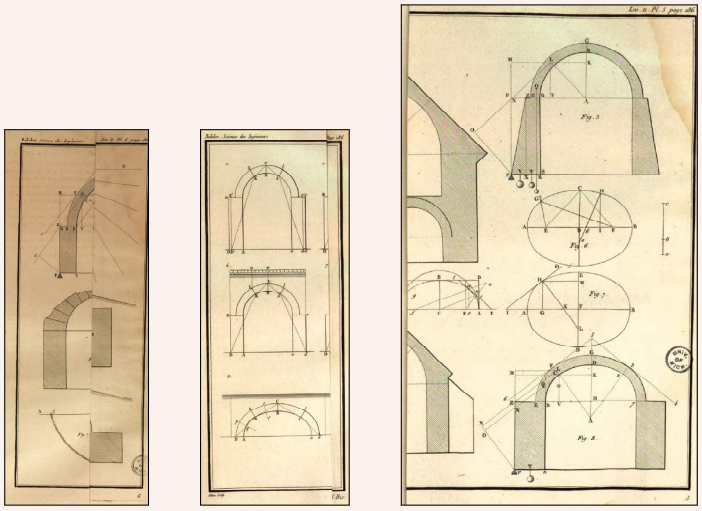
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> *हुए। जनता के लिए और ऐसे ग्रंथ में लिखते समय यथासंभव व्यापक पाठक-वर्ग तक पहुँचना चाहिए, विशेषकर उन लोगों तक जो केवल वस्तुओं का व्यावहारिक पक्ष जानना चाहते हैं और लेखक की विशेषज्ञता पर भरोसा करना पसंद करेंगे।*

वास्तव में यह विश्वविद्यालयों में अभियांत्रिकी-शिक्षण के समक्ष एक चिरस्थायी समस्या है[4]।

12 de Belidor, B. F., 1729 ने चार-किलक विफलता क्रियाविधि का अध्ययन किया, जो La Hire से भिन्न रूप में मेहराब के स्प्रिंग से 45° पर स्थित दरारों द्वारा अभिलक्षित थी, जबकि संपर्क सतह पर अपरूपण की उपेक्षा की गई थी (Brandonisio and De Luca, 2020)। Belidor के मॉडल में मेहराब के केंद्रीय पच्चर का सरपण पुश्ते पर पार्श्व प्रणोद T उत्पन्न करता है, जो बिंदु A के परितः पलटने की प्रवृत्ति रखता है; प्रणोद T को स्तंभ के भार (W_{pier}) तथा मेहराब के शेष भाग के भार (W_{arch}) द्वारा संतुलित किया जाता है। इसके अतिरिक्त मॉडल में माना जाता है कि प्रणोद T दरार के लंबवत, विदारण सतह के मध्य ($t/2$) पर लगता है (चित्र 31.6)। अतः पलटन स्थिरता सुनिश्चित करने वाले साम्य प्रतिबंध से, न्यूनतम पुश्ता-मोटाई का मूल्यांकन Belidor के विफलता निकष के अनुसार किया जा सकता है:

$$T.d_T \leq W_{arch}(t).d_{Warch} + W_{pier}(h,B).d_{Wpier}(B) \Rightarrow B_{min,Belidor} = B(t,R,h)$$



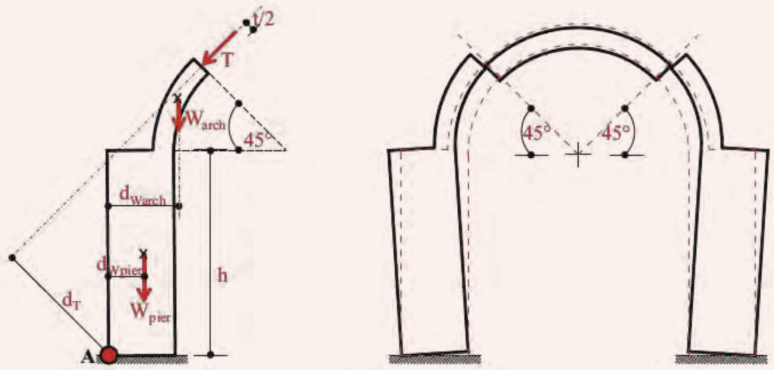
(a) (b) (c)

चित्र 31.5: मेहराबों का विश्लेषण (de Belidor, B. F., 1729)

13 विफलता विधा के गुणात्मक वर्णन पर लौटते हुए और चित्र 31.5b (ऊपरी चित्र) के संदर्भ में, Belidor लिखते हैं

[4]साथ ही "सैन्य" और "असैनिक" अभियंताओं के बीच उभरते विभेदन पर ध्यान दें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 31.6: Belidor का विफलता निकष (Brandonisio and De Luca, 2020)

Il résulte de cette analyse que, au moment où une voûte est prête à se rompre, elle se sépare en quatre parties dont les deux inférieures portent sur leurs bases par les arêtes D' et d', et dont les deux supérieures portent sur les inférieures par les arêtes K et k, en s'appuyant l'une contre l'autre par l'arête C. Si la rupture a lieu, ces quatre parties tournent autour de ces cinq arêtes comme sur des charnières, jusqu'à ce que les points K et k se soient tellement écartés, que leur distance horizontale soit devenue égale à la somme des deux lignes KC et kc. Alors la partie supérieure n'étant plus soutenue, tombe verticalement, et la voûte s'écroule tout-à-fait. Si on joint les arêtes qui servent d'axes à ces mouvements de rotation par les lignes $D'K$, KC, $d'k$, kC, on pourra considérer ces lignes comme des leviers mobiles à leurs extrémités sur des charnières, et chargés chacun du poids des portions de voûte qui leur correspondent, et il est évident que les conditions de l'équilibre de ces leviers sont absolument les mêmes que celles de la voutte, en sorte qu'il faudra concevoir que le poids de la partie supérieure KCk, décomposé dans le sens des lignes CK, ck, est une force appliquée aux extrémités K, k, des leviers $D'K$, $d'k$, qui tend à les faire tourner en dehors autour des points fixes D' et d', tandis que le poids des parties inférieures $D'E'$, $d'e'$, tend à faire tourner ces mêmes leviers en dedans, et c'est de l'équilibre de ces forces que dépend la stabilité de la voûte. Quant aux joints de rupture K et k, ils sont placés dans le lieu où la voûte est la plus faible, ou, pour s'exprimer avéc plus de rigueur, dans le lieu ou le moment des pressions exercess en K, k, qui tendent à renverser les piedroits $D'L$, $d'l$ pris par rapport aux points fixes D', d', est le plus grand possible par rapport au moment du poids de ces piédroits, pris par rapport aux memes points.

31.2.3 Couplet; 1670-1744

14 Couplet ने दो प्रमुख शोधपत्र (Couplet, 1729) तथा (Couplet, 1730) प्रकाशित किए।

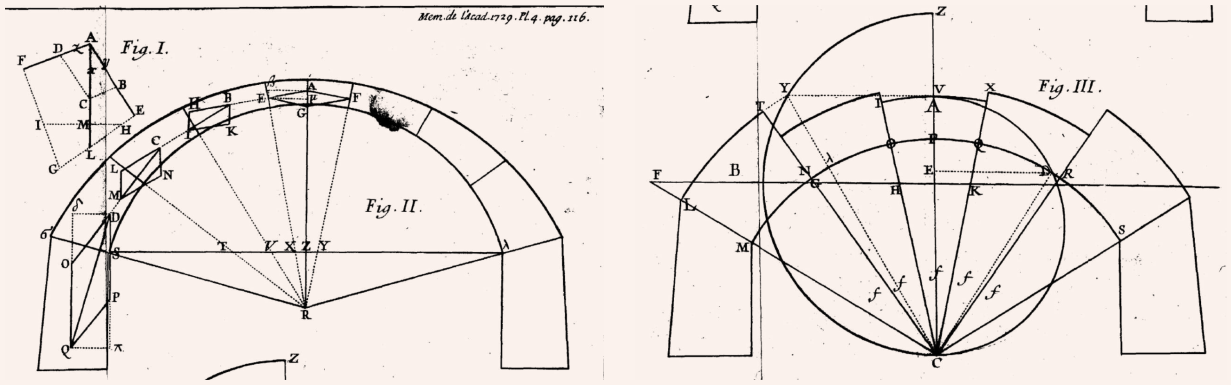
उनके प्रथम *mémoire* से उद्धरण, जिसमें वे बलों के समांतर चतुर्भुज[5] का उपयोग करते हैं और घर्षण पर विचार करते हैं:

[5]Stevin को पहले से ज्ञात, §14.5.4

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> Si la force x fe décompofe -en deux forces y &r z, ces trois forces feront elles comme les côtés d'un Triangle formé par les perperuliculaires nenés fur les directions de ces trois forces. Ceci efl: demontré dans prefque toutes les Méchaniques.
>
> Couplet, 1729 "*De la poussée des voûtes*"

15 बलों की दिशाओं के लंबवत भुजाओं वाले त्रिभुज पर बलों का समांतर चतुर्भुज लागू करने का विचार de La Hire का है। इसका लाभ यह है कि समस्या में वाल्ट-वृत्त की त्रिज्या सम्मिलित हो जाती है। यह महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि बाद के कार्य में इसी वृत्त की त्रिज्या वक्रता-त्रिज्या बनेगी। थोड़ी कल्पना के साथ कहा जा सकता है कि यह अवकल कलन के उपयोग की दिशा में एक संकोची कदम था।



(a) Fig. I & II (b) Fig. III

चित्र 31.7: मेहराबों का विश्लेषण (Couplet, 1729)

16 अपने दूसरे प्रकाशन में Couplet, 1730 ने पहली बार सही तर्क दिया कि वूस्वार की वास्तविक विफलता विधा चार भागों वाली क्रियाविधि के निर्माण से उत्पन्न होती है।

31.2.4 Danyzy; 1698-1777

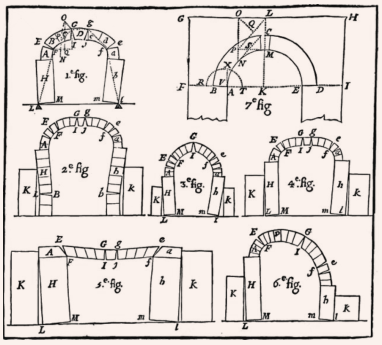
17 Danyzy, 1732 मेहराबों के मॉडलों पर व्यवस्थित परीक्षण करने वाले पहले व्यक्ति थे; इसका उद्देश्य सही पतन क्रियाविधि ज्ञात करना (और इस प्रकार Couplet द्वारा प्रस्तावित विफलता विधाओं की पुष्टि करना) था, चित्र 31.8।

18 उन्होंने दो मौलिक योगदान दिए:

1. ऊँचाई के पदों में मेहराब अथवा वाल्ट के आवश्यक पुश्ते को परिभाषित करने वाले वक्र के अनंतस्पर्शी स्वरूप को पहचाना। दूसरे शब्दों में, यदि अनंतस्पर्शी मान पर विचार किया जाए तो ऊँचाई को सम्मिलित किए बिना भी पुश्ते के विमा-निर्धारण का नियम निकाला जा सकता है।
2. ऐसा नया नियम परिभाषित करने का प्रयास किया जिसमें ऊँचाई की नहीं, बल्कि शिखर पर वाल्ट की मोटाई की गणना की जाती है।

Danizy अपना प्रतिज्ञात संस्मरण प्रकाशित नहीं कर सके, जिसका केवल

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 31.8: Danyzy, 1732 के प्लास्टर मॉडल

31.2.5 Coulomb;1736-1806

19 वूस्वार का एक आरंभिक विश्लेषण Coulomb, 1773 ने घर्षण पर अपने आधारभूत शोधपत्र में किया। अध्याय XVII (चित्र 31.9) में वे घर्षणरहित वूस्वारों की तुलना अगले अध्याय में घर्षण सम्मिलित करने वाली स्थिति से करते हैं।

XVII

Des voûtes dont les joints n'ont ni frottemtn, ni cohéfion

Cette formule fe trouve exactement la même que celle qui a été déterminée par M. Euler (dans le troifiéme volume de l'Académie de Péterfbourg) pour fa figure d'une chaine, follicitée par des puiffances quelconques. Ce qui doit effectivement arriver; car, en renverfant la courbe, & fubitituant la tenfion à la précédente,s'applique également à l'un ou l'autre cas, & donne préifément la mê expreffion. Au refte, la méthode de M. Euler n'a rien de commun avec celle-ci , que le réfultat.

Par cette théorie, je n'ai cherché qu' à remplir Ia premiére coindition d'équilibre, qui exige que toutes les forces qui agissent sur une portion de voûte GaMm, aient leur refultante perpendiculaire au joint Mm ; mais il eft facile de prouver que l'on a fatisfait en mêe-temps à la deuxieme condition, qui demande que cette réfultante tombe entre les poin M & m; car, puifque la force conflante A agit perpeiidiculaireinent au joint vertical Ga, en un point quelconque S, il s'enfuit que par la condition d'équilibre que l'on vient de remplir, la ligne des réfultantes doit couper tous les joins perpendiculairement, elle formera une courbe parallèle à la ligne intérieure a B; ainfi, dans le cas où la force A feroit appliqué en a, la ligne des prefions feroit exactement la même que aMb.

XVIII

De l'équilibre des voûtes, en ayant égard au frottement et àla cohéfion.

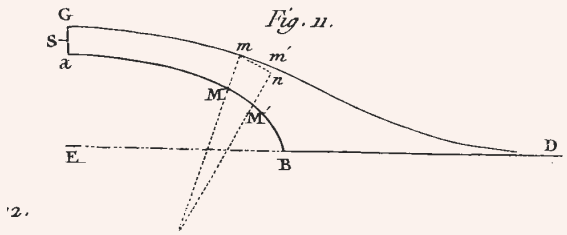
Le frottement eft fouvent affez confidérable dans les matériaux que l'on emploie à la conftruction des voûtes, pour que les différens vouffoirs ne puiffent point gliffer l'un contre l'autre; en ce cas, l'on peut négliger ia première condition d'équilibre; & il n'eft plus nécceffaire que la réffultante des forces qni agit fur une portion quelconque de voûte foit perpendiculaire aux joints qui la terminent; mais feulement qu'elle tombe sur ces joints. Ainfi, en négligeant la cohéfion des joints, ce qui doit le faire dans les voûtes nouvellement conftruites; il suffit de chercher le maximum de $\frac{\phi g M}{MQ}$, pour déterminer la force B_i, & le minimum de $\frac{\phi g M}{mQ}$, pour déterminer B'; l'on doit en outre fuppofer que le force B agit en G, fommet du joint, pour rendre la force B, auffi petite

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> qu'elle puiffe être. Il faut cependant remarquer que lorfqu'on cherche à fixer l'état d'équilibre par cette feconde condition, en fuppofant les forces paffant par les points G & M, il faut fuppofer que ces points font affez éloignés de l'extrémité des joints, pour que l'adherence des vouffoirs ne permette pas à ces forces d'en rompre les angles; ce qui fe détermine par les méthodes que nous avons employées en cherchant la force d'un pilier.
>
> Coulomb, 1773 "*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*"

20 XVII (न घर्षण, न संसंजन) में वे पहले तर्क देते हैं कि मेहराब का आदर्श आकार उसी उलटी कैटेनरी के समान है जिसका आकार Euler ने निर्धारित किया था (सारणी 15.5 देखें; वास्तव में Gaudi ने *Sagrada Familia* के अभिकल्प में इसका उत्कृष्ट उपयोग किया)। फिर वे कहते हैं कि प्रणोद रेखा को ज्यामिति के भीतर सीमित रहना चाहिए।

21 जैसा कि Heyman, 1997 ने XVIII (घर्षण सहित), चित्र 31.9, के संदर्भ में विवेचित किया है, वे चिनाई मेहराब का आधा भाग दर्शाते हैं और उसके स्वभार तथा शिखर पर क्षैतिज प्रणोद H, जो लगभग अदृश्य बिंदु f से कार्य करता है, की क्रिया के अधीन मेहराब की विफलता पर विचार करते हैं। पहले घर्षण तथा संसंजन (अपरूपण सामर्थ्य) दोनों वाली सामग्री (जैसे मृदा) लेते हुए Coulomb आवश्यक H का मान निर्धारित करते हैं, जो समतल Mm के अनुदिश सर्पण से मेहराब की विफलता उत्पन्न करे। इस प्रकार मेहराब की विफलता सामग्री के गुणों पर निर्भर है। किंतु Coulomb तत्काल टिप्पणी करते हैं कि "मेहराब निर्माण में प्रयुक्त सामग्रियों का घर्षण प्रायः इतना अधिक होता है कि वूस्वार कभी एक-दूसरे पर सरक नहीं सकते"। तब वे निष्कर्ष निकालते हैं कि यदि खंड Mm पर विफलता होनी है तो वह मेहराब के किसी भाग के m अथवा M के परितः घूर्णन से होगी।



चित्र 31.9: Coulomb, 1773 द्वारा घर्षणरहित वूस्वारों का विश्लेषण

22 यदि ϕ मेहराब के भाग $GaMm$ का भार है, जो रेखा $g'g$ में कार्य करता है, तो M के परितः घूर्णन होने पर

$$H = \phi \frac{gM}{MQ} \tag{31.1}$$

और यदि m के परितः हो, तो

$$H = \phi \frac{qg'}{mq} \tag{31.2}$$

ये H के व्यंजक सामग्री के घनत्व तथा मेहराब की विमाओं को सम्मिलित करते हैं, किंतु सामग्री की सामर्थ्य को नहीं। अतः ये व्यंजक मेहराब की स्थिरता के विशुद्ध ज्यामितीय कथन हैं।

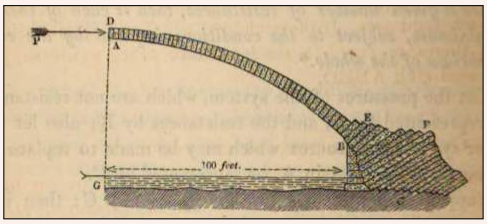
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

23 Coulomb ने दर्शाया कि H का अधिकतम मान समीकरण 31.1 से, विफलता के विभिन्न अनुप्रस्थ काटों तथा H की क्रिया-रेखाओं पर विचार करके, खोजा जाना चाहिए; इसी प्रकार न्यूनतम मान समीकरण 31.2 से प्राप्त किया जाना चाहिए। Coulomb ने कहा कि प्रयत्न-त्रुटि विधि अत्यंत यथार्थ है, क्योंकि अधिकतम अथवा न्यूनतम बहुत "समतल" होता है।

31.2.6 Moseley; 1801-1872

24 Moseley की आरंभिक प्रसिद्धि का आधार उनका *न्यूनतम दाब का सिद्धांत* है, जो पहले (Moseley, 1833) में और बाद में उनके ग्रंथ[6] (Moseley, 1869) में प्रकाशित हुआ, चित्र 31.10।

> यह माना जाता है कि यह स्थैतिकी का एक नया सिद्धांत निर्मित करता है। यदि साम्य में स्थित कितने भी बलों के बीच प्रतिरोधों की एक प्रणाली सम्मिलित हो, तो ये प्रतिरोध ऐसे होंगे कि उनका योग न्यूनतम हो; प्रत्येक को उसके अनुप्रयोग-बिंदु के निर्देशांकों का धन चिह्न सहित फलन माना जाता है और वह संपूर्ण प्रणाली के साम्य द्वारा लगाए गए प्रतिबंधों के अधीन होता है।
>
> Moseley, 1833 *"L. On a new principle in statics, called the Principle of least Pressure"*



335. *Of all the pressures which can be applied to the highest voussoir of a semi-arch, different in their amounts and points of application, but all consistent with the equilibrium of the semi-arch, that which it would sustain from the pressure of an opposite and equal semi-arch is the least.*

Let EB represent the surface by which an arch rests upon

चित्र 31.10: Moseley का न्यूनतम प्रतिरोध सिद्धांत (Moseley, 1869)

25 मुझे यह "नया सिद्धांत" भ्रमित करने वाला लगा। किंतु इसमें §15.5.4.2 में विवेचित Maxwell के कार्य से कुछ समानता दिखाई देती है।

26 बहुत बाद में Moseley, 1869 ने स्पष्ट रूप से कहा कि स्थिरता की आवश्यकता यह है कि प्रणोद रेखा संपूर्ण अनुप्रस्थ काट के बाहर न जाए। दूसरी ओर, यदि वह मध्य तृतीयांश के भीतर रहती है तो कोई तनन उत्पन्न नहीं होता।

31.2.7 प्रत्यास्थ हल

31.2.7.1 Castigliano; 1847-1884

27 Castigliano के दो प्रमेयों ने संरचनात्मक विश्लेषण में क्रांति ला दी और उनका उपयोग प्रत्यास्थ मेहराबों के विश्लेषण में किया गया, (Castigliano, 1879)।

28 अपने ग्रंथ में वे Turin में Dora Riparia पर Charles Mosca द्वारा 1827 में निर्मित पुल का विवरण देते हैं, चित्र 31.11। Catsigliano Turin के पुल को तीन अतिरिक्तताओं वाला प्रत्यास्थ मेहराब मानते

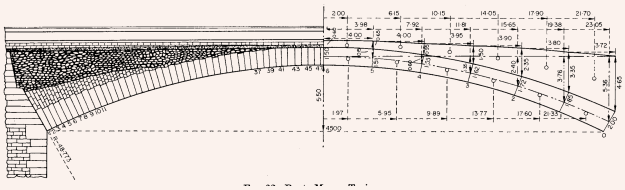
[6]जिसे व्यापक स्वीकृति मिली और West Point ने उपयोग किया।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Étude du pont en pierre de taille
construit sur la Doire à Turin, par l'Ingénieur Ch. Mosca

(Planche XV)

1. Données générales. - Corde de l'intrados . . 45m,00
Flêche de l'intrados 5m,50
Rayon » 48m,773
Amplitude » 54° 56′ 42″
Épaisseur de la voûte à la clef 1m,50
» » aux naissances 2m,00
Corde de l'extrados 46m,846
Flêche » 5m,226
Rayon » 55m,102
Amplitude » 50° 18′ 42″
Largeur du pont, y compris les garde-corps . . 12m,60.
2. Charges. - La voûte du pont est en granit du Manalaggio



चित्र 31.11: Charles Mosca वूस्वार पुल (Turin), जिसका विश्लेषण (Castigliano, 1879 PDF) ने किया

हैं, जिनके मान वे गणना करते हैं; वे दर्शाते हैं कि दरारयुक्त मेहराब (अर्थात् अपूर्ण रूप से प्रत्यास्थ मेहराब) को प्रयत्न-त्रुटि द्वारा संभाला जा सकता है और पुल के लिए गणनाओं के तीन समुच्चय बनाते हैं।

29 पहले समुच्चय में वूस्वारों के बीच मोर्टार स्तरों की प्रत्यास्थता का पूर्ण प्रभाव सम्मिलित किया जाता है और क्षैतिज अंत्याधार प्रणोद का मान पुल की प्रति मीटर चौड़ाई 352,990 kgf परिकलित होता है। (Heyman, 1969 PDF) के अनुसार Castigliano अपनी गणनाएँ अनावश्यक रूप से बहुत अधिक सार्थक अंकों तक करते हैं।

31.2.7.2 Winkler; 1835-1888

30 Emil Winkler प्रत्यास्थ नींवों पर बीमों के विश्लेषण ("Winkler स्प्रिंग") के लिए सर्वाधिक प्रसिद्ध हैं, किंतु यह कम ज्ञात है कि वे मेहराबों का प्रत्यास्थ विश्लेषण करने वाले भी पहले व्यक्ति थे (Winkler, 1879 PDF) (Winkler, 1880 PDF), चित्र 31.12।

31 उनका उपागम Castiglione के उपागम से अधिक कठोर तथा सामान्यीकृत है।

31.2.8 Pippard; 1891-1969

32 Pippard के दो रोचक योगदान हैं। पहले में, जिस प्रकार Danyzy, 1732 ने Couplet के सिद्धांत का परीक्षण किया था, उसी प्रकार Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 PDF ने Castigliano द्वारा पूर्वानुमानित वूस्वारों के विफलता-सिद्धांतों की पुष्टि हेतु परीक्षण किए, चित्र 31.13।

33 अपने दूसरे योगदान में Pippard वूस्वार की विफलता की जाँच करते हैं। उनके ग्रंथ से उद्धरण:

1. चित्र 31.14 (a) में मिट्टी-भराव वाला वूस्वार मेहराब और इसके अतिरिक्त किसी विशिष्ट वूस्वार पर लगाया गया भार दर्शाया गया है। इस बिंदु-भार को बढ़ाने पर क्षैतिज प्रणोद भी बढ़ता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Lage der Stützlinie im Gewölbe.

Vortrag, gehalten im Architekten-Verein zu Berlin am 12. Januar 1880 von E. Winkler.

(II. Theil. Fortsetzung zu Jahrg. 1879, S. 130 dies. Ztg.)

In dem I. Theil meines Vortrages habe ich die hauptsächlichsten Gewölb-Theorien hinsichtlich der Lage der Stützlinie besprochen und bin dabei zu dem Resultate gekommen, dass nur die auf die Elastizitätslehre gegründete Theorie als richtig anzuerkennen ist und dass dieselbe in neuerer Zeit immer mehr Vertreter findet.*)

Bei der Besprechung dieser Theorie haben wir uns die Gewölbe im normalen Zustande vorgestellt, d. h in einem solchen Zustande, dass unmittelbar vor dem Beseitigen des Lehrgerüstes zwar noch keine Drücke in den Fugen existiren, wohl aber alle Fugen vollständig geschlossen und die Widerlager absolut unverrückbar sind.

Wir haben dort den Satz aufgestellt, dass diejenige Stützlinie die richtige ist, welche die Mittellinie des Gewölbes ausgleicht oder für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Mittellinie ein Minimum ist. Hieraus folgt, dass in dem Falle, wo sich eine Stützlinie konstruiren lässt, die mit der Mittellinie zusammen fällt, die Mittellinie in der That die Stützlinie ist.

Beide Sätze sind nur annähernd richtig und nur bei nicht zu flachen Bogen anwendbar; sie ergeben sich nämlich, wenn man den Einfluss der Fugendrücke auf die Deformation gegen den der Momente vernachlässigt. In der That ist es nicht gut denkbar, dass bei einem Gewölbe in normalem Zustande die Stützlinie mit der Mittellinie zusammen fällt; denn beim Ausrüsten senkt sich das Gewölbe etwas, es ändert sich somit die Krümmung an den einzelnen Stellen; es treten somit beim Senken Momente ein oder die Stützlinie tritt aus der Mittellinie heraus. Der Krümmungs-Radius wird am Scheitel größer, an den Kämpfern, der festen Anstemmung halber, kleiner, was darauf hinaus kommt, dass die Stützlinie im Scheitel hinauf, an den Kämpfern dagegen herab rückt (Fig. 5). Bezeichnen wir den Abstand der Stützlinie von der Mittellinie im Scheitel und an den Kämpfern mit c und b, die Bogenhöhe mit h, die Gewölbdicke mit d, so ergiebt sich annähernd durch die im ersten Vortrage aufgestellten Bedingungen für flache Bogen bei totaler Belastung:

elliptischen Bögen öffnen sich die Fugen an höher liegenden Bogentheilen.

Beim Ausrüsten öffnen sich die Fugen in Folge der Zusammendrückung des Bogens noch mehr, während sie sich als Wirkungen der entstehenden Momente und der hieraus resultirenden Verdrehungen zum Theil wieder schliefsen. Die genauere Untersuchung mit Hülfe der Elastizitäts-Theorie giebt, dass der aus beiden Ursachen resultirende Betrag e, um welchen die Fugen sich wieder schliefsen, bei flachen Bögen annähernd:

$$e = \frac{9\,l^2}{8\,E\,d}\,\frac{4\,h - 5\,d}{8\,h^2 + 10\,h\,d + 5\,d^2}$$

ist. Dieser Betrag ergiebt sich aber im allgemeinen kleiner, als der aus der Senkung des Lehrgerüstes resultirende, vielfach beobachtete Betrag, so dass in der That die Fugen im allgemeinen geöffnet bleiben, also ein Aufruhen an den unteren Kanten der Kämpferfugen oder vielmehr an einer diesen Kanten nahe liegenden Stelle eintritt (Fig. 6). Das Gewölbe verhält sich alsdann so, als ob dasselbe auf Gelenken ruhte, die sich nahe an den unteren Kanten der Kämpferfugen befinden. Bei Gewölben mit grofsem

Fig 5.



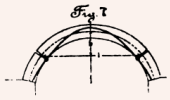
Fig 6.



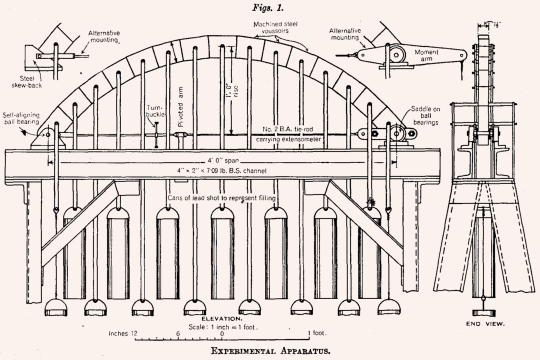
Fig.10.



Fig 7



चित्र 31.12: Winkler द्वारा मेहराबों का प्रत्यास्थ विश्लेषण (Winkler, 1880 PDF)



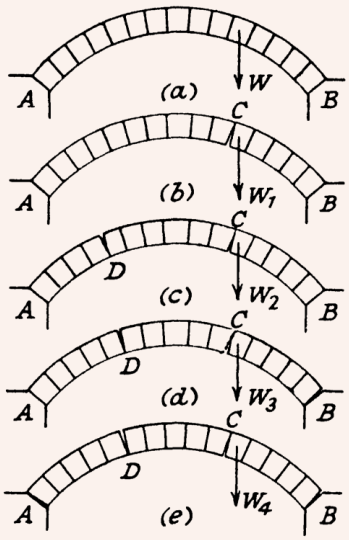
Experimental Apparatus.

चित्र 31.13: वूस्वार मेहराबों की स्थिरता की जाँच हेतु Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 PDF द्वारा प्रयुक्त प्रायोगिक उपकरण।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

W के छोटे मानों के लिए प्रणोद समान आकार तथा समान अंत्याधारों वाली ठोस रिब के मानों से व्यावहारिक रूप से ठीक मेल खाता है।

2. किसी विशिष्ट मान W_1 पर, चित्र 31.14 (b), लगाए गए भार के साथ प्रणोद की परिवर्तन-दर में बदलाव आता है, जो C पर किलक बनने के अनुरूप है। यह दर्शाता है कि अब मेहराब प्रभावी रूप से दो ठोस खंडों AC तथा BC में बदल गया है, जो C पर परस्पर किलकित हैं। यदि आलंबों को थोड़ा फैलने दिया जाए तो "किलक" को C पर निकटवर्ती वूस्वारों के किलकित होने से बनते स्पष्ट देखा जा सकता है। प्रणोद और भार का नया अनुपात कुछ समय तक बना रहता है।
3. भार W_2 पर दर में एक अन्य परिवर्तन होता है, जो D पर दूसरे आभासी किलक के निर्माण से उत्पन्न होता है, जैसा चित्र 31.14 (c) में है। किंतु यह किलक मेहराब की अधोवक्र सतह पर है, जबकि पहला बहिर्वक्र सतह पर था। अब मेहराब दो ठोस खंडों AD तथा BC से बना है, जिन्हें तीसरा ठोस खंड DC जोड़ता है; यह उनसे किलकित है और मूलतः कैंटिलीवर पुल की संरचना है।
4. भार में और वृद्धि दर्शाती है कि W_3 पर भार के साथ प्रणोद की परिवर्तन-दर में एक और बदलाव आता है, जो B पर अधोवक्र सतह में तीसरे "किलक" के निर्माण के कारण है। अब मेहराब तीन ठोस खंडों से बना है, जिनमें एक, AD, A पर *encastré* है और अन्य दो प्रभावी रूप से ठोस किलक-संधित कड़ियाँ हैं, जैसा चित्र 31.14 (d) में है। इस प्रक्रिया में संरचना की अतिरिक्तता क्रमशः घटती है। मूल मेहराब में तीन कोटि की अतिरिक्तता है, किंतु प्रत्येक क्रमिक किलक बनने पर एक कोटि की अतिरिक्तता नष्ट होती है; अतः (b) में दो, (c) में एक और (d) में कोई नहीं है, अर्थात् (d) स्थैतिकतः निर्धार्य है।
5. यदि W_3 के आगे भारण जारी रखा जाए, तो भार W_4 पर A में चौथा किलक बनने से मेहराब का आकस्मिक पतन होता है; यह किलक समुच्चय को क्रियाविधि में बदल देता है, चित्र 31.14 (e)।



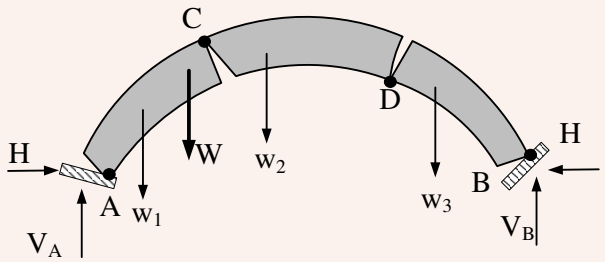
चित्र 31.14: वूस्वार की क्रमिक विफलता Pippard, Tranter, and Chitty, 1936

[34] Pippard आगे कहते हैं कि

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> यद्यपि अधिक नवीन कार्य के आलोक में Castigliano की विधि अभिकल्प का सबसे सुदृढ आधार देती प्रतीत होती है, फिर भी अब तक उसे सामान्य स्वीकृति नहीं मिली है और अभी भी पुराने सिद्धांतों के संयोजन पर भरोसा किया जाता है, जिनका सार अगले अनुच्छेद में दिया जाएगा।
>
> Pippard and Baker, 1943 *The analysis of engineering structures*

35 अतः चित्र 31.15 के संदर्भ में वे प्रस्तावित करते हैं निम्न प्रक्रिया:



चित्र 31.15: Pippard and Baker, 1943 द्वारा वूस्वारों का विश्लेषण

1. मान लें कि चारों किलकों (A, B, C तथा D) के स्थान ज्ञात हैं।
2. खंड CDB उस पर कार्यरत बलों के अधीन साम्य में होगा, किंतु इनमें अज्ञात W सम्मिलित नहीं है।
3. C तथा D के परितः इन बलों के आघूर्ण लें; हमें H, V_B तथा मृत-भार प्रणाली के उपयुक्त भाग में दो समीकरण प्राप्त होंगे। तब V_B को विलोपित करके H के लिए हल करें।
4. A के परितः आघूर्ण लेने पर हमें W, V_B, H तथा मृत-भार के पदों में एक समीकरण प्राप्त होगा। C के परितः आघूर्ण-समीकरणों का उपयोग करके V_B को पुनः विलोपित किया जाता है और चूँकि H ज्ञात हो चुका है, इसलिए W निर्धारित किया जा सकता है।

36 किंतु C तथा D के स्थान *a priori* ज्ञात नहीं हैं, अतः प्रयत्न-त्रुटि प्रक्रिया आवश्यक है; तथापि कुछ सामान्य नियम chap:trustregion को पर्याप्त घटा देते हैं। इस प्रकार किलक C सदैव W के निकटवर्ती संधि की बहिर्वक्र सतह पर, W तथा मेहराब के शिखर के बीच बनता है; किलक B सदैव W से अधिक दूर वाले स्प्रिंग की बहिर्वक्र सतह पर बनता है; किलक A अधोवक्र सतह पर, या तो दूसरे स्प्रिंग पर अथवा उसके निकट किसी संधि पर होता है; और अधिकांश स्थितियों में किलक D के स्थान का निकट आकलन किया जा सकता है।

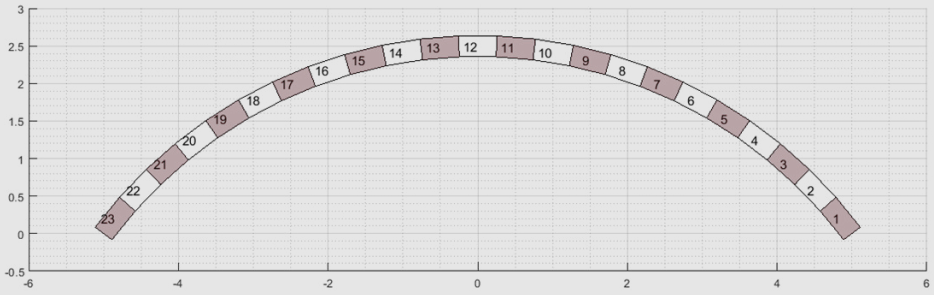
37 अतः W ज्ञात करने के लिए विभिन्न किलक-स्थानों हेतु कुछ परीक्षण आवश्यक हैं। पहले की भाँति H की गणना खंड CB के साम्य से की जाती है, किंतु D के कुछ (संभवतः दो अथवा तीन) विभिन्न स्थानों के लिए। जो स्थान H का न्यूनतम मान देता है वही सही होगा, क्योंकि वह W का न्यूनतम मान देगा, चाहे A का स्थान कुछ भी हो। H ज्ञात करने के पश्चात A के कुछ वैकल्पिक स्थान लिए जाते हैं और पहले वर्णित विधि से W के संगत मानों की गणना की जाती है। इनमें न्यूनतम मान सही होगा।

38 निम्न एक संख्यात्मक उदाहरण है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

31.2.8.1 उदाहरण 31.1: वूस्वार का विफलता भार; Pippard की विधि

निम्न अंश Pippard and Baker, 1943 *The analysis of engineering structures* से पुनरुत्पादित है।



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
	संदर्भ बिंदु		x	y	भार	आघूर्ण	Σw	Σwx
अंतः	मध्य	बाह्य			w	wx		
23, 0			1.600	-0.027				
		23, 0	1.636	0.000			2,016	1,649
	23		1.593		108	172		
22, 23			1.550	0.035				
		22, 23	1.584	0.064			1,908	1,477
	22		1.540		106	163		
21, 22			1.496	0.091				
		21, 22	1.526	0.123			1,802	1,314
	21		1.481		107	159		
20, 21			1.437	0.144				
		20, 21	1.465	0.178			1,695	1,155
	20		1.419		100	142		
19, 20			1.369	0.191				
		19, 20	1.399	0.228			1,595	1,013
	19		1.353		94	127		
18, 19			1.307	0.233				
		18, 19	1.329	0.272			1,501	880
	18		1.283		86	110		
17, 18			1.237	0.270				
		17, 18	1.256	0.310			1,415	776
	17		1.210		83	100		
16, 17			1.165	0.301				
		16, 17	1.181	0.342			1,332	676
	16		1.135		77	88		
15, 16			1.090	0.326				
		15, 16	1.102	0.368			1,255	588
	15		1.057		74	78		
14, 15			1.013	0.345				
		14,15	1.022	0.388			1,181	510
	14		0.978		71	69		
13, 14			0.936	0.357				
		13, 14	0.941	0.401			1,110	441
	13		0.898		68	61		
12, 13			0.857	0.364				
		12, 13	0.859	0.408			1,042	380
	12		0.818		68	56		
11, 12			0.778	0.364				
		11. 12	0.777	0.408			974	324
	11		0.737		68	50		
10, 11			0.700	0.357				
		10, 11	0.694	0.401			906	274
	10		0.657		71	47		
9, 10			0.622	0.345				
		9, 10	0.613	0.388			835	227
	9		0.578		74	43		
8, 9			0.545	0.326				
		8, 9	0.533	0.368			761	184
	8		0.501		77	39		
7, 8			0.471	0.301				
		7, 8	0.455	0.342			684	145
	7		0.425		83	35		
6, 7			0.398	0.270				
		6, 7	0.379	0.310			601	110
	6		0.353		86	30		
5, 6			0.328	0.233				
		5, 6	0.306	0.272			515	80
	5		0.283		94	27		
4, 5			0.267	0.191				
		4, 5	0.237	0.228			421	53
	4		0.217		100	22		
3, 4			0.199	0.144				
		3, 4	0.171	0.178			321	31
	3		0.154		107	16		
2, 3			0.140	0.091				
		2, 3	0.109	0.123			214	15
	2		0.096		106	10		
1, 2			0.085	0.035				
		1, 2	0.052	0.064			108	5
	1		0.043		108	5		
0, 1			0.036	-0.027				
		0, 1	0.000	0.000				

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चूँकि अधिकांश स्थितियों में मेहराब के सभी बिंदुओं पर W के क्रांतिक मानों की आवश्यकता होगी, कार्य व्यवस्थित रूप से किया जाना चाहिए और निम्न विधि अनुशंसित है। मेहराब-वृत्त 23 वूस्वारों से बना है, जिनकी गहराई 3·33" है। विस्तार 10 फुट तथा उत्कर्ष 2 फुट 6 इंच है।

B को मूलबिंदु लें, जहाँ Ox क्षैतिज और Oy ऊर्ध्वाधर संदर्भ-अक्ष हैं। बाएँ अंत्याधार से आरंभ करके प्रत्येक संधि की बहिर्वक्र तथा अधोवक्र सतह के निर्देशांक सारणीबद्ध किए जाते हैं (इस विशिष्ट स्थिति में माध्य त्रिज्या के पदों में)। प्रत्येक वूस्वार के केंद्र का x निर्देशांक सारणी के स्तंभ 4 में, उस पर लगाया गया मृत भार स्तंभ 6 में और मूलबिंदु के परितः इस मृत भार का आघूर्ण स्तंभ 7 में लिखा जाता है। किसी संधि के दाईं ओर के सभी मृत भारों का योग तथा उनके आघूर्णों का योग स्तंभ 8 तथा 9 में लिखे जाते हैं।

उदाहरण के रूप में हम वह भार निर्धारित करेंगे जो मेहराब को अस्थिर करने हेतु वूस्वार संख्या 19 पर लगाया जाना चाहिए।

C के परितः, C तथा B के बीच मेहराब के भाग के लिए, आघूर्ण लेने पर हमें प्राप्त होता है

$$x_c V_B = y_c H + x_c \sum_C^B w - \sum_C^B wx$$

बिंदु C 18-19e है[a]; सारणी से संख्यात्मक मान प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$1.329 V_B = 0.272 H + (1.329 \times 1,501) - 886 \Rightarrow V_B = 0.204 H + 835 \tag{31.3}$$

प्रथम परीक्षण के लिए मान लें कि किलक D, खंड 9-10i के बीच है। D तथा B के बीच मेहराब के भाग के लिए इस बिंदु के परितः आघूर्ण-समीकरण है

$$0 \cdot 622 V_n = 0 \cdot 345 H + (0 \cdot 622 \times 835) - 227 \Rightarrow V_n = 0 \cdot 554 H + 471 \tag{31.4}$$

पूर्ववर्ती दो समीकरणों, समीकरण 31.3 तथा 31.4, से V_n को विलोपित करने पर

$$H = l,040 \text{ lbs} \tag{31.5}$$

दूसरे परीक्षण के लिए किलक D को 10-11i पर मानें;

$$0 \cdot 700 VB = 0 \cdot 357 H + (0 \cdot 700 \times 906) - 274 \Rightarrow V_B = 0 \cdot 511 H + 516.$$

पुनः समीकरण 31.3 तथा 31.2.8.1 से

$$H = 1,042 \text{ lbs}$$

इसी प्रकार यदि किलक D 8-9i पर हो

$$H = l,045 \text{ lbs}$$

स्थान 9-10i सही है, क्योंकि यह H का न्यूनतम मान देता है। बाएँ अंत्याधार (अर्थात् 23-0i) को किलक A चुनकर और A के परितः आघूर्ण लेकर हमें प्राप्त होता है

$$l \cdot 600 V_B = -0 \cdot 027 H + (l \cdot 600 \times 0 \cdot 2016) - 1,649 + 0 \cdot 247 W \Rightarrow V_n = -0 \cdot 017 H + 086 + 0 \cdot 155 W. \tag{31.6}$$

समीकरण 31.3 तथा 31.6 के बीच V_n को विलोपित करके और 31.5 से H प्रतिस्थापित करके,

$$W = 512 \text{ lbs}$$

यदि किलक A 23-22 पर हो

$$W = 534 \text{ lbs}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः सही किलक हैं: 0-1e; 9-10i ; 18-19e ; तथा 23–0i; और भार तथा क्षैतिज प्रणोद के संगत मान क्रमशः $W = 512$ lbs तथा $H = 1,040$ lbs हैं।

ध्यान दें कि W मृत भार के सीधे समानुपाती है; अतः स्थिरता की दृष्टि से भारी भराव हल्के भराव से अधिक उपयुक्त है। किंतु संपीडन प्रतिबल स्वाभाविक रूप से उसी अनुपात में बढ़ते हैं और इस कारण विफलता का संकट अधिक होता है।

[a] 18-19e: वूस्वार 18 तथा 19 के बीच संधि, बहिर्वक्र सतह।

31.3 Pippard की विधि का सामान्यीकरण; Smars

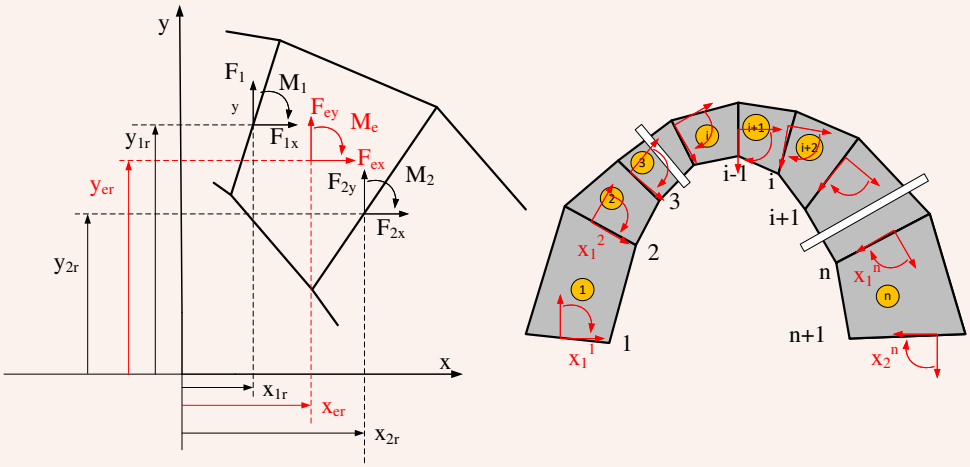
"Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes", Smars, 2000 से अनुकूलित

39 चिनाई मेहराबों (और कुछ सीमा तक अधिक सामान्य खंड-संरचनाओं) का विश्लेषण §32.1.4 में व्युत्पन्न समीकरणों के विविक्तीकरण द्वारा किया जा सकता है, (Smars, 2000)।

40 Smars, 2000 ने Pippard की (विविक्तीकरण) विधि का विस्तार करके परिवर्ती गुरुत्वीय भार तथा आंतरिक आघूर्णों को भी सम्मिलित किया। अतः यह केवल वूस्वारों तक सीमित नहीं है।

41 यदि रुचि केवल विविक्त संख्या में खंडों के बलों में हो, तो आंतरिक बलों को बाह्य बलों से जोड़ने के लिए साम्य समीकरणों को आव्यूह रूप में लिखना संभव है।

42 मेहराब को n खंडों के समुच्चय के रूप में विविक्त किया जाता है। प्रत्येक खंड बाह्य बलों (उसकी अधोवक्र सतह, बहिर्वक्र सतह तथा गुरुत्व-केंद्र (स्वभार) पर कार्यरत) के अधीन है और उसमें आंतरिक बल (पत्थरों पर कार्यरत) हैं, चित्र 31.16।



चित्र 31.16: मेहराब के खंडों के आर-पार बलों का प्रवाह

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

43 सरलीकरण हेतु आंतरिक बलों सहित सभी बल समान संदर्भ (x, y) तल में व्यक्त किए जाते हैं। सूचकांक 1 अंतर्गामी बलों, सूचकांक 2 निर्गामी बलों और सूचकांक e बाह्य बलों को सूचित करता है।

44 अंतरापृष्ठों पर कार्यरत आंतरिक बल $\mathbf{X}$, जो खंड i तथा $i+1$ के बीच हैं, दोनों निकटवर्ती खंडों पर विपरीत दिशाओं में कार्य करते हैं। खंड i पर कार्यरत बल को $\mathbf{X}_1^{i+1}$ द्वारा निरूपित किया जाता है, जहाँ $\mathbf{X}_2^i = -\mathbf{X}_1^{i+1}$।

45 तब किसी खंड के साम्य समीकरण सरलतः हैं

$$F_{1x} - F_{2x} + F_{ex} = 0 \tag{31.7}$$

$$F_{1y} - F_{2y} + F_{ey} = 0 \tag{31.8}$$

$$F_{1x}y_{1r} - F_{1y}x_{1r} + M_1 - F_{2x}y2r + F_{2y}x_{2r} - M_2 + F_{ex}y_{er} - F_{ey}x_{er} + M_e = 0 \tag{31.9}$$

संदर्भ बिंदु r पर आधारित सापेक्ष निर्देशांकों के साथ

$$x_{1r} = x_1 - x_r \tag{31.10}$$

इसे आव्यूह रूप में लिखा जा सकता है

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \hline M_1 + F_{1x}y_{1r} - F_{1y}x_{1r} \\ \hline F_{ex} \\ F_{ey} \\ \hline M_e + F_{ex}y_{er} - F_{ey}x_{er} \\ \hline F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 + F_{2x}y_{2r} - F_{2y}x_{2r} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \tag{31.11}$$

46 निम्न परिभाषाओं द्वारा साम्य समीकरण को सरल किया जा सकता है

$$\lfloor \mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad -\mathbf{I} \rfloor \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_e \\ \mathbf{X}_2 \end{array}\right\} = 0$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31.12}$$

$$\mathbf{X}_{_} = \left\{\begin{array}{c} F_{_x} \\ F_{_x} \\ M_{_} + F_{_x}y_{_r} - F_{_y}x_{_r} \end{array}\right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[47] यह ध्यान रखते हुए कि प्रत्येक खंड में बल साम्य में होना चाहिए ($X_2^i = X_1^{i+1}$), खंड-क्रम का साम्य इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|c|cc} \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & & & & \\ & & \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & & \\ & & & & I & \ddots & & & \\ & & & & & & \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_e^1 \\ \hline \mathbf{X}_1^2 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \hline \vdots \\ \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \\ \mathbf{X}_e^n \\ \hline \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array}\right\} \tag{31.13}$$

[48] यदि बाह्य बल ज्ञात हों, तो उन्हें समीकरण के दाएँ पक्ष में स्थानांतरित किया जा सकता है

$$\left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & \\ & & \mathbf{I} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \\ \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} = -\left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n \end{array}\right\} \tag{31.14}$$

[49] जैसा हमने देखा, आंतरिक बल निर्धारित करने के लिए तीन प्राचलों के मान ज्ञात होने चाहिए। उदाहरणार्थ, हम बल $\mathbf{X}_e^n$ के घटक ले सकते हैं

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & \\ & & \mathbf{I} & & \\ & & & \ddots & -\mathbf{I} \\ & & & & \mathbf{I} \end{array}\right]^{-1} \left\{ -\left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} \right\} \tag{31.15}$$

$$= -\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n - \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_e^i \\ \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=2}^n \mathbf{X}_e^i \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=n}^n \mathbf{X}_e^i \end{array}\right\} \tag{31.16}$$

$$\mathbf{X}_1^i = \mathbf{X}_2^i - \mathbf{X}_e^i \quad , \quad \mathbf{X}_2^i = \mathbf{X}_1^{i+1} \tag{31.17}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

50 बल X^i, जो ध्रुवीय कोण θ_i पर प्रत्येक अवयव i के लिए है, से अभिलंब आंतरिक बलों में रूपांतरण प्रत्यक्षतः है

$$\begin{Bmatrix} N^i \\ V^i \\ M^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F^i_{1x} \\ F^i_{1y} \\ M^i_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F^{i-1}_{2x} \\ F^{i-1}_{2y} \\ M^{i-1}_2 \end{Bmatrix} \tag{31.18}$$

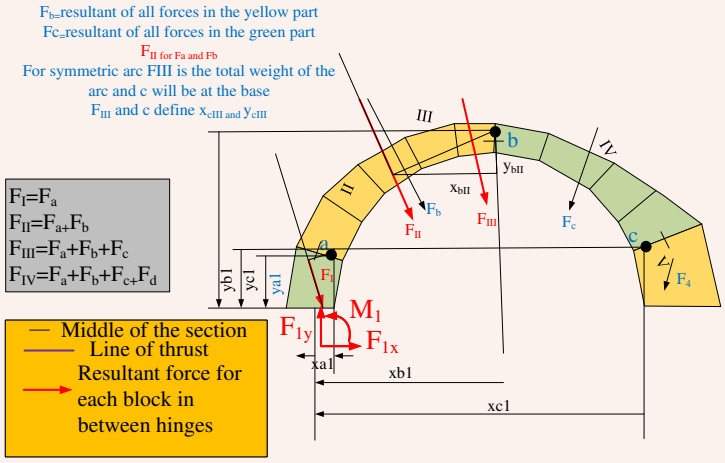
M केवल तभी शून्य होगा जब प्रतिरोध रेखा खंड-केंद्र से होकर जाए (अर्थात् उत्केंद्रता शून्य हो)। यह प्रतिबंध केवल तीन खंडों में लगाया जा सकता है।

51 निरपेक्ष तथा सापेक्ष उत्केंद्रताओं (ex, e) की परिभाषा पहले दी गई परिभाषा के समान है

$$ex^i = \frac{M^i}{N^i} \quad , \quad e^i = -2\frac{ex}{d} = -2\frac{M^i}{N^i d} \tag{31.19}$$

52 सापेक्ष उत्केंद्रता वह बिंदु निर्धारित करती है जहाँ अभिलंब बल N को आघूर्ण M उत्पन्न करने हेतु कार्य करना चाहिए। इस बिंदु को दाब-केंद्र और इन्हें जोड़ने वाली रेखा को प्रणोद रेखा कहा जाता है। ध्यान दें कि चाप के आकार तथा लगाए गए बलों का रूपांतरण $x'_i = a_{ij}x_j$) प्रणोद रेखा का समान रूपांतरण उत्पन्न करता है। "प्रतिरोध रेखा" उन बिंदुओं को जोड़ती है जहाँ आंतरिक बल खंड में प्रवेश करते हैं।

53 जैसा पहले दर्शाया गया, मेहराब के आंतरिक बल तीन आरंभिक सीमा प्रतिबंधों से निर्धारित किए जा सकते हैं। अतः आंतरिक बलों के किसी दिए गए समुच्चय के अनुरूप एक प्रणोद रेखा होती है। इसलिए उस रेखा द्वारा काटे जाने वाले तीन बिंदु नियत करके हम समाकलन-नियतांक निर्धारित कर सकते हैं, चित्र 31.17 जहाँ $x_{a1} = x_a - x_1$, $x_{b1} = x_b - y_I$ etc.



चित्र 31.17: मूलबिंदु पर बल-समुच्चय का निर्धारण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

54 अब हम ऐसे सीमा प्रतिबंध निर्धारित करेंगे कि प्रणोद रेखा मेहराब के तीन बिंदुओं से होकर जाए। इसका अर्थ उन स्थानों पर शून्य आघूर्ण (जो M तथा N पर निर्भर हैं) होगा

$$\begin{cases} M_a = (F_{1x}y_{a1} - F_{1y}x_{a1} + M_1) + (F_{xI}y_{aI} - F_{yI}x_{aI}) \\ M_b = (F_{1x}y_{b1} - F_{1y}x_{b1} + M_1) + (F_{xII}y_{bII} - F_{yII}x_{bII}) \\ M_c = (F_{1x}y_{c1} - F_{1y}x_{c1} + M_1) + (F_{xII}y_{cIII} - F_{yIII}x_{cIII}) \end{cases}$$

किंतु ये आघूर्ण शून्य होने चाहिए,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{a1} & -x_{a1} & 1 \\ y_{b1} & -x_{b1} & 1 \\ y_{c1} & -x_{c1} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{yI}x_{aI} - F_{xI}y_{aI} \\ F_{yII}x_{bII} - F_{xII}y_{bII} \\ F_{yIII}x_{cIII} - F_{xIII}y_{cIII} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_I \\ M_{II} \\ M_{III} \end{Bmatrix} \tag{31.20}$$

हल करके हम प्रत्येक खंड के "निवेश" बलों का समुच्चय निर्धारित करते हैं।

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} x_{b1} - x_{c1} & x_{c1} - x_{a1} & x_{a1} - x_{b1} \\ y_{b1} - y_{c1} & y_{c1} - y_{a1} & y_{a1} - y_{b1} \\ x_{c1}y_{b1} - x_{b1}y_{c1} & x_{a1}y_{c1} - x_{c1}y_{a1} & x_{b1}y_{a1} - x_{a1}y_{b1} \end{bmatrix}$$

जहाँ

$$\Delta = -x_{a1}y_{b1} + x_{a1}y_{c1} + x_{b1}y_{a1} - x_{b1}y_{c1} - x_{c1}y_{a1} + x_{c1}y_{b1}$$

55 MATLAB®कोड, जो §I.1.4 में दिया गया है, निम्न संगत चित्र उत्पन्न करता है, चित्र 31.18।

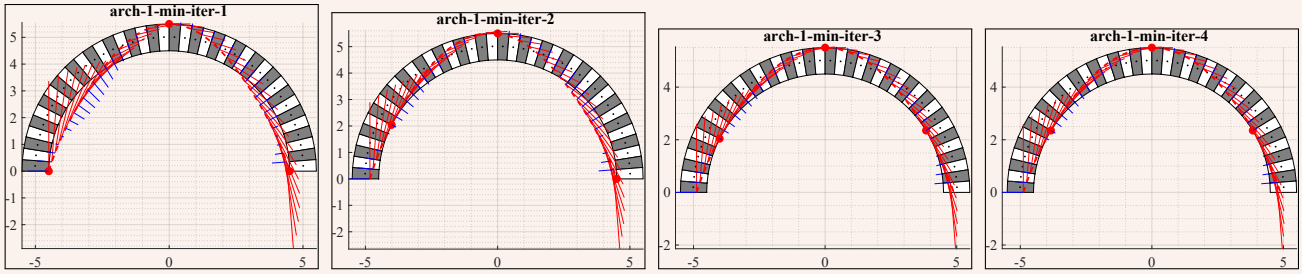
31.4 कलनविधि

56 यह उपागम किसी विशिष्ट प्रकार के मेहराब (किलकों के पदों में) तक सीमित नहीं है और पतन-विश्लेषण की निम्न-सीमा स्थैतिकी विधि (§57.2.2) के अनुरूप है।

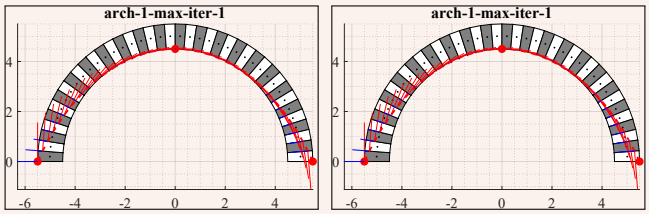
57 संगत MATLAB®कोड §I.1.4 में दिया गया है।

1: **procedure** चिनाई मेहराब का पतन-विश्लेषण(चित्र 31.17)
2: n, R, γ, g α e_max, ε को आरंभ करें
3: n_1, n_2, n_3,e_1, e_2, e_3, $iter_{max}$ मानें ▷ नियतांकों को आरंभ करें
4: Minimum_Thurst
5: Maximum_Thurst
6: **end procedure**

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) न्यूनतम प्रणोद



(b) अधिकतम प्रणोद

चित्र 31.18: वूस्वार में MATLAB®द्वारा उत्पन्न किलकों का क्रम

procedure MINIMUM_THRUST(3 दिए गए किलकों के लिए न्यूनतम प्रणोद रेखा निर्धारित करें) ▷ आरंभिक अनुमान
  $e_1 \leftarrow -max_eccent; e_2 \leftarrow max_eccent; e_3 \leftarrow -max_eccent;$
  $n_1 \leftarrow 1; n_2 \leftarrow round(n/2)+1; n_3 \leftarrow n+1; iter \leftarrow 0$
  while Eccent **false** & $iter < iter_{max}$ **do**
    $iter \leftarrow iter + 1$ ▷ फलक-कर्षण की गणना करें
    [**N**, **V**, **ex**] ← Faces_Efforts($n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3$)] ▷ उत्केंद्रता की दृष्टि से सर्वाधिक उल्लंघनकारी खंड ज्ञात करें
    $[m, r_0] \leftarrow max(abs(\mathbf{ex})$ ▷ किलक का स्थान पुनः परिभाषित करें
    if $ex(r_0) < 0$ **then**
      if $abs(r_0 - n_1) < abs(r_0 - n_3)$ **then**
        $n_1 = r_0$
      else
        $n_3 \leftarrow r_0$
      end if
    else
      $n_2 \leftarrow r_0$
    end if
    if $max(abs(\mathbf{ex})) - \mathbf{max_eccent} < \varepsilon$ **then**
      Eccent ← **true**
    else
      Eccent ← **false**
    end if
  end while
end procedure

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

procedure FACE_EFFORTS($n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3$)(समीकरण 31.18) ▷ तीन आरोपित बिंदुओं से गुजरने हेतु प्रथम फलक पर बलों की गणना करें
  $[F_{x1} F_{y1} M_1] \leftarrow$ Three_Points($n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3$) ▷ प्रथम फलक पर बाह्य बल
  $[F_x, F_y, M] \leftarrow$faces_wrenches ▷ दोनों घटकों को जोड़ें
  $F_x \leftarrow F_x + F_{x1}, F_y \leftarrow F_{y1}; M \leftarrow M + M_1 + (x - x(1))F_{y1} - (y - y(1))F_{x1}$ ▷ संगत आंतरिक बल निर्धारित करें
  $\mathbf{N} \leftarrow -\cos(\boldsymbol{\theta})F_x + \sin(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_y; V \leftarrow \sin(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_x + \cos(\boldsymbol{\theta})\mathbf{F}_y; ex \leftarrow -2\mathbf{M}/(\mathbf{Nt})$
end procedure

procedure THREE_POINT(समीकरण 31.20)
  मोटाई $\mathbf{t}$, त्रिज्या $\mathbf{r}$, बहिर्वक्र सतह $\mathbf{x}_e$, अधोवक्र सतह $\mathbf{x}_i$, केंद्र-रेखा $\mathbf{x}$ की गणना करें ▷ प्रथम खंड का केंद्र-बिंदु
  $x_1 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_1,\ y_1 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_1$
  $x_2 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_2,\ y_2 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_2$
  $x_3 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_3,\ y_3 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_3$ ▷ तीनों किलकों के निर्देशांक
  $x_a = x_1(n_1); y_a = y_1(n_1)$
  $x_b = x_2(n_2); y_b = y_2(n_2)$
  $x_c = x_3(n_3); y_c = y_3(n_3)$ ▷ प्रथम खंड के बलों को 3 किलकों के आघूर्णों से संबंधित करने वाला आव्यूह बनाएँ
  $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} y_a - y_r & -(x_a - x_r) & -1. \\ y_b - y_r & -(x_b - x_r) & -1. \\ y_c - y_r & -(x_c - x_r) & -1. \end{bmatrix}$$
  $[F_x, F_y, M] \leftarrow$ FACES_WRENCHES ▷ सदिशों के निर्देशांक: खंड-केंद्र से मार्ग-बिंदु तक
  $x_a = x_a - x_1(n_1); y_a = y_a - y_1(n_1)$
  $x_b = x_b - x_2(n_2); y_b = y_b - y_2(n_2)$
  $x_c = x_c - x_3(n_3); y_c = y_c - y_3(n_3)$ ▷ आघूर्ण अद्यतन करें
  $M_a = M(n_1) - F_x(n_1)y_a + F_y(n_1)x_a$
  $M_b = M(n_2) - F_x(n_2)y_b + F_y(n_2)x_b$
  $M_c = M(n_3) - F_x(n_3)y_c + F_y(n_3)x_c$
  $\mathbf{M}_p = [M_a\ M_b\ M_c]$ ▷ रेखा को 3 आरोपित बिंदुओं से गुजारने हेतु आवश्यक बल निर्धारित करें
  $W = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}_p; F_{x_1} = W(1); F_{y_1} = W(2); M_1 = W(3)$
end procedure

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
1: procedure FACES_WRENCHES
2:     प्रत्येक खंड का भार गणना करें
3:     for I=1:N do
4:         F_x = [F_x; 0. + F_x(i)]
5:         F_y = [F_y; −w(i) + F_y(i)]
6:         M = [M; w(i)x_g(i) + M(i)]
7:     end for
8:      eccent = 0, x = sind(θ)(r + t/2.eccent);y=cosd(θ)(r+t/2.eccent); M = M + F_y x − F_x y;
9: end procedure
```

θ	ऊर्ध्वाधर के सापेक्ष प्रत्येक संधि का कोण
n	खंडों की संख्या
n_i	वह संधि पहचान जहाँ किलक बनता है
e_i	संधि पर प्रणोद रेखा की उत्केंद्रता $< 0 < i < 1$
R	त्रिज्या (प्रत्येक खंड के लिए बदल सकती है
γ	द्रव्यमान घनत्व
g	गुरुत्वीय त्वरण
α	खुलाव कोण (अर्धवृत्तीय के लिए 90°)
e_{max}	अधिकतम उत्केंद्रता ($\leq 1.$)
ε	सहिष्णुता
$\mathbf{t}$	प्रत्येक वूस्वार की मोटाई

31.5 अंतिम टिप्पणियाँ

31.5.1 Jacques Heyman; 1925

58 Jacques Heyman चिनाई संरचनाओं पर कार्य और गॉथिक गिरजाघरों के निर्माण-इतिहास को लोकप्रिय बनाने वाले अत्यंत प्रभावशाली व्यक्तित्व थे। गणित (उनका प्रथम अध्ययन-क्षेत्र) तथा यांत्रिकी (वे Inglis के छात्र थे) में अत्यंत पारंगत होने के बावजूद उन्होंने स्वयं वास्तविक तकनीकी योगदान नहीं किए। किंतु ऐतिहासिक साहित्य से उनका सामंजस्य इतना गहरा था कि वे उसका न केवल सार प्रस्तुत कर सकते थे, बल्कि संश्लेषण भी कर सकते थे।

59 वूस्वार के ग्राह्यता प्रांत के निर्धारण हेतु तीन परिकल्पनाएँ स्पष्ट रूप से प्रतिपादित करने वाले वे पहले व्यक्ति थे (Heyman, 1997)। पुनः, इसमें कुछ नया नहीं था, किंतु उन्होंने सामग्री संबंधी उन परिकल्पनाओं को स्पष्ट रूप में औपचारिक बनाया जो 18वीं तथा 19वीं शताब्दियों में मेहराबों की गणना का आधार थीं। वे हैं:

1. चिनाई (अथवा पत्थर) और बंधक पदार्थ (यदि हो) में कोई तनन सामर्थ्य नहीं है।

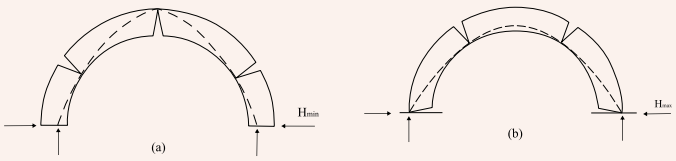
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. चिनाई की संपीडन सामर्थ्य अनंत है।
3. सर्पण विफलता नहीं होती।

31.5.2 प्रणोद रेखा

60 प्रणोद रेखा मेहराब के अनुदिश उन बिंदुओं का बिंदुपथ निरूपित करती है जिनसे परिणामी बल गुजरते हैं। यदि मेहराब के सभी वूस्वार समान आकार के हों, तो प्रणोद रेखा का आकार लगभग उलटी कैटेनरी जैसा होता है।

61 प्रणोद रेखा चिनाई की मोटाई से बाहर नहीं जानी चाहिए। इसके लिए उसकी उन दो चरम स्थितियों का अध्ययन उपयोगी है जो अभी भी साम्य में दो अवस्थाओं को निरूपित करती हैं। वास्तव में जब प्रणोद रेखा मेहराब की निचली अथवा ऊपरी सीमा को स्पर्श करती है, तब चिनाई ग्राह्य अवस्था-प्रांत की सीमा पर होती है और उत्केंद्रता किलकों के निर्माण को प्रोत्साहित करती है। विशेष रूप से, दोनों चरम स्थितियों में प्रणोद रेखा खुलने वाले तीन किलकों के स्थान देती है; इस प्रकार क्षैतिज अंत्याधार प्रणोद का मान परिकलित किया जा सकता है, जैसा चित्र 31.19 में दर्शाया गया है। प्रणोद रेखा की दोनों चरम स्थितियों में क्षैतिज अंत्याधार प्रणोद होगा: a) न्यूनतम; b) अधिकतम। प्रणोद रेखा की दोनों चरम स्थितियाँ जानना महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि मेहराब के वास्तविक प्रणोद की गणना नहीं की जा सकती, किंतु ऊपरी तथा निचली सीमाएँ निर्धारित की जा सकती हैं (Nobile and Bartolomeo, 2014 PDF)।



(a) न्यूनतम (b) अधिकतम

चित्र 31.19: पतन क्रियाविधियाँ; अंत्याधार प्रणोद (Nobile and Bartolomeo, 2014 PDF)

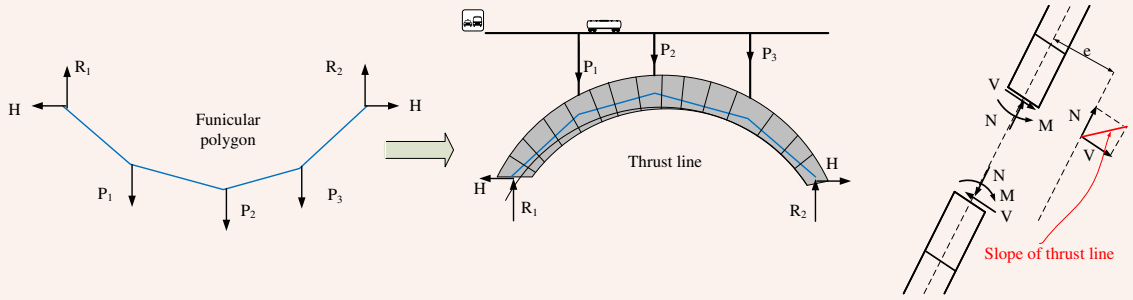
62 कैटेनरी (§30.3.3) मेहराब का वास्तविक आकार है। अन्य आकार वाले मेहराब इसलिए स्थिर रहते हैं क्योंकि उनकी मोटाई में कैटेनरियाँ समाहित होती हैं।

63 यदि स्वभार मेहराब के चारों ओर समान रूप से वितरित हो, तो प्रणोद रेखा का आकार गणितीय कैटेनरी होता है।

64 अर्धवृत्तीय मेहराब की एक न्यूनतम मोटाई होती है जो कैटेनरी को बस समाहित करती है। सीमांत मेहराब की मोटाई ठीक यही न्यूनतम होती है और वह अस्थिर साम्य में रहता है।

65 उदाहरणार्थ, चित्र 31.20 बिंदु-भारों के अधीन एक (केबल) फनिक्युलर बहुभुज और संगत प्रणोद रेखा दर्शाता है। इस स्थिति में प्रणोद रेखा पुल-डेक को आलंबित करने वाले वूस्वार के पूर्णतः भीतर है और इसलिए सुरक्षित है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) फनिक्युलर तथा संगत वूस्वार (b) आंतरिक उत्केंद्रता

चित्र 31.20: उलटा फनिक्युलर बहुभुज तथा संगत प्रणोद रेखा और उत्केंद्रता

66 प्रणोद रेखा मध्य-तृतीयांश क्रोड के भीतर हो सकती है; उस स्थिति में खंड पूर्ण संपीडन में होता है। यदि वह इस क्रोड के बाहर हो तो तनन (संधि का खुलना) विकसित होता है; यदि किनारे पर हो तो आरंभिक अस्थिरता होती है।

67 प्रणोद रेखा के लिए स्थान तथा ढाल निर्धारित किए जाते हैं। पहला अनुपात $e = M/N$ से सरलता से परिभाषित होता है और ढाल N तथा V के सदिश योगों के परिणामी से निर्धारित होती है।

68 प्रणोद रेखा की गणना प्रत्यास्थ विश्लेषण (अथवा रैखिक प्रोग्रामन) द्वारा की जा सकती है। किंतु सामान्यतः वूस्वार मेहराब स्थैतिकतः निर्धार्य नहीं होते और साम्य संबंध पर्याप्त नहीं हैं।

31.5.3 प्रणोद रेखा तथा Pippard

69 Pippard की विफलता विधा में एक क्रियाविधि का निर्माण सम्मिलित है और यह निश्चय ही संरचनाओं की सुघट्य विफलता में सुघट्य किलकों के क्रमिक निर्माण के अनुरूप है, अध्याय 57।

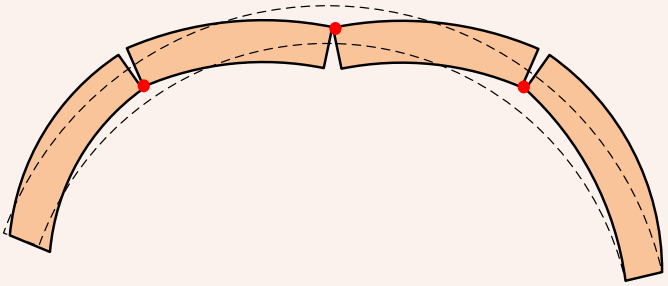
70 इसे नियत भार के अधीन अर्धवृत्तीय मेहराब की किलकों के क्रमिक निर्माण से होने वाली विफलता द्वारा आगे स्पष्ट किया जा सकता है, चित्र 31.21। तीन (इस स्थिति में) विफलता क्रियाविधि उत्पन्न करने के लिए पर्याप्त हैं (उदाहरण 57.2.1.1 की भाँति)। इसकी आगे चर्चा नीचे की जाएगी।

71 अतः मेहराब केवल तभी सुरक्षित है जब उसकी मोटाई के भीतर प्रणोद रेखा खींची जा सके। मेहराब का पतन केवल तभी होगा जब प्रणोद रेखा कम-से-कम चार बिंदुओं पर मेहराब के किनारे तक पहुँचे और मेहराब को क्रियाविधि में बदल दे।

72 पर्याप्त किलकों का निर्माण वास्तव में एक क्रियाविधि उत्पन्न करेगा। यह विधि मानती है कि चिनाई मेहराब तब क्रियाविधि बन जाता है जब कम-से-कम तीन (अथवा कुछ स्थितियों में चार) सुघट्य किलक खुलें। किंतु किलकों के स्थान आरंभ में अज्ञात हैं। अतः पहला चरण तीन किलकों के संभावित स्थान मानना है (चित्र 31.22 में)।

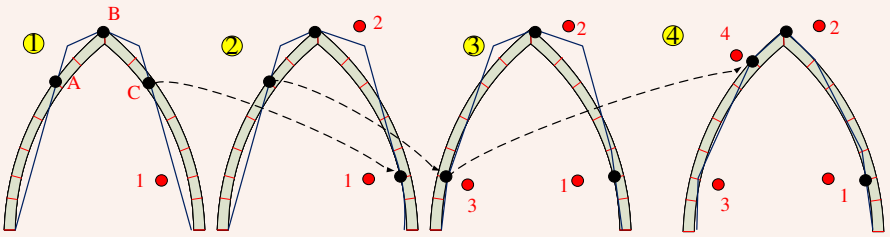
73 प्रथम धारणा (दर्शाई नहीं गई) के बाद प्रणोद रेखा खींची जाती है और फिर सबसे बड़ा "उल्लंघनकारी" (1 से अधिक उत्केंद्रता) पहचाना जाता है। तब निकटतम कल्पित किलक हटाकर उसके स्थान पर उल्लंघनकारी रखा जाता है। प्रक्रिया तब तक दोहराई जाती है जब तक 1 की उत्केंद्रता वाले तीन किलकों

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 31.21: तीन-किलक अर्धवृत्तीय मेहराब की विफलता विधा

से उत्पन्न क्रियाविधि न बन जाए। प्रत्येक स्थिति में हमारे पास स्थैतिक साम्य के सामान्य समीकरण तथा किलकों पर अतिरिक्त शून्य आघूर्ण होते हैं। प्रक्रिया का कलनविधीय वर्णन नीचे है।



चित्र 31.22: किलक-स्थानों का क्रम

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Córdoba की महान मस्जिद, 8वीं–10वीं शताब्दी, Córdoba, स्पेन।
एकांतर लाल तथा श्वेत पच्चराकार पत्थर प्रतिष्ठित घोड़े की नालाकार मेहराबों में भार-वितरण और स्थिरता सुनिश्चित करते हैं।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

32 मेहराब तथा वक्र बीम

सारांश

यह उन तीन अध्यायों में अंतिम है जो ऐसी संरचनाओं से संबंधित हैं जिनमें प्राथमिक प्रतिरोध अक्षीय बलों द्वारा प्रदान किया जाता है। पूर्ववर्ती अध्यायों में केबल तथा दृढ मेहराब (वूसवार) सम्मिलित थे। यह अध्याय प्रत्यास्थ मेहराबों और वक्र बीमों, दोनों का गहन अध्ययन करेगा तथा उनके व्यवहार और विशेषताओं का व्यापक विश्लेषण प्रस्तुत करेगा। हम वृत्तीय मेहराबों के गहन विश्लेषण से आरंभ करेंगे और विभिन्न भारण परिस्थितियों में उनके संरचनात्मक व्यवहार की जाँच करेंगे। इसमें जटिलता के विभिन्न स्तरों, विशेषतः किलकों की संख्या और स्थान के संदर्भ में, चर्चा सम्मिलित होगी। इसके बाद हम परवलयी मेहराबों पर जाएँगे और पुनः किलकों से संबंधित विभिन्न जटिलताओं तथा संरचनात्मक निष्पादन पर उनके प्रभावों पर विचार करेंगे। मेहराबों का पूर्ण विवेचन करने के पश्चात हमारा ध्यान वक्र बीमों पर केंद्रित होगा। विश्लेषण में समतलीय वक्र बीम तथा स्थानिक कुंडलित संरचनाएँ, दोनों सम्मिलित होंगी। ये संरचनाएँ विशेष रूप से रोचक हैं क्योंकि उनमें बंकन तथा ऐंठन के बीच जटिल अन्योन्यक्रिया होती है। अंततः परिशिष्ट D अधिक जटिल वृत्तीय मेहराबों का विवेचन करेगा, जो इस अध्याय के क्षेत्र से बाहर हैं।

32.1 वृत्तीय मेहराब 1175
32.1.1 तीन-किलक वृत्तीय मेहराब . . . 1175
32.1.2 दो-किलक वृत्तीय मेहराब 1182
32.1.3 किलकरहित वृत्तीय मेहराब . . . 1183
32.1.4 सामान्यीकृत हल 1191
32.1.5 Mathematica-आधारित हल . . 1197
32.2 मेहराब का इष्टतम आकार 1198
32.2.1 उदाहरण 32.5: आदर्श मेहराब . 1198
32.3 परवलयी मेहराब 1199
32.3.1 उदाहरण 1199
32.3.2 सममित भार वाला आबद्ध मेहराब 1204
32.3.3 नींव अवतलन और तापमान के प्रभाव 1209
32.4 वक्र बीम 1212
32.4.1 धनुष गर्डर 1212
32.4.2 कुंडलित बीम 1215

---

1 मेहराब सहस्राब्दियों से मूलभूत वास्तु तथा अभियांत्रिक अवयव रहे हैं और प्रकार्यात्मक तथा सौंदर्यात्मक दोनों उद्देश्यों की पूर्ति करते आए हैं। प्राचीन रोम के जलसेतुओं से लेकर गॉथिक युग के गिरजाघरों तक, मेहराबों ने मानव सभ्यता के विकास में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाई है। भार को दक्षतापूर्वक आलंबित करने की उनकी विशिष्ट क्षमता ने उन्हें पुलों और प्रवेशद्वारों से लेकर खिडकियों तथा छतों तक विविध निर्माणों में पसंदीदा संरचनात्मक हल बनाया है।

2 मेहराब का मूल सिद्धांत उसके वक्र आकार द्वारा भार स्थानांतरित करने की क्षमता में है, जहाँ बंकन न्यूनतम और अक्षीय बल अधिकतम होते हैं।

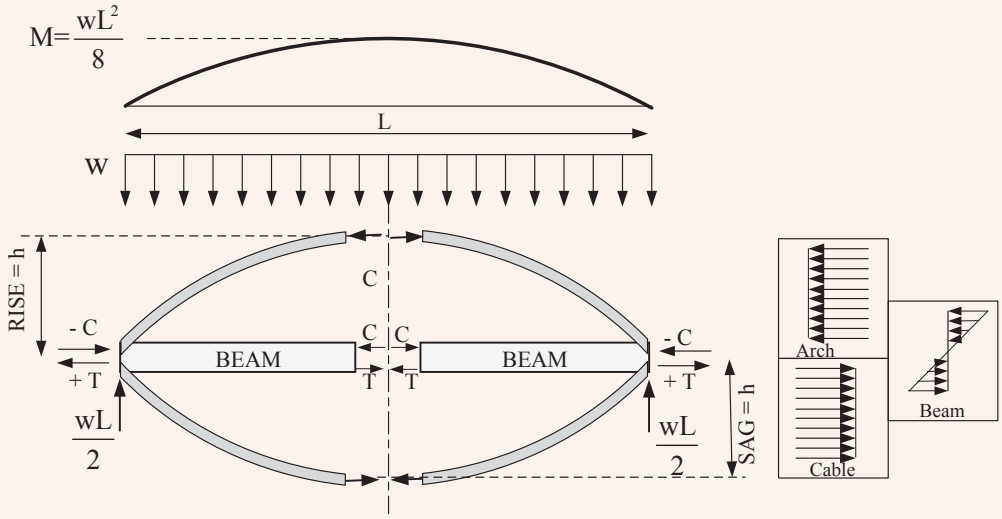
3 यह अध्याय मेहराबों तथा वक्र बीमों के विश्लेषण पर केंद्रित होगा। प्रयुक्त संकल्पनाएँ पहले देखी गई संकल्पनाओं के समान हैं; किंतु मुख्य (और एकमात्र) अंतर यह है कि वृत्तीय मेहराबों के लिए समीकरण ध्रुवीय निर्देशांकों में (और परवलयी मेहराबों के लिए कार्तीय निर्देशांकों में) लिखे जाएँगे।

4 केबलों की भाँति मेहराबों का उपयोग दीर्घ-विस्तार संरचनाओं में बंकन आघूर्ण घटाने हेतु किया जा सकता है। मूलतः मेहराब को उलटा केबल माना जा सकता है; वह भार को मुख्यतः अक्षीय संपीडन द्वारा स्थानांतरित करता है, किंतु अपनी बंकन-दृढता द्वारा बंकन का प्रतिरोध भी कर सकता है।

5 मृत-भार दक्षता को अनुकूलित करने हेतु दीर्घ-विस्तार संरचनाओं के आकार संगत आघूर्ण आरेख के

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सन्निकट हो सकते हैं; अतः मेहराब, निलंबित केबल अथवा पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट बीम में कंडरा-विन्यास सभी लगभग परवलयी होते हैं, चित्र 32.1।



चित्र 32.1: बीम की तुलना में मेहराब अथवा निलंबन प्रणाली में आघूर्ण-प्रतिरोधी बल, (Lin and Stotesbury, 1981)

6 यह अध्याय मेहराबों (पहले वृत्तीय, फिर परवलयी), वक्र बीमों और अंततः कुंडलित संरचनाओं का विवेचन करेगा।

32.1 वृत्तीय मेहराब

7 दीर्घ-विस्तार संरचनाएँ समतल निर्माण, जैसे गर्डर अथवा ट्रस, का उपयोग करके बनाई जा सकती हैं। किंतु 100 ft से अधिक विस्तारों के लिए मेहराब, निलंबित केबल अथवा पतले कोश जैसे वक्र संरचनात्मक रूप बनाना प्रायः अधिक मितव्ययी होता है।

8 इतिहास के आरंभ से मानव ने मेहराब-निर्माण का उपयोग करके दूरियाँ पाटने का प्रयास किया है। इसका मूल कारण यह था कि मेहराब में केवल संपीडन का प्रतिरोध करने वाली सामग्री (जैसे पत्थर, चिनाई, ईंटें) आवश्यक थी और श्रम कोई समस्या नहीं था।

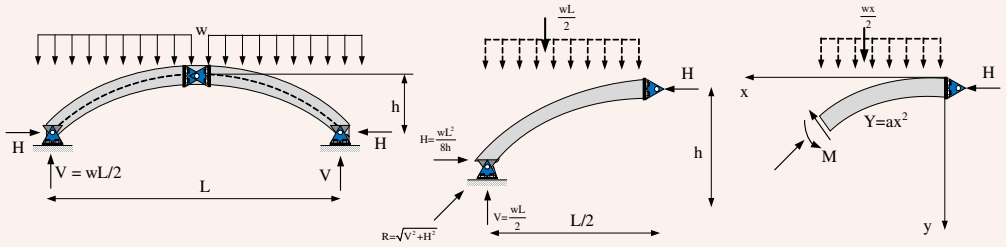
9 मेहराब-अभिकल्प में स्थैतिकी के मूल प्रश्न चित्र 32.2 में दर्शाए गए हैं, जहाँ ऊर्ध्वाधर भार प्रति इकाई क्षैतिज प्रक्षेप है (जैसे बाह्य भार, किंतु स्वभार नहीं)।

32.1.1 तीन-किलक वृत्तीय मेहराब

10 तीन-किलक मेहराब स्थैतिकतः निर्धार्य संरचनाएँ हैं, जिनका आकार द्वितीयक आंतरिक प्रतिबल उत्पन्न किए बिना आलंब-अवसादन तथा तापीय प्रसार को समायोजित कर सकता है। स्थैतिकी द्वारा उनका विश्लेषण भी सरल है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11 सामान्यतः मेहराब अक्षीय तथा बंकनीय बलों के संयोजन द्वारा ऊर्ध्वाधर भार को विस्तार के पार वहन करता है। सुविमित मेहराब में आघूर्ण छोटा अथवा नगण्य और अभिलंब संपीडन प्रतिबल अपेक्षाकृत अधिक होंगे।



चित्र 32.2: तीन-किलक मेहराब की स्थैतिकी

12 सममिति के कारण ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया केवल $V = \frac{wL}{2}$ है और मेहराब के मध्य-विस्तार पर कोई अपरूपण (और न आघूर्ण) नहीं है। शिखर के परितः आघूर्ण लेने पर,

$$M = Hh - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$$

13 H के लिए हल करने पर

$$H = \frac{wL^2}{8h}$$

14 स्मरण करें कि केबलों के लिए समान समीकरण व्युत्पन्न किया गया है (समीकरण 30.38); और H बीम के $C-T$ बलों के अनुरूप है (चित्र 32.1), जबकि h मेहराब की समग्र ऊँचाई है। चूँकि h, d से बहुत बड़ा है, इसलिए H बीम के $C-T$ से बहुत छोटा होगा।

15 चूँकि साम्य के लिए H का पूरे मेहराब में नियत रहना आवश्यक है, सैद्धांतिक रूप से परवलयी वक्र से मेहराब के खंड पर कोई आघूर्ण उत्पन्न नहीं होगा।

32.1.1.1 Eddy का प्रमेय

16 Eddy का प्रमेय मेहराबों के विश्लेषण में एक महत्त्वपूर्ण संकल्पना है। यह मेहराब संरचना में आघूर्णों तथा बलों के निर्धारण की विधि प्रदान करता है। यह प्रमेय तीन-किलक मेहराबों के विश्लेषण में विशेष रूप से उपयोगी है, जहाँ यह संबंधित जटिल गणनाओं को सरल करता है।

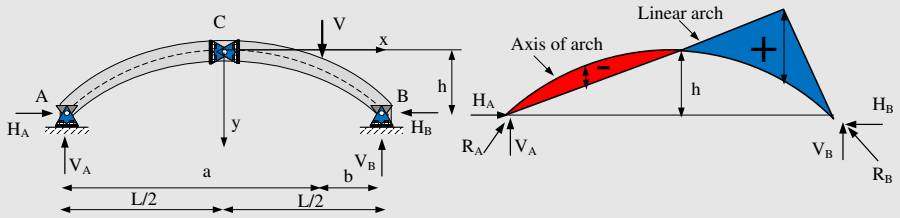
परिभाषा 32.1: Eddy का प्रमेय

मेहराब-अक्ष के किसी बिंदु पर बंकन आघूर्ण सैद्धांतिक मेहराब तथा वास्तविक मेहराब के अक्ष के बीच ऊर्ध्वाधर अंतःखंड के समानुपाती होता है (Eddy, 1878)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

32.1.1.2 उदाहरण

32.1.1.2.1 उदाहरण 32.1: तीन-किलक मेहराब; बिंदु-भार; वैश्लेषिक



निम्न अंश Thandavamoothy, 2011 *Structural Analysis* से पुनरुत्पादित है।

सीधे बीमों की भाँति

$$V_A = \frac{Wb}{L} \text{ तथा } \quad V_B = \frac{Wa}{L} \tag{32.1}$$

शिखर पर बिंदु C के परितः आघूर्ण निम्न द्वारा दिया जाता है

$$V_B \frac{L}{2} - H_B h - W\left(\frac{L}{2} - b\right) = 0$$

समीकरण 32.1 से V_B प्रतिस्थापित करें

$$\begin{aligned}
&\frac{Wa}{2} - H_B h - \frac{WL}{2} + Wb = 0; \quad W\left(\frac{a}{2} - \frac{L}{2} + b\right) - H_B h = 0 \\
&\frac{W}{2}(a - L + 2b) - H_B h = 0; \quad \frac{W}{2}(a - L + b + b) - Hh = 0 \\
&\frac{Wb}{2} - H_B h = 0; \quad H_B = \frac{Wb}{2h}
\end{aligned} \tag{32.2}$$

क्षैतिज बलों के साम्य से $H_A = H_B = H$

$$H = H_A = \frac{Wb}{2h} \tag{32.3}$$

इसी प्रकार यदि भार A तथा C के बीच हो, तो

$$H_A = \frac{Wa}{2h} \tag{32.4}$$

साम्य समीकरण से

$$H = H_B = \frac{Wa}{2h}$$

किसी खंड X_1 पर, जो भार-बिंदु तथा आलंब B के बीच शिखर से x दूरी पर है, आघूर्ण है

$$M_{x1} = V_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - H_B(h - y) \tag{32.5}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समीकरण 32.1 तथा 32.2 को 32.5 में प्रतिस्थापित करने पर

$$M_{x1} = \frac{Wa}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y)$$
$$= \frac{Wa}{2} - \frac{Wax}{L} - \frac{Wb}{2} + \frac{Wby}{2h} = \frac{WL}{2} - W\left(\frac{ax}{L} - \frac{by}{2h}\right)$$

किसी खंड X_2 पर, जो बिंदु-भार तथा शिखर के बीच शिखर से x दूरी पर है, आघूर्ण

$$M_{x2} = V_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - W\left(\frac{L}{2} - b - x\right) - H_B(h - y) \tag{32.6}$$

समीकरण 32.1 तथा 32.3 को 32.6 में प्रतिस्थापित करने पर

$$M_{x2} = \frac{Wa}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - W\left(\frac{L}{2} - b - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y)$$
$$= \frac{Wa}{2} - \frac{Wax}{2} - \frac{WL}{2} + Wb + Wx - \frac{Wb}{2} + \frac{Wby}{2h}$$
$$= Wx\left(1 - \frac{a}{L}\right) + \frac{Wby}{2h} = \frac{Wbx}{L} + \frac{Wby}{2h}$$
$$M_{x2} = Wb\left(\frac{x}{L} + \frac{y}{2h}\right)$$

किसी खंड X_2 में, जो A के निकट तथा x दूरी पर C से बाईं ओर है, आघूर्ण

$$M_{x3} = V_A\left(\frac{L}{2} - x\right) - H_A(h - y) \tag{32.7}$$

समीकरण 32.1 तथा 32.4 को 32.7 में प्रतिस्थापित करने पर

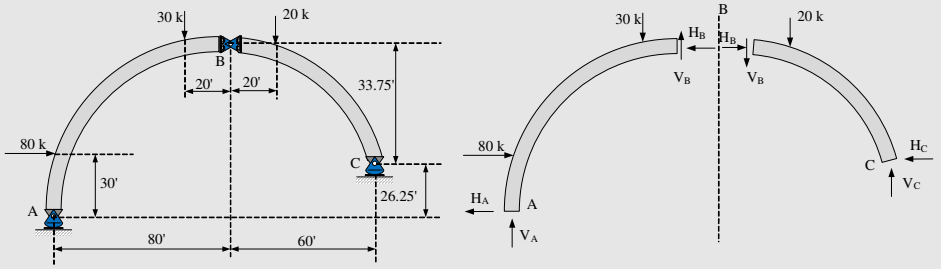
$$M_{x3} = \frac{Wb}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y) = \frac{Wb}{2} - \frac{Wbx}{L} - \frac{Wb}{2} + \frac{Wbx}{2h}$$
$$= -Wb\left(\frac{x}{L} - \frac{y}{2h}\right) \tag{32.8}$$

तीन-किलक मेहराब का आघूर्ण आरेख ऊपर दर्शाया गया है। चूँकि AC पर कोई भार नहीं है और C पर आघूर्ण शून्य है, इसलिए A पर प्रणोद को C से होकर गुजरना चाहिए, ताकि वह विस्तारित W की क्रिया-रेखा से मिले, जो D पर है। अब R_A, R_B तथा W साम्य में हैं; अतः R_B की क्रिया-रेखा, जो B पर है, को W से D पर मिलना चाहिए। त्रिभुज ADB किसी मापनी पर सरल बीम का आघूर्ण आरेख निरूपित करता है और धन चिह्न का है। वक्र $ACBA$ उसी मापनी पर $H(h—y)$ का आघूर्ण आरेख निरूपित करता है और ऋण दिशा में है। छायांकित आरेख उसी मापनी पर परिणामी आघूर्ण आरेख दर्शाता है। भारित अर्ध में परिणामी आरेख धन और अभारित अर्ध में ऋण है। अतः किसी भी खंड पर परिणामी आघूर्ण रैखिक मेहराब और मेहराब-अक्ष द्वारा निर्मित आरेख की कोटि द्वारा निरूपित होता है। भार पर आघूर्ण-कोटि, भार पर सरल बीम के आघूर्ण से प्रणोद का आघूर्ण घटाकर प्राप्त की जा सकती है।

प्रति प्रति

32.1.1.2.2 उदाहरण 32.2: तीन-किलक मेहराब; बिंदु-भार

नीचे दर्शाए गए तीन-किलक मेहराब की प्रतिक्रियाएँ निर्धारित करें



चार अज्ञात, साम्य के तीन समीकरण और एक प्रतिबंध-समीकरण ⇒ स्थैतिकतः निर्धार्य।

$$
\begin{aligned}
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^C = 0 \\
\Rightarrow (R_{Ay})(140) + (80)(3.75) - (30)(80) - (20)(40) + R_{Ax}(26.25) = 0 \\
\Rightarrow 140R_{Ay} + 26.25R_{Ax} = 2.900 \\
(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow 80 - R_{Ax} - R_{Cx} = 0 \\
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{Ay} + R_{Cy} - 30 - 20 = 0 \\
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B = 0; \Rightarrow (R_{ax})(60) - (80)(30) - (30)(20) + (R_{Ay})(80) = 0 \\
\Rightarrow 80R_{Ay} + 60R_{Ax} = 3,000
\end{aligned}
$$

इन चार समीकरणों को हल करने पर:

$$
\begin{bmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 2,900 \\ 80 \\ 50 \\ 3,000 \end{Bmatrix}
\Rightarrow
\begin{Bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 15.1\ \text{k} \\ 29.8\ \text{k} \\ 34.9\ \text{k} \\ 50.2\ \text{k} \end{Bmatrix}
$$

दाईं ओर से b के सापेक्ष योग लेकर हम अपने परिणामों की जाँच कर सकते हैं:

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B = 0; -(20)(20) - (50.2)(33.75) + (34.9)(60) = 0 \checkmark$$

17 सममिति के कारण चित्र 32.2 में दर्शाए गए मेहराब की ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया केवल $V = \frac{wL}{2}$ है और मेहराब के मध्य-विस्तार पर कोई अपरूपण (और न आघूर्ण) नहीं है। शिखर के परितः आघूर्ण लेने पर,

$$M = Hh - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$$

18 H के लिए हल करने पर

$$H = \frac{wL^2}{8h}$$

19 बीमों के लिए $M = wL^2/8$ तथा केबलों के लिए $H = wL^2/8h$ से अनुरूपता पर ध्यान दें। सामान्यतः

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

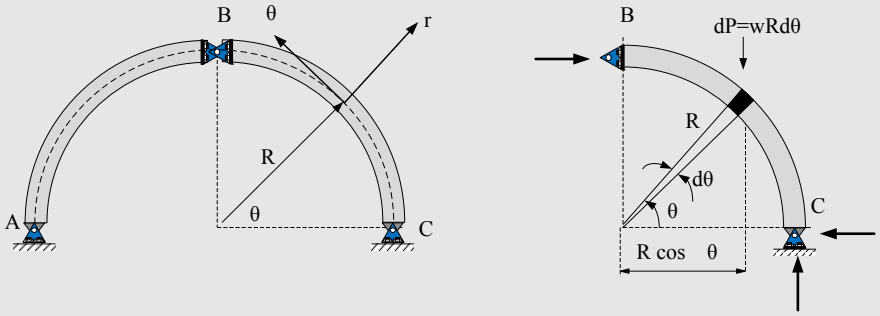
मेहराब अक्षीय तथा बंकनीय बलों के संयोजन द्वारा ऊर्ध्वाधर भार को विस्तार के पार वहन करेगा। सुविमित मेहराब में आघूर्ण छोटा अथवा नगण्य और अभिलंब संपीडन प्रतिबल अपेक्षाकृत अधिक होंगे। सरल आलंबित तीन-किलक मेहराब का "पूर्ण" परवलयी आकार

- किसी भी खंड के अनुदिश कोई अपरूपण अथवा आघूर्ण नहीं होना चाहिए।
- x पर आघूर्ण: $M = Hy - wx^2/2 = Hax^2 - wx^2/2 = 0$,
- a के लिए हल करने पर: $a = w/(2H)$
- H प्रतिस्थापित करके निष्कर्ष निकालें कि a, $4h/L^2$ के बराबर होना चाहिए।
- किसी विस्तार L के लिए केवल एक ऊँचाई h होगी जो शून्य आघूर्ण और अपरूपण वाला परवलय देगी।

20 तीन-किलक मेहराब स्थैतिकतः निर्धार्य संरचनाएँ हैं, जिनका आकार द्वितीयक आंतरिक प्रतिबल के बिना आलंब-अवसादन तथा तापीय प्रसार को समायोजित कर सकता है। स्थैतिकी द्वारा उनका विश्लेषण भी सरल है। दीर्घ विस्तारों पर भार वहन करने में मेहराब बीम से कहीं अधिक दक्ष और संभवतः ट्रस से अधिक मितव्ययी तथा सौंदर्यपूर्ण है।

32.1.1.2.3 उदाहरण 32.3: तीन-किलक मेहराब; एकसमान भार

अपने मृत भार w (प्रति इकाई चाप-लंबाई s, जहाँ $ds = rd\theta$) के अधीन स्थैतिकतः निर्धार्य तीन-किलक अर्धवृत्तीय मेहराब की प्रतिक्रियाएँ निर्धारित करें।



संपूर्ण संरचना पर भार का समाकलन करके प्रतिक्रियाएँ निर्धारित की जा सकती हैं। ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_A = 0; (C_y)(2R) - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \underbrace{wRd\theta}_{\mathrm{d}P} \underbrace{R(1+\cos\theta)}_{\text{आघूर्ण भुजा}} = 0$$

$$\Rightarrow C_y = \frac{wR}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1+\cos\theta)d\theta = \frac{wR}{2}[\theta+\sin\theta]\,|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= \frac{wR}{2}[(\pi+\sin\pi)-(0+\sin 0)]$$

$$= \frac{\pi}{2}wR$$

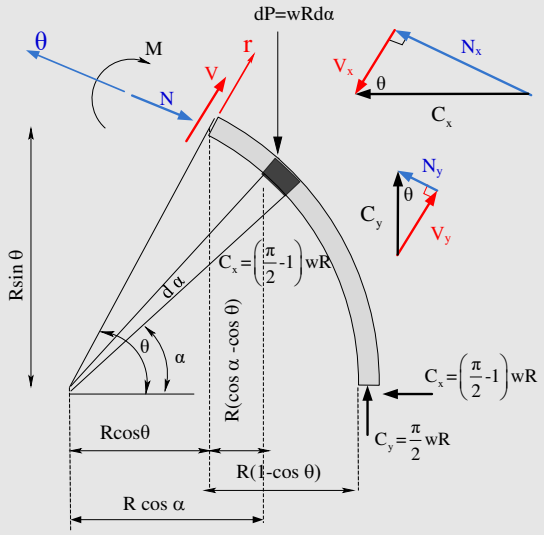
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

क्षैतिज प्रतिक्रियाएँ

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_B = 0; -(C_x)(R) + (C_y)(R) - \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \underbrace{wRd\theta}_{\mathrm{d}P} \underbrace{R\cos\theta}_{\text{आघूर्ण भुजा}} = 0$$

$$\Rightarrow C_x = \frac{\pi}{2}wR - \frac{wR}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}wR - wR[\sin\theta]\,|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}wR - wR(1-0)$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR \tag{32.9}$$

सममिति से A पर प्रतिक्रियाएँ C पर प्रतिक्रियाओं के बराबर हैं। अब आंतरिक बल निर्धारित किए जा सकते हैं।



अपरूपण बल: मेहराब के मुक्त-पिंड आरेख पर विचार करके और अरीय दिशा में बलों का योग लेकर ($\Sigma F_R = 0$):

$$\underbrace{-(\frac{\pi}{2}-1)wR\cos\theta}_{V_x} + \underbrace{\frac{\pi}{2}wR\sin\theta}_{V_y} - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\sin\theta + V = 0$$

$$\Rightarrow V(\theta) = wR\left[(\frac{\pi}{2}-1)\cos\theta + (\theta-\frac{\pi}{2})\sin\theta\right] \tag{32.10}$$

अक्षीय बल: इसी प्रकार यदि अक्षीय दिशा में बलों के योग पर विचार करें ($\Sigma F_\theta = 0$):

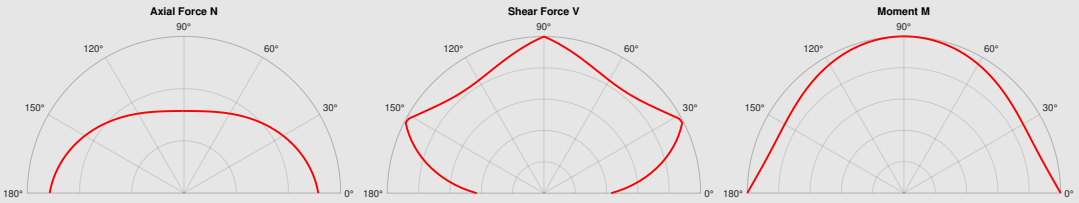
$$\underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR\sin\theta}_{N_x} + \underbrace{\frac{\pi}{2}wR\cos\theta}_{N_y} - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cos\theta + N = 0$$

$$\Rightarrow N(\theta) = wR\left[(\theta-\frac{\pi}{2})\cos\theta - (\frac{\pi}{2}-1)\sin\theta\right] \tag{32.11}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आघूर्ण: अब हम साम्य के तीसरे समीकरण पर विचार कर सकते हैं ($\Sigma M_z = 0$):

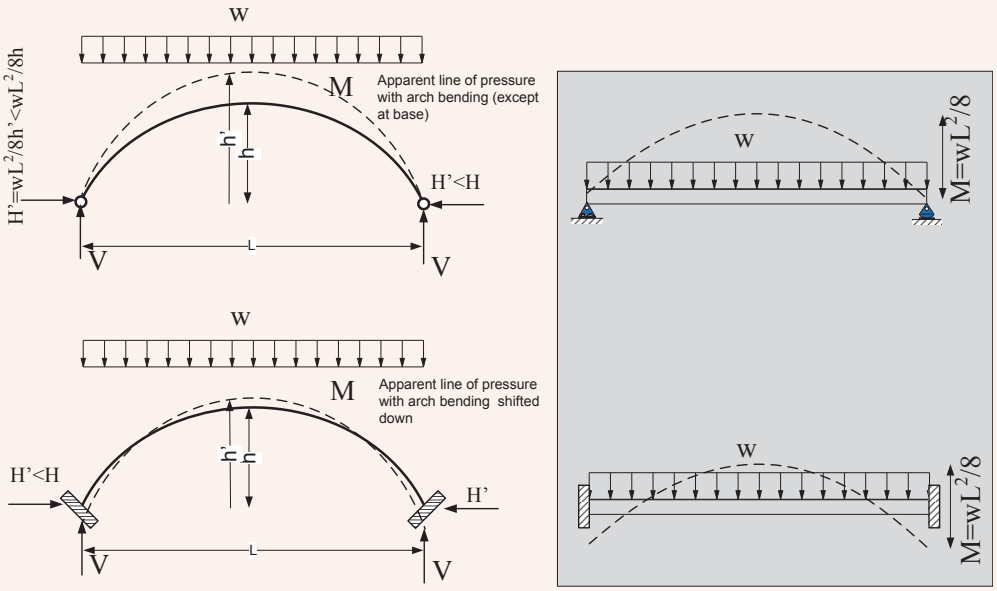
$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M \underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR}_{C_x}\cdot R\sin\theta - \underbrace{\frac{\pi}{2}wR}_{C_y} R(1-\cos\theta)$$
$$+\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cdot R(\cos\alpha-\cos\theta)+M=0$$
$$\Rightarrow M(\theta)=wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta)+(\theta-\frac{\pi}{2})\cos\theta\right] \tag{32.12}$$



ध्यान दें कि Mathematica पर आधारित सामान्यीकृत हल §I.1.3 में दिया गया है।

32.1.2 दो-किलक वृत्तीय मेहराब

21 यदि मेहराब में केवल दो किलक हों, चित्र 32.3, अथवा कोई किलक न हो, तो बंकन आघूर्ण शिखर पर, आलंबों पर अथवा दोनों स्थानों पर हो सकते हैं।



चित्र 32.3: दो-किलक मेहराब, आबद्ध-सिरा बीम से अनुरूपता (Lin and Stotesbury, 1981)

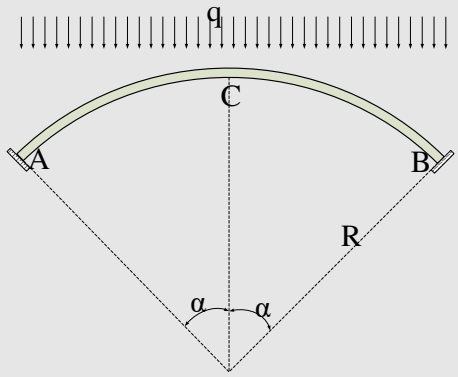
22 चूँकि H उत्कर्ष h के व्युत्क्रमानुपाती बदलता है, इसलिए स्पष्ट है कि यथासंभव अधिक उत्कर्ष का

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

उपयोग करना चाहिए। सौंदर्यात्मक तथा व्यावहारिक विचारों के संयोजन से 5 से 8, अथवा कभी-कभी 12 तक, का विस्तार/उत्कर्ष अनुपात प्रायः प्रयुक्त होता है। किंतु अनुपात बढ़ने पर व्याकुंचन की समस्याएँ हो सकती हैं; तब खंड की गहराई अधिक होगी और मेहराब का लाभ घटेगा।

32.1.3 किलकरहित वृत्तीय मेहराब

32.1.3.1 उदाहरण 32.4: किलकरहित वृत्तीय मेहराब

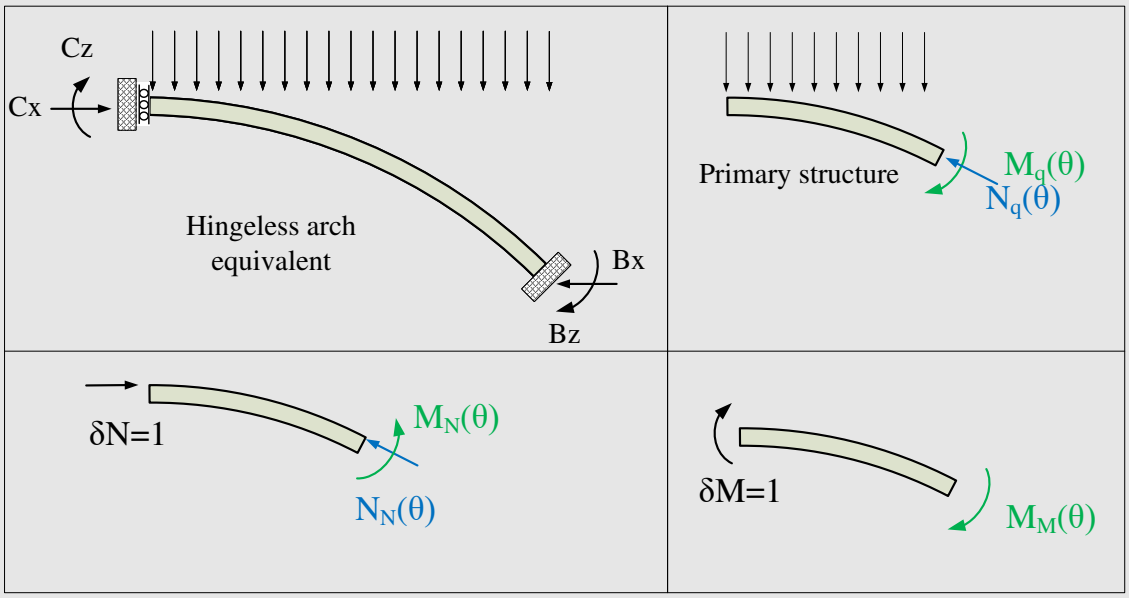


इस किलकरहित मेहराब में तीन अतिरिक्त बल होंगे। पहले किसी आलंब पर सभी बलों को विमोचित करने का विचार आ सकता है; तब हमें 3 गुणा 3 नम्यता आव्यूह प्राप्त होगा।

उपागम

मेहराब की सममिति के कारण (शिखर पर अपरूपण बल नहीं हो सकता) मेहराब को शिखर पर विमोचित करना अधिक विवेकपूर्ण है, जहाँ सममित भार केवल दो अतिरिक्त बल उत्पन्न करेगा: अक्षीय बल तथा आघूर्ण।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



इस समस्या को बल (अर्थात् नम्यता) विधि द्वारा हल करने के लिए हम पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत का उपयोग करेंगे। नम्यता आव्यूह निम्न द्वारा दिया जाता है

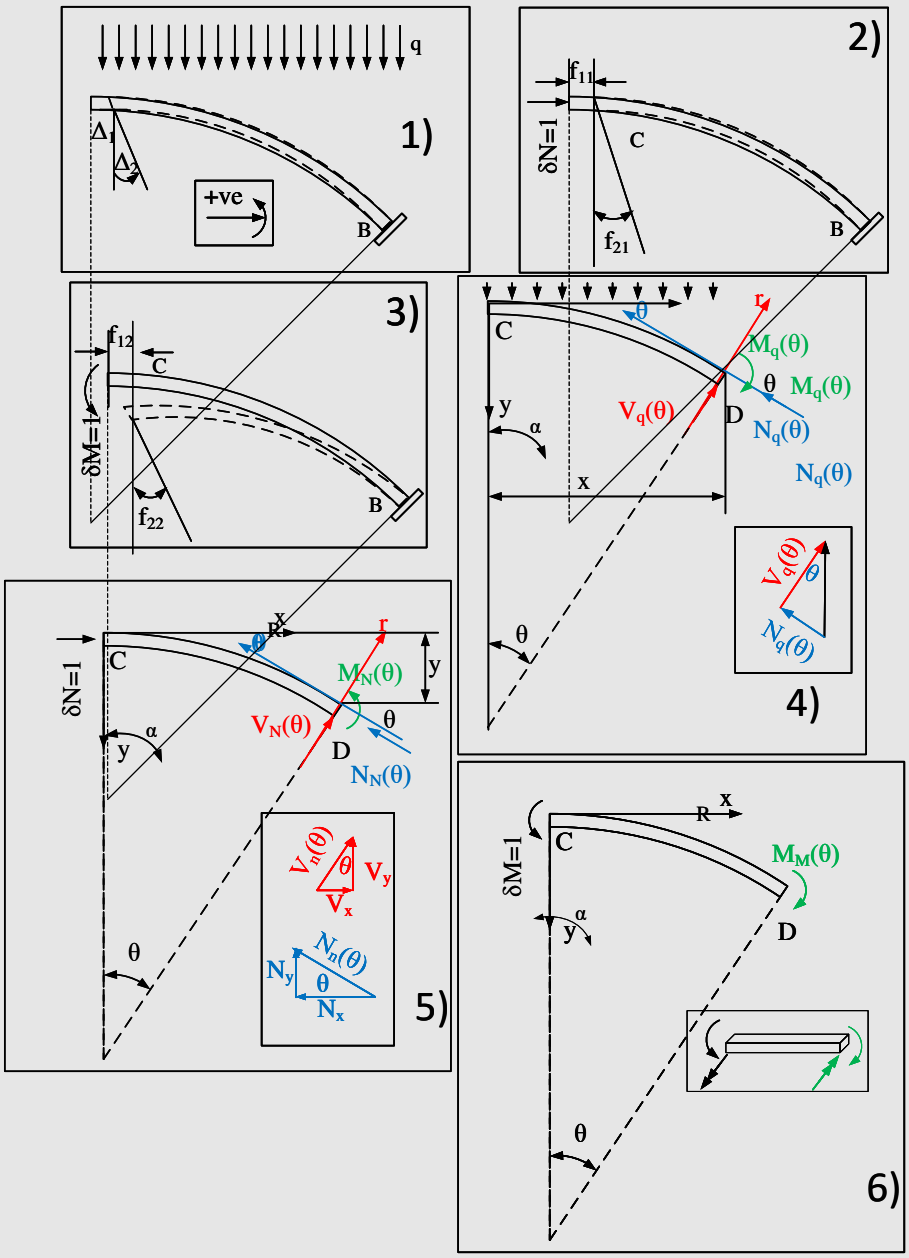
$$\begin{bmatrix} f_{nn} & f_{nm} \\ f_{mn} & f_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_n \\ \Delta_m \end{Bmatrix}$$

और

$$\text{हल करें} \quad \begin{Bmatrix} \Delta_N,\ \Delta_M \\ f_{NN},\ f_{NM} \\ f_{MM} \end{Bmatrix} \quad \text{इनके पदों में} \quad \begin{Bmatrix} N_q(\theta),\ M_q(\theta) \\ N_n(\theta),\ M_n(\theta); \\ N_m(\theta),\ M_m(\theta); \end{Bmatrix} \quad \text{इनके कारण} \quad \begin{Bmatrix} q \\ \delta\overline{N} = 1 \\ \delta\overline{M} = 1 \end{Bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आंतरिक अभिलंब बल तथा आघूर्ण



चित्र 1 तथा 4 से बाह्य भार के कारण अभिलंब बल तथा आघूर्ण निम्न द्वारा दिए जाते हैं

$$V_q(\theta) = qx\cos\theta = qR\sin\theta\cos\theta$$
$$N_q(\theta) = qx\sin\theta = qR\sin^2\theta$$
$$M_q(\theta) = -q\frac{x^2}{2} = -q\frac{R^2\sin^2\theta}{2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(इकाई) आभासी क्षैतिज बल निम्न आंतरिक बल उत्पन्न करेगा (चित्र 2/5)

$$M_n(\theta) = (1)(y) = R(1-\cos\theta)$$

चित्र 5 ($\delta N = 1$) से बलों का साम्य (ध्यान दें कि हमारे पास केवल x दिशा में बलों का समुच्चय है और y में कोई नहीं) देता है

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_x - N_x + \delta N &=& 0 \\ V_y + N_y &=& 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{cc} \sin\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V_n(\theta) \\ N_n(\theta) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

हल करके और $M_n(\theta)$ स्थापित करके

$$\lfloor\ V_n(\theta),\quad N_n(\theta), M_n(\theta)\ \rfloor = \lfloor\ -\sin(\theta),\quad \cos(\theta),\quad R(1-\cos\theta)\ \rfloor$$

C पर इकाई बाह्य आघूर्ण के लिए कोई प्रेरित आंतरिक बल नहीं है; किंतु आंतरिक आघूर्ण है (चित्र 3/6)

$$\lfloor\ N_m,\quad M_m\ \rfloor = \lfloor\ 0,\quad -1\ \rfloor$$

पूर्ववर्ती चित्र से ध्यान दें कि ऊर्ध्वाधर भार के अधीन मेहराब आलंब के विरुद्ध धकेलेगा, क्योंकि उसका विस्थापन बाईं ओर होगा। फिर भी यहाँ हमने $\delta N = 1$ की दिशा द्वारा दाईं ओर विस्थापन माना है।

प्राथमिक संरचना के विस्थापन

अब हम वास्तविक भार से संबंधित दो विस्थापन निर्धारित करते हैं

$$\underbrace{\delta\overline{N}}_{1}\,\Delta_n = \int_0^\alpha M_q(\theta)\frac{\delta\overline{M}_n(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_q\frac{\delta\overline{N}_n(\theta)}{EA}Rd\theta$$

$$\underbrace{\delta\overline{M}}_{1}\,\Delta_m = \int_0^\alpha M_q(\theta)\frac{\delta\overline{M}_m(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_q(\theta)\frac{\delta\overline{N}_m(\theta)}{EA}Rd\theta$$

और ऊपर के आंतरिक बल प्रतिस्थापित करते हैं। इससे प्राप्त होता है

$$\Delta_n = \frac{qR^2\left(4\sin^3(\alpha)\left(2\kappa+R^2\right)+3R^2(\sin(2\alpha)-2\alpha)\right)}{24EI}$$

$$\Delta_m = \frac{qR^3(\alpha-\sin(\alpha)\cos(\alpha))}{4EI}$$

जहाँ $\kappa = I/A$; अर्थात् यदि $\kappa = 0$ हो तो हम अक्षीय विरूपण की उपेक्षा करेंगे। ध्यान दें कि अक्षीय दृढता घूर्णन Δ_2 को प्रभावित नहीं करती।

नम्यता आव्यूह

अब नम्यता आव्यूह निम्न से प्राप्त होता है

$$f_{ij} = \int_0^\alpha M_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_i(\theta)\frac{N_j(\theta)}{EA}Rd\theta$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ i, j, n, m के अनुरूप हैं। प्रतिस्थापन करने पर,

$$f_{nn} = \frac{R\left(2\alpha\left(\kappa + 3R^2\right) + \sin(2\alpha)\left(\kappa + R^2\right) - 8R^2\sin(\alpha)\right)}{4EI}$$
$$f_{nm} = f_{mn} = \frac{R^2(\sin(\alpha) - \alpha)}{EI}$$
$$f_{mm} = \frac{\alpha R}{EI}$$

नम्यता आव्यूह का व्युत्क्रम लेने पर अपचयित दृढता आव्यूह K_{ij} प्राप्त होता है, जो निम्न द्वारा दिया जाता है

$$K_{11} = \frac{4\alpha EI}{\alpha R(2\alpha + \sin(2\alpha))\left(\kappa + R^2\right) - 4R^3\sin^2(\alpha)}$$
$$K_{12} = \frac{4EI(\alpha - \sin(\alpha))}{\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha))\left(\kappa + R^2\right) - 4R^2\sin^2(\alpha)}$$
$$K_{22} = \frac{EI\left(2\alpha\left(\kappa + 3R^2\right) + \sin(2\alpha)\left(\kappa + R^2\right) - 8R^2\sin(\alpha)\right)}{\alpha R(2\alpha + \sin(2\alpha))\left(\kappa + R^2\right) - 4R^3\sin^2(\alpha)}$$

दृढता आव्यूह को Δ_n तथा Δ_m से गुणा करने की गणना Mathematica द्वारा की गई; किंतु उत्तर वैश्लेषिक रूप से सहज समझ के लिए अत्यंत जटिल है।

सरलीकरण; अक्षीय विरूपण की उपेक्षा

नियामक समीकरण

यद्यपि पूर्ववर्ती समीकरणों पर आधारित यथार्थ हल संख्यात्मक रूप से प्राप्त किए जा सकते हैं, अब हम अक्षीय विरूपण की उपेक्षा करके, अर्थात् $\kappa = 0$ रखकर, समस्या को सरल करते हैं; इससे प्राप्त होगा

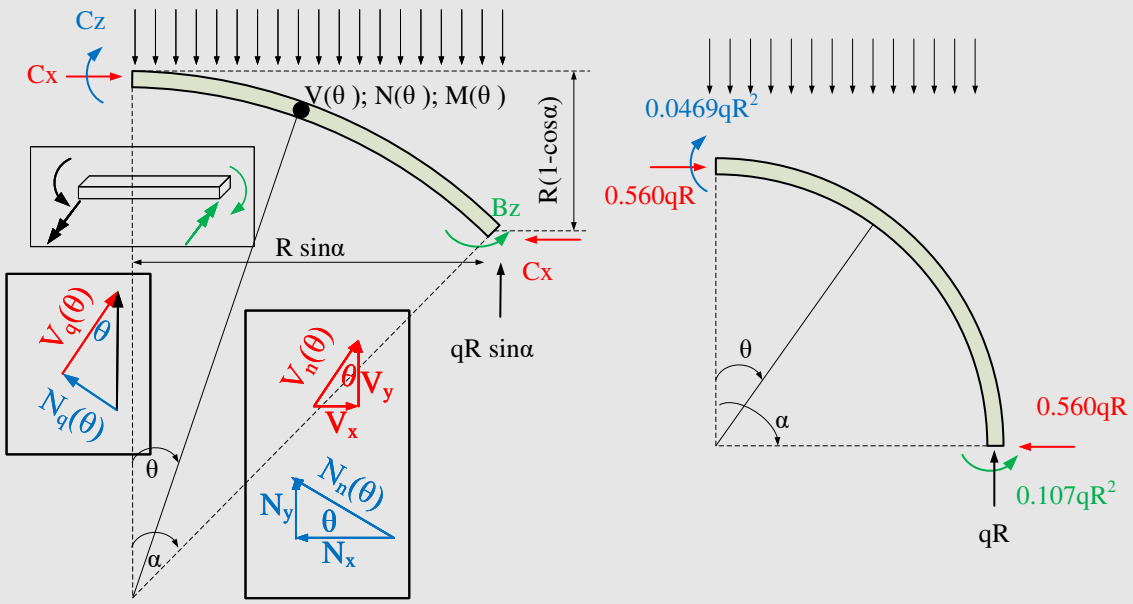
$$\Delta_n = \frac{qR^4\left(-6\alpha + 4\sin^3(\alpha) + 3\sin(2\alpha)\right)}{24EI}$$
$$\Delta_m = \frac{qR^3(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha))}{4EI}$$
$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{R^3(6\alpha - 8\sin(\alpha) + \sin(2\alpha))}{4EI} & \frac{R^2(\sin(\alpha) - \alpha)}{EI} \\ \frac{R^2(\sin(\alpha) - \alpha)}{EI} & \frac{\alpha R}{EI} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{4\alpha EI}{R^3(\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha)) - 4\sin^2(\alpha))} & \frac{4EI(\alpha - \sin(\alpha))}{R^2(\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha)) - 4\sin^2(\alpha))} \\ \frac{4EI(\alpha - \sin(\alpha))}{R^2(\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha)) - 4\sin^2(\alpha))} & \frac{EI(6\alpha - 8\sin(\alpha) + \sin(2\alpha))}{R(\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha)) - 4\sin^2(\alpha))} \end{bmatrix}$$

इससे निम्न बल प्राप्त होंगे

$$C_x = \frac{qR\sin(\alpha)(2\alpha(\cos(2\alpha) + 2) - 3\sin(2\alpha))}{24\sin^2(\alpha) - 6\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha))}$$
$$C_z = -\frac{qR^2}{48\left(\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha)) - 4\sin^2(\alpha)\right)}\left[24\alpha^2 + 8\sin(\alpha)\right.$$
$$\left.\left(-6\alpha + 4(\alpha - \sin(\alpha))\sin^2(\alpha) + 3\sin(2\alpha)\right) + 3\cos(4\alpha) - 3\right]$$

निम्न चित्र के संदर्भ में आंतरिक बल इस प्रकार दिए जाएँगे

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



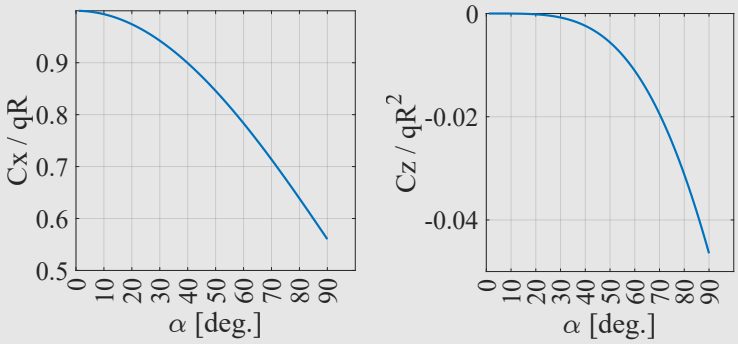
$$N(\theta) = C_x \underbrace{\cos\theta}_{N_n} + \underbrace{qR\sin^2\theta}_{N_q} \qquad \text{+ve संपीडन}$$

$$V(\theta) = -C_x \underbrace{\sin\theta}_{V_n} + \underbrace{qR\sin\theta\cos\theta}_{V_q} \qquad \text{+ve दक्षिणावर्त}$$

$$M(\theta) = C_z \underbrace{1}_{M_m} + C_x \underbrace{R(1-\cos\theta)}_{M_n} - \underbrace{q\frac{R^2\sin^2\theta}{2}}_{M_q} \qquad \text{+ve वामावर्त}$$

परिणामों का दृश्यांकन

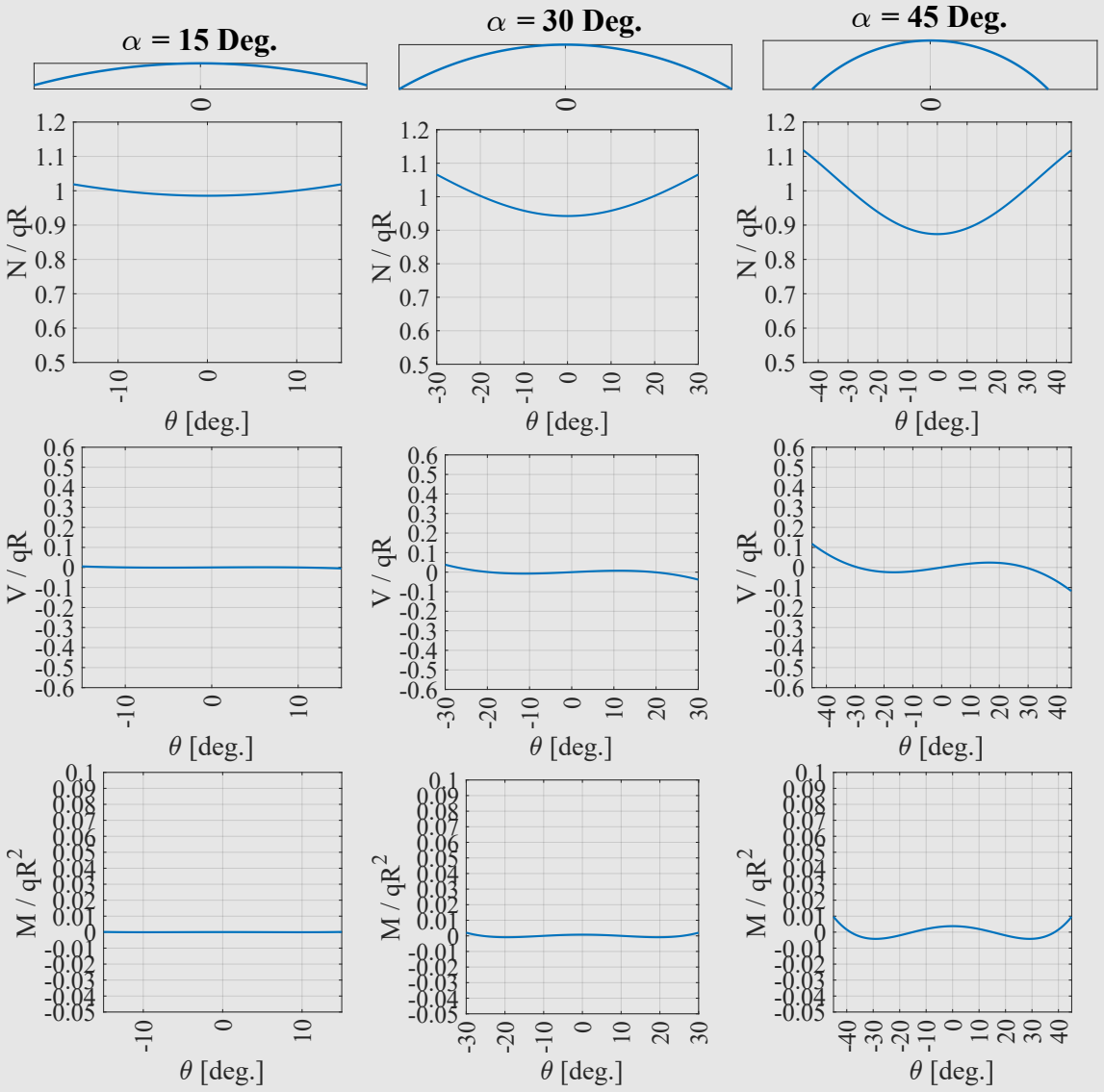
C_x तथा C_z के परिवर्तन की जाँच करने पर, पहला "सपाट मेहराबों" के लिए सबसे बड़ा है और मेहराब के अर्धवृत्तीय बनने के साथ लगभग रैखिक रूप से घटता है। दूसरी ओर C_z "सपाट मेहराब" के लिए लगभग शून्य और अर्धवृत्तीय मेहराब के लिए अधिकतम है।



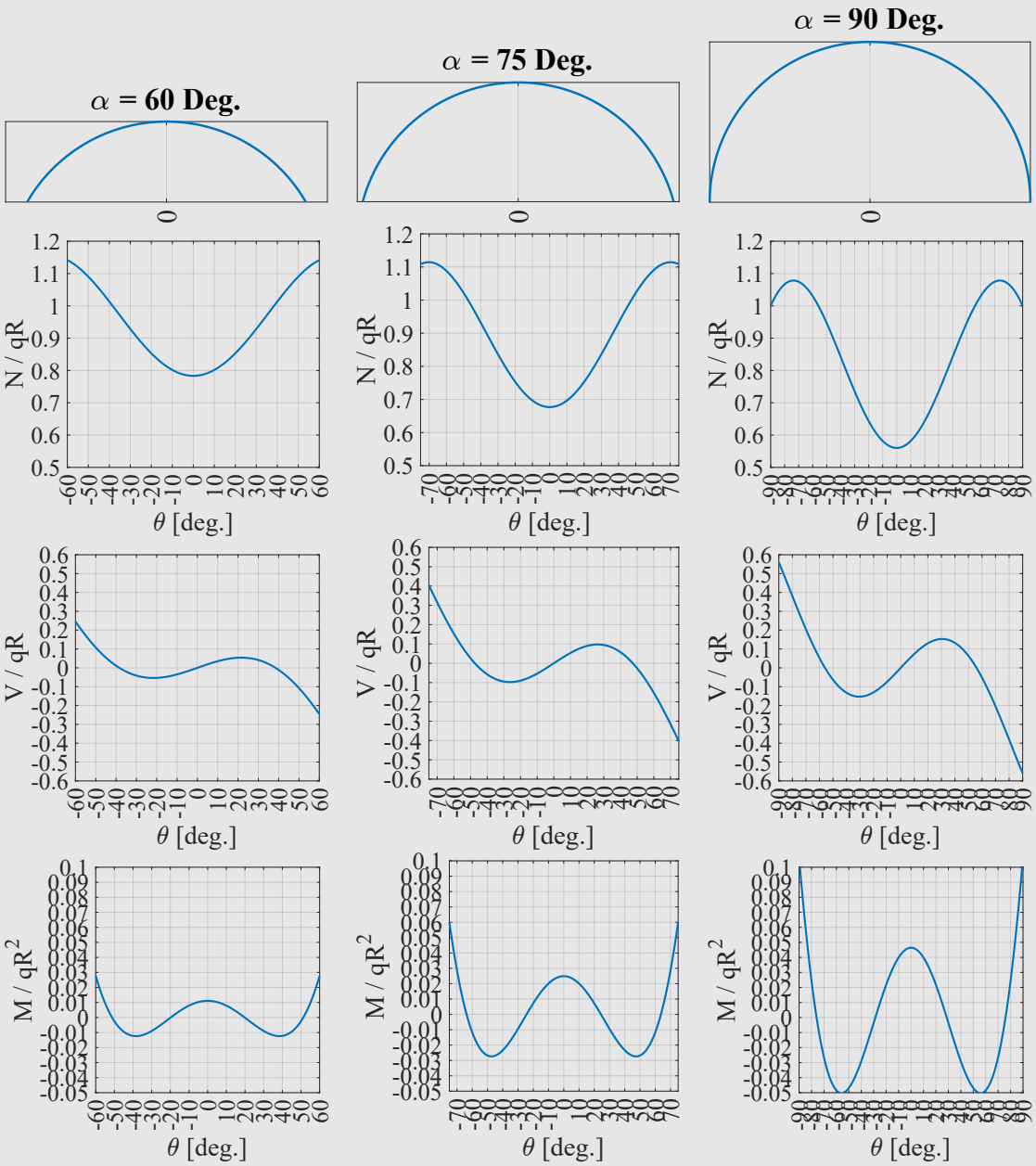
अब हम मेहराबों के अनुदिश सामान्यीकृत अक्षीय बल (N), अपरूपण (V) तथा आघूर्ण (M) की θ के पदों में जाँच

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करते हैं। तुलना सुगम करने के लिए सभी आलेखों में समान न्यूनतम तथा अधिकतम मान हैं। छोटे α के लिए अभिलंब बल लगभग नियत है, किंतु शिखर पर N घटता है और अंततः दो नति-परिवर्तन बिंदु उत्पन्न होते हैं। यद्यपि अपरूपण के निरपेक्ष मान आलेखित किए जा सकते थे, ध्यान दें कि वह "सपाट मेहराब" के लिए लगभग शून्य है और अंत पर α बढ़ने के साथ क्रमशः बढ़ता है, जबकि अपेक्षानुसार (सममिति के कारण) शिखर पर सदैव शून्य रहता है। अंततः लगभग सपाट मेहराबों के लिए आघूर्ण लगभग शून्य है और क्रमशः बढ़ता है; शिखर मान सदैव आलंबों पर होते हैं और इसका लक्षण उसका W आकार है।



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अंततः विरूपित आकार के आलेख के बिना इस समस्या का हल पूर्ण नहीं होगा। इसे अभ्यास के रूप में छोड़ा गया है और हल के संकेत अध्याय D में मिल सकते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

32.1.4 सामान्यीकृत हल

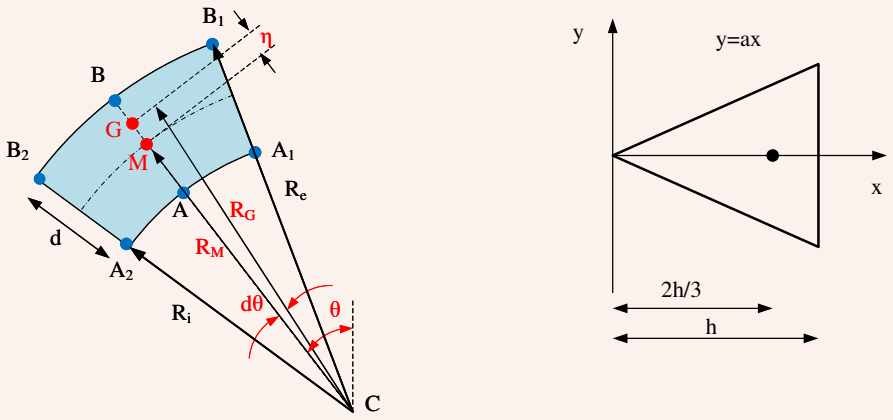
32.1.4.1 व्युत्पत्ति

Smars, 2000 *"Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes"* से अनुकूलित।

32.1.4.1.1 गुरुत्व-केंद्र

23 यह व्युत्पत्ति सर्वप्रथम Milankovitch, 1907 *"Theorie der druckkurven"* द्वारा प्रकाशित की गई थी।

24 पहले एक मेहराब-खंड के गुरुत्व-केंद्र का स्थान व्युत्पन्न करते हैं (यह सरल कार्य नहीं है!)। चित्र 32.4 के संदर्भ में



चित्र 32.4: मेहराब-खंड का गुरुत्व-केंद्र

25 पहले ध्यान दें कि मेहराब-खंड का गुरुत्व-केंद्र, अनुप्रस्थ काट के मध्य-बिंदु M से भिन्न स्थान पर है; यह काट AB ($A_1B_1B_2A_2$) है।

26 G का स्थान निर्धारित करने के लिए सूक्ष्म त्रिभुजों CB_1B_2 तथा CA_1A2 के क्षेत्रफलों के प्रथम आघूर्णों का अंतर उस अक्ष के सापेक्ष लेते हैं जो C से गुजरता है और वक्रता-त्रिज्या के लंबवत है। विशेषतः, प्रथम आघूर्ण S_1, जो CB_1B_2 का है, क्षेत्रफल $A_{CB_1B_2}$ और उसके द्रव्यमान-केंद्र की दूरी $R_{CB_1B_2}$, जिसे C से मापा गया है, के गुणनफल से मिलता है।

27 इसी प्रकार, क्षेत्रफल का प्रथम आघूर्ण S_2, जो CA_1A_2 का है, क्षेत्रफल $A_{CA_1A_2}$ और उसके द्रव्यमान-केंद्र की दूरी $R_{CA_1A_2}$, जिसे C से मापा गया है, के गुणनफल से मिलता है।

$$S_2 = A_{CA_1A_2} R_{CA_1A_2} = A_{CA_1A_2} \frac{2}{3} \left(R_M - \frac{d}{2} \right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

28 सूक्ष्म मेहराब-खंड $A_1B_1A_2B_2$ के क्षेत्रफल का प्रथम आघूर्ण है

$$(A_{CB_1B_2} - A_{CA_1A_2})R_G = A_{CB_1B_2}\frac{2}{3}\left(R_M + \frac{d}{2}\right) - A_{CA_1A_2}\frac{2}{3}\left(R_M - \frac{d}{2}\right) \tag{32.13}$$

29 त्रिभुज के क्षेत्रफल और उसकी ऊँचाई का संबंध केंद्रक की परिभाषा से निर्धारित होता है

$$\overline{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int_0^h x(\overbrace{ax}^{y})\,dx}{\int_0^h (ax)dx} = \underbrace{\frac{\frac{ah^3}{3}}{\frac{ah^2}{2}}}_{A} = \frac{2h}{3} \Rightarrow A = \frac{ah^2}{2} \Rightarrow A \propto h^2$$

30 अतः $A_{CB_1B_2}$ और $A_{CA_1A_2}$ का अनुपात, दूरियों $\left(R_M + \frac{d}{2}\right)^2$ तथा $\left(R_M - \frac{d}{2}\right)^2$ के वर्गों के अनुपात के समानुपाती है; इसलिए

$$A_{CB_1B_2} = A_{CA_1A_2}\frac{\left(R_M + \frac{d}{2}\right)^2}{\left(R_M - \frac{d}{2}\right)^2} \tag{32.14}$$

31 समीकरण 32.14 को समीकरण 32.13 में प्रतिस्थापित करके और R_G के लिए हल करने पर

$$R_G = R_M + \frac{d^2}{12R_M} \Rightarrow \eta = \frac{d^2}{12R_M}$$

32.1.4.1.2 व्युत्पत्ति

32 इकाई चौड़ाई वाले चाप की ज्यामिति उसके ध्रुवीय कोण θ, वक्रता-त्रिज्या $r(\theta)$, तथा मोटाई $d(\theta)$ से परिभाषित होती है (चित्र 32.5)। साम्य का अवकल समीकरण व्युत्पन्न करने के लिए सूक्ष्म मेहराब-खंड (अथवा मेहराब के एक खंड) के साम्य का अध्ययन करते हैं। ध्यान दें कि न तो मोटाई और न ही चाप की वक्रता r का छोटा होना आवश्यक है।

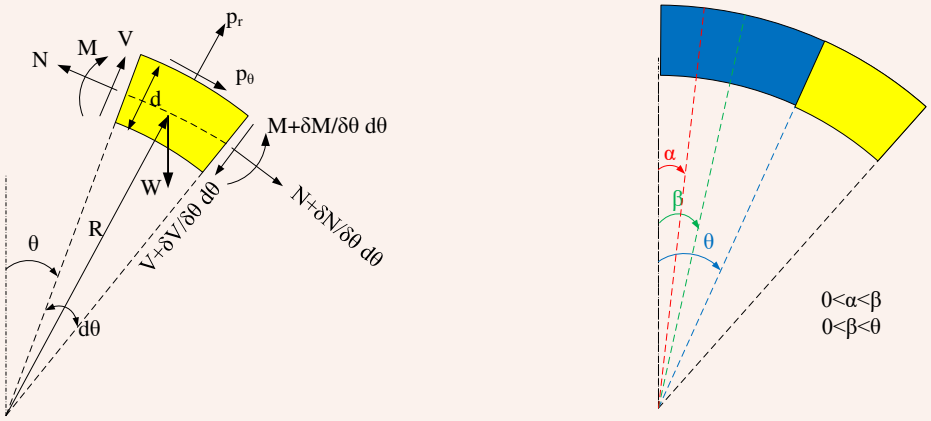
33 मेहराब-खंड का भार W है, जो निम्न से दिया जाता है:

$$W = \gamma r d\, d\theta$$

जहाँ γ मेहराब का विशिष्ट भार $[N/m^3]$ है। यह मेहराब-खंड के गुरुत्व-केंद्र पर, वक्रता-केंद्र से r_G दूरी पर, कार्य करता है।

$$R_G = R\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right] = R\left[1 + \frac{\eta^2}{12}\right]$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 32.5: सूक्ष्म मेहराब-खंड का साम्य

34 आंतरिक बल अभिलंब बल N (तनन में धनात्मक), अपरूपण बल V (दक्षिणावर्त घूर्णन कराने की प्रवृत्ति होने पर धनात्मक) तथा आघूर्ण M (निचले तंतु को तनित करने पर धनात्मक) हैं। काट में प्रतिबल-वितरण के विषय में कोई धारणा नहीं की गई है।

35 चाप के बाह्यवक्र (extrados) पर पृष्ठीय बल कार्य करते हैं: स्पर्शरेखीय दिशा में p_θ और अरीय दिशा में p_r। अरीय साम्य निम्न से दिया जाता है

$$-\frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta - N d\theta - \gamma R d\cos(\theta) d\theta + p_r\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta = 0$$

ध्यान दें कि फलकों के समांतर न होने के कारण अभिलंब बल का अरीय घटक $-N d\theta$ है।

36 बाह्यवक्र फलक की लंबाई $\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta$ है।

37 स्पर्शरेखीय साम्य इस प्रकार लिखा जाता है:

$$-\frac{\partial N}{\partial \theta}d\theta - V d\theta + \gamma R d\sin(\theta) d\theta + p_\theta\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta = 0$$

पुनः, फलकों के समांतर न होने के कारण अपरूपण बल का एक स्पर्शरेखीय घटक है।

38 अंततः, केंद्र-बिंदु के परितः घूर्णन-साम्य इस प्रकार लिखा जाता है:

$$-\frac{\partial M}{\partial \theta}d\theta + V R d\theta + \frac{d^2}{12R}\sin(\theta)\gamma R d d\theta + p_\theta\left(R+\frac{d}{2}\right)\frac{d}{2}d\theta = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[39] यदि θ के सापेक्ष अवकलज को अभाज्य चिह्न ($'$) से दर्शाएँ और विमाहीन प्राचल η, जो चाप की तनुता $n = d/r$ दर्शाता है, प्रस्तुत करें, तो साम्य समीकरण पुनः इस प्रकार लिखे जा सकते हैं:

$$N' - V + \gamma R^2 \eta \sin(\theta) + p_\theta R(1 + \eta/2) = 0 \tag{32.15}$$

$$-V' - N - \gamma R^2 \eta \cos(\theta) + p_r R \left(1 + \frac{\eta}{2}\right) = 0 \tag{32.16}$$

$$-M' + VR + \gamma R^3 (\eta^3/12) \sin(\theta) + p_\theta R^2 \left(1 + \frac{\eta}{2}\right) \frac{\eta}{2} = 0 \tag{32.17}$$

[40] अवकलज V', जो V का है (समीकरण 32.16), समीकरण 32.15 के अवकलज में प्रतिस्थापित करके V का विलोपन किया जा सकता है।

$$N'' + V' + (\gamma R^2 \eta)' \sin(\theta) + \gamma R^2 \eta \cos(\theta) + (p_\theta R(1 + \frac{\eta}{2}))' = 0$$

तब प्राप्त होता है:

$$N'' + N = q(\theta) \tag{32.18}$$

जहाँ परिवर्ती (और प्रायः ज्ञात) पदों को दूसरे पद में समूहीकृत किया गया है

$$q(\theta) = \underbrace{R(p_r - p'_\theta)\left(1 + \frac{\eta}{2}\right) - p_\theta \left[R\left(1 + \frac{\eta}{2}\right)\right]}_{\text{बाह्य भार}} - 2\gamma R^2 \eta \cos(\theta) - (\gamma R^2 \eta)' \sin(\theta)$$

[41] संबद्ध समघात अवकल समीकरण का व्यापक हल $\sin(\theta)$ तथा $\cos(\theta)$ का रैखिक संयोजन है। यह दर्शाया जा सकता है (बाह्य भार की उपेक्षा करते हुए) कि

$$N(\theta) = a_1 \cos(\theta) + \left(a_2 + \underbrace{\int_0^\theta \frac{\overbrace{\int_0^\beta q(\alpha) \sin\alpha d\alpha}^{F_1(\beta)}}{\sin^2\beta} d\beta}_{F_2(\theta)} \right) \sin(\theta) \tag{32.19}$$

एक हल है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

42 हम सत्यापित करते हैं

$$F_1(\beta) = \int_0^{\beta} q(\alpha)\sin(\alpha)d\alpha = \frac{1}{4}\gamma\eta R^2\left[-2\beta - 4\sin^2(\beta) + \sin(2\beta)\right]$$
$$F_2(\theta) = \frac{\int_0^{\theta} F_1(\beta)}{\sin^2(\beta)} = \frac{1}{2}R^2\gamma\eta\left[(-1+\theta(-2+\cot(\theta))\right]$$
$$F_3(\theta) = \frac{d^2}{d\theta}N(\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\theta)\left[2\mathrm{a1} + \gamma\eta(\theta+4)R^2\right] - \frac{1}{2}\sin(\theta)\left[2a_2 + \gamma\eta(1-2\theta)R^2\right]$$

$$N(\theta) = a_1\cos(\theta) + (a_2 + F_2(\theta))\sin(\theta)$$
$$\frac{d^2}{d\theta}N(\theta) = -\frac{1}{2}(2a_1 + R^2\gamma\eta(4+\theta))\cos(\theta) - \frac{1}{2}\left[2a_2 + R^2\gamma\eta(1-2\theta)\right]\sin(\theta)$$

समीकरण 32.18 में प्रतिस्थापित करने पर सरलता से दर्शाया जा सकता है कि वास्तव में

$$\frac{d^2}{d\theta}N(\theta) + N(\theta) - q(\theta) = 0$$

43 अपरूपण बल समीकरण 32.16 से निर्धारित किया जा सकता है

$$V(\theta) = \cos(\theta)\left(a_2 - \gamma\eta\theta R^2\right) - \tfrac{1}{2}\sin(\theta)\left(2a_1\gamma\eta\theta R^2\right)$$

44 तदनुसार आघूर्ण समीकरण 32.17 से प्राप्त होता है

$$M(\theta) = a_3 - a_1R + R^3\gamma\eta + \frac{1}{2}R\left[2a_1 + R^2\gamma\eta(-2+\theta)\right]\cos(\theta) + a_2R\sin(\theta)$$
$$+ \frac{1}{12}R^3\gamma\eta\left[-6 + (-12+\eta^2)\theta\right]\sin(\theta)$$

ध्यान दें कि समाकलन का तीसरा नियतांक (a_3) प्रस्तुत किया गया है।

45 समाकलन के तीन नियतांक a_1, a_2, तथा a_3 ज्ञात करने के लिए तीन अतिरिक्त समीकरण आवश्यक हैं। N, V, तथा V के मान $\theta = 0$ रखकर ज्ञात किए जा सकते हैं।

46 आंतरिक परिणामकों को अन्य प्रकार से भी निरूपित किया जा सकता है। निरपेक्ष उत्केंद्रता ex तथा सापेक्ष उत्केंद्रता e की परिभाषाएँ हैं:

$$ex = -\frac{M}{N},\ e = \frac{2ex}{d}$$

47 आघूर्ण को काट के मध्य-बिंदु के संदर्भ में मापा जाता है। यह निकाय (N*, V, ex) अथवा (N*, V, e) निकाय के तुल्य है, जहाँ $N*$ एक ऐसा बल है जिसकी तीव्रता N के समान है और जो परिकलित काट के मध्य से ex दूरी पर कार्य करके आघूर्ण M उत्पन्न करता है। e का मान -1 से कम होता है जब बल

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$N*$ काट के अंतर्वक्र (intrados) छोर से बाहर हो; 0 होता है जब $N*$ केंद्र से गुजरे; और 1 से अधिक होता है जब वह बाह्यवक्र से गुजरे।

48 उदाहरणार्थ, केवल स्वभार के अधीन नियत मोटाई वाला वृत्तीय चाप लें। साम्य समीकरण (समीकरण 32.15-32.17) इस प्रकार पुनः लिखे जा सकते हैं:

$$\begin{aligned} N'(\theta) - V(\theta) + \gamma R^2 \eta \sin(\theta) &= 0 \\ V'(\theta) + N(\theta) + \gamma R^2 \eta \cos(\theta) &= 0 \\ -M'(\theta) + V(\theta)R + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

और अवकल समीकरण 32.18 बन जाता है

$$N''(\theta) + N(\theta) = -2\gamma R^2 \eta \cos(\theta)$$

49 इस स्थिति के लिए समीकरण 32.19 हल करने पर प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} N(\theta) &= N_0 \cos(\theta) + (a_2 - \gamma R^2 \eta\theta) \sin(\theta) \\ V(\theta) &= -N_0 \sin(\theta) + (a_2 - \gamma R^2 \eta\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

जहाँ N_0, $\theta = 0$ के लिए अभिलंब बल है। आघूर्णों के लिए समीकरण 32.17 बन जाता है

$$M'(\theta) = VR + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \sin(\theta)$$

V का व्यंजक प्रतिस्थापित करने पर

$$M'(\theta) = -N_0 R \sin(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta\theta) R \cos(\theta) + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \cos(\theta)$$

समाकलन से प्राप्त होता है

$$M(\theta) = a_3 + N_0 R \cos(\theta) + V_0 R \sin(\theta) - \gamma R^3 \eta(\theta \sin(\theta) + cos(\theta) - \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \cos(\theta)$$

50 अंततः आंतरिक बल निम्न से दिए जाएँगे

$$N(\theta) = N_0 \cos(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta\theta) \sin(\theta) \tag{32.20}$$

$$V(\theta) = -N_0 \sin(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta\theta) \cos(\theta) \tag{32.21}$$

$$M(\theta) = M_0 - N_0 R(1 - \cos(\theta)) + V_0 R \sin(\theta) - \gamma R^3 \eta \left[\theta \sin(\theta) - (1 - \cos(\theta)) \left(1 + \frac{\eta^2}{12}\right)\right] \tag{32.22}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

32.1.4.1.3 सत्यापन

51 हम सत्यापित कर सकते हैं कि समीकरण 32.20-32.22, केंद्रित अक्षीय बल, अपरूपण और आघूर्ण की तीन स्थितियों के लिए समीकरण 32.10, 32.11, तथा 32.12 से मेल खाते हैं (Smars, 2022)।

52 इस व्युत्पत्ति में कोण शिखर ($\theta = 0$) से मापे गए हैं, जहाँ अपरूपण और आघूर्ण दोनों शून्य हैं ($V = M = 0$)। आगे हम मोटाई को (R की तुलना में) नगण्य मानते हैं, अतः $\eta = 0$। दूसरी ओर, स्वभार को $w = \gamma R\eta$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। प्रतिस्थापन करने पर समीकरण 32.20-32.22 बनते हैं

$$\begin{aligned} N(\theta) =& N_0 \cos(\theta) - wR\theta \sin(\theta) \\ V(\theta) =& -N_0 \sin(\theta) - wR\theta \cos(\theta) \\ M(\theta) =& -N_0 R(1-\cos(\theta)) - wR^2 [\theta \sin(\theta) - 1 + \cos(\theta)] \end{aligned}$$

N_0, अर्थात् शिखर का अक्षीय बल, क्षैतिज प्रतिक्रिया (समीकरण 32.9) के बराबर होना चाहिए, $N_0 = C_x = (\pi/2 - 1)wR$

$$\begin{aligned} N(\theta) =& wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos(\theta) + \theta \sin(\theta) \right] \\ V(\theta) =& wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin(\theta) - \theta \cos(\theta) \right] \\ M(\theta) =& wR^2 \left[\frac{\pi}{2}(1 - \cos(\theta)) - \theta \sin(\theta) \right] \end{aligned}$$

53 अंततः, इस व्युत्पत्ति में शिखर से मापे गए कोण θ और त्रि-केंद्रित मेहराब के हल वाले कोण θ', जो x अक्ष से मापा गया है, के लिए प्रतिस्थापन करते हैं

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

जिससे प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} N(\theta') =& -wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin(\theta) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta' \right) \cos(\theta') \right] \\ V(\theta') =& wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos(\theta') - \left(\frac{\pi}{2} - \theta' \right) \sin(\theta') \right] \\ M(\theta') =& wR^2 \left[\frac{\pi}{2}(1 - \sin(\theta')) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta' \right) \cos(\theta') \right] \end{aligned}$$

इस प्रकार पहले व्युत्पन्न वही समीकरण पुनः प्राप्त हुए हैं, समीकरण 32.10, 32.11, तथा 32.12।

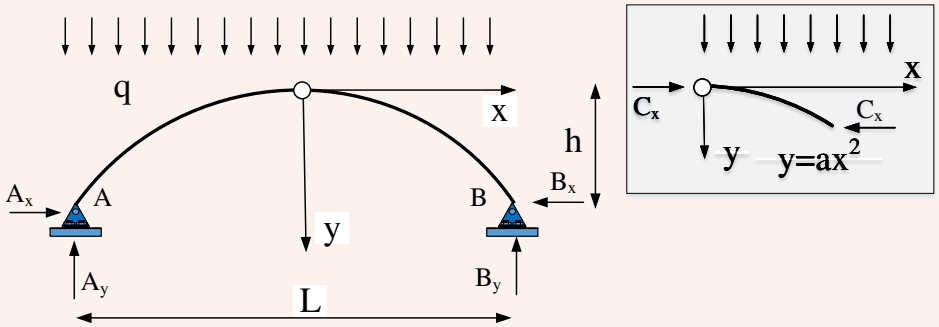
32.1.5 Mathematica-आधारित हल

54 भारों और आलंबों के विभिन्न संयोजनों वाले वृत्तीय मेहराब के हलों का विस्तृत समुच्चय परिशिष्ट D में दिया गया है। यह Sonavane, 2014 का MS शोधप्रबंध था और इसमें मुक्त-पिंड आरेख तथा संगत Mathematica कूट सम्मिलित हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

32.2 मेहराब का इष्टतम आकार

55 यद्यपि दो बिंदुओं के बीच अनंत संख्या में परवलय बनाए जा सकते हैं, हम एकसमान भार के लिए इष्टतम परवलय ज्ञात करना चाहते हैं, चित्र 32.6। बाएँ चित्र के साम्य से प्राप्त होता है



चित्र 32.6: एकसमान भार के लिए इष्टतम परवलयी मेहराब

$$\begin{cases} (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y L - \dfrac{qL^2}{2} == 0 \\ (+\circlearrowright)\,\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \dfrac{qL}{2}\dfrac{L}{4} + B_x \dfrac{L}{2} - C_x h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = \dfrac{qL^2}{8h} \\ B_y = \dfrac{qL}{2} \end{cases}$$

हम a इस प्रकार निर्धारित करना चाहते हैं कि पूरे मेहराब में $M(x) = 0$ हो। दाएँ मुक्त-पिंड आरेख का साम्य लेते हुए और $y = ax^2$ रखकर a निर्धारित करते हैं

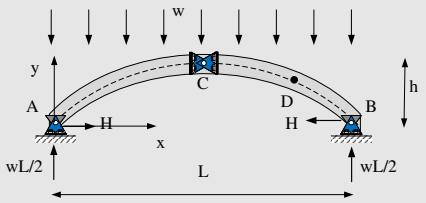
$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_C = 0 \Rightarrow C_x \underbrace{(ax^2)}_{y} - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{L^2}$$

56 ऐसे परवलय में एकसमान भार के कारण कोई आंतरिक आघूर्ण नहीं होगा।

57 केबलों की भाँति मेहराब में अधिकतम कुल बल आलंब पर होता है, ($F_{max} = \sqrt{V^2 + H^2}$), जबकि शिखर पर केवल H होता है; अतः शिखर को आलंब की तुलना में छोटे काट की आवश्यकता होगी।

32.2.1 उदाहरण 32.5: आदर्श मेहराब

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



L विस्तृति और h उत्कर्ष वाला तीन-किलक परवलयी मेहराब अपनी पूर्ण विस्तृति पर एकसमान भार w के अधीन है। हम दर्शाएँगे कि विस्तृति में किसी भी बिंदु पर बंकन आघूर्ण शून्य है।

क्षैतिज प्रणोद H को शिखर C के परितः आघूर्ण लेकर निर्धारित किया जाता है

$$Hh = \frac{wL}{2}\times\frac{L}{2} - \frac{wL}{2}\times\frac{L}{4} = \frac{wL^2}{8} \quad\Rightarrow\quad H = \frac{wL^2}{8h}$$

x दूरी पर किसी भी काट का बंकन आघूर्ण है

$$M_x = \frac{wL}{2}\times x - \frac{wx^2}{2} - Hy$$

यहाँ y, x दूरी पर स्थित बिंदु की ऊँचाई है, जहाँ यह दूरी छोर A से मापी गई है, और यह निम्न से दी जाती है। मूलबिंदु A पर लेने से परवलय का समीकरण है

$$y = \frac{4hx(L-x)}{L^2}$$

उपर्युक्त व्यंजक में H तथा y के मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$M_x = \frac{wxL}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{8h}\times\frac{4hx(L-x)}{L^2}$$
$$M_x = \frac{wxL}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wxL}{2} + \frac{wx^2}{2} \quad\Rightarrow\quad M_x = 0$$

एकसमान भार वहन करने वाली केबल से साम्य ध्यान देने योग्य है: उसका आकार परवलय है और वह कोई आघूर्ण वहन नहीं करती।

32.3 परवलयी मेहराब

58 परवलयी मेहराबों का विश्लेषण वृत्तीय मेहराबों के समान है; स्पष्ट अंतर केवल आकार का है। फिर भी परवलयी मेहराबों से संबंधित उदाहरण इस अनुभाग में रखे गए हैं।

59 चूँकि बहुत कम पाठ्यपुस्तकें परवलयी मेहराबों पर विचार करती हैं, इसलिए यह अनुभाग यहाँ सम्मिलित किया गया है।

परवलयी मेहराबों पर यह अनुभाग Thandavamoothy, 2011 *Structural Analysis* से लिया गया है।

32.3.1 उदाहरण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

32.3.1.1 उदाहरण 32.6: तीन-किलक परवलयी मेहराब

निम्न अनुभाग Thandavamoothy, 2011 *Structural Analysis* से पुनरुत्पादित है।

समीकरण $y—4hx^2/L^2$ वाले परवलयी मेहराब में मूलबिंदु शिखर पर, x-अक्ष दाईं ओर और y-अक्ष नीचे की ओर है; उसकी विस्तृति 80 m और उत्कर्ष 6m है। एक केंद्रित भार 20 kN बाएँ अंत्याधार से 60 m की दूरी पर नीचे की ओर कार्य करता है। हमें आलंबों की प्रतिक्रियाएँ और भार-स्थल का परिणामी आघूर्ण निर्धारित करना है। समीकरण 32.1 से

$$V_A = \frac{20 \times 20}{80} = 5\text{kN} \text{ तथा } V_B = \frac{20 \times 60}{80} = 15\text{kN}$$

समीकरण 32.3 से

$$H = \frac{20 \times 20}{2 \times 6} = 33.33\text{kN}$$

सरल आलंबित बीम में केंद्रित भार के स्थान पर बंकन आघूर्ण है

$$M_o = \frac{Wab}{L} = \frac{20 \times 60 \times 20}{80} = 300\text{kNm}$$

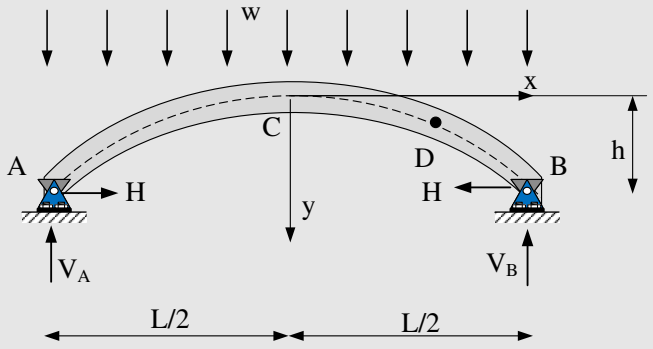
अंततः, भार के स्थान पर आरंभ-रेखा के ऊपर मेहराब-अक्ष की ऊँचाई $(h - y)$ है। $x = 20$ m के लिए,

$$y = \frac{4 \times 6 \times 20^2}{80^2} = 1.5 \text{ m} \quad \therefore (h - y) = (6 - 1.5) = 4.5 \text{ m}$$

प्रणोद के कारण आघूर्ण $H(h - y) = 33.33 \times 4.5 = 149.985\text{kNm}$ है। भार के स्थान पर परिणामी आघूर्ण $(300 - 149.985) = 150.015\text{kNm}$ है।

जाँच: शिखर पर आघूर्ण $(5 \times 40 + 20 \times 20 - 1.5 \times 40) = (200 + 400 - 600) = 0$ है।

32.3.1.2 उदाहरण 32.7: परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाला दो-किलक परवलयी मेहराब



एक सममित दो-किलक मेहराब ऊर्ध्वाधर भारण के अधीन है। मेहराब की सममिति के कारण आलंबों पर कृषैतिज प्रतिक्रियाएँ बराबर और विपरीत हैं। इसे प्रणोद भी कहते हैं और H से दर्शाते हैं।

निम्न अनुभाग Thandavamoothy, 2011 *Structural Analysis* से पुनरुत्पादित है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सिद्धांत

प्रणोद H को वह अतिरिक्त अज्ञात मानें जिसका मूल्यांकन करना है। Castigliano का प्रमेय (समीकरण 48.36) लागू करने पर,

$$U^* = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}ds + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{AE}ds = 0 \tag{32.23}$$

और

$$\Delta = \frac{\partial U^*}{\partial H} = 0 \tag{32.24}$$

इस सरल आलंबित अवस्था से उत्पन्न बंकन आघूर्ण को M_0 और संगत अक्षीय बल को N_0 से दर्शाते हैं। इस विमोचित अवस्था के पदों में मेहराब के काट D पर बंकन आघूर्ण और अक्षीय बल इस प्रकार व्यक्त किए जा सकते हैं

$$M - M_0 - H(h-y) \quad \text{तथा} \quad N = N_0 + H\cos\theta \tag{32.25}$$

जहाँ h मेहराब का उत्कर्ष है और θ, D पर मेहराब की केंद्र-रेखा की स्पर्शरेखा और X-अक्ष के बीच का कोण है। समीकरण 32.25 और H के सापेक्ष उसके अवकलजों को 32.24 में प्रतिस्थापित करने पर,

$$-\int_0^l \frac{M_0 - H(h-y)}{EI}(h-y)ds + \int_0^l \frac{N_0 + H\cos\theta}{AE}\cos\theta ds = 0 \tag{32.26}$$

तब H का हल निम्न से दिया जाता है

$$H = \frac{\int_0^l \left(\frac{M_0}{EI}\right)(h-y)ds - \int_0^l \left(\frac{N_0}{AE}\right)\cos\theta ds}{\int_0^l \left[\frac{(h-y)^2}{EI}\right]ds + \int_0^l \left[\frac{(\cos^2\theta)}{AE}\right]ds}$$

यह समीकरण किसी भी आकार और भारण-अवस्था वाले सभी सममित दो-किलक मेहराबों के लिए मान्य है। सामान्य अनुपात वाले मेहराबों में अंश का दूसरा पद पहले पद की तुलना में बहुत छोटा होता है (अक्षीय विरूपण, आनमनी विरूपण से बहुत कम होता है), अतः उसकी उपेक्षा की जा सकती है। इसलिए प्रणोद का व्यंजक है

$$H = \frac{\int_0^l \left(\frac{M_0}{EI}\right)(h-y)ds}{\int_0^l \left[\frac{(h-y)^2}{EI}\right]ds + \int_0^l \left[\frac{(\cos^2\theta)}{AE}\right]ds}$$

प्रणोद H का मूल्यांकन तभी किया जा सकता है जब h और y का संबंध ज्ञात हो। परवलयी मेहराब की विशिष्ट स्थिति में y तथा h को संबद्ध करने वाला मेहराब-अक्ष का समीकरण है

$$y = \frac{4hx^2}{L^2} \tag{32.27}$$

और

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (8hx/L^2)^2}}$$

आगे यह माना गया है कि अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल और जडत्व आघूर्ण निम्न व्यंजक के अनुसार परिवर्तित होते हैं

$$A = \frac{A_c}{\cos\theta} \quad \text{तथा} \quad I = \frac{I_c}{\cos\theta}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ A_c और I_c क्रमशः शिखर C पर अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल और जडत्व आघूर्ण दर्शाते हैं।

M_0 का मान ज्ञात करने के लिए ध्यान दें कि मेहराब पर तीव्रता w का एकसमान वितरित भार ऊर्ध्वाधर रूप से कार्य करता है और सरल आलंबित बीम में बंकन-आघूर्ण आरेख परवलय होता है, जिसका मध्य-विस्तृति पर अधिकतम आघूर्ण ($wL^2/8$) है। अतः शिखर से दूर काट D पर, जहाँ शिखर C से दूरी x है, बंकन आघूर्ण होगा

$$M_o = \frac{wL^2}{8}\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)$$

प्रतिस्थापन करने पर,

$$\begin{aligned} H &= \frac{\int_0^l \frac{\frac{wL^2}{8}\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)}{[EI_C]/\left[\sqrt{\left\{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right\}}\right]}\left(h-\frac{4hx^2}{L^2}\right)ds}{\int_0^l\left[\left(\frac{h-\frac{4hx^2}{L^2}}{EI_C}\right)^2\sqrt{\left(1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right)}\right]ds+\int_0^l\left[1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right)}}{EA_C}\right]ds} \\ &= \frac{\frac{wL^2h}{8EI_C}\int_0^1\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)^2 ds}{\left[\frac{h^2}{EI_c}\int_0^l\left[\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)^2\right]ds+\frac{1}{EA_c}\int_0^l\left[1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right]ds\right]} \end{aligned} \tag{32.28}$$

कलन से, मेहराब-अक्ष की सूक्ष्म लंबाई के लिए

$$ds = dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}$$

समीकरण 32.27 का अवकलन करने पर

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}\,dx$$

समीकरण 32.28 में प्रतिस्थापित करने पर

$$H = \frac{\frac{wL^2h}{8EI_C}\int_0^{L/2}(1-\frac{4x^2}{L^2})^2\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx}{[\frac{h^2}{EI_c}\int_0^{L/2}[(1-\frac{4x^2}{L^2})^2\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx]+\frac{1}{EA_c}\int_0^{L/2}[1+(\frac{8hx}{L^2})^2]\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx]}$$

अथवा

$$\begin{aligned} H = \frac{\alpha_1\left[-\frac{wh^2}{I_C}\left(\frac{2L}{3}+\frac{L^3}{256}+\frac{19L^3}{384h^2}+\frac{L^5}{819h^2}\right)\right]+\alpha_2\left[\frac{wh^2}{I_C}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^6}{4{,}096h^4}+\frac{L^8}{26{,}244h^6}\right)\right]}{\alpha_1\left[-\frac{8h^2}{I_CL^2}\left(\frac{2L}{3}+\frac{L^3}{256}+\frac{19L^3}{3{,}844h^2}+\frac{L^5}{8{,}192h^2}\right)+\frac{8h}{A_CL^2}\left(L+\frac{Lh^2}{3}+\frac{L^3}{192}-\frac{L^5}{2{,}048h^2}\right)\right]+\alpha_2\left[\frac{8h^3}{I_CL^2}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^6}{4{,}096h^4}+\frac{L^8}{262{,}144h^6}\right)+\frac{8h}{A_CL^2}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^{15}}{41{,}943h^6}\right)\right]} \end{aligned} \tag{32.29}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}, \quad \alpha_2 = \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}\right) \tag{32.30}$$

अनुप्रयोग

अब उत्कर्ष 10 m और विस्तृति 60 m लें, जिस पर 25kN/m का w कार्य करता है। शिखर-काट का जड़त्व आघूर्ण 1.14×10^{-3} m^4 और अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 6.75×10^{-2} m^2 है।

समीकरण 32.30 से

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{60^2}{4} + \left(\frac{60^2}{8 \times 10}\right)^2} = 54.08; \alpha_2 = \ln\left(\frac{60}{2} + 54.08\right) = 4.43$$

समीकरण 32.29 से

$$\begin{aligned}
H &= \frac{A}{B} \\
A &= 54.08\left[-\frac{25 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{2 \times 60}{3} + \frac{60^3}{256} + \frac{19 \times 60^3}{384 \times 10^2} + \frac{60^5}{8,192 \times 10^2}\right)\right] \\
&\quad + 4.43\left[\frac{60 \times 10^2}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^6}{4,096 \times 10^4} + \frac{60^8}{262,144 \times 10^6}\right)\right] \\
B &= 54.08\left[-\frac{8 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3} \times 60^2}\left(\frac{2 \times 60}{3} + \frac{60^3}{256} + \frac{19 \times 60^3}{384 \times 10^2} + \frac{60^5}{8,192 \times 10^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{8 \times 10}{6.75 \times 10^{-2}}\left(60 + \frac{60 \times 10^2}{3} + \frac{60^3}{192} - \frac{60^5}{2,048 \times 10^2}\right)\right] \\
&\quad + 4.43\left[\frac{8 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^6}{4,069 \times 10^4} + \frac{60^8}{262,144 \times 10^6}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{8 \times 10}{6.75 \times 10^2}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^{15}}{419,430 \times 10^6}\right)\right] \\
&\Rightarrow H = -13.18\text{kN}
\end{aligned}$$

काट D लें। वह x दूरी पर शिखर C से मापा गया है। बंकन आघूर्ण का व्यंजक मेहराब के दाएँ खंड DB पर बलों का साम्य लेकर प्राप्त होता है। चूँकि आघूर्ण काट D पर लिया गया है, अपरूपण और अभिलंब बल आघूर्ण उत्पन्न नहीं करते।

$$M_x = \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) + H(h - y)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समीकरण 32.27 से y का मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right)^2 - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right) + H\left(h - \frac{4hx^2}{L^2}\right) \\ &= -\frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4}-x^2\right) + Hh\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) \\ &= -\frac{2w}{L^2}\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) + Hh\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) \\ &= \left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)\times\left(Hh-\frac{2w}{L^2}\right) \end{aligned}$$

अतः आघूर्ण भी परवलयी है। शिखर पर आघूर्ण केवल $x=0$ रखने से मिलता है

$$M_C = \left(Hh - \frac{2w}{L^2}\right) = \left(-13.18\times 10 - \frac{2\times 25}{60^2}\right) = -131.81\text{kNm}$$

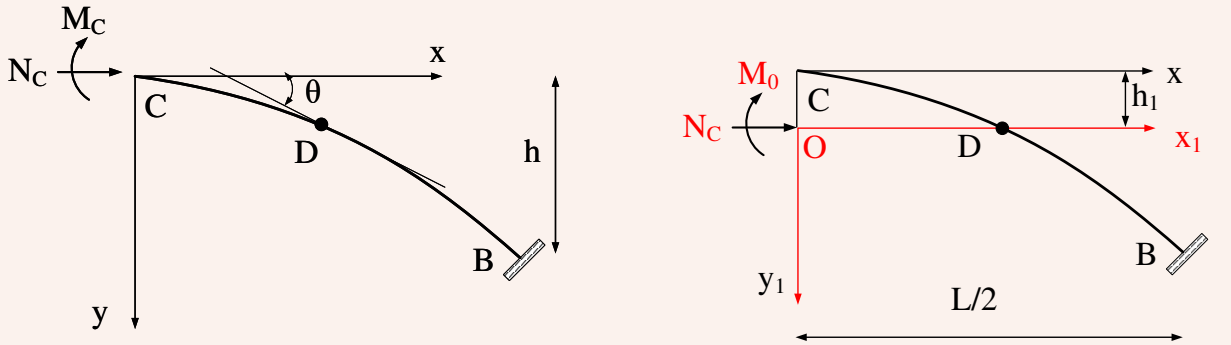
जब $x = L/2$ हो, आलंब आघूर्ण 0 प्राप्त होता है। जब $x = L/4$ हो, तो चतुर्थांश-बिंदु का आघूर्ण पूर्ववर्ती समीकरण से मिलता है

$$M_{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\left(Hh - \frac{2w}{L^2}\right) = -98.86\text{kNm}$$

स्पष्ट है कि बंकन आघूर्ण में प्रणोद का योगदान w के योगदान से अधिक प्रमुख है।

32.3.2 सममित भार वाला आबद्ध मेहराब

[60] मेहराब के किसी भी काट पर बंकन आघूर्ण, अपरूपण बल और अभिलंब बल को अतिरिक्त अज्ञात माना जा सकता है। किंतु यदि मेहराब सममित हो तो शिखर का अनुप्रस्थ काट लाभप्रद है और उसी पर विचार करना चाहिए। आगे, यदि भारण सममित तथा वितरित भी हो, तो शिखर पर अपरूपण बल लुप्त हो जाता है और अंततः केवल दो अतिरिक्त अज्ञात बचते हैं। ये बंकन आघूर्ण M_C तथा शिखर-काट का अभिलंब बल हैं, जैसा चित्र 32.7 में दर्शाया गया है।



चित्र 32.7: किलकरहित परवलयी मेहराब; मुक्त-पिंड आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[61] पुनः Castigliano का प्रमेय (समीकरण 48.36) उपयोग करने पर, सममिति के कारण C पर स्थानांतरण और घूर्णन शून्य हैं। अतः दोनों अतिरिक्त बलों का मूल्यांकन किया जा सकता है

$$\theta_C = \frac{\partial U^*}{\partial M_C} = 2\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_C}ds = 0 \tag{32.31}$$

$$\Delta_C = \frac{\partial U^*}{\partial N_C} = 2\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial N_C}ds + 2\int_0^l \frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial N_C}ds \tag{32.32}$$

जहाँ l मेहराब CB की लंबाई है, अर्थात् संपूर्ण मेहराब-अक्ष की आधी लंबाई। ध्यान दें कि दाएँ पक्ष शून्य हैं, क्योंकि सममिति के कारण संगत विस्थापन/घूर्णन शून्य हैं।

[62] लागू भारों से मेहराब के किसी काट पर उत्पन्न आघूर्ण और अभिलंब बल को क्रमशः M_o तथा N_o मानें। तब एक सामान्य अनुप्रस्थ काट D पर कुल आघूर्ण और अक्षीय बल इस प्रकार व्यक्त किए जा सकते हैं

$$M = M_C + N_C y + M_o \tag{32.33}$$

$$N = N_C \cos\theta + N_o \tag{32.34}$$

समीकरण 32.33 का M_C के सापेक्ष अवकलन करने पर:

$$\frac{\partial M}{\partial M_C} = 1$$

दोनों समीकरणों 32.33 तथा 32.34 का अवकलन करने पर

$$\frac{\partial M}{\partial N_C} = y \tag{32.35}$$

$$\frac{\partial N}{\partial N_C} = \cos\theta \tag{32.36}$$

समीकरणों 32.31 तथा 32.32 में प्रतिस्थापन करने पर

$$\int_0^l \frac{1}{EI}(M_C + N_C y + M_o)ds = 0 \Rightarrow M_C\int_0^l \frac{ds}{EI} + N_C\int_0^l \frac{yds}{EI} = \int_0^l \frac{M_o}{EI}ds \tag{32.37}$$

$$\int_0^l \frac{M_C + N_c y + M_o}{EI}yds = \int_0^l \frac{N_C\cos\theta + N_o}{AE}\cos\theta ds = 0$$

$$\Rightarrow M_C\int_0^l \frac{y}{EI}ds + N_C\int_0^l \frac{y^2}{EI}ds + N_C\int_0^l \frac{\cos^2\theta}{AE}ds = -\int_0^l \frac{M_o y}{EI}ds - \int_0^l \frac{N_o\cos\theta}{AE}ds \tag{32.38}$$

[63] समीकरण 32.37 तथा 32.38 कुछ कठिन हैं। इन्हें और सरल करने के लिए यदि शिखर C का मूलबिंदु बिंदु C पर, h_1 दूरी से शिखर C के सापेक्ष, ले जाएँ, तो बिंदु O के संदर्भ में नई कोटि $y_1 = (y - h_1)$ हो जाती है।

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[64] दूरी इस प्रकार चुनी जाती है कि वह निम्न प्रतिबंध को संतुष्ट करे

$$\int_0^l \frac{y_1}{EI} ds = \int_0^l \frac{y - h_1}{EI} ds = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{\int_0^l \frac{y_1}{EI} ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}}$$

इस प्रकार परिभाषित बिंदु O को मेहराब का प्रत्यास्थ केंद्र कहते हैं।

[65] यदि बिंदु O को निर्देशांकों का मूलबिंदु लें, तो y के लिए समीकरण 32.37 तथा 32.38 में $(y1 - h_1)$ प्रतिस्थापित किया जाता है। ऐसी स्थिति में $\int_0^l (y_1/EI) ds$ शून्य हो जाता है। तत्पश्चात आघूर्ण और अभिलंब बल के परिणामी व्यंजक इस प्रकार दिए जा सकते हैं

$$M_{oo} = M_C + H_{oo} h_1 = \frac{\int_0^l \frac{M_o}{EI} ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}} \tag{32.39}$$

$$H_{00} = N_C = \frac{\int_0^l \frac{M_o y_1}{EI} ds + \int_0^l \frac{N_o \cos\theta}{AE} ds}{\int_0^l \frac{y_1^2}{EI} ds + \int_0^l \frac{\cos^2\theta}{AE} ds} \tag{32.40}$$

32.3.2.1 उदाहरण 32.8: किलकरहित परवलयी मेहराब

40 m विस्तृति वाले सममित परवलयी मेहराब के शिखर पर बंकन आघूर्ण और अक्षीय बल निर्धारित करने हैं। मेहराब अपनी संपूर्ण विस्तृति में एकसमान वितरित भार w, जिसका मान 20kN/m है, के अधीन है। मेहराब का उत्कर्ष 8 m है। $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2, $I = 1,5 \times 10^{-4}$ m^4, तथा $A = 7.5 \times 10^{-2}$ m^2 है। प्रत्यास्थ केंद्र शिखर से 1m नीचे है। परवलयी मेहराब का समीकरण है

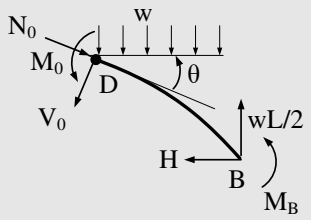
$$y = \frac{4hx^2}{L^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8hx}{L^2} \tag{32.41}$$

और

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx \tag{32.42}$$

लागू भार वाला आबद्ध मेहराब चित्र में दर्शाया गया है। विमाओं और भारण दोनों की सममिति के कारण आलंबों पर आबद्ध-छोर आघूर्ण बराबर और विपरीत हैं; क्षैतिज प्रणोद भी ऐसे ही हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



पहले विभिन्न बलों के व्यापक व्यंजक बनाए जाते हैं और फिर उनके परिमाणों के मूल्यांकन हेतु विशिष्ट मान प्रतिस्थापित किए जाते हैं। अब, $M_A = M_B = M^F$ (जहाँ M^F आलंबों का आबद्ध-छोर आघूर्ण है); इसी प्रकार $H_A = H_B = H$। $C, \sum M = 0$ के परितः बलों के आघूर्ण लेने पर

$$-M_B - \frac{wL}{2}\frac{L}{2} + \frac{wL}{2}\frac{L}{4} + Hh = 0 \quad \text{or} \quad -M_B - \frac{wL^2}{8} + Hh = 0$$
$$Hh = M_B + \frac{wL^2}{8} \quad \text{or} \quad H = \frac{1}{h}\left(M_B + \frac{wL^2}{8}\right) \tag{32.43}$$

किसी भी काट पर बंकन आघूर्ण M_0

$$\begin{aligned} M_0 &= -M_B - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) + w\frac{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2}{2} + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{4} + \frac{wLx}{2} + \frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4} - Lx + x^2\right) + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{4} + \frac{wLx}{2} + \frac{wL^2}{8} - \frac{wLx}{2} + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{8} + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) = -\left(M_B + \frac{wL^2}{8}\right) + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) \end{aligned}$$

समीकरण 32.43 और 32.41 का उपयोग करके M_0 को पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\begin{aligned} M_0 &= -Hh + \frac{wx^2}{2} + H_B\left(h - \frac{4hx^2}{L^2}\right) \\ &= \frac{wx^2}{2} - \frac{4Hh}{L^2}x^2 \,(\because H_B = H) = x^2\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right) \end{aligned} \tag{32.44}$$

मुक्त-पिंड DB पर अनुप्रस्थ काट D में कार्य करने वाले बल

$$N_O = w\left(\frac{L}{2} - x\right)\cos\theta$$

M_0 को समीकरण 32.39 में प्रतिस्थापित करने पर

$$M_{OO} = \frac{\int_0^l \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2 ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}} \tag{32.45}$$

ds को समीकरण 32.42 से प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{aligned} M_{oo} &= -\frac{\int_0^{L/2}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2\sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx}{\int_0^{L/2}\sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx} \\ &= \frac{\left(4whL - \frac{32Hh^2}{L}\right)\left\{\alpha_1\left(\frac{1}{32} + \frac{L^2}{1024h^2}\right) - \frac{\alpha_2 L^5}{32{,}768h^4}\right\}}{\frac{2h}{L}\alpha_1 + \left(h + \frac{L^2}{16h}\right)\alpha_2} \end{aligned} \tag{32.46}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समीकरण 32.44 से M_o के मान, $y_1 = (y - h_1)$, तथा समीकरण 32.42 से ds को समीकरण 32.40 में प्रतिस्थापित करने पर

$$H_{oo} = \frac{\int_0^{L/2} \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right) x^2 (y - h_1) \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{w\left(\frac{L}{2} - x\right)\cos^2\theta}{AE} \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx}{\int_0^{L/2} \frac{(y-h_1)^2}{EI} \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{\cos^2\theta}{AE} \sqrt{\left(1 + \frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx} \tag{32.47}$$

अब मेहराब की सूक्ष्म लंबाई के लिए,

$$\cos\theta = \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta = \left[1 + \left(\frac{8hx^2}{L^2}\right)^2\right] \tag{32.48}$$

$\cos^2\theta$ का मान समीकरण 32.47 में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$H_{oo} = \frac{\int_0^{L/} \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right) x^2 (y - h_1) \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{w\left(\frac{L}{2} - x\right)}{AE} 1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx}{\int_0^{L2} \frac{1}{EI}\left(\frac{4hx^2}{L^2} - h_1\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{1}{AE} 1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} dx} \tag{32.49}$$

$$H_{oo} = -\frac{\begin{array}{l}\frac{1}{I}\left\{\alpha_1\left[\left(\frac{4wh}{L^2} - \frac{8h^2h_1}{L^2}\right)\left\{\frac{4h}{L^2}\left(\frac{L^5}{192} + \frac{L^7}{12,288h^2} - \frac{L^9}{65,536h^2} + \frac{L^9}{131072h^4}\right)\right.\right. \\ \left. -h_1\left(\frac{L^3}{32} + \frac{L^5}{1,024h^2}\right)\right\} - \frac{wL^2I}{8Ah}\Big] + \alpha_2\left\{\left(\frac{4wh}{L^2} - \frac{8h^2h_1}{L^2}\right)\right. \\ \left.\left(\frac{L^{10}}{1,033,576h^5} + \frac{L^8h_1}{32,768h^4}\right)\right\}\Big\} + \alpha_3\frac{wL^3}{16Ah}\end{array}}{\begin{array}{l}\frac{1}{I}\left\{\alpha_1\left\{\frac{8h^3}{3L^3}\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^4}{64h^2}\right) - \frac{1}{8Lh^2}\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^4}{64h^2}\right) + \frac{L^3}{1,024h^4} + \frac{2hh_1}{L}\right\}\right. \\ \left. +\alpha_2\left\{\frac{L^{12}}{4,134,034h^6} + \frac{L^4}{64h^2}\right\}\right\} + \frac{L^2}{8Ah}\alpha_3\end{array}} \tag{32.50}$$

जहाँ

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}$$

$$\alpha_2 = \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}\right)$$

$$\alpha_3 = \ln\left\{\frac{8h}{L^2}\left(\frac{L}{2} + \alpha_1\right)\right\}$$

समीकरण 32.50 में H_{oo} मेहराब की विमाओं और ज्यामितीय गुणधर्मों, उसकी विस्तृति तथा भारण पर निर्भर करता है। दिए गए मानों को समीकरण 32.47 में प्रतिस्थापित करके H_{oo} का मूल्यांकन किया जा सकता है। H_{oo} निर्धारित

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

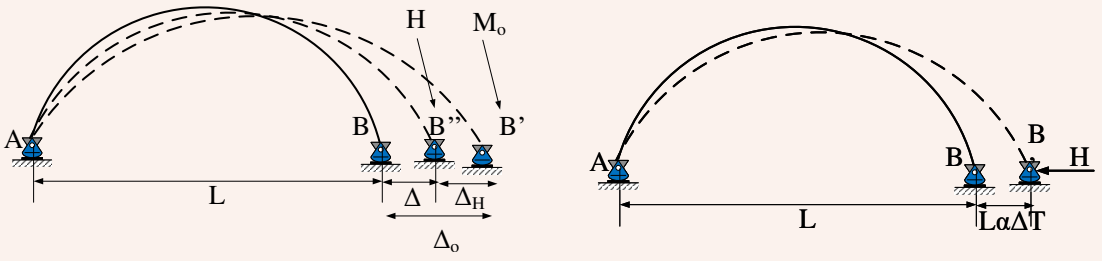
होने पर, उसे उपर्युक्त समीकरण 32.46 में उपयोग करके प्रत्यास्थ केंद्र का आघूर्ण M_{oo} निर्धारित होता है। सभी दिए गए मानों के साथ, समीकरण 32.50 में दिया गया H_{oo} का व्यंजक है

$$\begin{aligned}
H_{oo}\frac{1}{1.5\times10^{-4}}\Bigg\{32.02\Bigg[\Big(\frac{4\times20\times8}{40^2}-\frac{8\times8^2\times1}{40^2}\Big)\Bigg\{\frac{4\times8}{40}\Big(\frac{40^5}{192}+\frac{40^7}{12288h^2}\\
-\frac{40^9}{65536\times8^2}+\frac{40^5}{131072\times8^4}\Big)-1\Big(\frac{40^3}{32}+\frac{4}{1024\times8^2}\Big)\Bigg\}\\
-\frac{20\times40^2\times1.5\times10^{-4}}{8\times8\times7.5\times10^{-2}}\Bigg]+3.95\Bigg\{\Big(\frac{4\times20\times3}{40^2}-\frac{8\times8^2\times1}{40^2}\Big)\\
\Big(\frac{40^{10}}{1033576\times8^5}+\frac{40^8\times1}{32768\times8^4}\Big)\Bigg\}\Bigg\}+\frac{0.733\times20\times40^3}{16\times8\times7.5\times10^{-2}}\\
=-\frac{}{\frac{1}{1.5\times10^{-4}}\Bigg\{32,02\Bigg\{\frac{8\times8^3}{3\times40^3}\Big(\frac{40^2}{4}+\frac{40^4}{64\times8^2}-\frac{1}{8\times40\times8^2}\Big(\frac{40^2}{4}+\frac{40^4}{64\times8^2}\Big)\\
+\frac{40^3}{1024\times8^4}+\frac{2\times8\times1}{40}\Bigg\}+3.95\Bigg\{\frac{40^{12}}{4134034\times8^6}+\frac{40^4}{64\times8^2}\Bigg\}\Bigg\}+\frac{40^2\times0.733}{8\times8\times7.5\times10^{-2}}\\
=32.08\text{kN}
\end{aligned}\tag{32.51}$$

अंततः, H_{oo} का मान समीकरण 32.46 में प्रतिस्थापित करने पर आघूर्ण

$$\begin{aligned}
M_{oo}&=-\frac{\Big(4\times20\times8\times40-\frac{32\times32.08\times8^2}{40}\Big)\Big\{32.02\Big(\frac{1}{32}+\frac{40^2}{1024\times8^2}\Big)-\frac{3.95\times40^5}{32768\times8^4}\Big\}}{\frac{2\times8}{40}\times32.02+\Big(8+\frac{40^2}{16\times8}\Big)3.95}\\
&=314.98\text{kNm}
\end{aligned}$$

32.3.3 नींव अवतलन और तापमान के प्रभाव



(a) आरंभिक विस्थापन (b) तापमान का प्रभाव

चित्र 32.8: आरंभिक अवतलन और तापमान-परिवर्तन का प्रभाव

आलंब-झुकाव

66 अब आलंबों के अवतलन, गति अथवा झुकाव का H के मान पर प्रभाव देखें। चित्र 32.8a में दो-किलक मेहराब AB दर्शाया गया है। छोर B को रोलर पर आलंबित किया गया है। इसे प्राथमिक मेहराब कहते

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हैं। बाह्य भार के अधीन प्राथमिक संरचना का आलंब B, B' तक जाता है। किसी बाह्य भार के कारण प्राथमिक संरचना का आघूर्ण M_0 मानें।

67 इकाई आभासी कृषैतिज बल[1] लगाने से आभासी आघूर्ण $\delta\overline{M} = 1 \times y$ उत्पन्न होता है, जहाँ y उस काट पर मेहराब का उत्कर्ष है जहाँ आघूर्ण की गणना की जाती है। तब मेहराब में विस्थापन

$$\begin{aligned}(1)BB' = (1)\Delta_o &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}ds \\ &= \int y\frac{M_o}{EI}ds\end{aligned}$$

68 यदि मेहराब पर लगाए गए कृषैतिज बल का परिमाण H है, तो यह बल आघूर्ण $M = Hy$ उत्पन्न करता है। H के कारण कृषैतिज विस्थापन

$$\begin{aligned}B'B'' = \Delta_H &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}ds \\ &= \int y\frac{Hy}{EI}ds = H\int \frac{y^2}{EI}ds\end{aligned}$$

69 मानें कि आलंब Δ मात्रा से झुकता है, अर्थात् वह B से B' तक जाता है। तब

$$\begin{aligned}\Delta_H = H\int y^2\frac{ds}{EI} &= \Delta_0 - \Delta \\ &= \int y\frac{M_o}{EI}ds - \Delta \\ \Rightarrow H &= \frac{\int y\frac{M_o}{EI}ds - \Delta}{\int \frac{y^2}{EI}ds}\end{aligned}$$

70 यदि आलंब प्रत्यास्थ हो और आलंब-स्तर पर इकाई कृषैतिज बल के कारण k से झुके, तो $\Delta = k_s H$। इस स्थिति में,

$$\begin{aligned}\Delta_H = H\int y^2\frac{ds}{EI} &= \Delta_0 - \Delta \\ = H\int y^2\frac{ds}{EI} &= \int y\frac{M_o}{EI}ds - k_s H \\ \Rightarrow H &= \frac{\int y\frac{M_o}{EI}ds}{\int \frac{y^2}{EI}ds + k_s}\end{aligned} \tag{32.52}$$

[1]इस अनुभाग में परवलयी मेहराबों के लिए अब तक प्रयुक्त Castigliano विधि के स्थान पर आभासी बल विधि प्रयुक्त होगी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तापमान

71 अब चित्र 32.8b में दर्शाए गए दो-किलक मेहराब के क्षैतिज बल पर तापमान-परिवर्तन का प्रभाव देखें। मानें कि मेहराब का तापमान ΔT बढता है। तापमान बढने पर छोरों को बाहर जाने से रोकने के लिए छोरों के किलक मेहराब पर क्षैतिज प्रणोद लगाएँगे।

72 इस क्षैतिज प्रणोद के कारण मेहराब के सभी काटों पर बंकन आघूर्ण होगा। आलंब B के किलक को रोलर से बदलते हैं। तब B, स्थिति B' तक बाहर जाता है। तब

$$BB' = L\alpha\Delta T$$

जहाँ L मेहराब की विस्तृति और α तापीय प्रसार गुणांक है।

73 तापमान-वृद्धि से उत्पन्न क्षैतिज प्रणोद H मानें, जहाँ वृद्धि ΔT है। यह क्षैतिज बल H मेहराब को उसकी मूल स्थिति में लौटाता है, अर्थात् यह छोर B' को B पर वापस लाने में सहायक है। तब Castigliano के प्रमेय से

$$\frac{dU^*}{dH} = L\alpha\Delta T$$

जहाँ U^* विकृति ऊर्जा है

$$U^* = \int \frac{M^2}{2EI} ds$$

इस स्थिति में आघूर्ण $M = -Hy$ से दिया जाता है; अतः

$$\begin{aligned} & M = -Hy \\ \Rightarrow \quad & L\alpha\Delta T = \frac{dU}{dH} = \int \frac{d}{dH}\left(\frac{M^2}{2EI}\right) ds = \int \frac{M}{EI}\frac{dM}{dH} ds \\ & = \int (-Hy)(-y)\frac{ds}{EI} = H\int y^2 \frac{ds}{EI} \\ & \Rightarrow H = \frac{L\alpha\Delta T}{\int y^2 \frac{ds}{EI}} \end{aligned} \tag{32.53}$$

यह समीकरण मेहराब में तापमान-परिवर्तन के कारण क्षैतिज प्रणोद व्यक्त करता है।

74 यदि नींव के झुकाव और तापमान-परिवर्तन के प्रभावों को संयोजित करें, तो क्षैतिज प्रणोद समीकरण 32.52 तथा 32.53 से प्राप्त किया जा सकता है

$$H = \frac{\int M_o y \frac{ds}{EI} + L\alpha\Delta T}{\int y^2 \frac{ds}{EI} + k_s} \tag{32.54}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

32.3.3.1 उदाहरण 32.9: परवलयी मेहराब पर तापीय भार

50 m विस्तृति और 5 m उत्कर्ष वाला दो-किलक परवलयी मेहराब शिखर पर 50 kN केंद्रित भार वहन करता है। मेहराब का प्रत्यास्थ आलंब 0.0002 m/kN से झुकता है। दिया है कि $E = 200$ kN/mm^2, $I = 8^9$ mm^4, तथा $\alpha = 20xlO^{-6}/°C$; तापमान 20°C बढ़ने पर क्षैतिज प्रणोद का मूल्यांकन करना है। बाएँ आलंब को मूलबिंदु लेने पर परवलयी मेहराब का समीकरण है

$$y = \frac{4hx(L-x)}{L^2} = \frac{4\times 5\times x\times (L-x)}{50^2} = \frac{x(50-x)}{125}$$

$$\int_0^{50} y^2 ds = \int_0^{50} \frac{x^2(50-x)^2}{125^2} = \frac{1}{125^2}\int_0^{50} \left(2500x^2 - 100x^3 + x^4\right) dx$$

$$= \frac{1}{125^2}\left[2500\frac{x^3}{3} - 100\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{50} = 666.67$$

बीम आघूर्ण, $M_o = 25x$

$$\int_0^L M_o y \frac{dx}{EI} = 2\int_0^{25} 25x\frac{x}{125}(50-x)\frac{dx}{EI}$$

$$= \frac{2}{5EI}\int_0^{25} \left(50x^2 - x^3\right) dx = \frac{2}{5EI}\left[50\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{25} = \frac{65,104.17}{EI}$$

अब, $EI = 200\times 10^6 \times 8\times 10^9 \times 10^{-12} = 1,600,000\text{kNm}^2$। समीकरण 32.54 में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$H = \frac{\frac{65,104.17}{1,600,000} + 25\times 20\times 10^{-6}\times 20}{\frac{666.67}{1,600,000} + 0.0002} = 92.43\text{kN}$$

32.4 वक्र बीम

[75] इस अनुभाग की समस्याएँ Gerstle, 1974 *Basic Structural Analysis* में दी गई समस्याओं से प्रेरित हैं।

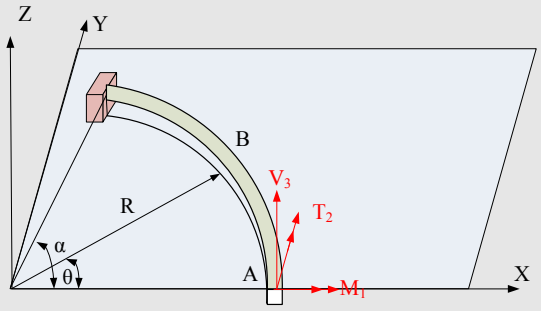
32.4.1 धनुष गर्डर

[76] धनुष गर्डर वस्तुतः समतल में स्थित वह वक्र बीम है जिस पर समतल के लंबवत भार लगता है। वह अपरूपण, आघूर्ण तथा मरोड़ के अधीन होगी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

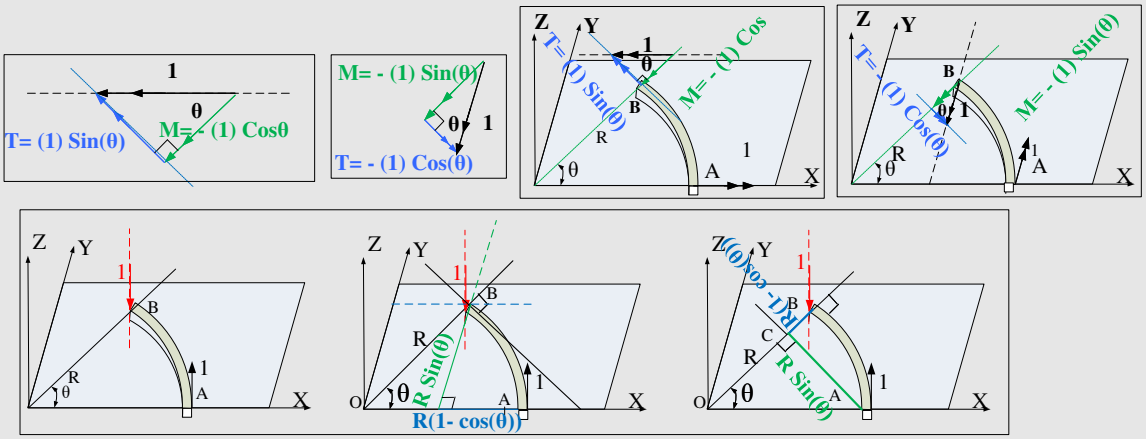
32.4.1.1 उदाहरण 32.10: धनुष गर्डर

त्रिज्या R और कोण α वाले वृत्तीय बॉक्स-गर्डर का नम्यता आव्यूह व्युत्पन्न करना है। मेहराब एक छोर पर जकड़ा और दूसरे पर मुक्त है (पूर्ववर्ती समस्या से साम्य ध्यान देने योग्य है)।



A पर लगाए गए इकाई बाह्य आघूर्ण अथवा मरोड के कारण आघूर्ण और मरोड ज्यामिति से सरलता से प्राप्त किए जा सकते हैं। अतः A पर बाह्य रूप से लगाए गए इकाई बल के लिए दोनों आघूर्ण-भुजाएँ ज्यामिति से निर्धारित करनी हैं। सावधान: दाएँ चित्र का उपयोग करें; बायाँ चित्र त्रुटिपूर्ण है, यद्यपि उससे सही परिणाम मिलते हैं।

$$
\begin{aligned}
AC &= R\sin(\theta) \\
M &= (1)R\sin(\theta) \\
BC &= R(1-\cos(\theta)) \\
T &= (1)R\,(1-\cos(\theta))
\end{aligned}
$$



स्वातंत्र्य-कोटि:	$i=1$	$i=2$	$i=3$
	M_A=1	$T_A=1$	$V_A=1$
$V_i(\theta)$	0	0	-1
$M_i(\theta)$	-cos θ	$-\sin\theta$	-Rsin(θ)
$T_i(\theta)$	sin θ	$-\cos\theta$	$R(1-\cos(\theta))$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तब हम निम्न का उपयोग करेंगे

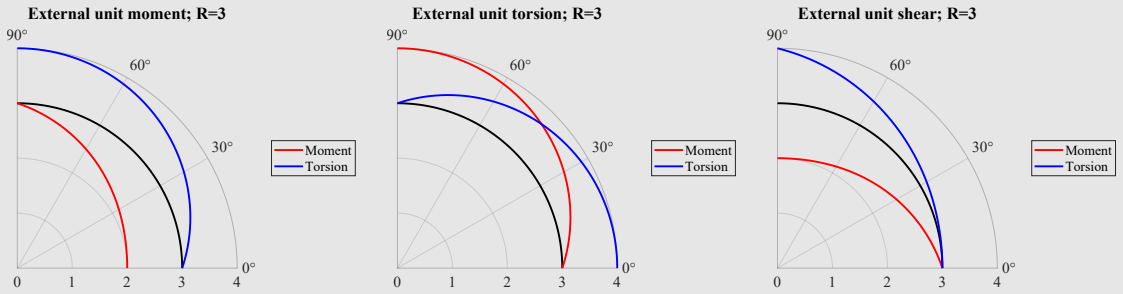
$$d_{ij} = \int_0^\alpha \delta\overline{M}_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_i(\theta)\frac{T_j(\theta)}{EI}Rd\theta$$

जहाँ $1 \le i, j \le 3$, अर्थात् हम पंक्ति 2 अथवा 4 पर संक्रिया करते हैं। अतः (d_{x3} के चिह्न बदले गए हैं; समाकलन के परिणाम त्रुटिपूर्ण हो सकते हैं):

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_1}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta T_1\frac{T_1}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{\sin\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{12} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\frac{\sin^2\alpha}{2} \\
d_{13} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \cos\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha + \cos^2\alpha\right) \\
d_{22} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\sin\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{23} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(-\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{33} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_3\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_3\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha R\sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha R(1-\cos\theta)\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R^2}{GJ}\left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)
\end{aligned}$$

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



और निम्न का अवलोकन करें

	बाह्य इकाई					
	आघूर्ण		मरोड़		बल	
आंतरिक बल	आरंभ	अंत	आरंभ	अंत	आरंभ	अंत
आघूर्ण	1	0	0	1	0	1
मरोड़	0	1	1	0	0	1

32.4.2 कुंडलित बीम

Gerstle, 1974 *Basic Structural Analysis* से अनुकूलित।

32.4.2.1 ज्यामिति

77 आकाशी संरचनाओं (चित्र 32.9) की ज्यामिति जटिल हो सकती है, इसलिए आंतरिक बल निर्धारित करने के लिए सदिश विश्लेषण[2] का सहारा लेना आवश्यक है।

78 सामान्यतः किसी भी काट पर छह आंतरिक परिणामक (बल और आघूर्ण) कार्य करते हैं।

$$x = f_1(\theta); \qquad y = f_2(\theta); \qquad z = f_3(\theta) \tag{32.55}$$

79 वैश्विक निर्देशांक तंत्र को $X-Y-Z$ से और उसके इकाई सदिशों को[3] $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ से दर्शाते हैं। जिस काट पर आंतरिक बल चाहिए उसे काटकर प्रमुख अक्षों की पहचान $N-S-W$ के रूप में की जाती है; ये क्रमशः अभिलंब बल तथा प्रबल और दुर्बल अक्षों के सापेक्ष बंकन-अक्षों के अनुरूप हैं। संगत इकाई सदिश $\mathbf{n},\mathbf{s},\mathbf{w}$ हैं (चित्र 32.10)।

80 किसी भी काट पर इकाई अभिलंब सदिश (जो वक्र की स्पर्शरेखा है) निम्न से दिया जाता है

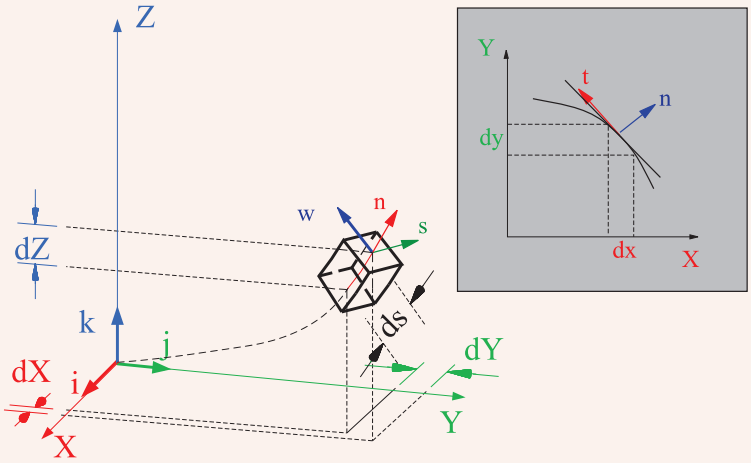
$$\mathbf{n} = \frac{dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}}{ds} = \frac{dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}} \tag{32.56}$$

[2]जिससे आपका आरंभिक चरण में ही परिचय हो चुका है, किंतु यांत्रिकी में अब तक उसका उपयोग बहुत कम हुआ है!
[3]सभी सदिश राशियाँ मोटे अक्षर से दर्शाई गई हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 32.9: Louvre संग्रहालय (Paris) की सर्पिल सीढ़ी और Sagrada Familia गिरजाघर (Barcelona)



चित्र 32.10: आकाश में वक्र संरचना की ज्यामिति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

81 प्रमुख बंकन-अक्षों को परिभाषित करना आवश्यक है। यदि प्रबल बंकन-अक्ष XY तल के समांतर अथवा क्षैतिज हो (जैसा गुरुत्वीय भार में सामान्यतः होता है), तो यह अक्ष N तथा Z दोनों अक्षों के लंबवत है और उसका इकाई सदिश है

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} \times \mathbf{k} \tag{32.57}$$

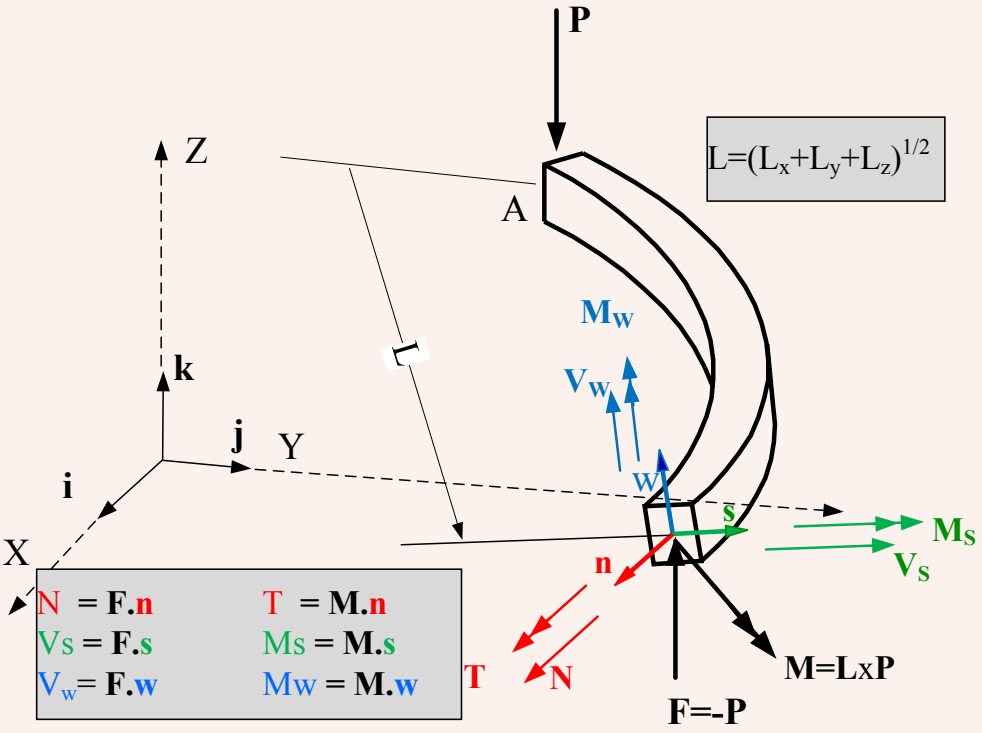
82 दुर्बल बंकन-अक्ष N और S दोनों के लंबवत है; अतः उसका इकाई सदिश निम्न से निर्धारित होता है

$$\mathbf{w} = \mathbf{n} \times \mathbf{s} \tag{32.58}$$

ध्यान दें कि यहाँ तक $\mathbf{n}$ तथा $\mathbf{s}$ दोनों को इकाईकृत किया जा चुका है।

32.4.2.2 साम्य

83 साम्य समीकरणों के लिए मुक्त-पिंड आरेख (चित्र 32.11) पर विचार करते हैं।



चित्र 32.11: आकाश में वक्र संरचना का मुक्त-पिंड आरेख

84 लागू भार $\mathbf{P}$ बिंदु A पर कार्य करता है। परिणामी बल-सदिश $\mathbf{F}$ और परिणामी आघूर्ण-सदिश $\mathbf{M}$, जो काटे गए अनुभाग B पर कार्य करते हैं, साम्य से निर्धारित होते हैं

$$\Sigma \mathbf{F} = 0; \quad \mathbf{P} + \mathbf{F} = 0; \quad \mathbf{F} = -\mathbf{P} \tag{32.59}$$

$$\Sigma \mathbf{M}^B = 0; \quad \mathbf{L} \times \mathbf{P} + \mathbf{M} = 0; \quad \mathbf{M} = -\mathbf{L} \times \mathbf{P} \tag{32.60}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ **L**, B से A तक आघूर्ण-भुजा सदिश है। अक्षीय और अपरूपण बल N, V_s तथा V_w, बल-सदिश **F** के क्रमशः N, S और W अक्षों के अनुदिश तीन घटक हैं और उपयुक्त इकाई सदिशों से अदिश गुणनफल लेकर ज्ञात किए जा सकते हैं:

$$N = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$$
$$V_s = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$$
$$V_w = \mathbf{F}\cdot\mathbf{w}$$

85 इसी प्रकार मरोड़ी और बंकन आघूर्ण T, M_s तथा M_w भी आघूर्ण-सदिश **M** के घटक हैं और निम्न से निर्धारित होते हैं

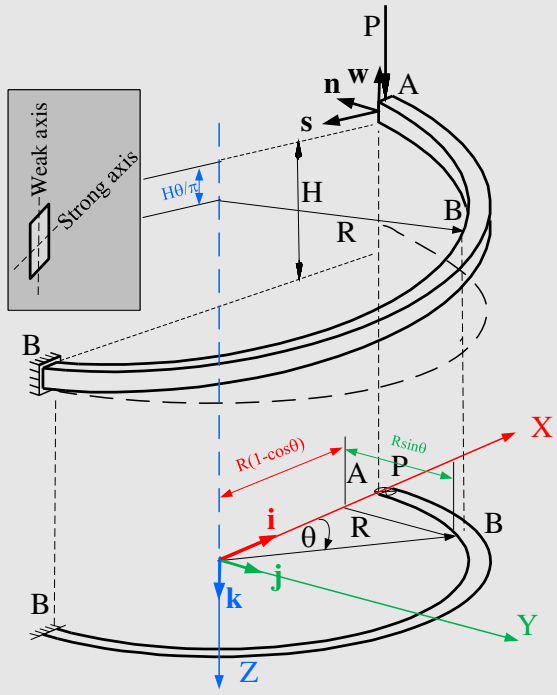
$$T = \mathbf{M}\cdot\mathbf{n}$$
$$M_s = \mathbf{M}\cdot\mathbf{s}$$
$$M_w = \mathbf{M}\cdot\mathbf{w}$$

86 अतः आंतरिक परिणामकों को निर्धारित करने की विधि उपलब्ध है। केंद्रित लागू भारों के लिए योग और वितरित भार के लिए समाकलन किया जाता है।

32.4.2.2.1 उदाहरण 32.11: कुंडलित मेहराब; बिंदु भार

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



कुंडलित कैंटिलीवर गर्डर के अनुदिश आंतरिक बल N, V_s तथा V_w और आंतरिक आघूर्ण T, M_s तथा M_w निर्धारित करने हैं, जो उसके मुक्त छोर पर ऊर्ध्वाधर भार P के कारण उत्पन्न होते हैं। पहले कोण θ के पदों में ज्यामिति निर्धारित करते हैं

$$x = R\cos\theta; \qquad y = R\sin\theta; \qquad z = \frac{H}{\pi}\theta \tag{32.61}$$

किसी भी बिंदु पर इकाई सदिश $\mathbf{n}$ निर्धारित करने के लिए अवकलज चाहिए:

$$dx = -R\sin\theta d\theta; \qquad dy = R\cos\theta d\theta; \qquad dz = \frac{H}{\pi}d\theta \tag{32.62}$$

और फिर समीकरण 32.56 में प्रतिस्थापित करते हैं

$$\mathbf{n} = \frac{-R\sin\theta\mathbf{i} + R\cos\theta\mathbf{j} + H/\pi\mathbf{k}}{\left[R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta + (H/\pi)^2\right]^{1/2}} = \underbrace{\frac{1}{\left[1 + (H/\pi R)^2\right]^{1/2}}}_{K}[-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} + (H/\pi R)\mathbf{k}]$$

चूँकि हर केवल ज्यामिति पर निर्भर करता है, उसे K से दर्शाएँगे।

प्रबल बंकन-अक्ष क्षैतिज तल में स्थित है; अतः उसका इकाई सदिश समीकरण 32.57 से निर्धारित किया जा सकता है:

$$\mathbf{n}\times\mathbf{k} = \frac{1}{K}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi R} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{32.63}$$

$$= \frac{1}{K}(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \tag{32.64}$$

और इस सदिश का निरपेक्ष परिमाण $|\mathbf{k}\times\mathbf{n}| = \frac{1}{K}$ है; अतः

$$\mathbf{s} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} \tag{32.65}$$

दुर्बल अक्ष के अनुदिश इकाई सदिश समीकरण 32.58 से निर्धारित होता है

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}\times\mathbf{n} = \frac{1}{K}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi R} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{K}\left(\frac{H}{\pi R}\sin\theta\mathbf{i} - \frac{H}{\pi R}\cos\theta\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

ज्यामिति की परिभाषा पूर्ण होने पर अब साम्य समीकरणों—समीकरण 32.59 तथा 32.60—का परीक्षण करते हैं।

$$\Sigma F = 0; \quad \mathbf{F} = -\mathbf{P}$$
$$\Sigma M_b = 0; \quad \mathbf{M} = -\mathbf{L}\times\mathbf{P}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ

$$\mathbf{L} = (R - R\cos\theta)\mathbf{i} + (0 - R\sin\theta)\mathbf{j} + \left(0 - \frac{\theta}{\pi}H\right)\mathbf{k} \tag{32.66}$$

और

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \mathbf{L}\times\mathbf{P} &= R\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (1-\cos\theta) & -\sin\theta & -\frac{\theta}{\pi}\frac{H}{R} \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix} \\ &= PR[-\sin\theta\mathbf{i} - (1-\cos\theta)\mathbf{j}]\end{aligned}$$

और

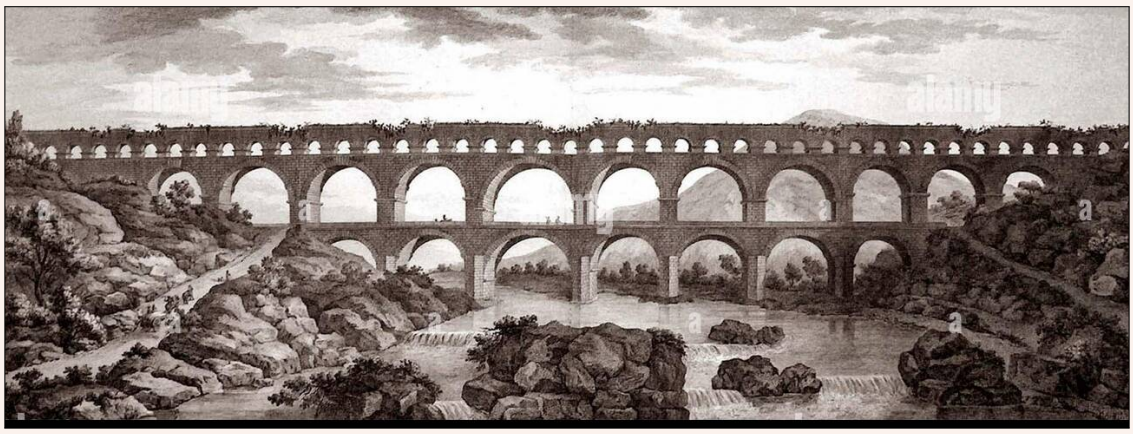
$$\mathbf{M} = PR[\sin\theta\mathbf{i} + (1-\cos\theta)\mathbf{j}] \tag{32.67}$$

बल $\mathbf{F} = -P\mathbf{k}$ और आघूर्ण $\mathbf{M}$ के घटक इकाई सदिशों के साथ उपयुक्त अदिश गुणनफल लेकर प्राप्त होते हैं

$$\begin{aligned} N &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -\frac{1}{K}P\frac{H}{\pi R} \\ V_s &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = 0 \\ V_w &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{w} = -\frac{1}{K}P \\ T &= \mathbf{M}\cdot\mathbf{n} = -\frac{PR}{K}(1-\cos\theta) \\ M_s &= \mathbf{M}\cdot\mathbf{s} = PR\sin\theta \\ M_w &= \mathbf{M}\cdot\mathbf{w} = \frac{PH}{\pi K}(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Pont du Gard, प्रथम (1वीं) शताब्दी CE, Nîmes, France।

मेहराब-निर्माण का उदाहरण, जिसमें मेहराब-खंडों की सटीक व्यवस्था भारों का कुशल संचरण करती है और बहुस्तरीय संरचना में स्थिरता तथा प्रणोद-वितरण सुनिश्चित करती है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

33 पट्टिकाएँ

सारांश

यह अध्याय पुस्तक का ध्यान एकविमीय अवयवों से पट्टिकाओं की ओर ले जाता है और उनके संगत अवकल समीकरण व्युत्पन्न करता है। सिद्धांत पर केंद्रित होकर पाठक को पट्टिकाओं की ज्यामितीय जटिलता तथा उनके नियामक अवकल समीकरणों की सुंदरता और सरलता—दोनों को समझने में सहायता देना इसका उद्देश्य है। परिमित अवयव विधि द्वारा पट्टिकाओं का प्रतिरूपण करने वाले प्रत्येक पाठक के लिए यह अध्याय आवश्यक है, क्योंकि इसमें सम्मिलित जटिल आंतरिक परिणामकों की पारस्परिक क्रिया स्पष्ट की गई है।

33.1 मोटी पट्टिका सिद्धांत: Reissner–Mindlin 1222
33.1.1 शुद्धगतिक संबंध 1222
33.1.2 संघटक संबंध 1224
33.1.3 साम्य 1225
33.2 पतली पट्टिका सिद्धांत: Kirchhoff . . . 1227
33.2.1 मूलभूत संबंध 1228
33.2.2 अवकल समीकरण 1229
33.2.3 प्रतिबल 1229
33.2.4 वृत्तीय पट्टिकाएँ 1233
33.2.5 परिवर्ती सूत्रीकरण 1238
33.3 सारांश 1239

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §10.3.2.5 देखें

निम्न अनुभाग Pilkey and Wunderlich, 1994 *Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods* से पुनरुत्पादित है। Georg, R., 2014 की सहायता के लिए कृतज्ञतापूर्वक आभार।

33.1 मोटी पट्टिका सिद्धांत: Reissner–Mindlin

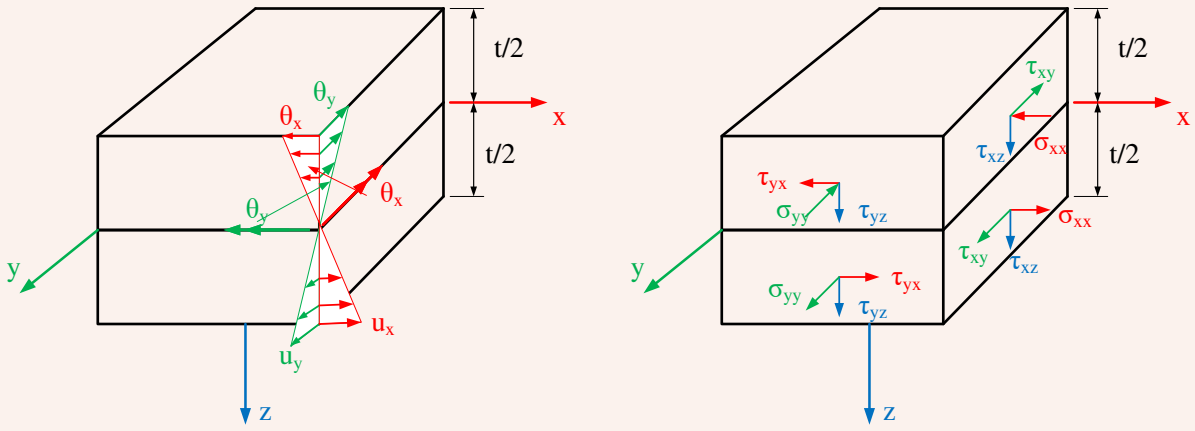
1 हम उस मोटी पट्टिका के व्यापक हल से आरंभ करते हैं जिसमें अपरूपण विरूपण उपस्थित हैं।

33.1.1 शुद्धगतिक संबंध

2 चित्र 33.1a से पाँच विस्थापन u, v, w, θ_{xx} तथा θ_{yy} हैं। किंतु तीन विस्थापनों में से दो, u और v, को पट्टिका के मध्य-पृष्ठ के घूर्णन θ_{xx} तथा θ_{yy} के पदों में व्यक्त किया जा सकता है; तीसरा विस्थापन अनुप्रस्थ विस्थापन w है।

3 हम परिमित अवयव में प्रयुक्त निर्देशांक-दिशाओं के अनुरूप संकेत-पद्धति के स्थान पर पट्टिका-बंकन की पारंपरिक संकेत-पद्धति अपनाएँगे। चूँकि हमारा ध्यान पतली पट्टिकाओं पर है, मध्य-पृष्ठ को विकृतिरहित

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) विस्थापन (b) प्रतिबल

चित्र 33.1: पट्टिका में विस्थापन और प्रतिबल

और समतल काटों को समतल बने रहने वाला माना जाएगा। समतल काट के समतल बने रहने की धारणा से प्राप्त होता है,

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \\ w \end{array} \right\} \tag{33.1}$$

4 किंतु पदार्थ-यांत्रिकी से संबंध ज्ञात है $\varepsilon = Lu$ अथवा

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\}}_{\mathbf{u}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5 चूँकि w मध्य-पृष्ठ के अनुप्रस्थ विक्षेप के अनुरूप है और z के साथ परिवर्तित नहीं होता, अतः $\varepsilon_{zz} = 0$। समीकरण 33.1 प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} z\theta_{xx,x} \\ z\theta_{yy,y} \\ 0 \\ z(\theta_{xx,y} + \theta_{yy,x}) \\ \hline (\theta_{xx} + w_{,x}) \\ (\theta_{yy} + w_{,y}) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} z\kappa_{xx} \\ z\kappa_{yy} \\ 0 \\ 2z\kappa_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} \tag{33.2}$$

ध्यान दें कि इस समीकरण में माना गया है कि विस्थापन w पट्टिका की मोटाई की तुलना में छोटा है और घूर्णन भी छोटा है। घूर्णन छोटा होने के कारण उसका वर्ग इकाई की तुलना में नगण्य है; अतः वक्रता

$$\kappa = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{(1+\theta^2)^{3/2}} \approx \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

घूर्णन के परिवर्तन-दर के बराबर है।

6 अतः पट्टिका के अनुप्रस्थ विस्थापन का शुद्धगतिक संबंध है

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \\ \hline w \end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$$

33.1.2 संघटक संबंध

7 त्रिविमीय संतति के लिए विकृति-प्रतिबल संबंध है

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \hline \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} = \frac{1}{E} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & \mathbf{0} & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ \hline & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \hline \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array}\right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[8] किंतु समीकरण 33.2 से $\varepsilon_{zz} = 0$। अतः अन्य प्रतिबलों की तुलना में बहुत छोटे σ_{zz} की उपेक्षा की जा सकती है। पूर्ववर्ती समीकरण का व्युत्क्रम लेने पर मिलता है

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\\ \hline \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & \nu & 0 & & \\ \nu & 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{0}$}} & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \hline \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{33.3}$$

ध्यान दें कि अपरूपण मापांक है $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

[9] अब आघूर्णों को वक्रताओं के पदों में लिखना है, चित्र 33.2।

[10] समीकरण 33.3 के प्रतिबलों को समीकरण 33.5 में प्रस्तुत करके और समीकरण 33.2 का उपयोग करके पहला पद व्युत्पन्न करते हैं

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z \mathrm{d}z = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) z \mathrm{d}z = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2}(z\kappa_{xx} + \nu z\kappa_{yy}) z \mathrm{d}z \\ &= \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 \mathrm{d}z = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}) \end{aligned}$$

अन्य दो पदों के लिए समान प्रक्रिया अपनाने पर निम्न आघूर्ण-वक्रता संबंध प्राप्त होता है

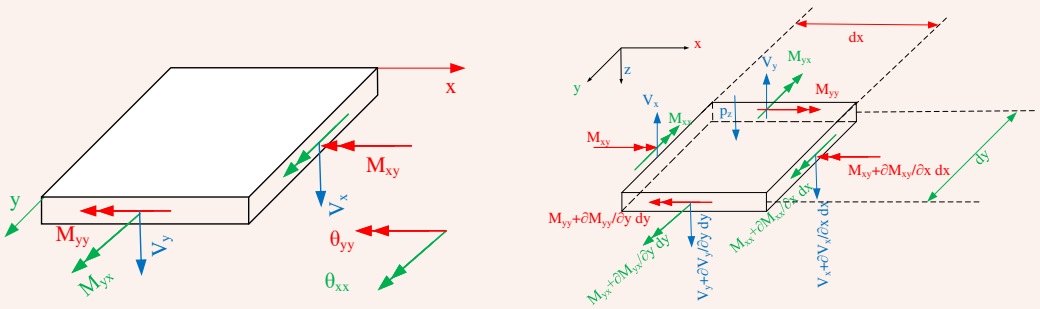
$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} \tag{33.4}$$

पद $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ को *आनमनी दृढता* कहते हैं और यह बीम की आनमनी दृढता EI के अनुरूप है (यदि पट्टिका की चौडाई इकाई हो और $\nu = 0$, तो $EI = Et^3/12$)।

33.1.3 साम्य

[11] धनात्मक प्रतिबल परिणामक चित्र 33.2a में और सूक्ष्म अवयव का मुक्त-पिंड आरेख चित्र 33.4 में दर्शाए गए हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) धनात्मक आघूर्ण और घूर्णन (b) पतली पट्टिका का मुक्त-पिंड आरेख

चित्र 33.2: आंतरिक परिणामक

12 प्रति इकाई चौड़ाई परिणामक निम्न से दिए जाते हैं

$$
\begin{aligned}
\text{झिल्ली बल} \quad \mathbf{N} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}z \quad \begin{cases} N_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx}\,\mathrm{d}z \\ N_{yy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy}\,\mathrm{d}z \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy}\,\mathrm{d}z \end{cases} \\
\text{बंकन आघूर्ण} \quad \mathbf{M} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} z\,\mathrm{d}z \quad \begin{cases} M_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z\,\mathrm{d}z \\ M_{yy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z\,\mathrm{d}z \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} z\,\mathrm{d}z \end{cases} \\
\text{अनुप्रस्थ अपरूपण बल} \quad \mathbf{V} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}z \quad \begin{cases} V_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz}\,\mathrm{d}z \\ V_y &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz}\,\mathrm{d}z \end{cases}
\end{aligned}
\tag{33.5}
$$

13 ध्यान दें कि पट्टिका सिद्धांत में *झिल्ली बलों* के प्रभाव की उपेक्षा की जाती है। उनका विचार कवचों में किया जाएगा।

14 सूक्ष्म अवयव $tdxdy$, जो लागू अनुप्रस्थ भार p_z के अधीन है, पर विचार करके साम्य समीकरण व्युत्पन्न किया जाता है। तीन साम्य समीकरणों पर विचार करना होगा, चित्र 33.4:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

z दिशा में बलों का योग

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial V_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + p_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

or

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + p_z = 0$$

x अक्ष के परितः आघूर्णों का योग

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - V_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

or

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - V_y = 0$$

y अक्ष के परितः आघूर्णों का योग

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - V_x = 0$$

15 चूँकि $M_{xy} = M_{yx}$, इन समीकरणों को आव्यूह रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ \hline V_x \\ V_y \end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ p_z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \tag{33.6}$$

ध्यान दें कि बायाँ आव्यूह L^T के अनुरूप है, जिसमें पद 1 को -1 से प्रतिस्थापित किया गया है।

33.2 पतली पट्टिका सिद्धांत: Kirchhoff

16 निम्न अनुभाग में मूलभूत संबंधों से व्युत्पन्न समीकरणों को *Kirchhoff* पट्टिका सिद्धांत पर लागू किया जाएगा।

17 यह सिद्धांत अनुप्रस्थ अपरूपण विरूपण की उपेक्षा करता है (अतः अनुप्रस्थ काट के समकोण संरक्षित रहते हैं)। यह सूत्रीकरण पारंपरिक Euler–Bernoulli बीम सिद्धांत के अनुरूप है[1]।

[1] *Mindlin* सूत्रीकरण में अपरूपण विरूपण का विचार किया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

33.2.0.1 उदाहरण 33.1: पतली बनाम मोटी पट्टिका आदर्शीकरण

दो वर्गाकार कंक्रीट पट्टिकाओं की भुजा-लंबाई समान $a = 1.0$ m, Young मापांक $E = 25$ GPa और Poisson अनुपात $\nu = 0.20$ है। पहली पट्टिका की मोटाई $t = 20$ mm और दूसरी की मोटाई $t = 150$ mm है। निर्धारित करें कि प्रत्येक स्थिति में Kirchhoff पतली-पट्टिका प्रतिरूप पर्याप्त होने की संभावना है अथवा नहीं।

एक उपयोगी प्रथम निदान विस्तृति-मोटाई अनुपात है

$$\lambda = \frac{a}{t}.$$

पहली पट्टिका के लिए,

$$\lambda_1 = \frac{1.0}{0.020} = 50.$$

दूसरी पट्टिका के लिए,

$$\lambda_2 = \frac{1.0}{0.150} = 6.67.$$

अतः,

$$\lambda_1 = 50, \qquad \boxed{\lambda_2 = 6.67}.$$

पहली पट्टिका तनु है और अनुप्रस्थ अपरूपण विरूपण को नगण्य मानने वाली Kirchhoff धारणा सामान्यतः उपयुक्त है। दूसरी पट्टिका अपेक्षाकृत मोटी है; अनुप्रस्थ अपरूपण विरूपण कुल विक्षेप में उल्लेखनीय योगदान दे सकता है, अतः Reissner–Mindlin पट्टिका प्रतिरूप अधिक उपयुक्त है।

यह उदाहरण विस्तृत अभिसरण अथवा सत्यापन अध्ययन का स्थान नहीं लेता, किंतु दर्शाता है कि Kirchhoff और Reissner–Mindlin पट्टिका सिद्धांतों का अंतर केवल औपचारिक नहीं है। यह मुख्यतः पट्टिका की ज्यामितीय तनुता से नियंत्रित होता है।

33.2.1 मूलभूत संबंध

शुद्धगतिक संबंध : चूँकि अपरूपण विरूपणों की उपेक्षा की जाती है, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$; अतः समीकरण 33.2 के अंतिम दो संबंध बनते हैं

$$\theta_{xx} = -w_{,x} \quad \text{तथा} \quad \theta_{yy} = -w_{,y}$$

और प्रथम तीन विकृतियाँ बनती हैं

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \qquad \varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \qquad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \tag{33.7}$$

अथवा

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\{ w \}}_{\mathbf{u}} \tag{33.8}$$

[18] पूर्ववर्ती समीकरण का अंतिम पद मध्य-पृष्ठ के x और y अक्षों के सापेक्ष ऐंठन के अनुरूप है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संघटक संबंध : समीकरण 33.4 का संघटक संबंध अभी भी लागू होता है

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} \tag{33.9}$$

साम्य : समीकरण 33.6 द्वारा व्यक्त साम्य समीकरण भी अभी मान्य है। यदि दूसरे और तीसरे संबंधों को पहले में प्रतिस्थापित करें, तो आघूर्णों के पदों में निम्न साम्य संबंध प्राप्त होगा

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + p_z = 0 \tag{33.10}$$

(बीम आनमन के संगत समीकरण $\frac{d^2M}{\mathrm{d}x^2} - V_x = 0$ से साम्य ध्यान देने योग्य है।)

33.2.2 अवकल समीकरण

18 शुद्धगतिक और संघटक संबंधों के समीकरण 33.8 तथा 33.9 संयोजित करने पर प्राप्त होता है

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ (1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \{ w \} \tag{33.11}$$

19 अंततः साम्य समीकरण 33.10 को पूर्ववर्ती समीकरण में प्रतिस्थापित करते हैं,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}}$$

अथवा

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}}$$

बीम के संगत समीकरण से साम्य ध्यान देने योग्य है

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p_z \quad \text{अथवा} \quad \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{p_z}{EI}$$

33.2.3 प्रतिबल

20 समीकरण 33.3 के प्रतिबल-विकृति संबंध को समीकरण 33.7 तथा 33.11 के साथ संयोजित करने पर प्रतिबलों को आघूर्णों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{xx}}{\frac{t^3}{12}} z; \qquad \sigma_{yy} = \frac{M_{yy}}{\frac{t^3}{12}} z; \qquad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{\frac{t^3}{12}} z$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पुनः बीम के आनमनी प्रतिबल व्यंजक $\sigma = \frac{My}{I}$ से साम्य ध्यान देने योग्य है। त्रिविमीय साम्य समीकरण उपयोग करने पर:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

प्रथम समीकरण का समाकलन देता है

$$\tau_{xz} = -\int_{t/2}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \mathrm{d}z = \int_{z}^{t/2} \frac{12z}{t^3} \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \mathrm{d}z$$
$$= \frac{12}{t^3} \int_{z}^{t/2} z V_x \mathrm{d}z$$

21 अंततः

$$\tau_{xz} = \frac{3V_x}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \quad \text{तथा} \quad \tau_{yz} = \frac{3V_y}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right]$$

22 अतः पट्टिका की मोटाई में अपरूपण-प्रतिबल वितरण परवलयी है (यद्यपि वह τ_{xy} की तुलना में बहुत छोटा होता है) और अधिकतम अपरूपण प्रतिबल मध्य-पृष्ठ ($z = 0$) पर होता है, जहाँ

$$\tau_{xz}|_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_x}{t} \quad \text{तथा} \quad \tau_{yz}|_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_y}{t}$$

23 ध्यान दें कि आनमनी प्रतिबल मध्य-पृष्ठ से रैखिक रूप में परिवर्तित होते हैं; बंकन से उत्पन्न अपरूपण प्रतिबल τ_{xy} भी मध्य-पृष्ठ से रैखिक रूप में परिवर्तित होते हैं; अपरूपण प्रतिबल τ_{yz} तथा τxz उपस्थित और साम्य के लिए आवश्यक हैं, किंतु उनकी संगत विकृतियाँ नगण्य मानी जाती हैं; σ_{zz} घनीय रूप में परिवर्तित होता है, चित्र 33.3।

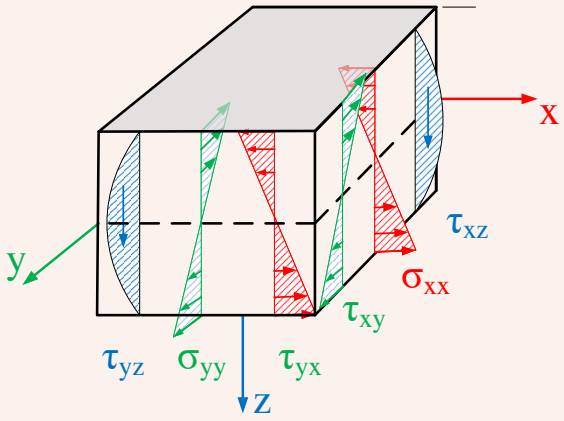
33.2.3.1 उदाहरण 33.2: पट्टिका-आघूर्ण परिणामकों से प्रतिबल पुनर्प्राप्ति

पट्टिका के एक बिंदु पर बंकन और ऐंठन आघूर्ण परिणामक हैं

$$M_{xx} = 1.20 \text{ kN m/m}, \qquad M_{yy} = 0.80 \text{ kN m/m}, \qquad M_{xy} = 0.30 \text{ kN m/m}.$$

पट्टिका की मोटाई $t = 25$ mm है। इन परिणामकों से संबद्ध चरम-तंतु प्रतिबलों का आकलन करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप



चित्र 33.3: प्रतिबल-वितरण

मोटाई में रैखिक प्रतिबल-वितरण के लिए M_{xx} और M_{yy} से संबद्ध चरम-तंतु अभिलंब प्रतिबल हैं

$$\sigma_{xx} = \frac{6M_{xx}}{t^2}, \qquad \sigma_{yy} = \frac{6M_{yy}}{t^2}.$$

इसी प्रकार, ऐंठन-आघूर्ण परिणामक संगत चरम-तंतु अपरूपण प्रतिबल देता है

$$\tau_{xy} = \frac{6M_{xy}}{t^2}.$$

$t = 0.025$ m उपयोग करने पर,

$$\sigma_{xx} = \frac{6(1200)}{(0.025)^2} = 11.52 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 11.5 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{yy} = \frac{6(800)}{(0.025)^2} = 7.68 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 7.68 \text{ MPa},$$

और

$$\tau_{xy} = \frac{6(300)}{(0.025)^2} = 2.88 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 2.88 \text{ MPa}.$$

अतः,

$$\sigma_{xx} = 11.5 \text{ MPa}, \qquad \sigma_{yy} = 7.68 \text{ MPa}, \qquad \tau_{xy} = 2.88 \text{ MPa}.$$

यह उदाहरण रेखांकित करता है कि पट्टिका का हल प्रतिबल परिणामक देता है। वास्तविक प्रतिबल केवल मोटाई में माने गए प्रतिबल-वितरण का उपयोग करने के बाद पुनर्प्राप्त होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

33.2.3.2 उदाहरण 33.3: एकसमान दाब के अधीन सरल आलंबित वर्गाकार पट्टिका

एक सरल आलंबित वर्गाकार इस्पात पट्टिका की भुजा-लंबाई $a = 2.0$ m और मोटाई $t = 20$ mm है। पट्टिका एकसमान अनुप्रस्थ दाब $q = 5$ kPa के अधीन है। मानें

$$E = 200 \text{ GPa}, \qquad \nu = 0.30.$$

अधिकतम विक्षेप और अधिकतम बंकन प्रतिबल के परिमाण-क्रम का आकलन करें।

पहले पट्टिका-दृढता है

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{(200\times10^9)(0.020)^3}{12(1-0.30^2)} = 1.465\times10^5 \text{ N m}.$$

एकसमान भार के अधीन सरल आलंबित वर्गाकार पट्टिका के लिए मानक सारणीबद्ध गुणांक ($\nu = 0.30$ के लिए) देता है

$$w_{\max} = 0.00406\frac{qa^4}{K}.$$

$q = 5000$ N/m^2 तथा $a = 2.0$ m के साथ,

$$w_{\max} = 0.00406\frac{(5000)(2.0)^4}{1.465\times10^5} = 2.22\times10^{-3} \text{ m}. substituting$$

अतः,

$$w_{\max} = 2.22 \text{ mm}.$$

प्रति इकाई चौडाई अधिकतम आघूर्ण के आकलन के लिए संगत सारणीबद्ध गुणांक उपयोग करें ($\nu = 0.30$ के लिए)

$$M_{\max} \simeq 0.0479 qa^2.$$

फलतः,

$$M_{\max} \simeq 0.0479(5000)(2.0)^2 = 958 \text{ N m/m}.$$

संगत चरम-तंतु बंकन प्रतिबल लगभग है

$$\sigma_{\max} \simeq \frac{6M_{\max}}{t^2} = \frac{6(958)}{(0.020)^2} = 14.4\times10^6 \text{ N/m}^2.$$

अतः,

$$\sigma_{\max} \simeq 14.4 \text{ MPa}.$$

यह उदाहरण पट्टिका-हल के दो प्रमुख निर्गत दर्शाता है: विस्थापन क्षेत्र, जिसे यहाँ $w_{\max}$ से दर्शाया गया है, और आघूर्ण परिणामक, जिनसे बंकन प्रतिबल पुनर्प्राप्त किए जा सकते हैं।

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

33.2.3.3 उदाहरण 33.4: मोटाई के प्रति पट्टिका-विक्षेप की संवेदनशीलता

पुनः भुजा-लंबाई $a = 2.0$ m वाली सरल आलंबित वर्गाकार पट्टिका लें, जो एकसमान दाब $q = 5$ kPa के अधीन है। मानें कि पदार्थ और भारण अपरिवर्तित रखते हुए मोटाई $t_1 = 20$ mm से $t_2 = 30$ mm कर दी जाती है। अधिकतम विक्षेप में कमी का आकलन करें।

पतली समदैशिक पट्टिका के लिए,

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}.$$

अतः यदि E और ν अपरिवर्तित हों,

$$K \propto t^3.$$

चूँकि विक्षेप पट्टिका-दृढता के व्युत्क्रमानुपाती है,

$$w \propto \frac{1}{K} \propto \frac{1}{t^3}.$$

अतः,

$$\frac{w_2}{w_1} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^3 = \left(\frac{20}{30}\right)^3 = 0.296.$$

यदि 20 mm पट्टिका का अधिकतम विक्षेप है

$$w_1 = 2.22 \text{ mm},$$

तो 30 mm पट्टिका का अधिकतम विक्षेप है

$$w_2 = 0.296(2.22) = 0.657 \text{ mm}.$$

अतः,

$$w_2 \simeq 0.66 \text{ mm}.$$

मोटाई में 50 प्रतिशत वृद्धि ने विक्षेप को उसके पूर्व मान के लगभग 30 प्रतिशत तक घटा दिया है। यह K की t पर घनीय निर्भरता के सबसे महत्त्वपूर्ण व्यावहारिक परिणामों में से एक है।

33.2.4 वृत्तीय पट्टिकाएँ

24 Kirchhoff पट्टिका सिद्धांत की एक विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण स्थिति *वृत्तीय पट्टिका* है। वृत्तीय पट्टिकाएँ टंकी-आवरण, मध्यपट, वृत्तीय छिद्रों के चारों ओर स्लैब, नींव, मैनहोल आवरण और दाब-पात्र घटकों में मिलती हैं। शिक्षण की दृष्टि से भी वे उपयोगी हैं: अक्षसममित भारण और परिसीमा प्रतिबंधों में समीकरण 33.10 से व्युत्पन्न द्विविमीय द्विसमघाती समीकरण एकल अरीय निर्देशांक के *साधारण* अवकल समीकरण में सिमट जाता है, अतः संवृत रूप में हल प्राप्त किया जा सकता है।

25 त्रिज्या a और नियत मोटाई t वाली ठोस वृत्तीय पट्टिका लें। ध्रुवीय निर्देशांक अपनाते हैं, जिनमें r अरीय और θ परिधीय निर्देशांक है। अक्षसममित समस्या में अनुप्रस्थ विक्षेप केवल r पर निर्भर करता है,

$$w = w(r),$$

और चूँकि θ के साथ कुछ भी परिवर्तित नहीं होता, θ के सापेक्ष सभी अवकलज लुप्त हो जाते हैं। अब w

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

केवल एक चर का फलन है, इसलिए r में पूर्ण अवकलज उपयोग किए जाते हैं। आनमनी दृढता आयताकार स्थिति से अपरिवर्तित है,

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}.$$

[26] **शुद्धगतिकी।** अक्षसममित Kirchhoff पट्टिका की दो अशून्य वक्रताएँ अरीय तथा परिधीय (वलय) वक्रताएँ हैं

$$\kappa_{rr} = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}, \qquad \kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}.$$

ये κ_{xx} तथा κ_{yy} के ध्रुवीय समकक्ष हैं, जो समीकरण 33.8 में दिए गए हैं, और वही अग्र ऋण चिह्न रखते हैं। अरीय वक्रता अरीय तंतु का बंकन मापती है, ठीक वैसे ही जैसे एक विमा में $-\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}x^2$। वलय वक्रता पूर्णतः ज्यामितीय है: $\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}r^2 = 0$ वाला शंक्वाकार विक्षेप भी परिधीय तंतुओं को तानता है क्योंकि उनकी त्रिज्या बदलती है; पद $-\dfrac{1}{r}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}r$ उसी प्रभाव को ठीक-ठीक ग्रहण करता है। ऐंठन वक्रता लुप्त हो जाती है,

$$\kappa_{r\theta} = 0,$$

क्योंकि θ के सापेक्ष कोई परिवर्तन नहीं है।

[27] **संघटक संबंध।** समीकरण 33.9 के आघूर्ण–वक्रता नियम को ध्रुवीय वक्रताओं के लिए विशिष्ट करने पर किनारे की प्रति इकाई लंबाई अरीय और वलय बंकन-आघूर्ण परिणामक मिलते हैं,

$$M_{rr} = K(\kappa_{rr} + \nu\kappa_{\theta\theta}), \qquad M_{\theta\theta} = K(\kappa_{\theta\theta} + \nu\kappa_{rr}),$$

अथवा विक्षेप के पदों में,

$$M_{rr} = -K\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right], \qquad M_{\theta\theta} = -K\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right]. \tag{33.12}$$

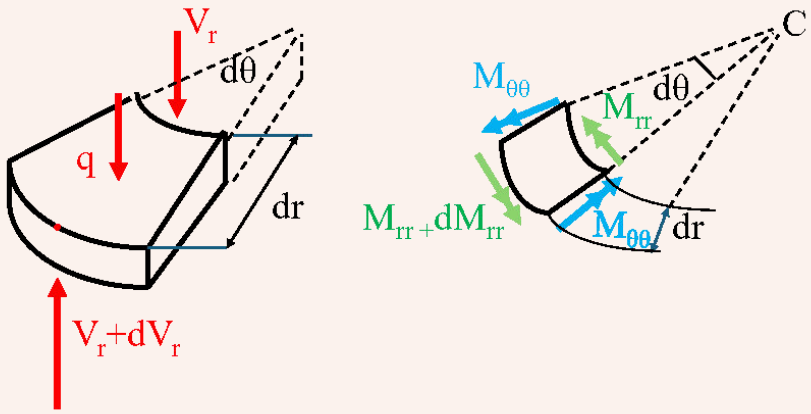
यहाँ M_{rr} अरीय बंकन आघूर्ण और $M_{\theta\theta}$ परिधीय अथवा वलय आघूर्ण है; ये M_{xx} और M_{yy} के ध्रुवीय-निर्देशांक समकक्ष हैं (§33.1.3 के प्रति-इकाई-चौड़ाई परिणामक)। ध्यान दें कि w केवल r पर निर्भर होने पर भी दोनों आघूर्ण सामान्यतः अशून्य होते हैं, क्योंकि दोनों वक्रताएँ उपस्थित हैं।

[28] **साम्य।** दो साम्य कथनों की आवश्यकता है। त्रिज्याओं r तथा $r + \mathrm{d}r$ और किरणों θ तथा $\theta + \mathrm{d}\theta$ से सीमित वलयाकार अवयव का आघूर्ण-साम्य अरीय अनुप्रस्थ अपरूपण परिणामक V_r को आघूर्णों से संबद्ध करता है, चित्र 33.4

$$V_r = \frac{\mathrm{d}M_{rr}}{\mathrm{d}r} + \frac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r}. \tag{33.13}$$

पहला पद बीम सिद्धांत के $\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = V$ का प्रत्यक्ष समकक्ष है। दूसरे पद $(M_{rr} - M_{\theta\theta})/r$ का कोई एकविमीय समकक्ष नहीं है: यह इसलिए उत्पन्न होता है कि अवयव के दोनों अरीय फलक समांतर न होकर केंद्र की ओर अभिसरित होते हैं; अतः उन पर कार्यरत वलय आघूर्ण $M_{\theta\theta}$ का अरीय आघूर्ण-साम्य में

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 33.4: वृत्तीय पट्टिका के सूक्ष्म अवयव का साम्य

एक परिणामी घटक होता है। समीकरण 33.12 को समीकरण 33.13 में प्रतिस्थापित करके सरल करने पर संक्षिप्त रूप मिलता है

$$V_r = -K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right] = -K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\nabla^2 w\right).$$

उसी अवयव के ऊर्ध्वाधर साम्य के लिए परिणामी अनुप्रस्थ अपरूपण को लागू दाब संतुलित करना आवश्यक है। अपरूपण लंबाई $r\,\mathrm{d}\theta$ के भीतरी चाप और लंबाई $(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$ के बाहरी चाप पर कार्य करता है; उनका अंतर $\mathrm{d}(rV_r)\,\mathrm{d}\theta$ है, जबकि भार का योगदान $p_z\, r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ है। $r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ से भाग देने पर,

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(rV_r\right) + p_z = 0.$$

29 **नियामक समीकरण।** समीकरण 33.2.4 तथा 33.2.4 को संयोजित करने पर अक्षसममित Kirchhoff पट्टिका समीकरण मिलता है

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right]\right\} = \frac{p_z}{K},$$

जो द्विसमघाती समीकरण $\nabla^4 w = p_z/K$ ही है—समीकरण 33.10 को अक्षसममित क्षेत्र के लिए लिखा गया रूप—जहाँ

$$\nabla^2 w = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}.$$

30 **परिसीमा प्रतिबंध।** ठोस पट्टिका के केंद्र पर नियमितता दो प्रतिबंध देती है,

$$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = 0, \qquad V_r(0) = 0.$$

पहला अक्षसममित विक्षेप की सममिति है; दूसरा बताता है कि केंद्र पर कोई केंद्रित बल लागू नहीं है। किनारे $r = a$ पर आदर्शीकृत प्रतिबंध बीम के प्रतिबंधों के अनुरूप हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जकड़ा किनारा: विस्थापन और घूर्णन दोनों अवरुद्ध,

$$w(a) = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a} = 0.$$

सरल आलंबित किनारा: विस्थापन अवरुद्ध, घूर्णन मुक्त,

$$w(a) = 0, \qquad M_{rr}(a) = 0.$$

मुक्त किनारा: न आघूर्ण, न अनुप्रस्थ अपरूपण,

$$M_{rr}(a) = 0, \qquad V_r(a) = 0.$$

[31] **एकसमान दाब।** एकसमान अनुप्रस्थ दाब $p_z = q = \text{const.}$ की महत्त्वपूर्ण स्थिति में समीकरण 33.2.4 का प्रत्यक्ष समाकलन किया जा सकता है। व्यापक हल $\nabla^4 w = 0$ के समघात हल और एक विशिष्ट हल का योग है; एकसमान भार के लिए,

$$w(r) = \underbrace{C_1 + C_2 r^2}_{\text{नियमित}} + \underbrace{C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r}_{=0 \text{ की नियमितता से } r=0} + \frac{q\, r^4}{64 K}.$$

दोनों लघुगणकीय पद $r = 0$ पर अपरिबद्ध विक्षेप, प्रवणता अथवा अपरूपण और एक केंद्रित केंद्रीय प्रतिक्रिया उत्पन्न करते हैं; अतः ठोस पट्टिका के लिए उन्हें त्याग दिया जाता है और $w = C_1 + C_2 r^2 + q r^4/64K$ शेष रहता है। (केंद्र में छिद्र वाली वलयाकार पट्टिका में ये पद रखे जाते हैं और भीतरी किनारे के प्रतिबंधों से निर्धारित होते हैं।) शेष दोनों नियतांक किनारे के प्रतिबंधों से निर्धारित होते हैं।

[32] *जकड़ी पट्टिका।* $w'(a) = 0$ को $w' = 2C_2 r + q r^3/16K$ पर लगाने से $C_2 = -q a^2/32K$ मिलता है, और फिर $w(a) = 0$ से $C_1 = q a^4/64K$ मिलता है। अतः

$$w(r) = \frac{q}{64K}\left(a^2 - r^2\right)^2,$$

और अधिकतम विक्षेप केंद्र पर होता है,

$$w_{\max} = w(0) = \frac{q a^4}{64 K}.$$

संगत आघूर्ण परिणामक समीकरण 33.12 से मिलते हैं,

$$M_{rr} = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (3+\nu) r^2\right], \qquad M_{\theta\theta} = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu) r^2\right].$$

केंद्र पर दोनों आघूर्ण $q(1+\nu)a^2/16$ के बराबर हैं, जबकि जकड़े किनारे पर

$$M_{rr}(a) = -\frac{q a^2}{8}.$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चिह्न-परिवर्तन पट्टिका के मध्य के निकट धनात्मक बंकन से अवरुद्ध परिसीमा पर ऋणात्मक बंकन के संक्रमण को दर्शाता है, जहाँ अधिकतम आघूर्ण होता है।

[33] *सरल आलंबित पट्टिका।* उसी नियमित हल पर $M_{rr}(a)=0$ तथा $w(a)=0$ लगाने से मिलता है

$$C_2=-\frac{qa^2}{32K}\frac{3+\nu}{1+\nu},\qquad C_1=\frac{qa^4}{64K}\frac{5+\nu}{1+\nu},$$

जिससे

$$w(r)=\frac{q}{64K}\left[r^4-2a^2\frac{3+\nu}{1+\nu}r^2+a^4\frac{5+\nu}{1+\nu}\right],$$

और

$$w_{\max}=w(0)=\frac{qa^4}{64K}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\right).$$

यह विक्षेप समीकरण 33.2.4 के जकड़े मान से गुणक $(5+\nu)/(1+\nu)$—सामान्य ν के लिए लगभग चार—गुना बड़ा है; यह अपेक्षित है क्योंकि सरल आलंबित किनारा कोई घूर्णी अवरोध नहीं देता।

[34] ये संवृत-रूप परिणाम संख्यात्मक हलों के सत्यापन हेतु *मानदंड* के रूप में उपयोगी हैं, जिनमें आगे विवेचित परिमित अवयव पट्टिका सूत्रीकरण भी सम्मिलित हैं। ये दो प्रमुख आघूर्ण परिणामकों की भौतिक व्याख्या भी स्पष्ट करते हैं: आयताकार पट्टिका में M_{xx} तथा M_{yy} कार्तीय अक्षों के परितः बंकन वर्णित करते हैं, जबकि अक्षसममित वृत्तीय पट्टिका में संगत राशियाँ अरीय आघूर्ण M_{rr} और वलय आघूर्ण $M_{\theta\theta}$ हैं; दोनों तब भी उपस्थित होते हैं जब विक्षेप केवल r पर निर्भर हो।

33.2.4.1 उदाहरण 33.5: एकसमान दाब के अधीन जकड़ी वृत्तीय पट्टिका

एक वृत्तीय ऐलुमिनियम पट्टिका की त्रिज्या $a=0.75$ m और मोटाई $t=12$ mm है। वह अपने किनारे पर जकड़ी है और एकसमान अनुप्रस्थ दाब $q=2$ kPa के अधीन है। मानें

$$E=70\ \text{GPa},\qquad \nu=0.33.$$

अधिकतम विक्षेप का आकलन करें।

समीकरण 33.2.4 से आनमनी दृढता है

$$K=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}=\frac{(70\times10^9)(0.012)^3}{12(1-0.33^2)}=1.131\times10^4\ \text{N m}.$$

एकसमान दाब के अधीन जकड़ी वृत्तीय पट्टिका का केंद्रीय विक्षेप समीकरण 33.2.4 से दिया जाता है,

$$w_{\max}=\frac{qa^4}{64K}.$$

$q=2000\ \text{N/m}^2$ तथा $a=0.75$ m के साथ,

$$w_{\max}=\frac{(2000)(0.75)^4}{64(1.131\times10^4)}=8.74\times10^{-4}\ \text{m}.$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः,

$$w_{\max} = 0.874 \text{ mm}.$$

यह छोटा मान पतली-पट्टिका (लघु-विक्षेप) धारणा के अनुरूप है, क्योंकि विक्षेप पट्टिका की मोटाई से बहुत कम है,

$$\frac{w_{\max}}{t} = \frac{0.874}{12} = 0.073.$$

33.2.5 परिवर्ती सूत्रीकरण

35 परिमित अवयव विविक्तीकरण से पूर्व, पहले व्युत्पन्न संबंधों से समस्या का परिवर्ती सूत्रीकरण प्राप्त करना है।

36 आंतरिक आभासी कार्य निम्न से दिया जाता है

$$\delta W_i = -\int_A \delta\varepsilon^T \sigma \mathrm{d}A = -\int_A \delta\kappa^T M \mathrm{d}A$$

जहाँ $M = D\kappa$ समीकरण 33.9 से और $\kappa = Lu$ समीकरण 33.8 से प्राप्त होता है।

37 बाह्य आभासी कार्य का लेखा करने पर प्राप्त होता है

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_e = \underbrace{-\int_A \delta u^T (L^T D L) u \mathrm{d}A} + \underbrace{\int_A \delta u^T p_v \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} u^T p \mathrm{d}\Gamma} = 0$$

जहाँ p_v में लागू अनुप्रस्थ भारण p_z और p में किनारे का भारण p_s है।

38 $L^T D L$ पदों के लिए प्रतिस्थापन करने पर (समीकरण 33.8) प्राप्त होता है

$$K^e = L^T D L = \lfloor\, -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \,\rfloor \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= K \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]$$

39 अंततः, $u = w$ ध्यान में रखते हुए आभासी कार्य बनता है

$$\delta W_e = -K\int_A \delta w \left(L w p_z\right) \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} \delta w p_s \mathrm{d}\Gamma = 0$$

जहाँ $K = Et^3/12(1-\nu^2)$.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

33.3 सारांश

सारणी 33.1 पट्टिका-बंकन के कुछ प्रमुख नियामक समीकरणों का सार देती है और उनकी तुलना समतुल्य प्रत्यास्थता समीकरणों से करती है। अब जब आनमन के अधीन बीम और पट्टिका की व्युत्पत्ति का पूर्ण पुनरावलोकन हो चुका है, तो कठिनाई एक चरण बढ़ाकर पतले कवचों की चर्चा आरंभ की जा सकती है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 33.1: प्रत्यास्थता और पट्टिका-बंकन के नियामक समीकरणों की तुलना (Pilkey and Wunderlich, 1994)

	प्रत्यास्थता	पट्टिका सिद्धांत (Kirchhoff)
शुद्धगतिक	$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \hline \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \hline \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$	$\underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\{ w \}}_{\mathbf{u}}$
		$\underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_f} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}}; \underbrace{\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\gamma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_s} \underbrace{\begin{Bmatrix} w \\ \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$
साम्य	$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underbrace{\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}}_{\rho\mathbf{b}} = 0$	$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_x \\ V_y \end{Bmatrix}}_{\mathbf{M}} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
		$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc\|cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T = \lfloor\ \mathbf{L}_f^T \quad \mathbf{L}_s^T\ \rfloor} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ \hline V_x \\ V_y \end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
संघटक	$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\underbrace{\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{K \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}}$
		$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ \hline V_x \\ V_y \end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} K\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \zeta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}}$
	$\alpha = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \beta = \frac{\nu}{1-\nu}; \gamma = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$	$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}; \qquad \zeta = \frac{5}{6}\mu t$
आभासी कार्य	$\delta\Pi = \int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma = 0$	$\delta W = -\int_A \delta w \left(KL w p_z\right) \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} \delta w p_s \mathrm{d}\Gamma = 0$
		$\delta W = -K\left[\int_A \delta\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{K}_f^e \boldsymbol{\theta} \mathrm{d}A + \frac{6k_s(1-\nu)}{t^2}\int_A \delta\mathbf{u}^T \mathbf{K}_s^e \mathbf{u} \mathrm{d}A\right] + \int_A \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p}_V \mathrm{d}A + \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p} \mathrm{d}\Gamma = 0$

समीक्षा प्रति

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Neue Nationalgalerie, Ludwig Mies van der Rohe, 1968, Berlin, Germany

पट्टिका संरचनाओं का उत्कृष्ट उदाहरण, जिसमें बड़ा समतल छत-स्लैब संरचनात्मक पट्टिका की भाँति कार्य करता है और न्यूनतम आलंब से विशाल खुले आंतरिक भाग को पाटता है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34 कवच

सारांश

यह अध्याय दो प्रमुख अनुभागों में विभाजित है। पहला अनुभाग अवकल ज्यामिति द्वारा स्वेच्छ कवच-अवयव के नियामक साम्य और सुसंगतता समीकरणों की व्युत्पत्ति से आरंभ होता है। तत्पश्चात इन समीकरणों को उथले कवचों के लिए विशिष्ट किया जाता है और अंत में झिल्ली सिद्धांत का सरलीकरण प्रस्तुत होता है।

इन समीकरणों को बाद में वृत्तीय बेलनाकार कवच पर लागू किया जाता है, जो या तो अंतिम मध्यपटों पर सरल आलंबित है अथवा किनारी बीमों द्वारा आलंबित है।

दुर्भाग्यवश आजकल स्नातकोत्तर कार्यक्रमों में कवच-विश्लेषण बहुत कम, यदि कभी, पढाया जाता है। इसके स्थान पर विद्यार्थियों को पट्टिकाओं और कवचों का संक्षिप्त पाठ्यक्रम दिया जाता है, जिसमें प्रायः परिमित अवयव विधि के उपयोग पर अत्यधिक बल होता है।

कवच का अभिकल्प करने वाले संरचनात्मक अभियंता को—कंप्यूटर की निरंतर उपलब्धता के बावजूद—पहले अंतर्निहित यांत्रिकी से परिचित होना चाहिए, ताकि परिमित अवयव परिणामों की उचित व्याख्या के लिए आवश्यक पर्याप्त समझ विकसित हो।

अंततः, इस पुस्तक के सभी अध्यायों में यह संभवतः सर्वाधिक सुरुचिपूर्ण है, क्योंकि इसमें अवकल ज्यामिति, कलन, यांत्रिकी और (अर्ध-)उन्नत गणित का संयोजन होता है, जिससे Nervi और Torroja की अद्भुत संरचनाओं को समझा जा सकता है (अध्याय 15)।

34.1 व्यापक सिद्धांत 1243
34.1.1 परिभाषाएँ 1243
34.1.2 धारणाएँ 1245
34.1.3 बल–विस्थापन संबंध 1247
34.1.4 सरलीकरण 1264
34.2 एकल बैरल का विश्लेषण (वृत्तीय बेलनाकार कवच) 1273
34.2.1 परिचय 1273
34.2.2 झिल्ली सिद्धांत 1274
34.2.3 उथले कवच का सिद्धांत 1283
34.3 स्थैतिकतः अनिर्धार्य कवच 1298
34.3.1 किनारी बीम 1298
34.3.2 पूर्वप्रतिबलित किनारी बीम . . . 1302
34.3.3 MATLAB®कोड और संख्यात्मक उदाहरण 1315

निम्न अनुभाग *Thin Shell Concrete Structures*[a] से, जिसे Billington, 1965 PDF ने लिखा है, तथा Cornell में Prof. Richard Gallagher के पाठ्यक्रम के मेरे व्याख्यान-टिप्पणों से पुनरुत्पादित है।
Georg, R., 2014 की सहायता के लिए कृतज्ञतापूर्वक आभार।

[a] यद्यपि पुस्तक कोई नई विश्लेषणात्मक विधि प्रस्तुत नहीं करती, यह Love, 1927 PDF द्वारा आरंभ और बाद में "German School" द्वारा विस्तारित विधियों का अत्यंत सुरुचिपूर्ण और पठनीय विवेचन है (जिसका सर्वोत्तम सार Flügge, 1973 में है); इसमें विस्तृत स्पष्टीकरण और चित्र दिए गए हैं तथा संकेत-पद्धति को "आधुनिक" रूप में अनुकूलित किया गया है। Timoshenko, Woinowsky-Krieger, et al., 1959 का विवेचन भ्रामक रूप से सीमित है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.1 व्यापक सिद्धांत

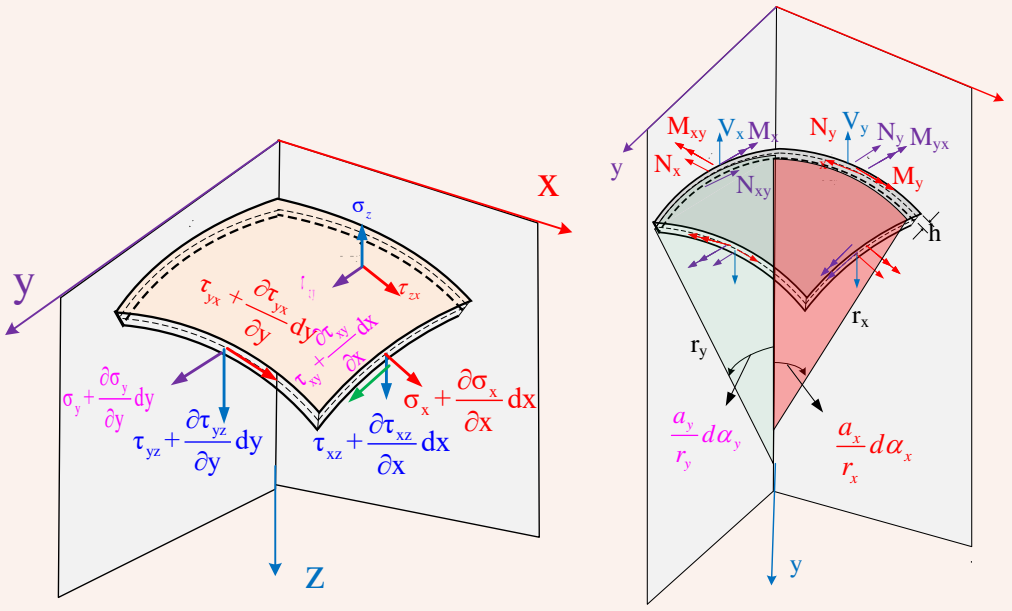
34.1.1 परिभाषाएँ

1 पतला कवच वह वक्र पृष्ठ अथवा पट्टिका है जिसकी मोटाई h, कवच-संरचना की विमाओं और वक्रता-त्रिज्याओं r_x तथा r_y की तुलना में छोटी होती है।

2 कवच की मोटाई को समद्विभाजित करने वाले पृष्ठ को *मध्य-पृष्ठ* कहते हैं; इस पृष्ठ का आकार और प्रत्येक बिंदु पर मोटाई निर्दिष्ट करने से कवच की ज्यामिति पूर्णतः परिभाषित हो जाती है।

3 *प्रतिबल परिणामकों* और *प्रतिबल युग्मों* को कवच की मोटाई में समाकलित किया जाता है और मध्य-पृष्ठ पर प्रति इकाई लंबाई कार्य करने वाले कुल बलों तथा आघूर्णों के रूप में परिभाषित किया जाता है (यह पृष्ठ पतले कवच की मोटाई को समद्विभाजित करके बनता है)।

4 प्रतिबल चित्र 34.1a में और प्रतिबल परिणामक तथा युग्म चित्र 34.1b में, विशेषतः y अक्ष के अनुदिश किनारे पर, दर्शाए गए हैं।



(a) आंतरिक प्रतिबल (b) ज्यामिति और आंतरिक परिणामक

चित्र 34.1: अवकल कवच-अवयव, ज्यामिति, प्रतिबल और उनके परिणामक

5 साम्य से प्राप्त होता है

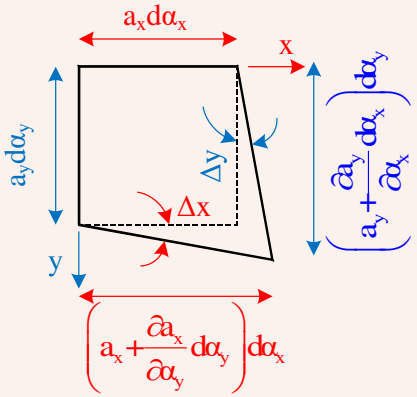
$$\underbrace{N_x r_y d\alpha_y}_{\text{उदासीन अक्ष पर परिणामी बल}} = \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x (r_y - z) d\alpha_y dz}_{\text{आंतरिक बल}} \tag{34.1}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6 दोनों पक्षों को $r_y d\alpha_y$ से भाग देने पर x अक्ष के अनुदिश कार्यरत झिल्ली बल प्राप्त होता है

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \tag{34.2}$$

7 चित्र 34.2 अवयव का विरूपण दर्शाता है। पद a_x तथा a_y को वक्रता-त्रिज्याओं और $d\alpha_x$ तथा $d\alpha_y$ को छोटे कोणों के रूप में देखा जा सकता है; किंतु शुद्धतः अंतिम दोनों पद वक्रों के उन दो कुलों के प्राचल हैं जो अवयवी भुजाओं को परिभाषित करते हैं, और a_x तथा a_y वे *गुणांक* हैं जो प्राचलों को लंबाइयों में बदलते हैं।



चित्र 34.2: अवकल अवयव की शुद्धगतिकी

8 प्रतिबल परिणामक और प्रतिबल युग्म, चित्र 34.1a, निम्न से दिए जाते हैं

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

झिल्ली बल

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz \qquad \begin{cases} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \\ N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \\ N_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \end{cases}$$

बंकन आघूर्ण

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} z \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz \qquad \begin{cases} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\ M_{xy} &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \\ M_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \end{cases} \tag{34.3}$$

अनुप्रस्थ अपरूपण बल

$$\mathbf{V} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\tau} \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz \qquad \begin{cases} \cancelto{0}{V_x} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \\ \cancelto{0}{V_y} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \end{cases}$$

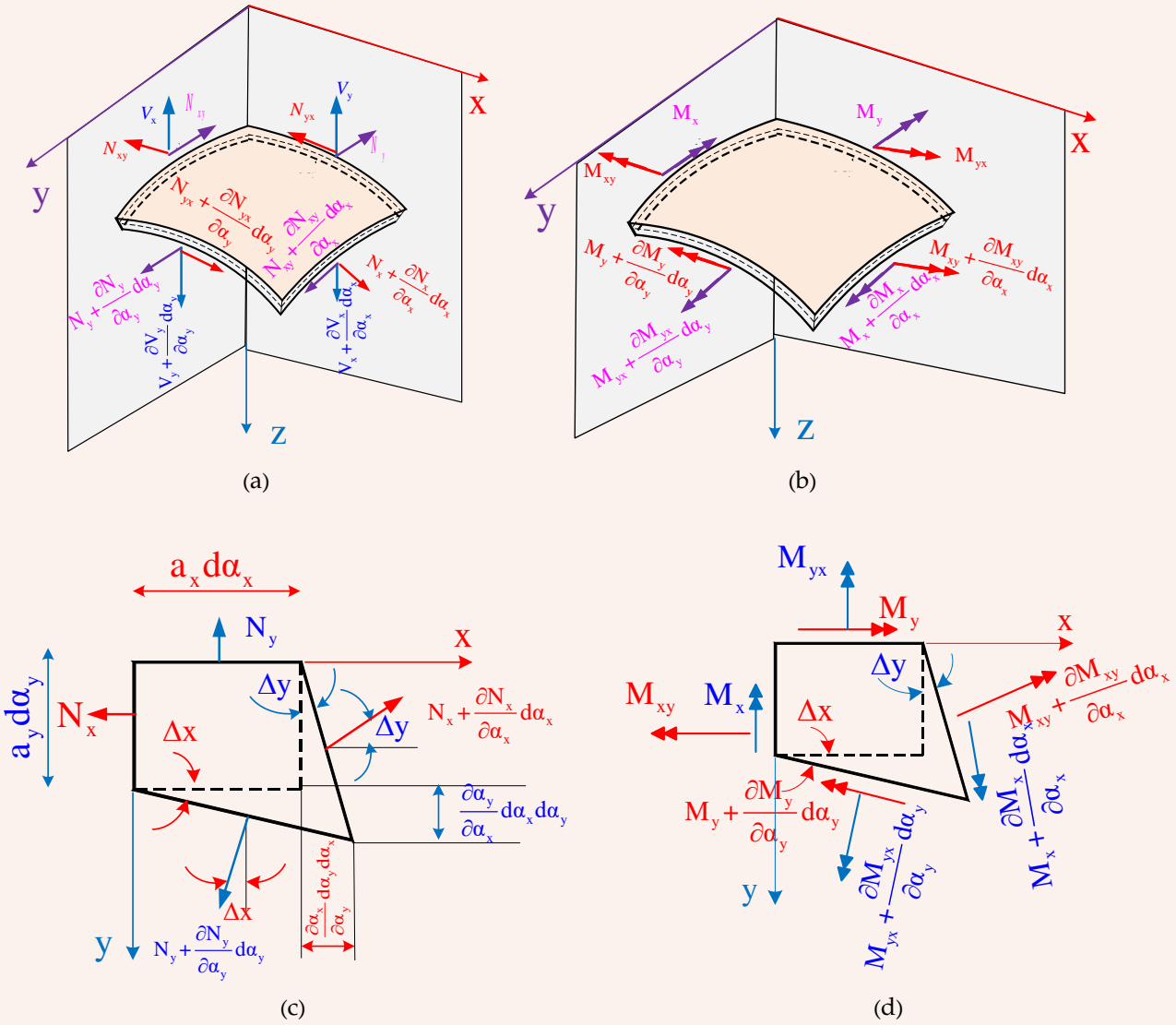
[9] प्रतिबल परिणामकों और प्रतिबल युग्मों के सदिश चित्र 34.3 में दर्शाए गए हैं।

[10] प्रतिबल परिणामकों और प्रतिबल युग्मों की व्युत्पत्ति वही सूत्रीकरण अपनाती है जो समीकरण 34.2 के झिल्ली बल N_{xx} के लिए है।

34.1.2 धारणाएँ

[11] सरलीकरण के लिए निम्न धारणाएँ ली जाती हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 34.3: अवकल कवच-अवयव का साम्य

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पतला कवच: यदि पद z/r_x और z/r_y को इकाई के साथ आने पर नगण्य माना जाए और $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ हो, तो

$$N_{xy} = N_{yx}$$
$$M_{xy} = -M_{yx}$$

इसके अतिरिक्त, σ_z की उपेक्षा की जाती है क्योंकि उसका विकृतियों ε_x और ε_y पर प्रभाव बहुत छोटा होगा।

लघु-विक्षेप: ज्यामिति में परिवर्तन स्थैतिक साम्य को प्रभावित नहीं करेंगे।

रैखिक प्रत्यास्थ व्यवहार: प्रतिबल और विकृति (अथवा आघूर्ण और वक्रता) के बीच रैखिक संबंध।

संरक्षी निकाय: विरूपण से पहले मध्य-पृष्ठ के अभिलंब रेखाओं पर स्थित बिंदु विरूपण के बाद भी मध्य-पृष्ठ के अभिलंब रेखाओं पर रहते हैं[1]।

अपरूपण विरूपण की उपेक्षा: अरीय अपरूपण V_x और V_y पर विचार नहीं किया जाएगा[2]।

34.1.3 बल–विस्थापन संबंध

12 सभी संरचनात्मक यांत्रिकी हलों को तीन आवश्यक अपेक्षाएँ संतुष्ट करनी चाहिए:

साम्य सामान्यीकृत बलों का

सुसंगतता विकृतियों और विस्थापनों की

प्रतिबल–विकृति संबंध[3]

ये अपेक्षाएँ, आरंभिक परिभाषाओं/धारणाओं के साथ, निम्न क्रमिक चरणों द्वारा व्यापक कवच सिद्धांत व्युत्पन्न करने में सक्षम बनाती हैं, सारणी 34.1:

1. अवकल अवयव पर बलों और आघूर्णों का *साम्य* निर्धारित करें (5 समीकरण, 8 अज्ञात)।

   कवच सिद्धांत में सामान्यतः M_z की उपेक्षा की जाती है क्योंकि τ_{xz} और τ_{yz} की उपेक्षा की गई है। अतः साम्य के 5 समीकरण, समीकरण 34.3, 8 सामान्यीकृत बलों के पदों में संतुष्ट करने हैं।
2. *सुसंगतता* (विकृति–विस्थापन) संबंध स्थापित करें (6 समीकरण, 3 अज्ञात)।
3. प्रत्यास्थ गुणधर्मों का समुच्चय मानकर *प्रतिबल–विकृति संबंध* स्थापित करें (3 समीकरण, 6 अज्ञात)।
4. बल–विकृति संबंधों को *बल–विस्थापन* समीकरणों में बदलें (6 समीकरण, 3 अज्ञात)।
5. बल–विस्थापन समीकरणों को साम्य समीकरणों से संयोजित करके *पूर्ण सूत्रीकरण* प्राप्त करें (11 अज्ञातों वाले 11 समीकरण)।

[1] बीमों की भाँति समतल काट समतल बने रहते हैं (Euler–Bernoulli धारणा)।
[2] जैसे बीमों में अपरूपण विरूपण की उपेक्षा की जाती है।
[3] स्मरण रखें कि प्रतिबलों के समाकलन से बल प्राप्त होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 34.1: पतले कवचों में समीकरणों और अज्ञातों का सारांश

समीकरण	(अज्ञात) चर
1) साम्य (§34.1.3.1)	
साम्य के 5 समीकरण	8 आंतरिक बल
$\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$	$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$
2) सुसंगतता (§34.1.3.3)	
6 विकृतियाँ	3 विस्थापन
$\varepsilon_{x0},\ \varepsilon_{y0},\ \gamma_{xy0},\ \chi_x,\ \chi_y,\ 2\chi_{xy}$	$u,\ v,\ w$
3) प्रतिबल–विकृति (§34.1.3.5)	
3 प्रतिबल	6 विकृतियाँ
$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}$	$\varepsilon_{x0},\ \varepsilon_{y0},\ \gamma_{xy0},\ \chi_x,\ \chi_y,\ 2\chi_{xy}$
4) बल–विस्थापन (§34.1.3.6)	
5 बल	3 विस्थापन
$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$	$u,\ v,\ w$
5) अंतिम	
5 साम्य, 6 विकृतियाँ	8 बल, 3 विस्थापन
$\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$ $\varepsilon_{x0},\ \varepsilon_{y0},\ \gamma_{xy0},\ \chi_x,\ \chi_y,\ 2\chi_{xy}$	$N_x, N_y, N_{xy}, V_x, V_y, M_x, M_y, M_{xy},\ u,\ v,\ w$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.1.3.1 साम्य

13 चित्र 34.3 के संदर्भ में साम्य के पाँच समीकरण $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$ स्थापित करने हैं। प्रत्येक पर अलग विचार किया जाएगा।

14 पुनः प्रत्येक पद का योगदान अलग-अलग देखेंगे, सारणी 34.2, और फिर सभी घटकों को संयोजित करके पूर्ण साम्य समीकरण बनाएँगे।

तालिका 34.2: पतले कवचों के साम्य समीकरणों में अलग-अलग योगदान

बल	$N_x,\ N_y,\ N_{xy},\ N_{yx},\ V_x,\ V_y,\ p_{ext}$
आघूर्ण	$M_x,\ M_y,\ M_{xy},\ M_{yx},\ V_y$

15 प्रतिबल युग्म x दिशा में कोई बल-घटक नहीं देते। प्रत्येक घटक को प्रतिबल परिणामक, चित्र 34.1a, का उस अवयवी भुजा की लंबाई से गुणन करके निर्धारित किया जाएगा जिस पर वह कार्य करता है।

1/5 $\Sigma F_x = 0$

16 चित्र 34.3c से अवकल अवयव की ज्यामिति में एक अंतर देखा जा सकता है। मूलबिंदु को प्रतिच्छेदित करने वाली अवयव की भुजाओं की वक्र लंबाइयाँ $a_x d\alpha_x$ और $a_y d\alpha_y$ हैं, जबकि सम्मुख किनारों की बढ़ी हुई लंबाइयाँ $(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y})d\alpha_x$ और $(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x})d\alpha_y$ हैं।

N_x **का योगदान:**

$$\begin{aligned}\Sigma F_x^{N_x} &= -N_x a_y d\alpha_y + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial \alpha_y}{d\alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \\ &= N_x \frac{\partial \alpha_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y + a_y \frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y + \underbrace{\frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y}_{2^{nd}\text{ order effect}}\end{aligned}$$

प्रथम दो पदों को संयोजित करके तथा द्वितीय-कोटि प्रभावों के कारण तीसरे पद को हटाकर

$$\Sigma F_x^{N_x} = \frac{\partial (N_x a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{34.4}$$

N_y **का योगदान:** पहले ध्यान दें कि सामान्यतः N_y, x अक्ष के लंबवत कार्य नहीं करता, बल्कि किसी कोण पर कार्य करता है

$$\Delta_x = \frac{(\partial a_y / \partial \alpha_x) d\alpha_x d\alpha_y}{a_x d\alpha_x} = \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \frac{d\alpha_y}{a_x}$$

अतः x दिशा में कुल बल $N_y a_x d\alpha_x$ का घटक है

$$\Sigma F_x^{N_y} = -N_y a_x d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \frac{d\alpha_y}{a_x} = -N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

N_{xy} का योगदान: N_xy के लिए भी इस बल का एक गैर-लंबवत घटक है, जिसे कोण Δ_y के अनुदिश निर्धारित किया जाता है:

$$\Delta_y = \frac{(\partial a_x/\partial \alpha_y) d\alpha_y d\alpha_x}{a_y d\alpha_y} = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y} \tag{34.5}$$

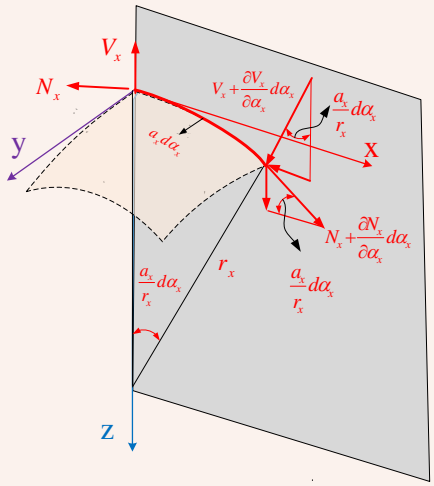
और कुल बल $N_{xy} a_y d\alpha_y$ का घटक है

$$\Sigma F_x^{N_{xy}} = N_{xy} a_y d\alpha_y \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y} = N_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{34.6}$$

N_{yx} का योगदान: यह N_x के योगदान, समीकरण 34.4 के समान है

$$\Sigma F_x^{N_{yx}} = -N_{yx} a_x d\alpha_x + \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \quad = \frac{\partial (N_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_x d\alpha_y \tag{34.7}$$

V_x का योगदान: ढलवाँ भुजा पर कुल बल का क्षैतिज घटक, चित्र 34.4, है



चित्र 34.4: अवकल कवच अवयव, V_x प्रतिबल परिणामक

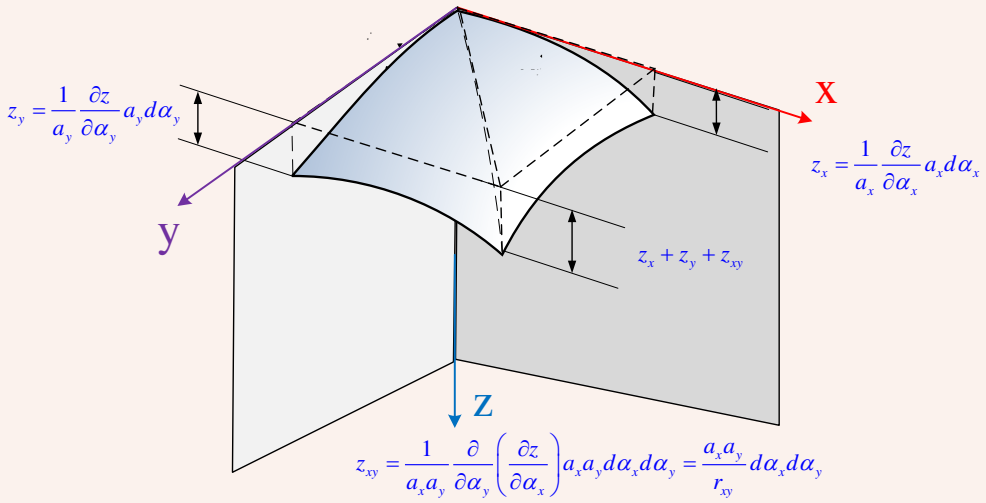
$$\Sigma F_x^{V_x} = -\left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x$$

जहाँ $d\alpha_x \simeq \sin d\alpha_x$। ध्यान दें कि ऋणात्मक भुजा पर V_x का कोई x घटक नहीं है। उच्चतर-कोटि पदों की उपेक्षा करने पर यह घटकर होता है

$$\Sigma F_x^{V_x} = -V_x a_y d\alpha_y \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x \tag{34.8}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

V_y का योगदान: प्रतिबल परिणामक x दिशा के संतुलन में केवल तभी योगदान देगा जब a_x और a_y वक्रता की प्रमुख त्रिज्याएँ न हों। चित्र 34.5 में वक्रताओं सहित अवकल अवयव दर्शाया गया है, जिनके कारण मूलबिंदु के सम्मुख कोने पर कुल दूरी $z_x + z_y + z_{xy}$ प्राप्त होती है। z_x और z_y



चित्र 34.5: अवकल कवच अवयव, प्रमुख वक्रताएँ

क्रमशः ढालों $\partial z/\partial \alpha_x$ और $\partial z/\partial \alpha_y$ के कारण हैं। ढाल में परिवर्तन से प्राप्त होता है

$$z_{xy} = \frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} a_x a_y d\alpha_x d\alpha_y = \frac{a_x a_y}{r_{xy}} d\alpha_x d\alpha_y$$

जहाँ

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}$$

और यह x तथा y अक्षों के सापेक्ष पृष्ठ के ऐंठन के अनुरूप है। अतः V_y की ढाल है

$$\frac{z_{xy}}{a_x d\alpha_x} = \frac{a_y d\alpha_y}{r_{xy}}$$

और V_y का x दिशा में कुल घटक है

$$\begin{aligned} \Sigma F_x^{V_y} &= \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \frac{a_y}{r_{xy}} d\alpha_y \\ &= V_y a_x d\alpha_x \frac{a_y d\alpha_y}{r_{xy}} \end{aligned} \tag{34.9}$$

जहाँ अवयव प्रमुख वक्रताओं r_x और r_y की रेखाओं से परिसीमित है, वहाँ यह व्यंजक लुप्त हो जाता है; $z_{xy} = 0$ तथा ऐंठन $r_{xy} = \infty$।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बाह्य भार का योगदान: इसे p_x, p_y और p_z घटकों वाला ऐसा दाब माना गया है जो क्षेत्रफल $a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y$ के अवकल अवयव पर कार्य करता है:

$$\Sigma F_x^p = p_x a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{34.10}$$

अंततः अब हम समीकरणों 34.4, 34.1.3.1, 34.6, 34.7, 34.8, 34.9, और 34.10 से x दिशा में N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y तथा भार के घटकों को संयोजित कर सकते हैं। उभयनिष्ठ गुणक $d\alpha_x d\alpha_y$ को निरस्त करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{\partial(N_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} - V_y \frac{a_x a_y}{r_{xy}} - V_x a_y \frac{a_x}{r_x} + p_x a_x a_y = 0 \tag{34.11}$$

2/5 $\Sigma F_y = 0$

[17] यह दूसरा समीकरण $\Sigma F_x = 0$ के अनुरूप समीकरण के ठीक समान है, केवल x और y पदों को परस्पर बदलने पर प्राप्त होता है

$$\frac{\partial(N_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} - V_x \frac{a_y a_x}{r_{yx}} - V_y a_x \frac{a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0 \tag{34.12}$$

3/5 $\Sigma F_z = 0$

[18] z दिशा सदैव मध्य-पृष्ठ के लंबवत परिभाषित की जाती है; अतः यह सदैव वक्रता की प्रमुख त्रिज्याओं की दिशा में होती है, चित्र 34.4। इसलिए छोटे कोणों के लिए $\sin\theta \simeq \theta$ माना जा सकता है।

$\Sigma F_x = 0$ के समान, प्रतिबल परिणामकों N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, N_{yx}, दो अरीय अपरूपण बलों V_x, V_y तथा बाह्य दाबों के योगदानों पर विचार किया जाएगा। प्रतिबल युग्म z दिशा में कोई बल-घटक नहीं देते। प्रत्येक घटक को प्रतिबल परिणामक, चित्र 34.1a, अथवा अरीय अपरूपण बल, चित्र 34.4, को उस अवयवी भुजा की लंबाई से गुणा करके निर्धारित किया जाएगा जिस पर वह कार्य करता है।

N_x का योगदान:

$$\Sigma F_z^{N_x} = N_x a_y d\alpha_y \underbrace{\frac{a_x}{r_x} d\alpha_x}_{\sin\theta \simeq \theta} + 2^{nd} \text{ order terms} \tag{34.13}$$

[19] निम्न सभी व्यंजक N_x सूत्रण के विन्यास के समान होंगे, जिनमें x और y चरों को बदला जाएगा।

N_y का योगदान:

$$\Sigma F_z^{N_y} = N_y a_x d\alpha_x \frac{a_y}{r_y} d\alpha_y \tag{34.14}$$

N_{xy} का योगदान:

$$\Sigma F_z^{N_{xy}} = N_{xy} a_y d\alpha_y \frac{a_x}{r_{xy}} d\alpha_x \tag{34.15}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

N_{yx} **का योगदान:**

$$\Sigma F_z^{N_{yx}} = N_{yx} a_x d\alpha_x \frac{a_y}{r_{xy}} d\alpha_y \tag{34.16}$$

V_x **का योगदान:**

$$\Sigma F_z^{V_x} = -V_x a_y d\alpha_y + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \underbrace{\cos\left(\frac{a_x}{r_x} d\alpha_x\right)}_{\simeq 1} \left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y$$

$$= \frac{\partial (V_x a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{34.17}$$

V_y **का योगदान:** V_x के सादृश्य से

$$\Sigma F_z^{V_y} = \frac{\partial (V_y a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{34.18}$$

बाह्य भार का योगदान: समीकरण 34.10 से

$$\Sigma F_z^{p} = p_z a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{34.19}$$

[19] अंततः अब हम z दिशा में N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y तथा भार के घटकों को क्रमशः समीकरणों 34.13, 34.14, 34.15, 34.16, 34.17, 34.18, और 34.19 से संयोजित कर सकते हैं। पुनः उभयनिष्ठ गुणक $d\alpha_x d\alpha_y$ को निरस्त करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{\partial (V_x a_y)}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial (V_y a_x)}{\partial \alpha_y} + N_x \frac{a_x}{r_x} a_y + N_{xy} \frac{a_x}{r_{xy}} a_y + N_{yx} \frac{a_y}{r_{xy}} a_x + N_y \frac{a_y}{r_y} a_x + p_z a_x a_y = 0 \tag{34.20}$$

4/5 $\Sigma M_x = 0$

[20] आघूर्णों के हलों में ऐसे घटक हैं जो ऊपर देखे गए बल-घटकों के समान हैं; मुख्य अंतर योगदानकर्ताओं का है। प्रतिबल परिणामकों का कोई योगदान नहीं होता और केवल एक अरीय अपरूपण बल, V_y, पर विचार किया जाता है। किंतु अब प्रतिबल युग्म M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, x, y और z दिशाओं में आघूर्ण-घटक देते हैं। प्रत्येक घटक को प्रतिबल युग्म, चित्र 34.3d, अथवा अरीय अपरूपण बल, चित्र 34.4, को उस अवयवी भुजा की लंबाई से गुणा करके निर्धारित किया जाएगा जिस पर वह कार्य करता है।

M_x **का योगदान:** x अक्ष के परितः इसका घटक N_x के y दिशा वाले घटक के सदृश है (समीकरण 34.4 में x और y को परस्पर बदलकर)

$$\Sigma M_x^{M_x} = M_x a_y d\alpha_y \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} = M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{34.21}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

M_y का योगदान: समीकरण 34.4 के समान तथा चित्र 34.3d के संदर्भ में

$$\begin{aligned}\Sigma M_x^{M_y} &= M_y a_x d\alpha_x - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{d\alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \\ &= -\frac{\partial (M_y a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \end{aligned} \tag{34.22}$$

M_{xy} का योगदान: यह समीकरण 34.22 के सदृश है

$$\Sigma M_x^{M_{xy}} = -M_{xy} a_y d\alpha_y + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial a_y}{d\alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y = \frac{\partial (M_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{34.23}$$

M_{yx} का योगदान:

$$\Sigma M_x^{M_{yx}} = -M_{yx} a_x d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \frac{d\alpha_y}{a_x} = -M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{34.24}$$

V_y का योगदान:

$$\Sigma M_x^{V_y} = V_y a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{34.25}$$

अंततः अब हम क्रमशः समीकरणों 34.21, 34.22, 34.23, 34.24 और 34.25 से सभी घटकों M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} तथा V_y के प्रभाव को संयोजित कर सकते हैं। उभयनिष्ठ गुणक $d\alpha_x d\alpha_y$ को निरस्त करने पर प्राप्त होता है

$$-\frac{\partial (M_y a_x)}{\partial \alpha_y} + M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial (M_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + V_y a_x a_y = 0 \tag{34.26}$$

5/5 $\Sigma M_y = 0$

y अक्ष के परितः आघूर्ण समीकरण 34.26 के समान व्यंजक देते हैं, केवल x और y पादांक परस्पर बदलते हैं तथा ऐंठन-प्रतिबल युग्मों के चिह्न उलट जाते हैं।

$$-\frac{\partial (M_x a_y)}{\partial \alpha_x} + M_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial (M_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + V_x a_x a_y = 0 \tag{34.27}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.1.3.2 संतुलन समीकरणों का पूर्ण समुच्चय

21 5 संतुलन समीकरणों, समीकरण 34.11, 34.12, 34.20, 34.26 और 34.27, को नीचे संक्षेपित किया गया है

$$\Sigma F_x = \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(N_x a_y) - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(N_{yx} a_x) - V_y \frac{a_x a_y}{r_{xy}} - V_x a_y \frac{a_x}{r_x} + p_x a_x a_y = 0$$

$$\Sigma F_y = \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(N_y a_x) - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(N_{xy} a_y) - V_x \frac{a_y a_x}{r_{yx}} - V_y a_x \frac{a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0$$

$$\Sigma F_z = \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(V_x a_y) + \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(V_y a_x) + N_x \frac{a_x}{r_x} a_y + N_{xy}\frac{a_x}{r_{xy}} a_y + N_{yx}\frac{a_y}{r_{xy}} a_x + N_y \frac{a_y}{r_y} a_x + p_z a_x a_y = 0$$

$$\Sigma M_x = -\frac{\partial}{\partial \alpha_y}(M_y a_x) + M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - M_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(M_{xy} a_y) + V_y a_x a_y = 0$$

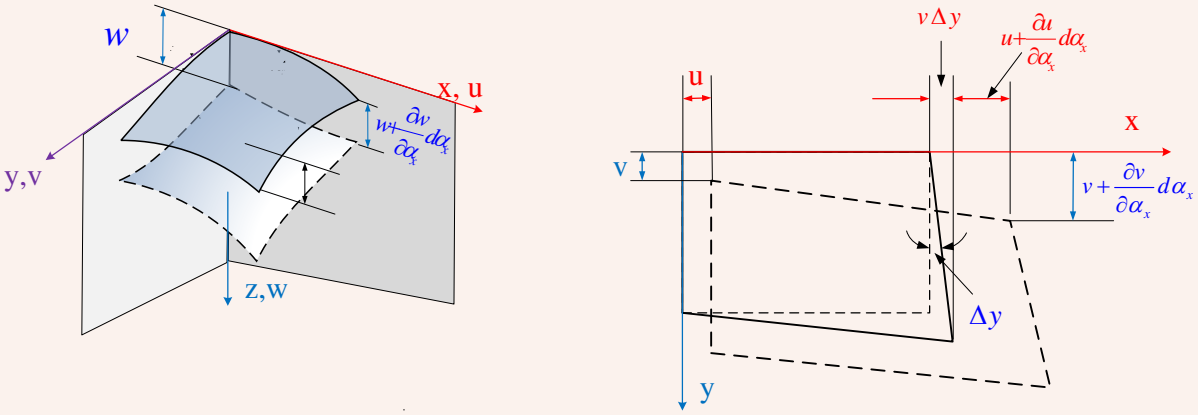
$$\Sigma M_y = -\frac{\partial}{\partial \alpha_x}(M_x a_y) + M_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(M_{yx} a_x) + V_x a_x a_y = 0 \tag{34.28}$$

34.1.3.3 सुसंगतता

22 अब हम सुसंगतता समीकरणों पर विचार करते हैं। ये तीनों विस्थापनों को विकृतियों से संबंधित करते हैं।

1/4 ε_{x0}

अब चित्र 34.6 के संदर्भ में विकृति-विस्थापन संबंध व्युत्पन्न किए जाएँगे। लंबाई $a_x d\alpha_x$ का रेखीय



चित्र 34.6: अवकल कवच अवयव, प्रारंभिक एवं विरूपित अवस्था

अवयव लंबाई में तीन परिवर्तनों से गुजरता है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अक्षीय विस्तार, x अक्ष: $\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x$

पार्श्व विस्तार, y अक्ष: अवकल अवयव का मूल अविरूपित आकार आयताकार नहीं है ($d\alpha_x$ और $d\alpha_y$ के कारण), तथा धनात्मक y भुजा और ऊर्ध्वाधर के बीच का कोण (समीकरण 34.5) है $\Delta_y = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y}$ (0 के स्थान पर); अतः y अक्ष के अनुदिश स्थानांतरण से x अक्ष के अनुदिश $v\Delta_y$ के बराबर स्थानांतरण होगा।

वक्रता-त्रिज्या में कमी: $-w\frac{a_x}{r_x} d\alpha_x$

इन सभी पदों का योग करके और मूल लंबाई $a_x d\alpha_x$ से भाग देने पर प्राप्त होता है

$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \tag{34.29}$$

जहाँ पादांक 0 दर्शाता है कि मध्य-पृष्ठ पर विचार किया जा रहा है।

2/4 ε_{y0}

[23] सादृश्य से, y अक्ष के अनुदिश मध्य-पृष्ठ की विकृति पिछले समीकरण में x और y चरों के साथ v तथा u को परस्पर बदलकर प्राप्त होती है।

$$\varepsilon_{y0} = \frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \tag{34.30}$$

3/4 γ_{xy0}

[24] $a_y d\alpha_y$ और $a_x d\alpha_x$ के बीच कुल कोणीय परिवर्तन को निरूपित करने वाली अपरूपण विकृति भी कुछ जटिल है; इसके तीन घटक पृथक्-पृथक् व्युत्पन्न किए जाएँगे।

विस्थापनों का अंतर: v पद के लिए, चित्र 34.6, हमें प्राप्त होता है $(v + \frac{\partial v}{\partial \alpha_x} d\alpha_x) - v$। इसे अवयवी लंबाई $a_x d\alpha_x$ से भाग देकर और u विस्थापन के लिए यही संक्रिया दोहराकर प्राप्त होता है:

$$\gamma^I_{xy0} = \frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} \tag{34.31}$$

धनात्मक भुजाओं की लंबाई में वृद्धि: हम पहले Δs निर्धारित करते हैं, चित्र 34.7।

$$\Delta s = \left(u + \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \Delta_y$$

जहाँ Δ_y को समीकरण 34.5 में इस प्रकार व्युत्पन्न किया गया था

$$\Delta_y = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः,

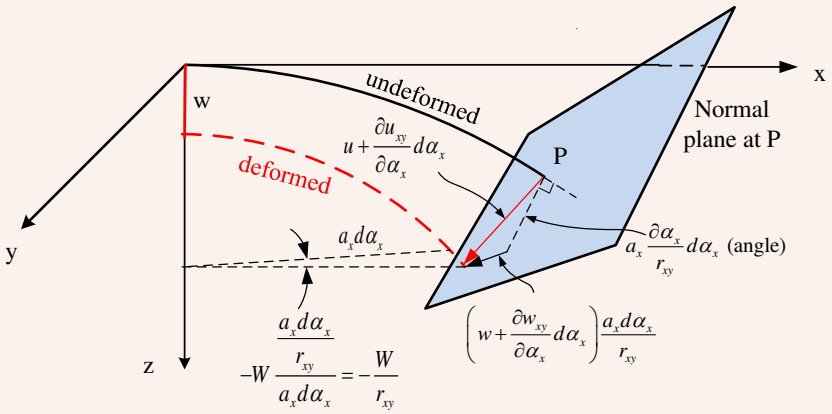
$$\begin{aligned}\Delta s &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} \\ &= u \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y}}_{\text{Higher order term}}\end{aligned}$$

Δs को अवयव की लंबाई $a_x d\alpha_x$ से भाग देकर और दूसरी भुजा के लिए यही संक्रिया दोहराकर प्राप्त होता है

$$\gamma^{II}_{xy0} = -\frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \tag{34.32}$$

जहाँ ऋण चिह्न इस तथ्य को दर्शाता है कि $x = 0$ और $y = 0$ फलकों के बीच का कोण घट गया है (मूलतः यह समकोण था)।

पृष्ठों का ऐंठन: चित्र 34.7 के संदर्भ में, हमें प्राप्त होता है



चित्र 34.7: अवकल कवच अवयव, प्रारंभिक एवं विरूपित अवस्था; धनात्मक भुजाओं की लंबाई में वृद्धि से उत्पन्न अपरूपण विकृति

$$w^* = -w \frac{a_x d\alpha_x}{r_{xy}}$$

मूल लंबाई $a_x d\alpha_x$ से भाग देकर और यह पहचानते हुए कि समतल $x = 0$ के लिए भी एक समान पद है, हमें प्राप्त होता है

$$\gamma^{III}_{xy0} = -2 \frac{w}{r_{xy}} \tag{34.33}$$

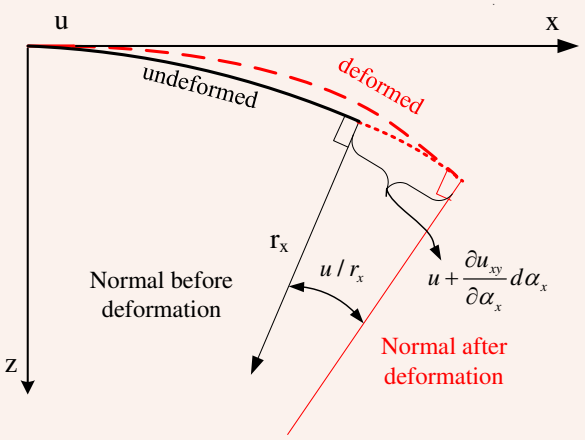
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः तीनों घटकों, समीकरण 34.31, 34.32 और 34.33, का योग करने पर प्राप्त होता है

$$\gamma_{xy0} = \underbrace{\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y}} - \underbrace{\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}} - \underbrace{2\frac{w}{r_{xy}}} \tag{34.34}$$

4/4 χ_x, χ_y, $2\chi_{xy}$

25 $x-z$ समतल, चित्र 34.8, पर विचार करते हुए और $w=0$ मानते हुए, विरूपण से पूर्व और पश्चात



चित्र 34.8: अवकल कवच अवयव, प्रारंभिक एवं विरूपित अवस्था; घूर्णन

धनात्मक फलक पर अवकल अवयव के अभिलंबों के बीच का कोण $\frac{u}{r_x}$ है।

26 अनुप्रस्थ विस्थापन के कारण पारंपरिक पद है $\frac{\partial w}{\partial s_{\alpha x}} = \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x}$. अंततः ऐंठन पद को भी सम्मिलित करने पर प्राप्त होता है

$$\phi_x = \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}} \tag{34.35}$$

27 इसी प्रकार प्राप्त होता है

$$\phi_y = \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}$$

28 अतः वक्रता में परिवर्तन, घूर्णन परिवर्तन $\partial \phi_x$ प्रति चाप-लंबाई $a_x \partial \alpha_x$ के बराबर होगा

$$\chi_x = \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इसके अतिरिक्त, a_x और a_y के बदलते मानों के कारण अवयव की भुजाएँ समांतर नहीं हैं; फलतः घूर्णन ϕ_y का y दिशा वाला प्रभाव x दिशा में एक घटक उत्पन्न करेगा।

$$\frac{\phi_y \Delta_y}{a_x \partial\alpha_x} = \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}$$

29 अतः वक्रता-परिवर्तनों के पूर्ण व्यंजक हो जाते हैं

$$\begin{aligned}
\chi_x &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \\
\chi_y &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \\
2\chi_{xy} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + + \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}
\end{aligned}$$

34.1.3.4 सारांश

30 अब हम तीन अज्ञात विस्थापनों के पदों में सभी छह विकृति-व्यंजकों को संक्षेपित करते हैं। समीकरण 34.29, 34.30, 34.34 और पूर्ववर्ती समुच्चय से हमें प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x0} &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \\
\varepsilon_{y0} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \\
\gamma_{xy0} &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - 2\frac{w}{r_{xy}} \\
\chi_x &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \\
\chi_y &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \\
2\chi_{xy} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}
\end{aligned} \tag{34.36}$$

जहाँ

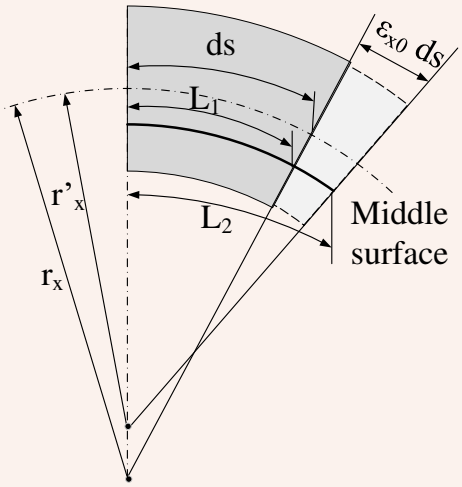
$$\begin{aligned}
\phi_x &= \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}} \\
\phi_y &= \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}
\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.1.3.5 प्रतिबल-विकृति-बल

34.1.3.5.1 प्रतिबल-विकृति

31 विकृति ε_x, जो मध्य-पृष्ठ से दूरी z पर है, चित्र 34.9, मध्य-पृष्ठ के विस्तार से उत्पन्न अक्षीय



चित्र 34.9: अवकल अवयव का मध्य-पृष्ठ

घटक ε_{x0} और बंकन से उत्पन्न एक अन्य घटक से बनी है।

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{L_2 - L_1}{L1} \\ L_1 &= ds\left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \\ L_2 &= ds(1+\varepsilon_{x0})\left(1 - \frac{z}{r'_x}\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{(1+\varepsilon_{x0})(1 - z/r'_x) - (1 - z/r_x)}{1 - z/r_x} \\ &= \frac{1 - z/r'_x + \varepsilon_{x0}(1 - z/r'_x) - 1 + z/r_x}{1 - z/r_x} \end{aligned}$$

32 एकक के साथ आने पर छोटे पदों z/r'_x और z/r_x को छोड़ा जा सकता है,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x}\right)$$

33 पुनः वक्रता में परिवर्तन को χ से निरूपित करने पर प्राप्त होता है

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\chi_x \tag{34.37}$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} - z\chi_y \tag{34.38}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy} \tag{34.39}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[34] इस बिंदु से हम तंतर के पदार्थ-गुणों की उपेक्षा नहीं करेंगे। प्रतिबल–विकृति संबंध व्युत्पन्न करने के लिए हम पदार्थ को रैखिक प्रत्यास्थ, समदैशिक और समांगी मानेंगे। चूँकि हम पहले ही $\sigma_z = 0$ मान चुके हैं, अतः यह समतल प्रतिबल की अवस्था है और पदार्थ-यांत्रिकी से:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

जहाँ दृढता मापांक $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ है।

[35] विकृतियों के वास्तविक व्यंजकों, समीकरण 34.37, 34.38 और 34.39, को प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0} - z(\chi_x + \nu\chi_y)]$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0} - z(\chi_y + \nu\chi_x)]$$
$$\tau_{xy} = G(\gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy})$$

34.1.3.5.2 प्रतिबल–बल

[36] समीकरणों के पिछले समुच्चय को बल–प्रतिबल संबंधों के व्यंजकों, समीकरण 34.3, में प्रतिस्थापित करके, h पर समाकलन करके तथा एकक के साथ आने वाले z/r_x और z/r_y पदों की उपेक्षा करके प्राप्त होता है

$$N_x = K(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0}) \tag{34.40}$$
$$N_y = K(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0})$$
$$N_{xy} = N_{yx0} = Gh\gamma_{xy0}$$
$$M_x = -D(\chi_x + \nu\chi_y)$$
$$M_y = -D(\chi_y + \nu\chi_x)$$
$$M_{xy} = -M_{yx} = \frac{Gh^3}{6}\chi_{xy} = D(1-\nu)\chi_{xy} \tag{34.41}$$

जहाँ

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

K अक्षीय दृढता और D आनमनी दृढता है, जो समतुल्य एक-विमीय समस्या के लिए क्रमशः EA और EI के अनुरूप हैं।

[37] ध्यान दें कि K और D संगत एक-विमीय नियतांकों से गुणक $1-\nu^2$ के कारण बड़े हैं; यह पार्श्व विकृतियों पर प्रतिबंध से उत्पन्न दृढता-वृद्धि को दर्शाता है।

34.1.3.6 अंतिम व्यंजक (विस्थापनों के पदों में बल)

[38] अब समीकरण 34.36 द्वारा दी गई अक्षीय और आनमनी विकृतियों को समीकरण 34.40 से 34.41 में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$
\begin{aligned}
N_x &= K\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x}+\frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{w}{r_x}+\nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y}+\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}-\frac{w}{r_y}\right)\right]\\
N_y &= K\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y}+\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}-\frac{w}{r_y}+\nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x}+\frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{w}{r_x}\right)\right]\\
N_{xy} &= N_{yx} = Gh\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x}+\frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y}-\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}-\frac{2w}{r_{xy}}\right)\\
M_x &= -D\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x}+\frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}+\nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y}+\frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\right)\right]\\
M_y &= -D\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y}+\frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}+\nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x}+\frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\right)\right]\\
M_{xy} &= -M_{yx} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y}+\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x}-\frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\right)
\end{aligned}
\tag{34.42}
$$

जहाँ स्मरण रहे कि समीकरण 34.35 से

$$
\begin{aligned}
\phi_x &= \frac{u}{r_x}+\frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x}+\frac{v}{r_{xy}}\\
\phi_y &= \frac{v}{r_y}+\frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y}+\frac{u}{r_{xy}}
\end{aligned}
$$

[39] इन छह समीकरणों में तीन प्रतिबल परिणामक (N_x, N_y और N_{xy}), तीन प्रतिबल युग्म (M_x, M_y और M_{xy}) तथा तीन विस्थापन (u, v और w) हैं।

[40] संतुलन के पाँच समीकरणों, समीकरण 34.28, में आठ अज्ञात हैं: पाँच प्रतिबल परिणामक (N_x, N_y, N_{xy}, V_x और V_y), तथा तीन प्रतिबल युग्म (M_x, M_y और M_{xy})।

[41] जब समीकरणों के इन दोनों समुच्चयों को संयोजित किया जाता है, तब कुल 11 समीकरण और 11 अज्ञात (N_x, N_y, N_{xy}, V_x, V_y, M_x, M_y, और M_{xy}, u, v तथा w) होते हैं। अतः समस्या समुचित रूप से परिभाषित है और पूर्ण हल संभव है।

[42] सारणी 34.3 पतले कवचों को नियंत्रित करने वाले कुछ प्रमुख समीकरणों को संक्षेपित करती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

तालिका 34.3: पतले कवचों के प्रमुख नियंत्रक समीकरणों का सारांश

शुद्धगतिक

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{a_x a_y} \underbrace{\begin{bmatrix} a_y \frac{\partial}{\partial \alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} & -\frac{a_x a_y}{r_x} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_y} & a_x \frac{\partial}{\partial \alpha_y} & -\frac{a_x a_y}{r_y} \\ a_x \frac{\partial}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} & a_y \frac{\partial}{\partial \alpha_x} - \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} & -\frac{2 a_x a_y}{r_{xy}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\chi}} = \frac{1}{a_x a_y} \underbrace{\begin{bmatrix} a_y \frac{\partial}{\partial \alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \\ \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} & a_x \frac{\partial}{\partial \alpha_y} \\ a_x \frac{\partial}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} & a_y \frac{\partial}{\partial \alpha_x} - \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

संतुलन

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(a_y) & -\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(a_x) \\ -\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} & \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(a_x) & \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(a_y) \\ \frac{a_x}{r_x} a_y & \frac{a_y}{r_y} a_x & \frac{a_x}{r_{xy}} a_y + \frac{a_y}{r_{xy}} a_x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} & -\frac{\partial}{\partial \alpha_y}(a_x) & \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(a_y) - \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \\ -\frac{\partial}{\partial \alpha_x}(a_y) & \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(a_x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} + a_x a_y \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{r_x} & -\frac{1}{r_{xy}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{r_{xy}} & -\frac{1}{r_y} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(a_y) & \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(a_x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{zz} \\ V_{xx} \\ V_{yy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\rho}} = 0$$

संघटक

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \beta \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & -z & -z\nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 & -z\nu & -z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & \frac{-2z}{\beta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx0} \\ \varepsilon_{yy0} \\ \gamma_{xy0} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}}$$

$$\beta = \frac{E}{1-\nu^2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.1.4 सरलीकरण

43 पिछले खंड में विवेचित विश्लेषण की व्युत्पत्ति (11 समीकरण - 11 अज्ञात) किसी भी प्रकार के पतले प्रत्यास्थ कवच के प्रतिबलों और विस्थापनों को हल करने के लिए प्रयुक्त की जा सकती है। किंतु सरलतम पतले कवच तंत्रों के लिए भी इस प्रकार का विश्लेषण *अत्यंत जटिल* हो सकता है। अतः कवच अभिकल्प में विश्लेषण को सुगम बनाने के लिए प्रायः दो प्रकार के सरलीकरण अपनाए गए हैं।

गणितीय सूत्रण प्रायः हम अपेक्षाकृत महत्वहीन कुछ पदों को मान लेते या सिद्ध करते हैं और उन्हें विचाराधीन समीकरण से हटा देते हैं। यह कार्य §34.1.3 में एकक के साथ आने वाले पदों z/r की उपेक्षा तथा समतल प्रतिबल, $\sigma_z = 0$, की धारणा द्वारा पहले ही किया जा चुका है। इस सरलीकरण का उद्देश्य पदों की संख्या घटाते हुए भी युक्तिसंगत गणितीय हल प्राप्त करना है।

भौतिक सूत्रण पुनः, विश्लेषण को सरल बनाने के लिए किसी विशिष्ट संरचनात्मक क्रिया की धारणा की जा सकती है। इस धारणा द्वारा कवच तंत्र को किसी समतुल्य सरलतर संरचना से प्रतिस्थापित किया जा सकता है। तत्पश्चात इस नई, सरलतर संरचना का उपयोग जटिल संरचना के विश्लेषण हेतु किया जाता है।

44 ये सरलीकरण प्रबलित कंक्रीट अभिकल्प में वांछनीय हैं, जहाँ निर्माण-सटीकता के अभाव के कारण सूक्ष्म विश्लेषण न्यायोचित नहीं होता। फिर भी अभिकल्पक के लिए तंत्र की भौतिक विशेषताओं और संगत गणितीय सूत्रण से ही प्राप्त वास्तविक संरचनात्मक क्रिया को समझना अत्यावश्यक है।

45 विश्लेषण के दो सरलीकृत सिद्धांतों—उथले कवच का सिद्धांत और झिल्ली सिद्धांत—पर विचार किया जाएगा; इन्हें आगामी खंडों में प्रस्तुत किया गया है।

34.1.4.1 उथले कवच

46 उथले कवच का सिद्धांत उन दो सरलीकृत कवच सिद्धांतों में पहला है जिनकी हम समीक्षा करेंगे (दूसरा झिल्ली सिद्धांत है)। निम्न विवेचन में गणितीय और भौतिक तंत्र-सूत्रण, दोनों के सरलीकरणों का उपयोग किया जाएगा।

34.1.4.1.1 धारणाएँ

47 उथले कवच का सिद्धांत निम्न धारणाओं का उपयोग करेगा:

1. किसी संदर्भ समतल की तुलना में कवच की ढाल छोटी है (छतों के लिए प्रायः क्षैतिज समतल)।
2. पृष्ठ की वक्रता छोटी है।
3. कवच की सीमाएँ ऐसी हैं कि पृष्ठीय भार समतल-अंतर्गत प्रतिबल परिणामकों (N_x, N_y और N_{xy}) द्वारा वहन किए जाते हैं। अतः अनुप्रस्थ विक्षेप समतल-अंतर्गत विक्षेपों से कहीं अधिक होंगे।
4. पृष्ठ की वक्रता में परिवर्तन छोटे हैं।

34.1.4.1.2 धारणाओं का अनुप्रयोग

48 अब हम इन धारणाओं को समीकरणों 34.28 और 34.42 पर लागू करेंगे।

- धारणा 1 हमें भारण के अरीय घटक की उपेक्षा करने देती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- धारणा 2 के अनुसार समीकरण 34.28 के प्रथम दो समीकरणों में V वाले पद और समीकरण 34.28 के तीसरे में N वाले पद छोटे हैं। यही बात समीकरण 34.42 के प्रथम तीन समीकरणों में w वाले पदों तथा 34.42 के अंतिम तीन समीकरणों में u और v वाले पदों पर भी लागू होती है। किंतु तीसरी धारणा पर विचार किए बिना इन पदों को सीधे नहीं छोड़ा जा सकता।
- धारणा 3 कवच को एक चपटे चाप से संबंधित करती है, जिसमें समान भारण के अधीन अक्षीय प्रतिबल और ऊर्ध्वाधर विस्थापन प्रधान होते हैं। अर्थात समीकरण 34.28 के तीसरे समीकरण में समतल-अंतर्गत प्रतिबल परिणामकों के छोटे अनुप्रस्थ घटक, अनुप्रस्थ अपरूपण परिणामक के परिवर्तन की तुलना में उपेक्षणीय नहीं हैं।
- धारणा 4 हमें a_x और a_y को नियत मानने देती है।

49 धारणाओं 2 और 3 को संयोजित करके हम समीकरण 34.28 के प्रथम दो पदों से V को हटा सकते हैं, किंतु तीसरे से N को नहीं। समीकरण 34.42 से प्रतिबल युग्मों पर समतल-अंतर्गत विस्थापनों (u और v पदों) का प्रभाव हटाया जा सकता है, किंतु समतल-अंतर्गत प्रतिबल परिणामकों पर विस्थापन (w पदों) का प्रभाव नहीं।

50 समीकरणों 34.28 और 34.42 को इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है:

$$\frac{1}{a_x}\frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial N_{yx}}{\partial \alpha_y} + p_x = 0 \tag{34.43a}$$

$$\frac{1}{a_y}\frac{\partial N_y}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial N_{xy}}{\partial \alpha_x} + p_y = 0 \tag{34.43b}$$

$$\frac{1}{a_x}\frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial V_y}{\partial \alpha_y} + \frac{N_x}{r_x} + \frac{2N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y} + p_z = 0 \tag{34.43c}$$

$$-\frac{1}{a_y}\frac{\partial M_y}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial M_{xy}}{\partial \alpha_x} + V_y = 0 \tag{34.43d}$$

$$-\frac{1}{a_x}\frac{\partial M_x}{\partial \alpha_x} - \frac{1}{a_y}\frac{\partial M_{yx}}{\partial \alpha_y} + V_x = 0 \tag{34.43e}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और

$$N_x = K\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x} + \nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y}\right)\right] \tag{34.44a}$$

$$N_y = K\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y} + \nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x}\right)\right] \tag{34.44b}$$

$$N_{xy} = N_{yx} = Gh\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{2w}{r_{xy}}\right) \tag{34.44c}$$

$$M_x = -D\left(\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x^2} + \nu\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_y^2}\right) \tag{34.44d}$$

$$M_y = -D\left(\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_y^2} + \nu\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x^2}\right) \tag{34.44e}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)\left(\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}\right) \tag{34.44f}$$

[51] हम देखते हैं कि हमारे पास अलग-अलग गहरी-बीम और स्लैब समीकरण हैं, जो समीकरण 34.43c के N पदों तथा 34.44a से 34.44c के w पदों द्वारा युग्मित हैं।

- समीकरण 34.43a और 34.43b अपने समतल में भारित प्लेट के व्यंजक हैं (*गहरी-बीम समीकरण*)।
- समीकरण 34.44a से 34.44c भी w पदों को छोड़कर गहरी-बीम समीकरण हैं। समीकरण 34.44d से 34.44f पार्श्वतः भारित प्लेट (*बंकित स्लैब*) के व्यंजक हैं।
- समीकरण 34.43c से 34.43e भी समीकरण 34.43c के N पदों को छोड़कर em स्लैब समीकरण हैं।

34.1.4.1.3 गहरी-बीम समीकरण

[52] अब हम उपर्युक्त व्यंजकों को एकल उथले-कवच व्यंजक में संयोजित करेंगे। किंतु पहले गहरी-बीम और स्लैब समीकरण व्युत्पन्न करने होंगे। समीकरणों 34.44a, 34.44b और 34.44c से

$$N_x - \nu N_y = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x}\right)$$

$$N_y - \nu N_x = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y}\right)$$

$$2(1+\nu)N_{xy} = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{2w}{r_{xy}}\right)$$

अप्रकाशित प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53 दो बार अवकलित कर संयोजित करने पर प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2(N_x-\nu N_y)}{\partial\alpha_y^2}-\frac{2(1+\nu)}{a_xa_y}\frac{\partial^2N_{xy}}{\partial\alpha_x\partial\alpha_y}+\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2(N_y-\nu N_x)}{\partial\alpha_x^2}\\&=-K(1-\nu^2)\left[\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_x^2}\left(\frac{w}{r_y}\right)-\frac{2}{a_xa_y}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_x\partial\alpha_y}\left(\frac{w}{r_{xy}}\right)+\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_y^2}\left(\frac{w}{r_x}\right)\right]\end{aligned}\tag{34.45}$$

54 जब r_x, r_y और r_{xy} को नियत माना जाता है, तब हम लिखते हैं

$$\nabla_R^2w=\left(\frac{1}{r_ya_x^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_x^2}-\frac{2}{r_{xy}a_xa_y}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_x\partial\alpha_y}+\frac{1}{r_xa_y^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_y^2}\right)w$$

55 प्रतिबल परिणामकों को निम्न प्रतिबल फलनों से प्रतिस्थापित करके

$$N_x=\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2F}{\partial\alpha_y^2}-\int p_xa_xd\alpha_x\tag{34.46}$$

$$N_y=\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2F}{\partial\alpha_x^2}-\int p_ya_yd\alpha_y\tag{34.47}$$

$$N_{xy}=-\frac{1}{a_xa_y}\frac{\partial^2F}{\partial\alpha_x\partial\alpha_y}\tag{34.48}$$

और समीकरण 34.45 में प्रतिस्थापित करके गहरी बीमों का अवकल समीकरण प्राप्त होता है

$$\nabla^4F+K(1-\nu^2)\nabla_R^2w=\int\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2p_x}{\partial\alpha_y^2}a_xd\alpha_x+\int\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2p_y}{\partial\alpha_x^2}a_yd\alpha_y-\nu\frac{1}{a_x}\frac{\partial p_x}{\partial\alpha_x}-\nu\frac{1}{a_y}\frac{\partial p_y}{\partial\alpha_y}\tag{34.49}$$

जहाँ

$$\nabla^4F=\left(\frac{1}{a_x^4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha_x^4}+\frac{2}{a_x^2a_y^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha_x^2\partial\alpha_y^2}+\frac{1}{a_y^4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha_y^4}\right)F$$

56 यदि $r_x=r_y=r_{xy}=\infty$, $a_xd\alpha_x=dx$, और $a_yd\alpha_y=dy$, तथा $p_x=p_y=0$, तो समीकरण 34.49 घटकर होता है

$$\nabla^4F=0$$

34.1.4.1.4 स्लैब समीकरण

57 स्लैब समीकरण व्युत्पन्न करने के लिए पहले समीकरणों 34.43d और 34.43e से V_x तथा V_y के मान समीकरण 34.43c में प्रतिस्थापित करके संयुक्त समीकरण बनाया जाएगा

$$\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2M_x}{\partial\alpha_x^2}-2\frac{1}{a_xa_y}\frac{\partial^2M_{xy}}{\partial\alpha_x\partial\alpha_y}+\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2M_y}{\partial\alpha_y^2}+\frac{N_x}{r_x}+\frac{2N_{xy}}{r_{xy}}+\frac{N_y}{r_y}+p_z=0\tag{34.50}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

58 समीकरणों 34.44d, 34.44e और 34.44f को 34.50 में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$-\nabla^4 w + \frac{1}{D}\left(\frac{N_x}{r_x} + \frac{2N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y}\right) = -\frac{p_z}{D}$$

59 पुनः समीकरणों 34.46, 34.47 और 34.48 के प्रतिबल फलनों को अवकल समीकरण 34.1.4.1.4 में रखने पर बंकित स्लैब का अवकल समीकरण प्राप्त होता है

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D}\nabla_R^2 F = \frac{p_z}{D} - \frac{1}{D}\left(\frac{1}{r_x}\int p_x a_x d\alpha_x + \frac{1}{r_y}\int p_y a_y d\alpha_y\right) \tag{34.51}$$

यदि $r_x = r_y = r_{xy} = \infty$, तो समीकरण 34.51 घटकर होता है

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{D}$$

34.1.4.1.5 उथले कवचों का समीकरण

60 गहरी बीम (34.49) और बंकित स्लैब (34.51) के अवकल समीकरण उथले कवचों की समस्या हल करने के लिए आवश्यक हैं। युगपत अवकल समीकरणों को इस रूप में पुनर्लिखा जा सकता है

$$\nabla^4 F + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 w = f(p) \tag{34.52}$$

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D}\nabla_R^2 F = f'(p) \tag{34.53}$$

जहाँ $f(p)$ और $f'(p)$ क्रमशः समीकरणों 34.49 और 34.51 के दाएँ पक्ष हैं। यदि समीकरण 34.52 पर ∇^4 तथा समीकरण 34.53 पर $K(1-\nu^2)\nabla_R^2$ संक्रिया करके

61 संयोजित करें, तो प्राप्त होता है

$$\nabla^8 F + \frac{12(1-\nu^2}{h^2}\nabla_R^4 F = \nabla^4 f(p) + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 f' p \tag{34.54}$$

62 किंतु यदि समीकरण 34.52 पर $(1/D)\nabla_R^2$ और समीकरण 34.53 पर ∇^4 संक्रिया करके संयोजित करें, तो उथले कवचों का हल प्राप्त होता है

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2}\nabla_R^4 w = \frac{1}{D}\nabla_R^2 f(p) + \nabla^4 f'(p)$$

34.1.4.2 झिल्ली सिद्धांत

झिल्ली सिद्धांत वह दूसरी सरलीकृत विधि है जिसकी हम समीक्षा करेंगे। किंतु हमारा ध्यान कार्यविधि की अपेक्षा धारणाओं और सिद्धांत पर अधिक रहेगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.1.4.2.1 धारणाएँ

63 झिल्ली सिद्धांत निम्न धारणाओं का उपयोग करेगा:

1. कवच के समस्त बंकन की उपेक्षा की जाती है। अतः समीकरण 34.28 हो जाता है

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= \frac{\partial(N'_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N'_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N'_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N'_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + p_x a_x a_y = 0 \\ \Sigma F_y &= \frac{\partial(N'_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N'_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N'_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N'_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + p_y a_x a_y = 0 \\ \Sigma F_z &= \frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N'_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0\end{aligned} \tag{34.55}$$

2. चूँकि हम $N_{xy} = N_{yx}$ मानते हैं, उपर्युक्त तीन समीकरणों में केवल तीन अज्ञात N'_x, N'_y और $N'_{xy} = N'_{yx}$ हैं। अभाज्य चिह्न दर्शाते हैं कि मान सन्निकट हैं।
3. सभी झिल्ली प्रतिबल कवच के समतल में कार्य करते हैं।

34.1.4.2.2 सिद्धांत

64 निम्न शर्तें पूरी होने पर झिल्ली सिद्धांत युक्तिसंगत अभिकल्प-आधार प्रदान कर सकता है:

1. झिल्ली प्रतिबल परिणामकों से उत्पन्न विस्थापन कवच के बंकन को पर्याप्त रूप से न बढ़ाए। पूर्व धारणाओं के अनुसार कवच के समस्त बंकन की उपेक्षा की गई है।
2. संपूर्ण कवच-पृष्ठ पर समान भार-वितरण होना चाहिए।
3. सीमाएँ झिल्ली प्रतिबल परिणामकों द्वारा अपेक्षित बल प्रदान कर सकें और विस्थापनों की अनुमति दे सकें।

65 सामान्यतः झिल्ली सिद्धांत अपर्याप्त होता है, किंतु अर्धगोलीय छतों अथवा बेलनाकार टंकियों के लिए उपयोगी हो सकता है।

34.1.4.2.3 वर्गीकरण

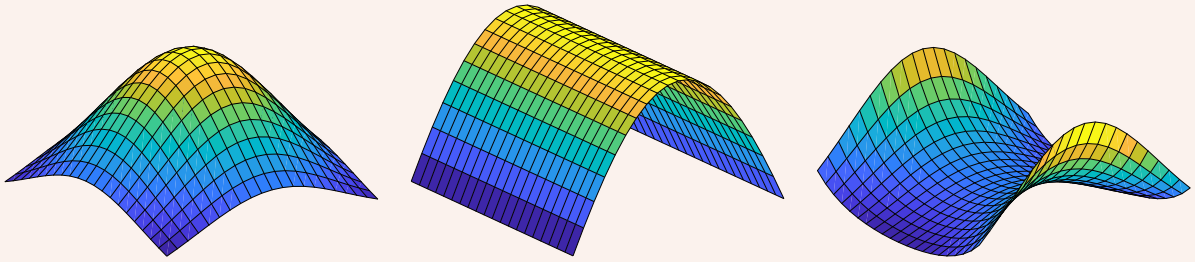
66 पतले कवचों को तीन मुख्य श्रेणियों में वर्गीकृत किया जा सकता है। इस वर्गीकरण का आधार *गाउसीय वक्रता* है, चित्र 34.10।

सिनक्लास्टिक कवच धनात्मक गाउसीय वक्रता वाले होते हैं और समान दिशा वाले वक्रों के दो कुलों से बनते हैं।

मोनोक्लास्टिक कवच शून्य गाउसीय वक्रता वाले होते हैं और वक्रों के एक कुल से बनते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

एंटीक्लास्टिक कवच ऋणात्मक वक्रता वाले होते हैं और विपरीत दिशाओं वाले वक्रों के दो कुलों से बनते हैं।



(a) सिनक्लास्टिक (गुंबद) (b) मोनोक्लास्टिक (बैरल वॉल्ट) (c) एंटीक्लास्टिक (अतिपरवलयज–परवलयज)

चित्र 34.10: कवचों का वर्गीकरण

67 तीनों श्रेणियों के बीच प्रमुख गुणात्मक अंतर कवचों के भीतर किनारी प्रभावों का प्रसार है। सिनक्लास्टिक कवचों में किनारी प्रभाव प्रायः शीघ्र मंद हो जाते हैं और किनारे के निकट एक संकीर्ण क्षेत्र तक सीमित रहते हैं। यह गुण सीमाओं को छोड़कर संपूर्ण कवच में झिल्ली सिद्धांत के वैध उपयोग की अनुमति देता है।

68 एकल-वक्रित कवचों में किनारी प्रभाव सिनक्लास्टिक कवच के समान मंद होते हैं, किंतु किनारे से दूर कवच के भीतर अधिक दूरी तक प्रसारित होते हैं। एंटीक्लास्टिक कवचों में मंदन अन्य दोनों की अपेक्षा बहुत कम होता है, जिससे कवच के अधिकांश भाग पर सीमा-प्रभाव प्रधान रहते हैं।

69 एक अन्य वर्गीकरण कवच तंत्रों को घूर्णी अथवा स्थानांतरीय के रूप में परिभाषित करता है। गुंबद और टंकियाँ प्रायः घूर्णी तंत्रों में वर्गीकृत होती हैं, जबकि बेलनाकार बैरल, दीर्घवृत्तीय परवलयज और अतिपरवलयिक परवलयज स्थानांतरीय माने जाते हैं।

70 अंततः सभी कवच विश्लेषणात्मक रूप से परिभाषित नहीं होते (उनका “यांत्रिक” विश्लेषण तो और भी दूर की बात है)। ऐसे कवचों (प्रयोगात्मक रूप से निर्धारित आकृतियों) का अभिकल्प Isler (§15.5.2.2) और Musmeci (§15.5.2.3) ने किया है।

34.1.4.2.4 विशेषीकरण

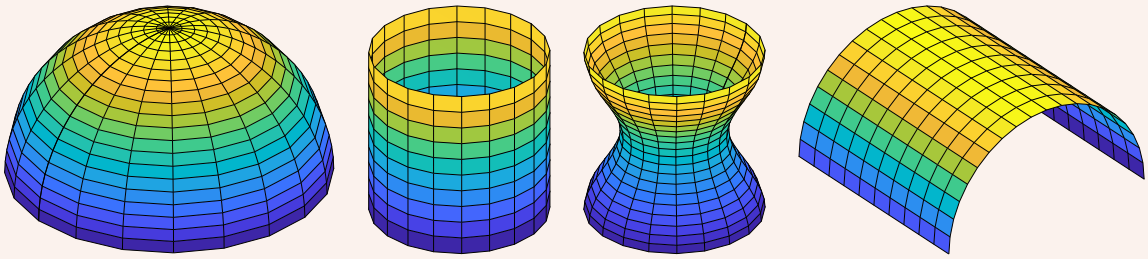
71 झिल्ली धारणा अनेक कवचों के विश्लेषण पर लागू की जा सकती है, चित्र 34.11।

72 किंतु आधार पर स्थानीय “परजीवी” आघूर्ण अपेक्षित हो सकते हैं।

73 इनमें से प्रत्येक कवच के लिए कुछ धारणाएँ की जाती हैं, नियंत्रक संतुलन समीकरण (समीकरण 34.55) को और सरल किया जाता है, सारणी 34.4, तथा समीकरण व्युत्पन्न किए जाते हैं, चित्र 34.12।

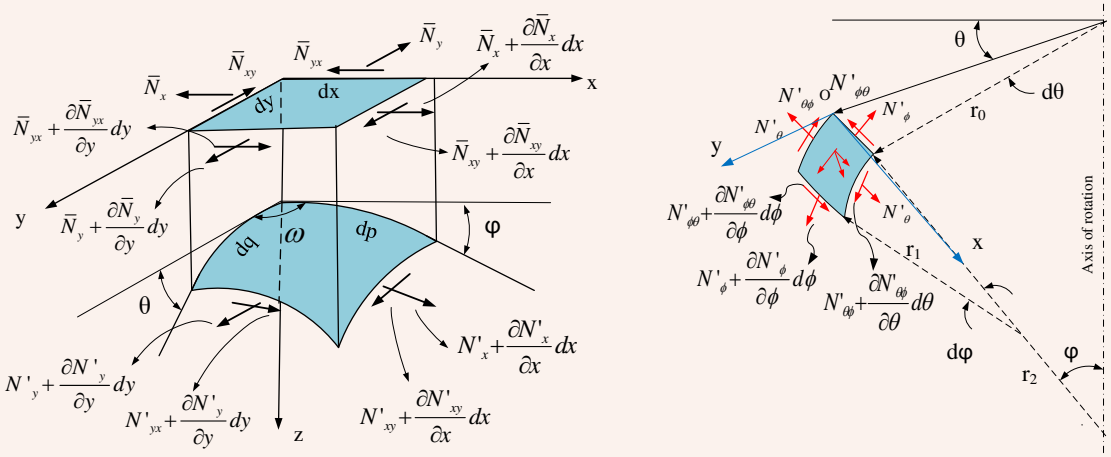
74 नीचे हम केवल बैरल से संबद्ध समीकरणों की व्युत्पत्ति पर विचार करेंगे; अन्य (Billington, 1965) में मिल सकते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) गुंबद (b) कवच भित्ति (c) अतिपरवलयज (d) बैरल

चित्र 34.11: वे कवच जिनमें झिल्ली धारणा (अधिकांशतः) वैध है



(a) अतिपरवलयज (b) गुंबद

चित्र 34.12: अतिपरवलयज और गुंबद के अतिसूक्ष्म अवयवों के मुक्त-पिंड आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 34.4: झिल्ली संरचनाओं की धारणाएँ और नियंत्रक समीकरण

सामान्य समीकरण	
	$\frac{\partial(N'_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N'_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N'_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N'_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + p_x a_x a_y = 0$ $\frac{\partial(N'_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N'_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N'_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N'_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + p_y a_x a_y = 0$ $\Sigma \frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N'_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0$
गुंबद	
$\alpha_x = \theta \quad a_x = r_0 \quad r_x = r_1 \quad r_0 = r_2 \sin\phi \quad N'_{xy} = N'_{\theta\phi}$ $\alpha_y = \phi \quad a_y = r_1 \quad r_y = r_1 \quad N'_x = N'\theta \quad N'_y = N'_\phi$	$\frac{dN'_\phi r_0}{d\phi} - N'_\theta \frac{dr_0}{d\phi} + p_\phi r_0 r_1 = 0$ $\frac{N'_\theta}{r_2} + \frac{N'_\phi}{r_1} + p_z = 0$
कवच भित्ति	
$\alpha_x = \theta \quad a_x = r \quad r_x = r \quad N'_x = N'_\theta$ $\alpha_y = y \quad a_y = 1 \quad r_y = \infty \quad N'_{xy} = N'_{\theta y}$	$N'_\theta = -p_z r$ $N'_{y\theta} = -\int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial N'_\theta}{\partial \theta} + p_\theta \right) dy + f_1(\theta)$ $N'_y = -\int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial N'_{\theta y}}{\partial \theta} + p_y \right) dy + f_2(\theta)$
अतिपरवलयिक कवच	
$\alpha_x = \theta \quad a_x = r \quad r_x = r \quad r_{xy} = \infty$ $\alpha_y = y \quad a_y = 1 \quad r_y = \infty$	$\frac{dB_y}{dy} r + p_r = 0$ $\frac{dV_y}{dy} r + N_\theta + p_z r = 0$ $-\frac{dM_y}{dy} r + V_y r = 0$
वृत्तीय बेलनाकार कवच	
$\alpha_x = x \quad a_x = 1 \quad r_x = \infty \quad N'_{xy} = N'_{x\phi}$ $\alpha_y = \phi \quad a_y = r \quad r_y = r \quad N'_y = N'_\phi$	$N'_\phi = -p_z r$ $N'_{x\phi} = -\frac{1}{r} \int \frac{\partial N'_\phi}{\partial \phi} dx - \int p_\phi dx + f_1(\phi)$ $N'_x = -\frac{1}{r} \int \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} dx - \int p_x dx + f_2(\phi)$
द्विवक्र स्थानांतरीय कवच	
$a_x = r_x \quad a_y = r_y \quad r_{xy} = \infty \quad \frac{\partial r_y}{\partial \alpha_x} = \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_y} = 0$	$\frac{\partial N'_x}{\partial \alpha_x} r_y + \frac{\partial N'_{yx}}{\partial \alpha_y} r_x + p_x r_x r_y = 0$ $\frac{\partial N'_y}{\partial \alpha_y} r_x + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial \alpha_x} r_y + p_y r_x r_y = 0$ $\frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.2 एकल बैरल का विश्लेषण (वृत्तीय बेलनाकार कवच)

34.2.1 परिचय

75 यह खंड उथले कवच और झिल्ली, दोनों सिद्धांतों द्वारा वृत्तीय बेलनाकार कवच के विश्लेषण पर केंद्रित है और दो किनारी बीमों द्वारा साधारणतः समर्थित कवच तक सीमित रहेगा। प्रतिबल परिणामक, प्रतिबल युग्म और विस्थापन पहले झिल्ली सिद्धांत से व्युत्पन्न किए जाएँगे और फिर उथले कवच के सिद्धांत का उपयोग करके व्युत्पत्ति दोहराई जाएगी।

76 इस खंड में बंकन सिद्धांत पर भी विचार किया जाएगा; हम नियंत्रक अष्टम-कोटि अवकल समीकरण व्युत्पन्न करेंगे और समाकलन के आठ स्वेच्छ नियतांकों के निर्धारण पर चर्चा करेंगे। तत्पश्चात इन नियतांकों को प्रतिबल परिणामकों, युग्मों और विस्थापनों के समीकरणों में प्रतिस्थापित किया जाएगा।

77 वृत्तीय बेलनाकार कवच अथवा बैरल वॉल्ट प्रायः “पूर्ण बेलन से काटे गए वक्र स्लैब” के रूप में परिभाषित किए जाते हैं। स्लैब केवल एक दिशा में वक्रित होता है, अतः पिछले खंड में किए गए विवेचन के अनुसार इसे एकल-वक्रित कवच में वर्गीकृत किया जा सकता है।

78 अनुप्रस्थ त्रिज्या r और अनुदैर्ध्य लंबाई L के अनुपात के आधार पर बेलनाकार कवच सामान्यतः लंबे, मध्यवर्ती अथवा छोटे कहे जाते हैं। एक (स्वेच्छ) वर्गीकरण है:

1. लंबे कवच, जहाँ $r/L < 0.4$
2. मध्यवर्ती कवच, जहाँ $0.4 < r/L < 2.0$
3. छोटे कवच, जहाँ $r/L > 2.0$

79 लंबे कवचों में रेखा-भार सामान्यतः संपूर्ण कवच-पृष्ठ पर पर्याप्त परिमाण के आंतरिक बल उत्पन्न करते हैं। ये आंतरिक बल प्रायः इतने बड़े होते हैं कि तुलना में झिल्ली-मान उपेक्षणीय हो जाते हैं। अतः प्राथमिक तंत्र वास्तविक तंत्र के निकट अनुरूप नहीं होता। वास्तव में, जैसे-जैसे r/L घटता है, वास्तविक तंत्र वक्र अनुप्रस्थ काट वाली बीम के व्यवहार के निकट पहुँचता है, चित्र figcircshellroverL।

80 छोटे कवचों में रेखा-भार ऐसे आंतरिक बल उत्पन्न करते हैं जो सामान्यतः अनुदैर्ध्य किनारों के निकट क्षेत्र तक सीमित रहते हैं। वास्तव में, जैसे-जैसे r/L बढ़ता है, कवच का अधिकांश भाग प्राथमिक तंत्र की धारणा के अनुसार, अर्थात केवल झिल्ली-मानों के साथ, व्यवहार करता है। ऐसे मामलों में छोटे कवच उन पतले बैरल चापों के समान होते हैं जिन्हें अनुदैर्ध्य किनारों के निकट हल्के वक्र डायाफ्रामों द्वारा समर्थन दिया गया हो। ये डायाफ्राम गहरी बीमों की भाँति समतल-अंतर्गत प्रतिबलों द्वारा चाप-प्रणोद को अनुप्रस्थ फ्रेमों तक पहुँचाते हैं।

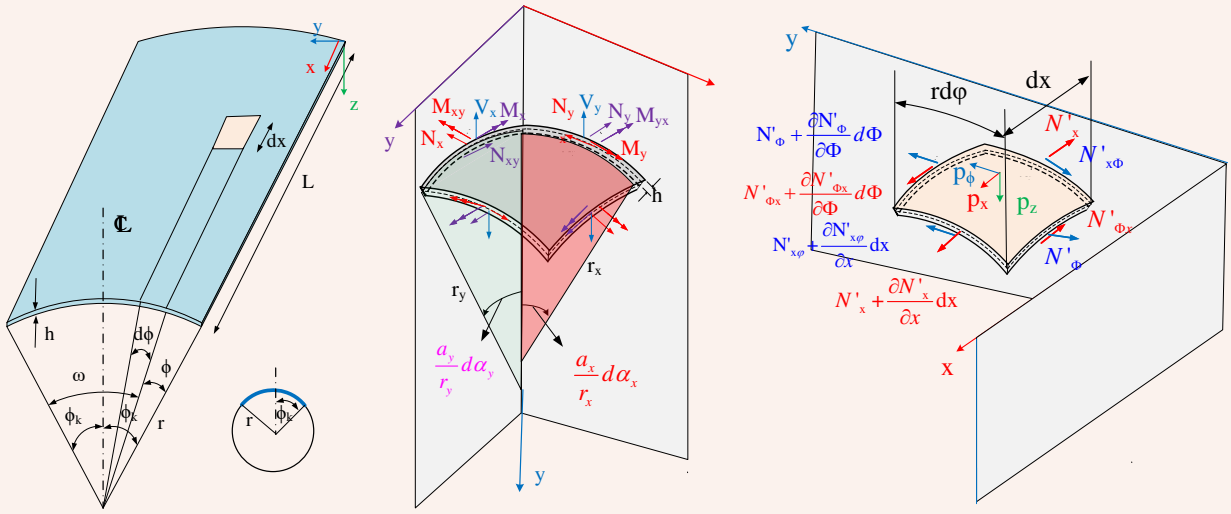
81 चित्र 34.13a में स्वेच्छ कवच अवयव की ज्यामितीय परिभाषा के संदर्भ में वृत्तीय चाप के लिए होगा

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \theta \quad a_x = r \quad r_x = r \quad N'_{xy} = N'_{\theta y} \\ \alpha_y &= y \quad a_y = 1 \quad r_y = \infty \quad N'_x = N'_\theta \end{aligned} \tag{34.56}$$

जहाँ r एक नियतांक है और ϕ को अनुदैर्ध्य किनारे से मापा जाता है।

82 कवच के अतिसूक्ष्म अवयव का संगत मुक्त-पिंड आरेख चित्र 34.13c में दर्शाया गया है और नीचे व्युत्पत्ति में इसका संदर्भ लिया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) कवच

(b) स्वेच्छ कवच अवयव (संदर्भ हेतु चित्र 34.1b)

(c) अवयव

चित्र 34.13: अतिसूक्ष्म वृत्तीय कवच अवयव का मुक्त-पिंड आरेख

83 चूँकि झिल्ली सिद्धांत केवल एक सन्निकटन है, कार्यविधि निम्न है:

प्राथमिक तंत्र: यह सामान्य सिद्धांत को झिल्ली सिद्धांत में घटाकर प्राप्त किया जाता है। झिल्ली सिद्धांत में पृष्ठीय भारों का प्रतिरोध केवल प्रतिबल परिणामक करते हैं।

त्रुटियाँ: ये असुसंगत किनारी प्रभावों अथवा मुक्त किनारों पर झिल्ली सिद्धांत द्वारा अपेक्षित बलों के अनुरूप हैं।

संशोधन: मुक्त किनारों के अनुदिश रेखा-भार (एकक किनारी प्रभाव) लगाए जाते हैं।

सुसंगतता: झिल्ली सिद्धांत की त्रुटियाँ हटाने के लिए आवश्यक संशोधनों की संख्या निर्धारित करके संतुलन प्राप्त किया जा सकता है। हमारे उदाहरण में मुक्त किनारे के अनुदिश रेखा-भारों को झिल्ली प्रतिबल परिणामकों के बराबर रखा जाएगा।

34.2.2 झिल्ली सिद्धांत

84 उथले कवच के सिद्धांत द्वारा पूर्ण विश्लेषण की जाँच से पहले हम झिल्ली सिद्धांत का अध्ययन करेंगे। किंतु हमारा ध्यान केवल प्रतिबल परिणामकों और विस्थापनों की व्युत्पत्तियों पर रहेगा।

34.2.2.1 प्रतिबल परिणामक

प्राथमिक तंत्र

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

85 समीकरण 34.56 में दी गई धारणाओं से समीकरण 34.55 अब घटकर होते हैं:

$$\begin{aligned} N'_{\phi} &= -p_z r \\ N'_{x\phi} &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi}}{\partial \phi} dx - \int p_{\phi} dx + f_1(\phi) \\ N'_{x} &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} dx - \int p_{x} dx + f_2(\phi) \end{aligned} \tag{34.57}$$

86 प्रयुक्त पादांक इस प्रकार हैं कि x क्षैतिज अक्ष, y ऊर्ध्वाधर अथवा स्पर्शरेखीय अक्ष और z अरीय अक्ष है। p को अनुदैर्ध्य किनारे से मापा जाता है।

87 प्रतिबल परिणामक व्यंजक अब तीन अज्ञात बलों N'_{ϕ}, N'_{x} और $N'_{x\phi} = N'_{\phi x}$ वाले तीन समीकरणों के रूप में लिखे गए हैं; इस प्रकार प्राथमिक तंत्र स्थापित हो जाता है।

88 अतः वितरित भारों के लिए इन प्रतिबल परिणामकों की सरलता से गणना की जा सकती है। उदाहरणस्वरूप कवच के मृत भार से उत्पन्न प्रतिबल परिणामक व्युत्पन्न किए जाएँगे। कुछ अन्य भारण अवस्थाओं के परिणाम सारणी 34.5 में संक्षेपित हैं।

89 समान कवच मृत भार P_d के लिए भारण-घटक हैं:

$$\begin{aligned} p_z &= p_d \cos(\phi_k - \phi) \\ p_{\phi} &= -p_d \sin(\phi_k = \phi) \\ p_x &= 0 \end{aligned}$$

और N'_{ϕ} को 34.57 के प्रथम समीकरण से सीधे प्राप्त किया जा सकता है

$$N'_{\phi} = -p_d r \cos(\phi_k - \phi) \tag{34.58}$$

90 जब N'_{ϕ} के इस व्यंजक को समीकरणों 34.57 के दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित किया जाता है

$$N'_{x\phi} = \frac{1}{r}\int \frac{\partial \left[p_d r \cos\left(\phi_k - \phi\right)\right]}{\partial \phi} dx + \int p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) dx + f_1(\phi)$$

अवकलन और समाकलन करने पर प्राप्त होता है

$$N'_{x\phi} = p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) x + p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) x + f_1(\phi)$$

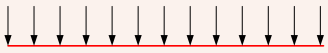
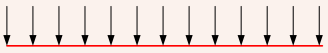
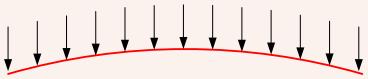
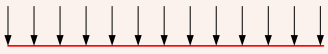
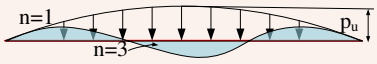
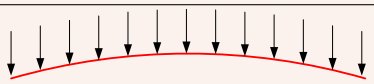
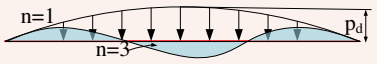
91 साधारण बीम में $N'_{z\phi} = 0$, $x = L/2$ पर, जिससे

$$f_1(\phi) = -p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L$$

अतः

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 34.5: विभिन्न भारणों के अधीन झिल्ली प्रतिबल परिणामक वितरणों की तुलना

झिल्ली प्रतिबल परिणामक Kips/ft	भार ksf	कवच नि-यतांक ft	अनुप्रस्थ वितरण	अनुदैर्ध्य वितरण
				
N'_{ϕ}	p_u	r	$\cos^2(\phi_k-\phi)$	1
$N'_{\phi x}$	p_u	$r(L/r)$	$\cos(\phi_k-\phi)\sin(\phi_k-\phi)$	$(3/2)(1-2x/L)$
N'_{x}	p_u	$r(L/r)^2$	$\cos^2(\phi_k-\phi)-\sin^2(\phi_k-\phi)$	$(3x/2L)(1-x/L)$
				
N'_{ϕ}	p_d	r	$\cos(\phi_k-\phi)$	1
$N_{\phi x}$	p_d	$r(L/r)$	$\sin(\phi_k-\phi)$	$1-2x/L$
N'_{z}	p_d	$r(L/r)^2$	$\cos(\phi_k-\phi)$	$(x/L)(1-x/L)$
				
N'_{ϕ}	p_u	r	$\cos^2(\phi_k-\phi)$	$(1/n)\sin(n\pi x/L)$
$N'_{\phi\pi}$	p_u	$r(L/r)$	$\cos(\phi_k-\phi)\sin(\phi_k-\phi)$	$(3/n^2\pi)\cos(n\pi x/L)$
N''_{π}	p_u	$r(L/r)^2$	$\cos^2(\phi_k-\phi)-\sin^2(\phi_k-\phi)$	$(3/n^3\pi^2)\sin(n\pi x/L)$
				
N'_{ϕ}	p_d	r	$\cos(\phi_k-\phi)$	$(1/n)\sin(n\pi x/L)$
$N'_{\phi x}$	p_d	$r(L/r)$	$\sin(\phi_k-\phi)$	$(2/n^2\pi)\cos(n\pi x/L)$
N'_{x}	p_d	$r(L/r)^2$	$\cos(\phi_k-\phi)$	$(2/n^3\pi^2)\sin(n\pi x/L)$

(सभी प्रतिबल परिणामकों का चिह्न ऋणात्मक है)

प्रारूप

$$N'_{x\phi} = 2p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) x - p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L$$

अथवा

$$N'_{x\phi} = -p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \tag{34.59}$$

92 $N'_{x\phi}$ के इस मान को समीकरण 34.57 के तीसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$N'_x = -\frac{1}{r} \int \frac{\partial \left[-p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L(1 - 2x/L)\right]}{\partial \phi} dx + f_2(\phi)$$

जिससे

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r} \cos\left(\phi_k - \phi\right) \int \left(1 - \frac{2x}{L}\right) dx + f_2(\phi)$$

और इससे प्राप्त होता है

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r} \cos\left(\phi_k - \phi\right) x \left(1 - \frac{x}{L}\right) + f_2(\phi)$$

93 साधारण बीम में अनुदैर्ध्य बल N'_x, $x = 0$ और $x = L$ पर शून्य होना चाहिए, अतः $f_2(\phi) = 0$ और

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r} \cos\left(\phi_k - \phi\right) x \left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{34.60}$$

94 सारणी 34.5 में इन समीकरणों को तीन भागों में विभाजित किया गया है ताकि बेलनाकार कवच में झिल्ली प्रतिबल परिणामकों के वितरण को स्पष्ट किया जा सके। प्रत्येक समीकरण के प्रथम भाग में वे पद हैं जो केवल भार के परिमाण और कवच के आयामों पर निर्भर करते हैं। दूसरा और तीसरा भाग क्रमशः प्रतिबल परिणामकों के अनुप्रस्थ और अनुदैर्ध्य वितरण देते हैं। अनुप्रस्थ और अनुदैर्ध्य वितरण परस्पर संबद्ध नहीं हैं; अतः यदि दो प्रकार के पृष्ठीय भारों का अनुप्रस्थ वितरण समान किंतु अनुदैर्ध्य वितरण भिन्न हो, तो प्रतिबल परिणामकों के अनुप्रस्थ वितरण समान होंगे।

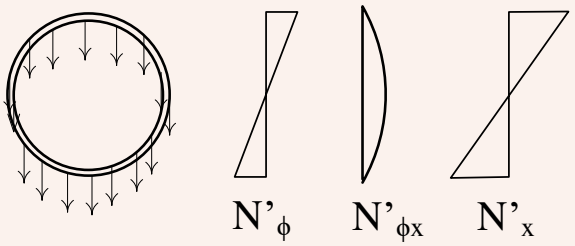
95 साधारणतः समस्थित पूर्ण वृत्तीय बेलन के लिए समीकरणों 34.58 से 34.60 के परिणाम चित्र 34.14 में आलेखित हैं।

96 यही बल-वितरण कवच को खोखली वृत्तीय बीम मानकर भी प्राप्त किया जा सकता है, जो अपने घूर्णन-अक्ष की दिशा में विस्तृत है।

97 वास्तव में, समीकरण 34.58 से 34.60, $N'_\phi, N'_{x\phi}$ और N'_x के ऐसे मान देते हैं जिन्हें सामान्य बीम सूत्रों से सीधे प्राप्त किया जा सकता है, जिनमें

$$\begin{aligned} f_\phi &= \frac{N'_\phi}{h} = -\frac{p_z T}{h} \\ v &= \frac{N'_{x\phi}}{h} = -\frac{VQ}{2Ih} \\ f_x &= \frac{N'_z}{h} = -\frac{My}{I} \end{aligned} \tag{34.61}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 34.14: साधारणतः समरि्थत पूरण वृत्तीय कवच में प्रतिबल परिणामक वितरण

जहाँ वृत्तीय-वलय अनुप्रस्थ काट के लिए,

$$
\begin{aligned}
M &= p_d 2\pi r \left(\frac{Lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \\
y &= r\cos\left(\phi_k - \phi\right) \\
I &= \pi h r^3 \\
V &= p_d 2\pi r \left(\frac{L}{2} - x\right) \\
Q &= 2hr^2 \sin\left(\phi_k - \phi\right)
\end{aligned}
\tag{34.62}
$$

अतः इन समीकरणों को इस प्रकार पुनरि्लखा जा सकता है

$$
\begin{aligned}
N'_{\phi} &= -p_d r\cos\left(\phi_k - \phi\right) \\
\frac{N'_{x\phi}}{h} &= -\frac{p_d 2\pi r[(L/2) - x]2hr^2\sin\left(\phi_k - \phi\right)}{\pi h r^3 (2h)}
\end{aligned}
\tag{34.63}
$$

जिससे प्रापत होता है

$$
N'_{z\phi} = -p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L\left(1 - \frac{2x}{L}\right) \tag{34.64}
$$

और

$$
\frac{N'_z}{h} = -\frac{p_d 2\pi r\left[(Lx/2) - x^2/2\right] r\cos\left(\phi_i - \phi\right)}{\pi h r^3}
$$

जिससे प्रापत होता है

$$
N'_x = -p_d \frac{L}{r}\cos\left(\phi_k - \phi\right) x\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{34.65}
$$

ध्यान दें कि समीकरण 34.64 और 34.65, क्रमशः 34.59 और 34.60 के समान हैं।

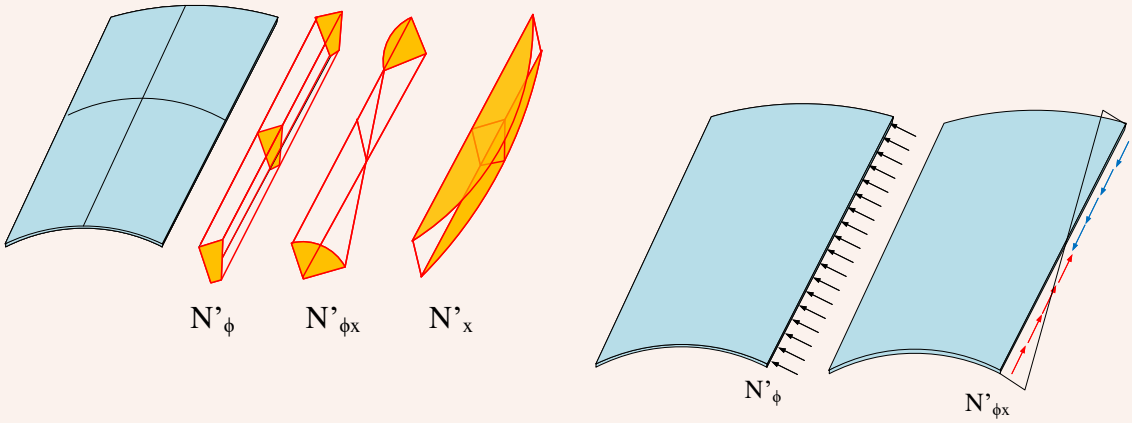
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में तुटियाँ संभव हैं।

34.2.2.1.1 त्रुटियाँ

98 झिल्ली सिद्धांत द्वारा सही आंतरिक प्रतिबल परिणामक प्राप्त करने के लिए अनुदैर्ध्य किनारी प्रतिक्रियाएँ N'_ϕ और $N'_{x\phi}$ के झिल्ली-मानों के बराबर होनी चाहिए। किंतु कवच के मुक्त किनारों पर ये प्रतिक्रियाएँ शून्य हैं।

99 आंतरिक प्रतिबल परिणामकों का सही चित्र देने हेतु झिल्ली सिद्धांत के लिए अनुदैर्ध्य किनारों पर N'_ϕ और $N'_{z\phi}$ के झिल्ली-मानों के बराबर प्रतिक्रियाएँ होनी चाहिए।

100 बेलनाकार कवच में झिल्ली-मानों का वितरण चित्र 34.15a में और अपेक्षित किनारी प्रतिक्रियाएँ चित्र 34.15b में दर्शाई गई हैं।



(a) झिल्ली बल (b) अपेक्षित किनारी प्रतिक्रियाएँ

चित्र 34.15: किनारी प्रभाव

34.2.2.1.2 संशोधन

101 जहाँ कवच के किनारे मुक्त हैं, वहाँ ये प्रतिक्रियाएँ शून्य होती हैं। मुक्त किनारी प्रतिक्रिया-बलों के अभाव को समायोजित करने के लिए संशोधन अथवा रेखा-भार $T_L = -N'_\phi$ और $S_L = -N'_{\phi x}$ लगाने होंगे, ताकि वास्तविक परिणामक प्रतिक्रियाएँ प्राप्त हों।

102 विश्लेषण के संशोधन चरण में रेखा-भारों से उत्पन्न विस्थापन और आंतरिक बल निर्धारित करने के लिए बंकन सिद्धांत (§34.2.3) पर विचार करना होगा। सरलता के लिए समान रूप से वितरित रेखा-भारों को आंशिक भारों का योग मानकर फूरिये श्रेणी से निरूपित किया जा सकता है। अतः समान रेखा-भार T_L, चित्र 34.16, को फूरिये श्रेणी से निरूपित किया जा सकता है।

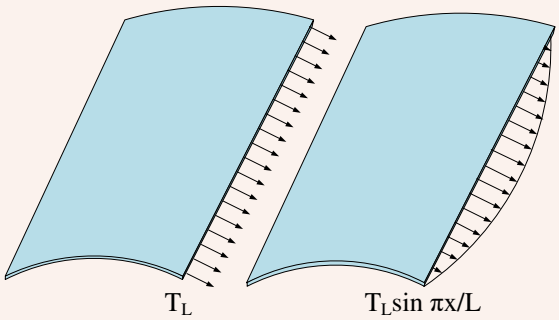
$$(T_L)_x = \frac{4}{\pi} T_L \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{34.66}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

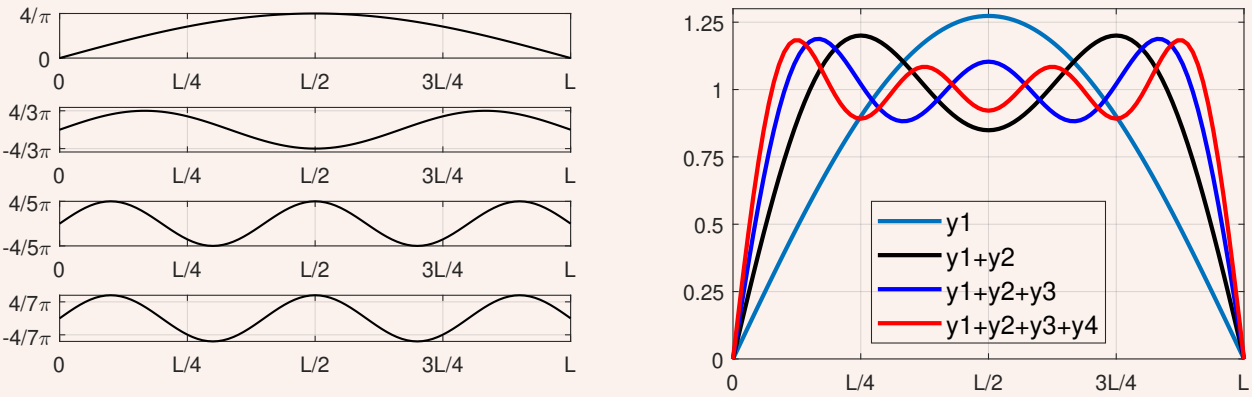
मुक्त किनारों की लंबाई के अनुदिश सुसंगत बल और विरूपण प्रदान करने के लिए पृष्ठीय भारों को भी फूरिये श्रेणी में व्यक्त करना होगा। उदाहरणतः समान कवच मृत भार की फूरिये श्रेणी है

$$(p_d)_x = \frac{4}{\pi} p_d \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

श्रेणी के प्रथम तीन पद आलेखित हैं और चित्र 34.17 में देखे जा सकते हैं। तीनों तरंगें मिलकर समान भार का निकट सन्निकटन देती हैं। लंबे कवचों के लिए प्रायः प्रथम पद पर्याप्त माना जाता है। किंतु छोटे कवचों में प्रायः दूसरे पद को जोड़ना आवश्यक होता है। इस कार्यविधि की अधिक विस्तार से चर्चा §34.2.3 में की जाएगी।



चित्र 34.16: वृत्तीय कवच में लगाया गया संशोधक रेखा-भार



चित्र 34.17: ज्या श्रेणी का आलेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.2.2.2 विस्थापन

103 झिल्ली सिद्धांत से विस्थापन समीकरण व्युत्पन्न करने के लिए §34.1.3.3 से मध्य-पृष्ठ विकृतियों (समीकरण 34.29, 34.30 और 34.31) को स्मरण करना होगा। वृत्तीय बेलनाकार कवच की परिभाषाओं (समीकरण 34.36) का उपयोग करके विकृतियों को इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y = \varepsilon_\phi &= \frac{\partial v}{r\partial\phi} - \frac{w}{r}\\ \gamma_{x\phi} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial\phi}\end{aligned} \tag{34.67}$$

104 झिल्ली प्रतिबल परिणामकों को सम्मिलित करने के लिए विकृतियों को पुनः लिखा जा सकता है (§34.1.3.5.1)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{Eh}\left(N'_x - \nu N'_\phi\right)\\ \varepsilon_y = \varepsilon_\phi = \frac{\partial v}{r\partial\phi} - \frac{w}{r} &= \frac{1}{Eh}\left(N'_\phi - \nu N'_x\right)\\ \gamma_{x\phi} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial\phi} &= \frac{2\,(1+\nu)}{Eh}N'_{x\phi}\end{aligned} \tag{34.68}$$

105 चूँकि ν का विरूपणों पर अत्यल्प प्रभाव है, विस्थापन समीकरणों को सरल बनाने के लिए इसकी उपेक्षा की जाती है। समीकरण 34.68 के प्रथम पद को अनुदैर्ध्य विस्थापन के लिए हल करने पर

$$u = \frac{1}{Eh}\int N'_x dx + f_3(\phi) \tag{34.69}$$

तीसरे पद को स्पर्शरेखीय विस्थापन के लिए हल करने पर

$$v = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial u}{\partial\phi}dx + \frac{2}{Eh}\int N'_{x\phi}dx + f_4(\phi) \tag{34.70}$$

106 अरीय विस्थापन दूसरे पद से प्राप्त होता है

$$w = \frac{\partial v}{\partial\phi} - \frac{rN'_\phi}{Eh} \tag{34.71}$$

107 इन विस्थापनों का किसी भी प्रकार के भार के लिए मूल्यांकन किया जा सकता है। उदाहरणतः हम कवच-पृष्ठ पर समान रूप से वितरित भारण वाले कवच पर विचार करते हैं। समान अनुदैर्ध्य वितरण को फूरिये श्रेणी के प्रथम पद से सन्निकट किया जाता है, जिससे $k = n\pi/L, p = (4/\pi)p_d$, और $n = 1$ के साथ

$$\begin{aligned}p_x &= p\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx\\ p_\phi &= -p\sin\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx\\ p_x &= 0\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समीकरण 34.57 से व्युत्पन्न प्रतिबल परिणामक हो जाते हैं:

$$\begin{aligned} N'_{\phi} &= -pr\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \\ N'_{x\phi} &= -\frac{2p}{k}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\cos kx + f_1(\phi) \\ N'_{x} &= -\frac{2p}{rk^2}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx - \frac{x}{r}\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial\phi} + f_2(\phi) \end{aligned} \tag{34.72}$$

108 जब समीकरण 34.72 को समीकरणों 34.69 से 34.71 में रखा जाता है,

$$u = \frac{1}{Eh}\left[\frac{2p}{rk^8}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\cos kx - \frac{x^2}{2r}\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial\phi} + x f_2(\phi)\right] \tag{34.73}$$

$$\begin{aligned} v = &-\frac{1}{Ehr}\left[\frac{2p}{rk^8}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx - \frac{x^3}{6r}\frac{\partial^2 f_1(\phi)}{\partial\phi^2} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial f_2(\phi)}{\partial\phi}\right] \\ &- \frac{x}{r}\frac{\partial f_3(\phi)}{\partial\phi} - \frac{2}{Eh}\left[\frac{2p}{k^2}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx - x f_1(\phi)\right] + f_4(\phi) \end{aligned} \tag{34.74}$$

$$\begin{aligned} w = &\frac{1}{Ehr}\left[\frac{2p}{rk^4}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin lx + \frac{x^3}{6r}\frac{\partial^3 f_1(\phi)}{\partial\phi^3} - \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 f_2(\phi)}{\partial\phi^2}\right] \\ &- \frac{x}{r}\frac{\partial^2 f_3(\phi)}{\partial\phi^2} + \frac{2}{Eh}\left[\frac{2p}{k^2}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx + x\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial\phi}\right] + \frac{\partial f_4(\phi)}{\partial\phi} \\ &+ \frac{pr^2}{Eh}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \end{aligned} \tag{34.75}$$

109 साधारणतः समर्थित कवच के लिए,

$$f_1(\phi) = f_2(\phi) = f_3(\phi) = f_4(\phi) = 0$$

और समीकरण 34.72 से 34.75 घटकर होते हैं:

$$u = \frac{2p}{Ehr}\frac{1}{k^3}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\cos kx \tag{34.76}$$

$$v = -\frac{2p}{Eh}\left(\frac{1}{r^2}\frac{1}{k^4} + 2\frac{1}{k^2}\right)\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \tag{34.77}$$

$$w = \frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left(1 + 2r^2k^2 + \frac{r^4k^4}{2}\right)\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \tag{34.78}$$

110 ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज विस्थापनों को जानना उपयोगी है; इन्हें समीकरण 34.77 और 34.78 से सरलता से इस प्रकार प्राप्त किया जाता है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$
\begin{aligned}
\Delta_V =& -v\sin\left(\phi_k-\phi\right)+w\cos\left(\phi_k-\phi\right)\\
=&\frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left[\left(1+2r^2k^2\right)\sin^2\left(\phi_k-\phi\right)+\left(1+2r^2k^2+\frac{r^4}{2}k^4\right)\cos^2\left(\phi_k-\phi\right)\right]\sin kx\\
=&\frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left[1+2r^2k^2+\frac{r^4}{2}k^4\cos^2\left(\phi_k-\phi\right)\right]\sin kx \qquad (34.79)\\
\Delta_H =&v\cos\left(\phi_k-\phi\right)+w\sin\left(\phi_k-\phi\right)\\
=&\frac{2p}{Ehr^2}\left(-\frac{1}{k^4}-2r^2\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^4}+2r^2\frac{1}{k^2}+\frac{r^4}{2}\right)\sin\left(\phi_k-\phi\right)\\
=&\frac{pr^2}{Eh}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \qquad (34.80)
\end{aligned}
$$

जहाँ Δ_V अधोमुखी विस्थापन के लिए धनात्मक और Δ_H अंतर्मुखी विस्थापन के लिए धनात्मक है।

34.2.3 उथले कवच का सिद्धांत

34.2.3.1 संतुलन समीकरण

111 उथले कवच के सिद्धांत द्वारा विश्लेषण करने से पहले वृत्तीय बेलनाकार कवच के गुणों को सम्मिलित करने हेतु प्रतिबल परिणामकों और युग्मों के समीकरणों को संतुलन समीकरणों के साथ पुनः व्युत्पन्न करना होगा। संतुलन समीकरण (34.28) उथले कवच के सिद्धांत के लिए §34.1.4.1 में पहले व्युत्पन्न किए गए थे। बेलनाकार कवच की परिभाषा (§34.2.2.1) का उपयोग करने पर संतुलन समीकरण हो जाते हैं

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x}r+\frac{\partial_{\phi x}}{\partial\phi}+p_x r=0\\
\frac{\partial N_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x}r-V_\phi+p_\phi r=0\\
\frac{\partial V_x}{\partial x}r+\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}+N_\phi+p_x r=0\\
-\frac{\partial M_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x}r+V_\phi r=0\\
-\frac{\partial M_x}{\partial x}r-\frac{\partial M_{\phi x}}{\partial\phi}+V_x r=0
\end{aligned}
\qquad (34.81)
$$

112 ध्यान दें कि उथले कवच के सिद्धांत के लिए समीकरण 34.43a-34.43e से भी यही परिणाम मिलते हैं, केवल पद Q_ϕ, समीकरण 34.81 के दूसरे समीकरण में, उथले कवचों के लिए उपेक्षित किया जाता है। प्रतिबल परिणामक और प्रतिबल युग्म समीकरण 34.42 से प्राप्त होते हैं, जिसमें

$$\phi_x=\frac{\partial w}{\partial x}\quad \phi_y=\frac{v}{r}+\frac{\partial w}{r\partial\phi}\quad \nu=0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

113 प्रतिबल परिणामक और प्रतिबल युग्म, समीकरण 34.42, भी §34.1.4.1 में पहले व्युत्पन्न किए गए थे। बेलनाकार कवच के गुणों को समायोजित करने के लिए समीकरणों को पुनः संशोधित किया जाता है

$$\begin{aligned} N_x &= Eh\frac{\partial u}{\partial x} \\ N_\phi &= Eh\left(\frac{\partial v}{r\partial\phi} - \frac{w}{r}\right) \\ N_{x\phi} = N_{\phi x} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial\phi}\right) \\ M_x &= -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial v}{r^2\partial\phi} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\phi^2}\right) \\ M_{x\phi} = -M_{\phi x} &= \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial v}{2r\partial x} + \frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\phi}\right) \end{aligned} \tag{34.82}$$

ये परिणाम उथले कवच के सिद्धांत के लिए समीकरण 34.44a-34.44f से भी प्राप्त किए जा सकते थे, केवल समीकरण 34.82 के अंतिम दो समीकरणों में v वाले पदों की उथले कवचों के लिए उपेक्षा की जाती है।

34.2.3.2 सूत्रण

114 अब जबकि सभी 11 समीकरण पुनः व्युत्पन्न हो चुके हैं, हम उथले कवच के सिद्धांत का उपयोग करके एकल अष्टम-कोटि आंशिक अवकल समीकरण की व्युत्पत्ति आरंभ कर सकते हैं। अंततः 11 समीकरणों को एक अज्ञात वाले एक समीकरण में घटाया जाएगा। हल निम्न चरणों में आगे बढ़ता है:

1. §34.1.4.1.1 में प्रस्तुत उथले कवच की धारणाएँ स्मरण करें। सभी प्रतिबल युग्मों को अरीय विस्थापन के पदों में व्यक्त करना होगा। यह समीकरण 34.82 में v वाले पदों की उपेक्षा करके प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\phi^2}\right) \\ M_{x\phi} = -M_{\phi x} &= \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\phi}\right) \end{aligned} \tag{34.83}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. अरीय अपरूपण प्रतिबल परिणामकों को समीकरण 34.81 से w के पदों में लिखा जाता है

$$V_\phi = -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{r^3\partial\phi^3} + \frac{\partial^3 w}{r\partial x^2\partial\phi}\right)$$
$$V_x = -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{r^2\partial x\partial\phi^2}\right) \tag{34.84}$$

जहाँ h और r नियतांक हैं।

3. अब अन्य प्रतिबल परिणामकों को समीकरण 34.81 के प्रथम तीन समीकरणों का उपयोग करके w के पदों में लिखा जा सकता है। समीकरण 34.84 को 34.81 के तीसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$N_\phi = \frac{Eh^3}{12}\left(r\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\phi^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial\phi^4}\right) - p_z r \tag{34.85}$$

इसके बाद N_ϕ को 34.81 के दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित किया जाता है। धारणा 2 के कारण V_ϕ को हटाने पर प्राप्त होता है

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} = -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^5 w}{\partial x^2\partial\phi^3} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^5 w}{\partial\phi^5}\right) + \frac{\partial p_z}{\partial\phi} - p_\phi \tag{34.86}$$

इसके बाद इस अंतिम व्यंजक को ϕ के सापेक्ष अवकलित करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{\partial^2 N_{x\phi}}{\partial x\partial\phi}$$

अंततः 34.81 के प्रथम समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित किया जाता है, और व्युत्पन्न होता है

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 N_{\phi x}}{\partial\phi\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial x} \tag{34.87}$$

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = \frac{Eh^3}{12}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^6 w}{\partial x^4\partial\phi^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^6 w}{\partial x^2\partial\phi^4} + \frac{1}{r^5}\frac{\partial^6 w}{\partial\phi^6}\right] - \frac{\partial^2 p_z}{r\partial\phi^2} + \frac{\partial p_\phi}{r\partial\phi} - \frac{\partial p_x}{\partial x} \tag{34.88}$$

4. सुसंगतता समीकरण को समीकरण 34.82 के प्रथम तीन समीकरणों से u और v वाले पदों का विलोपन करके व्युत्पन्न किया जाता है:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh}N_x$$
$$\frac{\partial v}{\partial\phi} = \frac{r}{Eh}N_\phi + w$$
$$N_{x\phi} = \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवकलित करने पर प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \phi^2} &= \frac{1}{Eh}\frac{\partial^4 N_x}{\partial x^2 \partial \phi^2} \\
\frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial \phi} &= \frac{r}{Eh}\frac{\partial^4 N_\phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
\frac{\partial^4 N_{x\phi}}{\partial x^3 \partial \phi} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \phi^2}\right) \\
\frac{\partial^4 N_{x\phi}}{\partial x^3 \partial \phi} &= \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial^4 N_\phi}{\partial x^4} + \frac{1}{r}\frac{\partial^4 N_x}{\partial x^2 \partial \phi^2}\right) + \frac{Eh}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}
\end{aligned} \tag{34.89}$$

5. सामान्य सूत्रण पूर्ण करने के लिए समीकरणों 34.85, 34.86 और 34.89 में व्युत्पन्न प्रतिबल परिणामकों का उपयोग किया जाता है

$$\begin{aligned}
&\frac{r^2}{2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial \phi^2} + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \phi^4} + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \phi^4} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial \phi^6} + \frac{1}{2r^6}\frac{\partial^8 w}{\partial \phi^8} \\
&\qquad + \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial \phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial \phi^4} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial \phi^6} + \frac{6}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
&= \frac{12}{Eh^3}\left(\frac{r^2}{2}\frac{\partial^4 p_z}{\partial x^4} + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^4 p_z}{\partial \phi^4} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial \phi^3} + \frac{1}{2r}\frac{\partial^3 p_x}{\partial x \partial \phi^2} + \frac{\partial^4 p_z}{\partial x^2 \partial \phi^2} - \frac{\partial^3 p_\phi}{\partial x^2 \partial \phi}\right)
\end{aligned} \tag{34.90}$$

पदों को एकत्र करने पर प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}
r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2}\right)^4 w + \frac{12}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{12}{Eh^3}\Bigg[&r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2}\right)^2 p_z \\
&-2\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial x^2 \partial \phi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^8 p_\phi}{\partial \phi^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3 p_z}{\partial x \partial \phi^2}\Bigg]
\end{aligned} \tag{34.91}$$

§34.1.4.1 के संकेतनों का उपयोग करके हम पाते हैं कि समीकरण 34.91 वास्तव में समीकरण 34.54 के समान है, जब $\nu = 0$:

यदि उथले कवचों के लिए पहले व्युत्पन्न समीकरण, समीकरण 34.91, को स्मरण करें, तो ν शून्य होने पर नया समीकरण उसी रूप का है।

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2}\nabla_R^4 w = \frac{1}{D}\nabla_R^2 f(p) + \nabla^4 f'(p) \qquad \text{(Eq. 34.54)} \tag{34.92}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

वृत्तीय बेलनाकार कवचों के लिए,

$$\nabla_R^4 w = \frac{\partial^4 w}{r^2 \partial x^4}$$
$$\nabla^8 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2}\right)^4 w$$
$$f(p) = \frac{1}{r^2}\int \frac{\partial^2 p_x}{\partial \phi^2} dx + r\int \frac{\partial^2 p_\phi}{\partial x^2} d\phi$$
$$f'(p) = \frac{p_z}{D} - \frac{1}{D}\int p_\phi d\phi$$

34.2.3.2.1 समान भार का विशेष हल

115 यदि कवच-पृष्ठ पर समान रूप से वितरित भार p पर विचार करें, अर्थात $p = 4/pip_d$, तब

$$\begin{aligned} p_z &= p\cos(\phi_k - \phi)\sin kx \\ p_\phi &= p\sin(\phi_k - \phi)\sin kx \\ p_x &= 0 \end{aligned} \tag{34.93}$$

116 आंशिक अवकल समीकरण के दाएँ पक्ष (समीकरण 34.92) का उपयोग करके विशेष हल निर्धारित किया जाता है।

$$\begin{aligned} &\frac{12}{Eh^3}\left[r^2k^4 p\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + 2p(-\cos(\phi_k - \phi))(-\sin kx)k^2\right. \\ &\left. + \frac{1}{r^2}p\sin kx\cos(\phi_k - \phi) - 2k^2 p\cos\phi_k(-\sin kx) - \frac{1}{r^2}p\sin kx(-\cos(\phi_k - \phi))\right] \\ &= \frac{12}{Eh^3}\left(r^2k^4 + 4k^2 + \frac{2}{r^2}\right)p\cos(\phi_k - \phi)\sin kx \end{aligned} \tag{34.94}$$

117 विशेष हल इस प्रकार निर्धारित होता है

$$w = Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx \tag{34.95}$$

इसे समीकरण 34.91 के बाएँ पक्ष में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} &r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right)^4 Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + \frac{12}{h^2}\frac{\partial^4[Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx]}{\partial x^4} \\ &\qquad = r^2\left(k^2 + \frac{1}{r^2}\right)^4 Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + \frac{12}{h^2}k^4 Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx \end{aligned} \tag{34.96}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

118 समीकरण के बाएँ और दाएँ पक्षों को बराबर रखकर विशेष हल के नियतांक C के लिए हल किया जाता है

$$C = \frac{1}{Eh}\left[\frac{r^2k^4 + 4k^2 + 2/r^2}{(r^2h^2/12)(k^2 + 1/r^2)^4 + k^4}\right] \tag{34.97}$$

समीकरण 34.95 में प्रतिस्थापित करके किसी भी बिंदु पर w को भार और कवच के आयामों के पदों में अभिकलित किया जाता है।

119 प्रतिबल युग्म, प्रतिबल परिणामक और विस्थापन, w को समीकरण 34.83 से समीकरण 34.89 में प्रतिस्थापित करके प्राप्त किए जाते हैं।

34.2.3.2.2 तुलना: झिल्ली *बनाम* उथला कवच

120 झिल्ली सिद्धांत के परिणामों की उथले कवच के परिणामों से तुलना उपयोगी है। परिणाम सारणी 34.6 में प्रस्तुत हैं।

121 ध्यान दें कि सामान्य प्रथा बंकन के प्रभाव की उपेक्षा करके अधिक कठोर विशेष समाकल के स्थान पर झिल्ली सिद्धांत का उपयोग करना है। पद P और B इस उपागम की सटीकता मापते हैं।

122 विशेष हल के लिए समीकरण 34.93 को समीकरण 34.57 में प्रतिस्थापित करने पर प्रतिबल परिणामक प्राप्त होता है

$$N'_{\phi} = -pr\cos(\phi_k - \phi)\sin kx$$

123 जब N'_{ϕ} को समीकरण 34.57 के दूसरे पद में प्रतिस्थापित किया जाता है, तब प्राप्त होता है

$$N'_{x\phi} = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial[-pr\cos(\phi_k - \phi)\sin kx]}{\partial\phi}dx + \int p\sin(\phi_k - \phi)\sin kx dx + f_1(\phi)$$

अवकलन और समाकलन के बाद $N'_{x\phi}$ हो जाता है

$$N'_{x\phi} = 2\frac{p}{k}\sin(\phi_k - \phi)\cos kx + f_1(\phi)$$

जहाँ साधारणतः समरिथत कवच के लिए $f_1(\phi) = 0$ है।

124 अब नव-व्युत्पन्न पद को समीकरण 34.57 के तीसरे पद में प्रतिस्थापित किया जाएगा। पुनः अवकलन और समाकलन से प्राप्त होता है

$$N'_x = -2\frac{p}{k^2 r}\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + f_2(\phi)$$

जहाँ साधारणतः समरिथत बीम के लिए $N'_x = 0$, $x = 0$ और $x = L$ पर। $f_2(\phi)$ का मान शून्य निकलता है और इसे उपर्युक्त समीकरण से हटाया जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

125 अब उपर्युक्त व्युत्पन्न प्रतिबल परिणामकों और समीकरणों 34.69, 34.70 तथा 34.71 का उपयोग करके झिल्ली सिद्धांत से विस्थापन व्युत्पन्न किए जाएँगे।

प्रतिस्थापन के बाद प्राप्त होता है

$$u = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^3 r}\cos(\phi_k - \phi)\cos kx$$
$$v = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^4 r^2}\left(1 + 2k^2 r^2\right)\sin(\phi_k - \phi)\sin kx$$
$$w = \frac{2}{Eh}\frac{pk^4}{r^2}\left(1 + 2k^2 r^2 + \frac{r^4 k^4}{2}\right)\cos(\phi_k - \phi)\sin kx$$

126 ध्यान दें कि विशेष हल से अभिकलित विस्थापन को इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है

$$u = u'(1 - P)$$
$$v = v'(1 - P)$$
$$w = w'\frac{1}{B + 1}$$

जहाँ

$$P = \frac{Eh^3}{24r^4}(1 + 2k^2 r^2 + k^4 r^4)C$$
$$B = \frac{h^2}{12r^6 k^4}(k^2 r^2 + 1)^4$$

और तुलना-सारणी से $\phi_k = (\phi_k - \phi)$। P और B का उपयोग उथले कवच की विधि की तुलना में झिल्ली उपागम की सटीकता मापने के लिए किया जाता है।

127 यद्यपि कठोर अष्टम-कोटि अवकल समीकरण से बचने के लिए झिल्ली सिद्धांत सरल विकल्प प्रतीत हो सकता है, किंतु यह तभी युक्तिसंगत परिणाम दे सकता है जब कुछ मानदंड पूरे हों। प्रथम, विस्थापन-परिणाम कवच के बंकन को पर्याप्त रूप से न बढ़ाएँ, क्योंकि कार्यविधि कवच के समस्त बंकन की उपेक्षा करती है। द्वितीय, कवच पर भारण संपूर्ण पृष्ठ पर समान होना चाहिए। अंततः सीमाएँ सिद्धांत द्वारा अपेक्षित बल प्रदान करें और विस्थापनों की अनुमति दें। अभिकल्प में झिल्ली सिद्धांत का उपयोग प्रायः अनुमत नहीं होता, किंतु वृत्तीय बेलनाकार कवच के मामले में यह अभिकल्प-प्रक्रिया को तीव्र करने के लिए उपयोगी प्रतीत होता है।

अप्रकाशित प्रति

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 34.6: समान भार के लिए झिल्ली और उथले कवच के हलों की तुलना

झिल्ली सिद्धांत	उथले कवच का सिद्धांत
प्रतिबल युग्म	
$M'_{\phi} = 0$ $M'_{x\phi} = 0$ $M'_{x} = 0$	$M_{\phi^p} = \dfrac{Eh^3}{12r^2} pC\cos(\phi_k)\sin kx$ $M_{x\phi^p} = \dfrac{Eh^3}{12r} kpC\sin(\phi_k)\cos kx$ $M_{x^p} = \dfrac{Eh^3}{12} k^2 pC\cos(\phi_k)\sin kx$
प्रतिबल परिणामक	
$N'_{\phi} = -pr\cos(\phi_k)\sin kx$ $N'_{x\phi} = 2\dfrac{p}{k}\sin(\phi_k)\cos kx$ $N'_{x} = -\dfrac{2p}{k^2 r}\cos(\phi_k)\sin kx$	$N_{\phi^p} = -pr(1-2P)\cos(\phi_k)\sin kx$ $N_{x\phi^p} = 2\dfrac{p}{k}(1-P)\sin(\phi_k)\cos kx$ $N_{x^p} = -\dfrac{2p}{k^2 r}(1-P)\cos(\phi_k)\sin kx$
विस्थापन	
$u' = \dfrac{2}{Eh}\dfrac{p}{k^3 r}\cos(\phi_k)\cos kx$ $v' = \dfrac{2}{Eh}\dfrac{p}{k^4 r^2}(1+2k^2r^2)\sin(\phi_k)\sin kx$ $w' = \dfrac{2}{Eh}\dfrac{p}{k^4 r^2}\left(1+2k^2r^2+\dfrac{r^4k^4}{2}\right)$ $\cos(\phi_k)\sin kx$	$u^p = \dfrac{2}{Eh}\dfrac{p}{k^3 r}(1-P)\cos(\phi_k)\cos kx$ $= u'(1-P)$ $v^p = v-(1-P)$ $w^p = w'\dfrac{1}{B+1}$ $P = \dfrac{Eh^3}{24r^4}(1+2k^2r^2+k^4r^4)C$ $B = \dfrac{h^2}{12r^6k^4}(k^2r^2+1)^4$ C From Eq. 34.97

128 अब जब उथले कवच के सिद्धांत और झिल्ली सिद्धांत की विश्लेषण-विधियों की समीक्षा हो चुकी है, हम दोनों कार्यविधियों और उनके परिणामों के अंतर पर संक्षेप में चर्चा करेंगे।

129 झिल्ली सिद्धांत एक सन्निकट विधि है जिसका उपयोग प्रायः उथले कवच के अधिक कठोर उपागम से बचने के लिए किया जाता है। चूँकि कवच के समस्त बंकन की उपेक्षा की जाती है, झिल्ली सिद्धांत बंकन का उपयोग किए बिना प्रतिबल परिणामकों और विस्थापनों की गणना की अनुमति देता है। सिद्धांत यह भी मानता है कि सभी झिल्ली प्रतिबल कवच के समतल में कार्य करते हैं। यह उथले कवच के सिद्धांत के

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समान है, जिसमें पृष्ठीय भारों को समतल-अंतर्गत प्रतिबलों द्वारा वहन करना आवश्यक है। किंतु झिल्ली सिद्धांत के विपरीत उथले कवच का सिद्धांत कवच के भीतर बंकन को सम्मिलित करता है। सिद्धांत मानता है कि कवच की पृष्ठीय वक्रता और वक्रता-परिवर्तन छोटे हैं, फिर भी विश्लेषण के लिए आवश्यक हैं।

130 अब दोनों विधियों के परिणामों की तुलना के लिए दो उदाहरण देखेंगे—पहला झिल्ली सिद्धांत से और दूसरा उथले कवच के सिद्धांत से।

34.2.3.2.3 उदाहरण 34.1: झिल्ली & उथले कवच की तुलना

लंबा कवच: दिया है

$$\begin{array}{ll} h = 3 \text{ in} = 0.25 \text{ ft} & r = 26.6 \text{ ft} \\ L = 66.5 \text{ ft} & \frac{h}{r} = \frac{1}{106} \\ \frac{r}{L} = 0.4 & k = \frac{\pi}{L} \\ E = 4.32 \times 10^5 \text{ksf} & \phi_k = 45^\circ \end{array}$$

निम्न मानों के आधार पर लंबे कवच का उदाहरण उथले कवच के सिद्धांत की तुलना में झिल्ली सिद्धांत के उपयोग की अनुमति देता है:

$$\begin{aligned} C &= 0.0284 \text{ ft}^3/\text{kip} \\ P &= 0.00011 \\ B &= 0.000131 \end{aligned}$$

स्पष्टतः इस मामले में विशेष समाकल के स्थान पर झिल्ली सिद्धांत का उपयोग किया जा सकता है।

छोटा कवच: दिया है

$$\begin{array}{ll} h = 4 \text{ in} = 0.33 \text{ ft} & L = 30 \text{ ft} \\ r = 140 \text{ ft} & \frac{h}{r} = \frac{1}{420} \\ \frac{r}{L} = 4.67 & E = 4.32\text{x}10^5 \text{ ksf} \\ \phi_k = 45^\circ & \end{array}$$

छोटे कवच के परिणाम भी युक्तिसंगत हैं और झिल्ली सिद्धांत के उपयोग की अनुमति देंगे।

$$\begin{aligned} C &= 0.135 \text{ ft}^3/\text{kip} \\ P &= 0.011 \\ B &= 0.024 \end{aligned}$$

34.2.3.3 सामान्य हल

131 प्राथमिक तंत्र और परिणामी त्रुटियाँ झिल्ली सिद्धांत अथवा विशेष समाकल, दोनों में से किसी से सीधे प्राप्त की जा सकती हैं। संशोधनों का निर्धारण इतना सरल नहीं है, क्योंकि समीकरण 34.91 के समांगी भाग को हल करने की कठिन समस्या से निपटना पड़ता है। वृत्तीय बेलनाकार कवच उन कुछ कवच तंत्रों में है जिनका हल सुविकसित है; इसलिए यहाँ पूर्ण व्युत्पत्ति दी गई है।

132 समांगी समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2} \right)^4 w + \frac{12}{h^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{34.98}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.2.3.3.1 विस्थापन w

हल का रूप है

$$w = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} A_m e^{M\phi} \sin kx \tag{34.99}$$

जहाँ A_m और M क्रमशः आठ स्वेच्छ नियतांकों और आठ मूलों को निरूपित करते हैं। नियतांक अनुदैर्ध्य सीमा-प्रतिबंधों पर आधारित हैं, जबकि मूल केवल कवच के आयामों पर निर्भर हैं।

मूल M को समीकरण 34.99 को समीकरण 34.98 में प्रतिस्थापित करके निर्धारित किया जाता है

$$r^2\left(-k^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)^4 + \frac{12}{h^2}k^4 = 0$$

प्रतिस्थापन करने पर

$$Q^8 = 3(kr)^4\left(\frac{r}{h}\right)^2$$

प्राप्त होता है

$$\left(M^2 - (kr)^2\right)^4 A_m e^{M\phi}\sin kx + 4Q^8 A_m e^{M\phi}\sin kx = 0$$

जिसे इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है

$$\left[\frac{M^2 - (kr)^2}{\sqrt{2}Q^2}\right]^4 + 1 = 0 \tag{34.100}$$

[133] एक अतिरिक्त प्रतिस्थापन,

$$\gamma = \left(\frac{kr}{Q}\right)^2$$

समीकरण 34.100 हो जाता है

$$\frac{M^2}{Q^2} - \gamma = \sqrt[4]{-1}\sqrt{2} \tag{34.101}$$

[134] अब काल्पनिक पद $\sqrt[4]{-1}$ शेष है, जिसे इस प्रकार पुनर्लिखा जाता है

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt{\pm i}$$

जहाँ $i = \sqrt{-1}$। सम्मिश्र संख्या को इस प्रकार लिखा जाता है

$$z = x + iy = \mathrm{Re}^{i\theta}$$

जब $x = 0$, $y = 1$, और $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ हो, तब सम्मिश्र संख्या हो जाती है

$$i = e^{i\theta}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ ऑयलर के समीकरण से,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

और $\theta = \pi/2$, जिससे सम्मिश्र संबंध बनता है

$$i = e^{i\pi/2}$$

135 अब सम्मिश्र संबंध व्युत्पन्न हो चुका है, अतः हम अभिकलित करते हैं

$$\begin{aligned}\sqrt{i} = (i)^{\frac{1}{2}} &= e^{i\pi/4}\\ e^{i\pi/4} &= \cos\pi/4 + i\sin\pi/4\\ e^{i\pi/4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{34.102}$$

यदि समीकरण 34.102 को समीकरण 34.101 में प्रतिस्थापित करें

$$M^2 = Q^2\left[\gamma \pm (1 \pm i)\right] \tag{34.103}$$

परिणामी आठ मूल सम्मिश्र और संयुग्मी हैं

$$M_1 = \pm(\alpha_1 \pm i\beta_1) \tag{34.104}$$
$$M_2 = \pm(\alpha_1' \pm i\beta_1') \tag{34.105}$$

जहाँ

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}+(1+\gamma)}{2}} = Qm_1\\ \beta_1 &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}-(1+\gamma)}{2}} = Qn_1\\ \alpha_1' &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}-(1-\gamma)}{2}} = Qm_2\\ \beta_1' &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}+(1-\gamma)}{2}} = Qn_2\end{aligned} \tag{34.106}$$

136 अब समीकरण 34.99 का विस्तार करके आठ स्वेच्छ नियतांक A_m निर्धारित किए जाते हैं।

$$w = \begin{bmatrix} A_1 e^{(\alpha_1+i\beta_1)\phi} + A_2 e^{(\alpha_1-i\beta_1)\phi} \\ A_3 e^{(\alpha_1'+i\beta_1')\phi} + A_4 e^{(\alpha_1'-i\beta_1')\phi} \\ A_5 e^{-(\alpha_1+i\beta_1)\phi} + A_6 e^{-(\alpha_1-i\beta_1)\phi} \\ A_7 e^{-(\alpha_1'+i\beta_1')\phi} + A_8 e^{-(\alpha_1'-i\beta_1')\phi} \end{bmatrix} \sin kx \tag{34.107}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

137 जैसा पहले उल्लेख किया गया, ऑयलर के समीकरण से

$$e^{\pm i\beta_1\phi} = \cos\beta_1\phi \pm i\sin\beta_1\phi$$

इससे आव्यूह की प्रथम पंक्ति को इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है

$$\left[(A_1 + A_2)\cos\beta_1\phi + i(A_1 - A_2)\sin\beta_1\phi\right] e^{\alpha_1\phi} \tag{34.108}$$

138 w के वास्तविक होने के लिए नियतांक A_1 और A_2 सम्मिश्र संयुग्मी नियतांक होने चाहिए।

$$A_1 + A_2 = 2a; \quad A_1 - A_2 = i2b \tag{34.109}$$

और इसे इस रूप में पुनर्लिखा जाता है

$$A_1 = a + ib; \quad A_2 = a - ib \tag{34.110}$$

अतः A_1 और A_2 अन्य युग्मों की भाँति सम्मिश्र संयुग्मी नियतांक हैं। समीकरण 34.108 को 34.109 प्रतिस्थापित करके सरल करने पर प्राप्त होता है

$$2(a\cos\beta_1\phi - b\sin\beta_1\phi)e^{\alpha_1\phi} \tag{34.111}$$

139 जब उपर्युक्त व्यंजक की तुलना समीकरण 34.107 के प्रथम पद से की जाती है

$$\begin{aligned} A_1 e^{(\alpha_1 + i\beta_1)\phi} &= (a + ib)(\cos\beta_1\phi + i\sin\beta_1\phi)e^{\alpha_1\phi} \\ &= [a\cos\beta_1\phi - b\sin\beta_1\phi + i(b\cos\beta_1\phi + a\sin\beta_1\phi)]e^{\alpha_1\phi} \end{aligned} \tag{34.112}$$

स्पष्टतः समीकरण 34.111, 34.112 के वास्तविक भाग का दोगुना, अथवा $2\mathrm{Re}\left(A_1 e^{M_1\phi}\right)$ है; अतः

$$w = 2\mathrm{Re}\left[\begin{array}{l} A_1 e^{M_1\phi} + A_3 e^{M_2\phi} \\ A_5 e^{-M_1\phi} + A_7 e^{-M_2\phi} \end{array}\right] \sin kx \tag{34.113}$$

34.2.3.3.2 M_ϕ

140 उदाहरणार्थ M_ϕ के लिए समीकरण 34.83 से हल करें

$$\begin{aligned} M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2} \\ &= -\frac{Eh^3}{12r^2} 2\mathrm{Re}\left(\begin{array}{l} A_1 M_1^2 e^{M_1\phi} + A_3 M_2^2 e^{M_3\phi} \\ A_5 M_1^2 e^{-M_1\phi} + A_7 M_2^2 e^{-M_3\phi} \end{array}\right) \sin kx \end{aligned}$$

141 w के आंशिक अवकलज सरलता से इस प्रकार प्राप्त होते हैं

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial\phi} &= 2\mathrm{Re}\left[\begin{array}{l} A_1 M_1 e^{MM_\phi\phi} + A_3 M_2 e^{M_\phi\phi} \\ A_5\left(-M_1\right) e^{-M_1\phi} + A_7\left(-M_2\right) e^{-M_\phi\phi} \end{array}\right] \sin kx \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 2\mathrm{Re}(k)\left[\begin{array}{l} A_1 e^{M_1\phi} + A_3 e^{M_1\phi} \\ A_s e^{-M_1\phi} + A_2 e^{-M_2\phi} \end{array}\right] \cos kx \\ etc. \end{aligned} \tag{34.114}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और समीकरण 34.114 को 34.113 पर क्रमिक रूप से लागू करके w का कोई भी आंशिक अवकलज प्राप्त किया जा सकता है और प्रतिबल परिणामक अथवा प्रतिबल युग्म प्राप्त करने हेतु उसे 34.83, 34.84, अथवा 34.85 और 34.86 में प्रतिस्थापित किया जा सकता है।

142 समीकरण 34.103 से

$$M_1^2 = Q^2(\gamma + 1 + i)$$
$$M_2^2 = Q^2(\gamma - 1 + i)$$

और A_1 तथा A_2 समीकरण 34.110 द्वारा दिए गए हैं। अतः,

$$M_\phi = -\frac{Eh^3}{6r^2}\mathrm{Re}\begin{bmatrix} +(a+ib)M_1^2\left(\cos\beta_1\phi + i\sin\beta_1\phi\right)e^{\alpha_1\phi} \\ +(c+id)M_2^2\left(\cos\beta_1'\phi + i\sin\beta_1'\phi\right)e^{\alpha_1'\phi} \\ +(e+if)M_1^2\left(\cos\beta_1\phi - i\sin\beta_1\phi\right)e^{-a_1\phi} \\ +(g+ih)M_2^2\left(\cos\beta_1' - i\sin\beta_1'\phi\right)e^{-\alpha_1'\phi} \end{bmatrix}\sin kx$$

अथवा विस्तृत रूप में परिणामी काल्पनिक पदों को हटाने पर प्राप्त होता है

$$M_\phi = -\frac{Eh^2}{6r^2}Q^2\begin{bmatrix} +\left\{[a(1+\gamma)-b]\cos\beta_1\phi - [a+b(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\right\}e^{\alpha_1\phi} \\ +\left\{[c(\gamma-1)-d]\cos\beta_1'\phi - [c+d(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\right\}e^{\alpha_1'\phi} \\ +\left\{[e(1+\gamma)-f]\cos\beta_1\phi + [e+f(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\right\}e^{-\alpha_1\phi} \\ +\left\{[g(\gamma-1)-h]\cos\beta_1'\phi + [g+h(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\right\}e^{-\alpha_1'\phi} \end{bmatrix}$$

143 ϕ को किनारे के स्थान पर कवच की अनुदैर्ध्य मध्यरेखा अथवा शिखर से मापना सुविधाजनक है, जैसा चित्र 34.13 में दर्शाया गया है। सममित ज्यामिति और भारण के लिए तब $a = e, b = f$, $c = g$, और $d = h$ प्राप्त होते हैं। सममित कवचों पर असममित भारों के लिए सममित मामले को प्रतिसममित मामले से संयोजित किया जा सकता है, जहाँ $a = -e$ आदि। अब सममित मामले के लिए M_ϕ को पुनर्लिखकर चरघातांकी पदों को उनके समतुल्य अतिपरवलयिक रूप से प्रतिस्थापित करते हैं

$$e^{\alpha\phi} = \cosh\alpha\phi + \sinh\alpha\phi$$
$$e^{-\alpha\phi} = \cosh\alpha\phi - \sinh\alpha\phi$$

और प्राप्त करते हैं (जहाँ ϕ को शिखर से मापा गया है):

$$M_\phi = -\frac{Eh^3}{3r^2}Q^2\begin{bmatrix} [a(1+\gamma)-b]\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi - [a+b(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi \\ [c(\gamma-1)-d]\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi - [c+d(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi \end{bmatrix}\sin kx \tag{34.115}$$

34.2.3.3.3 अन्य पद; कार्यविधि

144 सभी ग्यारह फलनों को समान प्रकार से व्यक्त किया गया है और सारणियों 34.7 और 34.7 में संक्षेपित किया गया है।

145 अब समस्या संशोधन, अर्थात किनारी भारों (रेखा-भारों) से उत्पन्न किनारी प्रभाव, प्राप्त करने की है। सामान्यतः तीन सीमा-प्रतिबंधों को शून्य और चौथे को एक रखकर ये प्रभाव प्राप्त किए जाते हैं;

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 34.7: कवच गुणांक (ϕ को शिखर से मापा गया है)

$$F = 2R\begin{bmatrix}(aB_1 - bB_2)\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi - (aB_2 + bB_1)\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi \\ (cB_3 - dB_4)\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi - (cB_4 + dB_3)\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi\end{bmatrix}$$

F	R	B_1	B_2	B_3	B_4
M_ϕ	$-\frac{2D}{T^2}\sin kx$	$Q^2(1+\gamma)$	Q^2	$Q^2(\gamma-1)$	Q^2
M_z	$2Dk^2\sin kx$	1	0	1	0
Q	$-\frac{2Dk^3}{\gamma}\cos kx$	1	1	-1	1
N_ϕ	$\frac{4Drk^4}{\gamma^2}\sin kx$	0	1	0	-1
N_x	$-\frac{4Drk^4}{\gamma^2}\sin kx$	-1	$1+\gamma$	1	$1-\gamma$
Q_x'	$-\frac{2Dk^2}{\gamma}\cos kx$	$\gamma+2$	2	$\gamma-2$	2
u	$\frac{4Drk^2}{hE\gamma^2}\cos kx$	-1	$1+r$	1	$1-\gamma$
w	$2\sin kx$	1	0	1	0

$$F = 2R\begin{bmatrix}(aB_1 - bB_2)\cos\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi - (aB_2 + bB_1)\sin\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi \\ (cB_3 - dB_4)\cos\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi - (cB_4 + dB_3)\sin\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi\end{bmatrix}$$

F	R	B_1	B_2	B_3	B_4
Q_ϕ	$-\frac{2Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx$	$m_1 - n_1$	$m_1 + n_1$	$-(m_2 + n_2)$	$m_2 - n_2$
Q_ϕ'	$-\frac{2Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx$	$m_1(1-\gamma) - n_1$	$m_1 + n_1(1-\gamma)$	$-m_2(1+\gamma) - n_2$	$m_2 - n_2(1+\gamma)$
$N_{x\phi}$	$\frac{4Drk^4}{(\sqrt{\gamma})^5}\cos kx$	$-n_1$	m_1	n_2	$-m_2$
ν	$\frac{4Drk^3}{(\sqrt{\gamma})^7}\sin kx$	$m_1 + n_1(1-\gamma)$	$n_1 - m_1(1-\gamma)$	$-m_2 + n_2(1+\gamma)$	$-n_2 - m_2(1+\gamma)$
$\theta*$	$\sin kx$	$\frac{2\alpha_1}{r} + \frac{(R.B_1)_\mu}{r}$	$\frac{2\beta_1}{r} + \frac{(R.B_2)_\nu}{r}$	$\frac{2\alpha_1'}{r} + \frac{(R.B_3)_\nu}{r}$	$\frac{2\beta_1'}{r} + \frac{(R.B_4)_\nu}{r}$
$M_{x\phi}$	$\frac{2Dk}{r}\cos kx$	α_1	β_1	α_1'	β_1'

$\nu = 0$ thus $D = Eh^3/12$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिणामी चार युगपत समीकरणों को चार स्वेच्छ नियतांकों a, b, c और d के लिए हल किया जाता है। सारणी 34.7 के किसी भी फलन को एकक रेखा-भार के प्रत्यक्ष फलन के रूप में हल किया जा सकता है।

146 उदाहरणतः साधारणतः समर्थित कवच के प्रत्येक अनुदैर्ध्य किनारे पर सममित रूप से लगाए गए रेखा-भार $N_\phi = (4/\pi)(1)\sin kx$ पर विचार करें। चार समीकरण लिखे जाते हैं

$$N_{\phi_k} = T_L = 8Dr\left(\frac{k^4}{\gamma^2}\right)\sin kx[\quad] = \frac{4}{\pi}\sin kx$$
$$M_\phi = -\frac{4D}{r^2}\sin kx[\quad] = 0$$
$$Q'_\phi = -\frac{4Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx[\quad] = 0$$
$$N_{\phi_{kx}} = \frac{8Drk^4}{(\sqrt{\gamma})^5}\cos kx[\quad] = 0$$

और उन्हें स्वेच्छ नियतांकों के लिए हल किया जाता है। यदि सुपरशरेखीय विस्थापन v एकक रेखा-भार $N_{\phi_k} = T_L$ के लिए वांछित हो, तो a, b, c और d के परिणामी मान इसमें प्रतिस्थापित किए जाते हैं

$$v = \frac{8Drk^3}{(\sqrt{\gamma})^7}\sin kx[\quad]$$

147 इस प्रकार सारणियाँ 2 और 3, (Whitney et al., 1952) में, तैयार की गईं[4]। जहाँ सारणीबद्ध मान उपलब्ध न हों, वहाँ रेखा-भार प्रभावों को पृथक् अभिकलित करने के स्थान पर वास्तविक भार और पूर्ण किनारी प्रतिबंधों के लिए स्वेच्छ नियतांकों को सीधे अभिकलित करना प्रायः अधिक सुविधाजनक होता है।

148 यद्यपि नियंत्रक आंशिक अवकल समीकरण 34.91 को §34.1.1, 34.1.2 और 34.2.3 में पहले विस्तृत धारणाओं से व्युत्पन्न किया गया था, समीकरण 34.99 द्वारा दिया गया हल एक अतिरिक्त गणितीय प्रतिबंध रखता है कि $\sin kx$ वाले सभी फलन सीमाओं $x = 0$ और $x = L$ पर लुप्त हों। अतः $\sin kx$ वाले मान R में, सारणी 34.7 के अनुसार, कवच के दोनों सिरों पर शून्य हैं।

149 इस प्रकार लगाए गए प्रमुख भौतिक प्रतिबंध यह हैं कि कवच को $x = 0$ और $x = L$ पर पूर्ण समर्थन देने वाले अनुप्रस्थ फ्रेम प्रदान करें: 1) अपने ऊर्ध्वाधर समतलों में पूर्ण दृढता, अर्थात $v_0 = W_0 = v_L = w_L = O$; और 2) कवच के मध्य-पृष्ठ के समांतर समतलों में पूर्ण नम्यता, अर्थात $M_{x_0} = N_{x_0} = M_{x_L} = N_{x_L} = 0$। आदर्शतः कवच को ऐसी भित्ति द्वारा समर्थित माना जाता है जो इतनी गहरी हो कि कोई समतल-अंतर्गत विस्थापन न हो सके और इतनी पतली हो कि कोई समतल-बाह्य अपरूपण अथवा बंकन विकसित न हो सके। यद्यपि वास्तविक कवच-समर्थन इस आदर्श से बहुत भिन्न होते हैं, यहाँ प्रस्तुत सिद्धांत का अनेक सफलतापूर्वक निर्मित छत-संरचनाओं के अभिकल्प में व्यापक उपयोग हुआ है।

[4]ये आगे (Finsterwalder, 1933) के कार्य पर आधारित हैं; सारणी के पद T_s, S, T_ϕ, t, l, I इस पुस्तक के N_z, $N_{zy} = N_{yz}$, N_ϕ, h, L, $h^3/12$ के अनुरूप हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

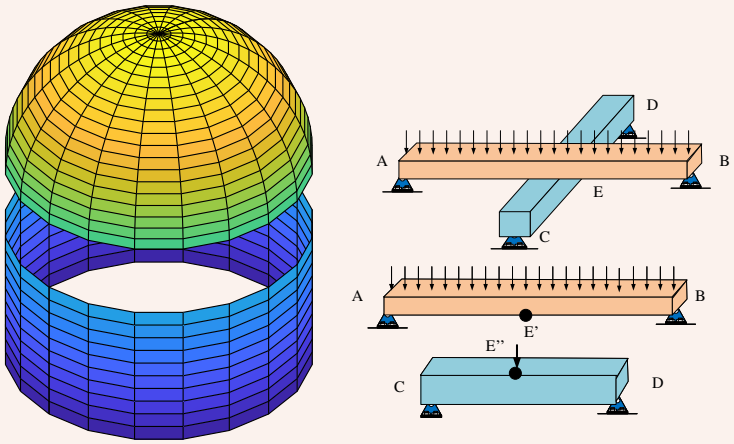
150 समीकरण 34.99 का उपयोग मुख्यतः चरों को पृथक् करने और इस प्रकार हल को प्लेटों के Levy-प्रकार के हल की भाँति साधारण अवकल समीकरण के हल जैसा मानने के लिए किया गया। चार में से दो सीमाओं पर प्रतिबंध इस गणितीय सुविधा की कीमत है।

151 कार्यविधि के अधिक विवरण के लिए पाठक (Gibson, 1968 PDF) और संख्यात्मक उदाहरणों वाले (Portland Cement Association, 1954 PDF) को देख सकते हैं। एक भिन्न संदर्भ में (Baker, Kovalevsky, and Rish, 1972) विभिन्न प्रकाशनों (विशेषतः NASA) में प्रकाशित हलों की एक "पुस्तिका" है, जो वांतरिक्ष संरचनाओं के अभिकल्प पर केंद्रित है। यह सिविल संरचनाओं पर भी लागू होती है।

152 ध्यान दें कि गुंबदों और भित्तियों (अक्षसममित ज्यामितियों) के सूत्रण केवल साधारण अवकल समीकरणों से निपटने के कारण सरल हुए और आंशिक अवकल समीकरणों से बचा गया।

34.3 स्थैतिकतः अनिर्धार्य कवच

153 कोई कवच भिन्न दृढता वाले प्रत्यास्थ समर्थन पर टिका (अथवा समर्थित) हो सकता है। ऐसे में दोनों के बीच विस्थापन और बल, दोनों में असांतत्य होंगे, चित्र 34.18a। यह चित्र 34.18b में दर्शाई बीम-व्यवस्था के अत्यंत समान है, जहाँ एक बीम को भिन्न दृढता वाली दूसरी बीम समर्थन देती है।



(a) बैरल (वृत्तीय कवच) पर गुंबद

(b) बीम पर बीम

चित्र 34.18: स्थैतिकतः अनिर्धार्य कवच और बीम के सादृश्य

34.3.1 किनारी बीम

154 किनारी बीम का उद्देश्य कवच के किनारे को दृढ करना और कवच के साथ मिलकर आनमनी प्रतिबल वहन करना है। कवच के विश्लेषण में दो प्रकार की किनारी बीमों—ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज—की समीक्षा की जाएगी, चित्र 34.19b और 34.19a। ऊर्ध्वाधर बीम प्रायः लंबे कवचों में प्रयुक्त होती हैं, जहाँ प्रमुख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संरचनात्मक क्रिया अनुदैर्ध्य बंकन है। कुषैतिज बीम सामान्यतः छोटे कवचों के साथ प्रयुक्त होती हैं, जहाँ प्रमुख संरचनात्मक क्रिया अनुप्रस्थ चापीय क्रिया है।

155 दोनों बीमों का विश्लेषण सामान्य चार चरणों का अनुसरण करता है:

प्राथमिक तंत्र: पृष्ठीय भारों को मुक्त किनारों वाला कवच वहन करता है। मुक्त किनारों पर अपने मृत भार को वहन करने वाली साधारण बीमों से बने किनारी अवयव भी उपस्थित हैं।

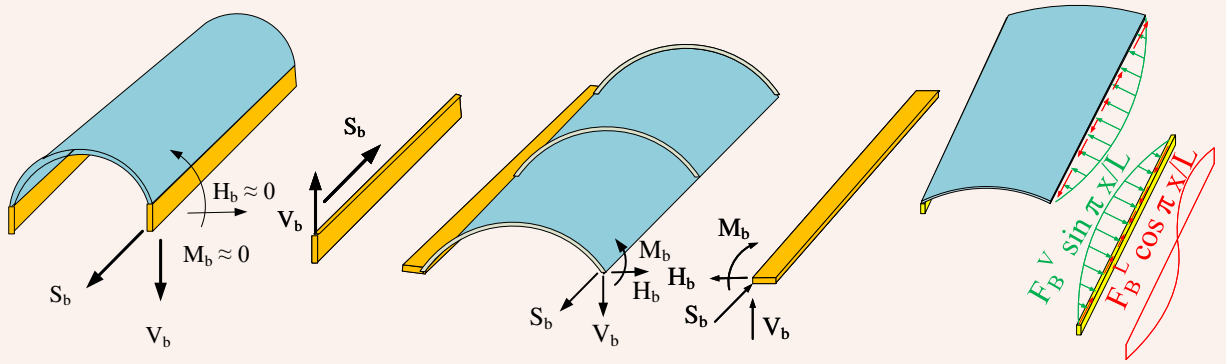
त्रुटियाँ: कवच और किनारी अवयवों के प्राथमिक तंत्र में दो त्रुटियाँ हैं। प्रथम, कवच के मुक्त किनारे और किनारी बीम के ऊर्ध्वाधर विक्षेपों का अंतर, $D^S_{10} + D^B_{10}$। द्वितीय, कवच के किनारे और किनारी बीम के शीर्ष पर अनुदैर्ध्य प्रतिबलों का अंतर, $f^S_{20} + f^B_{20}$।

संशोधन: चित्र 34.19c के अनुसार किनारी बीम पर ऊर्ध्वाधर बल V_b और अपरूपण बल S_b लगाए जाते हैं। V_b कवच पर ऊपर और बीम पर नीचे की ओर कार्य करके कवच में ऊर्ध्वाधर विक्षेप और अनुदैर्ध्य प्रतिबल घटाता है। कवच पर नीचे और बीम पर ऊपर की ओर कार्य करते समय इसे धनात्मक माना जाता है। S_b कवच पर भीतर और बीम पर बाहर की ओर कार्य करके कवच में ऊर्ध्वाधर विक्षेप और अनुदैर्ध्य प्रतिबल घटाता है। कवच पर बाहर और बीम पर भीतर की ओर कार्य करते समय इसे धनात्मक माना जाता है।

सुसंगतता: दो सुसंगतता समीकरण लागू किए जाते हैं। ऊर्ध्वाधर विस्थापन और अनुदैर्ध्य प्रतिबल निम्न प्रकार पुनर्स्थापित होते हैं

$$X_1 \left(D^S_{11} + D^B_{11}\right) + X_2 \left(D^S_{12} + D^B_{12}\right) + D^S_{10} + D^B_{10} = 0 \tag{34.116}$$

$$X_1 \left(f^S_{21} + f^B_{21}\right) + X_2 \left(f^S_{22} + f^B_{22}\right) + f^S_{20} + f^B_{20} = 0 \tag{34.117}$$



(a) ऊर्ध्वाधर किनारी बीम (b) कुषैतिज किनारी बीम (c) ऊर्ध्वाधर और अपरूपण बलों का संशोधन

चित्र 34.19: प्रत्यास्थ समर्थन पर टिके वृत्तीय कवच

156 ऊर्ध्वाधर विस्थापन धनात्मक V_b की दिशा में धनात्मक हैं। प्रतिबलों के लिए कवच में तनाव और बीम में संपीडन को धनात्मक माना गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

157 कवच के विस्थापनों और प्रतिबलों के मानों की चर्चा झिल्ली सिद्धांत और उथले कवच के सिद्धांत द्वारा §34.2.3.2.2 तथा (Whitney et al., 1952 PDF) में पहले की गई थी। किनारी बीम के विस्थापनों और प्रतिबलों के मान नीचे सामान्य आनमनी सिद्धांत से अभिकलित किए जाएँगे।

34.3.1.1 ऊर्ध्वाधर किनारी बीम

158 ऊर्ध्वाधर किनारी बीमों के लिए, चित्र 34.19a, रेखा-भार T_L और S_L लगाए जाते हैं ताकि मुक्त किनारी बल शून्य हों। ऊर्ध्वाधर किनारी बीम का उद्देश्य ऊर्ध्वाधर गति (Δ_v) और अनुदैर्ध्य किनारी विकृति (N_x/Eh) का प्रतिरोध करना है।

159 यदि बीम तनु है, तो यह माना जाता है कि वह घूर्णन और क्षैतिज स्थानांतरण के विरुद्ध उपेक्षणीय प्रतिरोध देती है। इसका अर्थ है कि किनारी बल अब शून्य नहीं हैं और अज्ञात किनारी बल V_b तथा S_b लगाने होंगे। इन मानों का निर्धारण किनारी बीम के गुणों और ऊर्ध्वाधर विक्षेप तथा अनुदैर्ध्य किनारी विकृति का प्रतिरोध करने की उसकी क्षमता पर निर्भर करता है।

160 चूँकि कवच के रेखा-भार फूरिये श्रेणी से निरूपित हैं, संपूर्ण अनुदैर्ध्य लंबाई पर कवच के साथ सुसंगतता प्राप्त करने हेतु किनारी बीम के भारण के लिए भी यही निरूपण आवश्यक है।

161 सामान्य आनमनी सिद्धांत निम्न संबंधों का उपयोग करता है:

$$\begin{aligned} EI\frac{d^4y}{dx^4} &= w_x = \text{loading} \\ EI\frac{d^3y}{dx^3} &= -S_x = \text{shear} \\ EI\frac{d^2y}{dx^2} &= -M_x = \text{moment} \\ \frac{dy}{dx} &= -\int_0^L \frac{M_x}{EI}dx + f_1(x) = \theta = \text{slope} \\ y &= -\int_0^L \int \frac{M_x}{EI}dx + \int_0^L f_1(x)dx + f_2(x) = \text{deflection} \end{aligned} \tag{34.118}$$

162 ज्ञात भारण अवस्था और मूल समाकलन से अपरूपण, आघूर्ण, ढाल और विक्षेप सभी हल किए जाते हैं। चूँकि बीम पर भार $V_b \sin \frac{n\pi x}{L}$ माना गया है, भारण समीकरण का रूप होता है

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_s = Vb \sin kx$$

($k = n\pi/L$); तब ऊपर से

$$\begin{aligned} EI\frac{d^4y}{dx^4} &= -M = -Vb \sin kx \\ y &= \frac{V_b}{EIk^4} \sin kx \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

163 बीम के शीर्ष पर अनुदैर्ध्य प्रतिबल इस प्रकार अभिकलित किया जाता है

$$f_t = \frac{M}{Z_t} = \frac{V_b}{Z_t}\frac{1}{k^2}\sin kx$$

164 ज्ञात अपरूपण बल $S_b \cos kx$ से बीम-समर्थन से किसी दूरी x पर बीम के किनारे में परिणामक प्रणोद उत्पन्न होता है।

$$T = -\int_0^x S_b \cos\frac{n\pi x}{L}dx = -S_b\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

165 यह प्रणोद बंकन आघूर्ण Te और अभिलंब भार T देता है। ऊर्ध्वाधर विक्षेप समीकरण 34.118 से $f_1(x) = f_2(x) = 0$ के साथ अभिकलित होता है और बीम के शीर्ष पर अनुदैर्ध्य प्रतिबल पुनः इस प्रकार अभिकलित होता है

$$y = -\left[\frac{S_b}{EI}\frac{1}{k^3}\sin kx\right]e \tag{34.119}$$

और बीम के शीर्ष पर अनुदैर्ध्य प्रतिबल है

$$f_t = \frac{T}{A} + \frac{Te}{Z_t} \tag{34.120}$$

166 आयताकार अनुप्रस्थ काट के लिए पहले विवेचित समीकरणों को आव्यूह रूप में लिखा जा सकता है। जब $I = bd^3/12$, $Z = bd^2/6$ और $e = d/2$, तब समीकरण नीचे दिए अनुसार संक्षेपित होते हैं। $V_b = S_b = 1$ के लिए:

$$D^B_{11} = \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{12}{\pi^4 n^4}\sin kx = \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx \tag{34.121}$$

$$f^B_{21} = -\frac{L^2}{bd^2}\frac{6}{\pi^2 n^2}\sin kx = -\frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx D^B_{12} \quad = -\frac{L^3}{Ebd^2}\frac{6}{\pi^3 n^3}\sin kx \tag{34.122}$$

$$f^B_{22} = \frac{L}{bd}\frac{4}{\pi n}\sin kx \tag{34.123}$$

167 केवल बीम पर पूर्ण भारों से उत्पन्न बीम-विस्थापन और प्रतिबल समीकरण 34.123 से मिल सकते हैं। ऊर्ध्वाधर समान भार के लिए फूरिये श्रेणी निरूपण का उपयोग करके

$$(w_{B+L})_x = -\frac{4}{\pi}w_{B+L}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin kx$$

हम व्युत्पन्न करते हैं

$$D^B_{10} = -\frac{4}{\pi}w_{B+L}\frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx \tag{34.124}$$

$$f^B_{20} = \frac{4}{\pi}w_{B+L}\frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx \tag{34.125}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

34.3.1.2 कृषैतिज किनारी बीम

168 कृषैतिज बीम के लिए, चित्र 34.19a, प्रक्रिया लगभग ऊर्ध्वाधर बीम के समान है; किंतु समीकरण 34.118 में H_b, V_b का स्थान लेता है। इसी प्रकार बीम की चौड़ाई और गहराई को निरूपित करने के लिए d और b (समीकरण 34.123 के पद) परस्पर बदले जाते हैं। ऊर्ध्वाधर बीम की भाँति इसकी घूर्णी और अनुप्रस्थ दृढता उपेक्षणीय मानी जाती है।

169 प्रमुख अंतर कवच के किनारे पर ऊर्ध्वाधर भार V_{B+L} और बंकन आघूर्ण M_{B+L} जोड़ने में है।

$$V_{B+L} = w_{B+L} d$$
$$M_{B+L} = w_{B+L} \frac{d^2}{2}$$

170 अतः कृषैतिज किनारी बीम को अपना भार विस्तृति d की कैंटिलीवर के रूप में, न कि विस्तृति L की बीम के रूप में, वहन करने वाला माना जाता है। सभी किनारी बीमों के लिए गहराई b और विस्तृति L का अनुपात सामान्यतः $1/3$ से अधिक नहीं होगा, इसलिए सामान्य आनमनी सिद्धांत लागू किया जा सकता है।

34.3.2 पूर्वप्रतिबलित किनारी बीम

171 किनारी बीम में पूर्वप्रतिबलन का उद्देश्य बीम के आकार में कमी संभव करना है। हम पुनः चार-चरणीय विश्लेषण-प्रक्रिया का अनुसरण करेंगे, जो निम्न है:

प्राथमिक तंत्र: प्राथमिक तंत्र में दो पृथक् भाग हैं। पहला, मुक्त किनारों वाला भाररहित कवच है। दूसरा, पूर्वप्रतिबलन भार के अधीन साधारण बीम के रूप में विश्लेषित किनारी बीम है।

त्रुटियाँ: कवच और किनारी अवयवों के प्राथमिक तंत्रों में दो त्रुटियाँ हैं: 1) कवच के मुक्त किनारे के ऊर्ध्वाधर विक्षेपों का अंतर; 2) कवच के किनारे और किनारी बीम के शीर्ष पर अनुदैर्ध्य प्रतिबलों का अंतर। दोनों मामलों में कवच-संरचना भाररहित होने के कारण कवच के किनारे पर विक्षेप शून्य होगा।

संशोधन: §34.3.1 में दर्शाए अनुसार किनारी बीम पर ऊर्ध्वाधर बल V_b और अपरूपण बल S_b लगाए जाते हैं। V_b कवच पर ऊपर और बीम पर नीचे की ओर कार्य करके कवच में ऊर्ध्वाधर विक्षेप और अनुदैर्ध्य प्रतिबल घटाता है। कवच पर नीचे और बीम पर ऊपर की ओर कार्य करते समय इसे धनात्मक माना जाता है। S_b कवच पर भीतर और बीम पर बाहर की ओर कार्य करके कवच में ऊर्ध्वाधर विक्षेप और अनुदैर्ध्य प्रतिबल घटाता है। कवच पर बाहर और बीम पर भीतर की ओर कार्य करते समय इसे धनात्मक माना जाता है।

सुसंगतता: सुसंगतता समीकरण §34.3.1 में दिए समीकरणों के समान हैं, केवल समीकरण 34.125 में व्युत्पन्न त्रुटि-पद भिन्न हैं।

172 नए त्रुटि-पद समीकरण 34.123 से व्युत्पन्न होते हैं। यदि किनारी बीम को साधारण बीम माना जाए,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तो परवलयिक प्रबलन प्रोफ़ाइल किनारी बीम के शीर्ष पर ऊर्ध्वमुखी विक्षेप और अनुदैर्ध्य प्रतिबल उत्पन्न करती है।

$$D_{10}^{B} = -\int_0^L \int \frac{M_F}{EI} dx dx + \int_0^L f_1(x) dx + f_2(x) \tag{34.126}$$

$$f_{20}^{B} = \frac{F}{A} - \frac{M_F}{Z_t} \tag{34.127}$$

जहाँ M_F टेंडन प्रोफ़ाइल की उत्केंद्रता से उत्पन्न बंकन आघूर्ण है।

173 इस बंकन आघूर्ण से उत्पन्न विक्षेप और प्रतिबल समर्थन-बिंदुओं को छोड़कर संपूर्ण अवयव में अभिकलित किए जाते हैं; समर्थन-बिंदुओं पर बंकन आघूर्ण शून्य माना जाता है। इसके बाद समतुल्य समान भार से विक्षेप और प्रतिबल अभिकलित किए जाते हैं।

$$w_e = \frac{8Fe_c}{L^2}$$

जिसे पुनः फूरिये श्रेणी से निरूपित किया जा सकता है:

$$(w_e)_x = \frac{4}{\pi} w_e \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kx$$

174 यदि किनारी बीम का अनुप्रस्थ काट आयताकार हो, तो समीकरण 34.126 को इस रूप में पुनर्लिखा जाता है

$$D_{10}^{B} = \frac{4}{\pi} \frac{8Fe_c}{L^2} \frac{L^4}{Ebd^3} \frac{0.12319}{n^4} \sin kx \tag{34.128}$$

और समीकरण 34.127 के दूसरे पद को समीकरण 34.125 के दूसरे पद की भाँति

$$\frac{M_F}{Z_t} = \frac{4}{\pi} \frac{F}{bd} \sin kx - \frac{4}{\pi} \frac{8Fe_c}{L^2} \frac{L^2}{bd^2} (0.60793) \sin kx \tag{34.129}$$

175 समीकरण 34.127 के प्रथम पद के लिए समान संपीडन फूरिये श्रेणी द्वारा दिया जाता है:

$$\left(\frac{F}{A}\right)_x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kx$$

अंतिम दो समीकरणों को समीकरण 34.127 में प्रतिस्थापित करके और फूरिये श्रेणी के केवल प्रथम पद का उपयोग करने पर प्राप्त होता है

$$f_{20}^{B} = \frac{4}{\pi} \frac{F}{bd} \sin kx - \frac{4}{\pi} \frac{8Fe_c}{L^2} \frac{L^2}{bd^2} (0.60793) \sin kx \tag{34.130}$$

176 V_b^F और S_b^F को समीकरण 34.128 तथा 34.130 को 34.116-34.117 में रखकर निर्धारित किया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

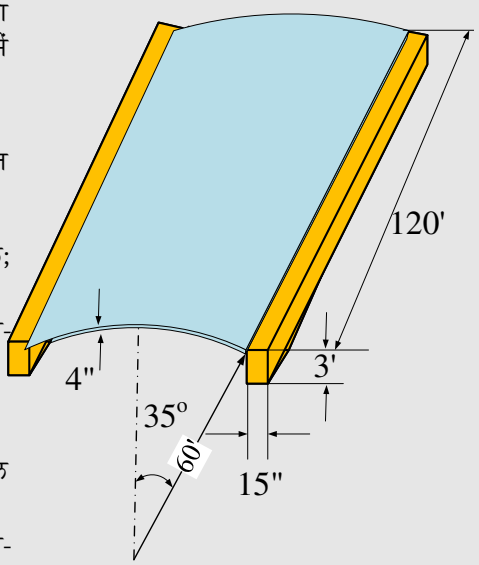
34.3.2.1 उदाहरण 34.2: बेलनाकार कवच का अभिकल्प

व्यक्तिगत टिप्पणी: यह CE-720 के गृहकार्य का हल है; यह *कवचों का विश्लेषण और अभिकल्प* विषयक पाठ्यक्रम था जिसे प्रोफेसर Richard Gallagher ने 1976 के वसंत में पढ़ाया था। वह Cornell में मेरा पहला सत्र था और प्रोफेसर Gallagher[a] मेरे स्नातकोत्तर अध्ययन के सर्वाधिक प्रभावशाली पराध्यापकों में थे। 47 वर्ष बाद मैं इस वर्ष के अंत में सेवानिवृत्त हो रहा हूँ और अपना हल इस पुस्तक में सम्मिलित करते हुए प्रसन्न हूँ।

[a]जिनसे मैंने परिमित अवयव और संरचनात्मक इष्टतमीकरण भी पढ़े।

80 lb/ft^2 के मृत भार के लिए एक बेलनाकार कवच का विश्लेषण करना है। मान लें कि प्रत्येक सिरे पर ऐसे डायाफ्राम हैं जो अपने समतलों में दृढ हैं। $E = 3 \times 10^7$ psi, $\nu = 0$।
हम निम्न प्रकार आगे बढ़ेंगे:

1. किनारी बीमों के बिना, केवल सिरों के डायाफ्रामों द्वारा समर्थित कवच का विश्लेषण करें, जिसमें
   (a) सारणी 2A (परिशिष्ट E) का उपयोग करके झिल्ली हल; परिणामों को सारणीबद्ध और आलेखित करें
   (b) उथले कवच के सिद्धांत पर आधारित यथार्थ हल। झिल्ली हल से तुलना करें।
2. किनारी बीम पर टिके कवच पर विचार करें।
   (a) कवच और बीम के ऊर्ध्वाधर विस्थापन और प्रतिबल निर्धारित करें
   (b) कवच और बीम के बीच विस्थापनों का सुसंगतता समीकरण लिखकर हल करें
3. किनारी बीमों पर कार्य करने वाले अंतिम बल निर्धारित करें।



केवल डायाफ्राम समर्थन पर कवच

झिल्ली हल

पहले झिल्ली सन्निकटन से कवच का विश्लेषण करेंगे, यह ध्यान रखते हुए कि सन्निकटन के कारण $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x}$ शून्य के बराबर नहीं होंगे।

प्राथमिक तंत्र प्रतिबल परिणामक झिल्ली सिद्धांत से निर्धारित किए जाएँगे, जैसा सारणी 34.5 में संक्षेपित है।

त्रुटियाँ चूँकि प्राथमिक तंत्र में किनारी बीम की उपस्थिति पर विचार नहीं किया गया, झिल्ली सिद्धांत के कारण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

N'_ϕ और $N''_{\phi x}$ में त्रुटियाँ होंगी। अतः p को $\frac{4}{\pi}p$ से प्रतिस्थापित करके (समीकरण 34.66 से), और $k = \frac{\pi}{L}$ रखकर, समीकरण 34.72 हो जाते हैं

$$\begin{aligned}
N'_\phi &= -\frac{4}{\pi} pr \cos(\phi_k - \phi) \sin kx \\
&= \frac{4}{\pi}(0.080)(60)\cos(35-0)\sin\frac{(1)\pi L}{L^2} \\
&= -5.006 \quad \text{k/ft at edge of the cylinder at } L/2 \\
N'_{\phi x} &= -\frac{8pL}{\pi^2}\sin(\phi_k - \phi)\cos kx \\
&= -\frac{(8)(0.08)(120)}{\pi^2}(0.5736)(0.9997) \\
&= -4.463 \text{ k/ft}
\end{aligned}$$

बेलन के किनारे पर, जहाँ $x = 0$ अथवा L।

संशोधन किनारों के अनुदिश झिल्ली सिद्धांत से उत्पन्न प्रतिबल को "प्रतिबंधित" करने के लिए N'_ϕ और $N'_{\phi x}$ लगाए जाते हैं और परिणामी प्रतिबल सारणी 2 A (परिशिष्ट E) से, निम्न पदों में परिभाषित करके, अभिकलित किए जाते हैं

$$\begin{aligned}
\frac{r}{h} &= \frac{60}{3.5/12} \quad \simeq 200 \\
\frac{r}{L} &= \frac{60}{120} = 0.5 < 0.6 \\
\phi_k &= 35^\circ < 45^\circ
\end{aligned}$$

अतः हमारा कवच एक मध्यवर्ती बैरल है, जिसका विश्लेषण सारणी 2A (परिशिष्ट E) से किया जा सकता है।

सुसंगतता

$$\begin{aligned}
V_L &= -N'_\phi \sin\phi_k = -(5.006)\sin 35^\circ = +2.871 \\
H_L &= -N'_\phi \cos\phi_k = -(-5.006)\cos 35^\circ = +4.101 \\
S_L &= -N'_{\phi k} = -4.463
\end{aligned}$$

सारणी 2A की प्रयोज्यता की जाँच:

$$\begin{aligned}
\frac{r}{h} &= \frac{60}{3.5/12} = 180 \simeq 200 \quad \text{so we can use table 2A} \\
\frac{r}{L} &= \frac{60}{120} = 0.5 < 0.6 \\
\phi_k &= 35^\circ < 45^\circ
\end{aligned}$$

अतः हमारा कवच एक मध्यवर्ती बैरल है, जिसका विश्लेषण सारणी 2A (परिशिष्ट E) से किया जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

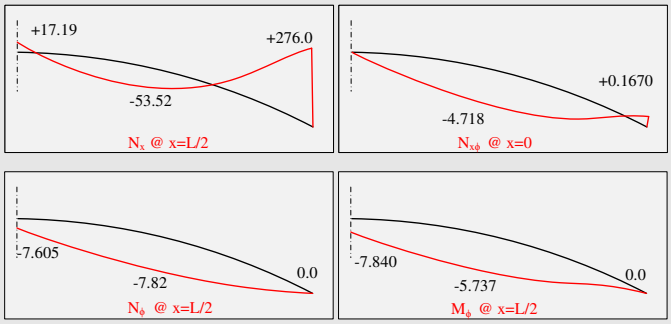
भारण	गुणक	किनारे से मापा गया कोण ϕ		
		35°	20°	0°
	$N_x = T_x;\quad x = L/2$ k/ft			
भार‡	$C = \frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}\cos(\phi_k - \phi)$	-2.026	-0.1957	-0.1660
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-4.953	-4.784	-4.058
$V_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 1)	+12.92	-8.763	+52.21
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+148.4	-100.6	+599.6
$H_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 5)	-7.760	+3.367	-22.16
	$H_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-127.3	+55.23	-363.5
$S_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 9)	+0.0566	-0.1818	+2.374
	$S_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.048	-3.367	+43.97
कुल		+17.19	53.52	+276.0
	$N_{\phi x} = S;\quad x = 0$			
भार‡	$C = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L}\sin(\phi_k - \phi)$	0.0	-0.1648	-0.3651
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right) C$	0.0	-2.014	-4.463
$V_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 2)	0.0	+4.022	0.0
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	+23.09	0.0
$H_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 6)	0.0	-3.036	0.0
	$H_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-24.90	0.0
$S_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 10)	0.0	-0.0966	+0.50
	$S_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-0.8945	+4.630
कुल		0.0	-4.718	+0.10
	$N_\phi = T_\phi;\quad x = L/2$			
भार‡	$C = -\sin\frac{\pi x}{L}\cos(\phi_k - \phi)$	-1.0	-0.9659	-0.8192
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-6.112	-5.903	-5.007
$V_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 3)	+0.520	-2.425	+0.574
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.493	-6.962	+1.648
$H_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 7)	0.6687	+1.253	+0.8192
	$H_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-2.742	+5.138	+3.360
$S_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 11)	-0.0528	-0.0204	0.0
	$S_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-0.2445	-0.0945	0.0
कुल		-7.605	-7.821	+0.001
	$M_\phi;\quad x = L/2$			

अगले पृष्ठ पर जारी

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भारण	गुणक	किनारे से मापा गया कोण ϕ		
		35°	20°	0°
$V_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 4)	-0.1106	-0.1266	0.0
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-19.05	-21.81	0.0
$H_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 8)	+0.0486	+0.0670	0.0
	$H_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.96	+16.49	0.0
$S_L^\dagger$	गुणांक C (स्तंभ 12)	-0.0027	-0.0015	0.0
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-0.7501	-0.4167	0.0
कुल		-7.840	-5.737	0.0

‡ सारणी 34.5; † सारणी 2A-l (E)



पुनः ध्यान दें कि झिल्ली धारणाओं के कारण $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x} \neq 0$।

उथले कवच का हल

यहाँ उथले कवच के विश्लेषणात्मक हल (§34.2.3) का उपयोग करके यथार्थ हल खोजते हैं।

1. आयाम और भार: $L = 120'$, $r = 60'$, $h = 4"$, $\phi_k = 35°$, $p = 0.0$ ksf
2. कवच नियतांक

$$k = \frac{n\pi}{L} = 0.02618; \qquad n = 1$$

$$\gamma = \frac{rk}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{h}{r}} = 0.08322$$

$$Q = \sqrt[8]{3}\sqrt[4]{\frac{r}{h}}\sqrt{rk} = 5.445$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. मूल (समीकरण 34.106)

$$m_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}+(1+\gamma)}{2}} = 1.1308$$
$$n_1 = Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}-(1+\gamma)}{2}} = 0.4422$$
$$m_2 = Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}-(1-\gamma)}{2}} = 0.469$$
$$n_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}+(1-\gamma)}{2}} = 1.0662$$

4. M_1 & M_2 के गुणांक

$$\alpha_1 = Qm_1 = 6.1572$$
$$\beta_1 = Qn_1 = 2.407$$
$$\alpha_1' = Qm_2 = 2.5537$$
$$\beta_1' = Qn_1 = 5.8055$$

5. शिखर से $\phi = -35° = 0.6108$ rad. के लिए त्रिकोणमितीय और अतिपरवलयिक गुणक

$$\begin{array}{llll}
\cos\beta_1\phi & = +0.09929 & \cos\beta_1'\phi & = -0.919 \\
\sin\beta_1\phi & = -0.9950 & \sin\beta_1'\phi & = +0.39382 \\
\cosh\alpha_1\phi & = +21.5116 & \cosh\alpha_1'\phi & = +2.4844 \\
\sinh\alpha_1\phi & = +0.214884 & \sinh\alpha_1'\phi & = -2.2742 \\
\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi & = +2.1466 & \cos\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi & = -2.1443 \\
\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi & = +21.3812 & \sin\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi & = -21.4043 \\
\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi & = -2.2836 & \cos\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi & = +2.0904 \\
\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi & = -0.8956 & \sin\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi & = +0.9784
\end{array} \tag{34.131}$$

6. कवच के किनारी प्रतिबंध (ध्यान दें कि इन्हें झिल्ली सिद्धांत द्वारा लागू नहीं किया जा सकता था)

$$M_\phi = 0$$
$$N_\phi = 0 = N_\phi' + T_L$$
$$Q_\phi' = Q_\phi + \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial x} = 0 \quad \text{neglect the } n \text{ variation of } M_{\phi x}$$
$$N_{\phi x} = 0 = N_{\phi x}' + S_L$$

7. M_ϕ के समीकरण, सारणी 34.7 से

$$\begin{array}{llllll}
B_1 & = Q^2(1+\gamma) & = +32.1153 & B_3 & = Q^2(1-\gamma) & = -27.1807 \\
B_2 & = Q^2 & = +29.6480 & B_4 & = Q^2 & = 29.6480
\end{array}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सारणी के संगत समीकरणों में प्रतिस्थापित करके और शून्य के बराबर रखकर

$$2R\Big[(32.1153Q-29.6480b)(2.1466)-(29.6480a+32.1153b)(21.3812)+(-27.1807c+29.6480d)(2.2836) + (29.6480c-27.1807d)(0.8956)\Big]=0 \quad (34.132)$$

सरल करने पर

$$-546.97a-750.31b+88.623c+43.3612d=0$$

8. N_ϕ का समीकरण, सारणी 34.7 से

$$B_1=0;\quad B_2=1;\quad B_3=0;\quad B_4=-1$$

प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{4D(60)(0.02618)^4}{0.08322^2}[(-b)(2.1466)-(a)(21.3812)+d(-2.2836)-(-c)(-0.8956)]-\frac{5.006}{2}=0.0$$

$$\Rightarrow 0.348070a+0.034945b+0.014580c+0.037125d=-\frac{2.503}{D} \quad (34.133)$$

9. Q'_ϕ का समीकरण, सारणी 34.7 से

$$B_1=m_1(1-\gamma)-n_1=0.59450 \quad B_3=-m_2(1+\gamma)-n+2=-1.5742$$
$$B_2=m_1+n_1(1-\gamma)=1.5362 \quad B_4=m_2-n_2(1+\gamma)=0.68593$$

प्रतिस्थापित करने पर

$$-\frac{-20(0.02618)^3}{(\sqrt{.08322})^3}\Big[(0.5945a-1.53626b)(-2.1443)-(1.5362a+0.5945b)(-21.4043) + (-1.5742c+0.68593d)(2.0944)-(-0.68593c-1.5747d)(0.9784)\Big]=0.0 \quad (34.134)$$

अथवा

$$31.6065a+16.01893b-2.6196c+2.97410d=0.0$$

10. $N_{\phi x}$ का समीकरण, सारणी 34.7 से

$$B_1=-n_1=-0.4422 \quad B_3=+n_2=1.0662$$
$$B_2=+m_1=+1.1308 \quad B_4=m_2=-0.4690$$

प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{8D(60)(0.02618)^4}{(\sqrt{0.08322})^5}\Big[(-0.4422a-1.1308b)(-2.443)-(1.1308a-0.4422b)(-21.4043) + (1.0662c+0.4690d)(2.0904)-(-0.4690c+1.0662d)(0.9784)\Big]-4.463=0.0 \quad (34.135)$$

अथवा

$$2.8369a-0.794561b+0.30333c-0.007045d=\frac{4.463}{D}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11. स्वेच्छ नियतांकों का हल

$$-546.97a - 750.31b + 88.623c + 43.361d = 0$$
$$0.34807a + 034945b + 0.14580c + .037175d = -\frac{2.505}{D}$$
$$31.6065a + 16.01893b - 2.6196c + 2.9741d = 0.0$$
$$2.8369a - 0.794561b + 0.30333c - 0.007045d = \frac{4.463}{D}$$
$$\Rightarrow a = \frac{8.6097}{D}; \quad b = -\frac{26.4349}{D}; \quad c = \frac{-136.668}{D}; \quad d = \frac{-69.4923}{D};$$

12. सारणी 34.7 से
$$D = \frac{Eh^3}{12} = \frac{(3\times 10^4)(4/12)^3}{12}(144) = 1.33\times 10^4$$
अथवा
$$a = 6.4573\times 10^{-4}; \quad b = -0.0020; \quad c = -0.0103; \quad d = -0.0052;$$

13. इसके बाद इन गुणांकों और समीकरण 34.131 में सारणीबद्ध गुणांकों को समीकरण 34.115 में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है
$$N_x = 281.285 \quad \text{k/ft}$$

14. चूँकि समीकरणों की गणना शिखर से $\phi = 35^\circ$ के लिए की गई, जहाँ $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x} = 0$; अतः एकमात्र संभव तुलना है $N_x = 281.285$ k/ft, झिल्ली उपागम से प्राप्त 276.0 k/ft की तुलना में। यह बहुत निकट है!

कवच–बीम

प्राथमिक तंत्र

पिछले भाग के अंतिम परिणाम प्राथमिक तंत्र बनाएँगे और परिणामी प्रतिबलों का उपयोग सारणियों 2A और 2B में, परिशिष्ट E, विस्थापन निर्धारित करने के लिए किया जाएगा।

त्रुटियाँ

ये निम्न कारणों से हैं

1. ऊर्ध्वाधर विक्षेप
2. अनुदैर्ध्य प्रतिबल

कवच के किनारे के अनुदिश। अतः बीमों के अनुदिश असांतत्य होंगे।

बीम की ऐंठन दृढता उपेक्षणीय मानी जाएगी।

प्रतिलिपि

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कवच का झिल्ली ऊर्ध्वाधर विस्थापन ऊर्ध्वाधर विस्थापन Δv झिल्ली परिणामों (समीकरण 34.79) और सारणी 2A (परिशिष्ट E) के किनारी भारों से उत्पन्न होता है।

$$\Delta v^s = \frac{L^4}{r^3 hE}\left\{\underbrace{pr\left[\left(\frac{2r}{\pi L}\right)^2 + \frac{2}{\pi^4} + 0.50\left(\frac{r}{L}\right)^4\right]}_{\text{Membrane deflection}} + \underbrace{\text{Col(1)}V_L + \text{Col(4)}H_L + \text{Col(7)}S_L}_{\text{Edge load effects on deflections, Table 2B}}\right\}\sin kx$$

$$= \frac{(120)^4 L^2}{(60)^3(4/12)E}\left\{(0.08)(60)\left[\left(\frac{2(60)}{120\pi}\right)^2 + \frac{2}{\pi^4} + 0.50\left(\frac{60}{120}\right)^4\right]\right.$$
$$\left. +(486.24)(2.871) - (244.3)(4.101) + (8.309)(4.63)\right\}\sin kx$$
$$= \frac{L^2}{E}(86.76)\sin kx = D_{10}^S \quad (34.136)$$

जहाँ पादांक 1 ऊर्ध्वाधर विक्षेप और 0 लगाए गए मृत भार के अनुरूप है।

झिल्ली किनारी प्रतिबल अन्य असुसंगतता प्रतिबलों में है। $N_x = T_x = 2.76$ k/ft, $L/2$ पर

$$\frac{N_x}{h} = \frac{2.76}{4/12} = 8.28 \text{ ksf} = f_{20}^S \quad \text{at } x = L/2$$

जहाँ f_{20}^S में पादांक 2 और 0 क्रमशः प्रतिबल और लगाए गए भार के अनुरूप हैं।

बीम का ऊर्ध्वाधर विस्थापन बीम के लिए D_{10}^B और f_{20}^b के बीच सादृश्य है। समीकरण 34.125 से, जहाँ बीम का भार है

$$w = \frac{15}{12}(3)(0.15) \text{ k/ft}^3 = 0.5625 \text{ k/ft}$$

$$D_{10}^B = -\frac{4}{\pi} w \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx$$
$$= -\frac{4}{\pi}(0.5625)\frac{(120)^2 L^2}{E\left(\frac{15}{12}\right)(3)^3}(0.123)\sin kx$$
$$= -37.586\frac{L^2}{E}\sin kx$$
$$f_{20}^B = \frac{4}{\pi} w \frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx$$
$$= \frac{4}{\pi}(0.5625)\frac{(120)^2}{\left(\frac{15}{12}\right)(3)^2}(0.60793)\sin kx$$
$$= 557.37\sin kx$$

असुसंगतताएँ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कवच विस्थापन V_b और S_b भी कवच पर लगाए जाते हैं। ऊपर की भाँति

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{L^4}{r^3 hE}\left((486.24)V_b + (8.309)S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\frac{(120)^2}{(60)^3(4/12)}\left((486.24)V_b + (8.309)S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\left(\underbrace{97.28}_{D_{11}^s}V_b + \underbrace{1.662}_{D_{12}^s}S_L\right)\sin kx\end{aligned}$$

कवच प्रतिबल

$$\begin{aligned}f^s &= \left(\frac{L}{r}\right)^2\frac{1}{h}\left(52.21V_b + 2.374S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\frac{120}{60}\right)^2\left(\frac{12}{4}\right)\left(52.21V_b + 2.374S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\underbrace{626.52}_{f_{21}^s}V_b + \underbrace{28.488}_{f_{22}^s}S_b\right)\sin k_x\end{aligned}$$

बीम विस्थापन (समीकरण 34.123)

$$\begin{aligned}\Delta v^b &= \frac{L^4}{bd^3E}\left[(0.123)V_b - \frac{d}{L}(0.1935)S_b\right]\sin kx \\ &= \frac{L^2(120)^3}{(15/12)(3)^3E}\left[(0.123V_b - \frac{3}{120}(0.1935)S_b\right]\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\left(\underbrace{52.48}_{D_{11}^b}V_b\underbrace{-2.064}_{D_{12}^b}S_b\right)\sin kx\end{aligned}$$

बीम प्रतिबल

$$\begin{aligned}f_t^b &= \frac{L}{bd}\left(-0.608\frac{L}{d}V_b + 1.273S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{120}{\left(\frac{15}{12}\right)(3)}\left(-0.608\frac{120}{3}V_b + 1.273S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\underbrace{-778.24}_{f_{21}^b}V_b + \underbrace{40.736}_{f_{22}^b}S_b\right)\sin kx\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सुसंगतता

$$\begin{cases} \dfrac{L^2}{E}\left[(\underbrace{97.28}_{D^s_{11}}+\underbrace{52.48}_{D^b_{11}})V_b+(\underbrace{1.662}_{D^s_{12}}-\underbrace{2.064}_{D^b_{12}})S_b+(\underbrace{86.76}_{D^s_{10}}-\underbrace{37.586}_{D^b_{10}})\right]=0 \\ (\underbrace{626.52}_{f^s_{21}}-\underbrace{778.24}_{f^b_{21}})V_b+(\underbrace{28.488}_{f^s_{22}}+\underbrace{40.736}_{f^b_{22}})S_b+(\underbrace{828.0}_{f^s_{20}}+\underbrace{557.37}_{f^b_{20}})=0 \end{cases}$$

अथवा

$$\begin{bmatrix} 149.76 & -0.402 \\ -151.72 & 69.224 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_b \\ S_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -49.174 \\ -1,385.37 \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} V_b \\ S_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0.3839 \\ -20.85 \end{Bmatrix}$$

बीम के अंतिम मान

ऊपर से $N'_{\phi}=-5.006$ और $N'_{\phi x}=-4.463$ थे

$$\begin{aligned} V_L &= -(-5.006)\sin 35^\circ = +2.871 \\ H_L &= -(-5.006)\cos 35^\circ = +4.101 \\ S_L &= -4.463 \end{aligned}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भारण	गुणक	किनारे से मापा गया कोण ϕ		
		35°	20°	0°
$N_x = T_x;\quad x = L/2$ k/ft				
सरल कवच		+17.19	-53.52	+276.0
V_L	गुणांक C (स्तंभ 1)	+12.92	-8.763	+52.21
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-19.84	+13.46	-80.17
S_B	गुणांक C (स्तंभ 9)	+0.0566	-0.1818	+2.374
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-4.72	+15.16	-198.0
कुल		-7.37	-24.9	-2.17
$N_{\phi x} = S;\quad x = 0$				
सरल कवच		0.00	-4.718	+0.167
V_B	गुणांक C (स्तंभ 2)	0.0	+4.022	0.0
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-3.088	0.0
S_B	गुणांक C (स्तंभ 10)	0.0	-0.0966	+0.50
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	+4.028	-20.85
कुल		0.0	-3.778	-20.68
$N_\phi = T_\phi;\quad x = L/2$				
सरल कवच		-7.605	-7.821	0.0
V_B	गुणांक C (स्तंभ 3)	+0.520	-2.425	+0.574
	$V_B C$	-0.199	+0.931	-0.220
S_B	गुणांक C (स्तंभ 11)	-0.0528	-0.0204	0.0
	$S_B C$	+1.10	+0.425	0.0
कुल		-6.70	-6.46	-0.22
$M_\phi;\quad x = L/2$				
सरल कवच		-7.84	-5.737	0.0
V_B	गुणांक C(स्तंभ 4)	-0.1106	-0.1266	0.0
	$V_B r C$	2.55	+2.92	0.0
S_B	गुणांक C (स्तंभ 12)	-0.0027	-0.0015	0.0

जारी...

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भारण	गुणक	किनारे से मापा गया कोण ϕ		
		35°	20°	0°
	$S_B rC$	+3.38	+1.88	0.0
कुल		-1.91	-0.937	0.0

34.3.3 MATLAB®कोड और संख्यात्मक उदाहरण

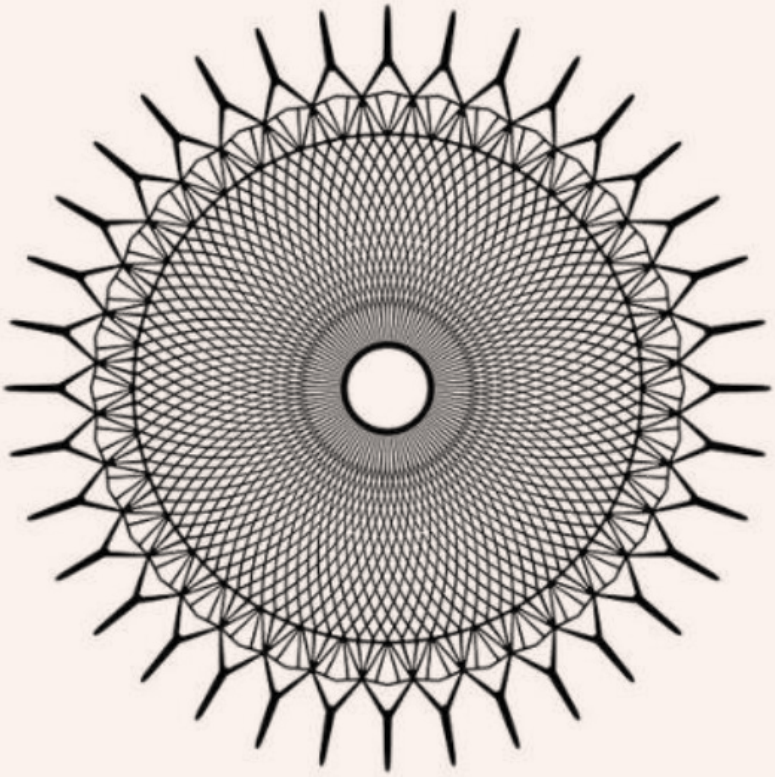
177 वृत्तीय कवचों के अभिकल्प के लिए एक प्रारंभिक MATLAB®कोड परिशिष्ट I.2.1 में दिया गया है।

178 बेलनाकार कवच का एक अतिरिक्त संख्यात्मक हल परिशिष्ट F में मिलता है। यह (Portland Cement Association, 1954) द्वारा दिया गया है, जिसका हल (Whitney et al., 1952) पर आधारित है और Billington, 1965 द्वारा दिए गए हल के लगभग समान है।

179 अतिरिक्त जानकारी Gibson, 1968 की आधारभूत पुस्तक में मिल सकती है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Palazzetto dello Sport, Pier Luigi Nervi (पियर लुइजी नेर्वी), 1957, रोम, इटली।

कवच संरचनाओं का उदाहरण, जिसमें पतला वक्र प्रबलित-कंक्रीट कवच झिल्ली क्रिया द्वारा भारों को दक्षतापूर्वक वहन करता है और बंकन प्रतिबलों को न्यूनतम रखता है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35 गतिकी I

सारांश

यह अध्याय आरंभिक पाठ्यक्रम के लिए आवश्यक संरचनात्मक गतिकी (structural dynamics) की आधारशिला विकसित करता है। गति-समीकरण तथा जडत्व और अवमंदन के अर्थ से आरंभ करते हुए, इसमें एकल-स्वतंत्रता-कोटि दोलक का विस्तृत विवेचन किया गया है: मुक्त कंपन (अनवमंदित और अवमंदित), हार्मोनिक उत्तेजन और अनुनाद, तथा सोपान, आवेग और स्वेच्छ भारण के प्रति क्षणिक अनुक्रिया (Duhamel समाकल)। इसके बाद अध्याय वैचारिक और विश्लेषणात्मक स्तर पर बहु-स्वतंत्रता-कोटि निकायों तक चर्चा का विस्तार करता है तथा विधा-आकृतियों, विधिक वियुग्मन और अनुक्रिया-वर्णक्रमों के माध्यम से भूकंपीय अनुक्रिया की अभियांत्रिक व्याख्या पर बल देता है। पूरे अध्याय में भौतिक बोध और हस्त-आधारित विश्लेषण प्रमुख हैं, जो स्नातकोत्तर-स्तरीय अध्याय में प्रस्तुत संगणकीय विधियों के लिए आधार तैयार करते हैं।

35.1 दार्शनिक आधार 1318
35.2 गतिक विश्लेषण कब आवश्यक है 1318
35.3 मूलभूत सिद्धांत 1319
35.3.1 d'Alembert का सिद्धांत और गतिक संतुलन 1319
35.3.2 एकल-स्वतंत्रता-कोटि दोलक . . 1320
35.3.3 प्राकृतिक आवृत्ति और आवर्त-काल 1321
35.3.4 अवमंदन और अवमंदन अनुपात . 1322
35.4 मुक्त कंपन 1323
35.4.1 अनवमंदित मुक्त कंपन 1323
35.4.2 अवमंदित मुक्त कंपन 1324
35.4.3 लघुगणकीय ह्रास 1325
35.5 प्रणोदित कंपन: हार्मोनिक उत्तेजन . . . 1326
35.5.1 अनवमंदित हार्मोनिक अनुक्रिया . 1326
35.5.2 अवमंदित हार्मोनिक अनुक्रिया . 1327
35.6 स्वेच्छ भारण के प्रति अनुक्रिया 1329
35.6.1 आवेग अनुक्रिया और एकक आवेग1329
35.6.2 Duhamel समाकल 1330
35.6.3 Fourier विश्लेषण और आवृत्ति अनुक्रिया 1334
35.7 आलंब उत्तेजन और भूकंपीय अनुक्रिया . 1336
35.7.1 आधार उत्तेजन का गति-समीकरण1336
35.7.2 अनुक्रिया वर्णक्रम 1337
35.8 बहु-स्वतंत्रता-कोटि निकाय 1339
35.8.1 गति-समीकरण 1339
35.8.2 अनवमंदित मुक्त कंपन: प्राकृतिक विधाएँ 1340
35.8.3 विधिक विश्लेषण 1340
35.8.4 भूकंपीय अनुक्रिया में विधिक सह-भागिता 1341
35.9 सतत निकाय 1344
35.9.1 दंडों का अक्षीय कंपन 1344
35.9.2 धरनों का अनुप्रस्थ कंपन 1345
35.10 अरैखिक गतिकी 1347
35.10.1 अरैखिकता के स्रोत 1347
35.10.2 शैथिल्य और ऊर्जा-क्षय 1347
35.10.3 तन्यता और क्षमता अभिकल्प . 1349
35.11 व्यावहारिक विचार 1351
35.11.1 वास्तविक संरचनाओं में अवमंदन 1351
35.11.2 मृदा-संरचना अन्योन्यक्रिया . . . 1352
35.11.3 समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक . 1352
35.11.4 उदाहरण 35.13: ऊँचे भवन के लिए समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक का अभिकल्प 1352
35.11.5 आधार-विलगन 1354
35.11.6 उदाहरण 35.14: आधार-विलगित अस्पताल भवन का अभिकल्प . 1354
35.12 समापन टिप्पणियाँ 1356
35.12.1 अनुक्रिया-वर्णक्रम विधियों पर व्यवसायी की सावधानी 1356
35.12.2 समापन टिप्पणी: रैखिक सिद्धांत की सीमाएँ 1356

यह अध्याय लगभग 60 संकेतों के माध्यम से पूर्णतः Claude द्वारा लिखा गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35.1 दार्शनिक आधार

1 पिछले अध्यायों में हमने संरचनाओं को ऐसे माना है मानो वे कालातीत संतुलन में विद्यमान हों—बल तत्क्षण लगाए जाते हों और सदा बने रहते हों, विस्थापन बिना गति के होते हों, तथा प्रतिबल बिना किसी इतिहास के उत्पन्न होते हों। भार और अनुक्रिया के मूलभूत संबंधों को समझने के लिए उपयोगी होने पर भी यह आदर्शीकरण संरचनात्मक व्यवहार की केवल एक सीमांत दशा को निरूपित करता है। वास्तविक संसार गतिशील है: भार समय के साथ बदलते हैं, द्रव्यमानों में जड़त्व होता है और ऊर्जा अवमंदन द्वारा क्षय होती है। संरचनात्मक गतिकी समय-परिवर्ती उत्तेजनों के प्रति संरचनाओं की अनुक्रिया का अध्ययन है और यह हमारे द्वारा विकसित स्थैतिक विश्लेषण तथा पवन, भूकंप, संघात, मशीनरी-कंपन और असंख्य अन्य समय-निर्भर परिघटनाओं के अधीन संरचनाओं के वास्तविक व्यवहार के बीच आवश्यक सेतु बनाती है।

2 स्थैतिकी से गतिकी की ओर संक्रमण परिचित समीकरणों में केवल समय-निर्भर पद जोड़ना नहीं है। यह दृष्टिकोण में एक मूलभूत परिवर्तन है। स्थैतिकी में हम पूछते हैं: “किसी दिए गए भार के अधीन प्रतिबल और विरूपण की अवस्था क्या है?” गतिकी में हम पूछते हैं: “समय-परिवर्ती उत्तेजन के प्रति संरचना समय के साथ किस प्रकार विकसित होती है?” उत्तर केवल संरचना की दृढता (जैसा स्थैतिकी में) पर ही नहीं, बल्कि उसके द्रव्यमान-वितरण और ऊर्जा-क्षय के अभिलक्षणों पर भी निर्भर करता है। ये तीन गुण—दृढता, द्रव्यमान और अवमंदन—संरचनात्मक गतिकी की अनिवार्य त्रयी बनाते हैं।

3 संरचनात्मक गतिकी का ऐतिहासिक विकास स्वयं चिरसम्मत यांत्रिकी के विकास के निकट समानांतर रहा है। *Principia* (1687) में प्रकाशित Newton के गति-नियमों ने इसकी नींव रखी। अठारहवीं शताब्दी भर Euler, d’Alembert और Bernoulli परिवार ने तंतुओं तथा झिल्लियों के कंपन का अध्ययन किया। Rayleigh की *Theory of Sound* (1877) ने आज भी प्रयुक्त अधिकांश गणितीय ढाँचे का संश्लेषण किया। बीसवीं शताब्दी में विनाशकारी 1906 San Francisco भूकंप से आरंभ हुई भूकंप-अभियांत्रिकी की चुनौती तथा अनुक्रिया-वर्णक्रम विधियों, संख्यात्मक काल-समाकलन और निष्पादन-आधारित अभिकल्प का विकास सामने आया। आज संरचनात्मक गतिकी प्रत्येक संरचनात्मक अभियंता की साधन-सामग्री का अनिवार्य अंग है।

35.2 गतिक विश्लेषण कब आवश्यक है

4 एक ऐसा प्रश्न, जिसका स्पष्ट उत्तर देने में अभियंताओं को आश्चर्यजनक रूप से प्रायः कठिनाई होती है, देखने में अत्यंत सरल है: वास्तव में गतिक विश्लेषण कब आवश्यक होता है? मूलतः उत्तर सीधा है—जब लगाए गए भारण की आवृत्ति संरचना की प्राकृतिक आवृत्ति के समान परिमाण-कोटि की हो, तब गतिक विश्लेषण आवश्यक है। जब ये दोनों आवृत्तियाँ एक-दूसरे के निकट आती हैं, तो अनुनाद की परिघटना घटित हो सकती है और संरचनात्मक अनुक्रिया स्थैतिक विश्लेषण द्वारा अनुमानित मान से कहीं अधिक, कभी-कभी विनाशकारी स्तर तक, परिवर्धित हो सकती है।

5 इस सिद्धांत के अनेक व्यावहारिक परिणाम हैं। नम्य संरचना—अर्थात् कम प्राकृतिक आवृत्ति वाली संरचना—दृढ संरचना की तुलना में गतिक उत्तेजन के प्रति स्वभावतः अधिक संवेदनशील होती है, क्योंकि उसकी प्राकृतिक आवृत्ति के पवन, मशीनरी, भूकंप अथवा मानवीय गतिविधि से उत्पन्न सामान्य भारण-

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आवृत्तियों के परिसर में आने की संभावना अधिक होती है। इसके विपरीत, दृढ संरचना की प्राकृतिक आवृत्ति अधिक होती है और वह अधिकांश भारों के प्रति अर्ध-स्थैतिक रूप से अनुक्रिया करती है; अतः परंपरागत स्थैतिक विश्लेषण पूर्णतः पर्याप्त होता है।

6 अधिक स्पष्ट रूप से, चार स्थितियों में गतिक विश्लेषण आवश्यक माना जा सकता है: जब संरचना विस्फोट या संघात जैसे तीव्रता से बदलते भारों के अधीन हो; जब वह ऐसी घूर्णी मशीनरी को आधार देती हो जिसकी प्रचालन आवृत्ति किसी संरचनात्मक विधा से मेल खा सकती हो; जब उसे भूकंपीय उत्तेजन का प्रतिरोध करना हो, क्योंकि भूकंप आवृत्तियों के व्यापक पट्ट को उत्तेजित करते हैं; और जब वह पवन के संपर्क में आई तनु अथवा नम्य संरचना हो, जिसमें भँवर-निर्गमन या स्पंदन अनुनाद उत्पन्न कर सकता है।

7 एक उपयोगी सामान्य नियम यह है कि यदि लगाए गए भार की प्रमुख आवृत्ति संरचना की मूलभूत प्राकृतिक आवृत्ति के लगभग एक-तिहाई से अधिक हो, तो गतिक प्रभाव उपेक्षणीय नहीं रहते और उनका आकलन किया जाना चाहिए। इस सीमा से नीचे उपयुक्त प्रवर्धन गुणकों सहित स्थैतिक विश्लेषण सामान्यतः पर्याप्त होता है।

35.3 मूलभूत सिद्धांत

35.3.1 d'Alembert का सिद्धांत और गतिक संतुलन

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §6.7.4 देखें

8 संरचनात्मक गतिकी की आधारशिला d'Alembert का सिद्धांत है, जो उनकी *Traité de dynamique* (d'Alembert, 1743 PDF) में प्रकाशित हुआ। d'Alembert ने पहचाना कि जड़त्वीय बल की संकल्पना प्रस्तुत करके Newton के द्वितीय नियम को गतिक संतुलन के सिद्धांत के रूप में पुनर्लिखा जा सकता है। यदि द्रव्यमान m का कोई पिंड त्वरण $\ddot{u}$ अनुभव करता है, तो गुणनफल $-m\ddot{u}$ को पिंड पर कार्यरत एक काल्पनिक बल माना जा सकता है, जिससे सभी बलों (इस जड़त्वीय बल सहित) का योग शून्य हो जाता है। यह देखने में सरल पुनर्निरूपण गतिकी की समस्याओं को संतुलन की समस्याओं में बदल देता है और स्थैतिकी की शक्तिशाली विधियों का प्रयोग संभव बनाता है।

9 द्रव्यमान m के किसी कण पर बाह्य बल $F(t)$ लगाए जाने पर Newton का द्वितीय नियम है:

$$F(t) = m\ddot{u}(t)$$

जहाँ $\ddot{u}(t) = \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2$ त्वरण है। पुनर्व्यवस्थित करने पर:

$$F(t) - m\ddot{u}(t) = 0$$

यही d'Alembert का सिद्धांत है: लगाया गया बल $F(t)$ जड़त्वीय बल $F_I = -m\ddot{u}(t)$ द्वारा संतुलित होता है और इस प्रकार समय के प्रत्येक क्षण पर गतिक संतुलन प्राप्त होता है।

10 d'Alembert के सिद्धांत की गहन उपयोगिता सतत निकायों और आभासी कार्य के सूत्रीकरणों तक उसके विस्तार में निहित है। जड़त्वीय बलों को लगाए गए बलों के समान मानकर हम स्वेच्छ जटिलता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

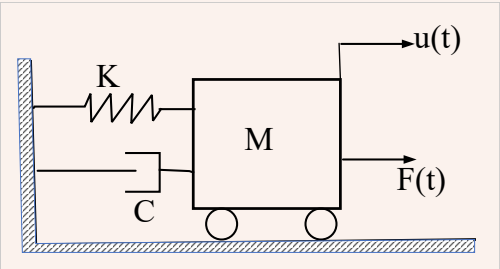
वाली संरचनाओं के गति-समीकरण व्युत्पन्न करने के लिए आभासी कार्य का सिद्धांत, Hamilton का सिद्धांत और Lagrange के समीकरण लागू कर सकते हैं। इसके बदले हमारे "संतुलन" समीकरण समय के सापेक्ष अवकल समीकरण बन जाते हैं, जिनसे अनुक्रिया प्राप्त करने के लिए प्रारंभिक दशाओं और समाकलन की आवश्यकता होती है।

35.3.2 एकल-स्वतंत्रता-कोटि दोलक

11 संरचनात्मक गतिकी में एकल-स्वतंत्रता-कोटि (SDOF) निकाय की वही भूमिका है जो संरचनात्मक विश्लेषण में सरलतः आलंबित धरन की है: यह वह आदर्श उदाहरण है जिसके माध्यम से मूलभूत संकल्पनाएँ प्रस्तुत और समझी जाती हैं। एक दिशा में गति करने के लिए बाधित द्रव्यमान m पर विचार करें, जो दृढता k की कमानी और गुणांक c के श्यान अवमंदक द्वारा स्थिर आलंब से जुडा है। जब द्रव्यमान को उसकी संतुलन-स्थिति से $u(t)$ विस्थापित करके बाह्य बल $F(t)$ के अधीन किया जाता है, तब तीन आंतरिक बल उत्पन्न होते हैं:

- **प्रत्यास्थ पुनःस्थापन बल**: $F_S = ku(t)$, जो विस्थापन के समानुपाती और संतुलन की ओर निर्देशित है।
- **अवमंदन बल**: $F_D = c\dot{u}(t)$, जो वेग के समानुपाती और गति के विपरीत है।
- **जडत्वीय बल**: $F_I = m\ddot{u}(t)$, जो त्वरण के समानुपाती है।

12 आदर्शीकृत द्रव्यमान–कमानी–अवमंदक प्रतिरूप का आरेख चित्र 35.1 में दिखाया गया है।



चित्र 35.1: आदर्शीकृत एकल-स्वतंत्रता-कोटि दोलक

13 d'Alembert का सिद्धांत—सभी बलों का योग शून्य है—लागू करने पर मूलभूत गति-समीकरण प्राप्त होता है:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t) \tag{35.1}$$

यह द्वितीय-कोटि रैखिक साधारण अवकल समीकरण किसी भी उत्तेजन $F(t)$ के प्रति SDOF निकाय की अनुक्रिया को नियंत्रित करता है। इसके हल के लिए दो प्रारंभिक दशाएँ आवश्यक हैं: प्रारंभिक विस्थापन $u(0) = u_0$ और प्रारंभिक वेग $\dot{u}(0) = v_0$।

14 SDOF समीकरण (35.1) देखने में भ्रामक रूप से सरल है, फिर भी इसमें कंपायमान निकायों की अनिवार्य भौतिकी समाहित है। बाईं ओर के तीन पद उन तीन मूलभूत क्रियाविधियों को निरूपित करते हैं जिनके द्वारा संरचना गतिक भारण का प्रतिरोध करती है: जडत्व (त्वरण-निर्भर), अवमंदन (वेग-निर्भर) और दृढता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(विस्थापन-निर्भर)। इन पदों के सापेक्ष परिमाण और आवृत्ति के साथ उनका परिवर्तन गतिक अनुक्रिया का स्वरूप निर्धारित करते हैं।

35.3.3 प्राकृतिक आवृत्ति और आवर्तकाल

15 प्रत्येक संरचना में ऐसे अंतर्निहित गतिक गुण होते हैं जो केवल उसके द्रव्यमान और दृढता पर निर्भर करते हैं, लगाए गए भारण पर नहीं। इनमें सबसे मूलभूत *प्राकृतिक आवृत्ति* है, जिसे अनवमंदित SDOF निकाय के लिए इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(rad/s)}$$

यह वृत्तीय आवृत्ति ω_n उस दर को निरूपित करती है जिस पर अनवमंदित निकाय संतुलन से विस्थापित करके मुक्त किए जाने पर दोलन करता है। इसके संगत प्राकृतिक आवर्तकाल और चक्रीय आवृत्ति हैं:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(s)}$$

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(Hz)}$$

35.3.3.1 उदाहरण 35.1: किसी SDOF निकाय के लिए ω_n, T_n और f_n की गणना

तल-द्रव्यमान $m = 2000$ kg पर विचार करें, जो पार्श्व दिशा में तुल्य दृढता $k = 800$ kN/m द्वारा आलंबित है।

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800 \times 10^3}{2000}} = \sqrt{400} = 20 \text{ rad/s}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{20} = 0.314 \text{ s}, \qquad f_n = \frac{1}{T_n} \approx 3.18 \text{ Hz}$$

16 प्राकृतिक आवृत्ति संभवतः संरचनात्मक गतिकी का सबसे महत्त्वपूर्ण एकल प्राचल है। यह उस आवृत्ति को निर्धारित करती है जिस पर अनुनाद होता है, आवेगी भारण के प्रति अनुक्रिया को और उत्तेजन तथा अनुक्रिया के बीच कला-संबंध को निर्धारित करती है। भौतिक रूप से उच्च प्राकृतिक आवृत्ति अधिक दृढता अथवा कम द्रव्यमान (या दोनों) को इंगित करती है; ऐसे निकाय लगाए गए भारों के प्रति शीघ्र और छोटे विस्थापनों के साथ अनुक्रिया करते हैं। कम प्राकृतिक आवृत्ति नम्यता अथवा अधिक द्रव्यमान को इंगित करती है; ऐसे निकाय धीरे अनुक्रिया करते हैं और बड़े विस्थापन अनुभव कर सकते हैं।

17 प्रारंभिक अभिकल्प में अभियंता प्रायः आनुभविक सूत्रों से प्राकृतिक आवर्तकाल का आकलन करते हैं। भवन-संरचनाओं के लिए एक सामान्य सन्निकटन है:

$$T_n \approx 0.1N \quad \text{(s)}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ N मंजिलों की संख्या है। स्थूल होने पर भी यह सामान्य नियम आवश्यक मापनी-संबंध को व्यक्त करता है: अधिक ऊँचे भवन अधिक नम्य होते हैं और उनके आवर्तकाल अधिक होते हैं। अधिक परिष्कृत आकलनों में संरचनात्मक निकाय के प्रकार, सामग्री और विन्यास को ध्यान में रखा जाता है।

35.3.4 अवमंदन और अवमंदन अनुपात

18 सभी वास्तविक संरचनाएँ कंपन के दौरान ऊर्जा का क्षय करती हैं। सामूहिक रूप से *अवमंदन* कहलाने वाला यह क्षय अनेक क्रियाविधियों से उत्पन्न होता है: सामग्री के भीतर आंतरिक घर्षण, संयोजनों और आलंबों पर घर्षण, वायुगतिकीय कर्षण तथा परिवेशी माध्यम में ऊर्जा का विकिरण। यद्यपि अवमंदन की भौतिकी जटिल और विविध है, संरचनात्मक गतिकी में सामान्यतः एक सरलीकृत प्रतिरूप अपनाया जाता है: *श्यान अवमंदन*, जिसमें अवमंदन बल वेग के समानुपाती होता है।

19 अवमंदन गुणांक c की इकाई प्रति वेग बल (SI इकाइयों में N·s/m) है, किंतु उसका निरपेक्ष मान किसी क्रांतिक मान से उसके अनुपात की अपेक्षा कम अर्थपूर्ण है। *क्रांतिक अवमंदन गुणांक* को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

ठीक इस अवमंदन गुणांक वाला निकाय बिना दोलन के न्यूनतम समय में संतुलन पर लौटता है। *अवमंदन अनुपात* ζ वास्तविक अवमंदन को क्रांतिक अवमंदन के अंश के रूप में व्यक्त करता है:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

20 अवमंदन अनुपात विमाहीन होता है और संरचनाओं के लिए सामान्यतः छोटा होता है: अधिकांश भवनों और सेतुओं के लिए $\zeta \approx 0.01$ से 0.05 (क्रांतिक का 1% से 5%)। छोटे परिमाण के बावजूद अवमंदन अनुक्रिया को अत्यधिक प्रभावित करता है, विशेषतः अनुनाद के निकट, जहाँ वह अन्यथा असीमित प्रवर्धन को सीमित करता है।

21 अवमंदित व्यवहार की तीन अवस्थाएँ होती हैं:

अल्पावमंदित ($\zeta < 1$): निकाय क्रमशः घटते आयाम के साथ दोलन करता है। लगभग सभी संरचनाओं की यही दशा होती है।

क्रांतिक अवमंदित ($\zeta = 1$): निकाय बिना दोलन के न्यूनतम समय में संतुलन पर लौटता है। कुछ यांत्रिक उपकरणों (द्वार-बंदकों) में इसका उपयोग होता है, किंतु संरचनाओं में यह दुर्लभ है।

अतिअवमंदित ($\zeta > 1$): निकाय बिना दोलन के संतुलन पर लौटता है, किंतु क्रांतिक दशा की अपेक्षा अधिक धीरे। संरचनाओं में यह असामान्य है।

22 अल्पावमंदित निकाय की अवमंदित प्राकृतिक आवृत्ति है:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

सामान्य संरचनात्मक अवमंदन अनुपातों ($\zeta < 0.1$) के लिए $\omega_d \approx \omega_n$ और अंतर 1% से कम होता है। यह भेद केवल अत्यधिक अवमंदित निकायों के लिए महत्त्वपूर्ण बनता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवस्था-चर के रूप में प्रारंभिक दशाएँ

गतिकी में प्रारंभिक विस्थापन और प्रारंभिक वेग केवल लेखांकन की मदें नहीं हैं; वे निकाय की प्रारंभिक अवस्था परिभाषित करते हैं। वे निर्धारित करते हैं कि $t = 0$ पर कुल ऊर्जा का गतिज और स्थितिज रूपों के बीच विभाजन कैसे होता है, और बाह्य प्रणोदन के अभाव में भी वे प्रारंभिक-कालीन अनुक्रिया पर प्रभावी हो सकते हैं। विश्लेषणात्मक हलों में समाकलन-स्थिरांक इन्हीं प्रारंभिक दशाओं से निर्धारित होते हैं; संख्यात्मक काल-समाकलन में यही सूचना प्रारंभिक अवस्था-सदिश के रूप में प्रविष्ट होती है।

अवमंदन के प्रतिरूपण पर टिप्पणी

दृढता और द्रव्यमान के विपरीत, अवमंदन विरले ही प्रथम सिद्धांतों से ज्ञात होता है। श्यान अवमंदन मुख्यतः ऐसे प्रभावी प्रतिरूप के रूप में प्रस्तुत किया जाता है जो प्रेक्षित ऊर्जा-क्षय को सुविधाजनक गणितीय रूप में व्यक्त करता है। अतः उसके प्राचल सामान्यतः प्रयोगों, क्षेत्र-मापनों अथवा अभियांत्रिक निर्णय से अंशांकित किए जाते हैं और कल्पित अवमंदन प्रतिरूप के प्रति पूर्वानुमानित अनुक्रिया की संवेदनशीलता का सदैव ध्यान रखना चाहिए।

35.4 मुक्त कंपन

23 मुक्त कंपन तब होता है जब कोई निकाय बाह्य प्रणोदन के बिना, केवल प्रारंभिक दशाओं से प्रेरित होकर दोलन करता है। देखने में यह सरल दशा निकाय का मूलभूत गतिक स्वरूप प्रकट करती है और प्रणोदित कंपन को समझने का आधार बनती है।

35.4.1 अनवमंदित मुक्त कंपन

24 अनवमंदित दशा ($c = 0$) में गति-समीकरण इस रूप में रह जाता है:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$

m से भाग देकर और $\omega_n^2 = k/m$ प्रस्तुत करने पर:

$$\ddot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$$

यह सरल हार्मोनिक गति का समीकरण है। इसका व्यापक हल है:

$$u(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

जहाँ A और B प्रारंभिक दशाओं द्वारा निर्धारित स्थिरांक हैं। $u(0) = u_0$ और $\dot{u}(0) = v_0$ होने पर:

$$u(t) = u_0\cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

25 इस हल को तुल्य रूप से आयाम-कला रूप में लिखा जा सकता है:

$$u(t) = \rho\cos(\omega_n t - \phi)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ आयाम ρ और कला-कोण ϕ हैं:

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \tan\phi = \frac{v_0}{\omega_n u_0}$$

अनवमंदित निकाय स्थिर आयाम ρ के साथ अनंतकाल तक दोलन करता है और $T_n = 2\pi/\omega_n$ समय में एक चक्र पूरा करता है।

35.4.2 अवमंदित मुक्त कंपन

26 अवमंदन सम्मिलित करने पर गति-समीकरण बनता है:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

m से भाग देकर तथा ζ और ω_n प्रस्तुत करने पर:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$$

27 हम $u(t) = Ce^{st}$ रूप के हल खोजते हैं। प्रतिस्थापन से अभिलाक्षणिक समीकरण मिलता है:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

जिसके मूल हैं:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

28 अल्पावमंदित दशा ($\zeta < 1$) में मूल सम्मिश्र संयुग्मी होते हैं:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

जहाँ $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ अवमंदित प्राकृतिक आवृत्ति है। व्यापक हल है:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

प्रारंभिक दशाओं $u(0) = u_0$ और $\dot{u}(0) = v_0$ के साथ:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$$

29 यह हल आवृत्ति ω_d पर दोलन को निरूपित करता है, जिसका आयाम $\zeta\omega_n$ दर से चरघातांकीय रूप में घटता है। दोलन का आवरण $\pm\rho e^{-\zeta\omega_n t}$ है, जहाँ ρ प्रारंभिक दशाओं से निर्धारित होता है। निकाय अंततः विराम में आ जाता है, किंतु संतुलन की ओर उसका गमन दोलनी होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35.4.3 लघुगणकीय ह्रास

30 लघुगणकीय ह्रास मापी गई मुक्त-कंपन अनुक्रिया से अवमंदन अनुपात निर्धारित करने की व्यावहारिक विधि प्रदान करता है। अनुक्रिया के दो क्रमिक शिखरों पर विचार करें, जो समय t_1 और $t_2 = t_1 + T_d$ पर आते हैं, जहाँ $T_d = 2\pi/\omega_d$ अवमंदित आवर्तकाल है। आयामों का अनुपात है:

$$\frac{u(t_1)}{u(t_2)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n (t_1+T_d)}} = e^{\zeta\omega_n T_d}$$

लघुगणकीय ह्रास δ को इस अनुपात के प्राकृतिक लघुगणक के रूप में परिभाषित किया जाता है:

$$\delta = \ln\frac{u(t_1)}{u(t_2)} = \zeta\omega_n T_d = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

31 छोटे अवमंदन ($\zeta \ll 1$) के लिए यह सरल होकर बनता है:

$$\delta \approx 2\pi\zeta \quad\Rightarrow\quad \zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} \tag{35.2}$$

व्यवहार में n चक्रों पर मापन करने से परिशुद्धता बढ़ती है:

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{u_1}{u_{n+1}} \tag{35.3}$$

35.4.3.1 उदाहरण 35.2: लघुगणकीय ह्रास से अवमंदन का आकलन

मान लें कि किसी अल्प-अवमंदित निकाय को विराम से मुक्त किया जाता है और शिखर आयाम $u_1 = 10$ mm तथा $u_6 = 6$ mm मापे जाते हैं, अर्थात् $n = 5$ चक्रों में। समीकरण (35.3) से:

$$\delta = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{10}{6}\right) = \frac{1}{5}(0.5108) = 0.1022$$

छोटे अवमंदन के लिए समीकरण (35.2) देता है:

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.1022}{6.283} = 0.0163 \approx 1.6\%$$

पूरक: मुक्त कंपन (पूर्व परिशिष्ट से समाहित)

32 किसी संरचना के मुक्त (अनवमंदित) कंपन का नियंत्रक समीकरण है

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

जहाँ गति को मुक्त इसलिए कहा जाता है क्योंकि कोई लगाया गया भार नहीं है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

33 हार्मोनिक गति मानने पर

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \sin \omega t$$

प्राकृतिक आवृत्तियाँ, ω, और संगत विधा-आकृतियाँ, $\boldsymbol{\phi}$, व्यापकीकृत अभिलक्षणिक-मान समस्या से निर्धारित की जा सकती हैं

$$\omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}$$

अथवा

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = 0$$

34 चूँकि $\boldsymbol{\phi}$ अतुच्छ है,

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$$

अथवा $\omega^2 = \lambda$ के साथ

$$|\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0$$

जो अभिलाक्षणिक समीकरण है; λ को समीकरण का अभिलक्षणिक मान कहा जाता है और संरचना को किसी विशिष्ट आवृत्ति के संगत विधा में अनुक्रिया करता हुआ कहा जाता है।

35 संगणकीय प्रयोजनों के लिए, यदि पिछले समीकरण के प्रत्येक पक्ष का पूर्वगुणन $\mathbf{M}^{-1}$ से किया जाए, तो

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{\phi} = 0$$

36 ध्यान देना चाहिए कि पूर्णतः आलंबित न होने वाली संरचना की प्रत्येक संभव दृढ-पिंड गति के लिए शून्य अभिलक्षणिक मान प्राप्त होता है (§45.1.1)। अपनाए गए द्रव्यमान आव्यूह के अनुसार कुछ भिन्न परिणाम प्राप्त होते हैं। सामान्यतः संकेंद्रित द्रव्यमान आव्यूह यथार्थ मान (सुसंगत द्रव्यमान आव्यूह) की ओर नीचे से अभिगम करते हैं।

37 विधा-आकृतियाँ, $\boldsymbol{\phi}$, "आकृतियाँ" हैं और DOF के सापेक्ष परिमाण देती हैं, निरपेक्ष मान नहीं (क्योंकि वे समघात समीकरणों के समुच्चय का हल हैं)। प्राकृतिक आवृत्तियाँ और विधा-आकृतियाँ दोनों कंपायमान संरचना का मूलभूत वर्णन प्रदान करती हैं।

35.5 प्रणोदित कंपन: हार्मोनिक उत्तेजन

38 जब कोई संरचना आवर्ती बल के अधीन होती है, तो वह अंततः प्रणोदन आवृत्ति पर स्थायी-अवस्था दोलन में स्थिर हो जाती है। यह हार्मोनिक अनुक्रिया अनुनाद की मूलभूत परिघटना को प्रकट करती है और अधिक जटिल उत्तेजनों के प्रति अनुक्रिया को समझने का आधार स्थापित करती है।

35.5.1 अनवमंदित हार्मोनिक अनुक्रिया

39 ज्यावक्रीय बल $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ के अधीन अनवमंदित निकाय पर विचार करें, जहाँ ω उत्तेजन आवृत्ति है (जो आवश्यक नहीं कि ω_n के बराबर हो):

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पूर्ण हल में पूरक (समघात) हल और एक विशिष्ट हल सम्मिलित होते हैं। $\omega \neq \omega_n$ के लिए विशिष्ट हल है:

$$u_p(t) = \frac{F_0/k}{1-(\omega/\omega_n)^2}\sin(\omega t)$$

40 बल F_0 के अधीन स्थैतिक विस्थापन $u_{st} = F_0/k$ होगा। गतिक और स्थैतिक विस्थापन का अनुपात *गतिक प्रवर्धन गुणक* है:

$$D = \frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2} = \frac{1}{1-\beta^2}$$

जहाँ $\beta = \omega/\omega_n$ आवृत्ति अनुपात है। यह प्रवर्धन गुणक गतिक अनुक्रिया को समझने की कुंजी है:

- $\beta \ll 1$ के लिए (उत्तेजन प्राकृतिक आवृत्ति से बहुत धीमा): $D \approx 1$। अनुक्रिया अर्ध-स्थैतिक है; जड़त्वीय बल उपेक्षणीय हैं।
- $\beta \gg 1$ के लिए (उत्तेजन प्राकृतिक आवृत्ति से बहुत तीव्र): $D \approx 0$। द्रव्यमान तीव्र प्रणोदन का अनुसरण नहीं कर सकता; वह लगभग स्थिर रहता है।
- $\beta \to 1$ के लिए (उत्तेजन प्राकृतिक आवृत्ति के निकट): $|D| \to \infty$। यही *अनुनाद* है।

41 अनुनाद की परिघटना—उत्तेजन आवृत्ति के प्राकृतिक आवृत्ति के बराबर होने पर अनुक्रिया की असीमित वृद्धि—संभवतः संरचनात्मक गतिकी की सबसे महत्त्वपूर्ण संकल्पना है। यह Tacoma Narrows Bridge (1940) के ध्वंस, मशीनरी आलंबों की विफलता और असंख्य अन्य अभियांत्रिक दुर्घटनाओं की व्याख्या करती है। प्रत्येक गतिक अभिकल्प में यह सुनिश्चित करना आवश्यक है कि प्रचालन आवृत्तियाँ प्राकृतिक आवृत्तियों से पर्याप्त रूप से पृथक हों।

35.5.2 अवमंदित हार्मोनिक अनुक्रिया

42 अवमंदन सहित हार्मोनिक प्रणोदन के अधीन गति-समीकरण है:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F_0\sin(\omega t)$$

क्षणिक (समघात) हल चरघातांकीय रूप से क्षीण हो जाता है और केवल स्थायी-अवस्था विशिष्ट हल शेष रहता है:

$$u_p(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}\sin(\omega t - \phi)$$

जहाँ कला-कोण ϕ है:

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \tag{35.4}$$

43 अवमंदित निकाय का गतिक प्रवर्धन गुणक है:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \tag{35.5}$$

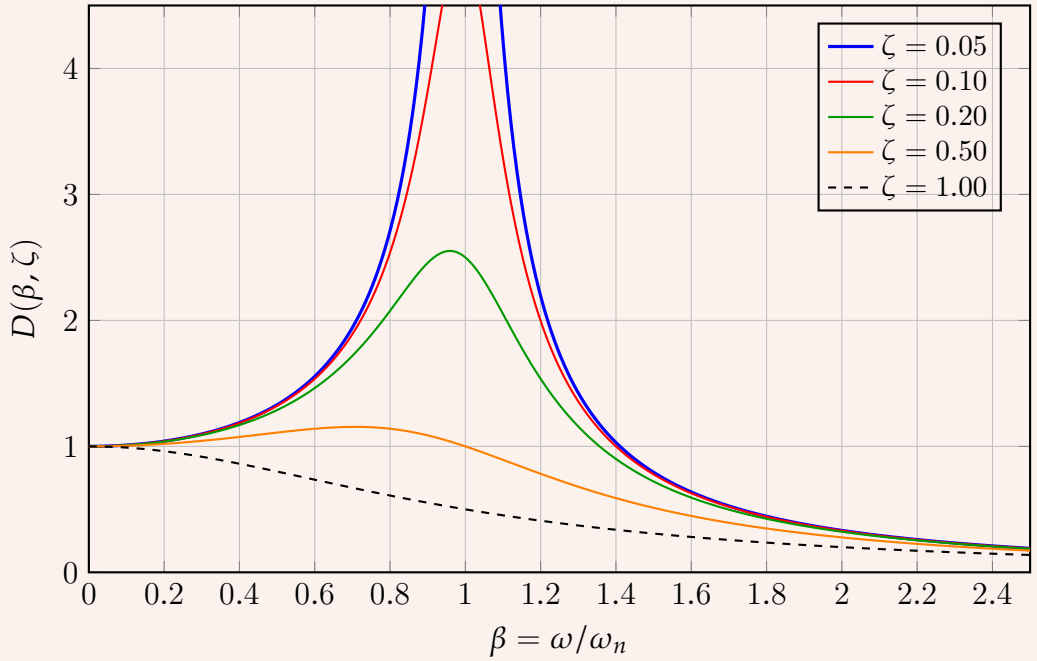
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवमंदन अनुनादी प्रवर्धन को एक परिमित मान तक सीमित करता है:

$$D_{\max} = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{at} \quad \beta = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \approx 1$$

$\zeta = 0.02$ (2% अवमंदन) के लिए $D_{\max} = 25$; $\zeta = 0.05$ (5% अवमंदन) के लिए $D_{\max} = 10$। अल्प अवमंदन भी अनुनादी अनुक्रिया को उल्लेखनीय रूप से घटाता है।

44 चित्र 35.2 अनेक अवमंदन अनुपातों के लिए गतिक प्रवर्धन गुणक D को आवृत्ति अनुपात $\beta = \omega/\omega_n$ के फलन के रूप में रेखांकित करता है।



चित्र 35.2: हार्मोनिक प्रणोदन के अधीन अवमंदित SDOF दोलक के संकल्पनात्मक गतिक प्रवर्धन वक्र

45 कला-कोण ϕ प्रणोदन और अनुक्रिया के बीच पश्चता को निरूपित करता है। निम्न आवृत्तियों ($\beta \ll 1$) पर $\phi \approx 0$: अनुक्रिया बल के समान कला में होती है। अनुनाद ($\beta = 1$) पर $\phi = 90?$: अनुक्रिया बल से एक-चौथाई चक्र पीछे रहती है। उच्च आवृत्तियों ($\beta \gg 1$) पर $\phi \to 180?$: अनुक्रिया बल के लगभग विपरीत होती है।

35.5.2.1 उदाहरण 35.3: हार्मोनिक अनुक्रिया: प्रवर्धन और कला

मान लें कि किसी अवमंदित SDOF निकाय की दृढता $k = 200$ kN/m है और वह आयाम $F_0 = 10$ kN के हार्मोनिक बल से उत्तेजित है। स्थैतिक विस्थापन आयाम $u_{st} = F_0/k = 10/200 = 0.05$ m है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आवृत्ति अनुपात $\beta = \omega/\omega_n = 0.9$ और अवमंदन अनुपात $\zeta = 0.05$ मानें। समीकरण (35.5) से:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0.81)^2 + (2\cdot 0.05\cdot 0.9)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.19^2 + 0.09^2}} \approx 4.76$$

अतः स्थायी-अवस्था विस्थापन आयाम है $u_0 = D\,u_{st} \approx 4.76(0.05) = 0.238$ m.

समीकरण (35.4) से:

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} = \frac{0.09}{0.19} = 0.474 \quad \Rightarrow \quad \phi \approx 25.4^\circ$$

35.6 स्वेच्छ भारण के प्रति अनुक्रिया

46 वास्तविक गतिक भार—पवन-झोंके, भूकंपीय भू-गति, संघात बल—विरले ही हार्मोनिक होते हैं। स्वेच्छ समय-परिवर्ती बलों के प्रति अनुक्रिया निर्धारित करने के लिए विधियों की आवश्यकता होती है। दो पूरक उपागम उपलब्ध हैं: Duhamel समाकल (काल प्रक्षेत्र) और Fourier विश्लेषण (आवृत्ति प्रक्षेत्र)।

35.6.1 आवेग अनुक्रिया और एकक आवेग

47 आदर्शीकृत एकक आवेग के प्रति अनुक्रिया स्वेच्छ उत्तेजनों के विश्लेषण का आधारभूत घटक प्रदान करती है। आवेग अत्यल्प समय के लिए लगाया गया अत्यधिक बड़ा बल होता है, जिससे गुणनफल (बल $\times$ समय) का एक परिमित मान होता है, जिसे *आवेग* कहते हैं। Dirac डेल्टा फलन $\delta(t-\tau)$ समय τ पर एकक आवेग निरूपित करता है:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,dt = 1, \qquad \delta(t-\tau) = 0 \text{ for } t \neq \tau$$

48 जब एकक आवेग विरामस्थ निकाय पर कार्य करता है, तब आवेग-संवेग प्रमेय आवेग के ठीक बाद का प्रारंभिक वेग देता है:

$$m\Delta v = 1 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{m}$$

$u(0) = 0$ और $\dot{u}(0) = 1/m$ के साथ परवर्ती मुक्त कंपन एकक आवेग अनुक्रिया फलन $h(t)$ है:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t), \quad t > 0 \tag{35.6}$$

अनवमंदित दशा के लिए:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin(\omega_n t), \quad t > 0 \tag{35.7}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35.6.1.1 उदाहरण 35.4: अवमंदित SDOF निकाय की एकक आवेग अनुक्रिया

SDOF निकाय के रूप में प्रतिरूपित जल-टंकी का द्रव्यमान $m = 500$ kg, पार्श्व दृढता $k = 200$ kN/m और अवमंदन अनुपात $\zeta = 5\%$ है। एक पाइप फटता है और ऐसा आवेगी जेट बल प्रदान करता है जिसे एकक आवेग ($\hat{F} = 1$ N·s) के रूप में आदर्शीकृत किया जा सकता है और जो $t = 0$ पर लगता है। निर्धारित करें: (a) गतिक गुण; (b) आवेग अनुक्रिया फलन; (c) $t = 0.10$ s पर विस्थापन; (d) शिखर विस्थापन और उसके घटित होने का समय।

हल।

(a) गतिक गुण।

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\,000}{500}} = 20.00 \text{ rad/s}, \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.314 \text{ s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 20.00\sqrt{1-0.0025} = 19.975 \text{ rad/s}$$

(b) आवेग अनुक्रिया फलन।

समीकरण (35.6) से, $m = 500$ kg और $\omega_d = 19.975$ rad/s के साथ:

$$h(t) = \frac{1}{500 \times 19.975}\, e^{-0.05\times 20\, t} \sin(19.975\, t) = 1.0025 \times 10^{-4}\, e^{-t} \sin(19.975\, t) \quad \text{m/(N·s)}$$

एकक आवेग $\hat{F} = 1$ N·s के लिए अनुक्रिया सरलतः $u(t) = \hat{F}\, h(t) = h(t)$ है।

(c) $t = 0.10$ s पर विस्थापन।

$$u(0.10) = 1.0025 \times 10^{-4}\, e^{-1\times 0.10} \sin(19.975 \times 0.10)$$

$$= 1.0025 \times 10^{-4} \times 0.9048 \times \sin(1.9975 \text{ rad}) = 1.0025 \times 10^{-4} \times 0.9048 \times 0.9128 = 8.28 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$u(0.10) \approx 0.083 \text{ mm}$$

(d) शिखर विस्थापन।

$h(t)$ का शिखर तब होता है जब $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$, जो छोटे अवमंदन के लिए लगभग $\omega_d\, t_{\text{peak}} = \pi/2$ पर होता है:

$$t_{\text{peak}} = \frac{\pi/2}{\omega_d} = \frac{\pi/2}{19.975} = 0.0786 \text{ s}$$

$$h_{\text{peak}} = \frac{1}{m\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_n t_{\text{peak}}} = 1.0025{\times}10^{-4}\, e^{-0.05\times 20\times 0.0786} = 1.0025{\times}10^{-4}{\times}e^{-0.0786} = 9.26 \times 10^{-5} \text{ m/(N·s)}$$

एकक आवेग के कारण शिखर विस्थापन 0.0926 mm/(N·s) है। वास्तविक आवेग $\hat{F}$ के लिए शिखर रैखिक रूप से मापित होता है: $u_{\text{peak}} = \hat{F}\, h_{\text{peak}}$।

35.6.2 Duhamel समाकल

[49] Jean-Marie Duhamel (1797–1872) ने ऊष्मा समीकरण हल करने के लिए अपने नाम से प्रसिद्ध संवलन समाकल विकसित किया, किंतु वह संरचनात्मक गतिकी पर भी समान रूप से लागू होता है। मुख्य अंतर्दृष्टि यह है कि स्वेच्छ बल $F(t)$ को अतिसूक्ष्म आवेगों के अनुक्रम के रूप में देखा जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समय τ पर आवेग $F(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ निकाय पर कार्य करता है। किसी परवर्ती समय t पर इस आवेग के प्रति अनुक्रिया $F(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ है। ऐसे सभी योगदानों का अध्यारोपण करने पर:

$$u(t) = \int_0^t F(\tau)\,h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau \tag{35.8}$$

यह Duhamel समाकल (जिसे संवलन समाकल भी कहते हैं) है। निकाय के विराम से आरंभ होने की कल्पना पर यह किसी भी प्रणोदन $F(t)$ के प्रति अनुक्रिया देता है। यदि प्रारंभिक दशाएँ अशून्य हों, तो मुक्त-कंपन अनुक्रिया भी जोड़नी होगी।

50 Duhamel समाकल सैद्धांतिक रूप से शक्तिशाली है, किंतु उसका विश्लेषणात्मक मान निकालना प्रायः कठिन होता है। सरल प्रणोदन फलनों (सोपान, रैम्प, आयताकार स्पंद) के लिए संवृत-रूप हल उपलब्ध हैं। जटिल अथवा मापे गए उत्तेजनों के लिए संख्यात्मक समाकलन आवश्यक है।

35.6.2.1 उदाहरण 35.5: अचानक सोपान भार: गतिक प्रवर्धन गुणक 2

उदाहरण 35.6.1.1 वाला वही SDOF निकाय ($m = 500$ kg, $k = 200$ kN/m) अचानक लगाए गए स्थिर बल $F_0 = 10$ kN के अधीन है, जो $t = 0$ पर लगता है (सोपान भार) और अनिश्चित काल तक बना रहता है। निकाय विराम से आरंभ होता है। निर्धारित करें: (a) अनवमंदित दशा के लिए Duhamel समाकल से अनुक्रिया; (b) अधिकतम विस्थापन और गतिक प्रवर्धन गुणक; (c) शिखर पर 5% अवमंदन का प्रभाव।

हल।

(a) सोपान भार के लिए Duhamel समाकल, अनवमंदित दशा।

$F(\tau) = F_0 = \text{const}$ और $\zeta = 0$ ($\omega_d = \omega_n$) के साथ, समीकरण (35.8) इस रूप में रह जाता है:

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin[\omega_n(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

प्रतिस्थापन $s = t - \tau$ से समाकल का मान निकालने पर:

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n s)\,\mathrm{d}s = \frac{F_0}{m\omega_n}\left[-\frac{\cos(\omega_n s)}{\omega_n}\right]_0^t = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1-\cos(\omega_n t)\right]$$

चूँकि $m\omega_n^2 = k$, यह सरल होकर बनता है:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}\left[1-\cos(\omega_n t)\right] \tag{35.9}$$

(b) अधिकतम विस्थापन और गतिक प्रवर्धन गुणक।

F_0 के अधीन स्थैतिक विस्थापन $u_{\text{st}} = F_0/k$ है। संख्यात्मक रूप से:

$$u_{\text{st}} = \frac{10\,000}{200\,000} = 0.050\ \text{m} = 50\ \text{mm}$$

समीकरण (35.9) से $u(t)$ तब अधिकतम है जब $\cos(\omega_n t) = -1$, अर्थात् $t = \pi/\omega_n = T_n/2$ पर:

$$u_{\max} = \frac{F_0}{k}\times 2 = 2\,u_{\text{st}} = 2\times 50 = 100\ \text{mm}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{20} = 0.157 \text{ s} = \frac{T_n}{2}$$

गतिक प्रवर्धन गुणक ठीक 2 है। अनवमंदित निकाय पर सोपान भार के लिए यह मूलभूत परिणाम है: अचानक लगाया गया बल स्थैतिक विस्थापन का दोगुना उत्पन्न करता है; भार कितनी भी धीमी या तीव्रता से लगाया जाए, बशर्ते वह तत्क्षण लगाया गया हो।

(c) 5% अवमंदन का प्रभाव।

अवमंदन सहित सोपान भार के प्रति संवृत-रूप अनुक्रिया है:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\right]$$

$t = 0.157$ s पर (अनवमंदित शिखर के निकट) मान निकालने पर:

$$u(0.157) \approx 50\left[1 - e^{-0.05\times 20\times 0.157}\left(\cos(19.975\times 0.157) + 0.0501\sin(19.975\times 0.157)\right)\right] \approx 92.7 \text{ mm}$$

अवमंदन प्रथम-चक्र शिखर को 100 mm से घटाकर 93 mm करता है— 7% की मध्यम कमी, जब $\zeta = 5\%$। परवर्ती चक्रों में दोलन क्षीण होते हैं और अनुक्रिया स्थैतिक मान $u_{\text{st}} = 50$ mm पर स्थिर हो जाती है।

35.6.2.2 उदाहरण 35.6: आयताकार स्पंद भार और आघात वर्णक्रम

SDOF निकाय ($m = 500$ kg, $k = 200$ kN/m, $\omega_n = 20$ rad/s, $T_n = 0.314$ s) एक आयताकार स्पंद के अधीन है:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 = 10 \text{ kN} & 0 \le t \le t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

अनवमंदित निकाय के लिए निर्धारित करें: (a) स्पंद के दौरान और उसके बाद संवृत-रूप अनुक्रिया; (b) तीन स्पंद अवधियों $t_d/T_n = 0.25,\ 0.50,\ 1.00$ के लिए अधिकतम गतिक विस्थापन; (c) आवेगी बनाम अर्ध-स्थैतिक भारण के संदर्भ में अभियांत्रिक व्याख्या।

हल।

(a) संवृत-रूप अनुक्रिया।

स्पंद के दौरान ($0 \le t \le t_d$): समीकरण (35.9) का सोपान-भार परिणाम सीधे लागू होता है:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}[1 - \cos(\omega_n t)] \tag{35.10}$$

स्पंद के बाद ($t > t_d$): निकाय $t = t_d$ पर अपनी अवस्था से मुक्त कंपन करता है। दो सोपान अनुक्रियाओं (एक $t = 0$ पर आरंभ और विपरीत चिह्न वाली दूसरी $t = t_d$ पर आरंभ) के अध्यारोपण से प्राप्त परिणाम है:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}[\cos\omega_n(t - t_d) - \cos\omega_n t] \tag{35.11}$$

स्पंदोत्तर मुक्त कंपन का आयाम है:

$$A = \frac{F_0}{k}\,2\left|\sin\frac{\omega_n t_d}{2}\right| = 2\,u_{\text{st}}\left|\sin\frac{\pi t_d}{T_n}\right|$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(b) तीन स्पंद अवधियों के लिए अधिकतम विस्थापन।

गतिक प्रवर्धन गुणक $D = u_{\max}/u_{\text{st}}$ केवल अनुपात t_d/T_n पर निर्भर करता है:

t_d/T_n	t_d (s)	$A/u_{\text{st}} = 2\lvert\sin(\pi t_d/T_n)\rvert$	$D = u_{\max}/u_{\text{st}}$
0.25	0.0785	$2\lvert\sin(\pi/4)\rvert = \sqrt{2} = 1.414$	1.41
0.50	0.1571	$2\lvert\sin(\pi/2)\rvert = 2.000$	2.00
1.00	0.3142	$2\lvert\sin(\pi)\rvert = 0.000$	1.00

$t_d/T_n = 0.25$ के लिए: $u_{\max} = 1.414 \times 50 = 70.7$ mm।

$t_d/T_n = 0.50$ के लिए: $u_{\max} = 2.000 \times 50 = 100$ mm (सोपान-भार परिणाम के बराबर—स्पंद समाप्त होने से पहले अनवमंदित प्रथम शिखर तक पहुँचने के लिए पर्याप्त लंबा है)।

$t_d/T_n = 1.00$ के लिए: $u_{\max} = 1.000 \times 50 = 50$ mm (स्पंदोत्तर आयाम शून्य है—निकाय $t = T_n$ पर ठीक अपनी प्रारंभिक अवस्था में लौटता है और कोई अवशिष्ट मुक्त कंपन नहीं रहता)।

(c) अभियांत्रिक व्याख्या।

अनुपात t_d/T_n अनुक्रिया का स्वरूप नियंत्रित करता है:

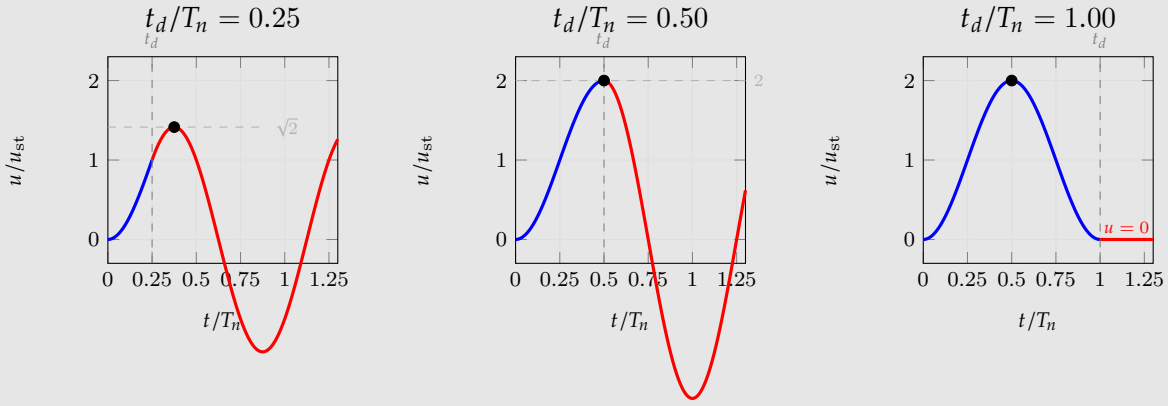
आवेगी अवस्था ($t_d/T_n \ll 1$): स्पंद इतना छोटा है कि भारण के दौरान संरचना लगभग गति नहीं करती; आवेग $\hat{F} = F_0\, t_d$ अनुक्रिया निर्धारित करता है। अधिकतम विस्थापन $u_{\max} \approx \hat{F}/(m\omega_n) = F_0\, t_d/(m\omega_n)$ है, जो t_d के साथ रैखिक रूप से बढ़ता है।

अर्ध-स्थैतिक अवस्था ($t_d/T_n \gg 1$): स्पंद अनेक आवर्तकालों तक रहता है; संरचना लगभग स्थैतिक रूप से अनुक्रिया करती है और औसतन $D \to 1$ (भार लगे रहने पर 0 और 2 के बीच दोलन, उसके बाद मुक्त दोलन)।

अनुनादी अवस्था ($t_d/T_n \approx 0.5$): स्पंद अवधि प्राकृतिक आवर्तकाल की आधी होती है और अधिकतम संभव प्रवर्धन $D = 2$ उत्पन्न करती है, जो सोपान-भार परिणाम के समान है।

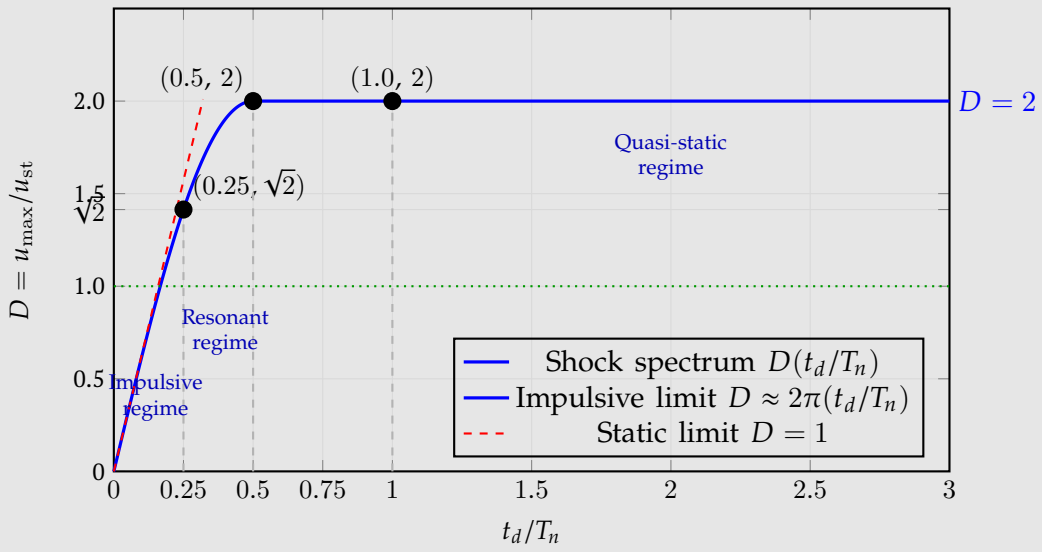
D बनाम t_d/T_n का पूर्ण आलेख—*आघात वर्णक्रम* अथवा *आवेगी भारों का अनुक्रिया वर्णक्रम*—हार्मोनिक प्रवर्धन वक्र का काल-प्रक्षेत्र अनुरूप है और इसका उपयोग विस्फोट, संघात तथा उपकरण अभिकल्प में होता है।

आयताकार स्पंद अनुक्रिया।



तीन स्पंद अवधियों के लिए सामान्यीकृत विस्थापन काल-वृत्तांत u/u_{st} (नीला = स्पंद के दौरान, लाल = स्पंद के बाद)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



आघात वर्ण-

क्रम $D = u_{\max}/u_{\text{st}}$, जो t_d/T_n का फलन है। तीन भरे हुए वृत्त उदाहरण में परिकलित दशाओं के संगत हैं। खंडित लाल रेखा आवेगी अनंतस्पर्शी $D \approx 2\pi(t_d/T_n)$ है; बिंदुकित हरी रेखा स्थैतिक संदर्भ $D = 1$ है।

35.6.3 Fourier विश्लेषण और आवृत्ति अनुक्रिया

51 एक वैकल्पिक उपागम में प्रणोदन को हार्मोनिक घटकों में विघटित करने, हार्मोनिक अंतरण फलन द्वारा प्रत्येक घटक की अनुक्रिया निर्धारित करने और उनका अध्यारोपण करने के लिए Fourier विश्लेषण का उपयोग किया जाता है। आवर्तकाल T_p वाले आवर्ती प्रणोदन के लिए:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

जहाँ $\omega_0 = 2\pi/T_p$ मूलभूत आवृत्ति है। अनुक्रिया है:

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[a_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) + b_n \sin(n\omega_0 t - \phi_n) \right] / k$$

जहाँ D_n और ϕ_n, आवृत्ति $n\omega_0$ पर क्रमशः प्रवर्धन गुणक और कला हैं।

52 अनावर्ती प्रणोदन के लिए Fourier श्रेणी, Fourier रूपांतरण बन जाती है:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

सम्मिश्र आवृत्ति अनुक्रिया फलन $H(\omega)$ आवृत्ति प्रक्षेत्र में निवेश को निर्गम से संबंधित करता है:

$$H(\omega) = \frac{1/k}{(1 - \beta^2) + i(2\zeta\beta)} \tag{35.12}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अनुक्रिया वर्णक्रम $U(\omega) = H(\omega)F(\omega)$ है और काल-प्रक्षेत्र अनुक्रिया प्रतिलोम Fourier रूपांतरण से प्राप्त होती है।

35.6.3.1 उदाहरण 35.7: दो हार्मोनिक घटकों वाले आवर्ती मशीन-बल के प्रति आवृत्ति अनुक्रिया

एक मशीन नींव ($m = 500$ kg, $k = 200$ kN/m, $\zeta = 5\%$, $\omega_n = 20$ rad/s) ऐसी घूर्णी मशीन से उत्तेजित होती है जो मूलभूत आवृत्ति $f_0 = 2$ Hz वाला आवर्ती बल उत्पन्न करती है ($\omega_0 = 4\pi$ rad/s, $T_p = 0.5$ s):

$$F(t) = F_1 \sin(\omega_0 t) + F_2 \sin(2\omega_0 t) = 2\,000 \sin(4\pi t) + 800 \sin(8\pi t) \quad [\text{N}]$$

निर्धारित करें: (a) प्रत्येक हार्मोनिक घटक का आवृत्ति अनुपात; (b) $H(\omega)$ का उपयोग करके प्रत्येक विधिक अनुक्रिया का स्थायी-अवस्था आयाम; (c) कुल स्थायी-अवस्था अनुक्रिया।

हल।

(a) आवृत्ति अनुपात।

$$\beta_1 = \frac{\omega_0}{\omega_n} = \frac{4\pi}{20} = \frac{12.566}{20} = 0.628 \qquad \beta_2 = \frac{2\omega_0}{\omega_n} = \frac{8\pi}{20} = \frac{25.133}{20} = 1.257$$

प्रथम हार्मोनिक घटक ($\beta_1 = 0.628$) अनुनाद से नीचे है; द्वितीय हार्मोनिक घटक ($\beta_2 = 1.257$) अनुनाद से ऊपर है।

(b) स्थायी-अवस्था आयाम।

प्रत्येक हार्मोनिक घटक का स्थैतिक विस्थापन आयाम $u_{\text{st},n} = F_n/k$ है। गतिक प्रवर्धन और कला क्रमशः समीकरण (35.5) तथा समीकरण (35.4) से मिलते हैं:

$$D(\beta,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}, \qquad \phi = \arctan\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$

प्रथम हार्मोनिक घटक ($F_1 = 2\,000$ N, $\beta_1 = 0.628$):

$$u_{\text{st},1} = \frac{2\,000}{200\,000} = 0.010 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-0.628^2)^2 + (2\times 0.05\times 0.628)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(0.606)^2 + (0.0628)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.3672 + 0.00394}} = \frac{1}{0.608} = 1.644$$

$$\phi_1 = \arctan\frac{0.0628}{0.606} = \arctan(0.1036) = 5.9^\circ$$

$$u_1(t) = D_1\, u_{\text{st},1} \sin(\omega_0 t - \phi_1) = 1.644 \times 10 \times \sin(4\pi t - 5.9^\circ) = 16.4 \text{ mm} \times \sin(4\pi t - 5.9^\circ)$$

द्वितीय हार्मोनिक घटक ($F_2 = 800$ N, $\beta_2 = 1.257$):

$$u_{\text{st},2} = \frac{800}{200\,000} = 0.004 \text{ m} = 4 \text{ mm}$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-1.257^2)^2 + (2\times 0.05\times 1.257)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(-0.580)^2 + (0.1257)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.3364 + 0.0158}} = \frac{1}{0.593} = 1.686$$

$$\phi_2 = \arctan\frac{0.1257}{1-1.580} = \arctan\frac{0.1257}{-0.580} = 180^\circ - 12.2^\circ = 167.8^\circ$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(कला 90° से अधिक है क्योंकि $\beta_2 > 1$: अनुनाद से ऊपर अनुक्रिया बल से एक-चौथाई चक्र से अधिक पीछे रहती है।)

$$u_2(t) = 1.686 \times 4 \times \sin(8\pi t - 167.8^\circ) = 6.74 \text{ mm} \times \sin(8\pi t - 167.8^\circ)$$

(c) कुल स्थायी-अवस्था अनुक्रिया।
अध्यारोपण से:

$$u(t) = 16.4\sin(4\pi t - 5.9^\circ) + 6.74\sin(8\pi t - 167.8^\circ) \quad [\text{mm}]$$

इस संयुक्त संकेत के शिखर को आयामों के योग द्वारा परिसीमित किया जा सकता है: $u_{\max} \le 16.4{+}6.74 = 23.1$ mm। व्यवहार में दोनों हार्मोनिक घटकों के शिखर एक साथ नहीं आते और वास्तविक अधिकतम कुछ कम होता है; एक आवर्तकाल में $u(t)$ के संख्यात्मक मूल्यांकन से $u_{\max} \approx 18.5$ mm मिलता है।

टिप्पणी। दो प्रेक्षणों पर बल देना आवश्यक है।

1. द्वितीय हार्मोनिक घटक का बल-आयाम प्रथम हार्मोनिक घटक के आयाम का केवल 40% ($800/2000 = 0.4$) होने पर भी वह विस्थापन आयाम का $6.74/16.4 = 41\%$ योगदान देता है, क्योंकि उसका आवृत्ति अनुपात $\beta_2 = 1.257$ अनुनाद के अधिक निकट है। अनुनाद के निकट छोटे उच्च-आवृत्ति बल-घटक अनुक्रिया पर प्रभावी हो सकते हैं।
2. द्वितीय हार्मोनिक घटक के लिए 167.8° का कला-विस्थापन दर्शाता है कि वह शिखरों के निकट प्रथम हार्मोनिक घटक का लगभग विरोध करता है; इसीलिए वास्तविक अधिकतम (18.5 mm) आयामों के योग (23.1 mm) से बहुत कम है। आवृत्ति-प्रक्षेत्र विधियाँ इन कला-संबंधों को उस प्रकार स्पष्ट और सुग्राह्य बनाती हैं, जैसा काल-प्रक्षेत्र का सहज बोध नहीं कर पाता।

35.7 आलंब उत्तेजन और भूकंपीय अनुक्रिया

53 अनेक व्यावहारिक स्थितियों में—विशेषतः भूकंपीय भू-गति में—उत्तेजन लगाया गया बल नहीं, बल्कि आलंब की निर्धारित गति होती है। इसके लिए गति-समीकरण को सापेक्ष विस्थापन के पदों में पुनःसूत्रित करना आवश्यक है।

35.7.1 आधार उत्तेजन का गति-समीकरण

54 मान लें कि $u_g(t)$ भूमि (आलंब) के विस्थापन और $u_t(t)$ द्रव्यमान के कुल (निरपेक्ष) विस्थापन को निरूपित करता है। सापेक्ष विस्थापन है:

$$u(t) = u_t(t) - u_g(t)$$

कमानी और अवमंदक बल सापेक्ष विस्थापन तथा वेग पर निर्भर करते हैं:

$$F_S = ku, \qquad F_D = c\dot{u}$$

किंतु Newton के नियम में निरपेक्ष त्वरण सम्मिलित होता है:

$$m\ddot{u}_t = -F_S - F_D = -ku - c\dot{u}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g$ प्रतिस्थापित करने पर:

$$m(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + c\dot{u} + ku = 0$$

पुनर्व्यवस्थित करने पर:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$$

55 यह भूकंपीय अनुक्रिया विश्लेषण का मूलभूत समीकरण है। सापेक्ष विस्थापन u को प्रभावी भूकंप बल $F_{\text{eff}} = -m\ddot{u}_g(t)$ प्रेरित करता है, जो द्रव्यमान और भूमि-त्वरण का गुणनफल है। संरचना ऐसे अनुक्रिया करती है मानो वह अपने आधार पर स्थिर हो और इस प्रभावी बल के अधीन हो।

56 जड़त्वीय बलों और तल-त्वरणों की गणना के लिए आवश्यक द्रव्यमान का निरपेक्ष त्वरण है:

$$\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g = -\frac{c}{m}\dot{u} - \frac{k}{m}u = -2\zeta\omega_n\dot{u} - \omega_n^2 u$$

35.7.2 अनुक्रिया वर्णक्रम

57 मुख्यतः 1930s और 1940s में Maurice Biot तथा George Housner द्वारा विकसित अनुक्रिया वर्णक्रम की संकल्पना ने काल-वृत्तांत विश्लेषण किए बिना भू-गति के अभिलक्षणन और अधिकतम संरचनात्मक अनुक्रिया के निर्धारण का व्यावहारिक साधन प्रदान करके भूकंप-अभियांत्रिकी में क्रांति ला दी।

58 अनुक्रिया वर्णक्रम समान अवमंदन अनुपात किंतु भिन्न प्राकृतिक आवर्तकाल वाले SDOF दोलकों की एक श्रेणी की अधिकतम अनुक्रिया का आलेख है, जब वे किसी विशिष्ट भू-गति के अधीन हों। प्रत्येक दोलक के लिए गति-समीकरण हल किया जाता है और किसी अनुक्रिया राशि (विस्थापन, वेग अथवा त्वरण) का अधिकतम निरपेक्ष मान अभिलिखित किया जाता है।

59 एक सामान्य (चिकनीकृत) अनुक्रिया-वर्णक्रम आकृति चित्र 35.3 में रेखांकित है, जिसमें विभिन्न अवमंदन अनुपातों के लिए त्वरण अनुक्रिया वर्णक्रम S_a को प्राकृतिक आवर्तकाल T_n के फलन के रूप में दिखाया गया है। तीन क्षेत्र—लघु, मध्यवर्ती और दीर्घ आवर्तकाल—क्रमशः त्वरण-नियंत्रित, वेग-नियंत्रित और विस्थापन-नियंत्रित व्यवहार के संगत हैं।

60 *वर्णक्रमीय विस्थापन* S_d, *वर्णक्रमीय वेग* S_v और *वर्णक्रमीय त्वरण* S_a इस प्रकार परिभाषित हैं:

$$S_d(T_n,\zeta) = \max_t |u(t)| \quad S_v(T_n,\zeta) = \max_t |\dot{u}(t)| \quad S_a(T_n,\zeta) = \max_t |\ddot{u}_t(t)| \tag{35.13}$$

जहाँ $u(t)$ निर्दिष्ट भू-गति के प्रति सापेक्ष विस्थापन अनुक्रिया है।

61 अल्प-अवमंदित निकायों के लिए निम्नलिखित सन्निकट संबंध मान्य हैं:

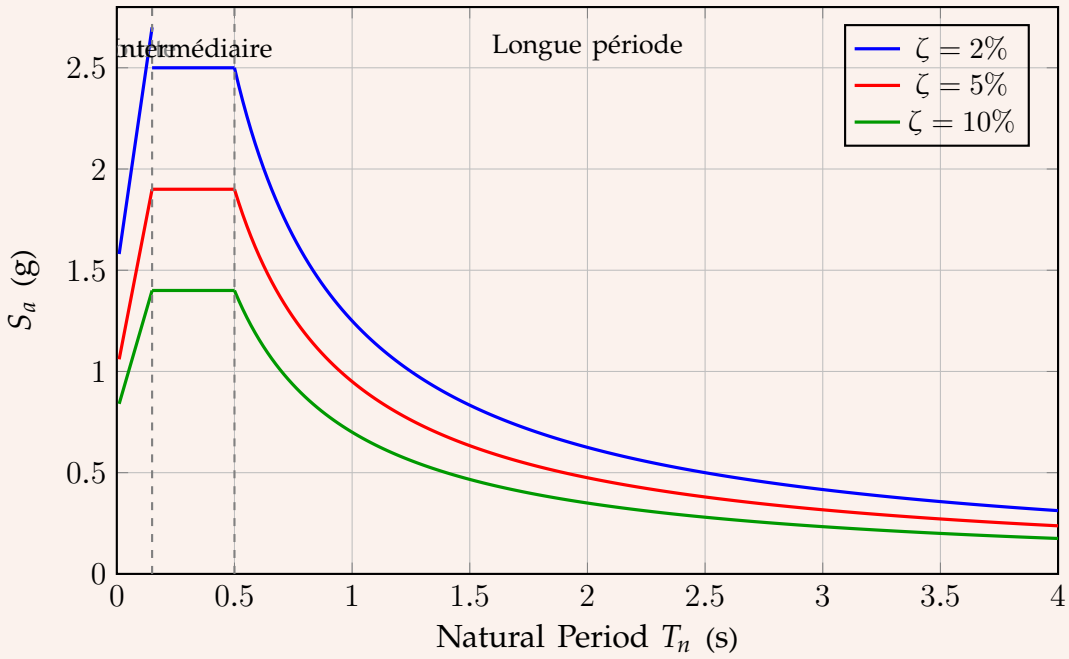
$$S_v \approx \omega_n S_d, \qquad S_a \approx \omega_n S_v \approx \omega_n^2 S_d$$

ये *छद्म-वर्णक्रमीय* संबंध हैं। छद्म-वर्णक्रमीय त्वरण S_a विशेष रूप से उपयोगी है, क्योंकि अधिकतम आधार अपरूपण सरलतः है:

$$V_{\max} = mS_a = \frac{W}{g}S_a \tag{35.14}$$

जहाँ W भार और g गुरुत्वीय त्वरण है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 35.3: त्वरण अनुक्रिया वर्णक्रम S_a, जो विभिन्न अवमंदन अनुपातों के लिए प्राकृतिक आवर्तकाल T_n का फलन है।

35.7.2.1 उदाहरण 35.8: अनुक्रिया वर्णक्रम से एक-मंजिला ढाँचे का भूकंपीय अभिकल्प

एक-मंजिला प्रबलित कंक्रीट ढाँचे के निम्नलिखित गुण हैं:

- कुल भूकंपीय भार (द्रव्यमान गुणा g): $W = 4\,500$ kN
- मंजिल की पार्श्व दृढता: $k = 180\,000$ kN/m
- श्यान अवमंदन अनुपात: $\zeta = 5\%$

अभिकल्प त्वरण अनुक्रिया वर्णक्रम (5% अवमंदन) को इस प्रकार परिभाषित किया गया है

$$S_a(T_n) = \begin{cases} 0.40g\left(1 + \dfrac{T_n}{0.10}\right) & 0 \le T_n < 0.10 \text{ s} \\ 0.80g & 0.10 \text{ s} \le T_n \le 0.60 \text{ s} \\ \dfrac{0.48g}{T_n} & T_n > 0.60 \text{ s} \end{cases}$$

निर्धारित करें: (a) मूलभूत आवर्तकाल; (b) वर्णक्रमीय त्वरण; (c) अधिकतम आधार अपरूपण; (d) अधिकतम पार्श्व विस्थापन।

हल।

(a) प्राकृतिक आवर्तकाल। द्रव्यमान $m = W/g = 4\,500/9.81 = 458.7$ t है।

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{180\,000}{458.7}} = 19.81 \text{ rad/s} \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{19.81} = 0.317 \text{ s}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(b) वर्णक्रमीय त्वरण। चूँकि $0.10\ \text{s} \le T_n = 0.317\ \text{s} \le 0.60\ \text{s}$, आवर्तकाल समतल त्वरण पठार में आता है:

$$S_a = 0.80g = 0.80 \times 9.81 = 7.85\ \text{m/s}^2$$

(c) अधिकतम आधार अपरूपण। समीकरण (35.14) से:

$$V_{\max} = m\,S_a = 458.7 \times 7.85 = 3{,}601\ \text{kN} \quad \text{or equivalently} \quad V_{\max} = W\frac{S_a}{g} = 4{,}500 \times 0.80 = 3{,}600\ \text{kN}$$

(d) अधिकतम पार्श्व विस्थापन। छद्म-वर्णक्रमीय संबंध $S_d \approx S_a/\omega_n^2$ का उपयोग करने पर:

$$S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{7.85}{(19.81)^2} = 0.020\ \text{m} = 20\ \text{mm}$$

इसे $u_{\max} = V_{\max}/k = 3{,}600/180{,}000 = 0.020\ \text{m}\checkmark$ से सत्यापित किया जा सकता है।

टिप्पणी। प्राकृतिक आवर्तकाल ज्ञात होने के बाद गणना पूर्णतः बीजीय है। अनुक्रिया वर्णक्रम भू-गति के प्रभाव को संकेतन करता है; संरचनात्मक अभियंता को केवल S_a को T_n पर पढ़कर द्रव्यमान से गुणा करना होता है। पार्श्व विस्थापन का आकलन संहिताओं में मंजिल-अपवाह की सीमाएँ जाँचने के लिए उपयोगी है (निष्पादन लक्ष्य के अनुसार सामान्यतः $u/h \le 1/500$ से $1/200$)। यहाँ मंजिल की ऊँचाई $h = 4\ \text{m}$ के लिए अपवाह अनुपात $20/4000 = 1/200$ है, जो सामान्य संहिता-सीमाओं के उदार सिरे पर है।

[62] भवन संहिताओं में निर्दिष्ट अभिकल्प अनुक्रिया वर्णक्रम अनेक अभिलिखित भूकंपों के वर्णक्रमों के चिकनीकृत आवरण होते हैं, जिन्हें लक्ष्य संकट स्तर निरूपित करने के लिए मापित किया जाता है। ये संहिता-वर्णक्रम नियमित भूकंपीय अभिकल्प में प्रयुक्त तुल्य पार्श्व बल प्रक्रिया का आधार बनते हैं।

अग्र-संदर्भ। यहाँ विकसित नियतात्मक राशियाँ आगे आने वाले निष्पादन-आधारित ढाँचों का गतिक आधार प्रदान करती हैं; प्रायिकतामूलक व्याख्या के लिए अध्याय 72 देखें।

35.8 बहु-स्वतंत्रता-कोटि निकाय

[63] वास्तविक संरचनाओं में द्रव्यमान और दृढता वितरित होते हैं, जिसके फलस्वरूप अनंत स्वतंत्रता-कोटियाँ होती हैं। विश्लेषण के लिए हम उन्हें परिमित संख्या में DOF वाले निकायों में विविक्त करते हैं। परिणामस्वरूप गति-समीकरण युग्मित साधारण अवकल समीकरण होते हैं, जिन्हें आव्यूह रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

35.8.1 गति-समीकरण

[64] किसी N-DOF निकाय के लिए गति-समीकरण हैं:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{35.15}$$

जहाँ:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- $\mathbf{u}(t)$, $N \times 1$ विस्थापन सदिश है
- $\mathbf{M}$, $N \times N$ द्रव्यमान आव्यूह (सममित, धनात्मक निश्चित) है
- $\mathbf{C}$, $N \times N$ अवमंदन आव्यूह (सममित, धनात्मक अर्ध-निश्चित) है
- $\mathbf{K}$, $N \times N$ दृढता आव्यूह (सममित, धनात्मक अर्ध-निश्चित) है
- $\mathbf{F}(t)$, $N \times 1$ बल सदिश है

65 द्रव्यमान आव्यूह $\mathbf{M}$ *संकेंद्रित* (विकर्ण, जिसमें द्रव्यमान आसंधियों पर संकेंद्रित हों) अथवा *सुसंगत* (दृढता के लिए प्रयुक्त उन्हीं आकृति फलनों से व्युत्पन्न पूर्ण आव्यूह) हो सकता है। दृढता आव्यूह $\mathbf{K}$ स्थैतिक विश्लेषण के समान है और अवयव दृढता आव्यूहों से समायोजित होता है। अवमंदन आव्यूह $\mathbf{C}$ सबसे अधिक समस्याप्रद है—उसका भौतिक आधार अनिश्चित है और प्रायः प्रथम सिद्धांतों के स्थान पर गणितीय रूप से निर्मित किया जाता है।

35.8.2 अनवमंदित मुक्त कंपन: प्राकृतिक विधाएँ

66 $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ और $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ रखकर हम $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}$ रूप के हल खोजते हैं:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$$

यह व्यापकीकृत अभिलक्षणिक-मान समस्या है। अतुच्छ हलों के लिए आवश्यक है:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

इससे N अभिलक्षणिक मान $\omega_1^2 \le \omega_2^2 \le \cdots \le \omega_N^2$ और संगत अभिलक्षणिक सदिश $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \ldots, \boldsymbol{\phi}_N$ प्राप्त होते हैं।

67 अभिलक्षणिक मान प्राकृतिक आवृत्तियाँ देते हैं: $\omega_n = \sqrt{\omega_n^2}$। *विधा-आकृतियाँ* अथवा *प्राकृतिक विधाएँ* कहलाने वाले अभिलक्षणिक सदिश प्रत्येक आवृत्ति पर विरूपण प्रतिरूप का वर्णन करते हैं। विधा-आकृतियों में निम्नलिखित लांबिकता गुण होते हैं:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0, \qquad \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

ये लांबिकता प्रतिबंध गति-समीकरणों के वियुग्मन की कुंजी हैं।

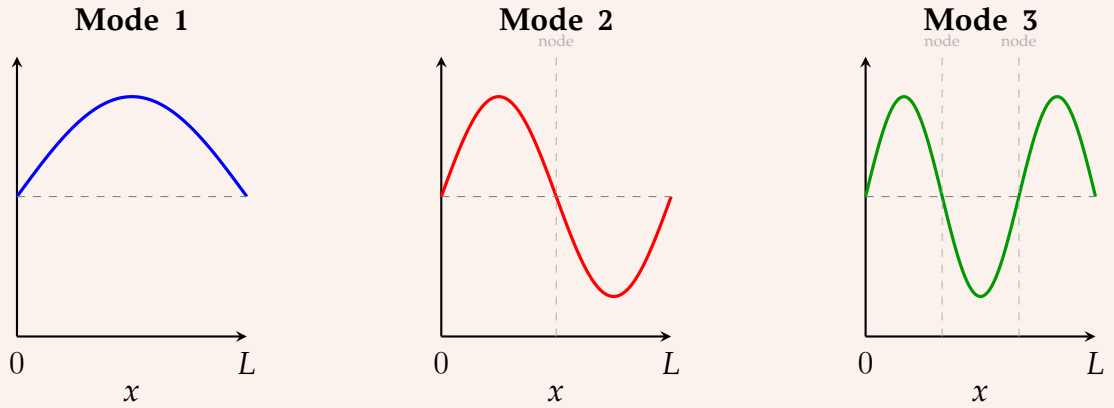
68 विधा-आकृतियों की संकल्पना का एक सरल उदाहरण चित्र 35.4 में दिखाया गया है, जो $\phi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ को $n = 1, 2, 3$ के लिए दर्शाता है। विधा 1 में कोई आंतरिक आसंधि नहीं; विधा 2 में मध्य-विस्तृति पर एक आसंधि; विधा 3 में $L/3$ और $2L/3$ पर दो आसंधियाँ हैं। प्राकृतिक आवृत्तियाँ $\omega_n \propto n^2$ को संतुष्ट करती हैं।

35.8.3 विधिक विश्लेषण

69 विधा-आकृतियाँ विस्थापन समष्टि का आधार बनाती हैं; यह उपागम *विधिक विश्लेषण* कहलाता है। किसी भी विस्थापन को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 35.4: सरलतः आलंबित धरन की प्रथम तीन विधा-आकृतियाँ

जहाँ $q_n(t)$ *विधिक निर्देशांक* (व्यापकीकृत निर्देशांक) और $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1\ \boldsymbol{\phi}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\phi}_N]$ विधिक आव्यूह है।

70 गति-समीकरण में प्रतिस्थापन करके और $\boldsymbol{\Phi}^T$ से पूर्वगुणन करने पर:

$$\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{F}$$

लांबिकता के कारण $\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}$ और $\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}$ विकर्ण हैं। यदि $\mathbf{C}$ का विशेष रूप (Rayleigh अवमंदन) हो:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$$

तब $\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}$ भी विकर्ण है और समीकरण N स्वतंत्र SDOF समीकरणों में वियुग्मित हो जाते हैं:

$$M_n\ddot{q}_n + C_n\dot{q}_n + K_n q_n = F_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

जहाँ $M_n = \boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n$ *विधिक द्रव्यमान*, $K_n = \boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_n$ *विधिक दृढता*, और $F_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{F}(t)$ *विधिक बल* है।

71 प्रत्येक विधिक समीकरण एक SDOF समीकरण है जिसे किसी भी SDOF विधि से हल किया जा सकता है। इसके बाद भौतिक अनुक्रिया अध्यारोपण द्वारा पुनर्निर्मित की जाती है:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t)$$

35.8.4 भूकंपीय अनुक्रिया में विधिक सहभागिता

72 भूकंपीय उत्तेजन के लिए $\mathbf{F}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t)$, जहाँ $\mathbf{r}$ प्रभाव सदिश है (सभी DOF को समान रूप से प्रभावित करने वाली क्षैतिज भू-गति के लिए सामान्यतः एककों का सदिश)। विधिक बल बनता है:

$$F_n(t) = -\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) = -L_n\ddot{u}_g(t)$$

जहाँ $L_n = \boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\mathbf{r}$ *विधिक सहभागिता गुणक* है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[73] प्रभावी विधिक द्रव्यमान है:

$$M_n^* = \frac{L_n^2}{M_n} = \frac{(\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\mathbf{r})^2}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n}$$

प्रभावी विधिक द्रव्यमानों का योग कुल द्रव्यमान के बराबर होता है:

$$\sum_{n=1}^{N} M_n^* = \mathbf{r}^T \mathbf{M} \mathbf{r}$$

यह गुण अभियंताओं को यह निर्धारित करने देता है कि कुल भूकंपीय अनुक्रिया का निर्दिष्ट अंश (प्रायः 90%) ग्रहण करने के लिए कितनी विधाएँ सम्मिलित करनी चाहिए।

35.8.4.1 उदाहरण 35.9: भूकंपीय भारण के अधीन 3-DOF अपरूपण भवन का विधिक विश्लेषण

तीन-मंजिला अपरूपण भवन में संकेंद्रित तल-द्रव्यमान और एकसमान मंजिल-दृढता है:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m = 100 \text{ t}, \qquad k_1 = k_2 = k_3 = k = 40\,000 \text{ kN/m}$$

दृढता और द्रव्यमान आव्यूह (केवल पार्श्व DOF, अक्षीय विरूपण उपेक्षित) हैं:

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ kN/m}, \qquad \mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ t}$$

उदाहरण 35.7.2.1 के अनुक्रिया वर्णक्रम (5% अवमंदन) का उपयोग करके निर्धारित करें: (a) प्राकृतिक आवृत्तियाँ और विधा-आकृतियाँ; (b) विधिक सहभागिता गुणक; (c) शिखर विधिक आधार अपरूपण और उनका SRSS संयोजन।

हल।

(a) प्राकृतिक आवृत्तियाँ और विधा-आकृतियाँ।

अभिलक्षणिक-मान समस्या $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$, $\lambda = m\omega^2/k$ के साथ इस रूप में रह जाती है:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

विस्तार करने पर: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$, जिसके मूल हैं:

$$\lambda_1 = 0.198, \quad \lambda_2 = 1.555, \quad \lambda_3 = 3.247$$

वृत्तीय आवृत्तियाँ $\omega_n = \sqrt{\lambda_n k/m} = \sqrt{\lambda_n \times 400}$ हैं:

विधा	λ_n	ω_n (rad/s)	T_n (s)
1	0.198	8.90	0.706
2	1.555	24.93	0.252
3	3.247	36.01	0.174

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विधा-आकृतियों को हल करने पर (द्रव्यमान-सामान्यीकृत, जिससे $\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n = m$) मिलता है:

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 0.328 \\ 0.591 \\ 0.737 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 0.737 \\ 0.328 \\ -0.591 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_3 = \begin{Bmatrix} 0.591 \\ -0.737 \\ 0.328 \end{Bmatrix}$$

(प्रविष्टियाँ इस प्रकार सामान्यीकृत हैं कि $1/\sqrt{m}$ से मापित करने के बाद सबसे बड़ा घटक लगभग 1 के बराबर हो; मान विमाहीन हैं)।

(b) विधिक सहभागिता गुणक।

क्षैतिज भू-गति के लिए प्रभाव सदिश $\mathbf{r} = \{1, 1, 1\}^T$ है। विधा n का विधिक सहभागिता गुणक है:

$$\Gamma_n = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\, \mathbf{r}}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\, \boldsymbol{\phi}_n}$$

$$\Gamma_1 = \frac{m(0.328 + 0.591 + 0.737)}{m(0.328^2 + 0.591^2 + 0.737^2)} = \frac{1.656}{0.974} = 1.700$$

$$\Gamma_2 = \frac{m(0.737 + 0.328 - 0.591)}{m(0.737^2 + 0.328^2 + 0.591^2)} = \frac{0.474}{0.974} = 0.487$$

$$\Gamma_3 = \frac{m(0.591 - 0.737 + 0.328)}{m(0.591^2 + 0.737^2 + 0.328^2)} = \frac{0.182}{0.974} = 0.187$$

प्रभावी विधिक द्रव्यमान $M_n^* = \Gamma_n^2 M_n = \Gamma_n^2 m \times (\text{normalization factor})$ को कुल द्रव्यमान $3m$ के अंशों के रूप में व्यक्त करने पर क्रमशः लगभग 87%, 11% और 2% मिलते हैं, जो विधाओं 1, 2 और 3 के लिए हैं। केवल विधा 1 भूकंपीय द्रव्यमान का 87% ग्रहण करती है; विधा 2 को सम्मिलित करने पर कुल 98% हो जाता है, जो संहिताओं द्वारा सामान्यतः अपेक्षित 90% सीमा से पर्याप्त अधिक है।

(c) शिखर विधिक आधार अपरूपण और SRSS संयोजन।

प्रत्येक विधा के लिए अभिकल्प वर्णक्रम से T_n पर वर्णक्रमीय त्वरण पढ़ा जाता है:

विधा	T_n (s)	S_a	शिखर विधिक आधार अपरूपण V_n^*	Γ_n
1	0.706	$0.48g / 0.706 = 0.680g$	$\Gamma_1\, \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{M} \mathbf{r}\, S_{a,1}$	1.700
2	0.252	$0.80g$ (पठार)	—	0.487
3	0.174	$0.80g$ (पठार)	—	0.187

विधा n में शिखर आधार अपरूपण $V_n = M_n^*\, S_{a,n}$ है। $M_n^* \approx \{261, 33, 5\}$ t और $S_{a,n} = \{0.680g,\, 0.80g,\, 0.80g\}$ के साथ:

$$V_1 = 261 \times 0.680 \times 9.81 = 1\,741 \text{ kN}, \quad V_2 = 33 \times 0.80 \times 9.81 = 259 \text{ kN}, \quad V_3 = 5 \times 0.80 \times 9.81 = 39 \text{ kN}$$

चूँकि विधिक शिखर एक साथ घटित नहीं होते, इसलिए उन्हें वर्गों के योग के वर्गमूल (SRSS) नियम से संयोजित किया जाता है:

$$V_{\text{SRSS}} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = \sqrt{1741^2 + 259^2 + 39^2} = \sqrt{3{,}031{,}081 + 67{,}081 + 1{,}521} \approx 1{,}761 \text{ kN}$$

टिप्पणी। अनेक प्रेक्षण उल्लेखनीय हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. विधा 1 पूर्णतः प्रभावी है: $V_1/V_{\text{SRSS}} \approx 99\%$। यह नियमित निम्न-ऊँचाई भवनों में सामान्य है, जहाँ मूलभूत विधा अधिकांश भूकंपीय ऊर्जा ग्रहण करती है।
2. SRSS संयोजन केवल V_1 से नाममात्र बड़ा परिणाम देता है, जिससे पुष्टि होती है कि यहाँ उच्चतर विधाएँ उपेक्षणीय हैं।
3. प्रत्येक विधा के लिए तल-बल $\mathbf{f}_n = \Gamma_n \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n S_{a,n}$ से पुनःप्राप्त किए जा सकते हैं और फिर SRSS से संयोजित किए जा सकते हैं—यह प्रक्रिया आधुनिक संहिता की तुल्य पार्श्व बल विधियों में सीधे अंतर्निहित है।
4. अनियमित संरचनाओं, अधिक ऊँचे भवनों अथवा निकट-भ्रंश प्रभाव वाले स्थलों के लिए उच्चतर विधाएँ अधिक महत्त्वपूर्ण हो जाती हैं और विधिक सहसंबंध को ध्यान में रखने वाले पूर्ण द्विघाती संयोजन (CQC) नियम को SRSS का स्थान लेना चाहिए।

35.9 सतत निकाय

74 वितरित द्रव्यमान और दृढ़ता वाली संरचनाएँ—धरनें, पट्टिकाएँ, कवच—आंशिक अवकल समीकरणों द्वारा नियंत्रित होती हैं। यद्यपि संख्यात्मक विधियाँ अंततः इन निकायों को विविक्त करती हैं, विश्लेषणात्मक हलों की समझ विधा-आकृतियों और प्राकृतिक आवृत्तियों के बारे में अंतर्दृष्टि प्रदान करती है।

35.9.1 दंडों का अक्षीय कंपन

75 लंबाई L, अनुप्रस्थ-काट क्षेत्रफल A, प्रत्यास्थता मापांक E और घनत्व ρ के एकसमान दंड पर विचार करें। अक्षीय विस्थापन $u(x,t)$ संतुष्ट करता है:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

अथवा तरंग वेग $c = \sqrt{E/\rho}$ परिभाषित करने पर:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{35.16}$$

यह एक-विमीय तरंग समीकरण है।

76 मुक्त कंपन के लिए हम $u(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$ रूप के हल खोजते हैं। प्रतिस्थापन से मिलता है:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0$$

जिसका हल $\phi(x) = A\cos(\omega x/c) + B\sin(\omega x/c)$ है। परिसीमा दशाएँ अनुमेय आवृत्तियाँ और विधा-आकृतियाँ निर्धारित करती हैं। दोनों सिरों पर स्थिर दंड के लिए:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35.9.2 धरनों का अनुप्रस्थ कंपन

77 अनुप्रस्थ कंपन के लिए Euler-Bernoulli धरन समीकरण है:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t)$$

जहाँ $v(x,t)$ अनुप्रस्थ विस्थापन, EI आनमनी दृढता और $q(x,t)$ वितरित भार है।

78 मुक्त कंपन ($q=0$) के लिए $v(x,t)=\phi(x)\sin(\omega t)$ खोजने पर:

$$\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}x^4} - \beta^4\phi = 0, \qquad \beta^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI}$$

व्यापक हल है:

$$\phi(x) = C_1\cosh(\beta x) + C_2\sinh(\beta x) + C_3\cos(\beta x) + C_4\sin(\beta x)$$

दोनों सिरों पर परिसीमा दशाएँ चार स्थिरांकों के लिए चार समीकरण प्रदान करती हैं, जिससे β के लिए अभिलक्षणिक-मान समस्या प्राप्त होती है।

79 लंबाई L की सरलतः आलंबित धरन के लिए:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

प्राकृतिक आवृत्तियाँ n^2 के अनुसार बढ़ती हैं और उच्चतर विधाओं को निम्नतर विधाओं से शीघ्र पृथक करती हैं। मूलभूत आवृत्ति ($n=1$) है:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

80 अन्य परिसीमा दशाओं (स्थिर-स्थिर, बाहुधरन आदि) के लिए अबीजीय आवृत्ति समीकरण को संख्यात्मक रूप से हल करना पड़ता है। आवृत्ति गुणांकों की सारणियाँ मानक संदर्भों में उपलब्ध हैं।

35.9.2.1 उदाहरण 35.10: इस्पात पद-सेतु की प्राकृतिक आवृत्ति और पैदल-यात्री अनुनाद जाँच

सरलतः आलंबित इस्पात पद-सेतु के निम्नलिखित गुण हैं:

- विस्तृति: $L = 20\ \mathrm{m}$
- इस्पात I-अनुभाग: $I = 6.0\times10^{-4}\ \mathrm{m^4}$, $A = 1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m^2}$
- प्रत्यास्थता मापांक: $E = 210\ \mathrm{GPa}$
- इस्पात घनत्व: $\rho = 7\,850\ \mathrm{kg/m^3}$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- अतिरिक्त मृत भार (पुल-पटल, रेलिंग, पृष्ठीकरण): $m' = 600\ \text{kg/m}$

निर्धारित करें: (a) मूलभूत प्राकृतिक आवृत्ति; (b) क्या पैदल-यात्री-प्रेरित अनुनाद चिंताजनक है; (c) विस्तृति को दोगुना करके $L = 40\ \text{m}$ करने का प्रभाव।

हल।

(a) मूलभूत प्राकृतिक आवृत्ति।

प्रति इकाई लंबाई कुल द्रव्यमान में इस्पात अनुभाग और मृत भार सम्मिलित हैं:

$$\bar{m} = \rho A + m' = 7\,850 \times 1.0 \times 10^{-2} + 600 = 78.5 + 600 = 678.5\ \text{kg/m}$$

आनमनी दृढता $EI = 210 \times 10^{9} \times 6.0 \times 10^{-4} = 1.26 \times 10^{8}\ \text{N·m}^2$ है। $n = 1$ के साथ सरलतः आलंबित धरन का सूत्र लागू करने पर:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \frac{\pi}{2 \times 20^2}\sqrt{\frac{1.26 \times 10^{8}}{678.5}} = \frac{\pi}{800}\sqrt{185\,700} = \frac{\pi}{800} \times 430.9 = 1.69\ \text{Hz}$$

संगत प्राकृतिक आवर्तकाल $T_1 = 1/f_1 = 0.59\ \text{s}$ है।

(b) पैदल-यात्री अनुनाद जाँच।

मानवीय संचलन लगभग आवर्ती बल उत्पन्न करता है। प्रासंगिक आवृत्ति परिसर हैं:

गतिविधि	प्रमुख आवृत्ति (Hz)
धीरे चलना	1.4–1.7
सामान्य चाल	1.7–2.3
तेज चाल / दौड़ना	2.3–3.5
पार्श्व शारीरिक डोलन	0.7–1.2

$f_1 = 1.69\ \text{Hz}$ के साथ सेतु धीमी चाल के पट्ट के ऊपरी सिरे और सामान्य चाल के पट्ट के निचले सिरे पर आता है। पैदल पदाघात के साथ अनुनाद वास्तविक उपयोगिता-संबंधी चिंता है। शिखर त्वरण की जाँच अनिवार्य है: EN 1990 (European Committee for Standardization (CEN), 2010) बाह्य पद-सेतुओं के लिए ऊर्ध्वाधर त्वरण को $0.7\ \text{m/s}^2$ तक सीमित करता है। London का Millennium Bridge (2000) खुलने के दो दिन बाद बंद कर दिया गया था, क्योंकि उसकी 0.97 Hz पार्श्व आवृत्ति पैदल-यात्री डोलन से मेल खाती थी; इससे स्पष्ट होता है कि छोटे गतिक बल भी अनुनाद पर अस्वीकार्य अनुक्रिया उत्पन्न कर सकते हैं।

(c) विस्तृति दोगुनी करने का प्रभाव।

चूँकि $f_1 \propto 1/L^2$ (स्थिर अनुभाग और मृत भार पर):

$$f_1(40\ \text{m}) = f_1(20\ \text{m}) \times \left(\frac{20}{40}\right)^2 = 1.69 \times 0.25 = 0.42\ \text{Hz}$$

40 m का सेतु सभी चाल-आवृत्तियों से पर्याप्त नीचे आ जाता है, अतः पैदल यातायात के साथ ऊर्ध्वाधर अनुनाद अब चिंता का विषय नहीं है। किंतु पार्श्व डोलन आवृत्ति अब 0.42 Hz के निकट आ सकती है, जो भीड़ के पार्श्व भारण के परिसर में है। $1/L^2$ मापनी संरचनात्मक गतिकी के सबसे महत्त्वपूर्ण परिणामों में से एक है: विस्तृति दोगुनी करने पर आवृत्ति एक-चौथाई हो जाती है और विस्तृति में सामान्य वृद्धि भी संरचना को सुरक्षित से अनुनाद-प्रवण, अथवा इसके विपरीत, बना सकती है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35.10 अरैखिक गतिकी

[81] पिछले अनुभागों में रैखिक व्यवहार माना गया है: विस्थापन और वेग के समानुपाती बल। वास्तविक संरचनाएँ, विशेषतः प्रबल भूकंपीय कंपन अथवा चरम भारण के अधीन, अरैखिक अनुक्रिया दर्शाती हैं। अरैखिकता सामग्री के पराभव, ज्यामितीय प्रभावों (बड़े विस्थापनों), संपर्क/अंतराल व्यवहार और घर्षण से उत्पन्न होती है।

35.10.1 अरैखिकता के स्रोत

[82] **सामग्री अरैखिकता** तब होती है जब प्रतिबल-विकृति संबंध अरैखिक हो। इस्पात में प्रतिबल के पराभव सामर्थ्य से अधिक होने पर प्रारंभिक प्रत्यास्थ व्यवहार पराभव में बदल जाता है। कंक्रीट में विदरण उपयोगिता भारों पर भी अरैखिकता प्रस्तुत करता है। संघटक संबंध का उपयुक्त प्रतिरूपण (प्रत्यास्थ-सुघट्य, क्षति आदि) करना आवश्यक है।

[83] **ज्यामितीय अरैखिकता** तब उत्पन्न होती है जब विस्थापन इतने बड़े हों कि संतुलन समीकरणों को विरूपित विन्यास पर लिखना पड़े। स्तंभों में P-Δ प्रभाव—पार्श्व विस्थापन के माध्यम से कार्य करने वाले अक्षीय बल के कारण आघूर्ण प्रवर्धन—एक सामान्य उदाहरण है।

[84] **संपर्क अरैखिकता** उन अंतरापृष्ठों पर होती है जहाँ घटक अलग हो सकते हैं अथवा संपर्क में आ सकते हैं। आधार-विलगन धारक, प्रसार संधियाँ और विदरित अनुभाग सभी यह व्यवहार दर्शाते हैं।

35.10.2 शैथिल्य और ऊर्जा-क्षय

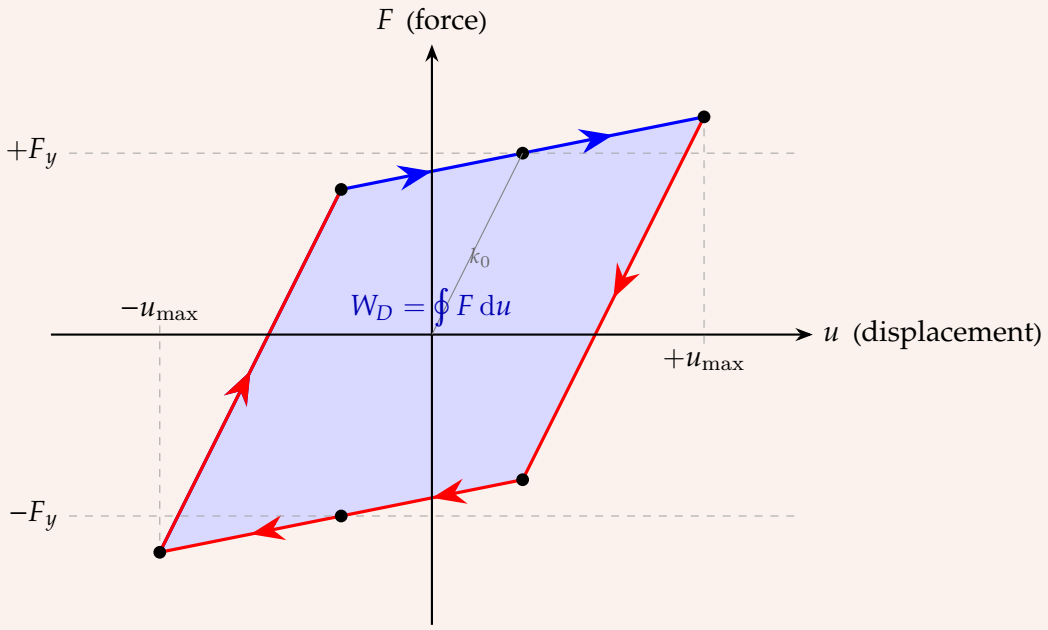
[85] चक्रीय भारण के अधीन अरैखिक सामग्री ऐसा भार-विस्थापन पथ बनाती है जो भारण और भारमुक्ति में भिन्न होता है। इस शैथिल्य पाश से घिरा क्षेत्रफल प्रति चक्र क्षयित ऊर्जा को निरूपित करता है। यह शैथिल्यी अवमंदन भूकंप के दौरान पराभवशील संरचनाओं में ऊर्जा-क्षय का प्राथमिक स्रोत है।

[86] एक योजनात्मक शैथिल्य पाश और उससे संबद्ध क्षयित ऊर्जा चित्र 35.5 में दिखाई गई है, जहाँ नीले तीर: भारण और पुनर्भारण शाखा; लाल तीर: भारमुक्ति शाखा। छायांकित क्षेत्रफल प्रति चक्र क्षयित ऊर्जा $W_D = \oint F \, \mathrm{d}u$ के बराबर है। प्रारंभिक दृढता k_0 प्रत्यास्थ ढाल नियंत्रित करती है; पराभवोत्तर दृढता कम होती है। पराभव बल $\pm F_y$ और शिखर विस्थापन $\pm u_{\max}$ इंगित हैं।

[87] सामान्य शैथिल्यी प्रतिरूपों में सम्मिलित हैं:

- **प्रत्यास्थ-सुघट्य**: पराभव तक प्रत्यास्थ, उसके बाद बढ़ते विस्थापन के साथ स्थिर बल। भारमुक्ति प्रारंभिक प्रत्यास्थ ढाल के समानांतर होती है।
- **द्विरेखीय**: पराभव तक प्रत्यास्थ, उसके बाद घटी हुई (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) पराभवोत्तर दृढता।
- **अपकर्षी दृढता**: संचित क्षति के साथ भारमुक्ति दृढता घटती है। यह कंक्रीट और चिनाई के व्यवहार का प्रतिरूपण करती है।
- **Bouc-Wen**: शैथिल्यी व्यवहारों के एक परिसर को निरूपित करने में सक्षम चिकना, अवकलनीय प्रतिरूप।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 35.5: सममित चक्रीय भारण के अधीन द्विरेखीय प्रत्यास्थ-सुघट्य शैथिल्य पाश।

35.10.2.1 उदाहरण 35.11: द्विरेखीय शैथिल्य पाश से तुल्य श्यान अवमंदन

संरचनात्मक इस्पात का बंधित ढाँचा द्विरेखीय प्रत्यास्थ-सुघट्य शैथिल्य पाश (चित्र 35.5 के समान) दर्शाता है, जिसके चक्रीय परीक्षण से निम्नलिखित प्राचल मापे गए हैं:

- प्रारंभिक (प्रत्यास्थ) दृढता: $k_0 = 50\ \text{kN/mm}$
- पराभव बल: $F_y = 400\ \text{kN}$
- परीक्षण चक्र में अधिकतम विस्थापन: $u_{\max} = 20\ \text{mm}$
- पराभवोत्तर दृढता अनुपात: $\alpha = k_1/k_0 = 0.05$ (5% शुद्धगतिक दृढीकरण)

निर्धारित करें: (a) पराभव विस्थापन और विस्थापन तन्यता; (b) प्रति चक्र क्षयित ऊर्जा; (c) अधिकतम विस्थापन पर विकृति ऊर्जा; (d) Jacobsen सूत्र से तुल्य श्यान अवमंदन अनुपात; (e) अभियांत्रिक व्याख्या।

हल।

(a) पराभव विस्थापन और तन्यता।

$$u_y = \frac{F_y}{k_0} = \frac{400}{50} = 8\ \text{mm} \qquad \mu = \frac{u_{\max}}{u_y} = \frac{20}{8} = 2.5$$

(b) प्रति चक्र क्षयित ऊर्जा।

सममित द्विरेखीय पाश के लिए प्रति पूर्ण चक्र क्षयित ऊर्जा घिरे हुए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल है। प्रत्यास्थ-सुघट्य पाश के लिए (सीमांत दशा $\alpha \to 0$) यथार्थ परिणाम है:

$$W_D = 4\,F_y\,(u_{\max} - u_y)$$

शुद्धगतिक दृढीकरण ($\alpha > 0$) वाले द्विरेखीय पाश में पराभवोत्तर विचलन क्षेत्रफल जोड़ते हैं, किंतु समान धनात्मक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और ऋणात्मक आयाम वाले सममित चक्र में दृढीकरण योगदान परस्पर निरस्त हो जाते हैं और यही सूत्र लागू होता है। अतः:

$$W_D = 4 \times 400 \times (20 - 8) = 4 \times 400 \times 12 = 19\,200 \text{ kN·mm} = 19.2 \text{ kN·m}$$

(c) अधिकतम विस्थापन पर विकृति ऊर्जा।

$u_{\max}$ पर संचित प्रत्यास्थ विकृति ऊर्जा (प्रारंभिक दृढता को संदर्भ मानकर परिकलित) है:

$$W_s = \frac{1}{2} k_0 u_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 20^2 = 10\,000 \text{ kN·mm} = 10.0 \text{ kN·m}$$

(d) तुल्य श्यान अवमंदन अनुपात (Jacobsen सूत्र)।

Jacobsen (1960) सूत्र तुल्य रैखिक श्यान दोलक में प्रति चक्र क्षयित ऊर्जा को समान आयाम पर अरैखिक निकाय की क्षयित ऊर्जा के बराबर रखता है:

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{W_D}{4\pi W_s} = \frac{19.2}{4\pi \times 10.0} = \frac{19.2}{125.7} = 0.153 \quad (15.3\%)$$

(e) अभियांत्रिक व्याख्या।

अकेला शैथिल्य पाश 15.3% तुल्य श्यान अवमंदन प्रदान करता है, जब तन्यता $\mu = 2.5$ हो। अंतर्निहित संरचनात्मक अवमंदन (इस्पात के लिए $\zeta_s \approx 2$–5%) के साथ कुल प्रभावी अवमंदन 17% से अधिक हो जाता है; इसीलिए पराभवशील संरचनाएँ अपनी प्रत्यास्थ क्षमता से कहीं बडे भूकंप सहन कर लेती हैं। तीन अन्य बिंदु उल्लेखनीय हैं।

1. *तन्यता अवमंदन को प्रेरित करती है।* सूत्र पुनःलिखने पर:

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{4F_y(u_{\max} - u_y)}{4\pi \cdot \frac{1}{2} k_0 u_{\max}^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - 1/\mu}{\mu} \times \frac{F_y/u_y}{F_y/u_y} = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{\mu} \cdot \mu$$

   अधिक सरल रूप में: ζ_{eq} तन्यता माँग के साथ एक पठार तक बढता है, जिससे स्पष्ट होता है कि अत्यधिक तन्य निकाय भूकंपीय ऊर्जा के अवशोषण में इतने दक्ष क्यों होते हैं।
2. *संहिता R-गुणकों से संबंध।* सामर्थ्य न्यूनीकरण गुणक $R = \mu$ का भौतिक आधार ठीक यही शैथिल्यी अवमंदन है: $\mu = 4$ सहन करने वाला ढाँचा इतनी ऊर्जा क्षय करता है कि वह अपने पराभव सामर्थ्य द्वारा अन्यथा अनुमत भू-गतियों से चार गुनी बडी भू-गतियों का प्रतिरोध कर सकता है।
3. *सीमाएँ।* Jacobsen सूत्र एक सन्निकटन है। यह स्थायी-अवस्था अनुक्रिया मानता है और मध्यम तन्यता ($\mu \le 4$) के लिए सर्वाधिक परिशुद्ध है। अत्यधिक अरैखिक अथवा अपकर्षी निकायों के लिए प्रत्यक्ष अरैखिक काल-वृत्तांत विश्लेषण अधिक विश्वसनीय है।

35.10.3 तन्यता और क्षमता अभिकल्प

[88] *विस्थापन तन्यता* μ को अधिकतम विस्थापन और पराभव विस्थापन के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है:

$$\mu = \frac{u_{\max}}{u_y}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पराभव और अप्रत्यास्थ रूप से विरूपित होने के लिए अभिकल्पित संरचनाएँ अपनी प्रत्यास्थ क्षमता के संकेत से कहीं अधिक प्रबल भूकंप सहन कर सकती हैं। यह *क्षमता अभिकल्प* का मूलभूत सिद्धांत है: भंगुर अवयवों की रक्षा करते हुए सावधानी से विस्तृत क्षेत्रों में पराभव स्वीकार करना।

[89] सामर्थ्य न्यूनीकरण और तन्यता माँग का संबंध R-μ-T संबंध द्वारा व्यक्त होता है। वेग-संवेदी परिसर में आवर्तकाल वाली संरचनाओं के लिए:

$$R \approx \mu$$

यह "समान विस्थापन" नियम कहता है कि पराभवशील संरचना का अधिकतम विस्थापन समान आवर्तकाल वाली प्रत्यास्थ संरचना के अधिकतम विस्थापन के बराबर होता है—पराभव विस्थापन बढ़ाए बिना बल-माँग को घटाता है।

35.10.3.1 उदाहरण 35.12: प्रबलित कंक्रीट ढाँचे के लिए तन्यता माँग और बल न्यूनीकरण

एक-मंजिला प्रबलित कंक्रीट आघूर्ण ढाँचे को ऐसे भूकंपीय क्षेत्र के लिए अभिकल्पित करना है जिसका अभिकल्प वर्णक्रम उदाहरण 35.7.2.1 की त्रिभागी आकृति का अनुसरण करता है ($S_a = 0.80g$, जब $T \le 0.60$ s)। ढाँचे के गुण हैं:

- भूकंपीय द्रव्यमान: $m = 300$ t
- मूलभूत आवर्तकाल: $T_n = 0.40$ s (पठार में)
- मंजिल की ऊँचाई: $h = 3.5$ m
- उपलब्ध विस्थापन तन्यता: $\mu = 4$ (आधुनिक संहिताओं के अनुसार सुविस्तृत तन्य RC)

समान-विस्थापन नियम का उपयोग करके निर्धारित करें: (a) प्रत्यास्थ आधार अपरूपण माँग; (b) घटाया हुआ अभिकल्प आधार अपरूपण; (c) पराभव और अधिकतम विस्थापन; (d) मंजिल-अपवाह अनुपात और निष्पादन जाँच।

हल।

(a) प्रत्यास्थ आधार अपरूपण (कोई तन्यता न्यूनीकरण नहीं)।

$$V_{\text{el}} = m\, S_a = 300 \times 0.80 \times 9.81 = 2\,354 \text{ kN}$$

(b) घटाया हुआ अभिकल्प आधार अपरूपण।

वेग-संवेदी परिसर के आवर्तकालों के लिए समान-विस्थापन नियम $R \approx \mu$ देता है, अतः सामर्थ्य न्यूनीकरण गुणक $R = 4$:

$$V_y = \frac{V_{\text{el}}}{R} = \frac{2\,354}{4} = 589 \text{ kN}$$

ढाँचे को इस बल स्तर पर पराभव के लिए अभिकल्पित करना चाहिए। V_y के लिए V_{el} के स्थान पर अभिकल्प करने से आवश्यक संरचनात्मक सामर्थ्य—और फलतः लागत—चार गुना घटती है।

(c) पराभव विस्थापन और अधिकतम विस्थापन।

पार्श्व दृढता आवर्तकाल और द्रव्यमान से प्राप्त होती है:

$$k = \omega_n^2\, m = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 m = \left(\frac{2\pi}{0.40}\right)^2 \times 300 = 246.7 \times 300 = 74\,022 \text{ kN/m}$$

पराभव विस्थापन:

$$u_y = \frac{V_y}{k} = \frac{589}{74\,022} = 7.95 \text{ mm}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समान-विस्थापन नियम से अप्रत्यास्थ अधिकतम विस्थापन, प्रत्यास्थ वर्णक्रमीय विस्थापन के बराबर होता है:

$$u_{\max} = S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{0.80 \times 9.81}{246.7} = 31.8 \text{ mm}$$

सत्यापन: $\mu = u_{\max}/u_y = 31.8/7.95 = 4.01$। ✓
पराभव से आगे आवश्यक सुघट्य विस्थापन:

$$u_p = u_{\max} - u_y = 31.8 - 8.0 = 23.8 \text{ mm}$$

(d) मंजिल-अपवाह अनुपात और निष्पादन जाँच।

$$\frac{u_{\max}}{h} = \frac{31.8}{3\,500} = 0.91\%$$

अधिकांश संहिताएँ जीवन-सुरक्षा के लिए 2% और तत्काल अधिभोग के लिए 0.5% का अधिकतम मंजिल-अपवाह अनुपात अनुमत करती हैं। 0.91% अपवाह जीवन-सुरक्षा निष्पादन लक्ष्य के लिए स्वीकार्य है, किंतु तत्काल-अधिभोग की आवश्यकता को संतुष्ट नहीं करेगा। ये संख्याएँ भूकंप-अभियांत्रिकी के मूलभूत समझौते को समाहित करती हैं: 24 mm सुघट्य विरूपण स्वीकार करके अभिकल्प बल चार गुना घटाया जाता है। अभिकल्प भूकंप में संरचना मरम्मत-योग्य क्षति सहेगी, किंतु ध्वस्त नहीं होगी—आधुनिक संहिताओं का ठीक यही आशय है। यदि उसी ढाँचे को प्रत्यास्थ रूप से अभिकल्पित किया जाए ($\mu = 1$, $R = 1$), तो चार गुने सामर्थ्य की आवश्यकता होगी, किंतु कोई संरचनात्मक क्षति नहीं होगी।

35.11 व्यावहारिक विचार

35.11.1 वास्तविक संरचनाओं में अवमंदन

[90] संरचनाओं के मापे गए अवमंदन अनुपात सामग्री, कंपन आयाम और निर्माण के प्रकार पर निर्भर करते हैं। सामान्य मानों में सम्मिलित हैं:

संरचना का प्रकार	अवमंदन अनुपात ζ
इस्पात, वेल्डित, पूर्व-पराभव	0.01–0.02
इस्पात, बोल्टित, पूर्व-पराभव	0.02–0.03
प्रबलित कंक्रीट, अविदरित	0.01–0.02
प्रबलित कंक्रीट, विदरित	0.03–0.05
पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट	0.01–0.02
चिनाई, अविदरित	0.02–0.03
काष्ठ संरचनाएँ	0.05–0.10

ये परिमाण-कोटि के मान हैं; वास्तविक अवमंदन विवरणों पर निर्भर करता है और जहाँ संभव हो उसे मापा जाना चाहिए।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35.11.2 मृदा-संरचना अन्योन्यक्रिया

91 किसी संरचना की गतिक अनुक्रिया केवल स्वयं संरचना पर ही नहीं, बल्कि आलंबी मृदा पर भी निर्भर करती है। *मृदा-संरचना अन्योन्यक्रिया* (SSI) निवेश गति और निकाय की आवृत्तियों दोनों को उल्लेखनीय रूप से प्रभावित कर सकती है। नम्य मृदाएँ निकाय का प्रभावी आवर्तकाल बढ़ाती हैं और मृदा में ऊर्जा-विकिरण द्वारा अतिरिक्त अवमंदन प्रस्तुत करती हैं। कोमल मृदा पर दृढ संरचनाओं के लिए SSI प्रभाव पर्याप्त हो सकते हैं; शैल पर नम्य संरचनाओं के लिए वे उपेक्षणीय हैं।

35.11.3 समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक

92 समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक (TMD) प्राथमिक संरचना से जुड़ा द्वितीयक द्रव्यमान-कमानी-अवमंदक निकाय है, जिसे किसी विशिष्ट आवृत्ति पर समस्वरित किया जाता है। जब प्राथमिक संरचना अपनी प्राकृतिक आवृत्ति पर कंपन करती है, तो TMD विपरीत दिशा में दोलन करके प्राथमिक अनुक्रिया घटाता है। TMD का उपयोग ऊँचे भवनों (जैसे Taipei 101) और दीर्घ-विस्तृति सेतुओं में पवन-प्रेरित तथा भूकंपीय कंपन घटाने के लिए किया जाता है।

93 अनवमंदित प्राथमिक संरचना के लिए TMD का इष्टतम समस्वरण है:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m}, \qquad \zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}}$$

जहाँ $\mu_m = m_d/m$ द्रव्यमान अनुपात (सामान्यतः 0.01 से 0.05), ω_d TMD आवृत्ति और ζ_d TMD अवमंदन अनुपात है।

35.11.4 उदाहरण 35.13: ऊँचे भवन के लिए समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक का अभिकल्प

एक तनु इस्पात मीनार की मूलभूत विधा में निम्नलिखित गतिक विशेषताएँ हैं:

- कुल द्रव्यमान: $M = 800$ t
- प्राकृतिक आवृत्ति: $\omega_n = 2.094$ rad/s ($T_n = 3.0$ s, $f_n = 0.333$ Hz)
- संरचनात्मक अवमंदन: $\zeta = 1\%$ (अल्प-अवमंदित इस्पात)

मीनार के शीर्ष पर द्रव्यमान अनुपात $\mu_m = m_d/M = 0.02$ (2%) वाला TMD स्थापित करना है। निर्धारित करें: (a) TMD द्रव्यमान; (b) इष्टतम TMD आवृत्ति और कमानी दृढता; (c) इष्टतम TMD अवमंदन अनुपात और अवमंदक गुणांक; (d) स्थायी-अवस्था अनुनादी आयाम में कमी।

हल।

(a) TMD द्रव्यमान।

$$m_d = \mu_m\, M = 0.02 \times 800 = 16 \text{ t}$$

(b) इष्टतम TMD आवृत्ति और कमानी दृढता।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Den Hartog के इष्टतम समस्वरण सूत्र से:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m} = \frac{1}{1.02} = 0.9804$$

$$\omega_d = 0.9804 \times 2.094 = 2.053 \text{ rad/s} \qquad f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = 0.327 \text{ Hz}$$

TMD कमानी की दृढता है:

$$k_d = m_d\,\omega_d^2 = 16 \times (2.053)^2 = 67.5 \text{ kN/m}$$

(c) इष्टतम TMD अवमंदन अनुपात और अवमंदक गुणांक।

$$\zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}} = \sqrt{\frac{3 \times 0.02}{8 \times (1.02)^3}} = \sqrt{\frac{0.060}{8.489}} = \sqrt{0.00707} = 0.0841 \quad (8.4\%)$$

श्यान अवमंदक गुणांक:

$$c_d = 2\,\zeta_d\,m_d\,\omega_d = 2 \times 0.0841 \times 16 \times 2.053 = 5.53 \text{ kN·s/m}$$

(d) अनुनादी आयाम में कमी।

अनवमंदित प्राथमिक संरचना ($\zeta = 0$) के लिए TMD अनुनादी गतिक प्रवर्धन गुणक को असीमित मान से घटाकर लगभग इतना कर देता है:

$$D_{\text{TMD}} \approx \sqrt{\frac{2+\mu_m}{\mu_m}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2.02}{0.02}} = \frac{1}{2}\sqrt{101} = 5.02$$

जबकि TMD के बिना $D = 1/(2\zeta_{\text{struct}})$ है। वास्तविक संरचनात्मक अवमंदन $\zeta = 1\%$ के लिए अनियंत्रित अनुनादी प्रवर्धन $D_0 = 1/(2 \times 0.01) = 50$ है। अतः TMD शिखर अनुक्रिया को लगभग $50/5 = 10$ गुना, अथवा लगभग 90%, घटाता है।

टिप्पणी। द्रव्यमान अनुपात $\mu_m = 2\%$ वास्तविक संस्थापनों का प्रतिनिधि है: Taipei 101 में 660 t लोलक TMD प्रयुक्त है, जबकि भवन-द्रव्यमान लगभग 30,000 t है ($\mu_m \approx 2.2\%$)। 8.4% का इष्टतम अवमंदन अनुपात संरचनात्मक अवमंदन से पर्याप्त अधिक है; इसीलिए TMD के भीतर समर्पित श्यान अवमंदक आवश्यक होता है। तीन व्यावहारिक बिंदुओं पर बल देना चाहिए:

1. Den Hartog के सूत्र अनवमंदित प्राथमिक संरचना मानते हैं; अल्प संरचनात्मक अवमंदन ($\zeta \le 2\%$) का इष्टतम प्राचलों पर उपेक्षणीय प्रभाव है।
2. विसमस्वरण—दृढता-परिवर्तन, अतिरिक्त द्रव्यमान अथवा तापमान के कारण ω_n में परिवर्तन—TMD की प्रभावशीलता को उल्लेखनीय रूप से घटाता है। सेवा में पुनःसमस्वरण के लिए कभी-कभी समायोज्य कमानी अथवा अवमंदक क्रियाविधियाँ सम्मिलित की जाती हैं।
3. TMD केवल समस्वरित आवृत्ति के निकट प्रभावी होते हैं। वे अन्य विधाओं की अनुक्रिया नहीं घटाते; इसीलिए जब अनेक विधाएँ अनुक्रिया में योगदान देती हैं, तब अनेक TMD अथवा विस्तृत-पट्ट उपकरण प्रयुक्त होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35.11.5 आधार-विलगन

[94] आधार-विलगन संरचना और नींव के बीच एक नम्य परत (सामान्यतः प्रत्यास्थबहुलक धारक अथवा सर्पी निकाय) प्रस्तुत करता है। विलगित संरचना का आवर्तकाल बहुत अधिक होता है, जिससे वह सामान्य भूकंपीय भू-गतियों की उच्च-ऊर्जा अंतर्वस्तु से दूर चली जाती है। विलगन परत अतिरिक्त अवमंदन भी प्रदान करती है। आधार-विलगन दृढ, लघु-आवर्तकाल संरचनाओं के लिए विशेष रूप से प्रभावी है और अस्पतालों, आपातकालीन सुविधाओं तथा ऐतिहासिक भवनों में व्यापक रूप से प्रयुक्त होता है।

35.11.6 उदाहरण 35.14: आधार-विलगित अस्पताल भवन का अभिकल्प

दो-मंजिला अस्पताल भवन का सीसा-रबर धारक (LRB) विलगन निकाय द्वारा पुनर्योजन करना है। स्थिर-आधार संरचना के निम्नलिखित गुण हैं:

- भूकंपीय भार: $W = 12\,000$ kN (द्रव्यमान $M = W/g = 1\,223$ t)
- स्थिर-आधार मूलभूत आवर्तकाल: $T_{\text{fb}} = 0.30$ s
- स्थिर-आधार पार्श्व दृढता: $K_{\text{fb}} = 537\,000$ kN/m
- संरचनात्मक अवमंदन: $\zeta_s = 5\%$

अभिकल्प त्वरण वर्णक्रम (5% अवमंदन) उदाहरण 35.7.2.1 की त्रिभागी आकृति का अनुसरण करता है:

$$S_a(T) = \begin{cases} 0.80g & T \le 0.60 \text{ s} \\ \dfrac{0.48g}{T} & T > 0.60 \text{ s} \end{cases}$$

विलगन निकाय को लक्ष्य विलगित आवर्तकाल $T_{\text{iso}} = 2.50$ s, प्रभावी अवमंदन $\zeta_{\text{iso}} = 15\%$ सहित, प्राप्त करने के लिए अभिकल्पित किया गया है। निर्धारित करें: (a) आवश्यक विलगन दृढता; (b) विलगकों का अभिकल्प विस्थापन; (c) विलगन सहित और उसके बिना आधार अपरूपण; (d) त्वरण न्यूनीकरण गुणक।

हल।

(a) आवश्यक विलगन दृढता।

विलगित आवर्तकाल केवल विलगन परत की दृढता K_{iso} द्वारा नियंत्रित होता है (अधिरचना को विलगकों के सापेक्ष दृढ माना गया है):

$$T_{\text{iso}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K_{\text{iso}}}} \quad \Rightarrow \quad K_{\text{iso}} = M\left(\frac{2\pi}{T_{\text{iso}}}\right)^2 = 1\,223 \times \left(\frac{2\pi}{2.50}\right)^2 = 1\,223 \times 6.317 = 7\,726 \text{ kN/m}$$

यह स्थिर-आधार दृढता का लगभग 1.4% है, जिससे पुष्टि होती है कि विलगन परत अधिरचना के सापेक्ष अत्यधिक नम्य है।

(b) विलगकों का अभिकल्प विस्थापन।

$T_{\text{iso}} = 2.50$ s पर वर्णक्रमीय विस्थापन छद्म-वर्णक्रमीय संबंधों से प्राप्त होता है। पहले T_{iso} पर वर्णक्रमीय त्वरण पढें (जो दीर्घ-आवर्तकाल शाखा में है):

$$S_a(2.50) = \frac{0.48g}{2.50} = 0.192g = 1.883 \text{ m/s}^2$$

अवमंदन संशोधन गुणक η अधिक विलगन अवमंदन ($\zeta_{\text{iso}} = 15\%$) को संदर्भ 5% की तुलना में ध्यान में रखता है:

$$\eta = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + \zeta_{\text{iso}}}} = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + 0.15}} = \sqrt{\frac{0.10}{0.20}} = 0.707$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवमंदन-संशोधित वर्णक्रमीय त्वरण और विस्थापन हैं:

$$S_a^* = \eta\, S_a = 0.707 \times 1.883 = 1.332 \ \text{m/s}^2$$

$$S_d = \frac{S_a^*}{\omega_{\text{iso}}^2} = \frac{S_a^*}{(2\pi/T_{\text{iso}})^2} = \frac{1.332}{(2\pi/2.50)^2} = \frac{1.332}{6.317} = 0.211 \ \text{m} \approx 211 \ \text{mm}$$

यह वह अभिकल्प विस्थापन है जिसे प्रत्येक विलगक इकाई को समायोजित करना होगा। सामान्य LRB विलगक 200–400 mm पार्श्व विस्थापन सह सकते हैं, अतः अभिकल्प व्यवहार्य है।

(c) विलगन सहित और उसके बिना आधार अपरूपण।

स्थिर-आधार (विलगन नहीं, $T_{\text{fb}} = 0.30$ s, 5% अवमंदन, पठार क्षेत्र):

$$V_{\text{fb}} = M\, S_a(0.30) = 1\,223 \times 0.80 \times 9.81 = 9\,597 \ \text{kN} \approx 0.80\,W$$

आधार-विलगित ($T_{\text{iso}} = 2.50$ s, 15% अवमंदन, संशोधित):

$$V_{\text{iso}} = M\, S_a^* = 1\,223 \times 1.332 = 1\,629 \ \text{kN} \approx 0.136\,W$$

(d) त्वरण न्यूनीकरण गुणक।

$$\mathcal{R} = \frac{V_{\text{fb}}}{V_{\text{iso}}} = \frac{9\,597}{1\,629} = 5.89 \approx 6$$

आधार-विलगन भूकंपीय आधार अपरूपण को लगभग 6 गुना घटाकर भवन-भार के 80% से 14% कर देता है।

टिप्पणी। इस परिणाम की अनेक विशेषताएँ ध्यान देने योग्य हैं।

1. *आवर्तकाल परिवर्तन प्राथमिक क्रियाविधि है।* $T = 0.30$ s से $T = 2.50$ s की ओर जाना संरचना को उच्च-ऊर्जा त्वरण पठार से हटाकर वर्णक्रम की दीर्घ-आवर्तकाल, निम्न-त्वरण पूँछ में बहुत भीतर ले जाता है। अतिरिक्त अवमंदन ($\eta = 0.707$) आगे $\sqrt{2}$ गुना न्यूनीकरण देता है, किंतु अधिकांश कार्य आवर्तकाल परिवर्तन करता है।
2. *अधिरचना के त्वरण लगभग एकसमान हैं।* विलगन परत लगभग समस्त विरूपण को आधार पर संकेंद्रित करती है, इसलिए अधिरचना मूलतः दृढ पिंड के रूप में गति करती है। तल-त्वरण सभी स्तरों पर लगभग समान और $S_a^*/g \approx 0.136g$ के निकट होते हैं—अस्पताल के लिए एक निर्णायक लाभ, जहाँ उपकरण, छतें और असंरचनात्मक घटक भूकंप के बाद भी कार्यशील रहने चाहिए।
3. *विलगन विस्थापन को समायोजित करना आवश्यक है।* 211 mm अभिकल्प विस्थापन के लिए भवन की संपूर्ण परिधि के चारों ओर कम-से-कम इतनी चौड़ाई की खाई (भूकंपीय अंतराल) आवश्यक है और विलगन तल को पार करने वाली सभी उपयोगिता सेवाओं में नम्य संयोजन लगाने चाहिए।
4. *प्रयोज्यता।* आधार-विलगन दृढ भूमि पर दृढ, लघु-आवर्तकाल संरचनाओं के लिए सर्वाधिक प्रभावी है। नम्य संरचनाओं (दीर्घ T_{fb}) के लिए आवर्तकाल परिवर्तन कम होता है और कोमल मृदाओं के लिए दीर्घ-आवर्तकाल भू-गति ऊर्जा लाभ को पूर्णतः निरस्त कर सकती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35.12 समापन टिप्पणियाँ

35.12.1 अनुक्रिया-वर्णक्रम विधियों पर व्यवसायी की सावधानी

अनुक्रिया वर्णक्रम विधि पर Prof. Edward L. Wilson

"Ray Clough और मुझे खेद है कि हमने 1962 में संरचनाओं के भूकंपीय विश्लेषण के लिए सन्निकट अनुक्रिया-वर्णक्रम विधि बनाई... उस समय व्यवसाय के अनेक सदस्य अधिकतम सदस्य-बलों का आकलन करने के लिए विधिक मानों के निरपेक्ष मानों के योग का उपयोग कर रहे थे। Ray ने सुझाव दिया कि हम विधिक मानों के संयोजन के लिए SRSS विधि का उपयोग करें। किंतु मैंने ही इस सन्निकट विधि को अनेक गतिक विश्लेषण प्रोग्रामों में रखा, जिससे अभियंता अल्प अथवा शून्य मूल्य वाली अर्थहीन धनात्मक संख्याएँ उत्पन्न कर सके... RSM के साथ 50 से अधिक वर्ष कार्य करने के बाद मैं अनुशंसा करता हूँ कि इसका उपयोग भूकंपीय विश्लेषण के लिए न किया जाए।"

95 विधि के रचनाकारों में से एक का यह स्पष्ट चिंतन एक उपयोगी स्मरण है कि सुविधा और कठोरता सदैव एक नहीं होते। अनुक्रिया-वर्णक्रम विधि का संहिताओं और व्यवहार में अब भी व्यापक उपयोग होता है, किंतु उसकी सीमाओं—विधिक संयोजन सन्निकटन, अरैखिक व्यवहार को ग्रहण करने में असमर्थता और वर्णक्रमीय आकृति की मान्यताओं पर निर्भरता—को समझना आवश्यक है। निर्णायक संरचनाओं अथवा प्रबल अरैखिक अनुक्रिया के लिए अरैखिक काल-वृत्तांत विश्लेषण उपयुक्त साधन है, जैसा अध्याय 53 में विकसित किया गया है।

35.12.2 समापन टिप्पणी: रैखिक सिद्धांत की सीमाएँ

इस अध्याय के लगभग सभी विश्लेषणात्मक परिणाम रैखिक मान्यताओं पर आधारित हैं: रैखिक प्रत्यास्थ पुनःस्थापन बल, छोटे विस्थापन और (जहाँ प्रयुक्त हो) रैखिक श्यान अवमंदन। ये मान्यताएँ अध्यारोपण और संवृत-रूप हल संभव बनाती हैं। जब इनका उल्लंघन होता है (सामग्री पराभव, बड़े-विस्थापन की शुद्धगतिकी, संपर्क अथवा प्रबल अरैखिक अवमंदन), तब अनुक्रिया की गणना सामान्यतः चरण-दर-चरण काल-समाकलन द्वारा करनी होती है। वे संगणकीय और उन्नत विषय स्नातकोत्तर-स्तरीय अध्याय 53 में विकसित किए गए हैं।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

36 संरचनात्मक अभिकल्प के तत्त्व

सारांश

संरचनात्मक विश्लेषण स्वयं में कभी अंतिम लक्ष्य नहीं होता। यह किसी नई अथवा विद्यमान संरचना के जोखिम और सुरक्षा का आकलन करने का आवश्यक साधन है, चाहे वह भवन हो, वायुयान हो अथवा अस्थि।

अतः इस व्यापक पुस्तक के संदर्भ में संरचनात्मक विश्लेषक के लिए अभिकल्प प्रक्रिया और विश्लेषण से उसके संबंध की संक्षिप्त (यद्यपि ऊपरी) समझ होना महत्त्वपूर्ण है। यह अध्याय संरचनात्मक विश्लेषण प्रक्रियाओं के कुछ प्रमुख विचारों और प्रतिमानों को रेखांकित करेगा।

मैं अनुमेय प्रतिबल अभिकल्प (Allowable Stress Design, ASD) और भार तथा प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (Load and Resistance Factor Design, LRFD) को अनेक निदर्शी उदाहरणों सहित संक्षेप में प्रस्तुत करूँगा। इसके अतिरिक्त निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी (Performance Based Engineering, PBE) को संक्षेप में रेखांकित किया जाएगा, यद्यपि आगे के अध्यायों में उसका विस्तृत विवेचन होगा।

यह अध्याय आगे प्रस्तुत संरचनाओं के अरैखिक अनुभागीय विश्लेषण (अध्याय 56) के लिए विशेष रूप से प्रासंगिक है, जहाँ विश्लेषण और अभिकल्प का घनिष्ठ अंतर्गुंफन आवश्यक है।

36.1 परिचय 1357
36.1.1 विश्लेषण और अभिकल्प: एक पुनरावर्ती प्रक्रिया 1357
36.1.2 सुरक्षा 1359
36.2 अनुमेय प्रतिबल अभिकल्प (ASD) . . . 1360
36.2.1 उदाहरण 36.1: ASD: आनमन . 1361
36.3 भार और प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) 1361
36.4 LRFD-आधारित अभिकल्प संहिताओं के उदाहरण 1364
36.4.1 अनुप्रयोग: R/C धरन अनुभागों का सुघट्य सामर्थ्य 1365
36.4.2 अनुप्रयोग: R/C स्तंभों का सुघट्य सामर्थ्य 1374
36.4.3 पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट 1383
36.5 निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी (PBE) . 1388

36.1 परिचय

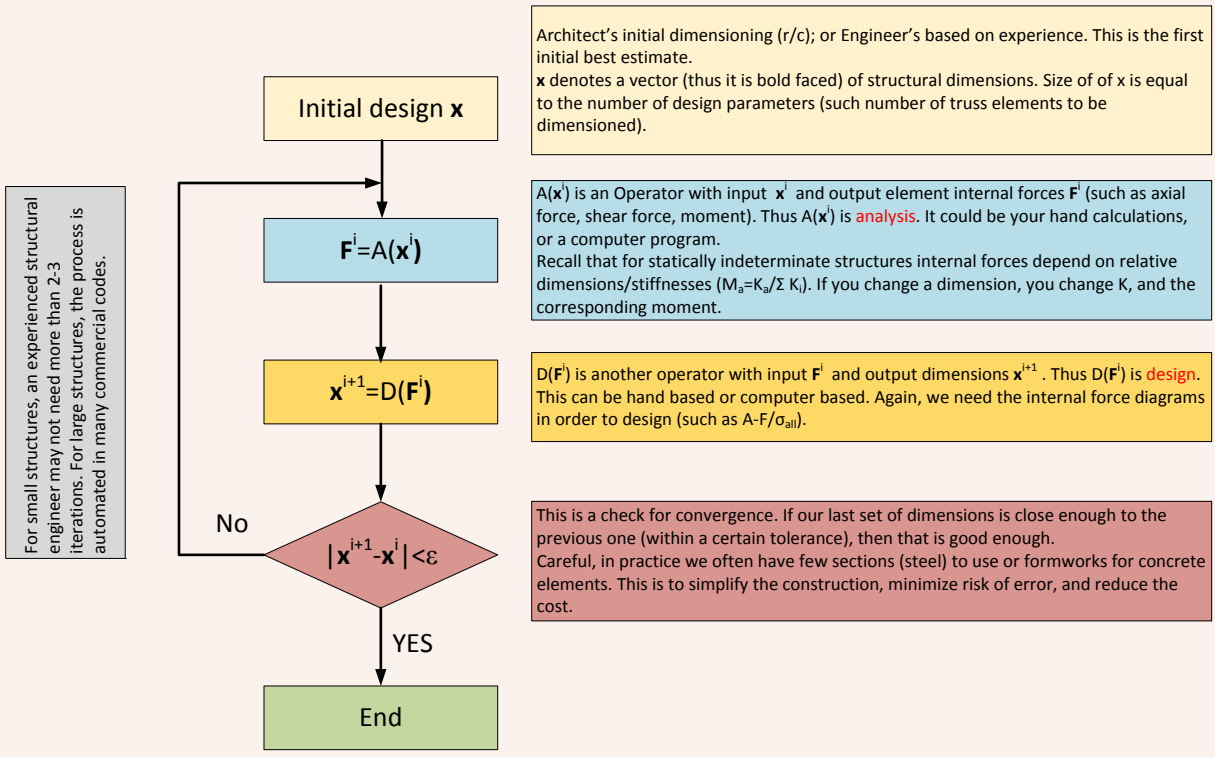
36.1.1 विश्लेषण और अभिकल्प: एक पुनरावर्ती प्रक्रिया

1 विश्लेषण स्वयं में कभी अंतिम लक्ष्य नहीं होता; उसका चरम प्रयोजन या तो नई संरचना का अभिकल्प करना (अधिकतर प्रचलित *अभिकल्प संहिताओं* के अनुसार), अथवा किसी संरचना की सुरक्षा का आकलन करना (सामान्यतः संहिताओं के क्षेत्र के बाहर) है।

2 विश्लेषण अभिकल्प अभियंताओं को स्वयं अभिकल्प के लिए विस्थापन, प्रतिबल और बल (प्रतिक्रियाएँ) प्रदान करता है।

3 चूँकि किसी काल्पनिक अथवा प्राचलीकृत संरचना का विश्लेषण नहीं किया जा सकता, इसलिए हमें प्रारंभिक अभिकल्प से आरंभ करके विश्लेषण और जाँच करनी होती है, फिर अभिसरण प्राप्त होने तक आवश्यकतानुसार बार-बार परिष्कार करना होता है। यह प्रक्रिया चित्र 36.1 में दिखाई गई है, जो इसे दो संकारकों के रूप में संकल्पित करता है: विश्लेषण और अभिकल्प।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

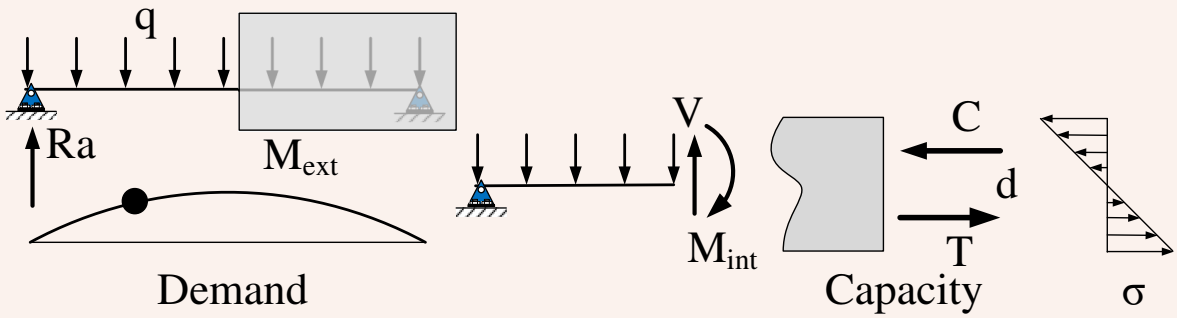


चित्र 36.1: वास्तुकार–संरचनात्मक अभियंता की पुनरावर्ती अन्योन्यक्रियाएँ

36.1.2 सुरक्षा

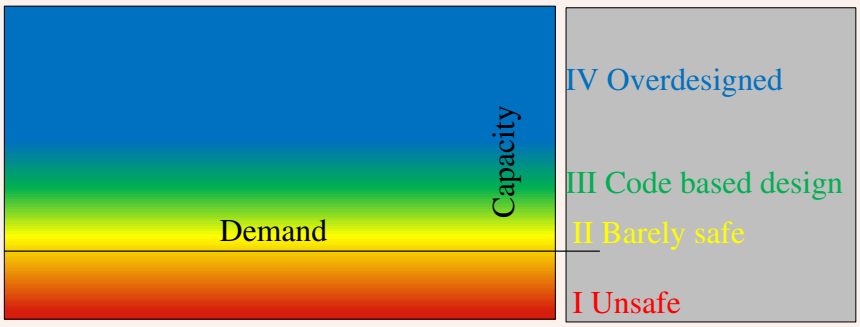
4 संरचनात्मक अभिकल्प में किसी दिए गए भार का प्रतिरोध करने की संरचना की क्षमता को C और बाह्य भार की माँग को D से निरूपित करते हैं। उनकी इकाइयाँ F, FL अथवा F/L^2 (बल, आघूर्ण, प्रतिबल) के पदों में होंगी।

5 उदाहरणार्थ, किसी धरन में माँग आघूर्ण आरेख से निर्धारित होती है, जबकि क्षमता उस आंतरिक आघूर्ण पर आधारित होती है जिसे सक्रिय किया जा सकता है (अनुप्रस्थ-काट गुणों और प्रतिबल-विकृति वक्र का फलन), चित्र 36.2।



चित्र 36.2: धरन में माँग और क्षमता

6 निःसंदेह क्षमता माँग से अधिक होनी चाहिए, किंतु मुख्य प्रश्न है कि कितनी अधिक और किसकी गणना के अनुसार। चित्र 36.3 के संदर्भ में हम 4 क्षेत्र पहचानते हैं। प्रथम क्षेत्र की निचली सीमा को छोड़कर इनमें से कोई भी स्पष्टतः परिभाषित नहीं है।



चित्र 36.3: सुरक्षा

I असुरक्षित ये संरचनाएँ अत्यंत सीमित समय तक खड़ी रह सकती हैं और पूर्ण होने से पहले भी ध्वस्त हो सकती हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

II नाममात्र सुरक्षित ये ऐसी संरचनाएँ हैं जिनका सुरक्षा गुणक केवल थोड़ा-सा एक से अधिक है। वे आधुनिक संहिताओं से पहले के निर्माण का प्रतिनिधित्व करती हैं (और हम वास्तव में उनका वास्तविक सुरक्षा गुणक नहीं जानते)। ऐसी संरचनाएँ किसी विरल भार-घटना (सामान्यतः, किंतु केवल भूकंप नहीं) के अधीन होने तक खड़ी रह सकती हैं। Parthenon को Ottomans द्वारा संचित बारूद ने नष्ट किया। Alexandria का प्रकाशस्तंभ, Rhodes का Colossus, Lisbon और Basel नगर सभी भूकंपों से नष्ट हुए। यह भी ध्यान देना चाहिए कि आधुनिक काल में भी कुछ त्रुटिपूर्ण अभिकल्पित संरचनाएँ भूकंपों से नष्ट हुई हैं (1989 के San Francisco स्थित Loma Prieta भूकंप ने अनेक सेतु और सेतुमार्ग नष्ट किए)। इनका ऊर्ध्वाधर *भारों* के लिए पूर्णतः उचित अभिकल्प हुआ हो सकता है, किंतु *पार्श्व भारों* के लिए नहीं। अतः चित्र 36.3 को ऊर्ध्वाधर और पार्श्व भारों में भेद करने के लिए परिष्कृत किया जा सकता है।

III आधुनिक संहिताओं के अनुसार सुरक्षित ये आधुनिक (उदाहरणार्थ लगभग 1960 के बाद की) अभिकल्प संहिताओं द्वारा अभिकल्पित संरचनाएँ हैं।

IV अतिअभिकल्पित ये अत्यधिक अतिअभिकल्पित संरचनाएँ हैं। इनमें आधुनिक काल में गैर-अभियंताओं द्वारा त्रुटिपूर्ण रूप से अभिकल्पित संरचनाएँ अथवा पहले के उस समय अभियंताओं द्वारा अभिकल्पित संरचनाएँ हो सकती हैं जब संरचनात्मक विश्लेषण अभी परिपक्व नहीं हुआ था। उदाहरणार्थ Empire State Building और Hoover dam अतिअभिकल्पित संरचनाओं के उदाहरण हैं।

7 आधुनिक संहिताओं ने सुरक्षा को कठोर आधार प्रदान करने का प्रयास किया है। तीन प्रमुख उपागम विशिष्ट हैं

1. अनुमेय प्रतिबल अभिकल्प
2. भार और प्रतिरोध गुणक अभिकल्प
3. निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी

प्रत्येक का संक्षेप में पृथक विवेचन किया जाएगा।

36.2 अनुमेय प्रतिबल अभिकल्प (ASD)

8 अनुमेय प्रतिबल अभिकल्प (ASD) विधि में हम सरलतः यह प्रतिबंध लगाते हैं

$$D < \frac{C}{SF}$$

जहाँ SF सुरक्षा गुणक है ($\sim 1.5 - 2$)।

9 इस उपागम में केवल क्षमता घटाई जाती है (अनिश्चितताओं के कारण); दूसरी ओर हम अंतर्निहित रूप से मानते हैं कि माँग पूर्णतः नियतात्मक है।

10 ऐतिहासिक रूप से यही अपनाई गई अभिकल्प रणनीति थी, किंतु 1970's में अगले उपागम ने इसका स्थान ले लिया।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

36.2.1 उदाहरण 36.1: ASD: आनमन

15 feet विस्तृति वाली सरलतः आलंबित धरन प्रति foot 400 pounds के एकसमान भार के अधीन है। धरन 36,000 psi पराभव प्रतिबल वाले इस्पात की है। हमें निर्धारित करना है कि जडत्व आघूर्ण $I = 80\,\text{in}^4$ और अनुभाग मापांक $S = 16\,\text{in}^3$ वाला धरन-अनुभाग 1.75 सुरक्षा गुणक को ध्यान में रखते हुए पर्याप्त है या नहीं।

सुरक्षा गुणक को ध्यान में रखते हुए अनुमेय प्रतिबल σ_{allow} है:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{\text{Safety Factor}}$$

जहाँ: $\sigma_{\text{yield}} = 36,000\,\text{psi}$ और सुरक्षा गुणक = 1.75। मान प्रतिस्थापित करने पर:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{36,000\,\text{psi}}{1.75} = 20,571.43\,\text{psi}$$

एकसमान भार वाली सरलतः आलंबित धरन के लिए अधिकतम बंकन आघूर्ण मध्य-बिंदु पर होता है और इस प्रकार दिया जाता है:

$$M_{\text{max}} = \frac{wL^2}{8}$$

जहाँ: w = 400 pounds per foot और L = 15 feet। अब अधिकतम बंकन आघूर्ण की गणना करें:

$$M_{\text{max}} = \frac{400\,\text{lb/ft} \times (15 \times 12)^2\,\text{in}^2}{8 \times 12} = \frac{400 \times 32400}{96} = 135,000\,\text{lb-in}$$

अनुमेय प्रतिबल से अधिक हुए बिना बंकन आघूर्ण का प्रतिरोध करने के लिए आवश्यक अनुभाग मापांक है:

$$S_{\text{required}} = \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{allow}}}$$

जहाँ: $\sigma_{\text{allow}} = 20,571.43\,\text{psi}$
प्रतिस्थापन करने पर

$$S_{\text{required}} = \frac{135,000\,\text{lb-in}}{20,571.43\,\text{psi}} \approx 6.56\,\text{in}^3$$

दिया गया अनुभाग मापांक $S = 16\,\text{in}^3$ है। चूँकि $S_{\text{provided}} = 16\,\text{in}^3$, $S_{\text{required}} = 6.56\,\text{in}^3$ से अधिक है, इसलिए अनुभाग पर्याप्त है।

36.3 भार और प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD)

[11] LRFD में क्षमता और माँग, दोनों को अपने-अपने प्रायिकता वितरण फलनों वाले यादृच्छिक चर माना जाता है। अतः विफलता की कोई न कोई प्रायिकता सदैव रहेगी।

[12] भार स्वयं मृत भार (DL), चल भार (LL), पवन भार (WL) आदि में विभाजित होता है। तत्पश्चात इसे $\alpha > 1$ गुणक से, (ASCE-7) (ASCE/SEI 7-16, 2017) के अनुसार, गुणा किया जाएगा और हम नाममात्र चरम (सुघट्य) प्रतिरोध पर विचार करेंगे (जिसे Φ से घटाया जाता है)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

13 α और Φ इस प्रकार निर्धारित किए जाते हैं कि विफलता की प्रायिकता किसी निश्चित मान से अधिक न हो। अतः LRFD को सामान्यतः इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$\Phi C_n \geq \Sigma \alpha_i D_i$$

उदाहरणार्थ, ACI-318 अभिकल्प संहिता में $D = 1.4DL + 1.7LL$ और आनमन के लिए $\phi = 0.9$ होगा।

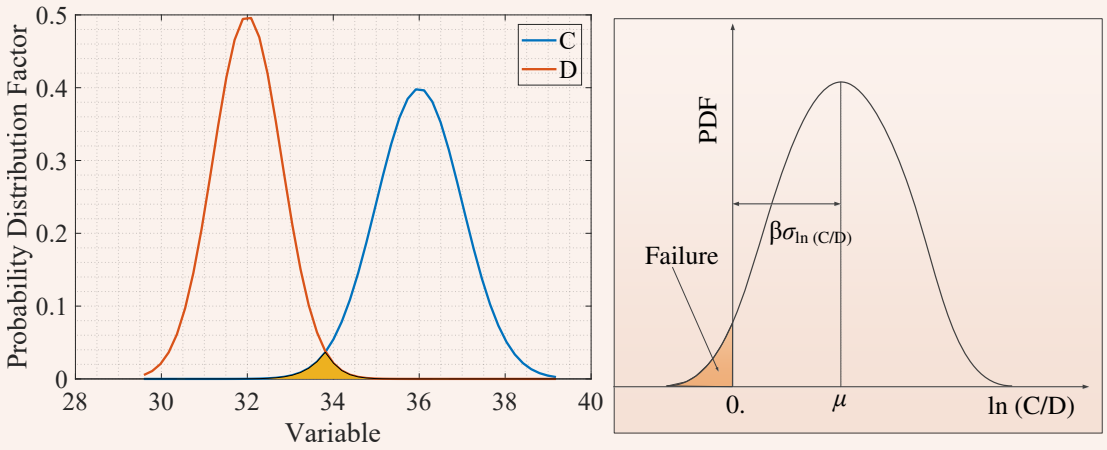
14 सीमा अवस्था सामान्यतः सुघट्य क्षमता से निर्धारित की जाती है, जिसे अरैखिक विश्लेषण के *बिना निर्धारित* किया जाता है; केवल यह मान लिया जाता है कि रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण लागू है।

15 LRFD का उद्देश्य ऐसा विश्वसनीयता सूचकांक प्राप्त करना है, §N, कि $\beta >\sim 3.5$ हो।

16 LRFD अभिकल्प प्रतिमान की सीमाओं पर §66.1 में, निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी प्रतिमान (chapter 72) की भूमिका के रूप में, चर्चा की गई है।

विश्वसनीयता सूचकांक किसी संरचना की पर्याप्तता का एक "सार्वभौमिक" संकेतक है और इसे 1) संरचना के स्वास्थ्य का आकलन करने तथा 2) संभावित उपचार के लिए लक्षित विभिन्न संरचनाओं की तुलना करने के मापदंड के रूप में उपयोग किया जा सकता है।

17 C और D, दोनों के कल्पित प्रसामान्य वितरणों के परिणामस्वरूप विफलता की कोई न कोई प्रायिकता सदैव रहेगी, चित्र 36.4a।



(a) क्षमता और माँग के प्रायिकता वितरण (b) विश्वसनीयता सूचकांक की परिभाषा

चित्र 36.4: C और D के प्रायिकता वितरण फलन

18 हम क्षमता को माँग से प्रसामान्यीकृत कर सकते हैं, चित्र 36.4b, और तथाकथित *विश्वसनीयता सूचकांक* को निम्नलिखित दो उपागमों में से किसी एक द्वारा परिभाषित कर सकते हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

उपागम I

$$
\begin{aligned}
M &= C - D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \\
\sigma_M &= \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_C - \mu_D}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}}
\end{aligned}
$$

उपागम II

$$
\begin{aligned}
M &= \ln C - \ln D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \quad \text{First order} \\
\sigma_M &= \sqrt{\frac{\sigma_C^2}{\mu_C^2} + \frac{\sigma_D^2}{\mu_D^2}} = \sqrt{V_C^2 + V_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\ln \mu_C - \ln \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} = \frac{\ln \mu_C/\mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}}
\end{aligned}
$$

[19] विफलता के परिणामों को प्रतिबिंबित करने के लिए β का चयन किया जाता है, सारणी 36.1।

तालिका 36.1: विश्वसनीयता सूचकांक के लक्ष्य मान

भार/अवयव का प्रकार	β
AISC*	
DL + LL; अवयव	3.0
DL + LL; संयोजन	4.5
DL + LL + WL; अवयव	3.5
DL + LL +EL; अवयव	1.75
ACI	
तन्य विफलता	3-3.5
भंगुर विफलताएँ	3.5-4

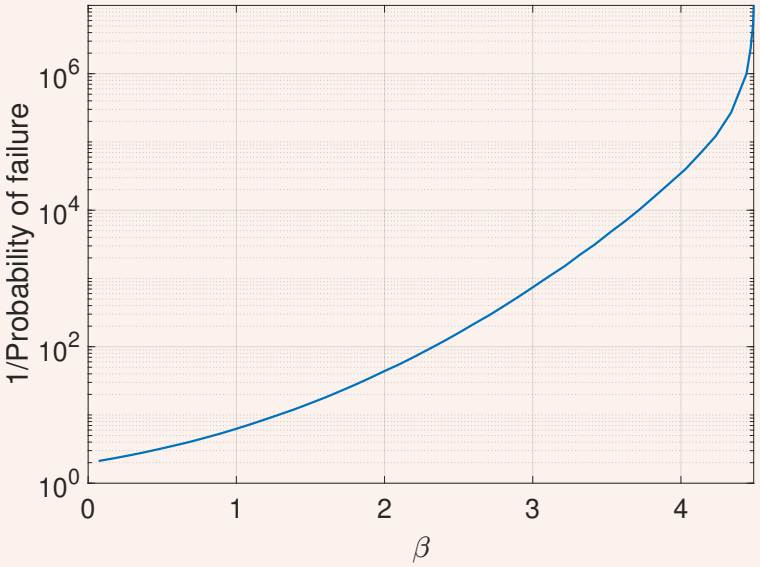
* अमेरिकन इंस्टीट्यूट ऑफ स्टील कंस्ट्रक्शन

[20] विफलता की प्रायिकता P_f, छायांकित क्षेत्रफल और वक्र के नीचे के कुल क्षेत्रफल (चित्र 36.4b) के अनुपात के बराबर है तथा $\Phi(-\beta)$ द्वारा दी जाती है, जहाँ Φ मानक प्रसामान्य संचयी प्रायिकता फलन है

$$
\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

21 अंततः, विश्वसनीयता सूचकांक को विफलता की प्रायिकता से सीधे संबद्ध किया जा सकता है, चित्र 36.5।



चित्र 36.5: β के पदों में विफलता की प्रायिकता

22 LRFD की कुछ प्रमुख सीमाएँ निम्नलिखित हैं:

1. असंगत: विश्लेषण रैखिक है, किंतु अभिकल्प सुघट्य है।
2. विफलता के निकट भार के पुनर्वितरण की उपेक्षा करता है (यद्यपि ऋणात्मक आघूर्णों को घटाकर ACI अंतर्निहित रूप से इसके कुछ भाग को ध्यान में रखता है)।
3. संकट के केवल एक स्तर पर विचार करता है: एक संरचनात्मक घटक की विफलता (न कि संपूर्ण तंत्र की); किंतु अधिक बार होने वाली घटनाओं से उत्पन्न क्षति का परिमाण-निर्धारण कैसे किया जाए?

36.4 LRFD-आधारित अभिकल्प संहिताओं के उदाहरण

23 आंतरिक बल (जैसे आघूर्ण और अपरूपण) ज्ञात हो जाने पर *अनुभागीय* घटक को स्थानीय रूप से प्रचलित *अभिकल्प संहिता* के अनुसार अभिकल्पित किया जा सकता है। अधिकांश नगर/राज्य राष्ट्रीय स्तर पर विकसित संहिताओं को स्वीकार करते हैं, जैसे अमेरिकन कंक्रीट इंस्टीट्यूट की *संरचनात्मक कंक्रीट के लिए भवन-संहिता आवश्यकताएँ* (ACI 318.2-14, 2014) अथवा अमेरिकन इंस्टीट्यूट ऑफ स्टील डिज़ाइन की संहिता (American Institute of Steel Construction, 2016)।

24 नवीनतम अनुसंधान पर आधारित संशोधनों के सर्वसम्मत निर्णयों को प्रतिबिंबित करने के लिए इन संहिताओं को नियमित रूप से प्रत्येक कुछ वर्षों में अद्यतन किया जाता है।

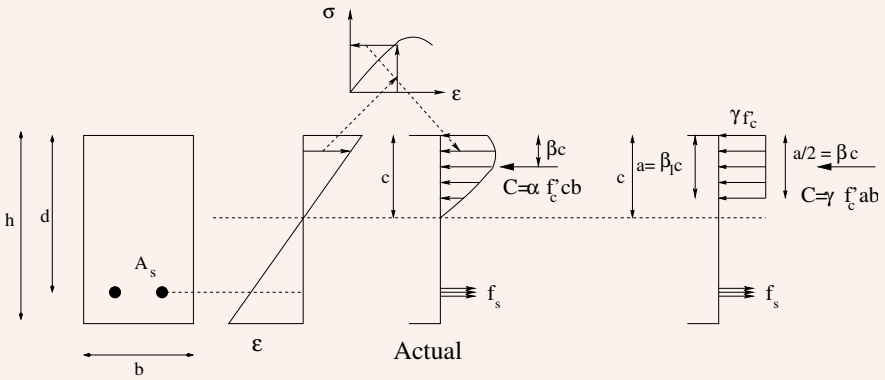
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
समीक्षाधीन प्रति

[25] अमेरिकन कंक्रीट इंस्टीट्यूट की *संरचनात्मक कंक्रीट के लिए भवन-संहिता आवश्यकताओं* के उदाहरण (ACI 318.2-14, 2014)।

9.5.1.1 प्रत्येक लागू गुणकित भार संयोजन के लिए, सभी अनुभागों पर अभिकल्प सामर्थ्य $\phi S_n \geq U$ को संतुष्ट करेगा, जिसमें ...
22.2.2 *कंक्रीट के लिए अभिकल्प मान्यताएँ*
22.2.2.1 चरम कंक्रीट संपीडन तंतु पर अधिकतम विकृति 0.003 के बराबर मानी जाएगी।
22.2.2.2 आनमनी और अक्षीय सामर्थ्य की गणनाओं में कंक्रीट के तनन सामर्थ्य की उपेक्षा की जाएगी।
22.2.2.3 कंक्रीट के संपीडन प्रतिबल और विकृति का संबंध आयताकार, समलंबाकार, परवलयिक अथवा किसी अन्य ऐसे आकार द्वारा निरूपित किया जाएगा, जिससे सामर्थ्य का पूर्वानुमान व्यापक परीक्षणों के परिणामों से पर्याप्त रूप से मेल खाए।
22.2.2.4.1 कंक्रीट प्रतिबल $0.85f'_c$ को एक तुल्य संपीडन क्षेत्र पर एकसमान रूप से वितरित माना जाएगा, जो अनुप्रस्थ काट के किनारों और उदासीन अक्ष के समांतर उस रेखा से सीमाबद्ध है जो अधिकतम संपीडन विकृति वाले तंतु से a दूरी पर स्थित है, जिसकी गणना इस प्रकार की जाती है: $a = \beta_1 c$ (22.2.2.4.1)
22.2.2.4.2 अधिकतम संपीडन विकृति वाले तंतु से उदासीन अक्ष तक की दूरी, c, उदासीन अक्ष के लंबवत मापी जाएगी।

36.4.1 अनुप्रयोग: R/C धरन अनुभागों का सुघट्य सामर्थ्य

[26] सुघट्य अनुभागीय विश्लेषण/अभिकल्प के उदाहरण के रूप में हम एक प्रबलित-कंक्रीट अनुभाग पर विचार करते हैं, चित्र 36.6। चूँकि कंक्रीट का तनन सामर्थ्य उसके संपीडन सामर्थ्य से बहुत कम है, इसलिए अनुभाग अपने उदासीन अक्ष तक पूर्णतः विदरित है। कंक्रीट संपीडन का और (केवल) इस्पात तनन का प्रतिरोध करता है।



चित्र 36.6: विदरित प्रबलित-कंक्रीट अनुभाग का सीमा-अवस्था विश्लेषण

[27] विफलता (सीमा अवस्था) पर अनुप्रस्थ विकृति वितरण रैखिक होता है (बर्नूली मान्यता), (ACI 10.2.2), और चूँकि कंक्रीट का प्रतिबल-विकृति वक्र अरैखिक है, इसलिए प्रतिबल वितरण अरैखिक होगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

28 अतः विश्लेषण के लिए हमारे पास दो विकल्प हैं:

1. $\sigma \Rightarrow$ का विश्लेषणात्मक व्यंजक, यथार्थ समाकलन
2. यथार्थ प्रतिबल आरेख को अधिक सरल और तुल्य आरेख से प्रतिस्थापित करें, (ACI 10.2.6)

अधिकांश संहिताएँ दूसरा उपागम अपनाती हैं। पहला उपागम उदाहरण 36.4.1.4 में दर्शाया जाएगा।

29 तुल्य प्रतिबल वितरण के लिए हमें केवल C & उसका स्थान, अर्थात् α और β, ज्ञात होने चाहिए।

30 हम $a = \beta_1 c$ गहराई और $\gamma f'_c$ के बराबर प्रतिबल वाला आयताकार प्रतिबल वितरण अपनाते हैं (ACI 10.2.7.1)। इस आयताकार प्रतिबल वितरण को *विहटनी प्रतिबल खंड* कहा जाता है।

$$C = \alpha f'_c bc = \gamma f'_c ab$$
$$\alpha = \frac{f_{av}}{f'_c}$$
$$a = \beta_1 c$$

अतः

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta_1}$$

किंतु परिणामी बलों का स्थान समान होना चाहिए, अतः

$$\beta_1 = 2\beta$$

31 प्रयोगों से:

f'_c (psi)	<4,000	5,000	6,000	7,000	8,000
α	.72	.68	.64	.60	.56
β	.425	.400	.375	.350	.325
$\beta_1 = 2\beta$	.85	.80	.75	.70	.65
$\gamma = \alpha/\beta_1$	0.85	0.85	0.85	0.86	0.86

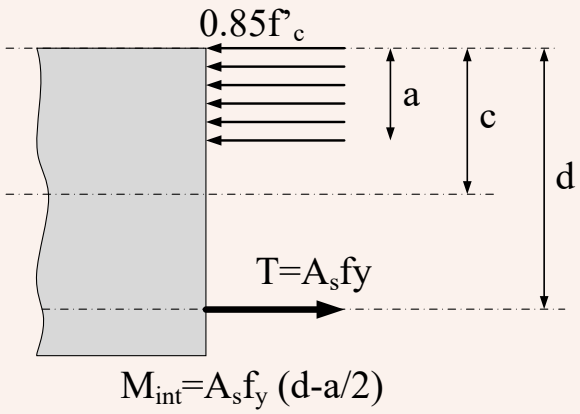
32 अतः हमें प्राप्त होता है, (ACI-318 10.2.7.3):

$$\begin{aligned} \beta_1 &= .85 && \text{if } f'_c \le 4,000 \\ &= .85 - (.05)(f'_c - 4,000)\frac{1}{1,000} && \text{if } 4,000 < f'_c < 8,000 \end{aligned}$$

33 अतः विफलता निम्नलिखित में से किसी एक प्रकार से हो सकती है

- इस्पात का पराभव: $\varepsilon_s = \varepsilon_y$; क्रमिक
- कंक्रीट का संदलन: $\varepsilon_c = .003$; आकस्मिक; **(ACI 10.3.2)**.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 36.7: विहटनी प्रतिबल खंड

आदर्शतः, विफलता के दोनों प्रकार एक साथ होने चाहिए। ऐसा तब होगा जब प्रबलन अनुपात $\rho = A_s/bd = \rho_b$ हो; इसे *संतुलित अभिकल्प* कहते हैं।

विफलता के प्रकार हम विफलता के दो संभावित प्रकार निर्धारित करते हैं:

तनन विफलता:

$$\left.\begin{aligned} f_s &= f_y \\ A_s f_s &= .85 f_c' a b = .85 f_c' b \beta_1 c \\ \rho &= \frac{A_s}{bd} \end{aligned}\right\} c = \frac{\rho f_y}{.85 f_c' \beta_1} d$$

संपीडन विफलता:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= .003 \\ \varepsilon_s &= \frac{f_s}{E_s} \\ \frac{c}{d} &= \frac{.003}{.003 + \varepsilon_s} \Rightarrow c = \frac{.003}{\frac{f_s}{E_s} + .003} d \end{aligned}$$

संतुलित अभिकल्प: तब होता है जब इस्पात का पराभव और कंक्रीट का संदलन एक साथ हों। अतः हम पिछली दोनों समीकरणों को बराबर रखते हैं

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho f_y}{.85 f_c' \beta_1} d &= \frac{.003}{\frac{f_s}{E_s} + .003} d \\ \rho &= \rho_b \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{\rho b f 2 d}{.85 f_c' \beta_1} &= \frac{.003}{\frac{f_s}{E - s} + .003} d \\ E_s &= 29,000 \text{ ksi} \end{aligned}\right\} \quad \rho_b = .85 \beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \frac{87{,}000}{87{,}000 + f_y}$$

(ACI 8.4.3)

आरोपित पराभव विफलता जो क्रमिक होती है (आकस्मिक संपीडन विफलता के विपरीत)

$$\rho < .75 \rho_b$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ACI सामर्थ्य आवश्यकताएँ

$$U = 1.4D + 1.7L \qquad \textbf{(ACI 9.2.1)}$$
$$U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W) \qquad \textbf{(ACI 9.2.2)}$$
$$M_d = M_u = \phi M_n \qquad \textbf{(ACI 9.1.1)}$$
$$\phi = .90 \qquad \textbf{(ACI 9.3.2.2)}$$

विद्यमान अभिकल्प की समीक्षा: दिए गए b, d, A_s, f'_c, f_y के लिए हम आघूर्ण क्षमता M निर्धारित करना चाहते हैं।

$$\rho_{act} = \frac{A_s}{bd}$$
$$\rho_b = (.85)\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87 + f_y}$$

- $\rho_{act} < \rho_b$: पराभव द्वारा विफलता और

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f'_c b} \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$M_d = \phi A_s f_y (d - \frac{a}{2}) \quad \Sigma M = 0$$

- $\rho_{act} > \rho_b$ की संहिता अनुमति नहीं देती; इस स्थिति में एक अतिरिक्त अज्ञात f_s होता है।

34 अब हमारे पास एक और अज्ञात f_s है और हमें एक अतिरिक्त समीकरण (विकृति आरेख से) की आवश्यकता होगी।

$$c = \frac{A_s f_s}{.85 f'_c b \beta_1} \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$\frac{c}{d} = \frac{.003}{.003 + \varepsilon_s} \qquad \text{From strain diagram}$$
$$M_d = \phi A_s f_s (d - \frac{\beta_1 c}{2}) \qquad \Sigma M = 0$$

हम पुनरावृत्ति द्वारा, अथवा प्रतिस्थापन और द्विघात समीकरण के हल द्वारा, समाधान कर सकते हैं।

अभिकल्प

35 अभिकल्प स्थितियों में हमें या तो बाह्य अभिकल्प आघूर्ण (माँग) का प्रतिरोध करने के लिए b, d और A_s निर्धारित करने होते हैं; अथवा b, d दिए होते हैं और हम A_s निर्धारित करना चाहते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I b, d और A_s अज्ञात; M_d ज्ञात; चूँकि अभिकल्प विफलता $f_s = f_y$ से आरंभ होती है

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c' b} \\ \rho = \frac{A_s}{bd} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a = \frac{\rho f_y}{0.85 f_c'} d \\ M_d = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad M_d = \Phi \underbrace{\rho f_y \left(1 - .59 \rho \frac{f_y}{f_c'}\right)}_{R} b d^2$$

जहाँ ρ अभिकल्पक द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है; अथवा

$$R = \rho f_y \left(1 - .59 \rho \frac{f_y}{f_c'}\right)$$

जो अज्ञात राशियों पर निर्भर नहीं करता। तत्पश्चात bd^2 के लिए हल करें:

$$bd^2 = \frac{M_d}{\Phi R}$$

b और d के लिए हल करें (इसके लिए दोनों में से किसी एक अथवा उनके अनुपात के विषय में मान्यता आवश्यक होगी), और तत्पश्चात

$$A_s = \rho b d$$

II b, d & M_d ज्ञात हैं और हम A_s निर्धारित करना चाहते हैं। किंतु इसका कोई आश्वासन नहीं है कि ρ_b वाला अभिकल्प प्राप्त हो सकेगा। यदि अनुभाग अत्यधिक छोटा है, तो उसमें बहुत अधिक इस्पात की आवश्यकता होगी, जिससे अति-प्रबलित अनुभाग बनेगा।

[36] इस स्थिति में हमें पुनरावृत्तिमूलक उपागम अपनाना होगा

(a) चूँकि हम नहीं जानते कि इस्पात पराभव करेगा या नहीं, इसलिए f_s का उपयोग करें।

(b) a का आरंभिक मान मान लें (एक उपयुक्त आरंभ $a = \frac{d}{5}$ है)

(c) आरंभ में मान लें कि $f_s = f_y$

(d) आघूर्णों का संतुलन जाँचें ($\Sigma M = 0$)

$$A_s = \frac{M_d}{\Phi f_s \left(d - \frac{a}{2}\right)}$$

(e) x दिशा में बलों का संतुलन जाँचें ($\Sigma F_x = 0$)

$$a = \frac{A_s f_s}{.85 f_c' b}$$

(f) f_s की मान्यता को ρ की ρ_b से तुलना करके अथवा विकृति आरेख से जाँचें

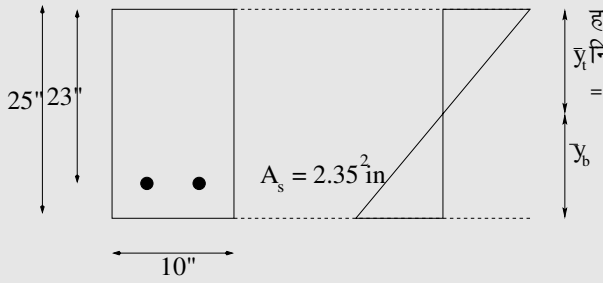
$$\frac{\varepsilon_s}{d - c} = \frac{.003}{c} \Rightarrow f_s = E_s \frac{d - c}{c} .003 < f_y$$

जहाँ $c = \frac{a}{\beta_1}$।

(g) अभिसरण प्राप्त होने तक पुनरावृत्ति करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

36.4.1.1 उदाहरण 36.2: चरम सामर्थ्य; समीक्षा



हम निम्नलिखित अनुप्रस्थ काट की चरम आघूर्ण क्षमता $\bar{y}_t$ निर्धारित करना चाहते हैं, जिसके लिए f'_c = 4,000 psi; f'_t = 475 psi; f_y = 60,000 psi; A_s = 2.35 in^2

$$\rho_{act} = \frac{A_s}{bd} = \frac{2.35}{(10)(23)} = .0102$$

$$\rho_b = .85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+f_y} = (.85)(.85)\frac{4}{60}\frac{87}{87+60} = .0285 > \rho_{act} \checkmark$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f'_c b} = \frac{(2.35)(60)}{(.85)(4)(10)} = 4.15 \text{ in}$$

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = (2.35)(60)\left(23 - \frac{4.15}{2}\right) = 2,950 \text{ k.in}$$

$$M_d = \phi M_n = 0.9(2,950) = 2,660 \text{ k.in}$$

टिप्पणी:

1. संतुलन से, $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow c = \frac{A_s f_y}{.85\beta_1 b f'_c} = \frac{(2.35)(60)}{(.85)(.85)(4)(10)} = 4.87$ in
2. वैकल्पिक समाधान:

$$M_n = \rho_{act} f_y b d^2 (1 - .59\rho_{act}\frac{f_y}{f'_c})$$

$$= A_s f_y d (1 - 59\rho_{act}\frac{f_y}{f'_c})$$

$$= (2.35)(60)(23)[1 - (.59)\frac{60}{4}(.0102)] = 2,950 \text{ k.in} = 245 \text{ k.ft}$$

$$M_d = \phi M_n = (.9)(2,950) = 2,660 \text{ k.in}$$

36.4.1.2 उदाहरण 36.3: चरम सामर्थ्य; अभिकल्प I

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

निम्नलिखित गुणों वाली R/C धरन का अभिकल्प करें: $L = 15$ ft; DL = 1.27 k/ft; LL = 2.44 k/ft; f'_c = 3,000 psi; f_y = 40 ksi; धरन के स्वभार की उपेक्षा करें; $\rho = 0.75\rho_b$ चुनें

$$w_u = 1.4(1.27) + 1.7(2.44) = 5.92 \text{ k/ft} \qquad \text{Factored load}$$

$$M_d = \frac{w_u L^2}{8} = \frac{(5.92)(15)^2}{8} = 166.5 \text{ k.ft}(12) \text{ in/ft} = 1,998 \text{ k.in}$$

$$\rho = 0.75\rho_b = (0.75)(0.85)\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+f_y}$$

$$= (0.75)(.85)^2 \frac{3}{40}\frac{87}{87+40} = .0278$$

$$R = \rho f_y\left(1 - .59\rho\frac{f_y}{f'_c}\right)$$

$$= (.0278)(40)\left(1 - (0.59)(.0278)\frac{40}{3}\right) = 0.869 \text{ psi}$$

$$bd^2 = \frac{M_d}{\phi R} = \frac{1,998}{(0.9)(0.869)} = 2,555 \text{ in}^3$$

मान लें $b = 10$ in, $d = 16$ in $\Rightarrow A_s = (.0278)(10)(16) = 4.45$ in^2 $\Rightarrow$ 3 # 11 का उपयोग करें

36.4.1.3 उदाहरण 36.4: चरम सामर्थ्य; अभिकल्प II

निम्नलिखित के लिए R/C धरन का अभिकल्प करें: $b = 11.5$ in; $d = 20$ in; $f'_c = 3$ ksi; $f_y = 40$ ksi; $M_d = 1,600$ k.in

मान लें $a = \frac{d}{5} = \frac{20}{5} = 4$ in

$$A_s = \frac{M_d}{\phi f_y(d - \frac{a}{2})} = \frac{(1,600)}{(.9)(40)(20 - \frac{4}{2})} = 2.47 \text{ in}^2$$

मान्यता जाँचें,

$$a = \frac{A_s f_y}{(.85)f'_c b} = \frac{(2.47)(40)}{(.85)(3)(11.5)} = 3.38 \text{ in}$$

अतः $a = 3.3$ in लें।

$$A_s = \frac{(1,600)}{(.9)(40)(20 - \frac{3.3}{2})} = 2.42 \text{ in}^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{(2.42)(40)}{(.85)(3)(11.5)} = 3.3 \text{ in} \checkmark$$

$$\rho_{act} = \frac{2.42}{(11.5)(20)} = .011$$

$$\rho_b = (.85)(.85)\frac{3}{40}\frac{87}{87+40} = .037$$

$$\rho_{max} = .75\rho_b = .0278 > \rho_{act} \checkmark$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

36.4.1.4 उदाहरण 36.5: यथार्थ विश्लेषण

R/C धरनों की चरम आनमनी क्षमता के लिए ACI समीकरण की वैधता पर प्रश्न उठाने वाले अभियंता के रूप में आपने कंक्रीट के लिए निम्नलिखित प्रतिबल-विकृति वक्र प्रयोग द्वारा निर्धारित किया:

$$\sigma = \frac{2\frac{f'_c}{\varepsilon_{max}}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2}$$

जहाँ f'_c, ε_{max} के अनुरूप है।

हम निम्नलिखित करना चाहते हैं

1. $b = 10"$, $d = 23"$, $f'_c = 4,000$ psi, $f_y = 60$ ksi, $\varepsilon_{max} = 0.003$ वाली R/C धरन के लिए यथार्थ संतुलित इस्पात अनुपात निर्धारित करें।
2. अनुभाग पर यथार्थ प्रतिबल वितरण का समीकरण निर्धारित करें।
3. कुल संपीडन बल C और उसका स्थान, उदासीन अक्ष के स्थान c के पदों में निर्धारित करें।
4. ACI 318 से तुलना करें।

समाधान इस प्रकार आगे बढता है

1. प्रतिबल-विकृति:
$$\sigma = \frac{2\frac{4,000}{.003}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{.003}\right)^2} = \frac{2.667\times10^6\varepsilon}{1+1.11\times10^5\varepsilon^2}$$
2. विफलता पर संदलन मान लें; अतः विकृति वितरण इस प्रकार दिया जाएगा
$$\varepsilon = \frac{0.003}{c}y$$
3. उन दोनों समीकरणों को संयोजित करें:
$$\sigma = \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}$$
4. कुल संपीडन बल इस प्रकार दिया जाता है
$$\begin{aligned} F &= \int_0^c dF = b\int_0^c \sigma dy = b\int_0^c \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy = b\frac{8,000}{c}\int_0^c \frac{y}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2}dy \\ &= 8,000\frac{b}{c}\frac{1}{2\left(\frac{1}{c}\right)^2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Bigg|_0^c = 8,000\frac{b}{c}\frac{c^2}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Bigg|_0^c \\ &= 4,000bc\ln(2) = 2,773bc \end{aligned}$$
5. संतुलन के लिए $T = C$ होना आवश्यक है
$$2,773bc = A_s f_y$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विकृति आरेख से:

$$\frac{.003}{c} = \frac{\varepsilon_y + .003}{d} \Rightarrow c = \frac{(.003)d}{\varepsilon_y + .003}$$

$$c = \frac{(.003)(23)}{\frac{60}{29{,}000} + .003} = 13.6 \text{ in}$$

6. अंतिम दोनों समीकरणों को संयोजित करने पर

$$A_s = \frac{(2{,}773)(10)(13.6)}{60{,}000} = 6.28 \text{ in}^2$$

7. आघूर्ण निर्धारित करने के लिए हमें पहले उदासीन अक्ष से मापा गया संपीडन बल का केंद्रक निर्धारित करना होगा

$$\overline{y} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{b\int y\sigma dy}{2{,}773bc} = \frac{b\int_0^c \frac{8{,}000\frac{y^2}{c}}{1+(y/c)^2}}{2{,}773bc} dy = \frac{8{,}000b}{2{,}773bc^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2} dy$$

$$= \frac{2.885}{c^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2} dy = \frac{2.885}{(13.61)^2}\left[\frac{y}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}\int_0^c \frac{dy}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}\right]$$

$$= .01557\left[yc^2 - c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}}\tan^{-1} y\sqrt{\frac{1}{c^2}}\right]\right]\Bigg|_0^c$$

$$= .01557\left[c^3 - c^3\tan^{-1}(1)\right] = (.01557)(13.61)^3(1-\tan^{-1}(1)) = 8.43 \text{ in}$$

8. इसके बाद हम आघूर्ण के लिए हल करते हैं

$$M = A_s f_y(d - c + \overline{y}) = (6.28)(60)(23 - 13.61 - 8.43) = 6{,}713 \text{ k.in}$$

9. ACI संहिता का उपयोग करके

$$\rho_b = .85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+60} = (.85)^2\frac{4}{60}\frac{87}{147} = .0285$$

$$A_s = \rho_b bd = (.0285)(10)(23) = 6.55 \text{ in}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85f'cb} = \frac{(6.55)(60)}{(.85)(4)(10)} = 11.57 \text{ in}$$

$$M = A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = (6.55)(60)\left(23 - \frac{11.57}{2}\right) = 6{,}765 \text{ k.in}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{11.57}{.85} = 13.61$$

10. सारांश

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

	यथार्थ	ACI
A_s	6.28	6.55
c	13.6	13.6
$\overline{y}'$	5.18	5.78
M	6,713	6,765

36.4.2 अनुप्रयोग: R/C स्तंभों का सुघट्य सामर्थ्य

34 स्तंभ, अथवा अधिक शुद्ध रूप में धरन-स्तंभ, ऐसी धरनें हैं जिनमें अक्षीय बल और आरोपित बल की उत्केंद्रता से उत्पन्न आनमन, दोनों होते हैं।

35 अक्षीय बल की उत्केंद्रता के आधार पर विफलता के तीन संभावित प्रकार होंगे, चित्र 36.8a

1. भार की बड़ी उत्केंद्रता ⇒ इस्पात के पराभव से विफलता (मूलतः एक धरन)।
2. भार की छोटी उत्केंद्रता ⇒ कंक्रीट के संदलन से विफलता।
3. संतुलित अवस्था, जिसमें कंक्रीट का संदलन और इस्पात का पराभव एक साथ होते हैं।

36 चूँकि विफलता आनमन और अक्षीय बल के संयोजन से होती है, इसलिए एक विफलता आवरण अथवा "पराभव अवस्था" (§55.2 में चर्चित अवस्थाओं के समान) प्राप्त होगी, जिसे इस स्थिति में *अन्योन्यक्रिया आरेख* कहते हैं।

37 अन्योन्यक्रिया आरेख चित्र 36.8a में दर्शाया गया है और विफलता के तीनों प्रकारों का विस्तार से अध्ययन करने के बाद इसे सर्वोत्तम रूप से समझा जा सकेगा।

38 मान्यताएँ $A'_s = A_s; \rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{A'_s}{bd}; f'_s = f_y$

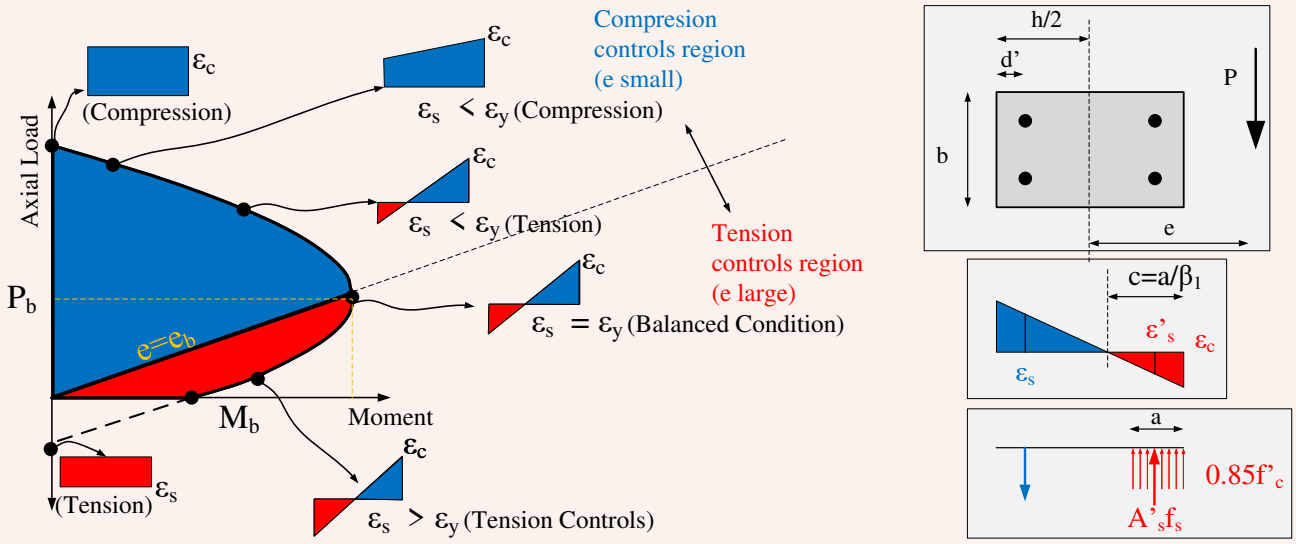
संतुलित अवस्था

39 एक विशिष्ट उत्केंद्रता $e_b = \frac{M}{P}$ ऐसी होती है कि विफलता इस्पात के पराभव और कंक्रीट के संदलन के एक साथ होने से आरंभ होगी।

40 विकृति आरेख (और कंक्रीट तथा इस्पात की विकृतियों की संगतता) से, चित्र 36.8b

$$\varepsilon_c = .003$$
$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$$
$$c = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} d = \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) अन्योन्यक्रिया आरेख (b) मुक्त-पिंड आरेख

चित्र 36.8: स्तंभ के मुक्त-पिंड और अन्योन्यक्रिया आरेख

जिससे प्राप्त होता है

$$\frac{\varepsilon'_s}{c-d'} = \frac{\varepsilon_c}{c}$$
$$\Rightarrow \varepsilon'_s = \frac{c-d'}{c}\varepsilon_c$$

अतः संपीडन इस्पात पराभव करेगा (अर्थात् $\varepsilon'_s = \varepsilon_y$) जब $\varepsilon_c = .003$ हो

41 संतुलन से

$$\left.\begin{array}{rl} P_n &= .85f'_c ab + A'_s f'_y - A_s f_s \\ f_s &= f_y \\ A_s &= A'_s \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} a &= \frac{P_n}{.85f'_c b} \\ a &= \beta_1 c_b \\ c_b &= \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s}+.003} d \end{array}\right\} P_{n,b} = .85\beta_1 f'_c bd \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s}+.003}$$

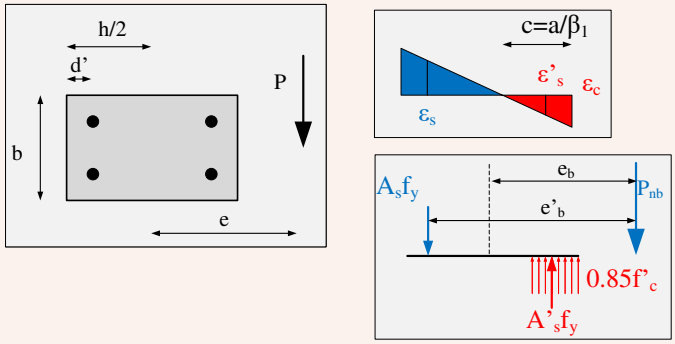
अथवा

$$P_{nb} = .85\beta_1 f'_c bd \frac{87,000}{f_y + 87,000}$$

42 M_{nb} प्राप्त करने के लिए हम आंतरिक बलों का आघूर्ण तनन इस्पात A_s के केंद्रक के परितः लेते हैं; यह बाह्य आरोपित आघूर्ण के बराबर और विपरीत होना चाहिए, चित्र 36.9।

$$M_{nb} = \underbrace{P_{nb}e_b}_{M_{ext}} = \underbrace{.85f'_c ab(d-\frac{a}{2}) + A'_s f_y(d-d')}_{M_{int}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 36.9: स्तंभ का मुक्त-पिंड, संतुलित अवस्था

43 टिप्पणी: सममित स्तंभों में $A_s f_y$ और $A'_s f_y$ के कारण आंतरिक आघूर्ण एक-दूसरे को निरस्त कर देते हैं।

तनन विफलता

44 हमें दो स्थितियों पर विचार करना चाहिए

स्थिति I, e ज्ञात है और $e > e_b$

इस स्थिति में a और P_n अज्ञात हैं, और f_y के कारण A_s में विफलता आरंभ होने के लिए $e > e_b$ होना चाहिए।

अब भी $A_s f_y = A'_s f_y$ मान सकते हैं

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_n = .85 f'_c ab \Rightarrow a = \frac{P_n}{.85 f'_c b}$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow P_n e' = P_n(d - \frac{a}{2}) + A'_s f'_y (d - d')$$

पुनः, दो उपागम हैं

1. उन दोनों समीकरणों को पुनरावृत्तिमूलक रूप से हल करें
   (a) a मान लें $(a < \frac{h}{2})$
   (b) विकृति संगतता से, यदि लागू हो, केंद्रीय इस्पात प्रतिबल f_{sc} के लिए हल करें।
   (c) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$ से P_n के लिए हल करें
   (d) तनन प्रबलन के परितः $\Sigma M = 0, \Rightarrow$ से P_n के लिए हल करें
   (e) यदि दोनों P_n मानों में अभिसरण न हो, तो a के लिए $\Sigma F_y = 0$ से हल करते हुए पुनरावृत्ति करें

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. उन्हें P_n में एक द्विघात समीकरण में संयोजित करें

$$P_n = .85 f_c' b d \left\{ -\rho - (\frac{e'}{d} - 1) + \sqrt{\left(1 - \frac{e'}{d}\right)^2 + 2\rho \left[\mu\left(1 - \frac{d'}{d}\right) + \frac{e'}{d}\right]} \right\}$$

जहाँ

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{A_s'}{bd}$$
$$\mu = \frac{f_y}{.85 f_c'}$$

स्थिति II: c **ज्ञात है और** $c < c_b$**;** P_n **अज्ञात है**
इस स्थिति में हमारे पास केवल दो अज्ञात, P_n और f_s', हैं।

$$\begin{aligned}
a &= \beta_1 c \\
f_s &\overset{\text{def}}{=} f_y \\
f_s' &= \varepsilon_u E_s \frac{c - d'}{c} \quad \leq f_y \\
C &= 0.85 f_c' a b \\
P_n &= C + A_s' f_s' - A_s f_y \\
M_n &= C\frac{h - a}{2} + A_s' f_s' \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2}\right) \\
e &= \frac{M_n}{P_n}
\end{aligned}$$

ध्यान दें कि अन्योन्यक्रिया आरेख निर्धारित करते समय इस उपागम को वरीयता दी जाती है।

संपीडन विफलता

45 पुनः, हम दो भिन्न स्थितियों पर विचार करते हैं:

स्थिति I: e **ज्ञात है और** $e < e_b$**;** P_n**,** a **और** f_s **अज्ञात हैं**
यदि $e' < e_b' \Rightarrow \varepsilon_u = .003$ हो तो संपीडन विफलता होती है; $f_s' = f_y$ और $f_s < f_y$ मान लें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ज्यामिति से

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{\varepsilon_u}{\frac{f_s}{E_s} + \varepsilon_u} d \\
\Rightarrow f_s &= E_s \varepsilon_u \frac{d-c}{c} \\
&= E_s \varepsilon_u \frac{d - \frac{a}{\beta_1}}{\frac{a}{\beta_1}} \\
P_n &= .85 f'_c ab + A'_s f_y - A_s f_s \\
P_n e' &= .85 f'_c ab (d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d')
\end{aligned}
$$

इससे P_n में एक घन समीकरण प्राप्त होगा, जिसे विश्लेषणात्मक रूप से अथवा पुनरावृत्ति द्वारा हल किया जा सकता है।

1. a मान लें ($a \simeq h$)
2. तनन प्रबलन के परितः $\Sigma M = 0$ के लिए हल करें & P_n के लिए हल करें
3. विकृति संगतता से f_s के लिए हल करें
4. जाँचें कि $\Sigma F_y = 0$ है & a के लिए हल करें
5. यदि $a^{i+1} \neq a^i$ हो तो चरण 2 पर जाएँ

स्थिति II: c ज्ञात है और $c > c_b$; f_s, f'_s और P_n अज्ञात हैं
इस स्थिति में

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_1 c \\
f_s &= \varepsilon_c E_s \frac{d-c}{c} \quad \leq f_y \\
f'_s &= \varepsilon_c E_s \frac{c-d'}{c} \quad \leq f_y \\
C &= 0.85 f'_c ab \\
P_n &= C + A_s f_s + A'_s f'_s \\
M_n &= C \frac{h-a}{2} + A'_s f'_s \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2}\right)
\end{aligned}
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

36.4.2.1 उदाहरण 36.6: R/C स्तंभ, c ज्ञात

12 गुणा 20 in. के स्तंभ के प्रत्येक कोने पर एक No. 4 छड, जिसका क्षेत्रफल 1.0 in^2 है, लगाकर प्रबलन किया गया है। $f'_c = 3.5$ ksi, $f_y = 50$ ksi, $d' = 2.5$ in। निर्धारित करें: 1) P_b और M_b; 2) $c = 5$ in के लिए भार और आघूर्ण; 3) $c = 18$ in के लिए भार और आघूर्ण; 4) अन्योन्यक्रिया आरेख आलेखित करें।

संतुलित अवस्थाएँ इसे पहले व्युत्पन्न समीकरण में केवल प्रतिस्थापन करने के स्थान पर मूलभूत समीकरणों का पुनरवलोकन करके व्युत्पन्न किया गया है।

$$d = h - d' = 20 - 2.5 = 17.5 \text{ in}$$

$$c_b = \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d = \frac{.003}{\frac{50}{29{,}000} + .003} 17.5 = 11.1 \text{ in}$$

$$a = \beta_1 c_b = (0.85)(11.1) = 9.44 \text{ in}$$

$$f_s \overset{\text{def}}{=} f_y = 50 \text{ ksi}$$

$$f'_s = E_s \frac{c - d'}{c} \varepsilon_c = (29{,}000)(\frac{11.1 - 2.5}{11.1}(0.003) = 67.4 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f'_s = 50 \text{ ksi}$$

$$C = 0.85 f'_c ab = (0.85)(3.5)(9.44)(12) = 337 \text{ k}$$

$$P_{nb} = C + A_s f_s - A'_s f_s = 337 + (2.0)(50) + (2.0)(-50) = 337 \text{ k}$$

$$M_{nb} = .85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d')$$

$$= 337 \left(17.5 - \frac{9.44}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 5{,}807 \text{ k.in} = 484 \text{ k.ft}$$

$$e_b = \frac{5{,}807}{337} = 17.23 \text{ in}$$

तनन विफलता, $c = 5$ in

$$f_s \overset{\text{def}}{=} f_y = 50 \text{ ksi}$$

$$f'_s = \varepsilon_c E_s \frac{c - d'}{c} \leq f_y$$

$$= (0.003)(29{,}000)\frac{5.0 - 2.5}{5.0} = 43.5 \text{ ksi}$$

$$a = \beta_1 c = 0.85(5.0) = 4.25 \text{ in}$$

$$C = 0.85 f'_c ab$$

$$= (0.85)(3.5)(4.25)(12) = 152 \text{ k}$$

$$P_n = C + A'_s f'_s - A_s f_y$$

$$= 152 + (2.0)(43.5) - (2.0)(50) = 139 \text{ k}$$

$$M_n = .85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d')$$

$$= 152 \left(17.5 - \frac{4.25}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 3{,}638 \text{ k.in} = 303 \text{ k.ft}$$

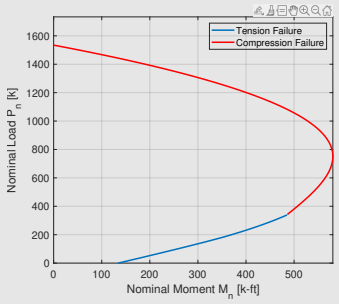
$$e = \frac{3{,}638}{139} = 26.3 \text{ in}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संपीडन विफलता, $c = 18$ in

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_1 c = 0.85(18) = 15.3 \text{ in} \\
f_s &= \varepsilon_c E_s \frac{d-c}{c} \quad \leq f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{17.5-18.0}{18.0} = -2.42 \text{ ksi} \quad A_s \text{ संपीडन में है} \\
f'_s &= \varepsilon_c E_s \frac{c-d'}{c} \quad \leq f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{18.0-2.5}{18.0} = 75 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f'_s = 50 \text{ ksi} \\
C &= 0.85 f'_c ab = (0.85)(3.5)(15.3)(12) = 546 \text{ k} \\
P_n &= C + A'_s f'_s - A_s f_s \\
&= 546 + (2.0)(50) - (-2.42)(2) = 650 \text{ k} \\
M_n &= .85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d') \\
&= 546\left(17.5 - \frac{15.3}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5-2.5) = 6,880 \text{ k.in} = 573 \text{ k.ft} \\
e &= \frac{5,809}{650} = 17.2 \text{ in}
\end{aligned}
$$

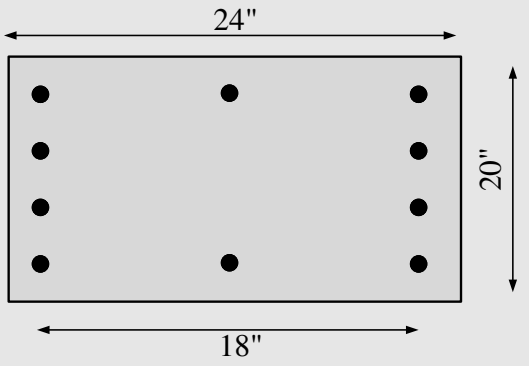
अन्योन्यक्रिया आरेख MATLAB®सूची परिशिष्ट I.2.13 में दी गई है।



36.4.2.2 उदाहरण 36.7: R/C स्तंभ, e ज्ञात

निम्नलिखित स्तंभ के लिए e_b, P_b, M_b; P_n और M_n, जब $e = 0.1h$ और $e = h$ हों, निर्धारित करें। $f'_c = 3,000$ psi और $f_y = 40,000$ psi। प्रत्येक छड़ का क्षेत्रफल 1.56 in^2 है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



संतुलित अवस्था:

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{40}{29,000} = .001379$$
$$c_b = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} d = \frac{.003}{.003 + .001379}.003 = 14.4 \text{ in}$$
$$a = \beta_1 c_b = (.85)(14.4) = 12.2 \text{ in}$$
$$C_c = .85 f'_c ab = (.85)(3)(12.2)(20) = 624 \text{ k}$$
$$\varepsilon_{sc} = \frac{c - h/2}{c}\varepsilon_u = \frac{14.4 - 12}{14.4}.003 = .0005$$
$$f_{sc} = (29,000)(.0005) = 15 \text{ ksi} \quad \text{center bars}$$
$$C_s = (.0005)(29,000)(2)(1.56) = 46.8 \text{ k}$$
$$P_{nb} = 624 + 46.8 = 670.8 \text{ k}$$

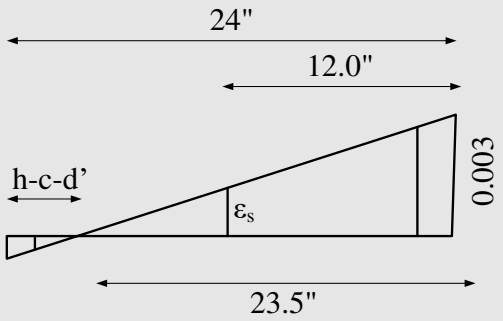
ध्यान दें कि संपीडन इस्पात पराभव कर रहा है क्योंकि $d' > 2"$ और $c > 6"$ हैं (जैसा पहले सिद्ध किया गया है)।

अनुभाग के केंद्रक के परितः आघूर्ण लेने पर

$$M_{nb} = P_{nb} e$$
$$= .85 f'_c ab \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2}\right) + A_s f_y \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A'_s f_y \left(\frac{h}{2} - d'\right)$$
$$= (.85)(3)(12.2)(20)\left(12 - \frac{12.2}{2}\right) + 4(1.56)(9)(40) + 4(1.56)(40 - .85 \times 3)(12 - 3)$$
$$= 3,671 + 2,246 + 2,246$$
$$= 8,164 \text{ k.in}; 680 \text{ k.ft}$$
$$e_b = \frac{8,164}{670.8} = 12.2 \text{ in}$$

e= .1 h $e = (.1)(24) = 2.4$ in $< e_b \Rightarrow$ संपीडन द्वारा विफलता। P_n, a और f_s अज्ञात हैं। उपलब्ध समीकरण: 1) $\Sigma F = 0$; 2) $\Sigma M = 0$; और 3) विकृति आरेख; पुनरावृत्तियों द्वारा हल करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



1. $a = 20$ in मान लें

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{20}{.85} = 23.5 \text{ in}$$

2. केंद्रीय इस्पात के लिए (ज्यामिति से)

$$\frac{\varepsilon_{sc}}{c - \frac{h}{2}} = \frac{.003}{c}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{sc} = \frac{c - \frac{h}{2}}{c}.003$$

$$f_{sc} = E_s \varepsilon_{sc}$$

$$= E_s \frac{c - \frac{h}{2}}{c}.003$$

$$= 29,000 \frac{23.5 - 12}{23.5}.003 = 42.5 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f_{sc} = f_y$$

3. तनन इस्पात छड के केंद्रक के परितः आघूर्ण लें

$$P_n e' = 0.85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (h - 2d') + A_{sc} f_y (\frac{h}{2} - d')$$

$$P_n(9 + 2.4) = (.85)(3)(20)(20)(21 - \frac{20}{2}) + 4(1.56)(40)(24 - 6) + 2(1.56)(40)(9)$$

$$= 11,220 + 4,493 + 259.7$$

$$\Rightarrow P_n = 1,476 \text{ k}$$

4. तनन छड में ε_s ज्ञात करें (विकृति आरेख से)

$$\frac{\varepsilon_s}{h - d' - 23.5} = \frac{.003}{c}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_s = \frac{.003}{23.5}(24 - 3 - 23.5)$$

$$= -.000319$$

$$f_s = E\varepsilon_s = (29,000)(0.000319) = 9.25 \text{ ksi}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5. $\Sigma F = 0$ लेकर a की मान्यता जाँचें

$$\begin{aligned} P_n &= 0.85 f'_c ab + A'_s f_y + A_{sc} f_{sc} + A_s f_y \\ 1,476 \text{ k} &= (.85)(3)(a)(20) + (4)(1.56)(40) + (2)(1.56)(40) + (4)(1.56)(9.25) \\ 1,476 &= 51a + 432.1 \\ \Rightarrow a &= 20.4 \text{ in} \checkmark \\ P_n &= 1,476 \text{ k} \\ M_n &= (1,476)(2.4) = 3,542 \text{ k.in} = 295 \text{ k.ft} \end{aligned}$$

e=h 1. इस स्थिति में $e = 24 \text{ in} > e_b \Rightarrow$ तनन द्वारा विफलता होती है। P_n और a अज्ञात हैं। हमारे पास दो समीकरण हैं: 1) $\Sigma F = 0$, और 2) $\Sigma M = 0$।

2. मान लें $a = 7.9 \text{ in} \Rightarrow c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{7.9}{.85} = 9.3 \text{ in}$

3. केंद्रक पर इस्पात प्रतिबल

$$\begin{aligned} \frac{c}{.003} &= \frac{12 - c}{\varepsilon_{sc}} \\ \Rightarrow \varepsilon_{sc} &= \frac{12 - 9.3}{9.3}.003 = .00087 \\ \Rightarrow f_{sc} &= (29,000)(0.00087) = 25.3 \text{ ksi} \end{aligned}$$

4. पुनरावृत्ति करें

$$\begin{aligned} \Sigma F = 0 \Rightarrow P_n &= (.85) f'_c ab + A_{sc} f_{sc} \\ &= (.85)(3)(7.9)(20) - 2(1.56)(25.3) \\ &= 403 - 79 = 324 \text{ k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M = 0 \Rightarrow P_n(e + h/2 - d') &= .85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d') - A_{sc} f_{sc} (\frac{d - d'}{2}) \\ P_n(24 + 9) &= (.85)(3)(7.9)(20)(21 - \frac{7.9}{2}) + 4(1.56)(40)(21 - 3) \\ &\quad + 2(1.56)(25.3)(9) \\ P_n(33) &= 6,870 + 4,493 - 710 = 10,653 \text{ k.in} \\ \Rightarrow P_n &= 323 \text{ k} \checkmark \end{aligned}$$

5. M_n निर्धारित करें

$$M_n = P_n e = (323)(24) = 7,752 \text{ k.in} = 646 \text{ k.ft}$$

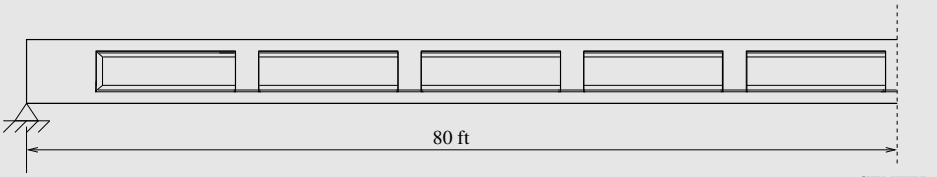
36.4.3 पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

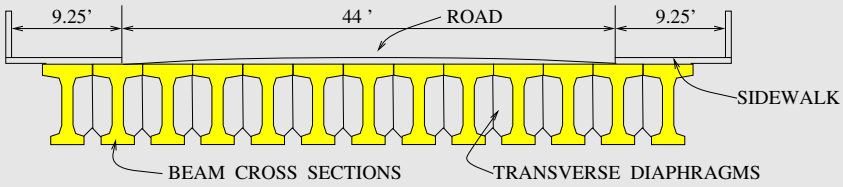
36.4.3.1 उदाहरण 36.8: प्रकरण अध्ययन: वॉलनट लेन ब्रिज

निम्नलिखित खंड Billington, 1983 *Structural Studies* से पुनरुत्पादित किया गया है।

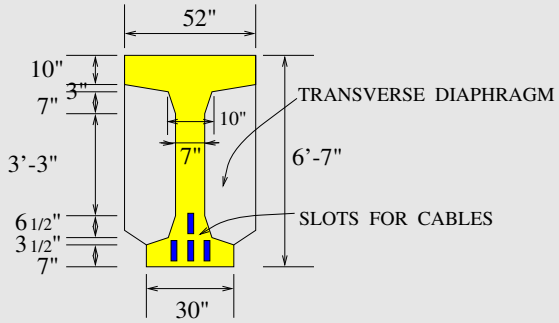
ऐतिहासिक वॉलनट लेन ब्रिज (USA का पहला प्रमुख पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट सेतु) तीन विस्तृतियों से बना है: दो पार्श्व विस्तृतियाँ, प्रत्येक 74 ft लंबी, और 160 feet लंबी मध्य विस्तृति। तेरह पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट धरनें साथ-साथ रखी गई हैं, जिनसे 44 feet कुल चौडाई वाला मार्ग और 9.25 feet चौडे दो पदपथ बनते हैं। धरनों के बीच, और उनके साथ ही ढाले गए, अनुप्रस्थ दृढकारी हैं जो धरनों को पार्श्वतः जोडते हैं।



ELEVATION OF BEAM HALF



CROSS - SECTION OF BRIDGE

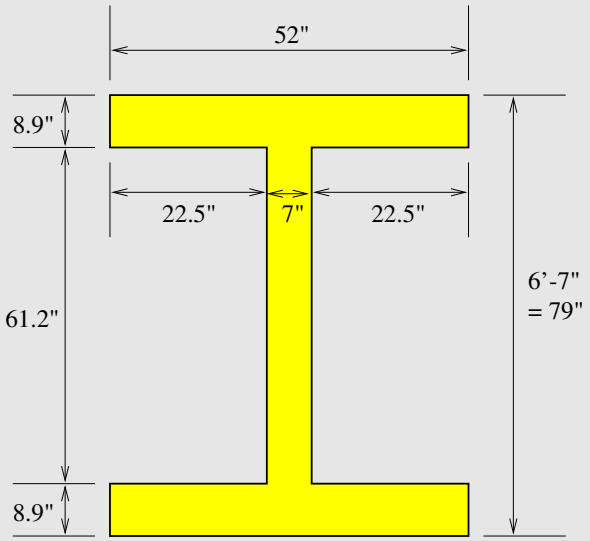


CROSS - SECTION OF BEAM

अनुप्रस्थ काट के गुण

धरन का अनुप्रस्थ काट नीचे दर्शाया गया है और इसे सरलीकृत किया गया है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



SIMPLIFIED CROSS - SECTION OF BEAM

$$A_c = 2(8.9)(52) + (7)(61.2) = 1,354 \text{ in}^2$$

$$I = 2\left[\frac{(52)(8.9)^3}{12} + (52)(8.9)\left(\frac{79}{2} - \frac{8.9}{2}\right)^2\right] + \frac{(7)(61.2)^3}{12}$$

$$== 1,277 \times 10^3 \text{ in}^4$$

$$c_1 = c_2 = \frac{h}{2} = \frac{79}{2} = 39.5 \text{ in}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{I}{c} = \frac{1,277 \times 10^3}{39.5} = 32,329 \text{ in}^3$$

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{1,277 \times 10^3}{1,354} = 943. \text{ in}^2$$

पूर्वप्रतिबलन

प्रत्येक धरन को दो मध्य परवलयिक केबलों और फ्लैंजों के साथ दो बाहरी कृषैतिज केबलों द्वारा पूर्वप्रतिबलित किया गया है। चारों की मध्य-विस्तृति पर उत्केंद्रता लगभग समान, 2.65 ft अथवा 31.8 inch, है।

प्रत्येक पूर्वप्रतिबलन केबल 64 तारों से बनी है, जिनमें से प्रत्येक का व्यास 0.27 inches है। अतः पूर्वप्रतिबलन इस्पात का कुल कृषेत्रफल इस प्रकार दिया जाता है:

$$A_{wire} = \pi(d/2)^2 = 3.14(\frac{0.276 \text{ in}}{2})^2 = 0.0598 \text{ in}^2$$

$$A_{cable} = 64(0.0598) \text{ in}^2 = 3.83 \text{ in}^2$$

$$A_{total} = 4(3.83) \text{ in}^2 = 15.32 \text{ in}^2$$

उपयोग किए गए इस्पात का चरम तनन सामर्थ्य 247 ksi है, जबकि केबलों को केवल 131 ksi तक प्रतिबलित किया गया है; अतः आरंभिक पूर्वप्रतिबलन बल P_i बराबर है

$$P_i = (131) \text{ ksi}(15.32) \text{ in}^2 = 2,000 \text{ k}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हानियाँ 13% बताई गई हैं; अतः प्रभावी बल है

$$P_e = (1 - 0.13)(2,000)\ \text{k} = 1,740\ \text{k}$$

भार

धरन का स्वभार $q_0 = 1.72$ k/ft है। कंक्रीट मार्ग (घनत्व=.15 k/ ft^3) की मोटाई 0.45 feet है। अतः 44 foot चौड़ाई के लिए एक धरन पर कुल भार है

$$q_{r,tot} = \frac{1}{13}(44)\ \text{ft}(0.45)\ \text{ft}(0.15)\ \text{k/ ft}^3 = 0.23\ \text{k/ft}$$

इसी प्रकार, 9.25 feet चौड़े और 0.6 feet मोटे पदपथों के लिए:

$$q_{s,tot} = \frac{1}{13}(2)(9.25)\ \text{ft}(0.60)\ \text{ft}(0.15)\ \text{k/ ft}^3 = 0.13\ \text{k/ft}$$

ध्यान दें कि पार्श्व डायाफ्रामों के कारण भार को 13 धरनों पर समान रूप से वितरित किया जा सकता है।

कुल मृत भार है

$$q_{DL} = 0.23 + 0.13 = 0.36\ \text{k/ft}$$

चल भार यातायात से उत्पन्न होता है और इसका आकलन 94 psf किया गया है; अतः 62.5 feet चौड़ाई पर इससे निम्नलिखित एकसमान चल भार प्राप्त होता है

$$w_{LL} = \frac{1}{13}(0.094)\ \text{k/}ft^2(62.5)\ \text{ft} = 0.45\ \text{k/ft}$$

अंततः, प्रति धरन संयुक्त मृत और चल भार है

$$w_{DL+LL} = 0.36 + 0.45 = 0.81\ \text{k/ft}$$

आनमनी प्रतिबल

1. केवल पूर्वप्रतिबलन बल, P_i

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) \\ &= -\frac{(2\times 10^6)}{1,354}\left(1 - \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) = 490.\ \text{psi} \\ f_2 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) \\ &= -\frac{(2\times 10^6)}{1,354}\left(1 + \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) = -3,445.\ \text{psi} \end{aligned}$$

2. P_i और धरन के स्वभार का आघूर्ण M_0 (जिसे उस क्षण से ध्यान में रखना होता है जब पूर्वप्रतिबलन के कारण धरन में ऊपर की ओर वक्रता आती है)

$$M_0 = \frac{(1.72)(160)^2}{8} = 5,504\ \text{k.ft}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः आनमनी प्रतिबल बराबर होंगे:

$$f_{1,2}^{w_0} = \mp\frac{M_0}{S_{1,2}} = \mp\frac{(5,50.4)(12,000)}{943.} = \mp 2,043 \text{ psi}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1-\frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_0}{S_1} \\
&= 490 - 2,043 = -1,553 \text{ psi} \\
f_{ti} &= 3\sqrt{f'_c} = +190\checkmark \\
f_2 &= \frac{P_i}{A_c}\left(1+\frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_0}{S_2} \\
&= -3,445 + 2,043 = -1,402. \text{ psi} \\
f_{ci} &= .6f'_c = -2,400\checkmark
\end{aligned}$$

3. P_e और M_0। यदि हानियाँ 13% हों, तो प्रभावी बल P_e, $(1-0.13)(2\times10^6) = 1.74\times10^6$ lbs के बराबर है

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{P_e}{A_c}\left(1-\frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_0}{S_1} \\
&= -\frac{1.74\times10^6}{1,354}\left(1-\frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) - 2,043. = -1,616 \text{ psi} \\
f_2 &= \frac{P_e}{A_c}\left(1+\frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_0}{S_2} \\
&= -\frac{1.74\times10^6}{1,354}\left(1+\frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) + 2,043. = -954. \text{ psi}
\end{aligned}$$

4. P_e और $M_0 + M_{DL} + M_{LL}$

$$M_{DL} + M_{LL} = \frac{(0.81)(160)^2}{8} = 2,592 \text{ k.ft}$$

और संगत प्रतिबल

$$f_{1,2} = \mp\frac{(2,592)(12,000)}{32,329} = \mp 962. \text{ psi}$$

अतः,

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{P_e}{A_c}\left(1-\frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_0+M_{DL}+M_{LL}}{S_1} \\
&= -1,616 - 962. = -2,578. \text{ psi} \\
f_{cs} &= .45f'_c = -2,700\checkmark \\
f_2 &= \frac{P_e}{A_c}\left(1+\frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_0+M_{DL}+M_{LL}}{S_2} \\
&= -954 + 962. = +8. \text{ psi} \\
f_{ts} &= 6\sqrt{f'_c} = +380\checkmark
\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

36.5 निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी (PBE)

46 PBE को अभिकल्प मानदंडों, उपयुक्त संरचनात्मक तंत्रों, अभिन्यास, अनुपात-निर्धारण और किसी संरचना तथा उसके गैर-संरचनात्मक घटकों एवं अंतर्वस्तुओं के विवरण के चयन, और निर्माण-गुणवत्ता तथा दीर्घकालिक अनुरक्षण के आश्वासन एवं नियंत्रण से युक्त परिभाषित किया जाता है, ताकि सभी उद्दीपनों के निर्दिष्ट स्तरों और विश्वसनीयता के परिभाषित स्तरों पर संरचना अथवा सुविधा को निश्चित सीमा अवस्थाओं से अधिक क्षति न हो। PBE ऐसी प्रक्रिया है जो परियोजना की आरंभिक संकल्पनाओं से आरंभ होती है और संरचना के संपूर्ण जीवनकाल तक चलती है (Bertero and Bertero, 2002)।

47 निष्पादन-आधारित भूकंपी अभिकल्प स्पष्ट रूप से मूल्यांकन करता है कि संभावित संकट, जिसका भवन को सामना होने की संभावना है, के अधीन भवन का निष्पादन कैसा होगा; इसमें संभावित संकट के परिमाण-निर्धारण में अंतर्निहित अनिश्चितताओं और भवन की वास्तविक प्रतिक्रिया के आकलन की अनिश्चितताओं पर विचार किया जाता है।

48 LRFD के विपरीत, यह स्वयं को संकट के एक स्तर तक सीमित नहीं करता, बल्कि अनेक स्तरों पर विचार करता है।

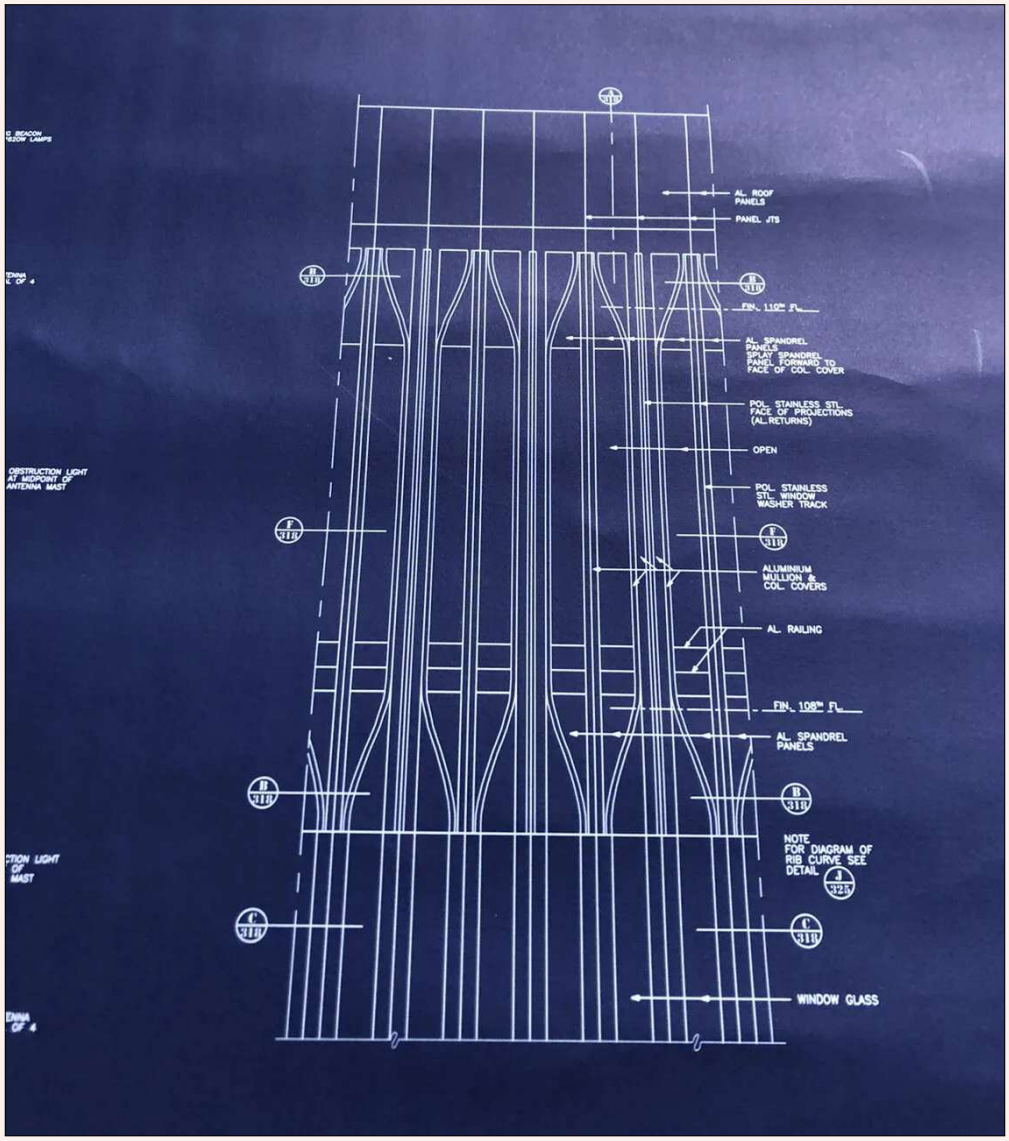
49 निष्पादन को जनहानि होने की प्रायिकता, मरम्मत और प्रतिस्थापन लागत, मरम्मत समय तथा असुरक्षित घोषित किए जाने के पदों में मापा जाता है।

50 निष्पादन का आकलन किसी विशिष्ट भूकंप परिदृश्य अथवा तीव्रता के लिए, या एक निर्दिष्ट समयावधि में घटित हो सकने वाले सभी भूकंपों और प्रत्येक की संभावना पर विचार करके किया जा सकता है।

51 निष्पादन को परिचालन, तत्काल अधिभोग, जीवन-सुरक्षा और पतन-निवारण के रूप में पहचाने गए असतत निष्पादन स्तरों की शृंखला के पदों में व्यक्त किया जाता है।

52 PBEE अभिकल्प और विश्लेषण, दोनों को पृथक रूप से अतिक्रमित करता है और अध्याय 72 में इसे कहीं अधिक विस्तार से प्रस्तुत किया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



वर्ल्ड ट्रेड सेंटर के ब्लूप्रिंट

ब्लूप्रिंट संकल्पनात्मक विचारों के परिशुद्ध तकनीकी निरूपणों में रूपांतरण को दर्शाकर अभिकल्प सिद्धांत का प्रतिनिधित्व करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

37 स्थैतिकतः अनिर्धार्य मेहराब का अभिकल्प

सारांश

यह अध्याय वास्तविक संरचनाओं पर लागू जटिल संरचनात्मक विश्लेषण के दो विस्तृत उदाहरण प्रस्तुत करता है और स्पष्ट रूप से दर्शाता है कि पुनरावृत्तिमूलक प्रक्रिया द्वारा विश्लेषण और अभिकल्प किस प्रकार एक-दूसरे को दिशा देते हैं। विमान हैंगर की वेल्डित इस्पात मेहराब पसली और द्वि-कब्जित बंधित मेहराब सेतु का विश्लेषण किया जाता है, जिससे स्थैतिकतः अनिर्धार्य मेहराबी संरचनाओं पर संगतता विधियों का अनुप्रयोग प्रदर्शित होता है।

37.1 उदाहरण 37.1: स्थैतिकतः अनिर्धार्य मेहराब का अभिकल्प 1390

37.2 उदाहरण 37.2: मेहराब में तापमान परिवर्तन 1397

निम्नलिखित दो उदाहरण वास्तविक संरचनाओं पर लागू जटिल विश्लेषण के उत्कृष्टतम निदर्शनों में हैं; ये स्पष्ट करते हैं कि पुनरावृत्तिमूलक प्रक्रिया में विश्लेषण और अभिकल्प किस प्रकार एक-दूसरे को दिशा देते हैं।

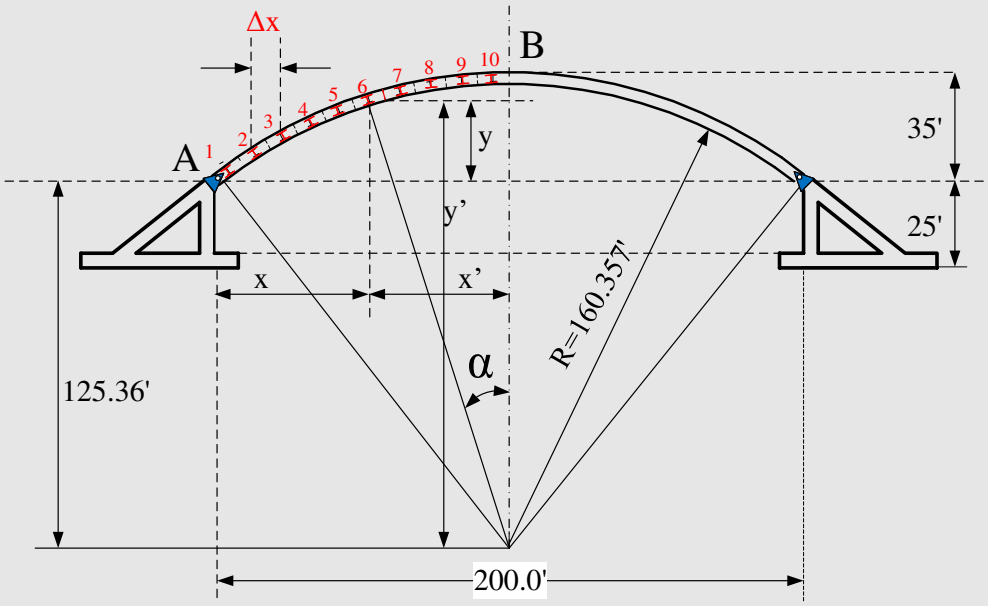
37.1 उदाहरण 37.1: स्थैतिकतः अनिर्धार्य मेहराब का अभिकल्प

निम्नलिखित खंड Kinney, 1957 *Indeterminate Structural Analysis* से पुनरुत्पादित किया गया है।

हम हैंगर के लिए द्वि-कब्जित, ठोस वेल्डित-इस्पात मेहराब पसली का अभिकल्प करना चाहते हैं। पसली का जडत्व आघूर्ण आवश्यकतानुसार परिवर्तित होगा। कब्जों के केंद्र से केंद्र तक विस्तृति 200 ft होगी। पसलियाँ 35 ft केंद्रांतर पर रखी जाएँगी और उठान 35 ft होगा। छत-पटल, पर्लिन और पसली का भार छत की सतह पर 25 $\mathrm{lb/ft^2}$ तथा हिम-भार इसी सतह पर 40 $\mathrm{lb/ft^2}$ माना जाएगा। पसली के चारों ओर बीस पर्लिन समान अंतराल पर रखे जाएँगे।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



1. पसली की केंद्र-रेखा को वृत्त का एक खंड माना जाएगा। गणना से इस वृत्त की त्रिज्या 160.357 ft और $arc\ AB$ की लंबाई 107.984 ft प्राप्त होती है।
2. विश्लेषण के लिए चाप AB को दस खंडों में विभाजित माना जाएगा, प्रत्येक की लंबाई 10.798 ft है। अतः प्रत्येक खंड के केंद्र पर मिलने वाले परिलन पसली पर संकेंद्रित भार लगाते हैं। (क्रमांकित खंड चित्र में दर्शाए गए हैं।
3. चूँकि कुल मृत और हिम भार छत की सतह का 65 lb/ft^2 है, इसलिए प्रत्येक संकेंद्रित बल का मान होगा

$$P = 10.798 \times 35 \times 65 = 24.565 \text{ k} \tag{37.1}$$

4. कब्जे A को संदर्भ मानकर विभिन्न खंडों के केंद्रों के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए आवश्यक गणनाएँ सारणी 1 में दर्शाई गई हैं। विभिन्न खंडों के केंद्रों के बीच की दूरी के क्षैतिज प्रक्षेप Δx के मान भी दर्शाए गए हैं।

खंड	α	$\sin\ \alpha$	$\cos\ \alpha$	$x' = R\sin\alpha$ (ft)	$y' = R\cos\alpha$ (ft)	$x = 100 - x'$ (ft)	$y = y' - 125.36$ (ft)	Δx (ft)
A	38°34′49″	0.62361	0.78173	100.000	125.36	0	0	
1	36°39′05″	0.59695	0.80229	95.725	128.65	4.275	3.29	4.275
2	32°47′36″	0.54161	0.84063	86.851	134.80	13.149	9.44	8.874
3	28°56′07″	0.48382	0.87516	77.584	140.34	22.416	14.98	9.267
4	25°04′38″	0.42384	0.90574	67.966	145.24	32.034	19.88	9.618
5	21°13′09″	0.36194	0.93220	58.040	149.48	41.960	24.13	9.926
6	17°21′40″	0.29840	0.95444	47.851	153.05	52.149	27.69	10.189
7	13°30′11″	0.23350	0.97236	37.443	155.92	62.557	30.57	10.408
8	09°38′42″	0.16754	0.98586	26.866	158.09	73.134	32.73	10.577
9	05°47′13″	0.10083	0.99490	16.169	159.54	83.831	34.18	10.697
10	01°55′44″	0.03367	0.99943	5.399	160.27	94.601	34.91	10.770
शिखर					160.36	100.000	35.00	5.399

सारणी 1

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5. यदि अनुभव का अभाव हो और इस कारण अभिकल्प अभियंता पसली के साथ अनुभागीय परिवर्तन की आरंभिक मान्यताओं के विषय में अनिश्चित हो, तो अनुशंसा की जाती है कि प्रथम विश्लेषण स्थिर जडत्व आघूर्ण की मान्यता पर आधारित हो। अनुभवी अभियंता भी प्रायः इसे सर्वोत्तम प्रक्रिया पाएगा।
6. इस प्रकार H का मान निर्धारित हो जाने पर संपूर्ण पसली में आघूर्ण और अक्षीय प्रणोदों की गणना की जाती है। तत्पश्चात विभिन्न अनुभागों के अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल इन आघूर्णों और अक्षीय प्रणोदों के लिए अभिकल्पित किए जाते हैं। परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाली नई पसली के लिए H का नया मान, और संपूर्ण पसली में आघूर्णों तथा अक्षीय प्रणोदों के संशोधित मान, निर्धारित किए जाते हैं। पसली में प्रतिबलों की जाँच की जाती है और आवश्यक होने पर संपूर्ण प्रक्रिया दोहराई जाती है। वर्तमान स्थिति में यही प्रक्रिया अपनाई जाएगी।
7. सामान्य विधि से, यह मानते हुए कि सिरा A रोलरों पर है,

$$\Delta_{Ah} + H_A \delta_{AhAh} = 0 \tag{37.2}$$

8. विक्षेपों की गणना आभासी कार्य द्वारा की जाएगी; अतः यह व्यंजक बनता है

$$\sum \delta\overline{M} \frac{M}{EI} \Delta S + H_A \sum \delta\overline{M} \frac{\overline{M}}{EI} \Delta S = 0 \tag{37.3}$$

9. चूँकि E और ΔS स्थिर हैं तथा प्रथम विश्लेषण में जडत्व आघूर्ण भी स्थिर है, इसलिए H_A का अंतिम व्यंजक है

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}}{\sum \delta\overline{M}M} \tag{37.4}$$

H_A के प्रथम मूल्यांकन के लिए आवश्यक सभी गणनाएँ सारणी 2 में दर्शाई गई हैं।

खंड	(2) x (ft)	(3) $y = \delta\overline{M}$ (ft · k)	(4) अपरूपण दाईं ओर (k)	(5) Δx (ft)	(6) M वृद्धि (ft · k)	(7) M सरल धरन (ft· k)	(8) $M\delta\overline{M}$	(9) $\delta\overline{M}M$
A	0.0	0.0	245.650					
1	4.275	3.29	221.085	4.275	1,050	1,050	3,500	10.9
2	13.149	9.44	196.520	8.874	1,962	3,010	28,400	89.2
3	22.416	14.98	171.955	9.267	1,821	4,830	72,400	224.4
4	32.034	19.88	147.390	9.618	1,654	6,490	129,100	395.4
5	41.960	24.13	122.825	9.926	1,463	7,950	191,800	582.2
6	52.149	27.69	98.260	10.189	1,251	9,200	254,800	767.0
7	62.557	30.57	73.695	10.408	1,023	10,220	312,400	934.4
8	73.134	32.73	49.130	10.577	779	11,000	360,000	1,071.4
9	83.831	34.18	24.565	10.697	526	11,530	394,100	1,168.4
10	94.601	34.91	0.000	10.770	265	11,790	411,600	1,218.6
शिखर	100.00	35.00	____	5.399	0	11,790		
Σ							2,158,100	6,461.9

सारणी 2

जिससे प्राप्त होता है

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}}{2\delta\overline{M}M} = -\frac{2 \times 2,158,100}{2 \times 6461.9} = -333.97\text{k} \tag{37.5}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

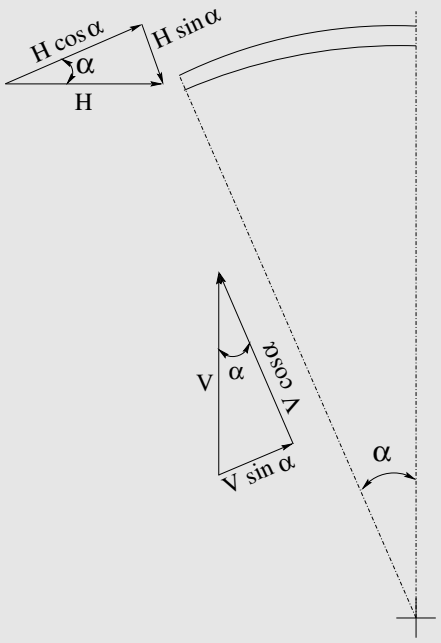
10. H_A के अभी निर्धारित सन्निकट मान का उपयोग करके पसली के विभिन्न खंडों के केंद्रों पर आघूर्णों की गणना सारणी 3 में की गई है, जहाँ किसी आघूर्ण को धनात्मक माना जाता है यदि वह पसली की ऊपरी सतह पर संपीडन उत्पन्न करने की प्रवृत्ति रखता हो।

खंड	y (ft)	M सरल धरन (ft · k)	$H_A y$ (ft · k)	कुल M खंड पर (ft · k)
A	0			
1	3.29	1,050	−1,100	−50
2	9.44	3,010	−3,150	−140
3	14.98	4,830	−5,000	−170
4	19.88	6,490	−6,640	−150
5	24.13	7,950	−8,060	−110
6	27.69	9,200	−9,250	−50
7	30.57	10,220	−10,210	+10
8	32.73	11,000	−10,930	+70
9	34.18	11,530	−11,420	+110
10	34.19	11,790	−11,660	+130
शिखर	35.00	11,790	−11,690	+100

सारणी 3

11. अनुभाग की आवश्यकताएँ निर्धारित करने से पहले प्रत्येक खंड के केंद्र पर अनुप्रस्थ काट के अभिलंब प्रणोद N की गणना करनी होगी। रुचि की दृष्टि से अनुप्रस्थ काट पर कुल अपरूपण S के विभिन्न मान भी प्रत्येक खंड के केंद्र के लिए निकाले जाएँगे।
12. N और S, प्रत्येक खंड के केंद्र पर H के घटकों और ऊर्ध्वाधर अपरूपण V को संयोजित करके प्राप्त किए जाते हैं; यह संयोजन नीचे दर्शाया गया है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



इस चित्र से स्पष्ट है कि

$$S = V\cos\alpha - H\sin\alpha$$
$$N = V\sin\alpha + G\cos\alpha$$

13. इसके बाद S और N के मान सारणी 4 में निकाले गए हैं। S के मान पहले किए गए इस कथन की पुष्टि के लिए सम्मिलित हैं कि सामान्य मेहराब पसली में अपरूपण बल छोटे होते हैं।

खंड	V (k)	$V\ \cos\ \alpha$	$-H\ \sin\ \alpha$	$= S$ (k)	$V\ \sin\ \alpha$	$+H\ \cos\ \alpha$	$= N$ (k)
A	245.6	192	-208	= -16	153	+ 261	= 414
1	221.1	177	-199	= -22	132	+268	= 400
2	196.5	165	-181	= -16	106	+281	= 387
3	172.0	150	-162	= -12	83	+292	= 375
4	147.4	133	-142	= -9	62	+303	= 365
5	122.8	114	-121	= -7	44	+311	= 355
6	98.3	94	-100	= -6	29	+319	= 348
7	73.7	72	-78	= -6	17	+325	= 342
8	49.1	48	-56	= -8	8	+329	= 337
9	24.6	244	-34	= -10	2	+332	= 334
10	0.0	0	-11	= -11	0	+334	= 334
शिखर						+334	= 334

सारणी 4

14. सारणी 3 में आघूर्ण M और सारणी 4 में प्रणोद N के मानों के निरीक्षण से ज्ञात होता है कि ऋणात्मक आघूर्ण क्षेत्र में खंड 3 और धनात्मक आघूर्ण क्षेत्र में खंड 10 निर्णायक हैं। सारणी 5 पूर्ण करने से पहले इन दोनों खंडों के केंद्रों पर पसली के लिए आवश्यक अनुभाग अमेरिकन इंस्टीट्यूट ऑफ स्टील कंस्ट्रक्शन के विनिर्देशों के अनुसार निर्धारित किए जाने चाहिए।
15. फ्लैंज 12 in. × 1 in. के हैं और बंकन के लिए अनुमेय प्रतिबल F_B=20 k/in^2 है। वेब की मोटाई $\frac{3}{4}$ in. है और अनुमेय अक्षीय प्रतिबल[a] F_A=17,000-0.485 L/r है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7) $f_a = \frac{N}{A}$	(8) $f_b = \frac{Mc}{I}$	(9)	(10)	(11)	(12)
	कुल				अक्षीय			अनुमेय			दशमलव
	गहराई	क्षेत्रफल	I	M	प्रणोद N			F_a	$\frac{f_a}{F_a}$ +	$\frac{f_b}{F_b}$ =	क्षमता का
खंड	(in.)	(in^2)	(in^4)	(ft · k)	(k)	(k/in^2)	(k/in^2)	(k/in^2)			अंश
A	23.00	39.75	3483		414	10.4		15.88	0.66		0.66
1	23.00	39.75	3483	50	400	10.1	2.0	15.88	0.63	0.10	0.73
2	23.00	39.75	3483	140	387	9.7	5.9	15.88	0.61	0.28	0.89
3	23.00	39.75	3483	170	375	9.4	6.8	15.88	0.60	0.34	0.94
4	22.07	39.05	3172	150	365	9.3	6.3	15.90	0.59	0.32	0.91
5	21.13	38.35	2865	110	355	9.2	4.9	15.92	0.58	0.24	0.82
6	20.20	37.65	2585	50	348	9.2	2.3	15.94	0.58	0.11	0.70
7	19.27	36.95	2329	10	342	9.3	0.5	15.96	0.58	0.02	0.61
8	18.32	36.24	2071	70	337	9.3	3.7	15.97	0.58	0.19	0.77
9	17.40	35.55	1838	110	334	9.4	6.3	15.99	0.59	0.31	0.90
10	16.47	34.85	1631	130	334	9.6	7.9	16.01	0.60	0.40	1.00
शिखर	16.00	34.50	1527	100	334	9.7	6.3	16.03	0.60	0.32	0.92

सारणी 5

16. फ्लैंज और वेब प्लेटों की मोटाई तथा वेब प्लेटों की चौड़ाई विवेकाधीन हैं। खंड 3 के केंद्र के लिए निर्धारित कुल गहराई इस खंड के केंद्र से पसली के सिरे तक प्रयुक्त की जाती है। खंड 10 के केंद्र के लिए निर्धारित गहराई को स्वेच्छया शिखर पर पसली की गहराई के रूप में प्रयुक्त किया जाता है। खंड 3 के केंद्र से शिखर तक पसली की कुल गहराई को रैखिक रूप से परिवर्तित किया जाता है। विभिन्न खंडों के केंद्रों के लिए इस प्रकार निर्धारित अनुभागों की पर्याप्तता सारणी 5 में जाँची गई है।

17. H_A के मान की पुनर्गणना आवश्यक है क्योंकि अब पसली का जड़त्व आघूर्ण परिवर्ती है। समीकरण 37.4 में प्रत्येक खंड का I सम्मिलित करने के लिए परिवर्तन करना होगा और अब इसे इस प्रकार लिखा जाता है

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}/I}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I} \tag{37.6}$$

18. H_A का संशोधित मान सारणी 6 में दर्शाए अनुसार सरलता से निर्धारित किया जाता है। ध्यान दें कि स्तंभ (2) के मान संगत खंडों के $M\delta\overline{M}$ मानों—स्तंभ (8), सारणी 2—को, सारणी 5 में दर्शाए प्रत्येक खंड के कुल I से भाग देकर प्राप्त किए गए हैं। स्तंभ (3), सारणी 6, के मान इसी प्रकार स्तंभ (9), सारणी 2, के मानों से प्राप्त किए गए हैं। स्तंभ (5), सारणी 6, में सरल धरन के आघूर्ण सीधे स्तंभ (7), सारणी 2, से लिए गए हैं।

प्रति प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(1) खंड	(2) $\frac{Mn}{I}$	(3) $\frac{m^2}{I}$	(4) संशोधित $H_A y$ (ft · k)	(5) M सरल धरन (ft · k)	(6) संशोधित आघूर्ण (ft · k)
1	1.00	0.0031	1,100	1,050	-50
2	8.16	0.0256	3,160	3,010	-150
3	20.79	0.0644	5,020	4,830	-190
4	40.67	0.1247	6,660	6,490	-170
5	66.95	0.2032	8,080	7,950	-130
6	98.57	0.2967	9,270	9,200	-70
7	134.13	0.4012	10,240	10,220	-20
8	173.82	0.5174	10,960	11,000	+40
9	214.41	0.6357	11,450	11,530	+80
10	252.35	0.7472	11,690	11,790	+100
शिखर			11,720	11,790	+70
$\sum$	1010.85	3.0192			

सारणी 6

19. अतः संशोधित H_A है

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}/I}{2\sum \delta\overline{MM}/I} = -frac2 \times 1,010.852 \times 3.0192 = -334.81k \qquad (37.7)$$

20. विभिन्न खंडों के केंद्रों पर अक्षीय प्रणोद N के संशोधित मान सारणी 7 में निकाले गए हैं।

खंड	$V \sin \alpha$	$+$	$H \cos \alpha$	$=$	संशोधित N (k)
A	153		262		415
1	132		269		401
2	106		282		388
3	83		293		376
4	62		303		365
5	44		312		356
6	29		320		349
7	17		326		343
8	8		330		338
9	2		333		335
10	0		335		335
शिखर			335		335

सारणी 7

21. खंडों के केंद्रों पर पहले अभिकल्पित अनुभागों की पर्याप्तता सारणी 8 में जाँची गई है। इस सारणी से प्रतीत होता है कि पसली के सभी अनुभाग संतोषजनक हैं। किंतु पसली के विक्षेप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

से उत्पन्न द्वितीयक प्रतिबलों की जाँच होने तक निश्चित रूप से यह निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता।

खंड	$\frac{N}{A}$ (k/in^2)	$\frac{M_c}{I}$ (k/in^2)	$\frac{N/A}{F_A}$	+	$\frac{M_c/I}{F_B}$	=	दशमलव क्षमता का अंश
A	10.4		0.66				0.66
1	10.1	2.0	0.64		0.11		0.75
2	9.8	6.0	0.62		0.30		0.92
3	9.5	7.6	0.60		0.38		0.98
4	9.4	7.1	0.59		0.36		0.95
5	9.3	5.7	0.58		0.29		0.87
6	9,3	3.3	0.58		0.17		0.75
7	9.3	1.0	0.58		0.05		0.63
8	9.3	2.1	0.58		0.11		0.69
9	9.4	4.5	0.59		0.23		0.82
10	9.6	6.1	0.60		0.31		0.91
शिखर	9.7	4.4	0.61		0.23		0.84

सारणी 8

[a]इस समीकरण में L का मान 10.798 है, क्योंकि पसलियाँ परिलन के जोड-बिंदुओं पर पार्श्वतः अवलंबित हैं।

37.2 उदाहरण 37.2: मेहराब में तापमान परिवर्तन

निम्नलिखित खंड Kinney, 1957 *Indeterminate Structural Analysis* से पुनरुत्पादित किया गया है।

पिछले उदाहरण की मेहराब पसली में पसली के लघुकरण और तापमान परिवर्तन के प्रभाव निर्धारित करें। 100°F तापमान-पतन पर विचार करें।

1. पसली के लघुकरण के प्रभाव निर्धारित करने के लिए पहले सिरे A का वह क्षैतिज विस्थापन ज्ञात करना आवश्यक है जो वास्तविक भारित मेहराब में होने वाली प्रत्यास्थ अक्षीय विकृतियों को पसली में आरोपित करने पर प्राप्त होगा, जबकि सिरा A रोलरों पर हो। तत्पश्चात पसली में आनमनी और अक्षीय, दोनों विकृतियों पर विचार करते हुए, A पर कार्यरत 1 k क्षैतिज बल से उत्पन्न सिरे A का क्षैतिज विस्थापन ज्ञात करना आवश्यक है। वास्तविक भारों से होने वाले पसली-लघुकरण के परिणामस्वरूप A का क्षैतिज विस्थापन इस प्रकार दिया जाता है

$$\sum \frac{N\delta\overline{N}}{AE}\Delta L \tag{37.8}$$

जहाँ N सारणी 7 से लिया गया अक्षीय प्रणोद है, $\delta\overline{N}$ वह अक्षीय प्रणोद है जो A पर कार्यरत 1 k काल्पनिक क्षैतिज बल से उत्पन्न होता है और सारणी 1 में $\cos\ \alpha$ के बराबर है, ΔL प्रत्येक खंड की लंबाई है, और A उपयुक्त अनुभागीय क्षेत्रफल है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. A पर कार्यरत 1 k कृषैतिज बल से उत्पन्न पसली-लघुकरण के परिणामस्वरूप A का कृषैतिज विस्थापन इस प्रकार दिया जाता है

$$\sum \frac{\delta \overline{N}}{AE} \overline{N} \Delta L \tag{37.9}$$

3. A के इन दोनों विकृषेपों के मूल्यांकन के लिए आवश्यक गणनाएँ सारणी 9 में दर्शाई गई हैं।

खंड	N (k)	$\delta\overline{N} = \cos\alpha$ (k)	A (in^2)	$\frac{N\delta\overline{N}}{A}$	$\frac{\delta\overline{N}^2}{A}$
1	401	0.8023	39.75	8.07	0.0162
2	388	0.8406	39.75	8.21	0.0178
3	376	0.8752	39.75	8.30	0.0193
4	365	0.9057	39.05	8.49	0.0210
5	356	0.9322	38.35	8.68	0.0227
6	349	0.9544	37.65	8.86	0.0242
7	343	0.9724	36.95	9.04	0.0256
8	338	0.9859	36.24	9.22	0.0268
9	335	0.9949	35.55	9.41	0.0286
10	335	0.9994	34.85	9.60	0.0278
Σ				87.88	0.2300

सारणी 9

4. वास्तविक भार से होने वाले पसली-लघुकरण के परिणामस्वरूप A का कृषैतिज विस्थापन है

$$\sum \delta\overline{N} \frac{N}{AE} \Delta L = \frac{2 \times 87.88 \times 10.798 \times 12}{30,000} = 0.760 \text{ in} \tag{37.10}$$

5. A पर 1 k कृषैतिज भार से होने वाले पसली-लघुकरण के परिणामस्वरूप विस्थापन है

$$\sum \delta\overline{N} \frac{\overline{N}}{AE} \Delta L = \frac{2 \times 0.2300 \times 10.798 \times 12}{30,000} = 0.002 \text{ in} \tag{37.11}$$

6. A पर 1 k कृषैतिज बल से उत्पन्न आनमनी विकृति के परिणामस्वरूप A के कृषैतिज विस्थापन का सापेक्ष मान पहले स्तंभ (3), सारणी 6, में निर्धारित किया जा चुका है। इस विस्थापन का निरपेक्ष मान है

$$\frac{2 \times 3.019 \times 10.798 \times 1728 \times 1728}{30,000} = 3.755 \text{ in} \quad . \tag{37.12}$$

7. अतः A पर 1 k कृषैतिज बल से उत्पन्न आनमनी और अकृषीय, दोनों विकृतियों के कारण A के विस्थापन का कुल मान है

$$3.755 + 0.002 = 3.757 \text{ in} \tag{37.13}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

8. पसली-लघुकरण के कारण H_A में कमी इस प्रकार दी जाती है

$$\frac{0.760}{3.757} = 0.20 \text{ k} \tag{37.14}$$

9. पसली का तापमान उस तापमान से नीचे गिरने पर, जिस पर मेहराब निर्मित की गई थी, H_A में अतिरिक्त कमी होगी। ऐसा स्वाभाविकतः इसलिए होता है क्योंकि पसली में कुछ अतिरिक्त लघुकरण होगा। 100°F तापमान-पतन से पसली के क्षैतिज प्रक्षेप की लंबाई में कमी होगी

$$\delta L = 0.0000065 \times 100 \times 200 \times 12 = 1.56 \text{ in} \tag{37.15}$$

10. परिणामस्वरूप H_A में कमी होगी

$$\frac{1.56}{3.757} = 0.42 \text{ k} \tag{37.16}$$

11. पसली-लघुकरण और तापमान-पतन, दोनों के कारण H_A में कुल कमी है

$$0.20 + 0.42 = 0.62 \text{ k} \tag{37.17}$$

इससे विस्तृति के केंद्र के निकट आघूर्ण बढ़ेगा।

12. स्तंभ (6), सारणी (8), के निरीक्षण से संकेत मिलता है कि इस वृद्धि के परिणामस्वरूप संभावित अति-प्रतिबल के लिए खंड 10 की जाँच की जानी चाहिए। खंड 10 पर आघूर्ण में वृद्धि इस प्रकार दी जाएगी

$$\Delta M = \Delta H_A(y\text{for segment}10) = 0.62 \times 34.91 = 21.6 \text{ ft} \cdot \text{k} \tag{37.18}$$

13. पहले निर्धारित 100 ft·k का आघूर्ण, खंड 10 के लिए, केवल पहले दो स्थानों तक परिशुद्ध है; अतः खंड 10 के लिए संशोधित कुल आघूर्ण होगा

$$100 + 20 = 120 \text{ ft} \cdot \text{k} \tag{37.19}$$

14. पहले निर्धारित 335 k का प्रणोद, खंड 10 के लिए, तीन स्थानों तक परिशुद्ध है। पसली-लघुकरण और तापमान परिवर्तन के कारण H_A में परिवर्तन को अतः 1 k तक पूर्णांकित करना होगा, ताकि खंड 10 में संशोधित प्रणोद निर्धारित किया जा सके। यह संशोधित प्रणोद होगा

$$335 - 1 = 334 \text{ k} \tag{37.20}$$

15. चरम तंतु प्रतिबल है

$$f = \frac{M_c}{I} = \frac{120 \times 8.23 \times 12}{1631} = 7.25 \text{ k/in}^2 \tag{37.21}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

16. खंड 10 के अनुभाग की जाँच, सारणी (8) में दर्शाए अनुसार, निम्नलिखित द्वारा की जाती है

$$\frac{N/A}{F_A} + \frac{M_c/I}{F_B} = \frac{334/34.85}{16.01} + \frac{7.25}{20} = 0.60 + 0.36 = 0.96 \tag{37.22}$$

    और स्पष्टतः खंड 10 का अनुभाग पर्याप्त है।
17. तापमान-वृद्धि के प्रभावों पर विचार नहीं किया गया है, क्योंकि ऐसी वृद्धि केवल ग्रीष्म ऋतु में हो सकती है, जब हिम-भार संभव नहीं होता। फलतः समस्या के इस पक्ष का कोई व्यावहारिक महत्त्व नहीं है।
18. अभी प्रदर्शित विश्लेषण-विधि प्रबलित-कंक्रीट अथवा काष्ठ की द्वि-कब्जित मेहराब पर समान रूप से लागू होगी। किंतु, जैसा पहले कहा गया है, बहुत कम प्रबलित-कंक्रीट मेहराबें दो कब्जों के साथ बनाई जाती हैं।
19. यहाँ विशेष रूप से ध्यान देने योग्य तथ्य यह है कि अक्षीय विकृति और तापमान-पतन के अतिरिक्त, प्रबलित-कंक्रीट पसली में कंक्रीट का संकुचन भी पसली-लघुकरण उत्पन्न करेगा। प्रयुक्त किए जाने वाले मिश्रण के लिए संकुचन गुणांक निर्धारित करके विश्लेषण में उसी सामान्य रीति से लागू किया जाना चाहिए जैसी ऊपर तापमान गुणांक के लिए प्रदर्शित की गई है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

38 फर्मी समाधान (सन्निकट विश्लेषण)

सारांश

अभियंताओं और कुशल वास्तुकारों को प्रायः त्वरित, सन्निकट "लिफाफे के पीछे" वाली गणनाएँ करने की चुनौती का सामना करना पडता है। यांत्रिकी और स्थैतिकी के मूलभूत समीकरणों को विक्षेपित आकृति के परिशुद्ध आरेख के साथ कुशलतापूर्वक संयोजित करके वे आंतरिक बलों के समाधान हेतु स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना को निर्धार्य संरचना में बदल सकते हैं। इसी प्रकार, आधार अभिक्रियाएँ और शीर्ष पार्श्व विस्थापन निर्धारित करने के लिए भवनों को सरलीकृत किया जा सकता है। अध्याय का आरंभ सन्निकट विश्लेषण और तथाकथित फर्मी समस्याओं के बीच सादृश्य स्थापित करके होता है। तत्पश्चात यह ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज भारों के अधीन सरल धरनों और ढाँचों का सन्निकट प्रतिक्रिया-विश्लेषण प्रस्तुत करता है, जिससे अन्यथा अत्यधिक अनिर्धार्य संरचनाओं में आंतरिक बल निर्धारित किए जाते हैं। इसके बाद भित्ति और कूप तंत्रों की सन्निकट संरचनात्मक प्रतिक्रिया की जाँच की जाती है तथा आधार अभिक्रियाएँ और शीर्ष विस्थापन (अपवाह) निर्धारित किए जाते हैं।

38.1 आंतरिक बल 1402
38.1.1 विक्षेपित आकृतियाँ & नति-परिवर्तन बिंदु 1402
38.1.2 आधार-दृढता के पदों में धरन आघूर्ण 1405
38.1.3 विश्लेषण विधियाँ 1406
38.2 संरचनात्मक प्रतिक्रिया 1427
38.2.1 कूप उपतंत्र 1427
38.2.2 अपरूपण भित्ति 1429
38.2.3 ट्रसित अपरूपण भित्ति 1431
38.2.4 पार्श्व विक्षेप 1433

[1] फर्मी समस्या किसी जटिल समस्या के लिफाफे-के-पीछे समाधान पर आधारित अनुमान है। इसमें राशियों के विषय में सुविचारित अनुमान लगाए जाते हैं और यथार्थ समाधान नहीं खोजा जाता (प्रायः परिमाण-कोटि ही पर्याप्त होती है)।

[2] बताया जाता है कि प्रथम परमाणु बम का विस्फोट देखते समय फर्मी ने बम की शक्ति का मोटा अनुमान लगाने की एक सरल विधि बनाई। विस्फोट के दौरान उन्होंने केवल कागज के टुकडे गिराए और फिर उनके द्वारा तय की गई दूरी मापी। उनका 10 किलोटन का परिणाम, स्वीकृत 21 किलोटन मान की परिमाण-कोटि के भीतर था।

[3] यही तथाकथित फर्मी समस्या की उत्पत्ति थी, जिसमें सन्निकट उत्तर प्राप्त करने के लिए किसी स्थिति के विषय में उचित मान्यताओं और अनुमानों की आवश्यकता होती है।

[4] यही इस अध्याय का उद्देश्य है। क्या हम किसी संरचना में आंतरिक बलों के परिमाण का अनुमान लगाने के लिए उचित और सन्निकट मान्यताएँ बना सकते हैं? किसी जटिल विश्लेषण को आरंभ करने से पहले समाधान की सीमाएँ जानने के लिए ऐसा उपागम सदैव वांछनीय है।

[5] यह वास्तव में एक आदर्श *फर्मी समस्या* है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

38.1 आंतरिक बल

6 हम विकृत आकृति में नति-परिवर्तन बिंदु का स्थान मात्र अनुमानित करके स्थैतिकतः अनिर्धार्य ढाँचे को निर्धार्य ढाँचे में बदलने की प्रक्रिया की जाँच से आरंभ करते हैं।

38.1.1 विक्षेपित आकृतियाँ & नति-परिवर्तन बिंदु

7 स्मरण करें (§22.3) कि

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$$

जहाँ ρ वक्रता की त्रिज्या है। फलतः शून्य आघूर्ण *नति-परिवर्तन बिंदु* पर होगा, और वक्रता-त्रिज्या जितनी छोटी होगी, आघूर्ण उतना ही बड़ा होगा।

8 अतः हमें शून्य आघूर्ण के बिंदु ज्ञात करने होंगे; ये केवल अवस्था-समीकरण जोड़कर स्थैतिकतः अनिर्धार्य समस्या को स्थैतिकतः निर्धार्य समस्या में बदल देंगे (§19.1.3)।

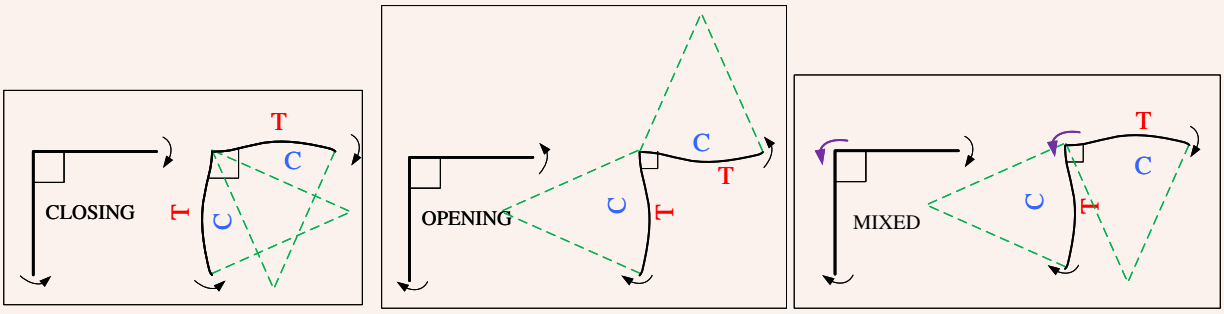
9 किंतु पहले हमें दिए गए भार के अधीन संरचना की विक्षेपित आकृति का उचित रेखाचित्र बनाना होगा।

10 विकृत आकृति का उचित रेखाचित्र बनाने के लिए हम कुछ मूल नियमों का पालन करेंगे:

1. अक्षीय विरूपण की उपेक्षा करें, जो आनमनी विरूपण की तुलना में नगण्य हैं (§53.2.1)।
2. यदि पार्श्व भार हो, तो छोटा पार्श्व विस्थापन लगाएँ।
3. कोने के घूर्णनों में संगतता होनी चाहिए (अर्थात् 90 अंश के मोड़ 90 अंश पर ही रहें; आबद्ध सिरे आबद्ध रहें)।
4. विरूपण सुचारु होना चाहिए (आंतरिक कब्ज़ों को छोड़कर)।

11 संरचना के विरूपण को निम्नलिखित विरूपणों में विघटित किया जा सकता है

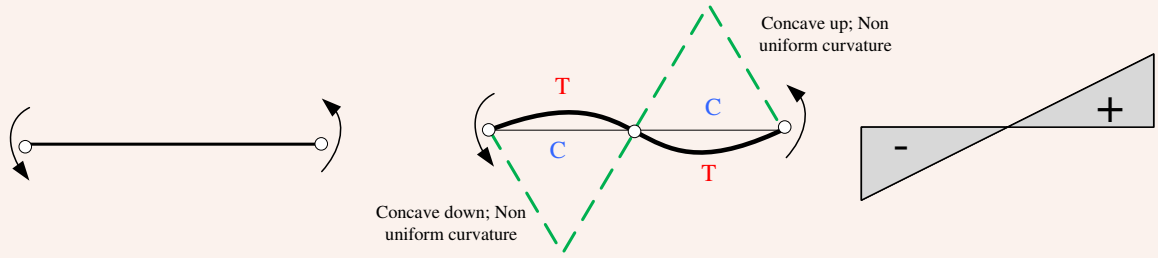
कोने के नोड चित्र 38.1, जहाँ हम तीन प्रकारों में भेद करते हैं: a) खुलना, b) बंद होना, और c) मिश्रित।



चित्र 38.1: संगत कोना-घूर्णन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

धरनें जैसा चित्र 38.2 में दर्शाया गया है।

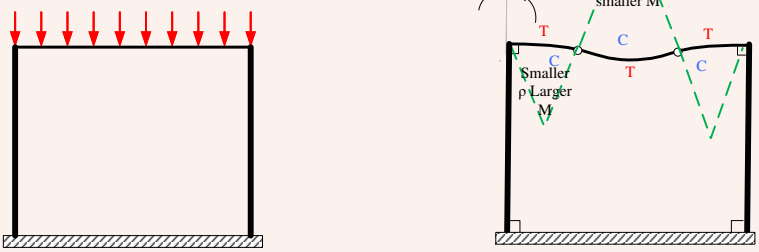


चित्र 38.2: सरल धरन का विक्षेप

ढाँचे हम भारों के दो समुच्चयों में भेद करेंगे:

ऊर्ध्वाधर भार पर विशेष ध्यान देना होगा, क्योंकि विक्षेपित आकृति स्तंभों और धरनों की सापेक्ष दृढताओं पर बहुत अधिक निर्भर करेगी (§27.3.1)। अतः हम निम्नलिखित पर विचार करेंगे

- दृढ स्तंभ, चित्र 38.3। ध्यान दें कि त्रिज्या जितनी छोटी होगी, आघूर्ण उतना ही बड़ा होगा।



चित्र 38.3: ऊर्ध्वाधर भार के अधीन दृढ स्तंभों वाले पोर्टल ढाँचे का विक्षेप

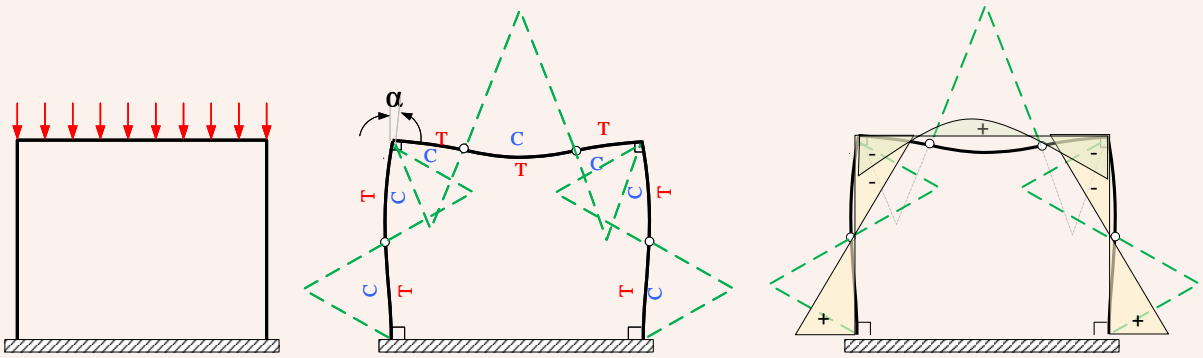
- दृढ धरन: धरन में छोटा आनमन और स्तंभों में बड़े अक्षीय बल होंगे।
- मध्यवर्ती स्थिति, चित्र 38.4

पार्श्व भार जैसा चित्र 38.5a में दर्शाया गया है। शीर्ष कोनों के पार्श्व विस्थापनों पर ध्यान दें, चित्र 38.5b।

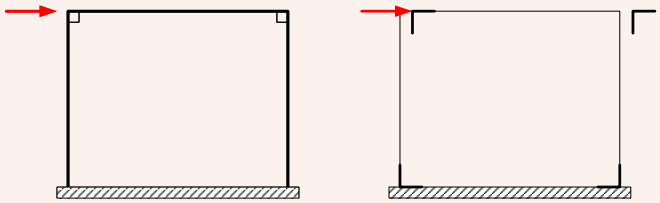
हम निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखते हुए बाएँ स्तंभ की विक्षेपित आकृतियाँ बनाते हैं:

- निचली स्पर्शरेखा 90 ^{o} है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 38.4: ऊर्ध्वाधर भार के अधीन पोर्टल ढाँचे का विक्षेप



(a) पार्श्व भार के अधीन ढाँचा (b) विस्थापित कोना-नोड

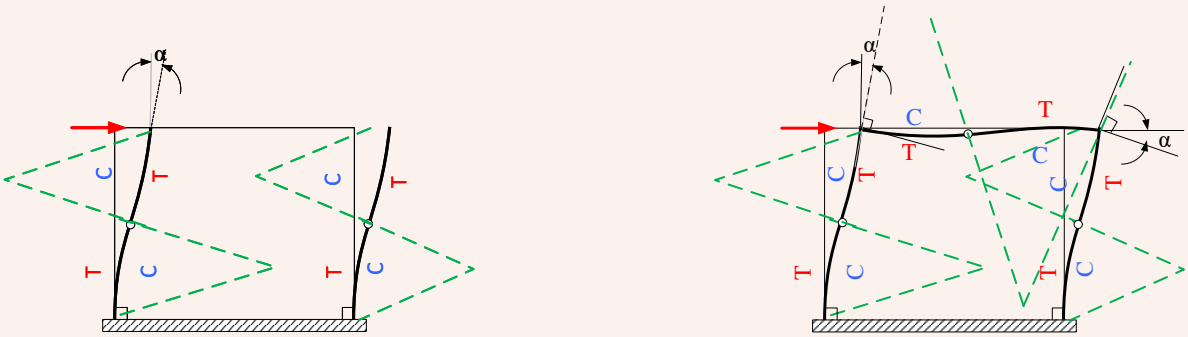
चित्र 38.5: पार्श्व भार के अधीन पोर्टल ढाँचे का उदाहरण

अप्रकाशित प्रति

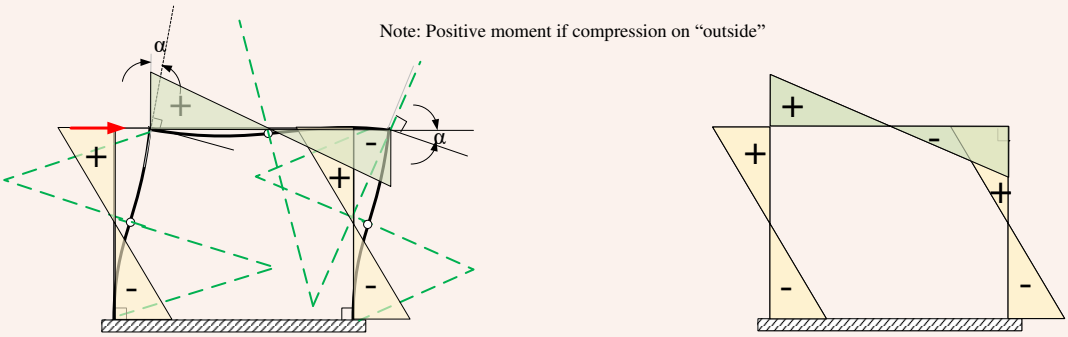
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- तनन बाहर की ओर होना चाहिए (अतः भीतर की ओर अवतल)।
- स्तंभ शीर्ष पर अवरुद्ध है। यदि अनुप्रस्थ धरन है
  - अनंत दृढ: स्तंभ के शीर्ष की स्पर्शरेखा भी 90^o होगी। (एक नति-परिवर्तन बिंदु होगा)
  - अत्यंत नम्य: कोई नति-परिवर्तन बिंदु नहीं होगा और अवतलता पूर्णतः भीतर होगी।
  - परिमित दृढता: शीर्ष पर अशून्य घूर्णन और एक नति-परिवर्तन बिंदु होगा।

दाएँ स्तंभ की आकृति समान होगी और विकृषेपित आकृति चित्र 38.6a में दर्शाई गई है।



(a) विकृषेपित आकृति



(b) आघूर्ण आरेख

चित्र 38.6: विकृषेपित आकृति और आघूर्ण आरेख; पार्श्व भार वाला पोर्टल ढाँचा

38.1.2 आधार-दृढता के पदों में धरन आघूर्ण

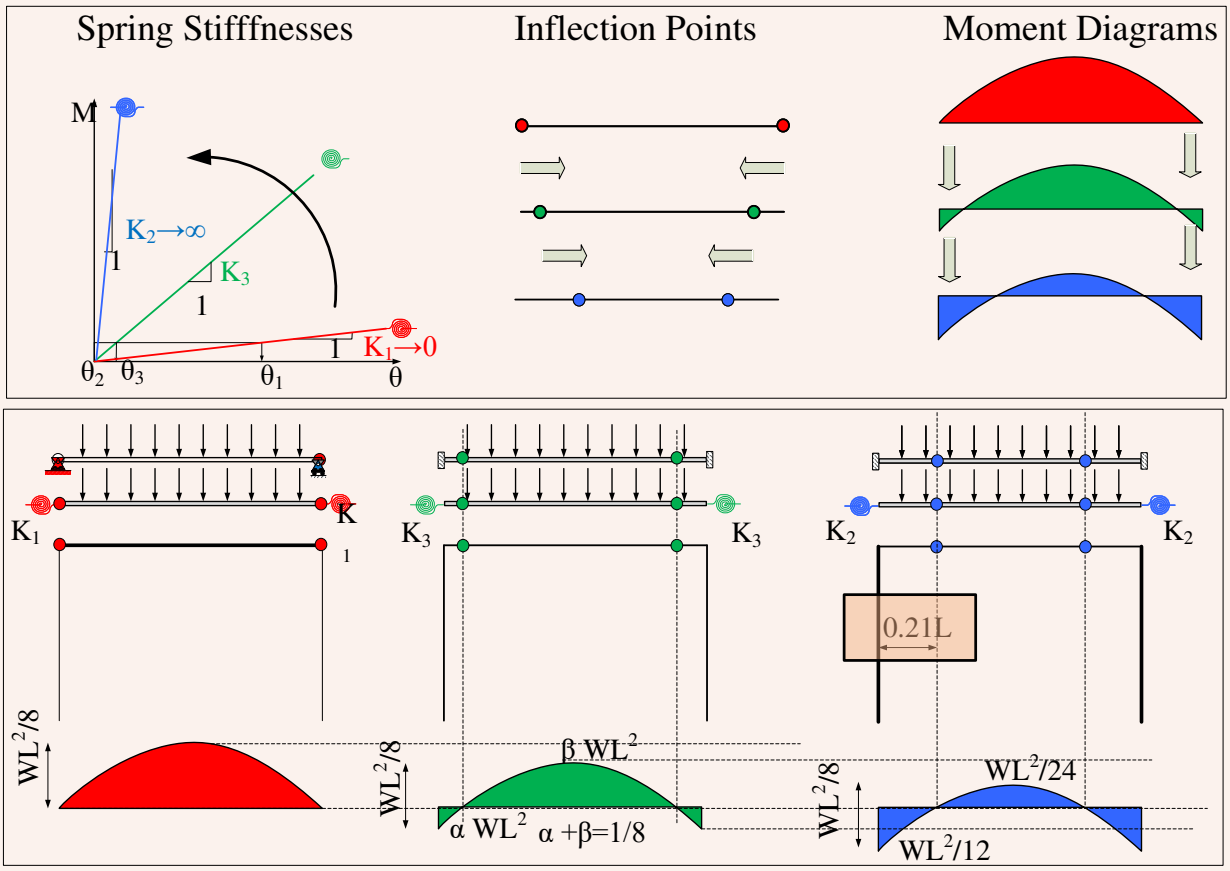
12 यद्यपि हम प्रायः धरनों को उनके सिरों पर या तो पूर्णतः आबद्ध अथवा मुक्त मानते हैं, किंतु स्थिति प्रायः अधिक जटिल होती है और उस पर विशेष ध्यान देना आवश्यक है[1]

[1]प्रत्यास्थ कमानों से जुडी धरनों का संख्यात्मक प्रतिरूपण पृथक रूप से §46.6.2 में प्रस्तुत है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

13 यदि धरन वास्तव में अत्यंत दृढ स्तंभ से जुडी हो, तो सभी व्यावहारिक प्रयोजनों के लिए हम उसे सिरे पर दृढतः जुडी मान सकते हैं। इसी प्रकार, यदि धरन अपेक्षाकृत नम्य स्तंभों से जुडी हो, तो धरन को मुक्त आधारों वाली माना जा सकता है।

14 इसे चित्र 38.7 में आलेखीय रूप से दर्शाया गया है। और जैसे-जैसे आधार नम्य (लाल) से दृढ (नीला)



चित्र 38.7: आधार-दृढताओं के पदों में धरन विक्षेप

होता है, नति-परिवर्तन बिंदु लगभग $0.21L$ तक जाते हैं और आघूर्ण आरेख आधार पर $wL^2/12$ के न्यूनतम मान तक नीचे खिंचता है। मध्यवर्ती मान हरे रंग में दर्शाए गए हैं।

15 अतः नति-परिवर्तन बिंदु का स्थान ज्ञात होने पर हम धरन को तीन खंडों में बाँट सकते हैं: अधिकतम लंबाई वाले 2 सिरे, जिनमें प्रत्येक की लंबाई $0.21L$ से अधिक नहीं है, और एक केंद्रीय खंड। प्रत्येक स्थैतिकतः निर्धार्य उपसंरचना है और उसका उसी प्रकार विश्लेषण किया जा सकता है।

38.1.3 विश्लेषण विधियाँ

16 आयताकार भवन का प्रारंभिक आकार-निर्धारण, अथवा कंप्यूटर विश्लेषण का लिफाफे-के-पीछे सत्यापन, भवनों के सन्निकट विश्लेषण द्वारा सरलता से किया जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

17 ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज भारों पर पृथक रूप से विचार करना होगा। क्षैतिज भारों के लिए दो विधियाँ हैं:

पोर्टल विधि निम्न-तलीय भवनों के लिए, जहाँ ऊँचाई कम से कम क्षैतिज आयाम से छोटी होती है; विक्षेपित आकृति अपरूपण विरूपण से अभिलक्षित होती है।

ब्रैकट विधि उच्च-तलीय भवनों के लिए, जहाँ ऊँचाई उसके न्यूनतम क्षैतिज आयाम से कई गुना अधिक होती है; विक्षेपित आकृति पर समग्र आनमनी विरूपण का प्रभुत्व होता है।

18 भवन तंत्रों के तीन प्रमुख प्रकार हैं:

भित्ति उपतंत्र: जिसमें ठोस चिनाई, पट्टिकायुक्त अथवा बंधित काष्ठ, या इस्पात ट्रसों से बनी अत्यंत दृढ भित्तियाँ एक दृढ उपतंत्र बनाती हैं। यह केवल कम ऊँचाई वाले भवनों के लिए पर्याप्त है।

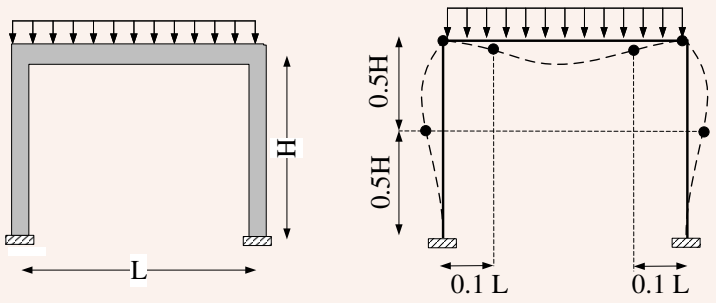
ऊर्ध्वाधर कूप: चार ठोस अथवा ट्रसित भित्तियों से बने होते हैं, जो नलिकाकार आकाशीय संरचना बनाते हैं। नलिकाकार संरचना आंतरिक (उद्वाहक और सीढ़ियाँ समाहित करने वाली) और/या बाहरी हो सकती है। अत्यंत ऊँचे भवनों के लिए सर्वाधिक दक्ष।

दृढ ढाँचा: इसमें रैखिक ऊर्ध्वाधर घटक (स्तंभ) दृढ क्षैतिज घटकों (धरन और गर्डर) से दृढतः जुड़े होते हैं। पार्श्व (पवन/भूकंप) भारों का प्रतिरोध करने के लिए यह बहुत दक्ष संरचनात्मक रूप नहीं है।

38.1.3.1 ऊर्ध्वाधर भार

19 बहु-खाड़ी/बहु-मंजिला ढाँचे के लिए गर्डरों को सतत धरनें माना जाता है और स्तंभों को गर्डरों से उत्पन्न असंतुलित आघूर्णों का प्रतिरोध करने वाला माना जाता है। हम आगे यह मानते हैं कि

1. प्रत्येक तल पर गर्डर एकसमान भार को सहारा देने वाली सतत धरनों के रूप में कार्य करते हैं।
2. नति-परिवर्तन बिंदु (चित्र 38.8) निम्नलिखित स्थानों पर माने जाते हैं
   (a) प्रत्येक गर्डर के दोनों सिरों से विस्तृति के दसवें भाग पर।
   (b) स्तंभों की मध्य-ऊँचाई पर।



चित्र 38.8: ऊर्ध्वाधर भार के अधीन ढाँचा; नति-परिवर्तन बिंदुओं के सन्निकट स्थान

3. अक्षीय प्रभावों की उपेक्षा करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. प्रत्येक जोड़ पर गर्डरों के असंतुलित सिरा-आघूर्ण ऊपर और नीचे के स्तंभों में वितरित किए जाते हैं।

20 तब सभी धरनें स्थैतिकतः निर्धार्य होती हैं और उनकी विस्तृति L_s, गर्डर की मूल लंबाई के 0.8 के बराबर होती है, L। इसमें नति-परिवर्तन बिंदु को $0.1L$ पर माना जाता है, जो सरलतः समर्थित धरन के लिए 0 और दृढतः जुड़ी धरनों के लिए $0.21L$ के बीच है (चित्र 38.9)।

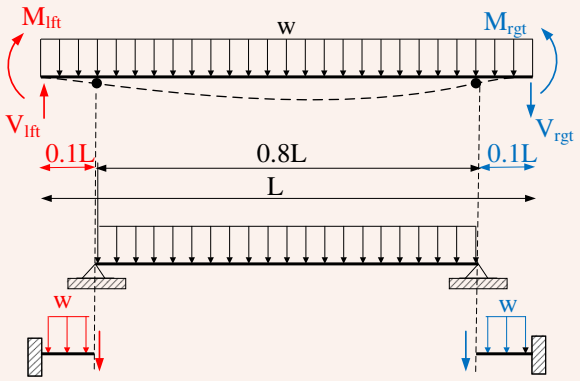
21 गणना का क्रम (अत्यंत महत्त्वपूर्ण)

1. गर्डर का धनात्मक आघूर्ण
2. गर्डर का ऋणात्मक आघूर्ण
3. गर्डर अपरूपण
4. स्तंभ के अक्षीय बल
5. स्तंभ आघूर्ण
6. स्तंभ अपरूपण
7. गर्डर के अक्षीय बल

22 प्रक्रिया नीचे दी गई है; किसी समीकरण को स्मरण रखने की आवश्यकता नहीं है। केवल संतुलन के समीकरणों और मुक्त-पिंड आरेखों का उपयोग करें, जहाँ सभी सिरा-अवयव अपरूपणों और आघूर्णों को धनात्मक माना गया है।

1. गर्डर का धनात्मक आघूर्ण

23 चित्र 38.7 के सादृश्य से, और नति-परिवर्तन बिंदुओं को आधार से $0.1L$ पर मानते हुए, हम चित्र 38.9 पर विचार करते हैं और गर्डर को तीन भागों में विघटित करते हैं।



चित्र 38.9: ऊर्ध्वाधर भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; गर्डर आघूर्ण

24 अधिकतम धनात्मक आघूर्ण सरलतः होगा

$$M^+ = \frac{1}{8} w L_s^2 = w \frac{1}{8} (0.8)^2 L^2 = 0.08 w L^2$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

25 ध्यान दें कि पूर्णतः आबद्ध आधार और $0.21L$ पर नति-परिवर्तन बिंदुओं की स्थिति में अधिकतम आघूर्ण $wL^2/24 = 0.041667$ होगा।

2. गर्डर का ऋणात्मक आघूर्ण

26 पुनः चित्र 38.9 से, गर्डर सिरों पर अधिकतम ऋणात्मक आघूर्ण होगा

$$M^{left} = M^{rgt} = -\frac{w}{2}(0.1L)^2 - \frac{w}{2}(0.8L)(0.1L) = -0.045wL^2$$

3. गर्डर अपरूपण

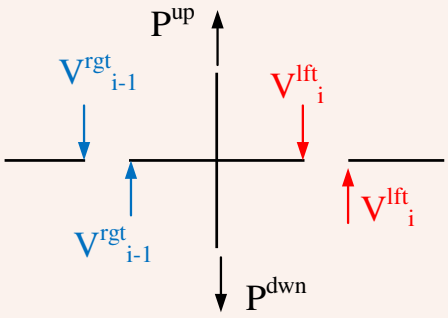
27 पुनः, चित्र 38.9 से अपरूपण सरलता से प्राप्त होता है

$$V^{lft} = \frac{wL}{2} \qquad V^{rgt} = -\frac{wL}{2}$$

28 अपरूपण बलों की दिशाओं पर ध्यान दें। आलेखीय रूप से उन्हें सदैव धनात्मक दर्शाया जाएगा।

4. स्तंभ का अक्षीय बल

29 स्तंभ के अक्षीय बल स्तंभ से जुडे सभी गर्डर अपरूपणों का योग करके सरलता से प्राप्त होते हैं, चित्र 38.10।



चित्र 38.10: ऊर्ध्वाधर भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; स्तंभ के अक्षीय बल

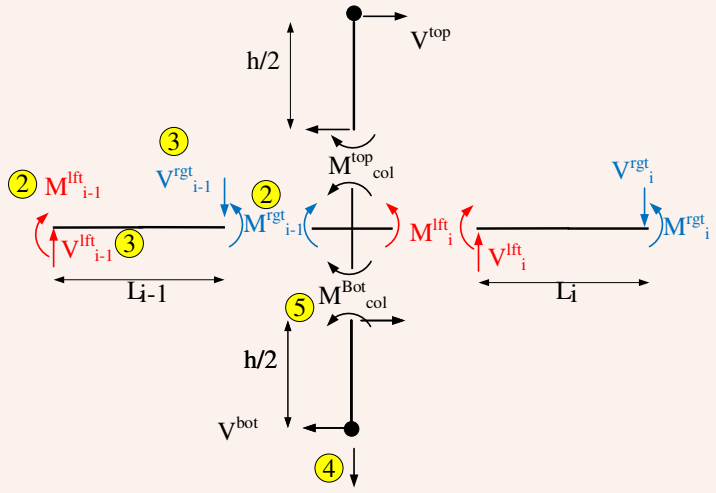
$$P^{dwn} = P^{up} + V_{i-1}^{rgt} - V_i^{lft}$$

5. स्तंभ आघूर्ण

30 स्तंभ आघूर्ण जोडों के मुक्त-पिंड आरेख से निर्धारित किए जाते हैं, चित्र 38.11)। सममिति से बाएँ और दाएँ आघूर्ण बराबर और विपरीत हैं, अतः

$$M^{bot} = -M^{top}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 38.11: ऊर्ध्वाधर भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण

6. स्तंभ अपरूपण

31 चूँकि हमने नति-परिवर्तन बिंदुओं को मध्य-ऊँचाई पर माना है—उस संभावित अपवाद को छोड़कर जब प्रथम तल के स्तंभ आधार पर कब्जित हों—इसलिए हमें प्राप्त होता है

$$V = \frac{M^{top}}{\frac{h}{2}}$$

7. गर्डर के अक्षीय बल

32 गर्डर के अक्षीय बल नगण्य हैं और उनकी उपेक्षा की जाएगी।

38.1.3.2 क्षैतिज भार

38.1.3.2.1 पोर्टल विधि

33 पार्श्व भारों के अधीन निम्न-तलीय भवनों में मुख्यतः अपरूपण विरूपण होता है। अतः उनका सन्निकट विश्लेषण निम्नलिखित मान्यताओं द्वारा सरलता से किया जा सकता है:

1. चित्र 38.6b से हम नति-परिवर्तन बिंदु निम्न स्थानों पर मान सकते हैं, चित्र 38.12:
   (a) दूसरे तल से ऊपर सभी स्तंभों की मध्य-ऊँचाई पर।
   (b) दृढ आधार होने पर तल-स्तंभों की मध्य-ऊँचाई पर, अथवा कब्जित होने पर आधार पर।
   (c) प्रत्येक गर्डर के केंद्र पर।
2. किसी तल-स्तर पर सभी स्तंभों की मध्य-ऊँचाई पर कुल क्षैतिज अपरूपण इन स्तंभों में इस प्रकार वितरित होगा कि दोनों बाहरी स्तंभों में से प्रत्येक, ढाँचे के प्रत्येक आंतरिक स्तंभ की अपेक्षा आधा क्षैतिज अपरूपण वहन करे।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

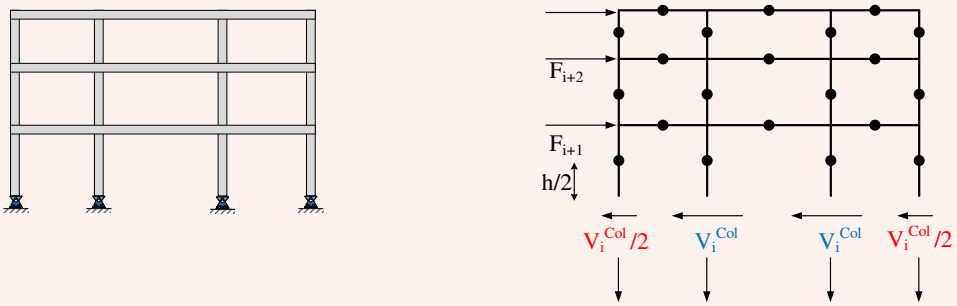
[34] अतः गणनाओं का क्रम होगा

1. स्तंभ अपरूपण
2. स्तंभ आघूर्ण
3. गर्डर आघूर्ण
4. गर्डर अपरूपण
5. स्तंभ का अक्षीय बल
6. गर्डर का अक्षीय बल

ध्यान दें कि यह ऊर्ध्वाधर भार स्थिति का *विपरीत* क्रम है।

1. स्तंभ अपरूपण

[35] प्रत्येक तल पर स्तंभों की मध्य-ऊँचाई से क्षैतिज काट लेते हुए और पार्श्व बलों का संतुलन समीकरण लिखकर अपरूपण निर्धारित किए जाते हैं।



चित्र 38.12: पार्श्व भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; स्तंभ अपरूपण

$$V_{ext}^{col} = \frac{\sum F^{lateral}}{2 \text{ No. of bays}}; \qquad V_{int}^{col} = 2V_{ext}^{col}$$

2. स्तंभ आघूर्ण

[36] प्रत्येक स्तंभ के सिरे का आघूर्ण, स्तंभ के अपरूपण और संगत स्तंभ की आधी ऊँचाई के गुणनफल के बराबर है, चित्र 38.13।

$$M_{col}^{top} = V^{col}\frac{h}{2} \qquad M^{bot} = -M^{top}$$

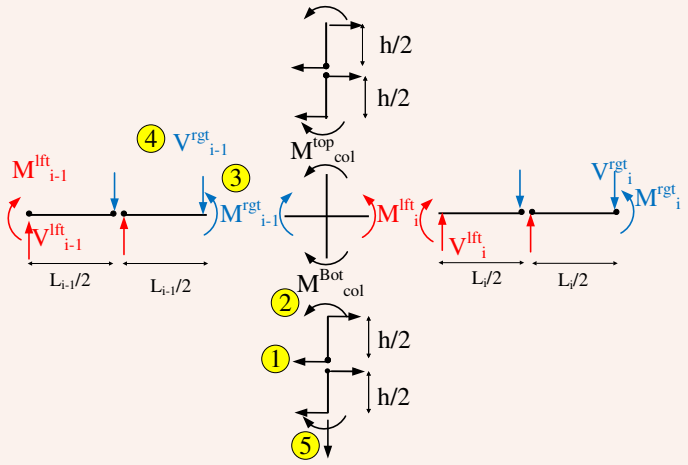
बाहरी स्तंभों पर ध्यान दें; उनके आघूर्ण आंतरिक स्तंभों के आघूर्णों के आधे हैं।

3. गर्डर आघूर्ण

[37] गर्डर आघूर्ण संयोजन के मुक्त-पिंड आरेख से सरलता से निर्धारित किए जाते हैं, चित्र 38.13।

$$M_i^{lft} = M_{col}^{Top} - M_{col}^{Bot} + M_{i-1}^{rgt}; \qquad M_i^{rgt} = -M_i^{lft}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 38.13: पार्श्व भारों के अधीन ढाँचों का सन्निकट विश्लेषण; गर्डर आघूर्ण

4. गर्डर अपरूपण

38 चूँकि गर्डर के केंद्र पर नति-परिवर्तन बिंदु है, इसलिए उस बिंदु के परितः आघूर्णों के योग पर विचार करके गर्डर अपरूपण प्राप्त किया जाता है

$$V^{lft} = -\frac{2M}{L} \qquad V^{rgt} = V^{lft}$$

5. स्तंभ के अक्षीय बल

39 गर्डर अपरूपणों और ऊपर के स्तंभ से आने वाले अक्षीय बल का योग करके स्तंभ के अक्षीय बल प्राप्त किए जाते हैं

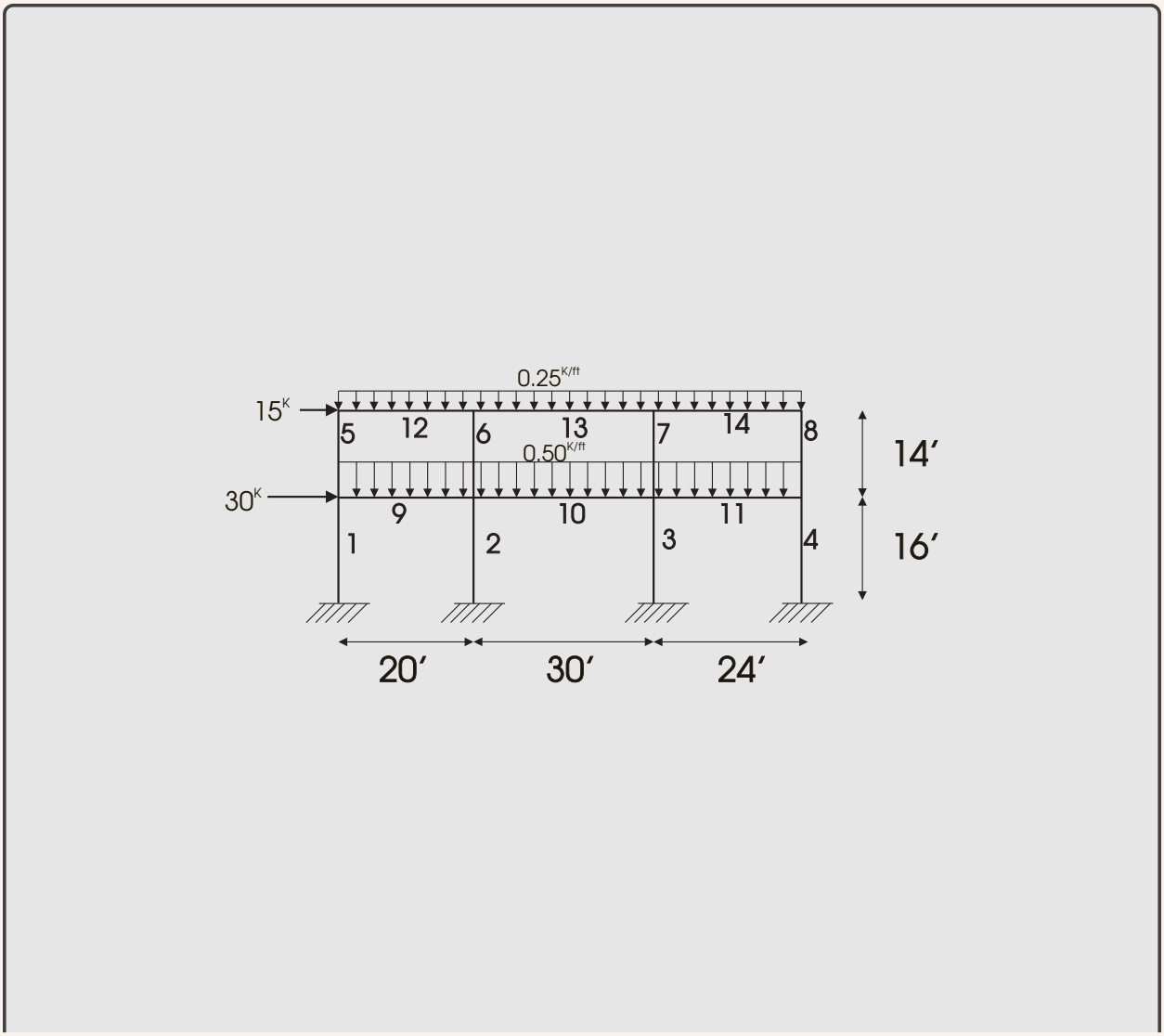
$$P = P^{above} - P^{rgt} + P^{lft}$$

6. गर्डर का अक्षीय बल

40 गर्डर के अक्षीय बलों को नगण्य माना जाता है।

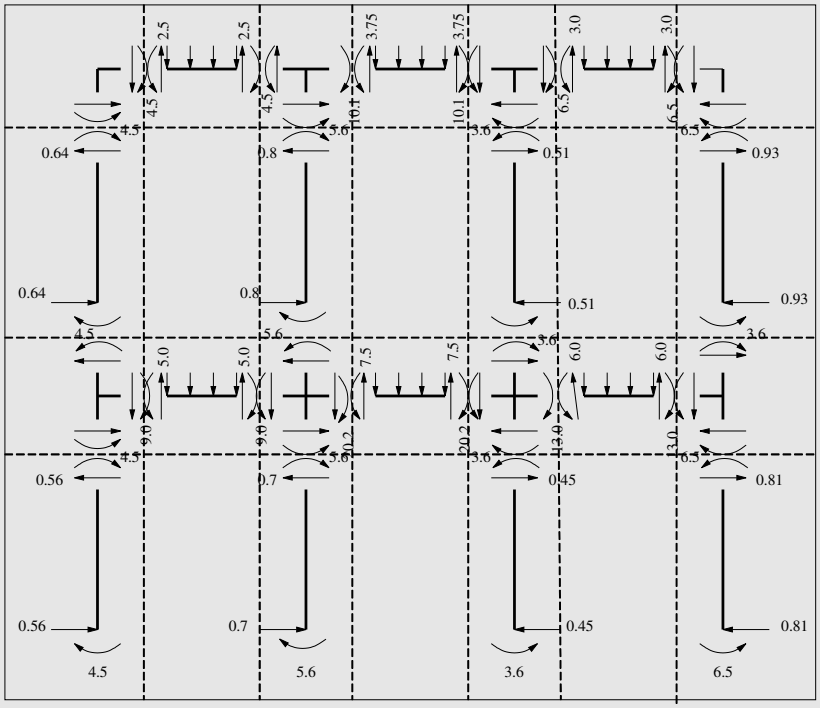
38.1.3.2.1.1 उदाहरण 38.1: पोर्टल विधि; निम्न-तलीय भवन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



ऊर्ध्वाधर भार

शीर्ष गर्डर आघूर्ण

$$
\begin{aligned}
M_{12}^{lft} &= -0.045 w_{12} L_{12}^2 = -(0.045)(0.25)(20)^2 &&= -4.5 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{cnt} &= 0.08 w_{12} L_{12}^2 = (0.08)(0.25)(20)^2 &&= 8.0 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{rgt} &= M_{12}^{lft} &&= -4.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{lft} &= -0.045 w_{13} L_{13}^2 = -(0.045)(0.25)(30)^2 &&= -10.1 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{cnt} &= 0.08 w_{13} L_{13}^2 = (0.08)(0.25)(30)^2 &&= 18.0 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{rgt} &= M_{13}^{lft} &&= -10.1 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{lft} &= -0.045 w_{14} L_{14}^2 = -(0.045)(0.25)(24)^2 &&= -6.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{cnt} &= 0.08 w_{14} L_{14}^2 = (0.08)(0.25)(24)^2 &&= 11.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{rgt} &= M_{14}^{lft} &&= -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

प्रारूप प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

निचले गर्डर आघूर्ण

$$
\begin{aligned}
M_9^{lft} &= -0.045 w_9 L_9^2 = -(0.045)(0.5)(20)^2 && = -9.0 \text{ k.ft} \\
M_9^{cnt} &= 0.08 w_9 L_9^2 = (0.08)(0.5)(20)^2 && = 16.0 \text{ k.ft} \\
M_9^{rgt} &= M_9^{lft} && = -9.0 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{lft} &= -0.045 w_{10} L_{10}^2 = -(0.045)(0.5)(30)^2 && = -20.3 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{cnt} &= 0.08 w_{10} L_{10}^2 = (0.08)(0.5)(30)^2 && = 36.0 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{rgt} &= M_{11}^{lft} && = -20.3 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{lft} &= -0.045 w_{12} L_{12}^2 = -(0.045)(0.5)(24)^2 && = -13.0 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{cnt} &= 0.08 w_{12} L_{12}^2 = (0.08)(0.5)(24)^2 && = 23.0 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{rgt} &= M_{12}^{lft} && = -13.0 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

शीर्ष स्तंभ आघूर्ण

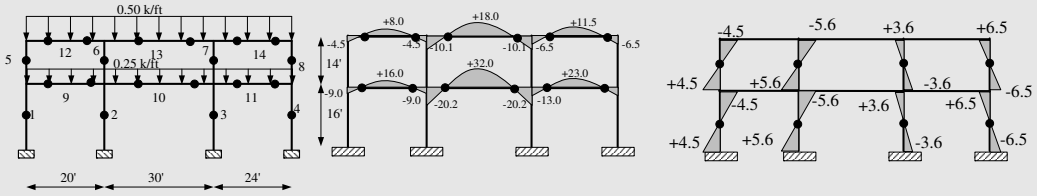
$$
\begin{aligned}
M_5^{top} &= +M_{12}^{lft} && = -4.5 \text{ k.ft} \\
M_5^{bot} &= -M_5^{top} && = 4.5 \text{ k.ft} \\
M_6^{top} &= -M_{12}^{rgt} + M_{13}^{lft} = -(-4.5) + (-10.1) && = -5.6 \text{ k.ft} \\
M_6^{bot} &= -M_6^{top} && = 5.6 \text{ k.ft} \\
M_7^{top} &= -M_{13}^{rgt} + M_{14}^{lft} = -(-10.1) + (-6.5) && = -3.6 \text{ k.ft} \\
M_7^{bot} &= -M_7^{top} && = 3.6 \text{ k.ft} \\
M_8^{top} &= -M_{14}^{rgt} = -(-6.5) && = 6.5 \text{ k.ft} \\
M_8^{bot} &= -M_8^{top} && = -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

निचले स्तंभ आघूर्ण

$$
\begin{aligned}
M_1^{top} &= +M_5^{bot} + M_9^{lft} = 4.5 - 9.0 && = -4.5 \text{ k.ft} \\
M_1^{bot} &- M_1^{top} && = 4.5 \text{ k.ft} \\
M_2^{top} &= +M_6^{bot} - M_9^{rgt} + M_{10}^{lft} = 5.6 - (-9.0) + (-20.3) && = -5.6 \text{ k.ft} \\
M_2^{bot} &= -M_2^{top} && = 5.6 \text{ k.ft} \\
M_3^{top} &= +M_7^{bot} - M_{10}^{rgt} + M_{11}^{lft} = -3.6 - (-20.3) + (-13.0) && = 3.6 \text{ k.ft} \\
M_3^{bot} &= -M_3^{top} && = -3.6 \text{ k.ft} \\
M_4^{top} &= +M_8^{bot} - M_{11}^{rgt} = -6.5 - (-13.0) && = 6.5 \text{ k.ft} \\
M_4^{bot} &= -M_4^{top} && = -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

आघूर्ण आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



शीर्ष गर्डर अपरूपण

$$
\begin{aligned}
V_{12}^{lft} &= \frac{w_{12}L_{12}}{2} = \frac{(0.25)(20)}{2} &&= 2.5 \text{ k} \\
V_{12}^{rgt} &= -V_{12}^{lft} &&= -2.5 \text{ k} \\
V_{13}^{lft} &= \frac{w_{13}L_{13}}{2} = \frac{(0.25)(30)}{2} &&= 3.75 \text{ k} \\
V_{13}^{rgt} &= -V_{13}^{lft} &&= -3.75 \text{ k} \\
V_{14}^{lft} &= \frac{w_{14}L_{14}}{2} = \frac{(0.25)(24)}{2} &&= 3.0 \text{ k} \\
V_{14}^{rgt} &= -V_{14}^{lft} &&= -3.0 \text{ k}
\end{aligned}
$$

निचला गर्डर अपरूपण

$$
\begin{aligned}
V_{9}^{lft} &= \frac{w_{9}L_{9}}{2} = \frac{(0.5)(20)}{2} &&= 5.00 \text{ k} \\
V_{9}^{rgt} &= -V_{9}^{lft} &&= -5.00 \text{ k} \\
V_{10}^{lft} &= \frac{w_{10}L_{10}}{2} = \frac{(0.5)(30)}{2} &&= 7.50 \text{ k} \\
V_{10}^{rgt} &= -V_{10}^{lft} &&= -7.50 \text{ k} \\
V_{11}^{lft} &= \frac{w_{11}L_{11}}{2} = \frac{(0.5)(24)}{2} &&= 6.00 \text{ k} \\
V_{11}^{rgt} &= -V_{11}^{lft} &&= -6.00 \text{ k}
\end{aligned}
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्तंभ अपरूपण

$$V_5 = \frac{M_5^{top}}{\frac{H_5}{2}} = \frac{-4.5}{\frac{14}{2}} = -0.64 \text{ k}$$

$$V_6 = \frac{M_6^{top}}{\frac{H_6}{2}} = \frac{-5.6}{\frac{14}{2}} = -0.80 \text{ k}$$

$$V_7 = \frac{M_7^{top}}{\frac{H_7}{2}} = \frac{3.6}{\frac{14}{2}} = 0.52 \text{ k}$$

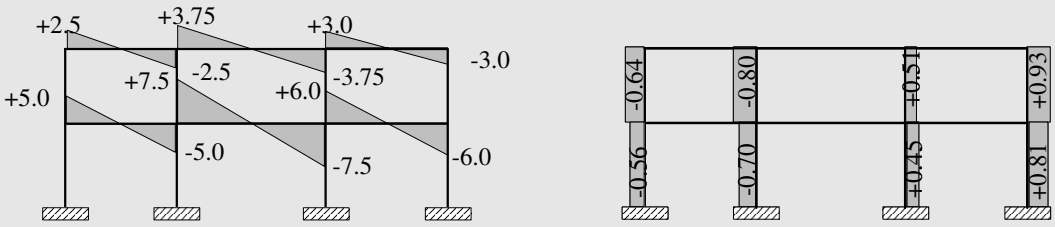
$$V_8 = \frac{M_8^{top}}{\frac{H_8}{2}} = \frac{6.5}{\frac{14}{2}} = 0.93 \text{ k}$$

$$V_1 = \frac{M_1^{top}}{\frac{H_1}{2}} = \frac{-4.5}{\frac{16}{2}} = -0.56 \text{ k}$$

$$V_2 = \frac{M_2^{top}}{\frac{H_2}{2}} = \frac{-5.6}{\frac{16}{2}} = -0.70 \text{ k}$$

$$V_3 = \frac{M_3^{top}}{\frac{H_3}{2}} = \frac{3.6}{\frac{16}{2}} = 0.46 \text{ k}$$

$$V_4 = \frac{M_4^{top}}{\frac{H_4}{2}} = \frac{6.5}{\frac{16}{2}} = 0.81 \text{ k}$$



शीर्ष स्तंभ के अक्षीय बल

$$P_5 = V_{12}^{lft} = 2.50 \text{ k}$$

$$P_6 = -V_{12}^{rgt} + V_{13}^{lft} = -(-2.50) + 3.75 = 6.25 \text{ k}$$

$$P_7 = -V_{13}^{rgt} + V_{14}^{lft} = -(-3.75) + 3.00 = 6.75 \text{ k}$$

$$P_8 = -V_{14}^{rgt} = 3.00 \text{ k}$$

निचले स्तंभ के अक्षीय बल

$$P_1 = P_5 + V_9^{lft} = 2.50 + 5.0 = 7.5 \text{ k}$$

$$P_2 = P_6 - V_{10}^{rgt} + V_9^{lft} = 6.25 - (-5.00) + 7.50 = 18.75 \text{ k}$$

$$P_3 = P_7 - V_{11}^{rgt} + V_{10}^{lft} = 6.75 - (-7.50) + 6.0 = 20.25 \text{ k}$$

$$P_4 = P_8 - V_{11}^{rgt} = 3.00 - (-6.00) = 9.00 \text{ k}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

VERTICAL LOADS

Height	Span	L1	L2	L3
		20	30	24
14	Load	0.25	0.25	0.25
16	Load	0.5	0.5	0.5

MOMENTS

Col	Bay 1 Beam Lft	Bay 1 Beam Cnt	Bay 1 Beam Rgt	Bay 1 Column	Bay 2 Beam Lft	Bay 2 Beam Cnr	Bay 2 Beam Rgt	Bay 2 Column	Bay 3 Beam Lft	Bay 3 Beam Cnt	Bay 3 Beam Rgt	Col
	-4.5	8.0	-4.5		-10.1	18.0	-10.1		-6.5	11.5	-6.5	
-4.5				-5.6				3.6				6.5
4.5				5.6				-3.6				-6.5
	-9.0	16.0	-9.0		-20.3	36.0	-20.3		-13.0	23.0	-13.0	
-4.5				-5.6				3.6				6.5
4.5				5.6				-3.6				-6.5

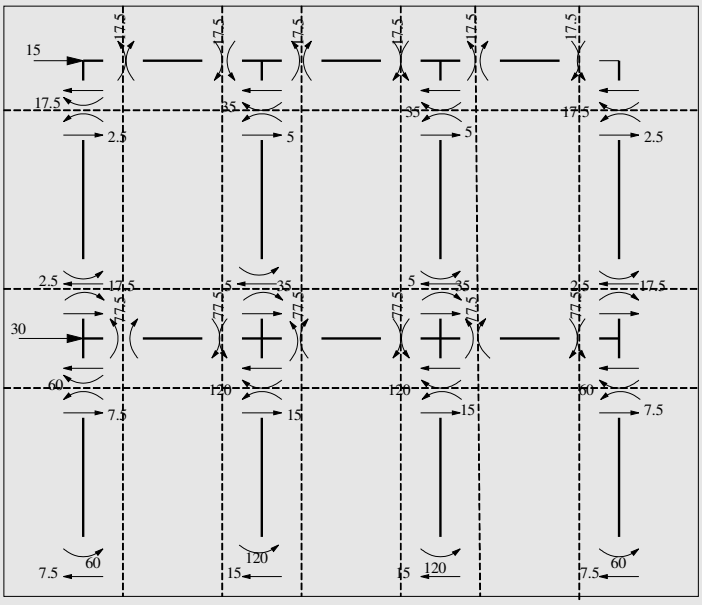
SHEAR

Col	Bay 1 Beam Lft	Bay 1 Beam	Bay 1 Beam Rgt	Bay 1 Column	Bay 2 Beam Lft	Bay 2 Beam	Bay 2 Beam Rgt	Bay 2 Column	Bay 3 Beam Lft	Bay 3 Beam	Bay 3 Beam Rgt	Col
	2.50		-2.50		3.75		-3.75		3.00		-3.00	
-0.64				-0.80				0.52				0.93
	5.00		-5.00		7.50		-7.50		6.00		-6.00	
-0.56				-0.70				0.46				0.81

AXIAL FORCE

Col	Bay 1 Beam	Bay 1 Column	Bay 2 Beam	Bay 2 Column	Bay 3 Beam	Col
	0.00		0.00		0.00	
2.50		6.25		6.75		3.00
	0.00		0.00		0.00	
7.50		18.75		20.25		9.00

क्षैतिज भार



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्तंभ अपरूपण

$$
\begin{aligned}
V_5 &= \frac{15}{(2)(3)} && = 2.5 \text{ k} \\
V_6 &= 2(V_5) = (2)(2.5) && = 5 \text{ k} \\
V_7 &= 2(V_5) = (2)(2.5) && = 5 \text{ k} \\
V_8 &= V_5 && = 2.5 \text{ k} \\
V_1 &= \frac{15+30}{(2)(3)} && = 7.5 \text{ k} \\
V_2 &= 2(V_1) = (2)(7.5) && = 15 \text{ k} \\
V_3 &= 2(V_1) = (2)(2.5) && = 15 \text{ k} \\
V_4 &= V_1 && = 7.5 \text{ k}
\end{aligned}
$$

शीर्ष स्तंभ आघूर्ण

$$
\begin{aligned}
M_5^{top} &= \frac{V_1 H_5}{2} = \frac{(2.5)(14)}{2} && = 17.5 \text{ k.ft} \\
M_5^{bot} &= -M_5^{top} && = -17.5 \text{ k.ft} \\
M_6^{top} &= \frac{V_6 H_6}{2} = \frac{(5)(14)}{2} && = 35.0 \text{ k.ft} \\
M_6^{bot} &= -M_6^{top} && = -35.0 \text{ k.ft} \\
M_7^{top} &= \frac{V_7^{up} H_7}{2} = \frac{(5)(14)}{2} && = 35.0 \text{ k.ft} \\
M_7^{bot} &= -M_7^{top} && = -35.0 \text{ k.ft} \\
M_8^{top} &= \frac{V_8^{up} H_8}{2} = \frac{(2.5)(14)}{2} && = 17.5 \text{ k.ft} \\
M_8^{bot} &= -M_8^{top} && = -17.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

निचले स्तंभ आघूर्ण

$$
\begin{aligned}
M_1^{top} &= \frac{V_1^{dwn} H_1}{2} = \frac{(7.5)(16)}{2} && = 60 \text{ k.ft} \\
M_1^{bot} &= -M_1^{top} && = -60 \text{ k.ft} \\
M_2^{top} &= \frac{V_2^{dwn} H_2}{2} = \frac{(15)(16)}{2} && = 120 \text{ k.ft} \\
M_2^{bot} &= -M_2^{top} && = -120 \text{ k.ft} \\
M_3^{top} &= \frac{V_3^{dwn} H_3}{2} = \frac{(15)(16)}{2} && = 120 \text{ k.ft} \\
M_3^{bot} &= -M_3^{top} && = -120 \text{ k.ft} \\
M_4^{top} &= \frac{V_4^{dwn} H_4}{2} = \frac{(7.5)(16)}{2} && = 60 \text{ k.ft} \\
M_4^{bot} &= -M_4^{top} && = -60 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

प्रारूप

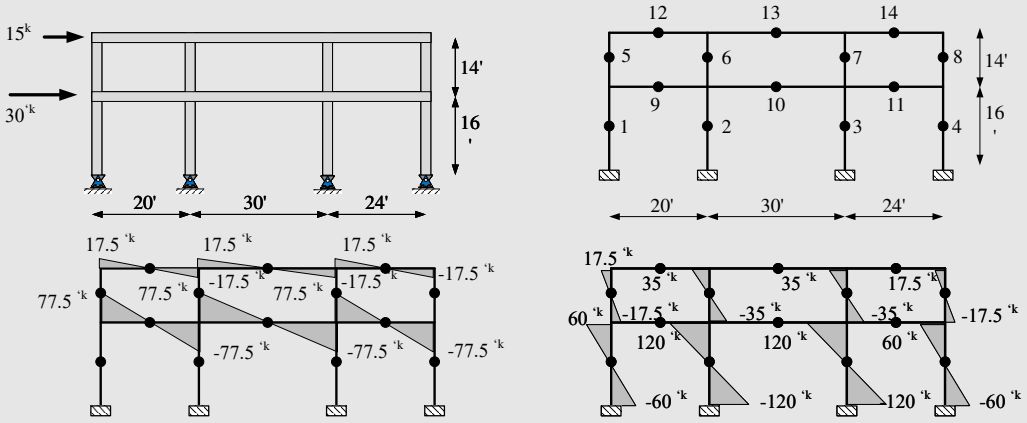
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

शीर्ष गर्डर आघूर्ण

$$
\begin{aligned}
M_{12}^{lft} &= M_{5}^{top} &&= 17.5 \text{ k.ft}\\
M_{12}^{rgt} &= -M_{12}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft}\\
M_{13}^{lft} &= M_{12}^{rgt} + M_{6}^{top} = -17.5 + 35 &&= 17.5 \text{ k.ft}\\
M_{13}^{rgt} &= -M_{13}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft}\\
M_{14}^{lft} &= M_{13}^{rgt} + M_{7}^{top} = -17.5 + 35 &&= 17.5 \text{ k.ft}\\
M_{14}^{rgt} &= -M_{14}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

निचले गर्डर आघूर्ण

$$
\begin{aligned}
M_{9}^{lft} &= M_{1}^{top} - M_{5}^{bot} = 60 - (-17.5) &&= 77.5 \text{ k.ft}\\
M_{9}^{rgt} &= -M_{9}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft}\\
M_{10}^{lft} &= M_{9}^{rgt} + M_{2}^{top} - M_{6}^{bot} = -77.5 + 120 - (-35) &&= 77.5 \text{ k.ft}\\
M_{10}^{rgt} &= -M_{10}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft}\\
M_{11}^{lft} &= M_{10}^{rgt} + M_{3}^{top} - M_{7}^{bot} = -77.5 + 120 - (-35) &&= 77.5 \text{ k.ft}\\
M_{11}^{rgt} &= -M_{11}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$



Victor E. Saouma
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

शीर्ष गर्डर अपरूपण

$$
\begin{aligned}
V_{12}^{lft} &= -\frac{2M_{12}^{lft}}{L_{12}} = -\frac{(2)(17.5)}{20} &&= -1.75 \text{ k} \\
V_{12}^{rgt} &= +V_{12}^{lft} &&= -1.75 \text{ k} \\
V_{13}^{lft} &= -\frac{2M_{13}^{lft}}{L_{13}} = -\frac{(2)(17.5)}{30} &&= -1.17 \text{ k} \\
V_{13}^{rgt} &= +V_{13}^{lft} &&= -1.17 \text{ k} \\
V_{14}^{lft} &= -\frac{2M_{14}^{lft}}{L_{14}} = -\frac{(2)(17.5)}{24} &&= -1.46 \text{ k} \\
V_{14}^{rgt} &= +V_{14}^{lft} &&= -1.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

निचला गर्डर अपरूपण

$$
\begin{aligned}
V_{9}^{lft} &= -\frac{2M_{12}^{lft}}{L_{9}} = -\frac{(2)(77.5)}{20} &&= -7.75 \text{ k} \\
V_{9}^{rgt} &= +V_{9}^{lft} &&= -7.75 \text{ k} \\
V_{10}^{lft} &= -\frac{2M_{10}^{lft}}{L_{10}} = -\frac{(2)(77.5)}{30} &&= -5.17 \text{ k} \\
V_{10}^{rgt} &= +V_{10}^{lft} &&= -5.17 \text{ k} \\
V_{11}^{lft} &= -\frac{2M_{11}^{lft}}{L_{11}} = -\frac{(2)(77.5)}{24} &&= -6.46 \text{ k} \\
V_{11}^{rgt} &= +V_{11}^{lft} &&= -6.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

शीर्ष स्तंभ के अक्षीय बल (+ve तनन, -ve संपीडन)

$$
\begin{aligned}
P_5 &= -V_{12}^{lft} &&= -(-1.75) \text{ k} \\
P_6 &= +V_{12}^{rgt} - V_{13}^{lft} = -1.75 - (-1.17) &&= -0.58 \text{ k} \\
P_7 &= +V_{13}^{rgt} - V_{14}^{lft} = -1.17 - (-1.46) &&= 0.29 \text{ k} \\
P_8 &= V_{14}^{rgt} &&= -1.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

निचले स्तंभ के अक्षीय बल (+ve तनन, -ve संपीडन)

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_5 + V_{9}^{lft} = 1.75 - (-7.75) &&= 9.5 \text{ k} \\
P_2 &= P_6 + V_{10}^{rgt} + V_{9}^{lft} = -0.58 - 7.75 - (-5.17) &&= -3.16 \text{ k} \\
P_3 &= P_7 + V_{11}^{rgt} + V_{10}^{lft} = 0.29 - 5.17 - (-6.46) &&= 1.58 \text{ k} \\
P_4 &= P_8 + V_{11}^{rgt} = -1.46 - 6.46 &&= -7.66 \text{ k}
\end{aligned}
$$

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

# of Bays	3

# of Storeys					2
		Force		Shear	
	H	Lat.	Tot	Ext	Int
H1	14	15	15	2.5	5
H2	16	30	45	7.5	15

HORIZONTAL LOAD

	L1			L2			L3		
	20			30			24		
MOMENTS									
	Bay 1			**Bay 2**			**Bay 3**		
Col	Beam		Column	Beam		Column	Beam		Col
	Lft	Rgt		Lft	Rgt		Lft	Rgt	
	17.5	-17.5		17.5	-17.5		17.5	-17.5	
17.5			35.0			35.0			17.5
-17.5			-35.0			-35.0			-17.5
	77.5	-77.5		77.5	-77.5		77.5	-77.5	
60.0			120.0			120.0			60.0
-60.0			-120.0			-120.0			-60.0

SHEAR									
	Bay 1			**Bay 2**			**Bay 3**		
Col	Beam		Column	Beam		Column	Beam		Col
	Lft	Rgt		Lft	Rgt		Lft	Rgt	
	-1.75	-1.75		-1.17	-1.17		-1.46	-1.46	
2.50			5.00			5.00			2.50
2.50			5.00			5.00			2.50
	-7.75	-7.75		-5.17	-5.17		-6.46	-6.46	
7.50			15.00			15.00			7.50
7.50			15.00			15.00			7.50

AXIAL FORCE						
Bay 1			**Bay 2**		**Bay 3**	
Col	Beam	Column	Beam	Column	Beam	Col
	0.00		0.00		0.00	
1.75		-0.58		0.29		-1.46
	0.00		0.00		0.00	
9.50		-3.17		1.58		-7.92

संयुक्त भार

अभिकल्प प्राचल: ऊर्ध्वाधर और पार्श्व भार के दोनों सन्निकट विश्लेषणों के आधार पर अब हम ढाँचे के लिए अभिकल्प प्राचल ज्ञात करना चाहते हैं।

स्तंभ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

		स्तंभ		
अवयव		ऊर्ध्व.	क्षैति.	अभिकल्प मान
1	आघूर्ण	4.50	60.00	64.50
	अक्षीय	7.50	9.50	17.00
	अपरूपण	0.56	7.50	8.06
2	आघूर्ण	5.60	120.00	125.60
	अक्षीय	18.75	15.83	34.58
	अपरूपण	0.70	15.00	15.70
3	आघूर्ण	3.60	120.00	123.60
	अक्षीय	20.25	14.25	34.50
	अपरूपण	0.45	15.00	15.45
4	आघूर्ण	6.50	60.00	66.50
	अक्षीय	9.00	7.92	16.92
	अपरूपण	0.81	7.50	8.31
5	आघूर्ण	4.50	17.50	22.00
	अक्षीय	2.50	1.75	4.25
	अपरूपण	0.64	2.50	3.14
6	आघूर्ण	5.60	35.00	40.60
	अक्षीय	6.25	2.92	9.17
	अपरूपण	0.80	5.00	5.80
7	आघूर्ण	3.60	35.00	38.60
	अक्षीय	6.75	2.63	9.38
	अपरूपण	0.51	5.00	5.51
8	आघूर्ण	6.50	17.50	24.00
	अक्षीय	3.00	1.46	4.46
	अपरूपण	0.93	2.50	3.43

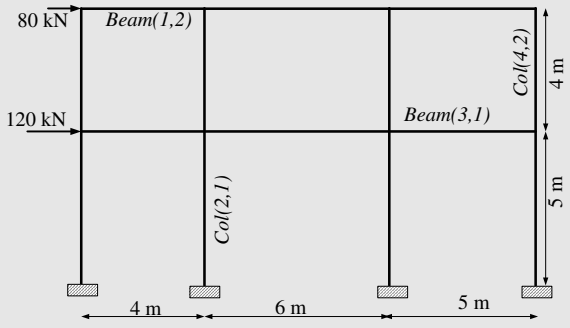
धरनें

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

		धरनें		
अवयव		ऊर्ध्व.	कृषैति.	अभिकल्प मान
9	-ve आघूर्ण	9.00	77.50	86.50
	+ve आघूर्ण	16.00	0.00	16.00
	अपरूपण	5.00	7.75	12.75
10	-ve आघूर्ण	20.20	77.50	97.70
	+ve आघूर्ण	36.00	0.00	36.00
	अपरूपण	7.50	5.17	12.67
11	-ve आघूर्ण	13.0	77.50	90.50
	+ve आघूर्ण	23.00	0.00	23.00
	अपरूपण	6.00	6.46	12.46
12	-ve आघूर्ण	4.50	17.50	22.00
	+ve आघूर्ण	8.00	0.00	8.00
	अपरूपण	2.50	1.75	4.25
13	-ve आघूर्ण	10.10	17.50	27.60
	+ve आघूर्ण	18.00	0.00	18.00
	अपरूपण	3.75	1.17	4.92
14	-ve आघूर्ण	6.50	17.50	24.00
	+ve आघूर्ण	11.50	0.00	11.50
	अपरूपण	3.00	1.46	4.46

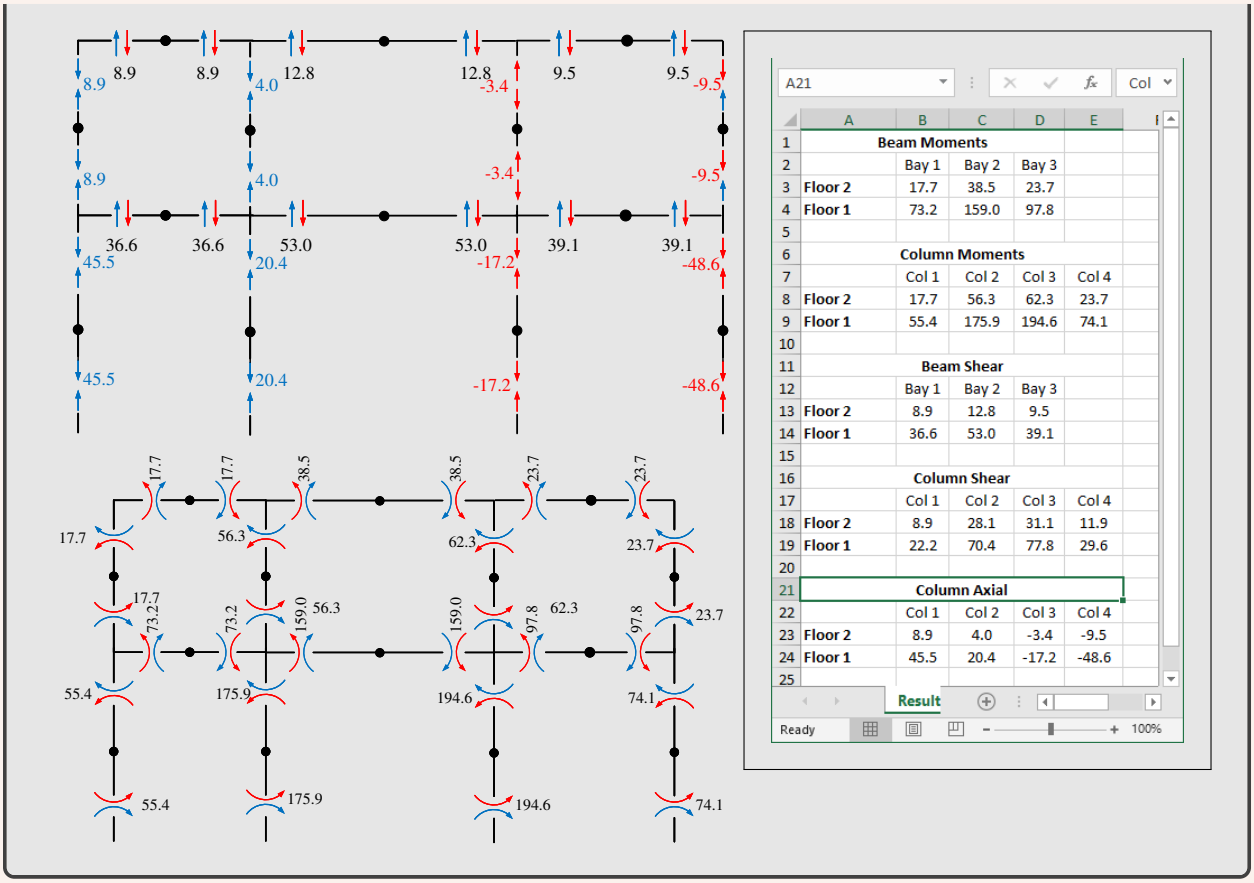
38.1.3.2.1.2 उदाहरण 38.2: Matlab समाधान



MATLAB®कोड, जो §I.2.2 में सूचीबद्ध है, का उपयोग निकटवर्ती ढाँचे के विश्लेषण के लिए किया गया है। पाठकों को प्रोत्साहित किया जाता है कि वे इस समस्या को हस्त-चालित रूप से हल करें और अपने परिणामों की इन चित्रों से तुलना करें।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



38.1.3.2.2 ब्रैकट विधि

41 यह विधि इस मान्यता पर आधारित है कि ढाँचा ब्रैकट धरन की भाँति कार्य करता है और स्तंभों के अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल धरन के तंतुओं के रूप में कार्य करते हैं। अधिक विशिष्ट रूप से:

1. नति-परिवर्तन बिंदु प्रत्येक मंजिल में स्तंभ की मध्य-ऊँचाई पर और प्रत्येक धरन के मध्य-बिंदु पर स्थित होता है।
2. प्रत्येक स्तंभ का अक्षीय बल उस स्तर पर स्तंभ-समूह के क्षेत्रफलों के गुरुत्व-केंद्र से उसकी दूरी के समानुपाती होता है।

42 विश्लेषण प्रक्रिया

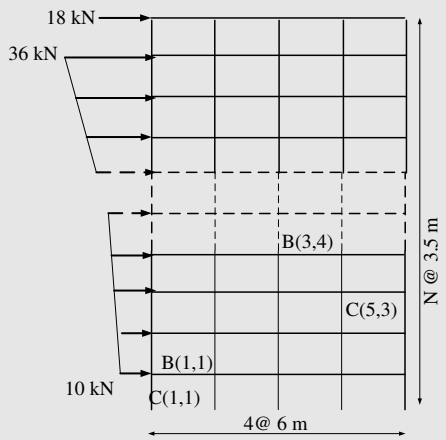
1. स्तंभों के क्षेत्रफलों से स्तंभ-समूहों का गुरुत्व-केंद्र निर्धारित करें (स्तंभ क्षेत्रफल को एक माना जा सकता है)।
2. स्तंभों के नति-परिवर्तन बिंदु पर विशिष्ट मंजिल के संतुलन पर विचार करें। चूँकि स्तंभों के अक्षीय बलों को गुरुत्व-केंद्र से दूरी के समानुपाती माना जाता है, इसलिए उन्हें एक अज्ञात स्तंभ-अक्षीय-बल के पदों में व्यक्त किया जाता है। अतः अनुभाग के किसी बिंदु के परितः बाह्य भारों और स्तंभों के अक्षीय बलों का आघूर्ण लेकर स्तंभों के अज्ञात बलों का मूल्यांकन किया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. प्रत्येक जोड़ पर पृथक रूप से $\sum F_y = 0$ अवस्था का उपयोग करके धरन अपरूपण की गणना की जाती है। स्तंभ का अक्षीय बल पिछले चरण से ज्ञात है।
4. धरन के सिरे का आघूर्ण, धरन अपरूपण और धरन की आधी लंबाई के गुणनफल के बराबर है, क्योंकि नति-परिवर्तन बिंदु को धरन के केंद्र पर माना गया है।
5. प्रत्येक जोड़ पर पृथक रूप से $\sum M_z = 0$ अवस्था पर विचार करके स्तंभ आघूर्ण निर्धारित किए जाते हैं। धरनों के सिरों के आघूर्ण पिछले चरण से ज्ञात हैं।
6. आधारों पर $\sum F_x = 0$ और $\sum F_y = 0$ की जाँच करें।

43 ब्रैकट विधि द्वारा ढाँचे के सन्निकट विश्लेषण के लिए MATLAB®कोड §I.2.2 में दिया गया है।

38.1.3.2.2.1 उदाहरण 38.3: ब्रैकट विधि; उच्च-तलीय भवन



पुनः MATLAB®कोड (§I.2.2) का उपयोग करके हम 4 खाड़ियों और 50 मंजिलों से बने निकटवर्ती उच्च-तलीय भवन का विश्लेषण करते हैं। यह उदाहरण परिशिष्ट के MATLAB®कोड की नम्यता दर्शाता है।

हम MATLAB®कोड का उपयोग करते हैं।

```
nBays=4;BaySpac=[6 6 6 6];CArea=[1 1 1 1 1];
nFloors=40;HeightCol=3.5*ones(40,1);
idf=0:39;HorLoad=10+26*idf/39;
```

और स्तंभ 1 तथा खाड़ी 1 के परिणाम नीचे सारणीबद्ध हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

		Column Ext				Beam, Bay 1	
		Moment	Shear	Axial		Moment	Shear
3	Floor 40	6.3	3.6	2.1		6.3	2.1
4	Floor 39	12.5	7.1	8.4		18.8	6.3
5	Floor 38	18.6	10.6	18.7		31.0	10.3
6	Floor 37	24.5	14.0	33.1		**43.1**	14.4
7	Floor 36	30.3	17.3	51.3		54.8	18.3
8	Floor 35	36.1	20.6	73.5		66.4	22.1
9	Floor 34	41.7	23.8	99.4		77.7	25.9
10	Floor 33	47.1	26.9	129.0		88.8	29.6
11	Floor 32	52.5	30.0	162.2		**99.6**	33.2
12	Floor 31	57.8	33.0	198.9		110.3	36.8
13	Floor 30	62.9	35.9	239.1		120.6	40.2
14	Floor 29	67.9	38.8	282.7		130.8	43.6
15	Floor 28	72.8	41.6	329.6		140.7	46.9
16	Floor 27	77.6	44.3	379.8		**150.4**	50.1
17	Floor 26	82.2	47.0	433.0		159.8	53.3
18	Floor 25	86.8	49.6	489.4		169.1	56.4
19	Floor 24	91.2	52.1	548.7		178.0	59.3
20	Floor 23	95.6	54.6	611.0		186.8	62.3
21	Floor 22	99.7	57.0	676.1		**195.3**	65.1
22	Floor 21	103.8	59.3	743.9		203.6	67.9
23	Floor 20	107.8	61.6	814.5		211.6	70.5
24	Floor 19	111.6	63.8	887.6		219.5	73.1
25	Floor 18	115.4	65.9	963.3		227.0	75.7
26	Floor 17	119.0	68.0	1041.4		234.4	78.1
27	Floor 16	122.5	70.0	1121.9		241.5	80.5
28	Floor 15	125.9	71.9	1204.7		248.4	82.8
29	Floor 14	129.1	73.8	1289.8		255.0	85.0
30	Floor 13	132.3	75.6	1376.9		261.5	87.1
31	Floor 12	135.3	77.3	1466.1		267.6	89.2
32	Floor 11	138.2	79.0	1557.3		273.6	91.2
33	Floor 10	141.1	80.6	1650.4		279.3	93.1
34	Floor 9	143.7	82.1	1745.3		284.8	94.9
35	Floor 8	146.3	83.6	1842.0		290.0	96.7
36	Floor 7	148.8	85.0	1940.4		295.1	98.3
37	Floor 6	151.1	86.3	2040.3		299.8	99.9
38	Floor 5	153.3	87.6	2141.8		304.4	101.5
39	Floor 4	155.4	88.8	2244.7		308.7	102.9
40	Floor 3	157.4	89.9	2348.9		312.8	104.3
41	Floor 2	159.3	91.0	2454.5		316.6	105.5
42	Floor 1	161.0	92.0	2561.2		320.3	106.8

Results Sheet1 Ready 100%

38.2 संरचनात्मक प्रतिक्रिया

44 हम पार्श्व भारों के अधीन भवनों की संरचनात्मक प्रतिक्रिया की जाँच से आरंभ करते हैं और तीन विशिष्ट संरचनात्मक अभिकल्प प्रकारों पर ध्यान केंद्रित करते हैं: कूप उपतंत्र, अपरूपण भित्ति और ट्रसित अपरूपण भित्ति। प्रत्येक के लिए हम उसकी कार्यक्षमता, लाभ और हानियों पर चर्चा करेंगे, सारणी 38.1।

38.2.1 कूप उपतंत्र

45 यह केंद्रीकृत संरचना तल-डायाफ्रामों द्वारा पार्श्व भारों को स्थानांतरित करती है और अपरूपण तथा बंकन आघूर्णों का प्रतिरोध करने वाले ऊर्ध्वाधर ब्रैकट के रूप में कार्य करती है। केंद्रीय स्थान के कारण यह मरोड़ी भारों के विरुद्ध भी उत्कृष्ट प्रतिरोध प्रदान करती है और इसकी उच्च दृढता पार्श्व भारों के अधीन भवन के विक्षेप को उल्लेखनीय रूप से घटाती है।

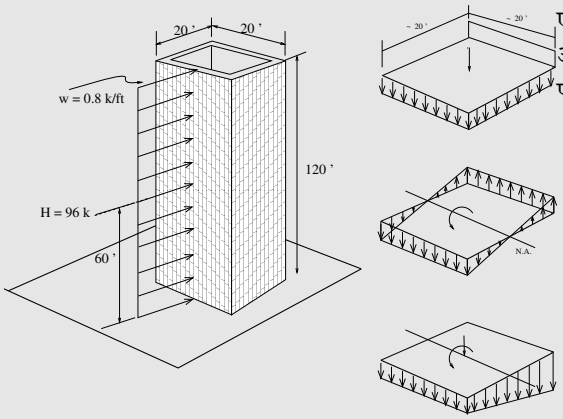
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

[46] कार्यक्षमता की दृष्टि से इसमें ऊर्ध्वाधर आवागमन (उद्वाहक, सीढ़ी-कूप) और आवश्यक सेवाएँ स्थित होती हैं। केंद्रीय क्रोड प्रायः केंद्र में रखा जाता है, जिससे स्थिरता बढ़ती है और एक केंद्रीय भार-प्रतिरोधी तंत्र प्राप्त होता है।

[47] प्रमुख लाभों में उच्च दृढ़ता, जिससे पार्श्व विक्षेप घटता है, सशक्त मरोड़ी प्रतिरोध, और संरचनात्मक तथा कार्यात्मक भूमिकाओं को संयोजित करने की क्षमता सम्मिलित हैं। किंतु प्रमुख हानियाँ अभिकल्प की जटिलता—क्योंकि सेवाओं और संरचनात्मक अवयवों का एकीकरण दुष्कर हो सकता है—और पर्याप्त स्थान का उपयोग हैं, जो वास्तुशिल्पीय अभिन्यास को प्रभावित कर सकते हैं।

38.2.1.1 उदाहरण 38.4: कूप उपतंत्र

Lin and Stotesbury, 1981 *Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers* से रूपांतरित।



एक प्रबलित-कंक्रीट कूप 20 ft वर्गाकार, 120 ft ऊँचा और 1 ft मोटी भित्तियों वाला है। इस पर 0.8 k/ft का पार्श्व बल लगता है। प्रतिबल निर्धारित करें।

1. इस संरचना की तुलना अनुभाग 38.2.2.1 में विश्लेषित संरचना से करने पर, आधार पर कार्यरत कुल ऊर्ध्वाधर भार अब बढ़कर हो जाता है
$$V = 4(400) = 1,600 \text{ k}$$
2. पहले की भाँति, अधिकतम आघूर्ण और अपरूपण क्रमशः $5,760$ k.ft और 96 k हैं।
3. नलिकाकार अनुभाग का जड़त्व आघूर्ण है
$$I = \Sigma \frac{bd^3}{12} = \frac{(20)(20)^3}{12} - \frac{(18)(18)^3}{12} = 4,600 \text{ ft}^4$$
4. अधिकतम आनमनी प्रतिबल:
$$\sigma_{fl} = \pm \frac{MC}{I} = \pm \frac{(5,760) \text{ k.ft}(20/2) \text{ ft}}{(4,600) \text{ ft}^4} = \pm 12.5 \text{ ksf} = \pm 87 \text{ psi}$$
5. औसत अपरूपण प्रतिबल है
$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{(96) \text{ k}}{2(20)(1) \text{ ft}^2} = 2.4 \text{ ksf} = 17 \text{ psi}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6. 1,600 k का ऊर्ध्वाधर भार निम्नलिखित अक्षीय प्रतिबल उत्पन्न करता है

$$\sigma_{ax} = \frac{P}{A} = \frac{-(1{,}600)\ \text{k}}{(4)(20)(1)\ \text{ft}^2} = -20\ \text{ksf} = -140\ \text{psi}$$

7. अतः कुल प्रतिबल हैं

$$\sigma = \sigma_{ax} + \sigma_{fl}$$
$$\sigma_1 = -140 + 87 = -53\ \text{psi}$$
$$\sigma_2 = -140 - 87 = -227\ \text{psi}$$

अतः कोई तनन प्रतिबल नहीं है और ये प्रतिबल एकल अपरूपण भित्ति से प्राप्त प्रतिबलों की तुलना में बहुत बेहतर हैं।

38.2.2 अपरूपण भित्ति

48 पार्श्व भार तल-डायाफ्रामों द्वारा ऊर्ध्वाधर भित्ति-अवयवों तक स्थानांतरित किए जाते हैं, जो अपरूपण बलों और बंकन आघूर्णों का प्रभावी प्रतिरोध करते हैं। यह अभिकल्प पार्श्व विक्षेपों के नियंत्रण के लिए पर्याप्त दृढता भी प्रदान करता है।

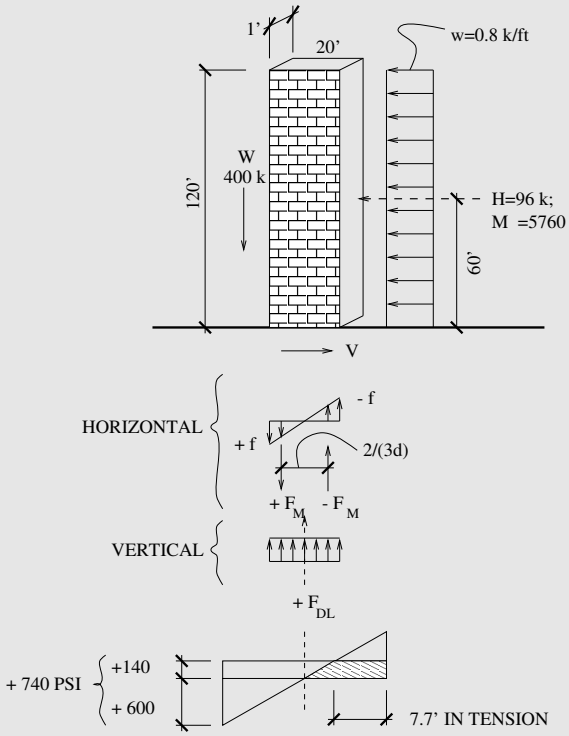
49 भित्तियाँ मुख्यतः संरचनात्मक अवयवों के रूप में कार्य करती हैं, किंतु विभाजक जैसी गौण भूमिकाएँ भी समाहित कर सकती हैं। स्थान-निर्धारण की नम्यता भित्ति को भवन की परिधि पर अथवा भीतर रखने देती है।

50 इसके लाभों में पार्श्व बलों का दक्ष प्रतिरोध, अधिक जटिल तंत्रों की तुलना में अभिकल्प और निर्माण की सरलता, तथा भार-प्रतिरोध और स्थान-उपयोग को इष्टतम करने हेतु रणनीतिक स्थान-निर्धारण की नम्यता सम्मिलित हैं। किंतु हानियों में खिड़कियों और द्वारों के स्थान पर संभावित सीमाएँ और, केंद्रीय स्थान न होने पर, सीमित मरोड़ी प्रतिरोध सम्मिलित हैं।

38.2.2.1 उदाहरण 38.5: कंक्रीट अपरूपण भित्ति

Lin and Stotesbury, 1981 *Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers* से रूपांतरित।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



हम 20 ft चौड़ी, 1 ft मोटी और 120 ft ऊँची प्रबलित-कंक्रीट भित्ति पर विचार करते हैं, जिसके आधार पर 400 k का ऊर्ध्वाधर भार कार्य करता है। पवन के परिणामस्वरूप भित्ति पर प्रति ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 0.8 kip/ft का एकसमान क्षैतिज बल कार्यरत माना जाता है। पवन भार का प्रतिरोध करने के लिए भित्ति में आनमनी और अपरूपण प्रतिबलों की गणना करनी है।

1. आधार पर अधिकतम अपरूपण बल और बंकन आघूर्ण

$$V_{max} = wL = (0.8)\ \text{k.ft}(120)\ \text{ft} = 96\ \text{k}$$

$$M_{max} = \frac{wL^2}{2} = \frac{(0.8)\ \text{k.ft}(120)^2\ \text{ft}^2}{2} = 5,760\ \text{k.ft} \tag{38.1}$$

2. परिणामस्वरूप उत्केंद्रता है

$$e_{\text{Actual}} = \frac{M}{P} = \frac{(5,760)\ \text{k.ft}}{(400)\ \text{k}} = 14.4\ \text{ft}$$

3. निर्णायक उत्केंद्रता है

$$e_{cr} = \frac{L}{6} = \frac{(20)\ \text{ft}}{6} = 3.3\ \text{ft} < e_{\text{Actual}} N.G.$$

अतः आधार पर तनन होगा।

4. भित्ति का जड़त्व आघूर्ण है

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1)\ \text{ft}(20)\ \text{ft}^3}{12} = 667\ \text{ft}^4$$

5. अधिकतम आनमनी प्रतिबल होंगे

$$\sigma_{max} = \pm\frac{Mc}{I} = \frac{(5,760)\ \text{k.ft}(10)\ \text{ft}}{(667)\ \text{ft}^4} = \pm(86.5)\ \text{ksf} = \pm(600)\ \text{psi}$$

6. औसत अपरूपण प्रतिबल है

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{(96)\ \text{k}}{(1)(20)\ \text{ft}^2} = 4.8\ \text{ksf} = 33.3\ \text{psi}$$

नाममात्र अपरूपण प्रबलन वाला कंक्रीट अपरूपण में कम से कम 100 psi वहन कर सकता है; अतः गणित अपरूपण प्रतिबल अनुमेय हैं।

7. भित्ति के आधार पर अक्षीय प्रतिबल होंगे

$$\sigma = \frac{-(400)\ \text{k}}{(1)(20)\ \text{ft}^2} = (20)\ \text{ksf} = \approx -140\ \text{psi}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

8. अतः अधिकतम प्रतिबल होंगे:

$$\sigma_1 = -140 + 600 = 460 \text{ psi} \quad \text{(Tension)}$$
$$\sigma_2 = -140 - 600 = -740 \text{ psi} \quad \text{(Compression)}$$

9. 740 psi का संपीडन प्रतिबल कंक्रीट सरलता से सह सकता है; 460 psi के तनन प्रतिबल का प्रतिरोध कुछ इस्पात प्रबलन द्वारा करना होगा।
10. चूँकि ये प्रतिबल *सेवाकालीन* प्रतिबल हैं, गुणकित प्रतिबल नहीं, इसलिए हम WSD उपागम अपनाते हैं और 20 ksi का अनुमेय प्रतिबल उपयोग करते हैं, जिसे भूकंपी और पवन भार के लिए $4/3$ से बढ़ाया जाएगा,

$$\sigma_{all} = \frac{4}{3}(20) = 26.7 \text{ ksi}$$

11. प्रतिबल वितरण रैखिक है—एक सिरे पर संपीडन और दूसरे पर तनन। तनन क्षेत्र की लंबाई (समरूप त्रिभुजों से) इस प्रकार दी जाती है

$$\frac{x}{460} = \frac{20}{460 + 740} \Rightarrow x = \frac{460}{460 + 740}(20) = 7.7 \text{ ft}$$

12. इस त्रिभुजाकार प्रतिबल खंड के भीतर कुल तनन बल है

$$T = \frac{1}{2}(460) \text{ ksi}(7.7 \times 12) \text{ in} \underbrace{(12) \text{ in}}_{\text{width}} = 250 \text{ k}$$

13. आवश्यक इस्पात प्रबलन की कुल मात्रा है

$$A_s = \frac{(250) \text{ k}}{(26.7) \text{ ksi}} = 9.4 \text{ in}^2$$

प्रबलन की यह मात्रा भित्ति के दोनों सिरों पर दी जानी चाहिए, क्योंकि पवन अथवा भूकंप किसी भी दिशा में कार्य कर सकता है। इसके अतिरिक्त, नींव को तनन उत्थापन बलों का प्रतिरोध करने के लिए अभिकल्पित किया जाना चाहिए (संभवतः पाइलों का उपयोग करके)।

38.2.3 ट्रसित अपरूपण भित्ति

51 पार्श्व भार तल-डायाफ्रामों द्वारा ट्रसित अवयवों तक स्थानांतरित किए जाते हैं और अक्षीय बलों के प्रतिरोध में अपरूपण भित्तियों के सामर्थ्य को ट्रसों की दक्षता के साथ संयोजित करते हैं। यह विन्यास उच्च दृढता प्रदान करता है और विक्षेपों को प्रभावी रूप से घटाता है।

52 यह विकर्ण बंधनों द्वारा भार-पथों को इष्टतम करता है और अनेक दक्ष बल-वितरण पथ बनाता है।

53 ट्रसित अपरूपण भित्ति, अपरूपण भित्तियों और ट्रसों के लाभों को संयोजित करती है; यह भार-वितरण दक्षता बढ़ाती है और अपनी तन्यता तथा ऊर्जा-अपव्यय क्षमताओं द्वारा बेहतर भूकंपी निष्पादन प्रदान करती है। किंतु अभिकल्प जटिल हो सकता है और सावधानीपूर्ण योजना तथा विवरण की आवश्यकता होती है। इसके अतिरिक्त, बंधन-अवयव वास्तुशिल्पीय बाधाएँ लगा सकते हैं और स्थान-उपयोग तथा वास्तुशिल्पीय अभिकल्प की नम्यता सीमित कर सकते हैं।

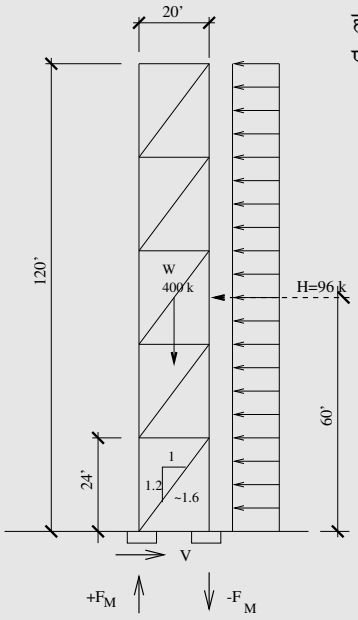
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 38.1: कूप उपतंत्र, अपरूपण भित्ति और ट्रसित अपरूपण भित्ति की तुलना

विशेषता	कूप उपतंत्र	अपरूपण भित्ति	ट्रसित अपरूपण भित्ति
संरचनात्मक प्रतिक्रिया	उच्च दृढता, उत्कृष्ट मरोड़ी प्रतिरोध, केंद्रीकृत भार-स्थानांतरण	उच्च दृढता, प्रभावी अपरूपण और आघूर्ण प्रतिरोध	उच्च दृढता, दक्ष भार-पथ, संवर्धित अपरूपण और आघूर्ण प्रतिरोध
कार्यक्षमता	बहु-कार्यात्मक (संरचना + सेवाएँ)	मुख्यतः संरचनात्मक, कुछ विभाजन	मुख्यतः संरचनात्मक, संवर्धित भार-वितरण सहित
लाभ	उच्च मरोड़ी प्रतिरोध, बहु-उद्देश्यीय, केंद्रीकृत स्थिरता	प्रभावी भार-प्रतिरोध, सरलता, स्थान-निर्धारण की नम्यता	बढ़ी हुई दृढता और सामर्थ्य, दक्ष भार-वितरण, बेहतर भूकंपी निष्पादन
हानियाँ	अभिकल्प की जटिलता, स्थान का उपयोग	वास्तुशिल्पीय बाधाएँ, कम मरोड़ी प्रतिरोध	जटिल अभिकल्प और निर्माण, वास्तुशिल्पीय बाधाएँ

38.2.3.1 उदाहरण 38.6: ट्रसित अपरूपण भित्ति

Lin and Stotesbury, 1981 *Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers* से रूपांतरित।



हम पहले विश्लेषित उसी समस्या पर विचार करते हैं, किंतु कंक्रीट भित्ति के स्थान पर ट्रसित अपरूपण भित्ति का उपयोग करते हैं।

1. 5,760 kip-ft के अधिकतम आघूर्ण (समीकरण 38.1) का उपयोग करके हम 20 ft उत्तोलक भुजा के लिए स्तंभों में संपीडन और तनन की गणना कर सकते हैं।

$$F = \pm \frac{(5,760)\ \text{k.ft}}{(20)\ \text{ft}} = \pm 288\ \text{k}$$

2. यदि अब 400 kip ऊर्ध्वाधर भार का प्रभाव जोड़ें, तो बल होंगे

$$C = -\frac{(400)\ \text{k}}{2} - 288 = -488\ \text{k}$$

$$T = -\frac{(400)\ \text{k}}{2} + 288 = 88\ \text{k}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. 96 kip आधार अपरूपण का प्रतिरोध करने वाले विकर्ण में बल है (समरूप त्रिभुजों से)

$$\frac{F}{96} = \frac{\sqrt{(20)^2 + (24)^2}}{20} \Rightarrow F = \frac{\sqrt{(20)^2 + (24)^2}}{20}(96) = 154 \text{ k}$$

4. आधार की चौड़ाई (वर्तमान में 20 ft) बढ़ाकर अभिकल्प को इस प्रकार संशोधित किया जा सकता है कि स्तंभों में कोई तनन बल न हो।

38.2.4 पार्श्व विक्षेप

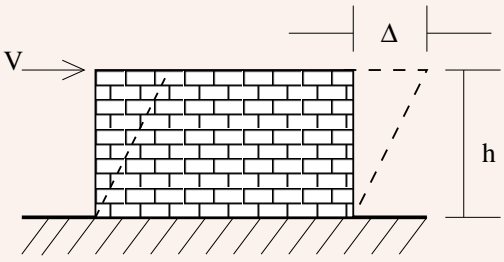
खंड Lin and Stotesbury, 1981 *Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers* से रूपांतरित।

54 अभिकल्प की संकल्पनात्मक अथवा प्रारंभिक अवस्थाओं में भी निम्नलिखित कारणों से ऊँचे भवनों के पार्श्व विक्षेपों का अनुमान लगाना महत्त्वपूर्ण है

1. पार्श्व विक्षेप प्रायः संहिता की आवश्यकताओं से सीमित होते हैं, उदाहरणार्थ $\Delta < h/500$, जहाँ h मंजिल अथवा भवन की ऊँचाई है। यह महत्त्वपूर्ण है क्योंकि अधिभोगियों को असुविधाजनक क्षैतिज गति का अनुभव नहीं होना चाहिए।
2. पार्श्व बलों के अधीन अत्यधिक विक्षेपित होने वाले भवन में कंपन से संबद्ध क्षति की समस्याएँ हो सकती हैं (जैसे धरनों के ऊर्ध्वाधर विक्षेपों में)।
3. विक्षेप के मूल्यांकन द्वारा भवन के विभिन्न ऊर्ध्वाधर उपतंत्रों द्वारा वहन किए गए सापेक्ष क्षैतिज भार का भी कुछ अनुमान लगाया जा सकता है (अर्थात् ढाँचों की तुलना में कूप कितना भार वहन करता है)। चूँकि सभी तंत्र जुड़े हैं, उन्हें साथ-साथ चलना चाहिए, और उनकी दृढ़ता (प्रति इकाई भार विरूपण) द्वारा हम प्रत्येक उपतंत्र का योगदान निर्धारित कर सकते हैं।

38.2.4.1 छोटी भित्ति

55 छोटी संरचनाओं में (छोटी धरनों की भाँति) अपरूपण विक्षेप, चित्र 38.14, प्रधान होते हैं। संकेंद्रित भार



चित्र 38.14: छोटे भवन में अपरूपण विरूपण, (Lin and Stotesbury, 1981)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

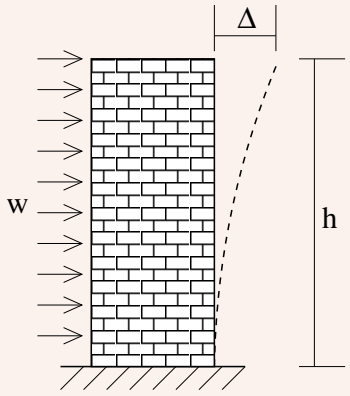
के लिए (समीकरण 23.7 से)

$$\Delta \approx \frac{1.2Vh}{GA}$$

जहाँ कंक्रीट और इस्पात के लिए $G \approx \frac{2}{5}E$।

38.2.4.2 ऊँची भित्ति

56 इसके विपरीत, ऊँचे भवन में आनमनी विरूपण, चित्र 38.15, प्रधान होते हैं।



चित्र 38.15: ऊँचे भवन में आनमनी विरूपण, (Lin and Stotesbury, 1981)

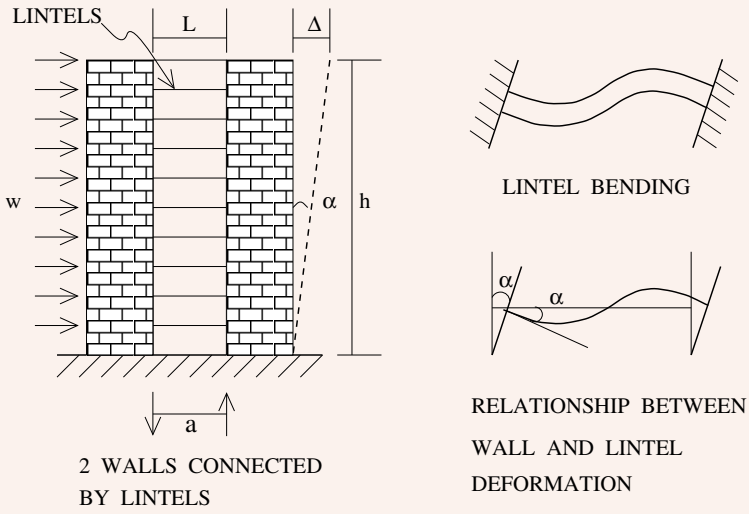
$$\Delta \approx \frac{wh^4}{8EI}$$

और आयताकार अनुभागों के लिए जडत्व आघूर्ण $I = \frac{bh^3}{12}$ है। यह केवल एकसमान भार के अधीन ब्रैकट धरन के अग्रभाग का विस्थापन है।

38.2.4.3 भित्तियाँ और लिंटल

57 जब दो तनु भित्तियाँ (भारी) लिंटलों से जुडी होती हैं, तो संपूर्ण उपतंत्र को नींव द्वारा समर्थित एक ब्रैकट के रूप में कार्य कराया जा सकता है और विक्षेप छोटे होंगे। किंतु यदि लिंटल हल्के हों, तो उनका विरूपण भित्तियों के विरूपण से बडा होता है, चित्र 38.16।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 38.16: दो तनु भित्तियों और लिंटलों से बनी भवन-संरचना में विक्षेप, (Lin and Stotesbury, 1981)

58 इस स्थिति में विक्षेपों का अनुमान निम्नलिखित से लगाया जा सकता है:

$$M_{max} = \frac{wh^2}{2}$$

$$T = C = \frac{M}{a}$$

$$V/\text{Lintel} \approx \frac{T}{\#\text{ of Lintels}}$$

$$\alpha_{\text{wall}} = \alpha_{\text{lintel}} \approx \frac{VL^2}{12EI}$$

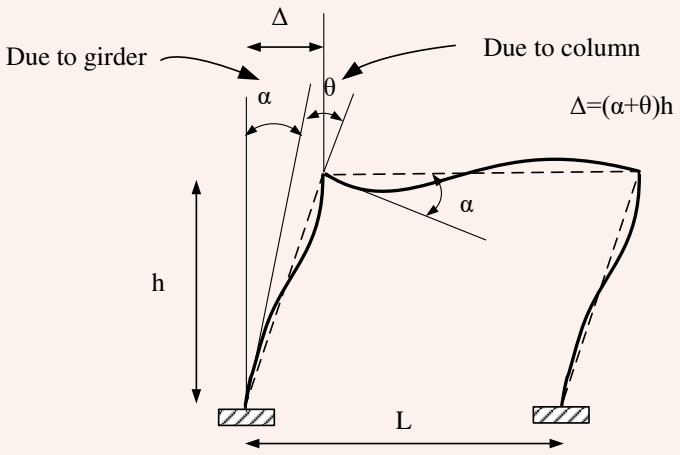
और

$$\delta \approx \alpha h$$

38.2.4.4 ढाँचे

59 दृढ ढाँचे का विक्षेप मूलतः मंजिलों के बीच अपरूपण से होता है, जो गर्डरों में ऊर्ध्वाधर अपरूपण उत्पन्न करता है। पोर्टल विधि द्वारा हम इन विरूपणों का अनुमान लगा सकते हैं, चित्र 38.17।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 38.17: एक बेंट का विरूपण (Lin and Stotesbury, 1981)

60 बाहरी जोड़ पर प्रथम मंजिल के विरूपण का सन्निकटन निम्नलिखित से किया जा सकता है

$$\Delta_{col} = \frac{V_{col_E} h^3}{12 E I_{col_E}}$$

$$\Delta_{gdr} = \frac{V_{gdr} L^2 h}{12 E I_{gdr}} = \frac{2 V_{col_E} L h^2}{12 E I_{gdr}}$$

$$\Delta_{tot_E} = \Delta_{col_E} + \Delta_{gdr} = \frac{V_{col_E} h^2}{12E} \left[\frac{h}{I_{col_E}} + \frac{2L}{I_g dr} \right]$$

61 आंतरिक जोड़ के लिए:

$$\Delta_{col} = \frac{V_{col_I} h^3}{12 E I_{col_I}}$$

$$\Delta_{gdr} = \frac{V_{gdr} L^2 h}{12 E I_{gdr}} = \frac{2 V_{col_I} L h^2}{12 E I_{gdr}}$$

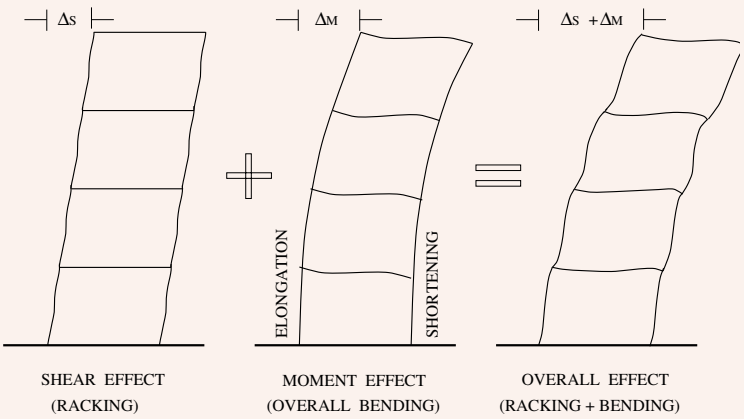
$$\Delta_{tot_I} = \Delta_{col_I} + \Delta_{gdr} = \frac{V_{col_I} h^2}{12E} \left[\frac{h}{I_{col_I}} + \frac{L}{I_g dr} \right]$$

जहाँ अधोलिखित E और I क्रमशः बाहरी और आंतरिक स्तंभों को सूचित करते हैं। कुल विस्थापन होगा

$$\Delta_{tot} = n \frac{\Delta_{tot}}{2}$$

जहाँ n मंजिलों की संख्या है और Δ_{tot} आंतरिक अथवा बाहरी जोड़ के लिए है।

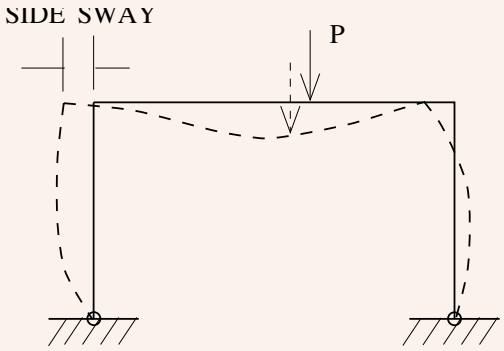
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 38.18: दृढ ढाँचा उपतंत्र का अपरूपण और आनमनी विक्षेप, (Lin and Stotesbury, 1981)

62 पार्श्व विक्षेप के दो प्रमुख स्रोत हैं: क्षैतिज अपरूपण का प्रतिरोध करते समय स्तंभों का बंकन और ऊर्ध्वाधर अपरूपण का प्रतिरोध करते समय गर्डरों का बंकन, चित्र 38.18।

63 ऊर्ध्वाधर असममित भार ढाँचों में पार्श्व विक्षेप उत्पन्न करेगा, चित्र 38.19।

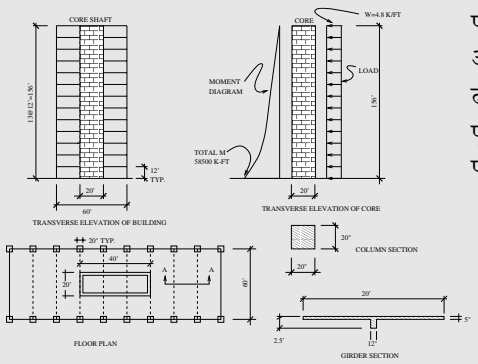


चित्र 38.19: असममित ऊर्ध्वाधर भार से पार्श्व-दोलन विक्षेप, (Lin and Stotesbury, 1981)

38.2.4.4.1 उदाहरण 38.7: भवन का सन्निकट अनुप्रस्थ विक्षेप

Lin and Stotesbury, 1981 *Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers* से रूपांतरित।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



पार्श्व प्रतिरोधी अवयव केंद्रीय कंक्रीट कूप (अनुभाग में 20ft×40ft और चार 12-in भित्तियों से बना) तथा प्रबलित-पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट ढाँचे (12in×30in T धरनों, $I_{gdr} = 3.64\ \text{ft}^4$, और 20 inch वर्गाकार प्रबलित-कंक्रीट स्तंभों से बने) हैं। हम अनुप्रस्थ दिशा में 4.8 k/ft के पवन भार पर विचार करते हैं और निम्नलिखित मान्यताएँ बनाते हैं:

1. सभी मंजिलों में स्तंभों के अनुभागीय गुण और ऊँचाई एकसमान हैं।
2. सभी मंजिलों में कूप-भित्तियों की मोटाई एकसमान है। हम भित्ति-छिद्रों की उपेक्षा करते हैं।
3. भवन की ऊँचाई पर पवन भार एकसमान है।

समाधान इस प्रकार आगे बढ़ता है:

1. कूप के शीर्ष का आनमनी विरूपण निर्धारित करें (कूप तनु होने के कारण हम अपरूपण विरूपण की उपेक्षा कर सकते हैं):

$$\Delta = \frac{wh^4}{8EI}$$

$$I = \frac{b_1 d_1^3 - b_2 d_2^3}{12}$$

$$= \frac{(41)(21)^3 - (39)(19)^3}{12} = 9,400\ \text{ft}^4$$

$$E = 3 \times 10^6\ \text{psi} = 432,000\ \text{ksf}$$

$$\Delta = \frac{(4.8)\ \text{k.ft}(156)^4\ \text{ft}^4}{8(432,000)\ \text{ksf}(9,400)\ \text{ft}^4} = 0.087\ \text{ft}$$

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{0.087}{156} = \frac{1}{1,800} \checkmark$$

$\frac{\Delta}{h}$ अनुपात अधिकांश भवन संहिताओं में अनुमत 1/500 से बहुत कम है और कंक्रीट भवनों के सामान्य सूचकांक के भीतर है, जिसका परास 1/1,000 से 1/2,500 तक है।

यदि भित्ति की मोटाई घटाई जाए और द्वार-छिद्रों पर विचार किया जाए, तो विक्षेप संगत रूप से छोटा होगा।

आघूर्ण के कारण विक्षेप शीर्ष पर तीव्रता से बढ़ता है; 1/1,800 का मान संपूर्ण भवन के लिए केवल *औसत* अपवाह सूचकांक दर्शाता है, जबकि *मंजिल* अपवाह सूचकांक अधिक हो सकता है, विशेषतः शीर्ष तल के लिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. इसके बाद हम ढाँचे के शीर्ष के विक्षेप पर विचार करते हैं। यह मानते हुए कि प्रत्येक ढाँचा कुल पवन भार और अपरूपण का 1/9 भाग वहन करता है, और स्तंभ-लघुकरण की उपेक्षा करते हुए:

$$\Delta = \frac{V_{col_E} h^2}{12E}\left[\frac{h}{I_{col_E}} + \frac{2L}{I_g dr}\right]$$

$$I_{col} = \frac{bh^3}{12} = \frac{(20/12)(20/12)^3}{12} = 0.64 \text{ ft}^4$$

$$I_{gdr} = 3.64 \text{ ft}^4$$

$$V_{col_I}^{\text{ground}} = \frac{(4.8) \text{ k.ft}(156) \text{ ft}}{(2)(9)} = 41.7 \text{ k/col}$$

$$\Delta = \frac{(41.7) \text{ k}(12)^2}{12(432,000) \text{ ksf}}\left[\frac{(12) \text{ ft}}{(0.64) \text{ ft}^4} + \frac{2(60) \text{ ft}}{(3.46) \text{ ft}^4}\right]$$

$$= 0.00116(18.8 + 34.7) = 0.062 \text{ ft}$$

3. चूँकि मंजिल अपवाह उस मंजिल के अपरूपण के साथ बदलता है, जो शीर्ष तक रैखिक रूप से घटता है, इसलिए औसत अपवाह प्रति मंजिल $0.062/2 = 0.31$ ft होगा और भवन के शीर्ष पर विक्षेप लगभग है

$$\Delta = (13)(0.031) = 0.40\text{ft}$$

जो निम्नलिखित अपवाह अनुपात दर्शाता है

$$\text{Drift Ratio for Building} = \frac{(0.4) \text{ ft}}{(156) \text{ ft}} = \frac{1}{400}$$

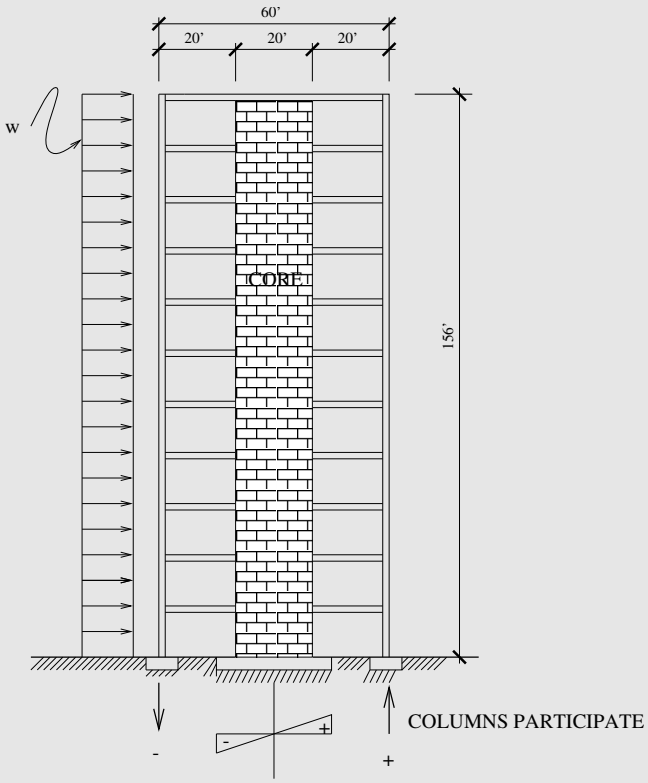
$$\text{Drift Ratio for Ground Floor} = \frac{(0.062) \text{ ft}}{(12) \text{ ft}} = \frac{1}{194}$$

4. ढाँचे के 0.40 ft विक्षेप की तुलना कूप के 0.087 ft विक्षेप से करने पर दिखाई देता है कि ढाँचा कूप से लगभग पाँच गुना अधिक नम्य है। इसके अतिरिक्त, ढाँचा स्वयं संपूर्ण पार्श्व भार वहन करने के लिए पर्याप्त दृढ नहीं होगा। पार्श्व भार को सापेक्ष दृढताओं के अनुपात में बाँटने पर ढाँचा भार का लगभग 1/6 वहन करेगा और शेष 5/6 कूप द्वारा वहन किया जाएगा।

   स्तंभ का आकार बढाने से ढाँचा दृढ होगा, किंतु वास्तव में प्रभावी होने के लिए गर्डर की दृढता भी बढानी होगी, क्योंकि गर्डर विक्षेप का लगभग 2/3 योगदान देते हैं। तब ढाँचों को भार का अधिक अनुपात वहन करने योग्य बनाया जा सकता है। ध्यान दें कि कूप और ढाँचों की विक्षेपित आकृतियाँ पर्याप्त भिन्न हैं, इसलिए शीर्ष विक्षेपों की उपर्युक्त सरल तुलना परिशुद्ध आकलन नहीं है।

   अंततः, हमने बाहरी स्तंभों से दृढीकृत कूप के प्रभाव का अध्ययन नहीं किया है; ये स्तंभ कूप-भित्तियों से दृढतः जुडे हैं और कूप के साथ एक इकाई के रूप में कार्य करेंगे।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



यह पर्याप्त प्रभावी होगा, क्योंकि क्षैतिज तल-डायाफ्राम उन्हें थामेंगे और साथ-साथ विक्षेपित होने के लिए बाध्य करेंगे।

5. सारांशतः, यह पर्याप्त दक्ष अभिन्यास प्रतीत होता है; आगे का विश्लेषण इसे परिष्कृत और इष्टतम करेगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अल्ब्रेख्ट ड्यूरर की मेलेंकोलिया I पुनः *(1514)*

मेलेंकोलिया I सन्निकट विश्लेषण के रूपक के रूप में कार्य करती है, जहाँ अंतर्ज्ञान, अनुमान और ज्यामितीय तर्क समस्या-समाधान में निर्णायक भूमिका निभाते हैं।

प्रतिक्रिया

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

39 प्रारंभिक अभिकल्प

सारांश

इस अध्याय में हम पूर्वविवेचित कुछ अवधारणाओं—जो कभी-कभी अत्यंत सरल हैं—को कुछ प्रतिष्ठित संरचनाओं के प्रारंभिक आंशिक विश्लेषण एवं अभिकल्प में लागू करते हैं।

इनमें से प्रत्येक प्रकरण-अध्ययन उपलब्ध साहित्य से लिया गया है और संकेतनों को समायोजित करते हुए इस पुस्तक की आवश्यकताओं के अनुरूप अनुकूलित किया गया है।

39.1 उदाहरण 39.1: डलेस विमानपत्तन 1442
39.2 उदाहरण 39.2: एफिल टॉवर 1449
39.3 उदाहरण 39.3: मागात्सीनी जेनराली . . . 1456
39.4 उदाहरण 39.4: जॉर्ज वाशिंगटन ब्रिज . . 1460
39.5 उदाहरण 39.5: द्वि-कब्जित आर्च का अभिकल्प 1467
39.6 उदाहरण 39.6: आर्च में तापमान परिवर्तन 1475
39.7 उदाहरण 39.7: I के सेकेंट परिवर्तन वाला परवलयिक आर्च 1478

39.1 उदाहरण 39.1: डलेस विमानपत्तन

Howard, 1966 *Structure: An Architect's Approach* और Whitehead, 2020 *"Sarinen's Shells: The Evolving Influence of Engineering and Construction"* से अनुकूलित।

ईरो सारिनेन द्वारा अभिकल्पित यह प्रतिष्ठित अमेरिकी संरचना (जिन्होंने लगभग इसी समय सेंट लुई गेटवे आर्च का भी अभिकल्प किया था) उत्कृष्ट सौंदर्य और संरचनात्मक कार्यक्षमता का समन्वय करती है। प्रारंभिक

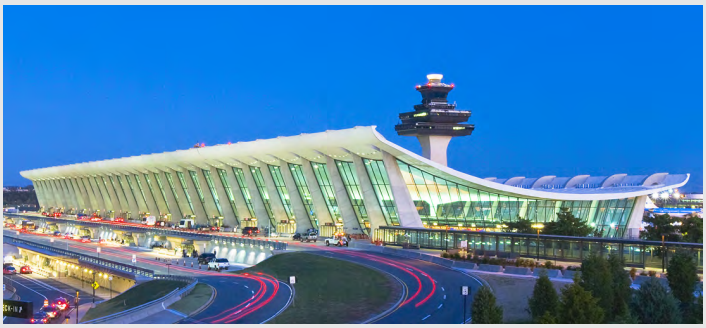
विवरण

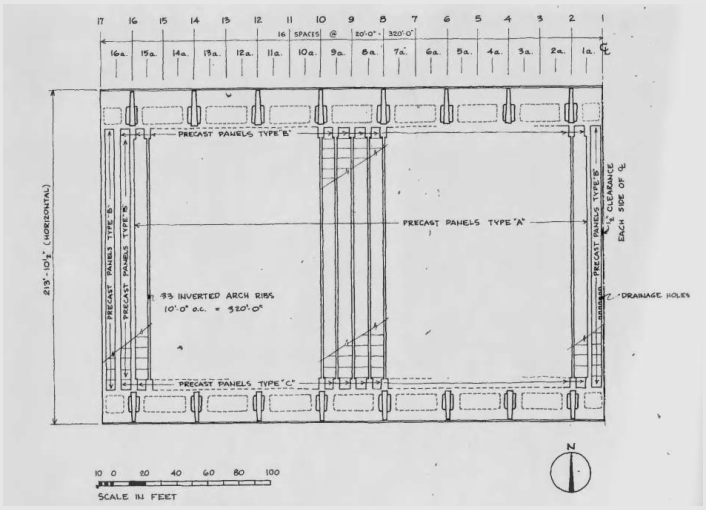
खुले कक्ष के प्रत्येक ओर इस संरचना में 16 स्तंभ हैं, जो 40 फुट (12 m) की दूरी पर स्थित हैं। ये बड़े आधारों सहित बाहर की ओर झुके हैं, जिससे प्रणोद और छत का प्रतिरोध करने में सहायता मिलती है। स्तंभों की भिन्न ऊँचाइयों ने पूरे 90,000 वर्ग फुट (8,361 m^2) क्षेत्र को आवृत करने वाली व्यापक, निलंबित वक्र छत बनाई; इसकी ज्यामिति समान रूप से भारित निलंबित केबलों की कैटेनरी वक्र से निर्धारित हुई।

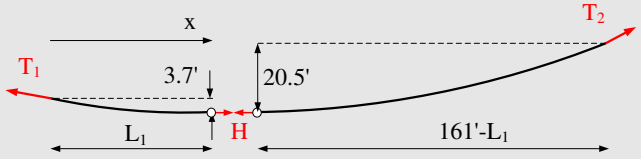
निलंबित छत के केबल, स्तंभों से जुड़ी ऊपर की ओर वक्रित दो स्थान-ढली कंक्रीट किनारी पट्टियों के बीच लटकाए गए थे। किनारी पट्टी की परिधि पर प्रत्येक 10 फुट (3 m) की लंबाई पर 1 इंच (2.54 cm) के इस्पात केबलों के दो युग्म 160 फुट (48.8 m) के विस्तृति-पार दूसरी किनारी धरन तक लटकाए गए। इसके बाद पार्श्वों पर छोटे धातु हुकों वाले 1,800 हल्के पूर्वढलित फलक केबलों पर क्रमशः रखे गए। केबलों को सटीक फ्यूनिक्युलर ज्यामिति तक पूर्वतनित किया गया और फिर छत पर रेत की बोरियों का भार रखा गया, जब तक कि फलक-अंतराल में स्थित केबलों तथा फलकों के ऊपर की टॉपिंग पट्टी, दोनों को हल्के स्थान-ढले कंक्रीट में आबद्ध नहीं किया जा सका। छत के नीचे किसी फॉर्मवर्क की आवश्यकता नहीं थी—अत्यंत कुशलतापूर्वक, फलक स्वयं संरचना भी थे और टॉपिंग पट्टी के लिए फॉर्मवर्क भी।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।







छत की आंशिक योजना

तनाव

न्यून सैग को देखते हुए हम *मान सकते हैं* कि आकृति परवलयिक है। अधिकतम सैग के बिंदु पर (जिसे अभी निर्धारित किया जाना है) केबल का तनाव केवल h के बराबर है। बाएँ और दाएँ मुक्त-पिंड आरेखों पर विचार करते हुए तथा आलंबों के सापेक्ष आघूर्ण लेते हुए:

$$3.7H = w\frac{L_1^2}{2}$$

$$20.5H = w\frac{(161 - L_1)^2}{20.5}$$

दोनों को बराबर रखने पर $L_1 = 48.0'$ और $H = 311w$ प्राप्त होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आलंबों पर कोण हैं

$$\alpha = \arctan\frac{V}{H} = \arctan\frac{48w}{311w} = 8.77^\circ$$
$$\beta = \arctan\frac{V}{H} = \arctan\frac{(161-48)w}{311w} = 19.97^\circ$$

अतः बाएँ और दाएँ तनाव होंगे

$$T_1 = \frac{H}{\cos\alpha} = \frac{311w}{\cos 8.77^\circ} = 315w$$
$$T_2 = \frac{H}{\cos\beta} = \frac{311w}{\cos 19.97^\circ} = 331w$$

भार w, विस्तृति का 0.33 kip/ft है। अतः अधिकतम तनाव $T_{max} = (331)(0.33) = 109$ kips होगा। निर्माण के समय यह लगभग वह भार होगा जिसे 1-in व्यास की दो ब्रिज स्ट्रैंड वहन करेंगी; प्रत्येक की क्षमता 122 kips है, जिससे सुरक्षा गुणांक $244/109$, अर्थात् 2.25 मिलता है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

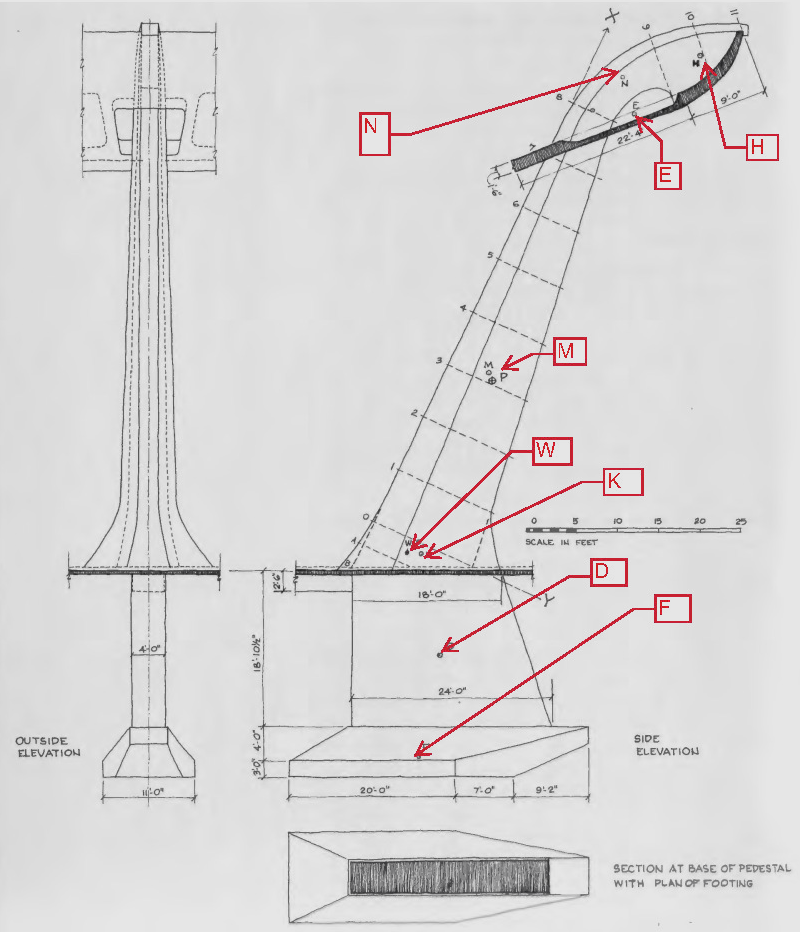
भार एवं केंद्रक

हम किनारी धरन में आघूर्ण और अपरूपण की गणना नहीं करेंगे, क्योंकि वे विश्लेषित प्रधान फ्रेम के समग्र व्यवहार को प्रभावित नहीं करते। तथापि उत्तर पार्श्व के लिए उनके अनुपात—विस्तृति 40 ft और प्रधान बल-रेखा के समानांतर मापी गई गहराई 32 ft—उन्हें गहरी धरनें बनाते हैं।

निलंबित छत के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर घटक अब ज्ञात हैं (किन्तु इन्हें 4 से गुणा करना होगा, क्योंकि फ्रेम 40 ft o.c. पर और पसलियाँ केवल 10 ft o.c. पर हैं)। समग्र चित्र पूर्ण करने के लिए किनारी धरन और फ्रेम के भार तथा केंद्रक आवश्यक हैं[a]। सामग्री 0.15 kip/ft^3 भार वाला पाषाण-कंक्रीट है। प्रधान विमाएँ नीचे दी गई हैं।

हम किनारी धरन में आघूर्ण और अपरूपण की गणना नहीं करेंगे, क्योंकि वे विश्लेषित प्रधान फ्रेम के समग्र व्यवहार को प्रभावित नहीं करते।

[a]नीचे 60 के दशक में संरचनात्मक अभियंता द्वारा की गई गणनाएँ दी गई हैं; आज CAD प्रोग्राम इन कार्यों को सरलता से कर देगा। फिर भी यह गणना संख्यात्मक समाकलन और आधारभूत स्थैतिकी का अच्छा पुनरावलोकन है।



तथापि उत्तर पार्श्व के लिए उनके अनुपात—विस्तृति 40 ft और प्रधान बल-रेखा के समानांतर मापी गई गहराई 32 ft—उन्हें गहरी धरनें बनाते हैं। निलंबित छत के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर घटक अब ज्ञात हैं (किन्तु इन्हें 4 से गुणा करना होगा, क्योंकि फ्रेम 40 ft o. c. पर और पसलियाँ केवल 10 ft o.c. पर हैं)। समग्र चित्र पूर्ण करने के लिए किनारी धरन और फ्रेम के भार तथा केंद्रक आवश्यक हैं। सामग्री 0.15 kip/ft^3 भार वाला पाषाण-कंक्रीट है। प्रधान विमाएँ नीचे दी गई हैं। किनारी धरन:

$$(22.3)(1.5) + (9.0)(1.3) = 45.1 \text{ ft}^2 \times 37 \text{ ft} = 1,670 \text{ ft}^3$$

घटाएँ:

Hole around column	$(15)(5)(1.5)$	$= -112$
Recess	$(28)(14)(1.0)$	$= -392$
Total		$= -504$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कुल भार

$$1,670 - 504 = 1,166 \text{ ft}^3 \times 0.15 \text{ kip/ft}^3 = 175 \text{ kip}$$

इसका केंद्रक बिंदु E पर अनुमानित है। फ्रेम अथवा स्तंभ की गणना अधिक श्रमसाध्य है। इसे पाँच भागों में विभाजित किया जा सकता है: मुख्य दंड, जो लगभग छिन्न पिरामिड है; तल पर एक वेज; ग्रीवा के तल पर एक स्कर्ट अथवा फैलाव; और शीर्ष। मुख्य दंड का आयतन प्रिज्मॉइडल सूत्र से पर्याप्त शुद्धता से ज्ञात किया जा सकता है

$$\frac{1}{4}h(A_0 + 4A_4 + A_8)$$

जो इस प्रकरण में 2,220 ft^3 देता है। किन्तु केंद्रक का स्थान भी आवश्यक है।

सिम्पसन का प्रथम नियम प्रयुक्त करते हैं। सिम्पसन नियम एक संख्यात्मक विधि है जो द्विघात फलनों के उपयोग से निश्चित समाकल का मान सन्निकट करती है।

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

अतः दंड की लंबाई को 7 ft o.c. पर नौ परिच्छेदों द्वारा आठ बराबर भागों में विभाजित करते हैं। परिच्छेद 0, 4 और 8 के क्षेत्रफल परिकलित तथा शेष अंतर्वेशित किए जाते हैं। केंद्रक को X और Y अक्षों के सापेक्ष निर्धारित किया जाता है। चूँकि परिच्छेदों के केंद्रक लगभग एक सीधी रेखा में स्थित हैं, Y दूरी की गणना आवश्यक नहीं है।

परिच्छेद (1)	क्षेत्रफल ft^2 (2)	सिम्पसन गुणक (3)	$f(Vol)$ (2)(3) (4)	आघूर्ण भुजा (5)	$f(M)_y$ (4)(5) (6)
0	68.7	1	68.7	0	0
1	60.6	4	242.4	1	242.4
2	52.7	2	105.4	2	210.8
3	45.2	4	180.8	3	542.4
4	38.3	2	76.6	4	306.4
5	32.1	4	128.4	5	642.0
6	26.5	2	53.0	6	318.0
7	21.3	4	85.2	7	596.4
8	16.4	1	16.4	8	131.2
Σ			956.2		2,989.6

7 ft के अंतराल s के लिए आयतन है

$$\text{Volume} = f(vol) \times \frac{s}{3} = 956.9 \text{ ft}^2 \times \frac{7}{3} \text{ ft} = 2,210 \text{ ft}^3$$

अतः केंद्रक स्थित होगा

$$\overline{X} = \frac{(s^2/3)\Sigma f(M)_y}{(s)\Sigma f(vol)} = 7.0 \times \frac{2,989.6}{956.9} = 21.9 \text{ ft}$$

तल के वेज का आयतन परिच्छेद A का क्षेत्रफल परिकलित करके और प्रिज्मॉइडल सूत्र का उपयोग करके ज्ञात होता है।

$$V = \frac{h}{6}(A_0 + 4A_A + A_B) = \frac{6.0}{6}(68.7 + 4(42.0) + 0) = 237 \text{ ft}^3$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और केंद्रक बिंदु W पर है।

स्कर्ट का आयतन लगभग 8.5 ft ऊँचे और 2.5 ft आधार वाले त्रिभुज के क्षेत्रफल को 48.0 ft की परिधि से गुणा करके मिलता है। आयतन 510 ft ^{3} तथा केंद्रक K पर है।

शीर्ष पर ग्रीवा का आयतन लगभग परिच्छेद 8 के क्षेत्रफल को 10.7 की चाप-लंबाई से गुणा करके 176 ft^3 मिलता है और केंद्रक N पर है। शीर्ष का परिकलन परिच्छेदों के क्षेत्रफलों A_9 = 22.8; A_{10} = 18.7; A_{11} = 3.2 से किया जाता है और प्रिज़्मॉइडल सूत्र देता है

$$\frac{10.8}{6}(22.8 + 4(18.7) + 3.2) = 182 \text{ ft}^3$$

केंद्रक H पर अनुमानित है।

मुख्य तल-स्तर तक फ्रेम का कुल आयतन ज्ञात करने के लिए इन आयतनों को संयोजित करने पर,

		Vol ft^3	$\overline{X}$	Vol $\times\overline{X}$ ft^4	$\overline{Y}$	Vol $\times\overline{Y}$ ft^4
स्कर्ट	K	510	-1.0	-510	6.8	3,470
वेज	W	237	-1.8	-427	5.2	1,234
मुख्य दंड	M	2,210	21.9	48,400	4.8	10,670
ग्रीवा	N	176	61.2	10,800	4.3	760
शीर्ष	H	182	67.5	12,280	11.5	2,090
		3,315		70,543		18,224

अतः,

$$\text{Total weight} = 3,315 \times 0.5 = 497 \text{ k}$$

$$\overline{X}\text{for whole frame} = \frac{70,543}{3,315} = 21.3 \text{ ft}$$

$$\overline{Y}\text{for whole frame} = \frac{18,224}{3,315} = 5.51 \text{ ft}$$

केंद्रक P पर है। पीठिका का भार है

$$\frac{18+24}{2}(19.0)(4.0) = 1,600 \text{ ft}^3 \times (0.15) \text{ k/ ft}^3 = 240 \text{ k}$$

और केंद्रक D पर है।

अंततः पाद का भार लगभग 225 kips है और उसका केंद्रक F पर है।

बलों का सारांश

बल और उनके स्थान यहाँ दर्शाए गए हैं। चूँकि $\Sigma F_y = 0$, शेल से प्राप्त ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया 1286 kips होनी चाहिए और यह पाद के क्षेत्रफल के केंद्रक पर स्थित है। यह मानते हुए कि शेल की क्षैतिज प्रतिक्रिया पाद के प्रक्षेपित अंत-उन्नयन के केंद्रक पर कार्य करती है, आघूर्ण-भुजाएँ मापी जा सकती हैं और क्षैतिज प्रतिक्रिया का परिमाण $\Sigma M_O = 0$ से ज्ञात किया जा सकता है; यहाँ O, स्ट्रट की केंद्र-रेखा और ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया की क्रिया-रेखा का प्रतिच्छेद है। (वास्तव में ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज प्रतिक्रियाओं की क्रिया-रेखाएँ हमारे माने हुए बिंदुओं से न भी गुजरें। यदि ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया का परिणामी बाईं ओर खिसकता है, तो क्षैतिज प्रतिक्रिया और स्ट्रट का बल दोनों छोटे होंगे। अतः चित्र केवल प्रथम सन्निकटन दर्शाता है। बलों की दिशा और प्रकृति सही है; उनकी क्रिया-रेखाएँ तथा परिमाण कुछ भिन्न हो सकते हैं।)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवयव	बल (Kips)	आघूर्ण-भुजा (ft)	M (k-ft)
पाद F	225	2.0	450
पीठिका D	240	4.8	1,152
पाइलन P	497	10.8	5,362
किनारी धरन E	175	28.0	4,900
ऊर्ध्वाधर छत L_V	149	13.2	1,966
योग	$R_V = 1,286$		13,830
क्षैतिज छत L_H	410	49.5	-19,295

क्षैतिज प्रतिक्रिया R_H का आघूर्ण इसे संतुलित करना चाहिए

$$21R_H = 19,295 - 13,830 = 5,465 \Rightarrow R_H = 260 \text{ k}$$

और चूँकि $\Sigma F_H = 0$, स्ट्रट को $260 + 410 = 670$ kips का क्षैतिज बल देना होगा।

हम देखते हैं कि पाइलनों का तीव्र झुकाव (जो केवल सौंदर्य के लिए नहीं था) भी पाइलनों के भार द्वारा केबलों के खिंचाव को संतुलित करने और उनके आधार पर आघूर्ण समाप्त करने के लिए पर्याप्त नहीं था।

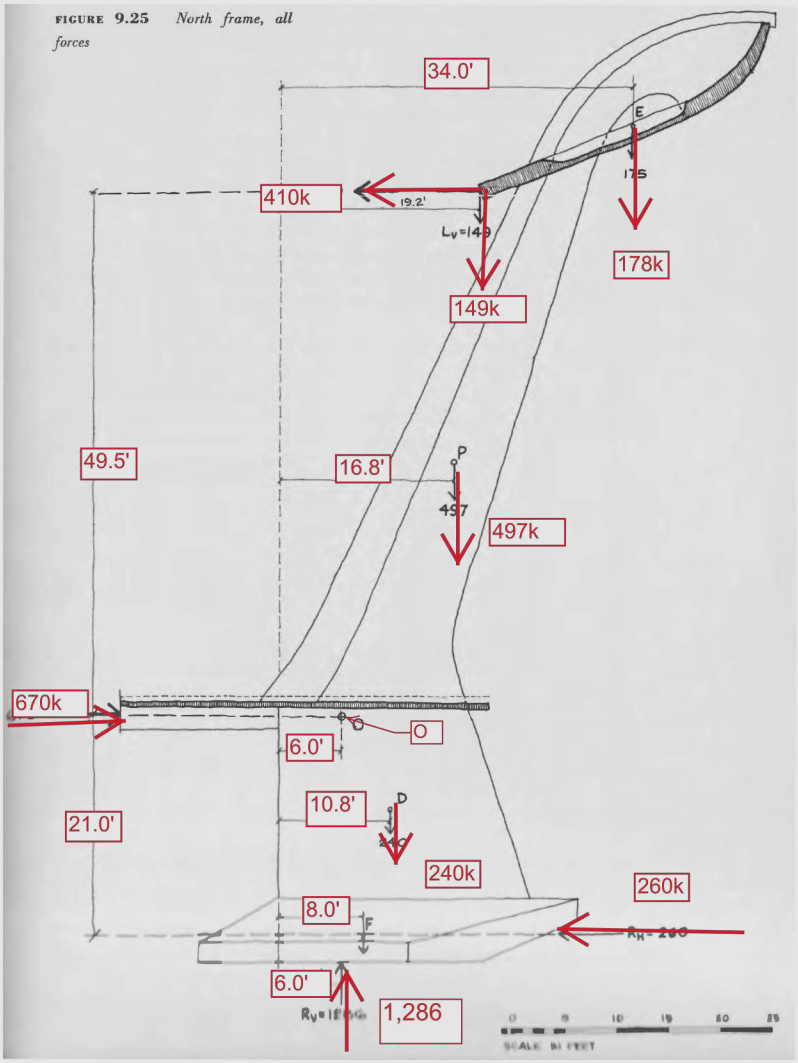


FIGURE 9.25 *North frame, all forces*

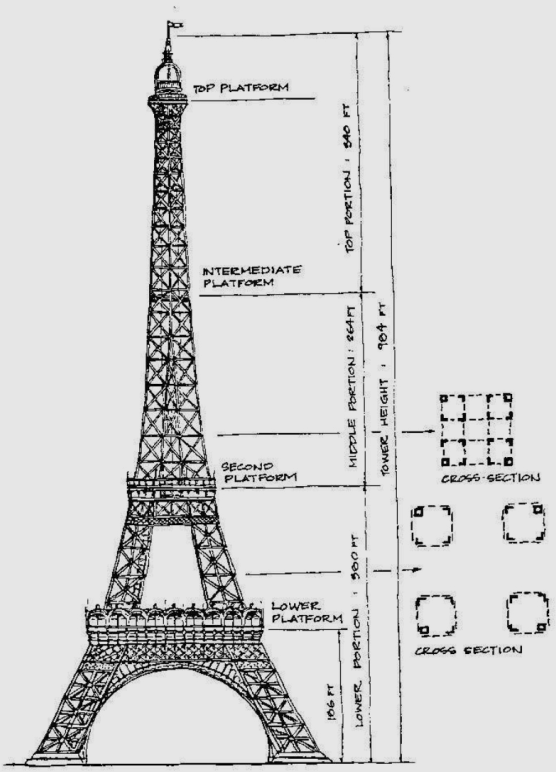
अनुवाद

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

39.2 उदाहरण 39.2: एफिल टॉवर

निम्नलिखित खंड Billington, 1983 *Structural Studies* से पुनरुत्पादित है।

सामग्री, & ज्यामिति



टॉवर पिटवाँ लोहे से बनाया गया था, जो इस्पात से कम महँगा था और एफिल को इस सामग्री का अधिक अनुभव था। यह संरचना मूलतः गुरुत्वीय और पवन भार के अधीन एक टॉवर है। यह अपेक्षाकृत "हल्की" संरचना है, अतः मृत भार पवन भार की तुलना में छोटा है। उलटने से बचने के लिए $\frac{M^{\text{gravity}}}{M^{\text{wind}}}$ का मान 1 से बहुत अधिक होना आवश्यक था।

यह निम्न में से किसी उपाय द्वारा प्राप्त किया जा सकता है:

1. स्वभार बढाना (जैसे वाशिंगटन स्मारक में)
2. आधार की चौडाई बढाना
3. तनाव का प्रतिरोध करने हेतु आलंब का अभिकल्प करना।
4. आलंब को पश्च-तनित करना।

टॉवर 984 फुट ऊँचा और आधार पर 328 फुट चौडा है। पवन भार की उपस्थिति में पर्याप्त स्थिरता देने के लिए बडा आधार आवश्यक था।

हम टॉवर की आकृति परवलयिक मान सकते हैं। यदि x अक्ष को ऊर्ध्वाधर सममिति-अक्ष के अनुदिश और y को अर्ध-चौडाई मानें, तो $x = 984$ पर अर्ध-चौडाई $y = 0$ तथा $x = 0$ पर अर्ध-चौडाई $328/2 = 164$ है। अतः अर्ध-चौडाई का समीकरण है

$$y = \underbrace{164\left(\frac{984 - x}{984}\right)^2}_{av(x)^2}$$

कलन से स्मरण है कि $y = v(x)$ के लिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}ax^2 = 2ax$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः हमारी समस्या के लिए

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{2(164)\frac{984-x}{984}}_{\frac{dy}{dv}}\underbrace{\left(-\frac{1}{984}\right)}_{\frac{dv}{dx}}$$
$$= \frac{984-x}{2,952}$$

साथ ही

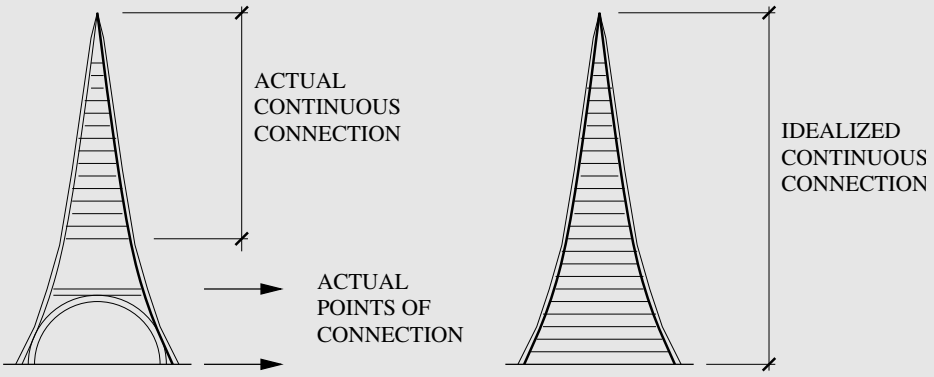
$$\frac{dy}{dx} = \tan\beta \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\frac{dy}{dx}$$

जहाँ β, x अक्ष से वक्र की स्पर्शरेखा तक मापा गया कोण है।

अब विभिन्न ऊँचाइयों पर चौड़ाई और ढाल को सारणीबद्ध कर सकते हैं।

			चौड़ाई			
स्थान	ऊँचाई	चौड़ाई/2	अनुमानित	वास्तविक	$\frac{dy}{dx}$	β
आलंब	0	164	328		.333	18.4^o
प्रथम मंच	186	108	216	240	.270	15.1^o
द्वितीय मंच	380	62	123	110	.205	11.6^o
मध्यवर्ती मंच	644	20	40		.115	6.6^o
शीर्ष मंच	906	1	2		.0264	1.5^o
शीर्ष	984	0	0		0.000	0^o

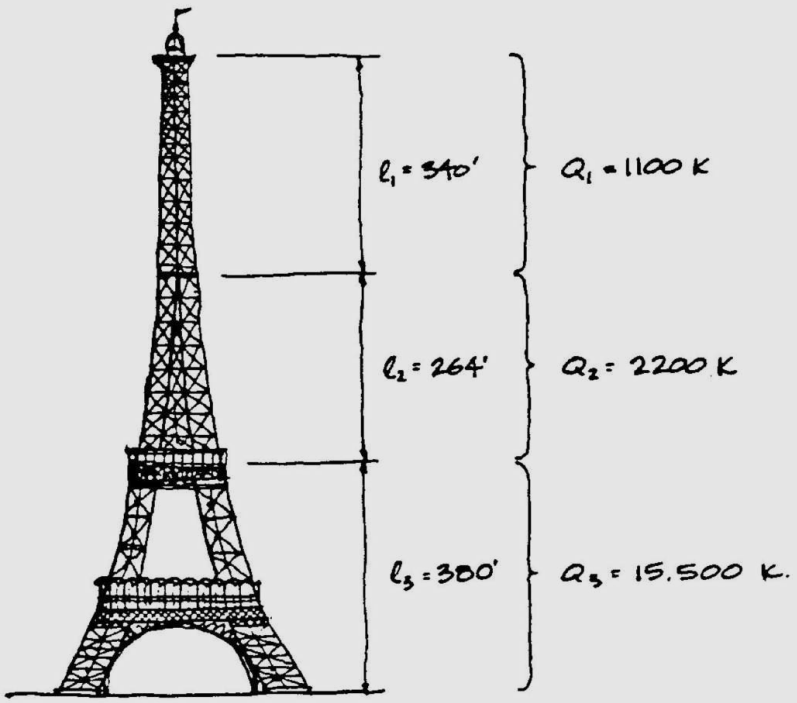
टॉवर को चार झुके हुए आलंब सहारा देते हैं, प्रत्येक का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल 800 in^2 है। टॉवर का आदर्शीकरण नीचे दर्शाया गया है



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भार

टॉवर का कुल भार 18,800 k है। मृत भार समान रूप से वितरित नहीं है और इसे निम्न प्रकार सन्निकट किया जाता है



स्थान	ऊँचाई	मृत भार
भूमि–द्वितीय मंच	380 ft	15,500 k
द्वितीय मंच–मध्यवर्ती मंच	264 ft	2,200 k
मध्यवर्ती मंच–शीर्ष	340 ft	1,100 k
कुल	984 ft	18,800 k

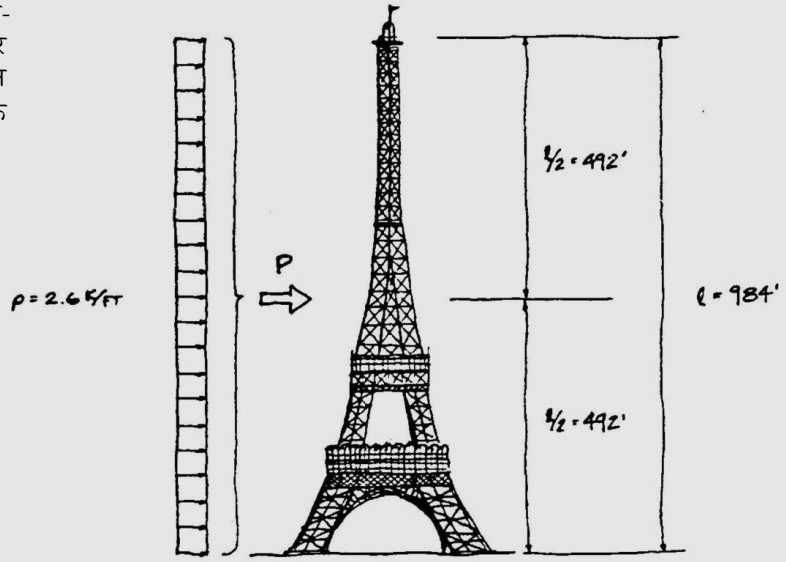
निचले दो मंचों की वास्तविक चौड़ाई से चल भार का अनुमान लगाया जा सकता है (तुलना में मध्यवर्ती और शीर्ष मंचों का LL नगण्य होगा):

$$\begin{aligned}
&\text{1वाँ मंच:} && (50)\ \text{psf}(240)^2\ \text{ft}^2\frac{kip}{(1{,}000)\ \text{lbs}} && 2{,}880\ \text{k}\\
&\text{2रा मंच:} && (50)\ \text{psf}(110)^2\ \text{ft}^2\frac{\text{k}}{(1{,}000)\ \text{lbs}} && 600\ \text{k}\\
&\text{कुल:} && && 3{,}480\ \text{k}
\end{aligned}$$

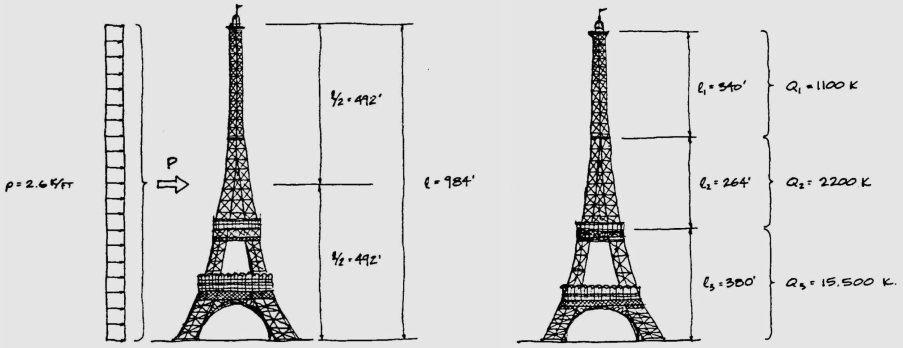
अतः कुल ऊर्ध्वाधर भार $P_{\text{vert}} = DL + LL = 18{,}800 + 3{,}480 = 22{,}280$ k है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पवन दाब का वितरण भी परवलयिक (शीर्ष पर अधिकतम) है और जिस अनुप्रस्थ क्षेत्रफल पर पवन कार्य करती है वह भी परवलयिक (आधार पर अधिकतम) है।



अतः हम स्थिर पवन दाब (बल/लंबाई) और स्थिर अनुप्रस्थ क्षेत्रफल से प्राप्त समतुल्य पवन बल मानकर विश्लेषण सरल करेंगे। दाब 2.6 k/ft माना गया है; अतः पार्श्व पवन बल है

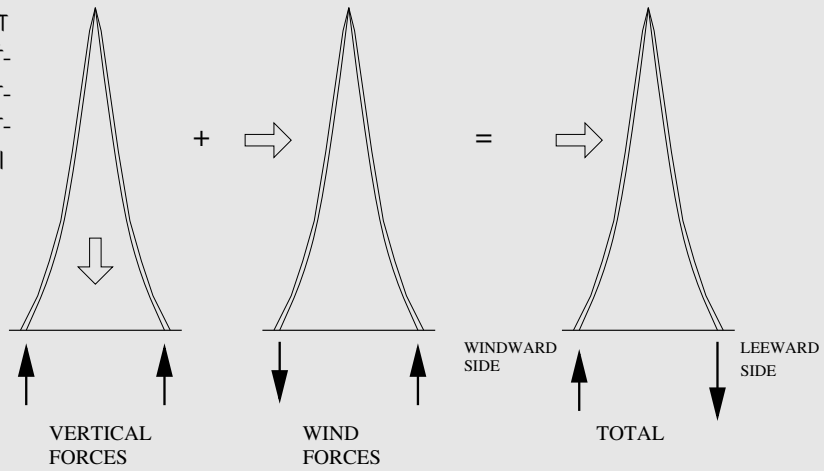


$$P_{\text{lat}} = (2.6)\ \text{k/ft}(984)\ \text{ft} = 2,560\ \text{k}\ \ \text{acting at}\ \frac{984}{2} = 492\ \text{ft}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रतिक्रियाएँ

4 आलंबों वाली त्रिविमीय संरचना को दो आलंबों वाली द्विविमीय संरचना में सरल करने पर, इस स्थैतिकतः निर्धार्य संरचना की प्रतिक्रियाएँ सरलता से ज्ञात होती हैं।



गुरुत्वीय भार

$$P_{\text{vert}} = 22,280 \downarrow$$
$$R_{\text{vert}}^{\text{grav}} = \frac{22,280}{2} = 11,140 \text{ k} \uparrow$$

पार्श्व भार

पार्श्व आघूर्ण (मूलतः हमारे पास समान भार के अधीन एक कैंटिलीवर धरन है)। कैंटिलीवर धरन में आलंब से x दूरी पर समान दाब p के अधीन आघूर्ण है

$$M_{\text{lat}} = \underbrace{p(L-x)}_{\text{Force}} \quad \underbrace{\frac{L-x}{2}}_{\text{Moment arm}} = p\frac{(L-x)^2}{2}$$

अतः पवन से उत्पन्न पार्श्व आघूर्ण परवलयिक है। आधार ($x = 0$) पर अधिकतम आघूर्ण है

$$M_{\text{lat}} = p\frac{(L-x)^2}{2} = (2.6)\ \text{k/ft}\frac{(984-0)^2}{2}\ \text{ft}^2 = 1,260,000\ \text{k.ft}\circlearrowright$$

हम देखते हैं कि टॉवर की भाँति आघूर्ण आरेख की आकृति भी परवलयिक है। यह संयोग नहीं है; लगभग इष्टतम संरचनाओं की आकृति उनके आघूर्ण आरेख के निकट होती है (जैसे दीर्घ-विस्तृति सतत पुलों की परिवर्ती गहराई)।

पार्श्व (पवन) आघूर्ण से उत्पन्न आंतरिक बल ज्ञात करने के लिए, और क्योंकि दो आलंब हैं (एक तनाव में तथा दूसरा संपीडन में), हम प्रयोग करते हैं

$$R_{\text{vert}}^{\text{wind}} = \pm\frac{M}{d} = \frac{1,260,000\ \text{k.ft}}{328\ \text{ft}} = \pm\ 3,850\ \text{k} \uparrow\downarrow$$

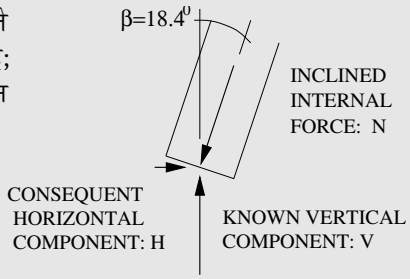
पार्श्व बल जिनका प्रतिरोध दोनों युग्मों में से प्रत्येक को करना है। सममिति से पार्श्व बल दोनों आलंब-युग्मों में बराबर विभाजित होगा और होगा

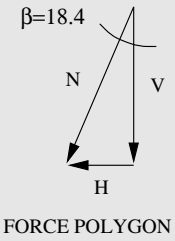
$$R_{\text{lat}}^{\text{wind}} = \frac{(2,560)\ \text{k}}{2} = 1,280\ \text{k} \leftarrow$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आंतरिक बल

आंतरिक बल पहले आधार पर ज्ञात किए जाते हैं। पहले **गुरुत्वीय भार** पर विचार किया जाता है; स्मरण रहे कि ये मृत और चल भार से उत्पन्न होते हैं।





FORCE POLYGON

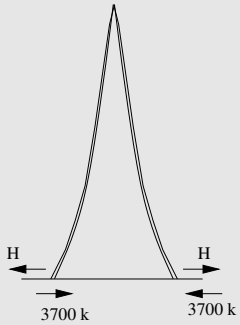
$$\cos\beta = \frac{V}{N} \Rightarrow \qquad N = \frac{V}{\cos\beta}$$

$$N = \frac{11,140 \text{ k}}{\cos 18.4^o} \qquad = 11,730 \text{ k}$$

$$\tan\beta = \frac{H}{V} \Rightarrow \qquad H = V\tan\beta$$

$$H = 11,140 \text{ k}(\tan 18.4^o) \qquad = 3,700 \text{ k}$$

वे क्षैतिज बल जिनका प्रतिरोध नींवों को करना होगा



चूँकि ऊर्ध्वाधर भार ऊँचाई के साथ घटता है, अक्षीय बल भी ऊँचाई के साथ घटेगा।

द्वितीय मंच पर कुल ऊर्ध्वाधर भार $Q = 1,100 + 2,200 = 3,300$ k है और उस ऊँचाई पर कोण 11.6^o है; अतः अक्षीय बल (प्रति स्तंभ-युग्म) होगा

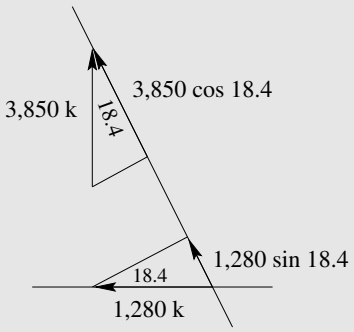
$$N_{\text{vert}} = \frac{\frac{3,300 \text{ k}}{2}}{\cos 11.6^o} = 1,685 \text{ k}$$

$$H_{\text{vert}} = \frac{3,300 \text{ k}}{2}(\tan 11.6^o) = 339 \text{ k}$$

ध्यान दें कि यह आधार के अक्षीय बल से लगभग सात गुना छोटा है; दी गई अक्षीय सामर्थ्य के लिए यह अभिकल्पक को अनुप्रस्थ परिच्छेद घटाने (अथवा टेपर करने) की ओर ले जाएगा।

क्षैतिज बल का प्रतिरोध द्वितीय मंच के अक्षीय बल स्वयं करेंगे। **पवन भार:** प्रत्येक आलंब-युग्म पर पवन भार से उत्पन्न ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज बल अब ज्ञात हैं; अगला चरण झुके हुए पाद के अनुदिश उनके अक्षीय घटक ज्ञात करना है,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



$$N_c = -R_{\text{vert}}^{\text{wind}} \cos\beta - R_{\text{lat}}^{\text{wind}} \sin\beta = -(3,850)\ \text{k}(\cos 18.4^o) - (1,280)\ \text{k}(\sin 18.4^0)$$
$$= -4,050\ \text{k}\ \text{Leeward}$$
$$N_t = -R_{\text{vert}}^{\text{wind}} \cos\beta + R_{\text{lat}}^{\text{wind}} \sin\beta = (3,850)\ \text{k}(\cos 18.4^o) + (1,280)\ \text{k}(\sin 18.4^0)$$
$$= 4,050\ \text{kip}\quad \text{Winward}$$

आंतरिक प्रतिबल

पार्श्व और गुरुत्वीय बलों से संयुक्त रूप से उत्पन्न कुल बल अब ज्ञात किए जा सकते हैं:

$$N_L^{\text{Total}} = \underbrace{-(11,730)\ \text{k}}_{\text{gravity}} \underbrace{-(4,050)\ \text{k}}_{\text{lateral}} = -15,780\text{kip Leeward side}$$
$$N_W^{\text{Total}} = \underbrace{-(11,730)\ \text{k}}_{\text{gravity}} \underbrace{+(4,050)\ \text{k}}_{\text{lateral}} = -7,630\text{kip}\quad \text{Winward side}$$

हम देखते हैं कि पवन भार के अधीन भी पवनाभिमुख पार्श्व संपीडन में है। टॉवर की ज्यामिति के आदर्शीकरण में सरलीकृत स्तंभों के प्रत्येक युग्म का क्षेत्रफल $1,600\ \text{in}^2$ है; अतः अधिकतम प्रतिबल इससे ज्ञात होगा

$$\sigma_{comp} = \frac{N_L^T}{A} = \frac{-15,780\ \text{k}}{1,600\ \text{in}^2} = -9.9\ \text{ksi}$$

पिटवाँ लोहे की सामर्थ्य 45 ksi है; अतः सुरक्षा गुणांक है

$$\text{Safety Factor} = \frac{\text{ultimate stress}}{\text{actual stress}} = \frac{45\ \text{ksi}}{9.9\ \text{ksi}} = 4.5$$

प्रारूप

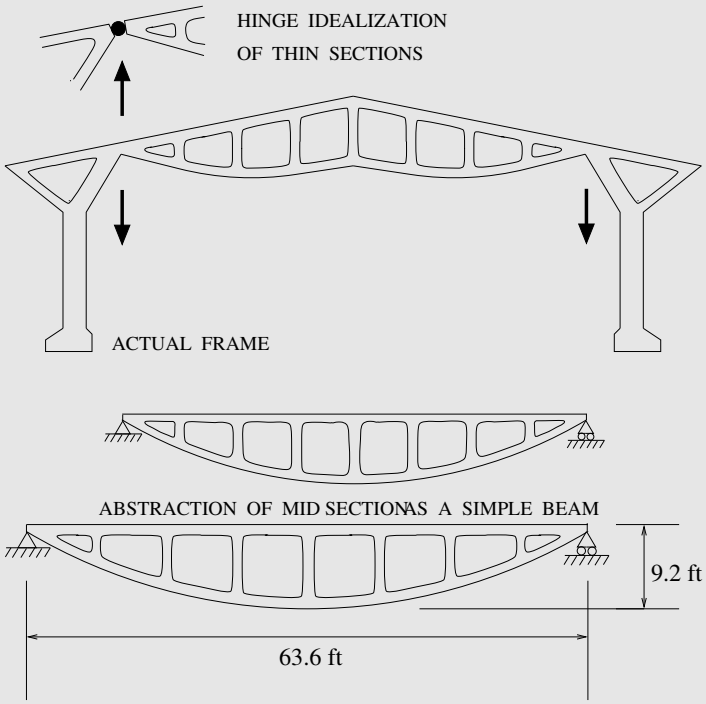
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

39.3 उदाहरण 39.3: मागात्सीनी जेनराली

निम्नलिखित खंड Billington, 1983 *Structural Studies* से पुनरुत्पादित है।

ज्यामिति

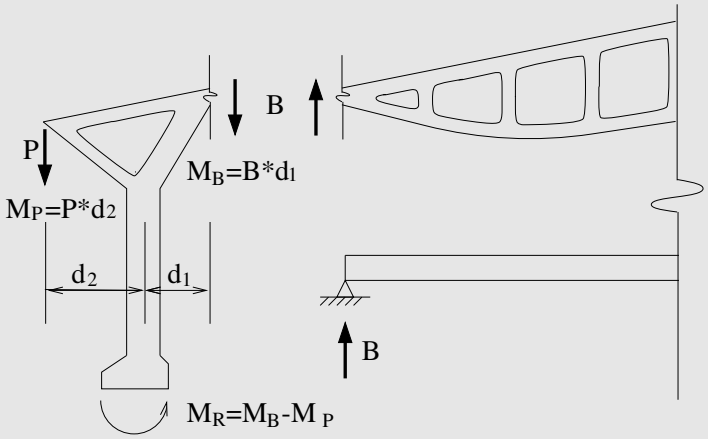
1924 में कियासो में मैयार द्वारा निर्मित यह भंडार-गृह सौंदर्य और अभियांत्रिकी के समन्वय का अच्छा उदाहरण है। मागात्सीनी जेनराली की सर्वाधिक उल्लेखनीय विशेषता स्वयं संरचना नहीं, बल्कि उसके आंतरिक आलंबी फ्रेमों की आकृति है।



फ्रेम को दो कैंटिलीवर स्तंभ-आलंबों से लटकी सरल आलंबित धरन के रूप में आदर्शित किया जा सकता है। धरन स्वयं एक सरल संरचनात्मक आदर्शीकरण है, जबकि बाहुधर को इस प्रकार अभिकल्पित किया गया है कि आलंबों (नींवों) तक संचारित निवल आघूर्ण न्यूनतम हो।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



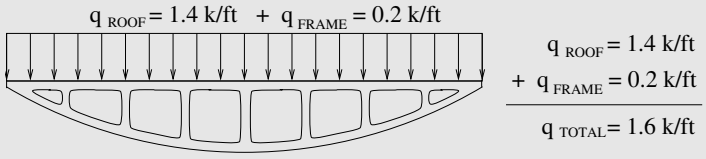
भार

फ्रेम पर लागू भार छत की पट्टी और स्वयं फ्रेम के भार से आता है। संलग्न फ्रेमों के बीच 14.7 ft की दूरी, छत भार 98 psf, तथा कुल फ्रेम भार 13.6 kips होने पर कुल समान भार होता है।

$$q_{roof} = (98)\ \text{psf}(14.7)\ \text{ft} = 1.4\ \text{k/ft}$$

$$q_{frame} = \frac{(13.6)\ \text{k}}{(63.6)\ \text{ft}} = 0.2\ \text{k/ft}$$

$$q_{total} = 1.4 + 0.2 = 1.6\ \text{k/ft}$$



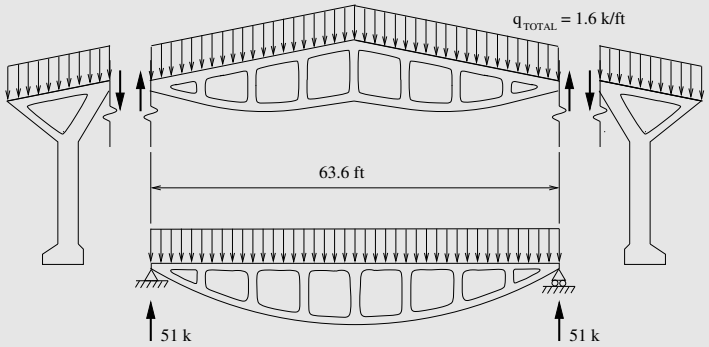
प्रतिक्रियाएँ

सममिति का लाभ लेते हुए पहले धरन की प्रतिक्रियाएँ ज्ञात की जाती हैं।

$$W = (1.6)\ \text{k/ft}(63.6)\ \text{ft} = 102\ \text{k}$$

$$R = \frac{W}{2} = \frac{102}{2} = 51\ \text{k}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

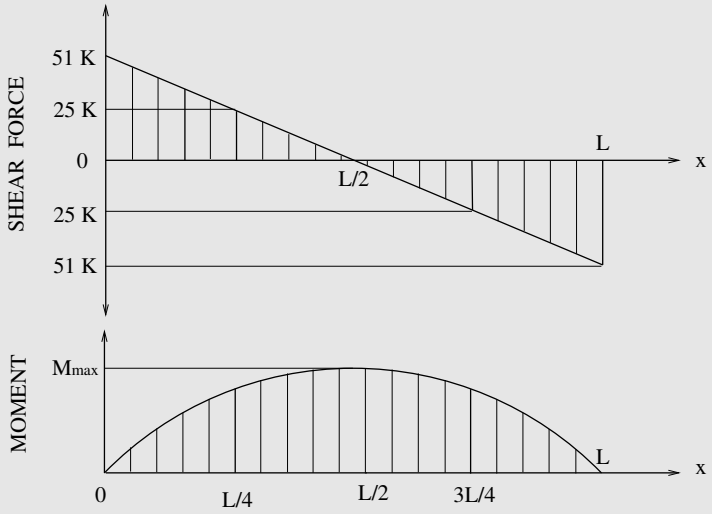


ध्यान दें कि ये प्रतिक्रियाएँ आंतरिक अपरूपण बलों द्वारा प्रदान की जाती हैं।

बल

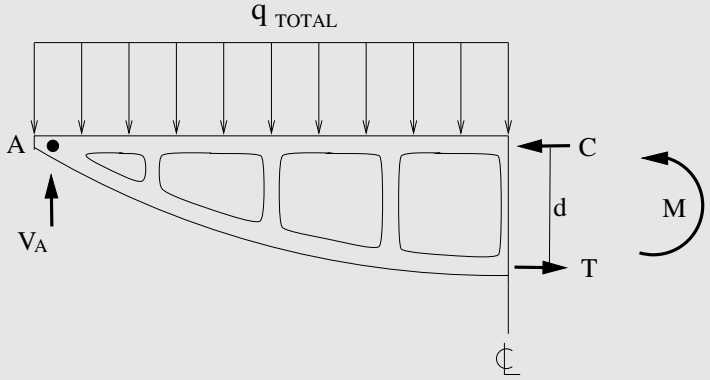
आंतरिक बल मुख्यतः अपरूपण और आघूर्ण हैं। सरल आलंबित समान रूप से भारित धरन के लिए इन्हें सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। अपरूपण 51 kip से -51 kip तक रैखिक रूप से बदलता है और केंद्र पर शून्य है; आघूर्ण आरेख परवलयिक है और केंद्र पर अधिकतम आघूर्णहै:

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{(1.6)\ \text{k/ft}(63.6)\ \text{ft}^2}{8} = 808\ \text{k.ft}$$



मध्य-विस्तृति पर बाह्यतः उत्पन्न आघूर्ण का प्रतिरोध समान और विपरीत आंतरिक आघूर्ण द्वारा होना चाहिए। यह ऊपरी तंतुओं में संपीडन बल और निचले तंतुओं में तनाव बल के संयोजन से प्राप्त किया जा सकता है। अतः निवल अक्षीय बल शून्य है, किन्तु एक निवल आंतरिक युग्म उपस्थित है।

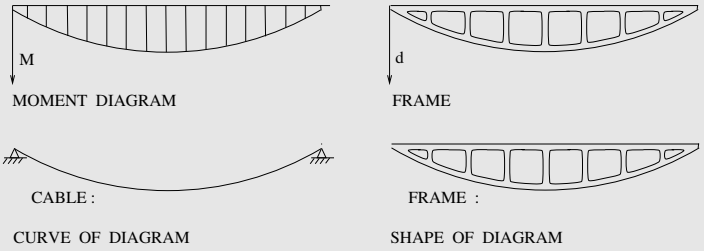
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



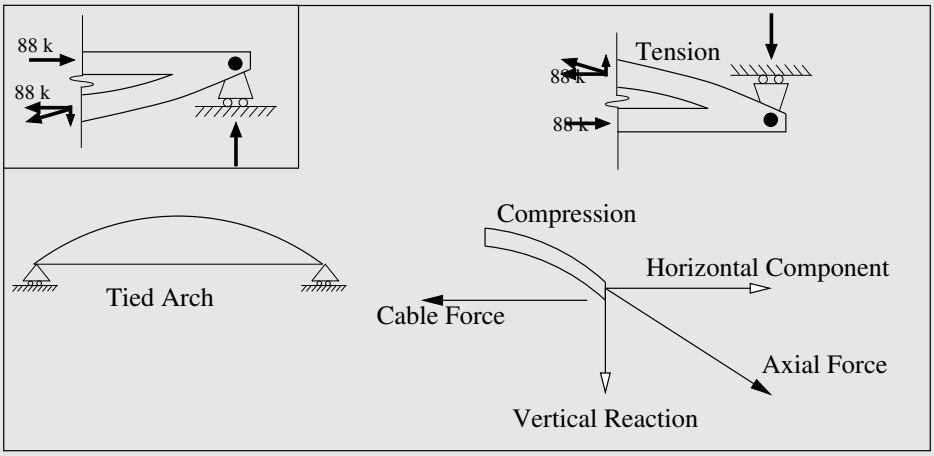
$$M_{ext} = Cd \Rightarrow C = \frac{M_{ext}}{d}$$

$$T = C = \frac{(808)\ \text{k.ft}}{(9.2)\ \text{ft}} = \pm 88\ \text{k}$$

चूँकि फ्रेम की आकृति (और इसलिए $d(x)$) लगभग परवलयिक है तथा आघूर्ण भी परवलयिक है, अक्षीय बल पूरे फ्रेम में स्थिर रहते हैं।



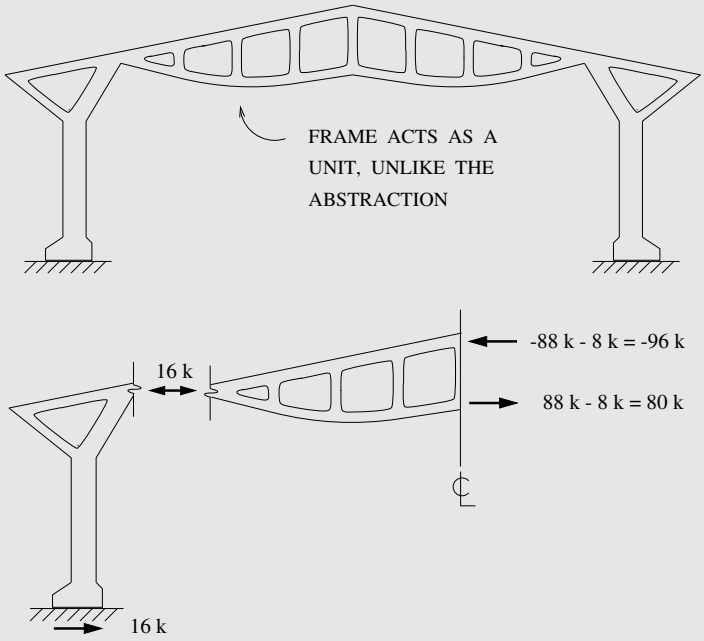
धरन के अंत पर अक्षीय बल संतुलित नहीं है और 88 kip संपीडन निचली जीवा तक संचारित होना चाहिए।



यह बंधित आर्च द्वारा आलंब तक संचारित बलों के अनुरूप है।

यह उल्लेखनीय है कि कठोर कंप्यूटर विश्लेषण से ज्ञात हुआ कि आलंब लगभग 8 kips का संपीडन बल दे रहे हैं, जिसे केंद्रीय मानों पर अध्यारोपित करना आवश्यक है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



आंतरिक प्रतिबल

75 in^2 अनुप्रस्थ क्षेत्रफल वाली ऊपरी जीवा के लिए निवल संपीडन प्रतिबल है

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{(88)\ \text{k}}{(75)\ \text{in}^2} = 1.17\ \text{ksi}$$

यह कंक्रीट के लगभग 1,350 ksi अनुमेय संपीडन प्रतिबल से बहुत कम है। यदि फ्रेम को छत के साथ ढाला गया होता (अखंड निर्माण), तो यह प्रतिबल और भी कम होता।

39.4 उदाहरण 39.4: जॉर्ज वाशिंगटन ब्रिज

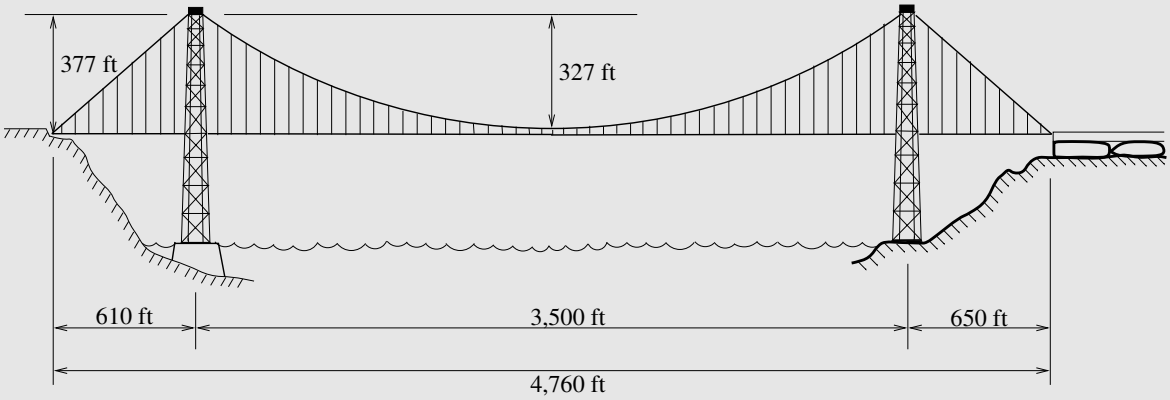
निम्नलिखित खंड Billington, 1983 *Structural Studies* से पुनरुत्पादित है।

जॉर्ज वाशिंगटन ब्रिज, न्यूयॉर्क नगर से न्यू जर्सी तक हडसन नदी को पार करने वाला निलंबन पुल है। यह 1931 में 3,500 ft की केंद्रीय विस्तृति (उस समय विश्व की सबसे लंबी विस्तृति) के साथ पूर्ण हुआ। पुल का अभिकल्प स्विट्जरलैंड से प्रवास कर आए ओ. एच. अम्मान ने किया था। 1962 में निचला डेक जोडकर डेक को दृढ किया गया।

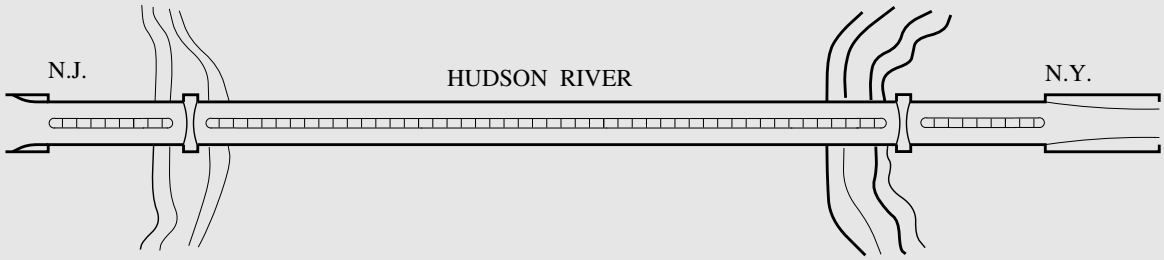
ज्यामिति

पुल का अनुदैर्ध्य उन्नयन और योजना नीचे दर्शाए गए हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



ELEVATION



PLAN

सरलता के लिए विश्लेषण में दोनों पहुँच-विस्तृतियाँ 650 ft मानी जाएँगी।

पुल के प्रत्येक ओर तीन फुट व्यास के दो केबल हैं। प्रत्येक युग्म के केंद्र 9 ft दूर हैं और दोनों युग्म परस्पर 106 ft दूर हैं। हम विस्तृति की चौड़ाई 100 ft मानेंगे।

केबलों को टॉवरों के शीर्ष पर रोलरों द्वारा आलंबित आदर्शित किया गया है; अतः केबल के दोनों ओर बलों के क्षैतिज घटक समान होने चाहिए (उनके ऊर्ध्वाधर घटक जुड़ेंगे)।

केबल सड़क-डेक को सहारा देते हैं, जो केबलों से जुड़े निलंबकों द्वारा लटका है। केबल 26,474 इस्पात तारों से बने हैं, प्रत्येक का व्यास 0.196 inch है। वे टॉवर-आलंबों के ऊपर सतत हैं और दोनों तटों पर विशाल कंक्रीट खंडों—लंगरों—में दृढता से आबद्ध हैं।

चूँकि केबल अपनी मोटाई की तुलना में बहुत लंबे हैं (लघु $\frac{I}{L}$), उन्हें बिना अपरूपण/बंकन प्रतिरोध किन्तु उच्च अक्षीय सामर्थ्य वाले पूर्णतः नम्य अवयवों के रूप में आदर्शित किया जा सकता है।

टॉवर 578 ft ऊँचे हैं और नदी में कंक्रीट कैसनों पर टिके हैं। केबलों के रोलर आलंब संबंधी हमारी धारणा के कारण टॉवर केवल अक्षीय बलों के अधीन होंगे।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

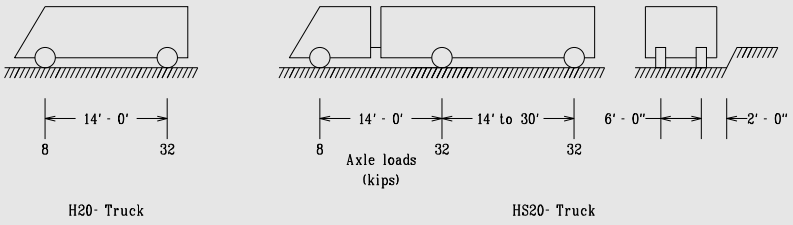
भार

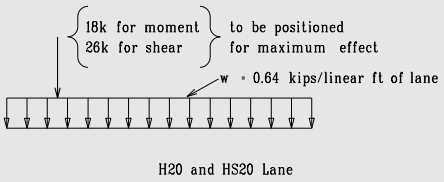
मृत भार डेक और केबलों के भार से बना है और केंद्रीय तथा पार्श्व विस्तृतियों के लिए क्रमशः 390 और 400 psf अनुमानित है। 100 ft की औसत चौडाई मानने पर यह समतुल्य होगा

$$DL = (390)\ \text{psf}(100)\ \text{ft}\frac{\text{k}}{(1,000)\ \text{lbs}} = 39\ \text{k/ft}$$

मुख्य विस्तृति के लिए और पार्श्व विस्तृतियों के लिए 40 k/ft।

राजमार्ग पुलों के लिए अभिकल्प भार AASHTO (Association of American State Highway Transportation Officials) द्वारा दिए जाते हैं। मुख्य राजमार्गों के पुलों के अभिकल्प में प्रायः HS-20 ट्रक प्रयुक्त होता है।या तो निर्दिष्ट धुरी-भार और अंतराल वाला अभिकल्प ट्रक **अथवा** समतुल्य समान भार और संकेंद्रित भार प्रयुक्त किया जाना चाहिए। भारण को इस प्रकार रखना चाहिए कि अधिकतम प्रतिबल उत्पन्न हों।





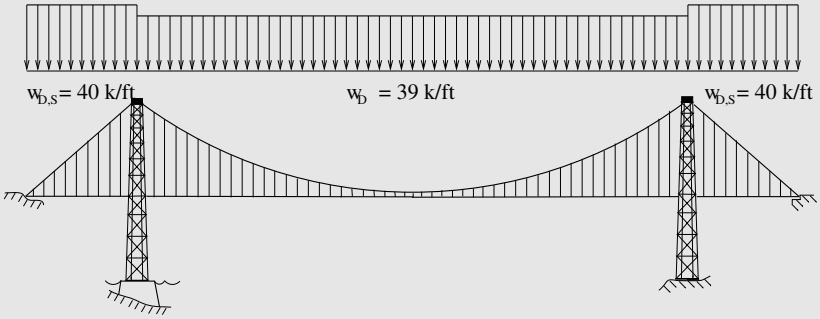
दो डेकों के साथ कुल 12 लेन अनुमानित हैं, अर्थात्

$$LL = (12)\text{Lanes}(.64)\ \text{k/ ft/Lane} = 7.68\ \text{k/ft} \approx 8\ \text{k/ft}$$

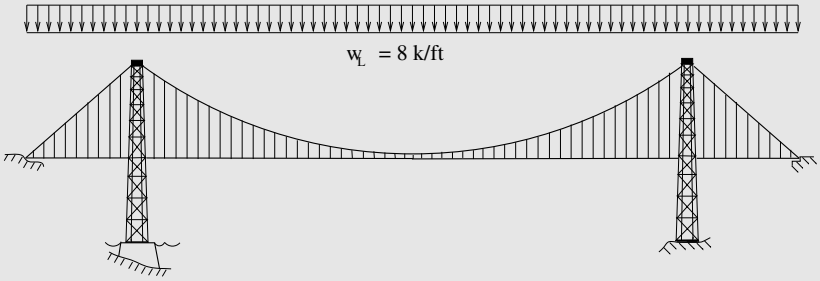
इस विश्लेषण में भूकंप अथवा पवन भार पर विचार नहीं किया गया है।

अंतिम DL और LL हैं $TL = 39 + 8 = 47$ k/ft

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



DEAD LOADS



केबल बल

प्रणोद H (जो केबल बल का क्षैतिज घटक है) समीकरण 30.11 से ज्ञात होता है

$$\begin{aligned} H &= \frac{wL_{cs}^2}{8h} \\ &= \frac{(47)\ \text{k/ft}(3,500)^2\ \text{ft}^2}{(8)(327)\ \text{ft}} \\ &= 220,000\ \text{k} \end{aligned}$$

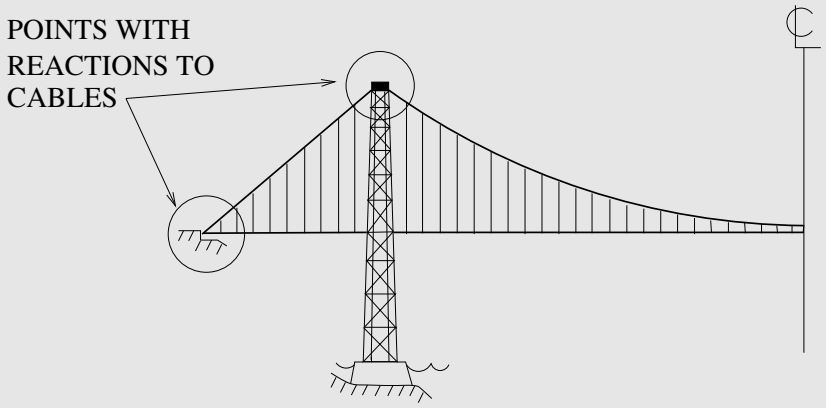
समीकरण 30.44 से अधिकतम तनाव है

$$\begin{aligned} r &= \frac{h}{L_{cs}} = \frac{327}{3,500} = 0.0934 \\ T_{max} &= H\sqrt{1+16r^2} \\ &= (220,000)\ \text{k}\sqrt{1+(16)(0.0934)^2} \\ &= (220,000)\ \text{k}(1.0675) = 235,000\ \text{k} \end{aligned}$$

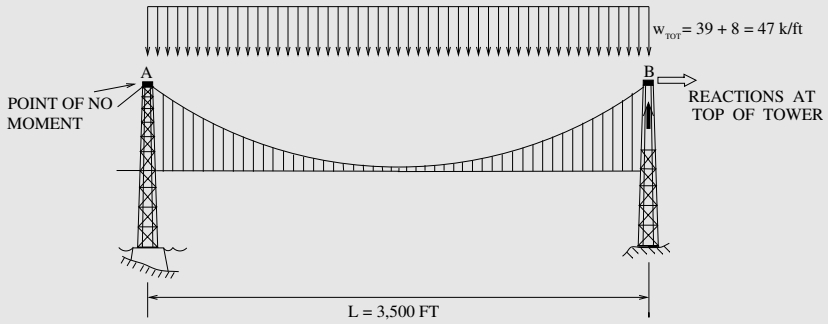
प्रतिक्रियाएँ

केबल प्रतिक्रियाएँ नीचे दर्शाई गई हैं

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



केंद्रीय विस्तृति (cs) के कारण स्तंभों में ऊर्ध्वाधर बल केवल आलंब प्रतिक्रिया है।



$$V_{\text{cs}} = \frac{1}{2} w L_{\text{cs}} = \frac{1}{2}(47)\ \text{k/ft}(3,500)\ \text{ft} = 82,250\ \text{k}$$

ध्यान दें कि H और V का सदिश योग ज्ञात करके इसकी जाँच की जा सकती है, जो $T_{\max}$ के बराबर होना चाहिए:

$$\sqrt{V_{\text{cs}}^2 + H^2} = \sqrt{(82,250)^2 + (220,000)^2} = 235,000\ \text{k} \checkmark$$

पार्श्व विस्तृतियों (ss) के अनुदिश कुल भार $TL = 40 + 8 = 48$ k/ft है। बाएँ लंगर के सापेक्ष आघूर्णों का योग लेकर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया V_{SS} ज्ञात करते हैं:

$$\Sigma M_D = 0; \circlearrowleft +; h_{\text{ss}} H + (w_{\text{ss}} L_{\text{ss}}) \frac{L_{\text{ss}}}{2} - V_{\text{ss}} L_{\text{ss}} = 0$$

$$= (377)\ \text{ft}(220,000)\ \text{k} + (48)\ \text{k/ft}(650)\ \text{ft}\frac{(650)\ \text{ft}}{2} - 650 V_{\text{ss}} = 0$$

$$V_{\text{ss}} = 143,200\ \text{k}$$

ध्यान दें: केबल बल का ऊर्ध्वाधर घटक ज्ञात करने के लिए हमने संतुलन का उपयोग किया है। पिछले उदाहरण की भाँति V_{ss} को $V_{ss} = 220,000\frac{377}{650}$ से ज्ञात करना त्रुटिपूर्ण होता, क्योंकि केबल अब भारित है और सीधा नहीं रहा। केबल की आकृति और आलंब पर स्पर्शरेखा ज्ञात करनी होगी। समीकरण 30.7 से आरंभ करते हुए:

$$-Hy = \frac{1}{2} w x^2 + C_1 x + C_2$$

$$-y = \frac{w}{H}\frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{H} x + \frac{C_2}{H}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$x = 0$ पर $y = 0$, अतः $C_2 = 0$; और $x = 650$ पर $y = -377$; $H = 220,000$ k तथा $w = 48$ के साथ

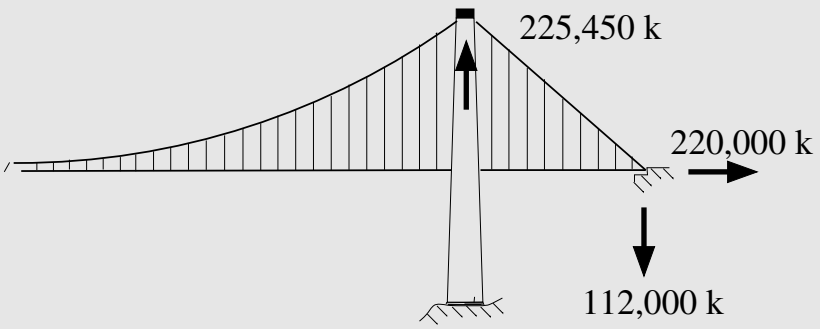
$$\begin{aligned}
y &= -\frac{(48)\ \text{k}}{\text{ft}(220,000)\ \text{k}}x^2 - \frac{C_1}{(220,000)\ \text{k}}x \\
&= -1.091 \times 10^{-4}x^2 - 4.545 \times 10^{-6}C_1 x \\
y\big|_{x=650} &= -377 = -1.091 \times 10^{-4}(650)^2 - 4.545 \times 10^{-6}C_1(650) \\
C_1 &= 112,000 \\
y &= -1.091 \times 10^{-4}x^2 - 0.501x \\
\frac{dy}{dx} &= -2.182 \times 10^{-4}x - 0.501 \\
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=650} &= -0.1418 - 0.501 = -0.6428 = \frac{V}{H} \\
V &= (220,000)(0.6428) = 141,423\ \text{k}
\end{aligned}$$

जो केवल 1% भिन्न है। अतः स्तंभ पर लागू कुल अक्षीय बल है

$$V = V_{\text{cs}} + V_{\text{ss}} = (82,250)\ \text{k} + (143,200)\ \text{k} = 225,450\ \text{k}$$

लंगर पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया y दिशा में बलों के योग से मिलती है

$$\begin{aligned}
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0;\ &(w_{\text{ss}}L_{\text{ss}}) + V_{\text{ss}} + R_{\text{anchor}} = 0 \\
-(48)\ \text{k/ft}(650)\ \text{ft} &+ (143,200)\ \text{k} + R_{\text{anchor}} = 0 \\
R_{\text{anchor}} &= 112,000\ \text{k}\downarrow
\end{aligned}$$



पार्श्व केबल का अक्षीय बल क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाओं के सदिश योग से ज्ञात होता है।

$$\begin{aligned}
T^{\text{ss}}_{\text{anchor}} &= \sqrt{R^2_{\text{anchor}} + H^2} = \sqrt{(112,000)^2 + (220,000)^2} = 247,000\ \text{k} \\
T^{\text{ss}}_{\text{tower}} &= \sqrt{V^2_{\text{ss}} + H^2} = \sqrt{(143,200)^2 + (220,000)^2} = 262,500\ \text{k}
\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंत में केबल प्रतिबल ज्ञात किए जाते हैं।

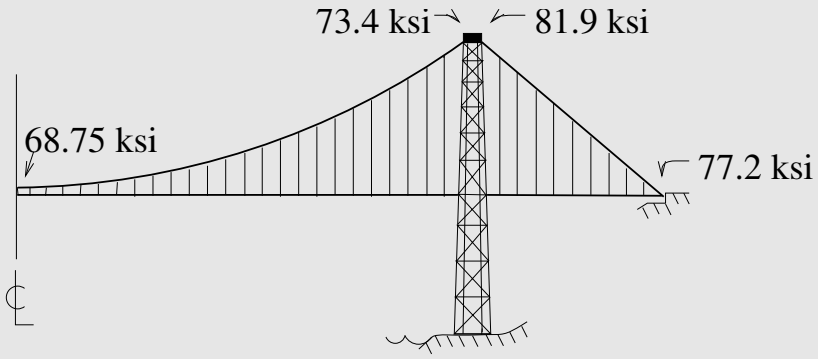
$$A_{wire} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{(3.14)(0.196)^2}{4} = 0.03017 \text{ in}^2$$

$$A_{total} = (4)\text{cables}(26,474)\text{wires/cable}(0.03017) \text{ in}^2/\text{wire} = 3,200 \text{ in}^2$$

$$\text{Central Span } \sigma = \frac{H}{A} = \frac{(220,000) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 68.75 \text{ ksi}$$

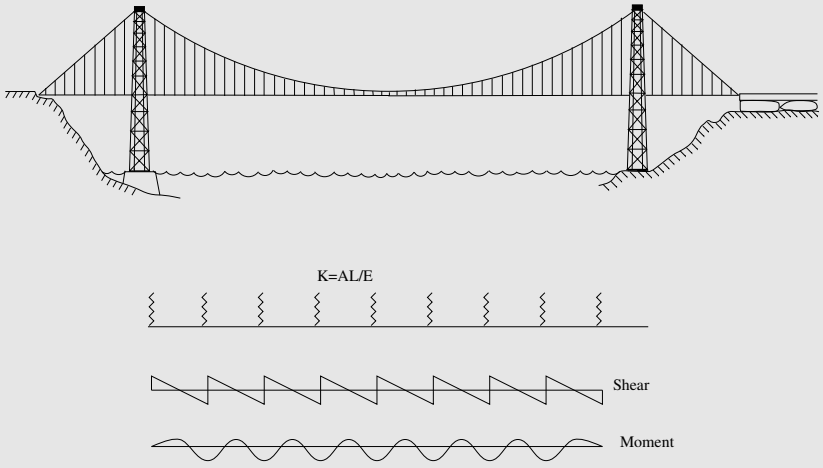
$$\text{Side Span Tower } \sigma^{ss}_{tower} = \frac{T^{ss}_{tower}}{A} = \frac{(262,500) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 82 \text{ ksi}$$

$$\text{Side Span Anchor } \sigma^{ss}_{tower} = \frac{T^{ss}_{anchor}}{A} = \frac{(247,000) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 77.2 \text{ ksi}$$



यदि केबलों को कंक्रीट खंड में लंगरित किया जाए, तो खंड का आयतन कम-से-कम $V = \frac{(112{,}000) \text{ k}(1{,}000) \text{ lbs/ k}}{150 \text{ lbs/ft}^3} = 747,000 \text{ ft}^3$ अथवा लगभग 91 ft भुजा वाले घन के बराबर होना चाहिए।

व्यावहारिक रूप से डेक को कठोरता $K = AL/E$ वाले प्रत्यास्थ स्प्रिंगों से आलंबित सतत धरन माना जा सकता है (जहाँ L आलंबी केबल की लंबाई है)। इसे प्रायः प्रत्यास्थ नींव पर धरन के रूप में आदर्शित किया जाता है और इस आदर्शीकरण के परिणामी अपरूपण तथा आघूर्ण आरेख नीचे दर्शाए गए हैं।

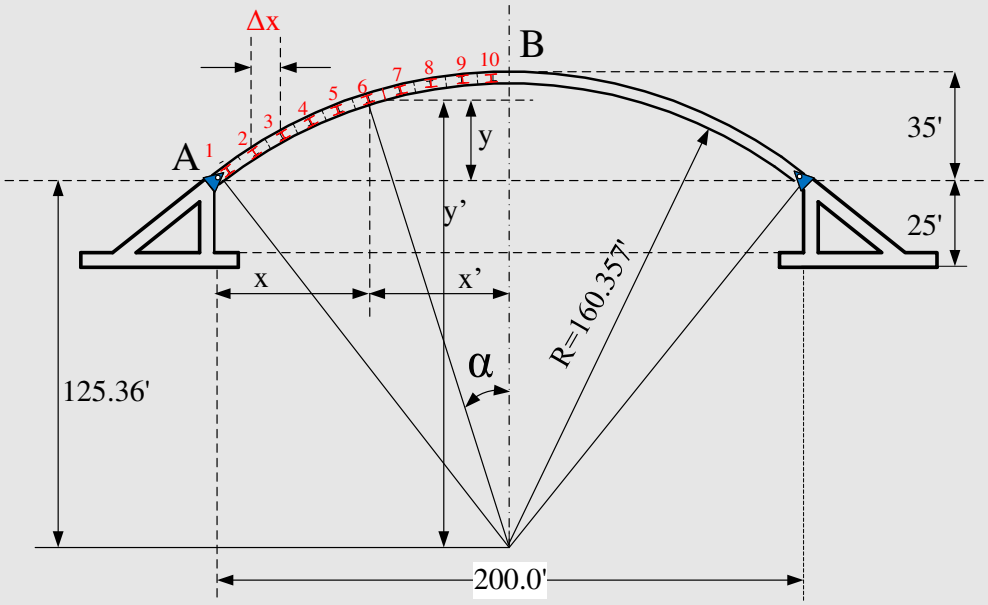


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

39.5 उदाहरण 39.5: द्वि-कब्जित आर्च का अभिकल्प

निम्नलिखित खंड Kinney, 1957 *Indeterminate Structural Analysis* से पुनरुत्पादित है।

हम एक हैंगर के लिए द्वि-कब्जित, ठोस वेल्डित-इस्पात आर्च पसली का अभिकल्प करना चाहते हैं। $F_y = 30$ ksi मानें। पसली का जडत्वाघूर्ण आवश्यकतानुसार परिवर्ती होगा। कब्जों के केंद्र-से-केंद्र तक विस्तृति 200 ft है। पसलियाँ 35 ft केंद्र-से-केंद्र पर तथा उत्थान 35 ft होगा। छत डेक, पर्लिन और पसली का भार छत-सतह पर 25 lb/ft^2 तथा हिम भार इस सतह का 40 lb/ft^2 माना जाएगा। बीस पर्लिन पसली के चारों ओर समान अंतराल पर होंगे।



ज्यामिति

पसली की केंद्र-रेखा को वृत्त का खंड माना जाएगा। इस वृत्त की त्रिज्या है

$$(R - 35)^2 + (100)^2 = R^2 \Rightarrow R = 160.357 \text{ ft}$$

चाप की लंबाई है

$$\theta = \arcsin \frac{100}{160.357} = 38.580^\circ \Rightarrow S = 160.357 \times \frac{\pi}{180} 38.580 = 107.98 \text{ ft}$$

विश्लेषण के लिए चाप AB को दस खंडों में विभाजित माना जाएगा, प्रत्येक की लंबाई है

$$\Delta S = \frac{S}{10} = \frac{107.980}{10} = 10.798 \text{ ft}$$

अतः प्रत्येक खंड के केंद्र पर फ्रेम होने वाले पर्लिन पसली पर संकेंद्रित भार लगाते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चूँकि कुल मृत और हिम भार छत-सतह का 65 $\mathrm{lb/ft^2}$ है, प्रत्येक संकेंद्रित बल का मान होगा

$$\Delta P = 10.798 \times 35 \times 65 = 24.565 \text{ k}$$

(जहाँ 35 पसलियों के अंतराल को निरूपित करता है)

विभिन्न खंडों के केंद्रों के निर्देशांक, कब्जे A के सापेक्ष, ज्ञात करने के लिए आवश्यक गणनाएँ नीचे दर्शाई गई हैं। साथ ही Δx के मान, अर्थात् विभिन्न खंडों के केंद्रों के बीच दूरी के क्षैतिज प्रक्षेप, भी दर्शाए गए हैं।

खंड	α	$\sin\ \alpha$	$\cos\ \alpha$	$x' = R\sin\alpha$ (ft)	$y' = R\cos\alpha$ (ft)	$x = 100 - x'$ (ft)	$y = y' - 125.36$ (ft)	Δx (ft)
A	38°34′49″	0.62361	0.78173	100.000	125.36	0	0	
1	36°39′05″	0.59695	0.80229	95.725	128.65	4.275	3.29	4.275
2	32°47′36″	0.54161	0.84063	86.851	134.80	13.149	9.44	8.874
3	28°56′07″	0.48382	0.87516	77.584	140.34	22.416	14.98	9.267
4	25°04′38″	0.42384	0.90574	67.966	145.24	32.034	19.88	9.618
5	21°13′09″	0.36194	0.93220	58.040	149.48	41.960	24.13	9.926
6	17°21′40″	0.29840	0.95444	47.851	153.05	52.149	27.69	10.189
7	13°30′11″	0.23350	0.97236	37.443	155.92	62.557	30.57	10.408
8	09°38′42″	0.16754	0.98586	26.866	158.09	73.134	32.73	10.577
9	05°47′13″	0.10083	0.99490	16.169	159.54	83.831	34.18	10.697
10	01°55′44″	0.03367	0.99943	5.399	160.27	94.601	34.91	10.770
मुकुट					160.36	100.000	35.00	5.399

सारणी 1

प्रारंभिक अभिकल्प

यदि अनुभव का अभाव हो और अभिकल्प अभियंता पसली के अनुदिश परिच्छेदीय परिवर्तन संबंधी प्रारंभिक धारणाओं को लेकर अनिश्चित हो, तो प्रथम विश्लेषण को स्थिर जडत्वाघूर्ण की धारणा पर आधारित करने की अनुशंसा की जाती है। अनुभवी अभियंता भी प्रायः इसे सर्वोत्तम प्रक्रिया पाएगा।

यदि H का मान ज्ञात हो, तो पूरी पसली में आघूर्ण और अक्षीय प्रणोद परिकलित किए जा सकते हैं। विभिन्न परिच्छेदों के अनुप्रस्थ क्षेत्रफल इन आघूर्णों और अक्षीय प्रणोदों के लिए अभिकल्पित किए जाते हैं। परिवर्ती अनुप्रस्थ परिच्छेद वाली नई पसली के लिए H का नया मान तथा पूरी पसली में आघूर्ण और अक्षीय प्रणोद के संशोधित मान ज्ञात किए जाते हैं। पसली में प्रतिबलों की जाँच की जाती है और आवश्यक होने पर पूरी प्रक्रिया दोहराई जाती है। वर्तमान प्रकरण में यही प्रक्रिया अपनाई जाएगी।

क्षैतिज प्रणोद

नम्यता विधि लागू करते हुए हम A पर क्षैतिज प्रतिक्रिया को मुक्त करते हैं।

$$\Delta_{Ah} + H_A \delta_{AhAh} = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इसके बाद आभासी कार्य द्वारा विक्षेप परिकलित किए जाते हैं। इस वक्र परिच्छेद के लिए हम प्रतिस्थापित करते हैं:

$$\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \qquad \text{by} \qquad \sum \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\Delta S$$

और अतः यह व्यंजक बनता है

$$\sum \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\Delta s + H_A \sum \delta\overline{M}\frac{\overline{M}}{EI}\Delta S = 0$$

चूँकि E और ΔS स्थिर हैं और प्रथम विश्लेषण में जडत्वाघूर्ण भी स्थिर है, H_A का अंतिम व्यंजक है

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}}{\sum \delta\overline{M}M}$$

H_A के प्रथम मूल्यांकन के लिए आवश्यक गणनाएँ नीचे दर्शाई गई हैं।

	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
खंड	x (ft)	$y=\delta\overline{M}$ (ft · k)	अपरूपण दाईं ओर (k)	Δx (ft)	M वृद्धि (ft · k)	M सरल धरन (ft· k)	$M\delta\overline{M}$	$\delta\overline{M}M$
A	0.0	0.0	245.650					
1	4.275	3.29	221.085	4.275	1,050	1,050	3,500	10.9
2	13.149	9.44	196.520	8.874	1,962	3,010	28,400	89.2
3	22.416	14.98	171.955	9.267	1,821	4,830	72,400	224.4
4	32.034	19.88	147.390	9.618	1,654	6,490	129,100	395.4
5	41.960	24.13	122.825	9.926	1,463	7,950	191,800	582.2
6	52.149	27.69	98.260	10.189	1,251	9,200	254,800	767.0
7	62.557	30.57	73.695	10.408	1,023	10,220	312,400	934.4
8	73.134	32.73	49.130	10.577	779	11,000	360,000	1,071.4
9	83.831	34.18	24.565	10.697	526	11,530	394,100	1,168.4
10	94.601	34.91	0.000	10.770	265	11,790	411,600	1,218.6
मुकुट	100.00	35.00	_____	5.399	0	11,790		
$\sum$							2,158,100	6,461.9

सारणी 2

जहाँ

$$R_A = 100\Delta P = (100)(24.565) = 245.650$$
$$\delta\overline{M} = (1)(y) = 3.29$$
$$245.65 - 24.565 = 221.085$$
$$(245.65)(4.275) = 1,050$$
$$1,050 + 1,962 \simeq 3,010$$

जिससे प्राप्त होता है

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}}{2\delta\overline{M}M} = -\frac{2\times 2,158,100}{2\times 6461.9} = -333.97\text{k} \tag{39.1}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आघूर्ण

अभी ज्ञात H_A के सन्निकट मान से पसली के विभिन्न खंडों के केंद्रों पर आघूर्ण नीचे परिकलित किए गए हैं; यदि कोई आघूर्ण पसली की ऊपरी सतह पर संपीडन उत्पन्न करता है तो उसे धनात्मक माना गया है।

खंड	y (ft)	M सरल धरन (ft · k)	$H_A \cdot y$ (ft · k)	कुल M खंड पर (ft · k)
A	0			
1	3.29	1,050	-1,100	-50
2	9.44	3,010	-3,150	-140
3	14.98	4,830	-5,000	-170
4	19.88	6,490	-6,640	-150
5	24.13	7,950	-8,060	-110
6	27.69	9,200	-9,250	-50
7	30.57	10,220	-10,210	+10
8	32.73	11,000	-10,930	+70
9	34.18	11,530	-11,420	+110
10	34.19	11,790	-11,660	+130
मुकुट	35.00	11,790	-11,690	+100

सारणी 3

जहाँ

$$-333.97(9.44) \simeq -3,150$$
$$3,010 - 3,150 = -140$$

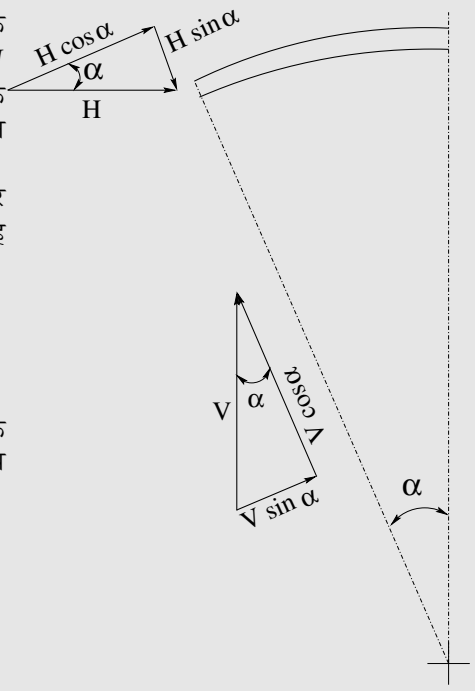
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अभिलंब और अपरूपण बल

परिच्छेद की आवश्यकताएँ ज्ञात करने से पहले प्रत्येक खंड के केंद्र पर अनुप्रस्थ परिच्छेद के अभिलंब प्रणोद N का परिकलन आवश्यक है। संदर्भ के लिए प्रत्येक खंड के केंद्र पर अनुप्रस्थ परिच्छेद के कुल अपरूपण S के विभिन्न मान भी परिकलित किए जाएँगे।
N और S, प्रत्येक खंड के केंद्र पर H तथा ऊर्ध्वाधर अपरूपण V के घटकों को संयोजित करके प्राप्त होते हैं; यह संयोजन नीचे दर्शाया गया है। सरल त्रिकोणमिति से

$$S = V\cos\alpha - H\sin\alpha$$
$$N = V\sin\alpha + G\cos\alpha$$

इसके बाद S और N के मान परिकलित किए जाते हैं। S के मान इस पूर्व कथन की पुष्टि हेतु सम्मिलित हैं कि सामान्य आर्च पसली में अपरूपण बल छोटे होते हैं।



खंड	V (k)	$V\cos\alpha$	$H\sin\alpha$	$= S$(k)	$V\sin\alpha$	$+H\cos\alpha$	$= N$ (k)
A	245.6	192	-208	= -16	153	+ 261	= 414
1	221.1	177	-199	= -22	132	+268	= 400
2	196.5	165	-181	= -16	106	+281	= 387
3	172.0	150	-162	= -12	83	+292	= 375
4	147.4	133	-142	= -9	62	+303	= 365
5	122.8	114	-121	= -7	44	+311	= 355
6	98.3	94	-100	= -6	29	+319	= 348
7	73.7	72	-78	= -6	17	+325	= 342
8	49.1	48	-56	= -8	8	+329	= 337
9	24.6	244	-34	= -10	2	+332	= 334
10	0.0	0	-11	= -11	0	+334	= 334
मुकुट						+334	= 334

सारणी 4

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ

$$(221.1)(0.80229) = 177$$
$$(333.97)(0.59695) = -199$$
$$177 - 199 = -22$$
$$(221.1)(0.59695) = 132$$
$$(333.97)(0.80229) = +268$$
$$132 + 268 = 400$$

प्रथम अभिकल्प

पिछली दो सारणियों में आघूर्ण M और प्रणोद N के मानों का निरीक्षण दर्शाता है कि ऋणात्मक आघूर्ण क्षेत्र में खंड 3 तथा धनात्मक आघूर्ण क्षेत्र में खंड 10 क्रांतिक हैं। सारणी पूर्ण करने से पहले इन दोनों खंडों के केंद्रों पर पसली के आवश्यक परिच्छेद American Institute of Steel Construction (AISC) के विनिर्देशों के अनुसार ज्ञात किए जाने चाहिए।

फ्लैंज 12 in. × 1 in. हैं और बंकन के लिए अनुमेय प्रतिबल $F_B = 0.6F_y = (0.6)(30) = 20k/in^2$ है (AISC के अनुसार पूर्णांकित)। वेब की मोटाई $\frac{3}{4}$ in. है और अनुमेय अक्षीय प्रतिबल psi में F_A=17,000-0.485 L/r^2 है ($L/r > 120$ के लिए जॉनसन का परवलयिक सूत्र)। ध्यान दें कि किन्नी के समीकरण में r का वर्ग छूट गया है और L/r की शर्त भी लागू होती प्रतीत नहीं होती। हम $L = \Delta S = 10.798$ लेंगे, क्योंकि पसलियाँ परिलन फ्रेमिंग बिंदुओं पर पार्श्वतः ब्रेसित हैं।

फ्लैंज और वेब प्लेटों की मोटाई तथा वेब प्लेटों की चौड़ाई अभियान्त्रिक निर्णय के विषय हैं। खंड 3 के केंद्र के लिए ज्ञात कुल गहराई इस खंड के केंद्र से पसली के अंत तक प्रयुक्त होती है। खंड 10 के केंद्र के लिए ज्ञात गहराई को स्वेच्छया मुकुट पर पसली की गहराई माना गया है। खंड 3 के केंद्र से मुकुट तक पसली की कुल गहराई रैखिक रूप से परिवर्ती रखी गई है। विभिन्न खंडों के केंद्रों के लिए इस प्रकार ज्ञात परिच्छेदों की पर्याप्तता नीचे जाँची गई है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

खंड	(2) कुल गहराई (in.)	(3) क्षेत्रफल (in^2)	(4) I (in^4)	(5) M (ft-k)	(6) अक्षीय प्रणोद N (k)	(7) $f_a = \frac{N}{A}$ (ksi)	(8) $f_b = \frac{M_c}{I}$ (ksi)	(9) अनुमेय F_a (ksi)	(10) $\frac{f_a}{F_a}$	(11) $+ \frac{f_b}{F_b} =$	(12) क्षमता का दशमलव मान
A	23.00	39.75	3,483		414	10.4		15.88	0.66		0.66
1	23.00	39.75	3,483	50	400	10.1	2.0	15.88	0.63	0.10	0.73
2	23.00	39.75	3,483	140	387	9.7	5.9	15.88	0.61	0.28	0.89
3	23.00	39.75	3,483	170	375	9.4	6.8	15.88	0.60	0.34	0.94
4	22.07	39.05	3,172	150	365	9.3	6.3	15.90	0.59	0.32	0.91
5	21.13	38.35	2,865	110	355	9.2	4.9	15.92	0.58	0.24	0.82
6	20.20	37.65	2,585	50	348	9.2	2.3	15.94	0.58	0.11	0.70
7	19.27	36.95	2,329	10	342	9.3	0.5	15.96	0.58	0.02	0.61
8	18.32	36.24	2,071	70	337	9.3	3.7	15.97	0.58	0.19	0.77
9	17.40	35.55	1,838	110	334	9.4	6.3	15.99	0.59	0.31	0.90
10	16.47	34.85	1,631	130	334	9.6	7.9	16.01	0.60	0.40	1.00
मुकुट	16.00	34.50	1,527	100	334	9.7	6.3	16.03	0.60	0.32	0.92

सारणी 5

जहाँ

$$23 - (23 - 16.47) * (7 - 3)/(10 - 3) = 19.27$$

$$2(12)(1) + 0.75(19.27 - 2) = 36.95$$

$$2(\underbrace{\underbrace{(12)(1)^3/12}_{bh^3/12} + \underbrace{(12)(1)(17.27/2 + 0.5)^2}_{Ad^2}}_{\text{Flange}} + \underbrace{\underbrace{0.75(17.27/2)^3/12}_{bh^3/12} + \underbrace{0.75(17.27/2)(17.27/4)^2}_{Ad^2}}_{\text{Web}}) = 2,329$$

$$343/36.95 = 9.3$$

$$(120)(19.27)/(2)(2329) = 0.5$$

$$(17,000 - 0.485 \times 10.798 \times 12/(2329/36.95))/1000 = 17.0 \neq 15.96$$

$$9.3/15.96 = 0.58$$

$$0.5/20 = 0.02$$

$$0.58 + 0.02 = 0.61$$

क्षैतिज प्रणोद के अद्यतन मान

अब जडत्वाघूर्ण परिवर्ती है, इसलिए H_A का मान पुनः परिकलित करना आवश्यक है। अब प्रयोग करना होगा

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}/I}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I}$$

H_A का संशोधित मान नीचे दर्शाए अनुसार सरलता से ज्ञात होता है। ध्यान दें कि स्तंभ (2) के मान, संबंधित खंडों के लिए स्तंभ (8), सारणी 2 में दिए $M\delta\overline{M}$ मानों को सारणी 5 में दर्शाए प्रत्येक खंड के कुल I से विभाजित करके

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मिलते हैं। स्तंभ (3), सारणी 6 के मान इसी प्रकार स्तंभ (9), सारणी 2 के मानों से मिलते हैं। स्तंभ (5), सारणी 6 में सरल धरन आघूर्ण सीधे स्तंभ (7), सारणी 2 से लिए गए हैं।

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
खंड	$\frac{M\delta\overline{M}}{I}$	$\frac{\delta\overline{M}^2}{I}$	संशोधित $H_A y$ (ft · k)	M सरल धरन (ft · k)	संशोधित आघूर्ण (ft · k)
1	1.00	0.0031	1,100	1,050	-50
2	8.16	0.0256	3,160	3,010	-150
3	20.79	0.0644	5,020	4,830	-190
4	40.67	0.1247	6,660	6,490	-170
5	66.95	0.2032	8,080	7,950	-130
6	98.57	0.2967	9,270	9,200	-70
7	134.13	0.4012	10,240	10,220	-20
8	173.82	0.5174	10,960	11,000	+40
9	214.41	0.6357	11,450	11,530	+80
10	252.35	0.7472	11,690	11,790	+100
मुकुट			11,720	11,790	+70
$\sum$	1010.85	3.0192			

सारणी 6

अतः संशोधित H_A है

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}/I}{2\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I} = -\frac{2\times 1,010.85}{2\times 3.0192} = -334.81k$$

विभिन्न खंडों के केंद्रों पर अक्षीय प्रणोद N के संशोधित मान परिकलित किए गए हैं।

खंड	$V \sin\alpha$	$+$	$H\cos\alpha$	$=$	संशोधित N (k)
A	153		262		415
1	132		269		401
2	106		282		388
3	83		293		376
4	62		303		365
5	44		312		356
6	29		320		349
7	17		326		343
8	8		330		338
9	2		333		335
10	0		335		335
मुकुट			335		335

सारणी 7

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

खंडों के केंद्रों पर पूर्वाभिकल्पित परिच्छेदों की पर्याप्तता जाँची जाती है। इस सारणी से पसली के सभी परिच्छेद संतोषजनक प्रतीत होते हैं। तथापि पसली के विक्षेप से उत्पन्न द्वितीयक प्रतिबलों की जाँच होने तक इसका निश्चित निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता।

खंड	$\frac{N}{A}$ (k/in^2)	$\frac{M_c}{I}$ (k/in^2)	$\frac{N/A}{F_A}$	+	$\frac{M_c/I}{F_B}$	=	क्षमता का दशमलव मान
A	10.4		0.66				0.66
1	10.1	2.0	0.64		0.11		0.75
2	9.8	6.0	0.62		0.30		0.92
3	9.5	7.6	0.60		0.38		0.98
4	9.4	7.1	0.59		0.36		0.95
5	9.3	5.7	0.58		0.29		0.87
6	9,3	3.3	0.58		0.17		0.75
7	9.3	1.0	0.58		0.05		0.63
8	9.3	2.1	0.58		0.11		0.69
9	9.4	4.5	0.59		0.23		0.82
10	9.6	6.1	0.60		0.31		0.91
मुकुट	9.7	4.4	0.61		0.23		0.84

सारणी 8

39.6 उदाहरण 39.6: आर्च में तापमान परिवर्तन

निम्नलिखित खंड Kinney, 1957 *Indeterminate Structural Analysis* से पुनरुत्पादित है।

पिछले उदाहरण (§39.5) की आर्च पसली में पसली-संक्षिप्तन और तापमान परिवर्तन के प्रभाव ज्ञात करें। तापमान में 100°F की गिरावट पर विचार करें।

क्षैतिज विस्थापन

पसली-संक्षिप्तन के प्रभाव ज्ञात करने के लिए पहले अंत A का वह क्षैतिज विस्थापन ज्ञात करना आवश्यक है जो वास्तविक भारित आर्च में उत्पन्न प्रत्यास्थ अक्षीय विकृतियों को पसली में आरोपित करने पर, जबकि अंत A रोलरों पर है, उत्पन्न होगा।

इसके बाद पसली में बंकन और अक्षीय दोनों विकृतियों पर विचार करते हुए, A पर कार्यरत 1 k क्षैतिज बल से उत्पन्न अंत A का क्षैतिज विस्थापन ज्ञात करना आवश्यक है। वास्तविक भारों से उत्पन्न पसली-संक्षिप्तन के कारण A का क्षैतिज विस्थापन है

$$\sum \frac{N\delta\overline{N}}{AE}\Delta L$$

जहाँ N पिछले उदाहरण की सारणी 7 से लिया अक्षीय प्रणोद है, $\delta\overline{N}$, A पर कार्यरत 1 k काल्पनिक क्षैतिज बल

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

से उत्पन्न अक्षीय प्रणोद है और सारणी 1 में $\cos\ \alpha$ के बराबर है, ΔL प्रत्येक खंड की लंबाई है तथा A संबंधित परिच्छेदीय क्षेत्रफल है।

A पर कार्यरत 1 k क्षैतिज बल से उत्पन्न पसली-संक्षिप्तन के कारण A का क्षैतिज विस्थापन है

$$\sum \frac{\delta \overline{N}^2}{AE} \Delta L \tag{39.2}$$

A के इन दोनों विक्षेपों के मूल्यांकन हेतु आवश्यक गणनाएँ नीचे दर्शाई गई हैं।

खंड	N (k)	$\delta \overline{N} = \cos \alpha$ (k)	A (in^2)	$\frac{N \delta \overline{N}}{A}$	$\frac{\delta \overline{N}^2}{A}$
1	401	0.8023	39.75	8.07	0.0162
2	388	0.8406	39.75	8.21	0.0178
3	376	0.8752	39.75	8.30	0.0193
4	365	0.9057	39.05	8.49	0.0210
5	356	0.9322	38.35	8.68	0.0227
6	349	0.9544	37.65	8.86	0.0242
7	343	0.9724	36.95	9.04	0.0256
8	338	0.9859	36.24	9.22	0.0268
9	335	0.9949	35.55	9.41	0.0286
10	335	0.9994	34.85	9.60	0.0278
$\sum$				87.88	0.2300

सारणी 9

अतः वास्तविक भार से उत्पन्न पसली-संक्षिप्तन के कारण A का क्षैतिज विस्थापन है

$$\sum \delta \overline{N} \frac{N}{AE} \Delta L = \frac{2 \times 87.88 \times 10.798 \times 12}{30,000} = 0.760 \text{ in}$$

और A पर 1 k क्षैतिज भार से उत्पन्न पसली-संक्षिप्तन के कारण विस्थापन है

$$\sum \delta \overline{N} \frac{\overline{N}}{AE} \Delta L = \frac{2 \times 0.2300 \times 10.798 \times 12}{30,000} = 0.002 \text{ in}$$

A पर 1 k क्षैतिज बल से उत्पन्न बंकन विकृति के कारण A के क्षैतिज विस्थापन का सापेक्ष मान पहले स्तंभ (3), सारणी 6 में ज्ञात किया गया है। इस विस्थापन का निरपेक्ष मान है

$$\frac{2 \times 3.019 \times 10.798 \times 1728 \times 1728}{30,000} = 3.755 \text{ in} \quad .$$

अतः A पर 1 k क्षैतिज बल से उत्पन्न बंकन और अक्षीय दोनों विकृतियों के कारण A के विस्थापन का कुल मान है

$$3.755 + 0.002 = 3.757 \text{ in}$$

H_A में कमी

रैखिक प्रत्यास्थ निकाय के लिए पसली-संक्षिप्तन के कारण H_A में कमी होगी

$$\frac{0.760}{3.757} = 0.20 \text{ k}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आर्च के निर्माण-तापमान से नीचे पसली के तापमान में किसी भी गिरावट से H_A में अतिरिक्त कमी होगी। ऐसा इसलिए है कि पसली में कुछ अतिरिक्त संकुषप्तन होगा। 100°F तापमान गिरावट से पसली के क्षैतिज प्रक्षेप की लंबाई में कमी होगी

$$\delta L = \underbrace{0.0000065}_{\alpha} \times 100 \times 200 \times 12 = 1.56 \text{ in} \tag{39.3}$$

H_A में परिणामी कमी होगी

$$\frac{1.56}{3.757} = 0.42 \text{ k}$$

और पसली-संकुषप्तन तथा तापमान गिरावट दोनों के कारण H_A में कुल कमी है

$$0.20 + 0.42 = 0.62 \text{ k}$$

इससे विस्तृति के केंद्र के निकट आघूर्ण बढ़ेगा।

आघूर्ण में वृद्धि

स्तंभ (6), सारणी 8 का निरीक्षण दर्शाता है कि इस वृद्धि से संभावित अतिप्रतिबल हेतु खंड 10 की जाँच की जानी चाहिए।

खंड 10 पर आघूर्ण में वृद्धि होगी

$$\Delta M = \Delta H_A((y \text{ for segment } 10) = 0.62 \times 34.91 = 21.6 \text{ ft} \cdot \text{k}$$

पहले ज्ञात 100 ft·k का आघूर्ण, खंड 10 के लिए, केवल प्रथम दो अंकों तक शुद्ध है; अतः खंड 10 का संशोधित कुल आघूर्ण होगा

$$100 + 20 = 120 \text{ ft} \cdot \text{k}$$

पहले ज्ञात 335 k का प्रणोद, खंड 10 के लिए, तीन अंकों तक शुद्ध है। पसली-संकुषप्तन और तापमान परिवर्तन से H_A में परिवर्तन को इसलिए 1 k तक पूर्णांकित करना होगा, ताकि खंड 10 का संशोधित प्रणोद ज्ञात हो सके। यह संशोधित प्रणोद होगा

$$335 - 1 = 334 \text{ k}$$

चरम प्रतिबल

चरम तंतु प्रतिबल है

$$f = \frac{M_c}{I} = \frac{120 \times 8.23 \times 12}{1631} = 7.25 \text{ k/in}^2$$

खंड 10 पर परिच्छेद की जाँच, सारणी 8 में बताए अनुसार, इससे की जाती है

$$\frac{N/A}{F_A} + \frac{M_c/I}{F_B} = \frac{334/34.85}{16.01} + \frac{7.25}{20} = 0.60 + 0.36 = 0.96$$

और स्पष्टतः खंड 10 का परिच्छेद पर्याप्त है।

तापमान वृद्धि के प्रभावों पर विचार नहीं किया गया है, क्योंकि ऐसी वृद्धि केवल ग्रीष्म ऋतु में हो सकती है जब हिम भार संभव नहीं है। फलतः समस्या के इस पक्ष का कोई व्यावहारिक महत्त्व नहीं है।

अभी प्रदर्शित विश्लेषण विधि प्रबलित-कंक्रीट अथवा काष्ठ द्वि-कब्जित आर्च पर समान रूप से लागू होगी। तथापि, जैसा पहले कहा गया है, बहुत कम प्रबलित-कंक्रीट आर्च दो कब्जों के साथ बनाए जाते हैं।

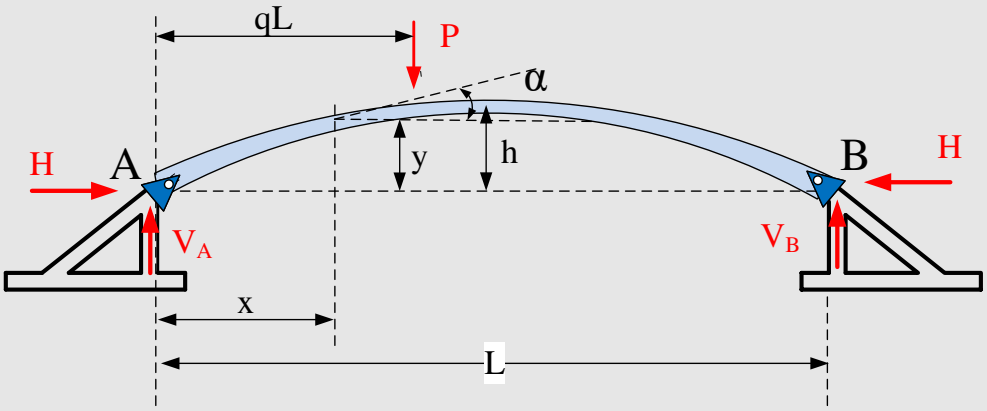
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यहाँ विशेष रूप से ध्यान देने योग्य है कि अक्षीय विकृति और तापमान गिरावट के अतिरिक्त, प्रबलित-कंक्रीट पसली में कंक्रीट का संकोचन भी पसली-संक्षिप्तन उत्पन्न करेगा। प्रयुक्त मिश्रण के लिए संकोचन गुणांक ज्ञात करके विश्लेषण में उसी सामान्य रीति से लागू करना चाहिए जैसी ऊपर तापमान गुणांक के लिए प्रदर्शित की गई है।

39.7 उदाहरण 39.7: I के सेकेंट परिवर्तन वाला परवलयिक आर्च

निम्नलिखित खंड Kinney, 1957 *Indeterminate Structural Analysis* से पुनरुत्पादित है।

यह जड़त्व के सेकेंट परिवर्तन वाला द्वि-कब्जित परवलयिक आर्च है। द्वि-कब्जित आर्च पसली के अभिकल्प की विधि §39.5 में प्रदर्शित की गई थी। वहाँ सुझाया गया था कि अतिरिक्त H का प्रथम विश्लेषण पसली के स्थिर जड़त्वाघूर्ण की धारणा पर सुगमता से आधारित किया जा सकता है। समस्या के लिए एक वैकल्पिक उपागम उपलब्ध है, क्योंकि पसली की आकृति और अनुपात पर दो आवश्यकताएँ आरोपित करने पर H के मान का अपेक्षाकृत सरल व्यंजक बनाया जा सकता है। पहली आवश्यकता है कि पसली-अक्ष का वक्र परवलयिक हो; दूसरी यह कि किसी विशेष परिच्छेद पर पसली का जड़त्वाघूर्ण मुकुट के जड़त्वाघूर्ण और कोण α के सेकेंट के गुणनफल के बराबर हो, जहाँ α उस परिच्छेद पर क्षैतिज और आर्च-अक्ष की स्पर्शरेखा के बीच का कोण है।



एकल संकेंद्रित भार P से भारित पसली पर विचार करें। हम मान सकते हैं कि पसली का जड़त्वाघूर्ण इस प्रकार बदलता है कि

$$I = I_c \sec \alpha$$

जहाँ I_c मुकुट पर जड़त्वाघूर्ण और I किसी परिच्छेद पर जड़त्वाघूर्ण है। आर्च-अक्ष परवलयिक है। A के सापेक्ष परवलय का समीकरण है

$$y = 4h\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मानें कि अंत A रोलरों पर है। तब,

$$H = -\frac{\Delta_{Ah}}{\delta_{AhAh}} = -\frac{\int M\delta\overline{M}ds/EI}{\int \delta\overline{M}^2 ds/EI}$$

जहाँ Δ_{Ah}, A का वह कृषैतिज विक्षेप है जो P से उत्पन्न होता है, और δ_{aAhAh}, A का वह कृषैतिज विक्षेप है जो A पर बाईं ओर कार्यरत 1 k कृषैतिज बल से उत्पन्न होता है। किसी परिच्छेद पर पसली में (अंत A रोलरों पर) P से उत्पन्न आघूर्ण को M से निरूपित किया गया है, और $\delta\overline{M}$, A पर 1 k कृषैतिज बल से उत्पन्न आघूर्ण है।

उपर्युक्त समीकरण में निम्न संबंध लागू होते हैं:

$$m = y, \qquad ds = \sec\alpha dx, \qquad I = I_c \sec\alpha$$

इन प्रतिस्थापनों के बाद H का उपर्युक्त व्यंजक सरल होकर बनता है

$$H = -\frac{\int My dx}{\int y^2 dx}$$

and

$$\text{For } x < qL \quad M = P(l-q)x$$
$$\text{For } x > qL \quad M = P(l-q)x - P(x-qL) = Pq(L-x)$$

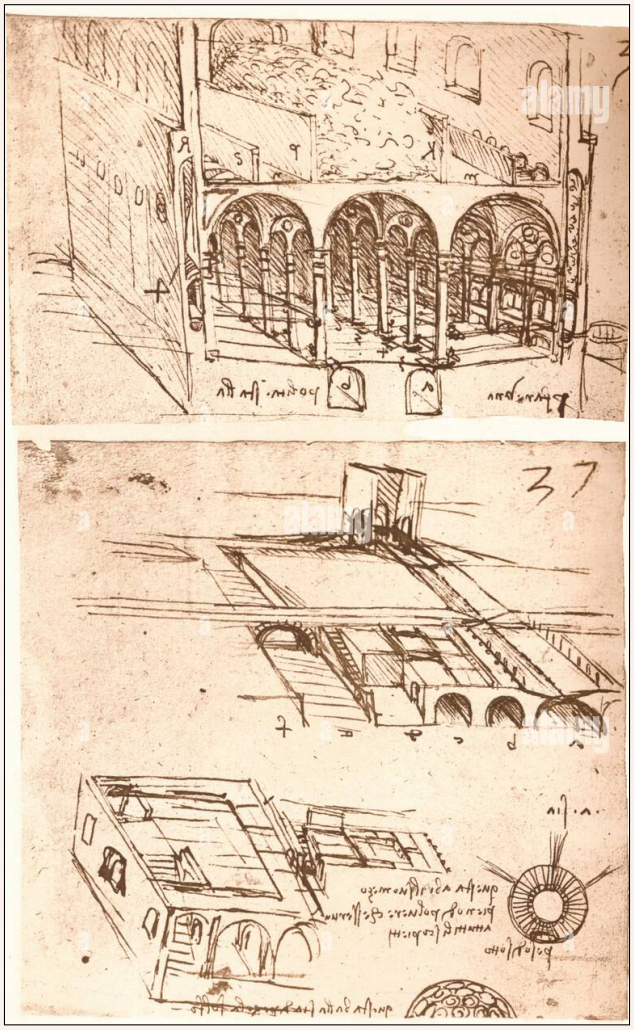
M और y के मान H के उपर्युक्त समीकरण में रखने और निरिदष्ट समाकलन करने पर परिणाम है

$$H = \frac{5PL}{8h}(q - 2q^3 + q^4)$$

यद्यपि उपर्युक्त समीकरण पहले वरिणत विशेष प्रकार की पसली के लिए व्युत्पन्न किया गया है, फिर भी यह ऐसे दिव-कबिजत ठोस पसलियों के प्रारंभिक विश्लेषण में उपयोगी है जिनके अकृषीय वक्र परवलयिक नहीं हैं और जिनमें I का परिवर्तन α के सेकेंट के समानुपाती नहीं है। H के परिणामी मान स्वाभाविकतः सन्निकट होंगे, पर प्रथम परीक्षण-पसली के अनुपात निर्धारण में प्रयुक्त किए जा सकते हैं। उदाहरणतः यदि पिछले समीकरण को उदाहरण §39.5 की भारित पसली पर लागू किया जाए, तो H का परिकलित मान 339.14 k होगा। सही मान 334.81 k पाया गया था।

ध्यान दें कि यदि H के लिए प्रभाव-रेखा अपेक्षित हो, तो P को इकाई मानकर q के वे मान रखे जाते हैं जो उन विभिन्न परिच्छेदों के अनुरूप हों जिनके लिए प्रभाव-रेखा कोटियाँ वांछित हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



स्थापत्य रेखाचित्र, लियोनार्दो दा विंची, 15वीं शताब्दी का उत्तरार्ध।

यह प्रारंभिक अभिकल्प चरण का मूर्त रूप है, जहाँ आरंभिक विचार सहज और अन्वेषी रेखाचित्रों के माध्यम से दृश्य अवधारणाओं में रूपांतरित होते हैं।

प्रति नमूना

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

खण्ड III

मध्यवर्ती एवं संख्यात्मक

पिछले ग्रंथ में विश्लेषणात्मक हलों पर बल दिया गया था; इसके विपरीत, यह ग्रंथ संख्यात्मक उपागमों को प्राथमिकता देता है। इसका उपयुक्त शीर्षक “कंकालीय संरचनाओं का परिमित अवयव विश्लेषण” हो सकता है।

ग्रंथ का आरंभ प्रत्यक्ष दृढता विधि के परिचय से होता है, जिसमें कंकालीय संरचनाओं के विस्थापन–बल संबंधों से व्युत्पन्न अवयवों का उपयोग किया गया है। इसके बाद परिवर्तनात्मक विधि का औपचारिक परिचय दिया गया है; यूलर समीकरण से आरंभ होकर यह परिमित अवयव विधि के व्यापक ढाँचे तक पहुँचता है।

पूरे ग्रंथ में इन विधियों से संबंधित विभिन्न विषयों पर विचार किया गया है (जैसे गतिक विश्लेषण और समप्राचलीय अवयव का सूत्रीकरण)।

इसका कार्यक्षेत्र रैखिक प्रत्यास्थ संरचनाओं तक सीमित है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

40 प्रत्यक्ष दृढता विधि का परिचय

सारांश

ग्रंथ III का यह प्रथम अध्याय कंकालीय संरचनाओं के संख्यात्मक विश्लेषण की आधारभूमि तैयार करता है। इसमें पूर्व में परिभाषित, किंतु विभिन्न स्थानों पर बिखरी हुई कुछ संकल्पनाओं का पुनरावलोकन किया जाएगा। सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण रूप से, अंतिम अनुभाग संरचनात्मक विश्लेषण को एक परिसीमा मान समस्या के रूप में संदर्भित करेगा।

40.1 आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण क्यों? . . 1482
40.2 संरचनात्मक आदर्शीकरण 1483
40.3 चिह्न-परिपाटी 1485
40.4 निर्देशांक तंत्र 1486
40.5 नम्यता बनाम दृढता 1486
40.6 स्वतंत्रता कोटियाँ 1487
40.7 स्थैतिक बनाम गतिकीय अनिर्धार्यता . . 1490
40.8 संरचनात्मक विश्लेषण/यांत्रिकी: एक परिसीमा मान समस्या 1490

40.1 आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण क्यों?

1 अधिकांश सिविल अभियांत्रिकी पाठ्यक्रमों में विद्यार्थियों को स्थैतिकी, सामग्री-सामर्थ्य और आधारभूत संरचनात्मक विश्लेषण के पाठ्यक्रम लेने होते हैं। इनमें अंतिम पाठ्यक्रम मूलभूत है और स्थैतिकतः निर्धार्य तथा अनिर्धार्य, दोनों प्रकार की संरचनाओं के आधारभूत संरचनात्मक विश्लेषण—अर्थात् प्रतिक्रियाओं, विक्षेपों और आंतरिक बलों के निर्धारण—का परिचय देता है।

2 इसमें ऊर्जा विधियों का भी परिचय दिया जाता है और अधिकांश, यदि सभी नहीं, उदाहरण द्विविमीय होते हैं। हस्त-गणना पर बल होने के कारण त्रिविमीय संरचनाओं का विश्लेषण बहुत कम किया जाता है। पढ़ाई जाने वाली विधियाँ अधिकांशतः “लिफाफे के पीछे” की गणनाओं के लिए उपयुक्त होती हैं, कंप्यूटर कार्यान्वयन के लिए आवश्यक रूप से नहीं।

3 संरचनात्मक अभियांत्रिकी अथवा यांत्रिकी में विशेषज्ञता प्राप्त करने के इच्छुक विद्यार्थी आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण और/अथवा परिमित अवयव विश्लेषण जैसे अधिक उन्नत पाठ्यक्रम लेते हैं।

4 आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण, अथवा उन्नत संरचनात्मक विश्लेषण, अथवा संरचनात्मक अभियांत्रिकी परिमित अवयव का परिचय, आरंभिक विश्लेषण पाठ्यक्रम पर आधारित होकर उन विधियों पर केंद्रित होता है जो कंप्यूटर कार्यान्वयन के अनुकूल हैं। ऐसा करते हुए हम द्विविमीय और त्रिविमीय दोनों संरचनाओं पर समान बल देंगे तथा संरचनाओं के कंप्यूटर-सहायित विश्लेषण की गहन समझ विकसित करेंगे।

5 यह अत्यावश्यक है, क्योंकि व्यवहार में अधिकांश, यदि सभी नहीं, संरचनात्मक विश्लेषण कंप्यूटर द्वारा किए जाते हैं। संरचनात्मक अभियंताओं के रूप में आपके लिए यह समझना अनिवार्य है कि इन “काले बक्सों” के भीतर क्या है; इतना आत्मविश्वास विकसित करना कि उन्हें खोलकर विशिष्ट कार्यों के लिए संशोधित कर सकें; और सबसे महत्त्वपूर्ण, उनकी सीमाओं को समझ सकें।

6 अधिकांश स्नातकोत्तर संस्थानों में हाल में परिमित अवयव विधि पर दिए जा रहे बल के कारण अनेक विद्यार्थी इस प्रकार के पाठ्यक्रम को छोड़कर सीधे परिमित अवयव पाठ्यक्रम लेने को प्रेरित हुए हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः इन दोनों पाठ्यक्रमों के संबंध और उनकी भूमिकाओं को समझना महत्त्वपूर्ण है। परिमित अवयव विधि द्विविमीय अथवा त्रिविमीय सातत्य के विश्लेषण से संबंधित है। इसमें प्रमुख अज्ञात नोडीय विस्थापन $\mathbf{u}$ होते हैं और आंतरिक "बल" सामान्यतः प्रतिबल $\boldsymbol{\sigma}$ तक सीमित रहते हैं। इसका एकमात्र समरूप एकविमीय संरचनात्मक अवयव ट्रस है।

7 बाँधों, खोलों और नींवों जैसी संरचनाओं के प्रतिरूपण के लिए द्विविमीय तथा त्रिविमीय सातत्य सिविल अभियांत्रिकी में आवश्यक हैं; तथापि अधिकांश सिविल अभियांत्रिकी संरचनाएँ धरन, गर्डर अथवा स्तंभ जैसे एकविमीय "दंड" अवयवों से निर्मित होती हैं। इन अवयवों में "विस्थापन" और आंतरिक "बल" सातत्य परिमित अवयवों में मिलने वाली राशियों से कुछ अधिक जटिल होते हैं।

8 अतः सातत्य परिमित अवयवों के विपरीत, जहाँ विस्थापन प्रायः स्थानांतरण का पर्याय होता है, एकविमीय अवयवों में संरचना के प्रकार के अनुसार सामान्यीकृत विस्थापनों में स्थानांतरण और/अथवा बंकन तथा/अथवा ऐंठन घूर्णन सम्मिलित हो सकते हैं। इसी प्रकार "आंतरिक बल" प्रतिबल नहीं, बल्कि अक्षीय और अपरूपण बल तथा/अथवा बंकन या ऐंठन आघूर्ण होते हैं। अधिकांश सिविल अभियांत्रिकी संरचनाओं के विश्लेषण और अभिकल्प में ये संकल्पनाएँ कहीं अधिक प्रासंगिक हैं।

9 इस प्रकार आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण वास्तव में आरंभिक विश्लेषण और परिमित अवयव पाठ्यक्रमों के बीच एक सेतु-पाठ्यक्रम है। अवयव दृढता आव्यूह $[\mathbf{k}]$ पहले आधारभूत संरचनात्मक विश्लेषण में प्रस्तुत विधियों से और बाद में ऊर्जा-आधारित संकल्पनाओं से व्युत्पन्न किया जाएगा। यही बाद वाला उपागम परिमित अवयव विधि में विशिष्ट रूप से प्रयुक्त होता है।

10 इस पाठ्यक्रम का एक महत्त्वपूर्ण घटक कंप्यूटर प्रोग्रामन है। सिद्धांत और कलन-विधियों की सम्यक् व्याख्या के बाद आपसे उन्हें Matlab में प्रोग्राम करने की अपेक्षा होगी। यह प्रोग्राम 2 और 3 विमीय ट्रस तथा फ्रेम संरचनाओं का विश्लेषण करेगा; अनेक विद्यार्थियों ने बाद में अपने व्यावसायिक कार्यों में इसका उपयोग किया है।

11 एक कंप्यूटर कार्य भी होगा, जिसमें आपसे *Mathematica* का उपयोग करके सरल प्रतीकात्मक संक्रियाएँ करने की अपेक्षा होगी।

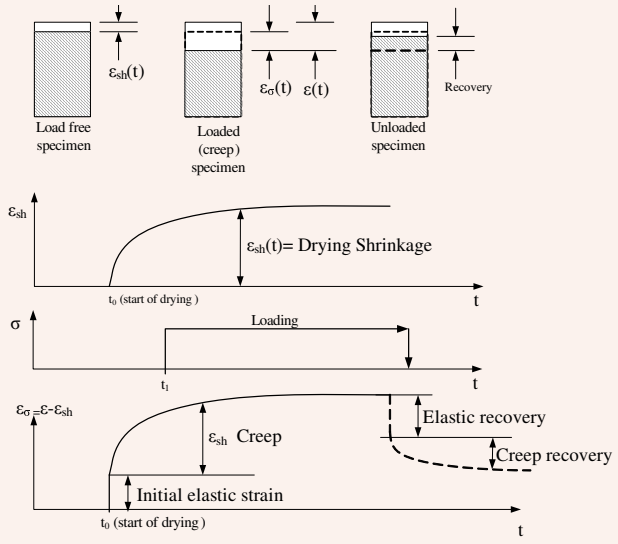
40.2 संरचनात्मक आदर्शीकरण

12 विश्लेषण से पूर्व किसी संरचना को उपयुक्त गणितीय निरूपण के लिए आदर्शीकृत करना आवश्यक है। प्रत्येक सूक्ष्म विवरण का प्रतिरूपण व्यावहारिक रूप से असंभव और प्रायः अनावश्यक होने के कारण कुछ मान्यताएँ अपनानी पड़ती हैं। अतः संरचनात्मक आदर्शीकरण जितना विज्ञान है, उतना ही कला भी है। विश्लेषक के समक्ष आने वाले प्रश्नों में से कुछ निम्नलिखित हैं:

1. द्विविमीय अथवा त्रिविमीय; क्या भवन की केवल एक खाड़ी का प्रतिरूप बनाया जाए या संपूर्ण संरचना का?
2. फ्रेम अथवा ट्रस; क्या हम बंकन दृढता की उपेक्षा कर सकते हैं?
3. दृढ अथवा अर्ध-दृढ संयोजन (इस्पात संरचनाओं में विशेषतः महत्त्वपूर्ण)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

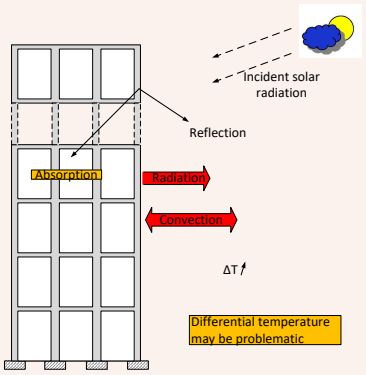
4. दृढ आधार अथवा प्रत्यास्थ नींव (क्या नींव ठोस शैल पर है अथवा ऐसी मृदा पर जो समय के साथ सघन हो सकती है?)
5. द्विवतीयक अवयवों को सम्मिलित किया जाए या नहीं (जैसे त्रिविमीय विश्लेषण में विकर्ण बंधक)।
6. गतिक विश्लेषण? जब संरचना पर लगाए गए भार (उत्तेजन) की आवृत्ति उसकी न्यूनतम प्राकृतिक कंपन आवृत्ति के लगभग एक-तिहाई से कम हो, तब जडत्व प्रभावों की उपेक्षा करके समस्या को अर्ध-स्थैतिक माना जा सकता है; अन्यथा गतिक विश्लेषण आवश्यक है। अत्यंत नम्य संरचना के लिए धीरे-धीरे लगाया गया भार भी गतिक विश्लेषण की माँग कर सकता है।
7. समय-निर्भर विकृतियाँ? जैसे कंक्रीट विसर्पण, चित्र 40.1, पूर्वप्रतिबलन केबलों का शिथिलन, अथवा अन्य समय-निर्भर प्रभाव (जैसे संक्षारण या श्रांति)।



चित्र 40.1: समय-निर्भर विकृति; विसर्पण और संकुचन

8. तापमान प्रभाव: उदाहरणार्थ भवन के बाह्य आवरण के तापमानों को ध्यान में रखना पड सकता है, चित्र 40.2, क्योंकि वे असममित भार उत्पन्न करेंगे।
9. अक्षीय विरूपण सम्मिलित किया जाए या नहीं (क्या भवन की किसी धरन की अक्षीय दृढता की उपेक्षा की जा सकती है?)
10. अनुप्रस्थ-काट गुणधर्म (प्रबलित कंक्रीट धरन का जडत्व आघूर्ण क्या है?), §46.6.3।
11. हाँच की उपेक्षा की जाए या नहीं (ये सामान्यतः उच्च ऋणात्मक आघूर्ण वाले क्षेत्रों में उपस्थित होते हैं)।
12. रैखिक अथवा अरैखिक विश्लेषण (रैखिक विश्लेषण चरम अथवा विफलता भार का पूर्वानुमान नहीं कर सकता और विरूपणों को कम आँकेगा)।
13. लघु विरूपण ($\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$) अथवा बृहत् विरूपण ($\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2$, P-$\Delta$ प्रभाव), अध्याय 29। ध्यान दें कि पवन भार के अधीन ऊँचे भवन के विश्लेषण में आघूर्णों को अक्षीय भार और पार्श्व विरूपण के गुणनफल, अर्थात् $P-\Delta$ प्रभाव, से प्रवर्धित किया जाना चाहिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



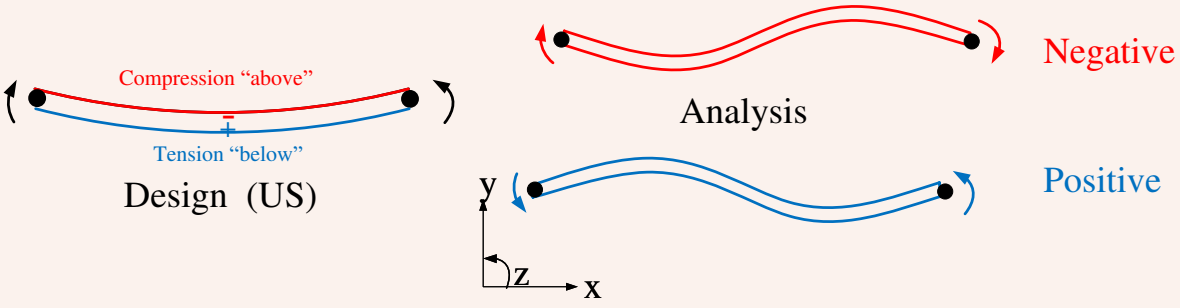
चित्र 40.2: भवन के तापीय भार

14. आंशिक ध्वंस अथवा स्थानीय पराभव (क्या एक अवयव की विफलता संपूर्ण संरचना की विफलता आरंभ कर देगी?)
15. पवन भार (पवन भार के अधीन ऊँचे भवन का पार्श्व विचलन प्रायः अधिक ऊँची संरचनाओं की प्रमुख सीमा होता है)।
16. द्वितीयक प्रतिबल (वेल्डिंग के कारण उत्पन्न; अधिकांश स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं में उपस्थित)।

40.3 चिह्न-परिपाटी

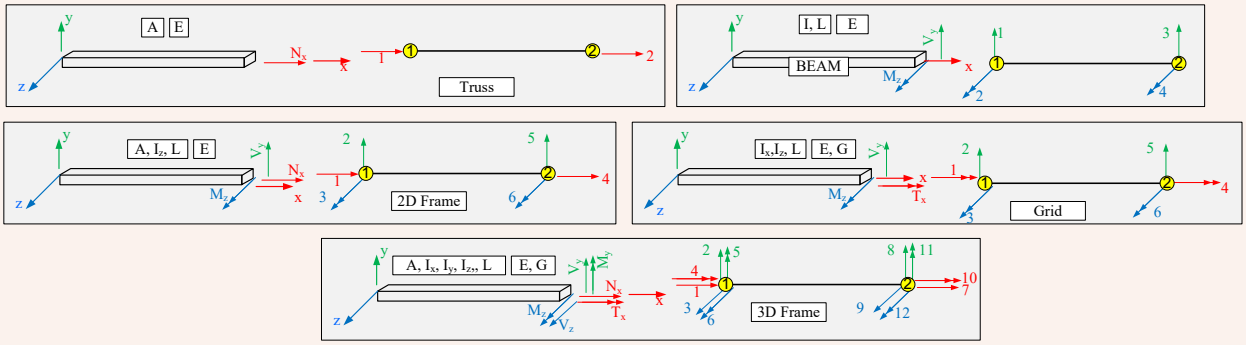
13 संरचनात्मक विश्लेषण में प्रयुक्त चिह्न-परिपाटी पहले संरचनात्मक विश्लेषण/अभिकल्प में अपनाई गई परिपाटी से पूर्णतः भिन्न है, चित्र 40.3 (जहाँ मुख्यतः बंकन पर ध्यान केंद्रित किया गया था और धनात्मक आघूर्ण को "नीचे तनाव" उत्पन्न करने वाला माना गया था। इसे प्रोग्राम करना असुविधाजनक होगा!)।

14 आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण में अपनाई गई चिह्न-परिपाटी प्रचलित निर्देशांक तंत्र के अनुरूप है। अतः हम वामावर्त आघूर्ण को धनात्मक परिभाषित करते हैं।



चित्र 40.3: चिह्न-परिपाटी, अभिकल्प और विश्लेषण (चित्र 26.1)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 40.4: अवयव के आंतरिक बल और स्थानीय स्वतंत्रता कोटियाँ

40.4 निर्देशांक तंत्र

15 हमें 2 निर्देशांक तंत्रों में अंतर करना चाहिए:

वैश्विक: संरचना के नोडीय निर्देशांकों का वर्णन करने के लिए। इस तंत्र को मनमाने ढंग से चुना जा सकता है, बशर्ते वह दक्षिणहस्त (RHS) तंत्र हो। इसके अक्षों को हम बड़े अक्षरों X, Y, Z, चित्र 40.7, अथवा 1,2,3 (कंप्यूटर प्रोग्राम में चल सूचकांक) से निरूपित करेंगे।

स्थानीय: यह तंत्र प्रत्येक अवयव से संबद्ध होता है और अवयव के आंतरिक बलों का वर्णन करने के लिए प्रयुक्त होता है। इसके अक्षों को हम छोटे अक्षरों x, y, z (अथवा 1,2,3), चित्र 40.4, से निरूपित करेंगे।

16 x-अक्ष को अवयव के अनुदिश माना जाता है और उसकी दिशा 1st नोड से 2nd नोड की ओर चुनी जाती है, चित्र 40.4।

40.5 नम्यता *बनाम* दृढता

17 §26.1 में हमने नम्यता (बल) और दृढता (विस्थापन) विधियों के प्रमुख अंतरों को पहले ही रेखांकित किया है। यह अनुभाग उस विवेचन का पूरक है।

18 नम्यता विधि में हमने संरचना को *स्थैतिकतः निर्धार्य* बनाया और संपूर्ण संरचना का विश्लेषण किया। दृढता विधि में हम संरचना (अवयव अथवा संपूर्ण संरचना) को निम्न प्रकार *गतिकीय* रूप से *निर्धार्य* बनाएँगे:

1. प्रत्येक स्वतंत्रता कोटि (§40.6) j पर एकक विस्थापन लगाकर (अन्य सभी को शून्य पर निरुद्ध रखते हुए)।
2. अन्य सभी स्वतंत्रता कोटियों i से संबद्ध प्रतिक्रियाएँ निर्धारित करके।

अतः k_ij स्वतंत्रता कोटि i पर उस प्रतिक्रिया को निरूपित करेगा जो स्वतंत्रता कोटि j पर एकक विरूपण (स्थानांतरण अथवा घूर्णन) के कारण उत्पन्न होती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

19 नम्यता विधि में हम बाह्य रूप से लगाए गए बलों के पदों में विस्थापन खोजते हैं ($\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{F})$)। यह संबंध संरचना के लिए व्युत्पन्न होता है; दूसरी ओर दृढता विधि में हम बाह्य रूप से अधिरोपित विस्थापनों के पदों में आंतरिक बल खोजते हैं ($\mathbf{F}(\boldsymbol{\Delta})$)।

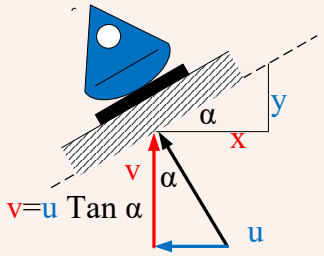
20 इन्हें अवयवों के लिए पहले ही व्युत्पन्न किया जा चुका है (अध्याय 26) और फिर आव्यूह रूप में व्यवस्थित किया गया है (अध्याय 41)।

40.6 स्वतंत्रता कोटियाँ

परिभाषा 40.1: स्वतंत्रता कोटि

स्वतंत्रता कोटि (dof) किसी नोड पर एक स्वतंत्र सामान्यीकृत नोडीय विस्थापन अथवा बल है।

21 विस्थापन रैखिकतः स्वतंत्र होने चाहिए और इस प्रकार परस्पर संबद्ध नहीं होने चाहिए। उदाहरणार्थ, आनत समतल पर रोलर आधार के तीन विस्थापन (घूर्णन θ तथा दो स्थानांतरण u और v) होंगे; किंतु दोनों स्थानांतरण गतिकीय रूप से बाधित होने के कारण केवल दो स्वतंत्र विस्थापन होते हैं, चित्र 40.5।



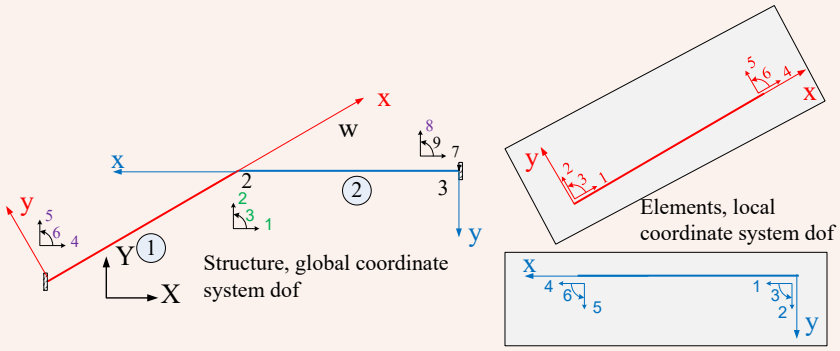
चित्र 40.5: स्वतंत्र विस्थापन

22 अवयव की स्वतंत्रता कोटि उसके अपने स्थानीय निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष परिभाषित होती है। संरचनात्मक स्वतंत्रता कोटि वैश्विक निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष परिभाषित होती है, चित्र 40.6।

23 ध्यान दें कि हम *सामान्यीकृत* विस्थापनों का उल्लेख करते रहे हैं, क्योंकि इस पद में स्थानांतरणों के साथ-साथ घूर्णनों को भी सम्मिलित करना चाहते हैं। संरचना के प्रकार के अनुसार ऐसे विस्थापन कोई नहीं, एक अथवा एक से अधिक हो सकते हैं। दुर्भाग्यवश अधिकांश आरंभिक संरचनात्मक विश्लेषण पाठ्यक्रमों में द्विविमीय संरचनाओं पर अत्यधिक बल और त्रिविमीय संरचनाओं अथवा ऐंठनयुक्त द्विविमीय संरचनाओं पर अपर्याप्त बल दिया गया है।

24 अधिकांश स्थितियों में स्थानीय निर्देशांकों और वैश्विक निर्देशांक तंत्र में स्वतंत्रता कोटियों की संख्या समान होती है। इसका एक उल्लेखनीय अपवाद ट्रस अवयव है। स्थानीय निर्देशांकों में केवल एक अक्षीय

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 40.6: स्थानीय और वैश्विक निर्देशांक तंत्र/स्वतंत्रता कोटियाँ

विरूपण हो सकता है, जबकि वैश्विक निर्देशांकों में प्रत्येक नोड के लिए 2D और 3D में क्रमशः दो और तीन स्थानांतरण होते हैं।

25 अतः यह समझना आवश्यक है कि एकविमीय दंड अवयवों से निर्मित विभिन्न प्रकार की संरचनाओं के साथ कौन-सी स्वतंत्रता कोटियाँ संबद्ध हो सकती हैं।

परिभाषा 40.2: विभिन्न अवयवों की स्वतंत्रता कोटियाँ

.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रकार		नोड 1	नोड 2	$[\mathbf{k}^{(e)}]$ (स्थानीय)	$[\mathbf{K}^{(e)}]$ (वैश्विक)
1 विमीय					
धरन	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{y1},\ M_{z2}$	$F_{y3},\ M_{z4}$	4×4	4×4
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	$v_1,\ \theta_2$	$v_3,\ \theta_4$		
2 विमीय					
ट्रस	$\{\mathbf{p}\}$	F_{x1}	F_{x2}	2×2	4×4
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	u_1	u_2		
फ्रेम	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1},\ F_{y2},\ M_{z3},$	$F_{x4},\ F_{y5},\ M_{z6},$	6×6	6×6
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	$u_1,\ v_2,\ \theta_3,$	$u_4,\ v_5,\ \theta_6,$		
ग्रिड	$\{\mathbf{p}\}$	$T_{x1},\ F_{y2},\ M_{z3}$	$T_{x4},\ F_{y5},\ M_{z6},$	6×6	6×6
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	$\theta_1,\ v_2,\ \theta_3$	$\theta_4,\ v_5,\ \theta_6,$		
3 विमीय					
ट्रस	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1},$	F_{x2}	2×2	6×6
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	$u_1,$	u_2		
फ्रेम	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1},\ F_{y2},\ F_{y3},$ $T_{x4}\ M_{y5},\ M_{z6}$	$F_{x7},\ F_{y8},\ F_{y9},$ $T_{x10}\ M_{y11},\ M_{z12}$	12×12	12×12
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	$u_1,\ v_2,\ w_3,$ $\theta_4,\ \theta_5,\ \theta_6,$	$u_7,\ v_8,\ w_9,$ $\theta_{10},\ \theta_{11},\ \theta_{12},$		

[26] स्थानीय और वैश्विक स्वतंत्रता कोटियों में अंतर करना चाहिए। क्रमांकन योजना निम्न सरल नियमों का पालन करती है:

स्थानीय: किसी अवयव की स्वतंत्रता कोटियाँ: प्रथम नोड से आरंभ करें, संबंधित स्थानीय निर्देशांक तंत्र के अधोलिखितों के क्रम में स्थानीय स्वतंत्रता कोटियों को क्रमांकित करें और द्वितीय नोड के लिए यही प्रक्रिया दोहराएँ, चित्र 40.4।

वैश्विक: संपूर्ण संरचना की स्वतंत्रता कोटियाँ: 1st नोड से आरंभ करके सभी अनिरुद्ध वैश्विक स्वतंत्रता कोटियों को क्रमांकित करें, फिर अगले नोड पर जाएँ और तब तक जारी रखें जब तक सभी वैश्विक स्वतंत्रता कोटियाँ क्रमांकित न हो जाएँ, चित्र 40.7।

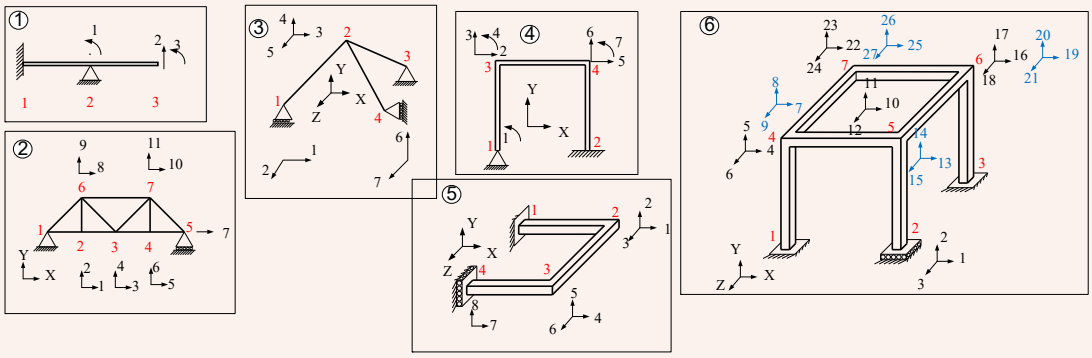
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

40.7 स्थैतिक *बनाम* गतिकीय अनिर्धार्यता

27 स्थैतिक अनिर्धार्यता की कोटि पहले अज्ञात बलों की उस संख्या के रूप में परिभाषित की गई थी जिसे उपयुक्त समीकरणों और संतुलन (साथ में अनुकूलता समीकरणों) से निर्धारित नहीं किया जा सकता।

28 इसी अनुरूप, *गतिकीय अनिर्धार्यता की कोटि* किसी संरचना में अज्ञात विस्थापनों की कुल संख्या है। आगामी अध्यायों में प्रस्तुत विस्थापन विधि की सही समझ के लिए यह संकल्पना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

29 चित्र 40.7 के संदर्भ में स्थैतिक और गतिकीय अनिर्धार्यता की कोटियाँ सारणी 40.1 में दी गई हैं।



चित्र 40.7: स्थैतिक और गतिकीय अनिर्धार्यता की कोटियाँ

तालिका 40.1: स्थैतिक और गतिकीय अनिर्धार्यता की कोटियाँ

ID	स्थैतिक अनिर्धार्यता	गतिकीय अनिर्धार्यता
1	1	3
2	0	11
3	0	7
4	2	7
5	2	6
6	9	27

40.8 संरचनात्मक विश्लेषण/यांत्रिकी: एक परिसीमा मान समस्या

30 किसी संरचना का विश्लेषण मूलतः एक परिसीमा मान समस्या का हल है (जो आयतन Ω पर एक अवकल समीकरण द्वारा नियंत्रित और परिसीमा Γ पर स्थानिक/कालिक परिसीमा शर्तों के अधीन होती है)।

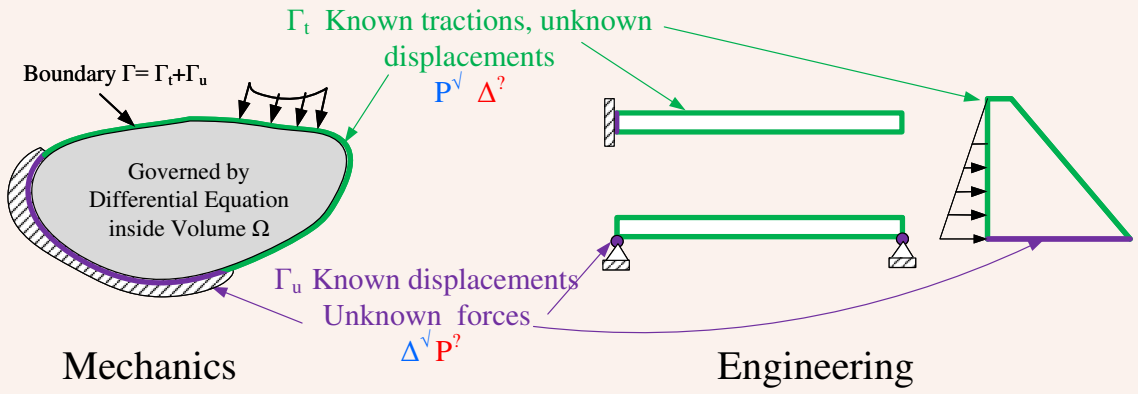
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

31 हमारे प्रकरण में संरचना का विविक्तीकरण किया जा रहा है और नियंत्रक अवकल समीकरण (संतुलन) $\mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{P}$ में अंतर्निहित है। परिसीमा को $\Gamma = \Gamma_t \bigcup \Gamma_u$ के रूप में विघटित किया जा सकता है, सारणी 40.2। इसका विस्तृत विवेचन 47.2.6 में किया जाएगा।

तालिका 40.2: आवश्यक और प्राकृतिक परिसीमा शर्तें

Γ	कर्षण	विस्थापन	गणितीय	संरचनात्मक	स्वतंत्रता कोटि
Γ_t	$\mathbf{P}_t^{\checkmark}$	$\boldsymbol{\Delta}_t^{?}$	Neuman	आवश्यक	मुक्त
Γ_u	$\mathbf{R}_u^{?}$	$\boldsymbol{\Delta}_u^{\checkmark}$	Dirichlet	प्राकृतिक	स्थिर/निरुद्ध

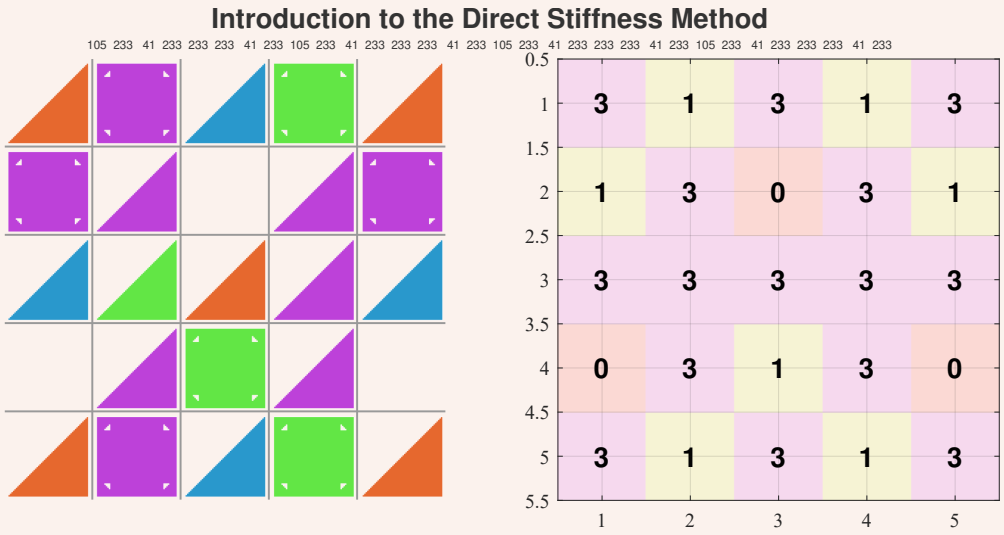
32 विविक्त परिसीमा मान समस्या के उदाहरण चित्र 40.8 में दिए गए हैं। धरन और बाँध के लिए Γ_t के



चित्र 40.8: परिसीमा मान समस्या

अनुदिश विस्थापन तथा Γ_u के अनुदिश बल (प्रतिक्रियाएँ) निर्धारित करने हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अध्याय-विशिष्ट आइडेंटिकॉन, chapter H

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

41 अवयव दृढता आव्यूह $\mathbf{k}^{(e)}$

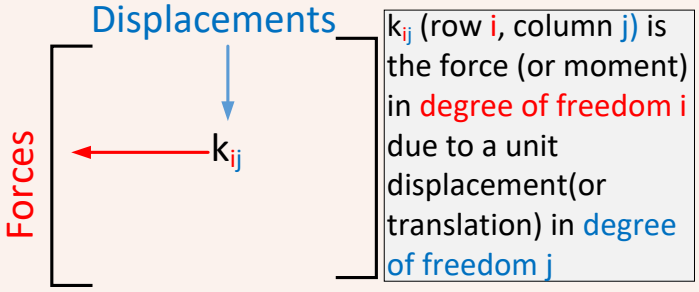
सारांश

अध्याय 26 में हमने (संगत) विस्थापनों के पदों में (साम्यावस्था में स्थित) बलों के व्यंजक व्युत्पन्न किए थे। इनमें से अनेक व्यंजकों का, किंतु सभी का नहीं, अनुवर्ती अध्याय (ढाल-विक्षेप और आघूर्ण-वितरण) में उपयोग किया गया था। प्रत्यक्ष दृढता विधि की तैयारी में हमें इन व्यंजकों को आव्यूह रूप में पुनर्व्यवस्थित करना होगा; अधिक स्पष्टतः, हम विभिन्न प्रकार के अवयवों के लिए अवयव दृढता आव्यूहों का निर्माण करेंगे। आगे इसका विस्तार सेंट-वेनां और व्लासोव मरोड तथा टिमोशेंको धरनों को सम्मिलित करने के लिए किया जाएगा।

41.1 दृढता पद की परिभाषा 1493
41.2 ट्रस अवयव 1494
41.3 धरन: यूलर-बर्नूली 1495
41.4 2D फ्रेम अवयव (जिसे धरन-स्तंभ अवयव भी कहते हैं) 1495
41.5 ग्रिड अवयव 1496
41.6 3D धरन-स्तंभ अवयव 1496
41.7 टिमोशेंको धरन 1499
41.7.1 अतिरिक्त विकृति 1499
41.7.2 अवयव दृढता आव्यूह में संशोधन 1500
41.8 व्लासोव मरोड 1502

41.1 दृढता पद की परिभाषा

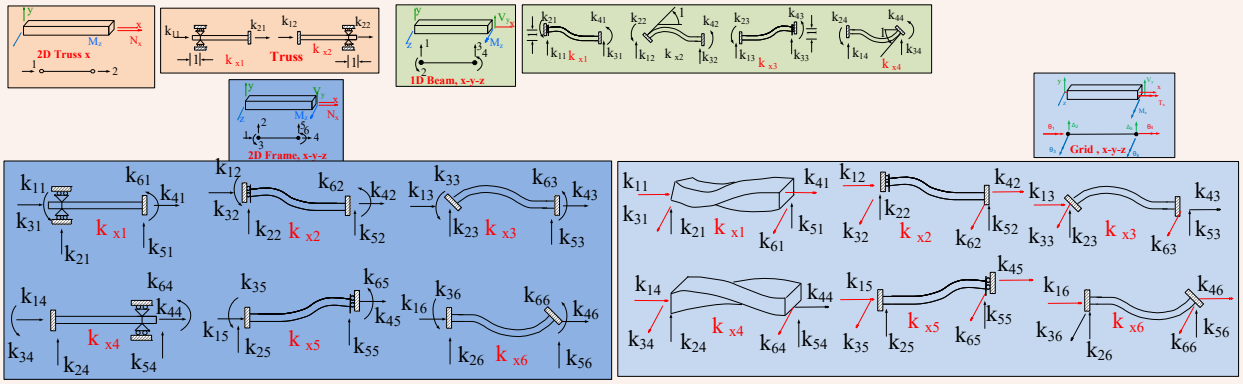
1 अध्याय 26 में ज्ञात विस्थापनों के पदों में व्युत्पन्न बलों के विभिन्न व्यंजकों पर हम पुनः विचार करेंगे और उन्हें आव्यूह रूप में लिखेंगे। इससे तथाकथित दृढता गुणांक k_{ij} प्राप्त होंगे, जो स्वतंत्रता-कोटि i में उस बल के अनुरूप हैं जिसे स्वतंत्रता-कोटि j में एकक विस्थापन उत्पन्न करता है, चित्र 41.1।



चित्र 41.1: दृढता पद K_{ij} की परिभाषा

2 विभिन्न प्रकार के अवयवों के गुणांक चित्र 41.2 में दर्शाए गए हैं। और वे नीचे दर्शाए गए बलों के अनुरूप हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 41.2: विभिन्न प्रकार के अवयवों के दृढता गुणांक

परिभाषा 41.1: विभिन्न अवयव प्रकारों के आंतरिक बल

	बल			आघूर्ण		
	x	y	z	x	y	z
धरन		V_y				M_z
2D फ्रेम	N_x	V_y				M_z
ग्रिड		V_y		T_x		M_z
3D फ्रेम	N_x	V_y	V_z	T_x	M_y	M_z

3 अतः यह अध्याय, अध्याय 26 से अवयव दृढता गुणांकों को एकत्र करके उन्हें आव्यूह रूपों—अवयव दृढता आव्यूहों—में व्यवस्थित करेगा।

41.2 ट्रस अवयव

4 ट्रस अवयव (चाहे 2D हो अथवा 3D) के प्रत्येक नोड से केवल एक स्वतंत्रता-कोटि संबद्ध होती है। अतः समीकरण 26.1 से हमें प्राप्त होता है

$$\mathbf{k}^{\mathrm{t}} = \begin{matrix} \\ p_1 \\ p_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

41.3 धरन: यूलर-बर्नूली

[5] समीकरणों 26.4, 26.5, 26.8 और 26.9 का उपयोग करके हम प्रत्येक एकक विस्थापन से संबद्ध बल निर्धारित कर सकते हैं।

$$\mathbf{k}^{\mathrm{b}} = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{समी. } 26.8(v_1=1) & \text{समी. } 26.8(\theta_1=1) & \text{समी. } 26.8(v_2=1) & \text{समी. } 26.8(\theta_2=1) \\ \text{समी. } 26.4(v_1=1) & \text{समी. } 26.4(\theta_1=1) & \text{समी. } 26.4(v_2=1) & \text{समी. } 26.4(\theta_2=1) \\ \text{समी. } 26.9(v_1=1) & \text{समी. } 26.9(\theta_1=1) & \text{समी. } 26.9(v_2=1) & \text{समी. } 26.9(\theta_2=1) \\ \text{समी. } 26.5(v_1=1) & \text{समी. } 26.5(\theta_1=1) & \text{समी. } 26.5(v_2=1) & \text{समी. } 26.5(\theta_2=1) \end{bmatrix} \end{array}$$

[6] प्रतिस्थापन करने पर

$$\mathbf{k}^{\mathrm{b}} = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array} \tag{41.1}$$

41.4 2D फ्रेम अवयव (जिसे धरन-स्तंभ अवयव भी कहते हैं)

[7] 2D फ्रेम अवयव ऐसे धरन अवयव हैं जिनकी अक्षीय दृढता ट्रस की अक्षीय दृढता के समान होती है। अतः $\mathbf{k}^{\mathrm{2dfr}} = \mathbf{k}^{\mathrm{b}} \cup \mathbf{k}^{\mathrm{t}}$। ध्यान देना चाहिए कि अक्षीय बलों और अपरूपण/आघूर्ण के बीच कोई युग्मन नहीं है।

$$\mathbf{k}^{\mathrm{2dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_{1x} & v_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} k^{\mathrm{t}}_{11} & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & k^{\mathrm{b}}_{14} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{23} & k^{\mathrm{b}}_{24} \\ k^{\mathrm{t}}_{21} & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & k^{\mathrm{b}}_{34} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{41} & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{43} & k^{\mathrm{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

[8] प्रतिस्थापन करने पर

$$\mathbf{k}^{\mathrm{2dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_{1x} & v_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array} \tag{41.2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

41.5 ग्रिड अवयव

9 ग्रिड अवयव का दृढता आव्यूह 2D फ्रेम अवयव के दृढता आव्यूह के अत्यंत अनुरूप है; केवल अक्षीय घटक के स्थान पर मरोड घटक आ जाता है।

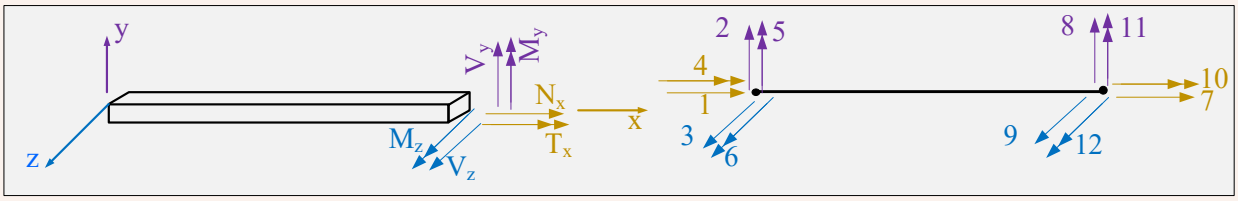
$$\mathbf{k}^{\mathrm{g}} = \begin{array}{c} \\ T_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ T_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{समी. 23.13} & 0 & 0 & -\text{समी. 23.13} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & k^{\mathrm{b}}_{14} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{23} & k^{\mathrm{b}}_{24} \\ -\text{समी. 23.13} & 0 & 0 & \text{समी. 23.13} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & k^{\mathrm{b}}_{34} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{41} & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{43} & k^{\mathrm{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

10 प्रतिस्थापन करने पर

$$[\mathbf{k}^{\mathrm{g}}] = \begin{array}{c} \\ T_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ T_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

41.6 3D धरन-स्तंभ अवयव

11 3D धरन-स्तंभ अवयव के लिए हम इसकी 12 स्वतंत्रता-कोटियों को स्मरण करते हैं, चित्र 41.3।



चित्र 41.3: 3D धरन-स्तंभ अवयव की स्वतंत्रता-कोटियाँ

+

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

12 अब हम अन्य सरलतर अवयवों के आव्यूहों में पहले ही प्रस्तुत पदों से अवयव दृढता आव्यूह का पुनर्निर्माण कर सकते हैं।

$$\mathbf{k}^{\text{3dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_{1x} & v_{1y} & w_{1z} & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & w_{2z} & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} k^{\text{t}}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\text{t}}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{11} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{12} & 0 & k^{\text{b}}_{13} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{14} \\ 0 & 0 & k^{\text{b}}_{11} & 0 & -k^{\text{b}}_{12} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{13} & 0 & k^{\text{b}}_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{\text{g}}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\text{g}}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{\text{b}}_{21} & 0 & k^{\text{b}}_{22} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{12} & 0 & k^{\text{b}}_{24} & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{21} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{22} & 0 & k^{\text{b}}_{23} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{24} \\ k^{\text{t}}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\text{t}}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{31} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{32} & 0 & k^{\text{b}}_{33} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{34} \\ 0 & 0 & k^{\text{b}}_{31} & 0 & k^{\text{b}}_{42} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{33} & 0 & k^{\text{b}}_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{\text{g}}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\text{g}}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^{\text{b}}_{41} & 0 & k^{\text{b}}_{32} & 0 & 0 & 0 & -k^{\text{b}}_{43} & 0 & k^{\text{b}}_{44} & 0 \\ 0 & k^{\text{b}}_{41} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{42} & 0 & k^{\text{b}}_{43} & 0 & 0 & 0 & k^{\text{b}}_{44} \end{array}\right] \end{array}$$

13 प्रतिस्थापन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\mathbf{k}^{\text{3dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_{1x} & v_{1y} & w_{1z} & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & w_{2z} & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_z & 0 & 0 & 0 & \gamma_z & 0 & -\beta_z & 0 & 0 & 0 & \gamma_z \\ 0 & 0 & \beta_y & 0 & -\gamma_y & 0 & 0 & 0 & -\beta_y & 0 & -\gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_y & 0 & 2\delta_y & 0 & 0 & 0 & \gamma_y & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & \gamma_z & 0 & 0 & 0 & 2\delta_z & 0 & -\gamma_z & 0 & 0 & 0 & \delta_z \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_z & 0 & 0 & 0 & -\gamma_z & 0 & \beta_z & 0 & 0 & 0 & -\gamma_z \\ 0 & 0 & -\beta_y & 0 & \gamma_y & 0 & 0 & 0 & \beta_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_y & 0 & \delta_y & 0 & 0 & 0 & \gamma_y & 0 & 2\delta_y & 0 \\ 0 & \gamma_z & 0 & 0 & 0 & \delta_z & 0 & -\gamma_z & 0 & 0 & 0 & 2\delta_z \end{array}\right] \end{array}$$

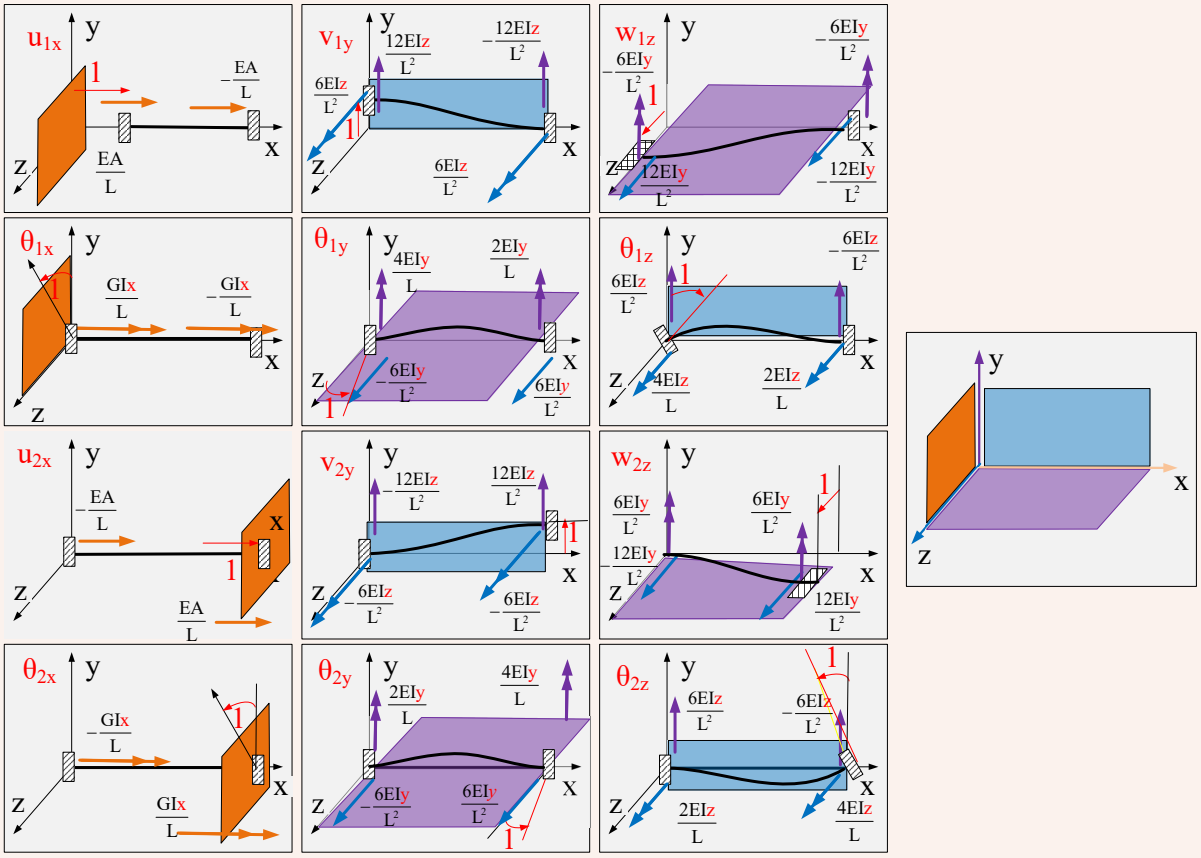
जहाँ

$$\alpha = \frac{EA}{L}; \quad \beta_i = \frac{12EI_i}{L^3}; \quad \gamma_i = \frac{6EI_i}{L^2}; \quad \delta_i = \frac{2EI_i}{L}; \quad \varepsilon = \frac{GI_x}{L};$$

और $i = [y|z]$।

14 ये दृढता गुणांक चित्र 41.4 में दर्शाए गए हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 41.4: 3D धरन-स्तंभ अवयव में पृथक दृढता पद

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

41.7 टिमोशेंको धरन

15 §23.1 में हमने अपरूपण विकृतियों द्वारा उत्पन्न अतिरिक्त "परजीवी" विकृति के व्यंजक व्युत्पन्न किए थे। यह अनुभाग मूल (यूलर-बर्नूली) धरन सूत्रीकरण को समायोजित करके उन विकृतियों को सम्मिलित करेगा।

41.7.1 अतिरिक्त विकृति

16 दृढता विधि की भावना के अनुरूप, हम संबद्ध स्वतंत्रता-कोटि पर एकक विस्थापन (स्थानांतरण अथवा घूर्णन) आरोपित करते हैं और अन्य सभी को शून्य रखते हैं। किंतु वंकन के लिए ऐसा करते समय (§26.3) हमने अपरूपण विकृति को सम्मिलित नहीं किया था। इसके फलस्वरूप प्राप्त बलों में कुछ "परजीवी" पद उत्पन्न होते हैं। एकक स्थानांतरण और एकक घूर्णन आरोपित करते समय हमें उनके प्रभाव पर विचार करना होगा।

स्थानांतरण आरोपित एकक स्थानांतरण के लिए हम *स्वेच्छया* यह परिभाषित करते हुए आरंभ करते हैं[1]

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \frac{12EI}{GA_sL^2} = 24(1+\nu)\frac{A}{A_s}\left(\frac{r}{L}\right)^2$$

आगे यह दर्शाया जाएगा कि v_s (समीकरण 23.11) का संबंध Φ से है। स्मरण रहे कि $A_s = A/\lambda_s$ (समीकरण 23.4); तब एकक ऊर्ध्वाधर *स्थानांतरण* के कारण अंत्य अपरूपण बल समीकरण 26.8 से, $v_1 = 1$ और $\theta_1 = \theta_2 = v_2 = 0$ रखने पर, अर्थात् $V = \frac{12EI_z}{L^3}$ के रूप में प्राप्त होता है। $x = 0$ पर हमें प्राप्त होता है (समीकरण 23.11)

$$\left.\begin{array}{rl} v_s & = \frac{VL}{GA_s} \\ V & = \frac{12EI_z}{L^3} \end{array}\right\} v_s = \underbrace{\frac{12EI}{GA_sL^2}}_{\Phi}$$

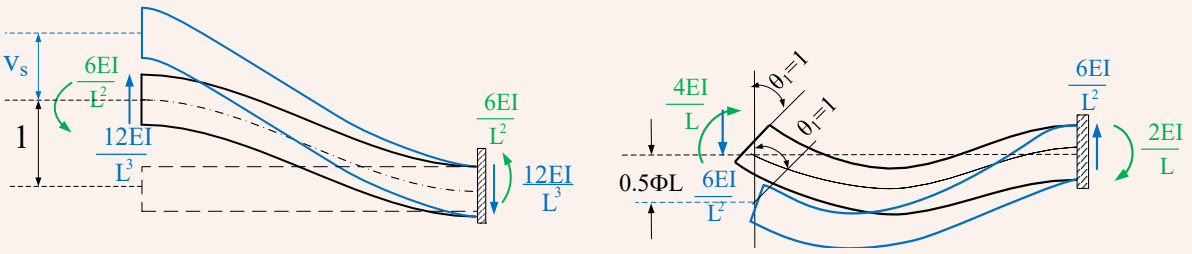
अतः अपरूपण विकृति ने कुल स्थानांतरण को 1 से बढ़ाकर $1+\Phi$ कर दिया है।

घूर्णन इसी प्रकार अब हम आरोपित एकक घूर्णन से संबद्ध परजीवी विकृति निर्धारित करना चाहते हैं। यद्यपि घूर्णन θ_1 आरोपित किया जाता है, फिर भी एक परजीवी आंतरिक अपरूपण बल उत्पन्न होता है; इसके फलस्वरूप अपरूपण विकृति (स्थानांतरण) उत्पन्न होगी, जिसे निरस्त करना आवश्यक है (पुनः, हम केवल एक स्वतंत्रता-कोटि—इस स्थिति में घूर्णन—को विकृत होने देते हैं और अन्य सभी को शून्य रहना चाहिए)। अपरूपण बल समीकरण 26.8 में $\theta_1 = 1$ और $\theta_2 = v_1 = v_2 = 0$ रखने पर, अर्थात् $V = \frac{6EI_z}{L^2}$ से प्राप्त होता है। $x = 0$ पर हमें प्राप्त होगा

$$\left.\begin{array}{rl} v_s & = \frac{VL}{A_sG} \\ V & = \frac{6EI_z}{L^2} \\ \Phi & = \frac{12EI}{GA_sL^2} \end{array}\right\} v_s = 0.5\Phi L$$

[1] स्मरण रहे कि $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ और $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) एकक स्थानांतरण (b) एकक घूर्णन

चित्र 41.5: आरोपित विकृतियों से उत्पन्न परजीवी अपरूपण विकृति

अतः अपरूपण विकृति ने धरन के उस सिरे को (जिसका स्थानांतरण शून्य होना था) नीचे $0.5\Phi L$ खिसका दिया है।

41.7.2 अवयव दृढता आव्यूह में संशोधन

17 यदि अपरूपण विकृतियाँ उपस्थित हों, तो इन दोनों प्रभावों के लिए हमें दृढता आव्यूह, समीकरण 41.1, में परिवर्तन करना होगा:

स्थानांतरण: दृढता आव्यूह के प्रथम और तृतीय स्तंभों के गुणांकों को $1+\Phi$ से विभाजित (अथवा प्रसामान्यीकृत) करें, जिससे दोनों सिरों पर निवल स्थानांतरण एकक हो; अन्यथा विस्थापन 1 के स्थान पर $1+\Phi$ होगा।

घूर्णन और अपरूपण विकृति का प्रभाव

1. अपरूपण विकृतियों की उपेक्षा करने पर सिरा 1 पर एकक घूर्णन (द्वितीय स्तंभ) के कारण सिरों पर उत्पन्न बल हैं

$$V_1 = -V_2 = \frac{6EI}{L^2}; \quad M_1 = \frac{4EI}{L}; \quad M_2 = \frac{2EI}{L}$$

2. एकक घूर्णन आरोपित करने पर $0.5\Phi L$ का निवल धनात्मक स्थानांतरण सिरा 1 पर होता है और कोई अतिरिक्त बल उत्पन्न नहीं होता।
3. एकक घूर्णन के लिए अन्य सभी विस्थापन शून्य होने चाहिए ⇒। अतः इस परजीवी अपरूपण विकृति का समान तथा विपरीत विकृति से प्रतिकार करना चाहिए ⇒, अर्थात् अतिरिक्त

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ऊर्ध्वाधर विस्थापन Δ आरोपित करना चाहिए। यह विस्थापन $-0.5\Phi L$ है और सिरों पर उत्पन्न अतिरिक्त बल (प्रथम स्तंभ) इस प्रकार हैं

$$\Delta V_1 = -\Delta V_2 \underbrace{\frac{12EI}{L^3}}_{k^b_{11}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}$$

$$\Delta M_1 = \Delta M_2 \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^b_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}$$

हरों को पहले ही $1+\Phi$ से विभाजित किया जा चुका है; यह विभाजन k^b में सम्मिलित है।

4. सभी बलों का योग करने पर हमें केवल एकक घूर्णन के फलस्वरूप उत्पन्न वे बल प्राप्त होते हैं जिनमें वंकन तथा अपरूपण दोनों विकृतियों के प्रभाव सम्मिलित हैं।

$$V_1 = -V_2 = \underbrace{\underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{\text{एकक घूर्णन के कारण}} + \underbrace{\frac{12EI}{L^3}}_{k^t_{11}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{परजीवी अपरूपण}} = -\frac{6EI}{L^2}\frac{1}{1+\Phi}$$

$$M_1 = \underbrace{\underbrace{\frac{4EI}{L}}_{\text{एकक घूर्णन के कारण}} + \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^t_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{परजीवी अपरूपण}} = \frac{4+\Phi}{1+\Phi}\frac{EI}{L}$$

$$M_2 = \underbrace{\underbrace{\frac{2EI}{L}}_{\text{एकक घूर्णन के कारण}} + \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^t_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{परजीवी अपरूपण}} = \frac{2-\Phi}{1+\Phi}\frac{EI}{L}$$

[18] समीकरण 41.1 में दिया गया अवयव दृढता आव्यूह अब यह हो जाता है

$$\mathbf{k}^{\text{bv}} = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & -\frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} \\ -\frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} \end{bmatrix} \end{array}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

41.8 व्लासोव मरोड

19 समीकरण 23.2.2 ने अंत्य नोडीय घूर्णनों के पदों में मरोड और द्विआघूर्ण प्रदान किए थे।

20 निम्नलिखित बल परिसीमा प्रतिबंध लागू करने पर, (Bhatt, 1986)

$$\begin{aligned} &\text{सिरा 1} \quad x = 0, \quad T = -T_1, \quad B = -B_1, \\ &\text{सिरा 2} \quad x = L, \quad T = T_2, \quad\ \ B = B_2, \end{aligned}$$

हमें वारिपंग सहित मरोड अवयव का अवयव दृढता आव्यूह प्राप्त होता है, चित्र 41.6।

$$\begin{Bmatrix} T_{x1} \\ B_{y1} \\ T_{x2} \\ B_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \underbrace{\begin{bmatrix} TW_{11} & TW_{12} & -TW_{11} & TW_{12} \\ & TW_{22} & -TW_{12} & TW_{24} \\ & & TW_{11} & -TW_{12} \\ & & & TW_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{V}} \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ \beta'_{y1} \\ \beta_{x2} \\ \beta'_{y2} \end{Bmatrix} \tag{41.3}$$

और

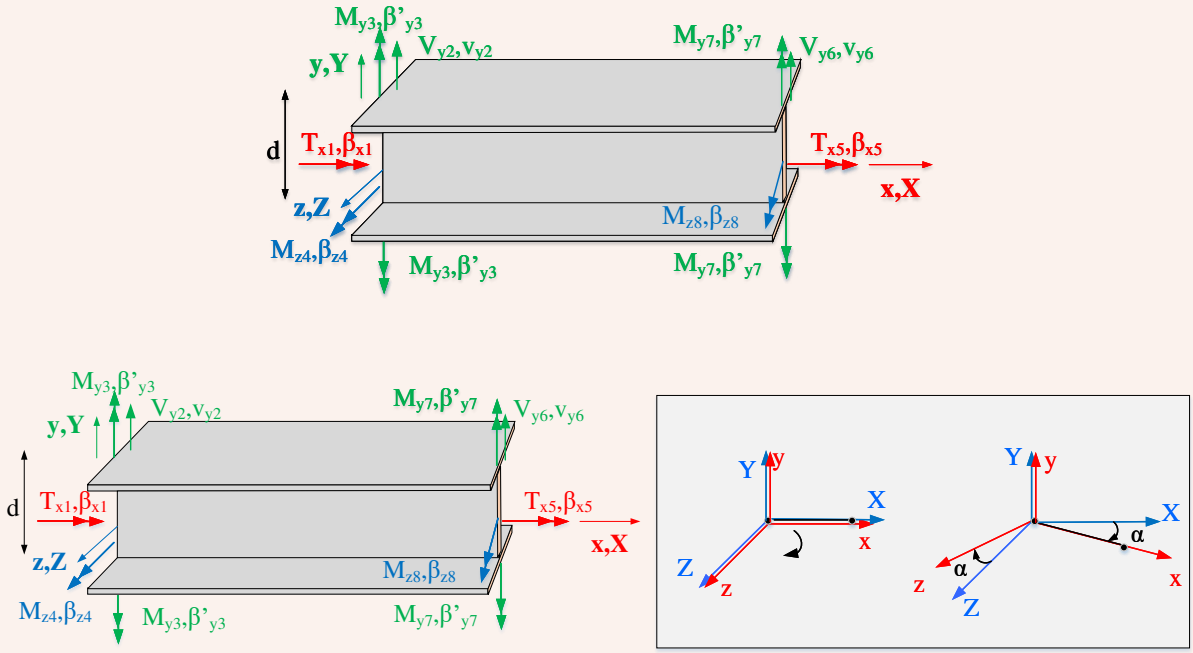
$$\begin{aligned} TW_{11} &= SpLD \\ TW_{12} &= L(C-1)D \\ TW_{22} &= L^2\left(C - \frac{S}{pL}\right)D \\ TW_{24} &= L^2\left(\frac{S}{pL} - 1\right)D \\ D &= \frac{1.0}{\left[2(1-C) + SpL\right]} \end{aligned}$$

21 ध्यान दें कि $B_1 = M_{y1}d$ और $B_2 = M_{y2}d$ हैं (समीकरण 23.14)।

22 तथापि यह पूर्ण अवयव दृढता आव्यूह नहीं है, क्योंकि हमें सेंट-वेनां पद भी जोडने हैं ($\mathbf{k}^{gw} = \mathbf{k}^{g} \cup bk^{V}$)

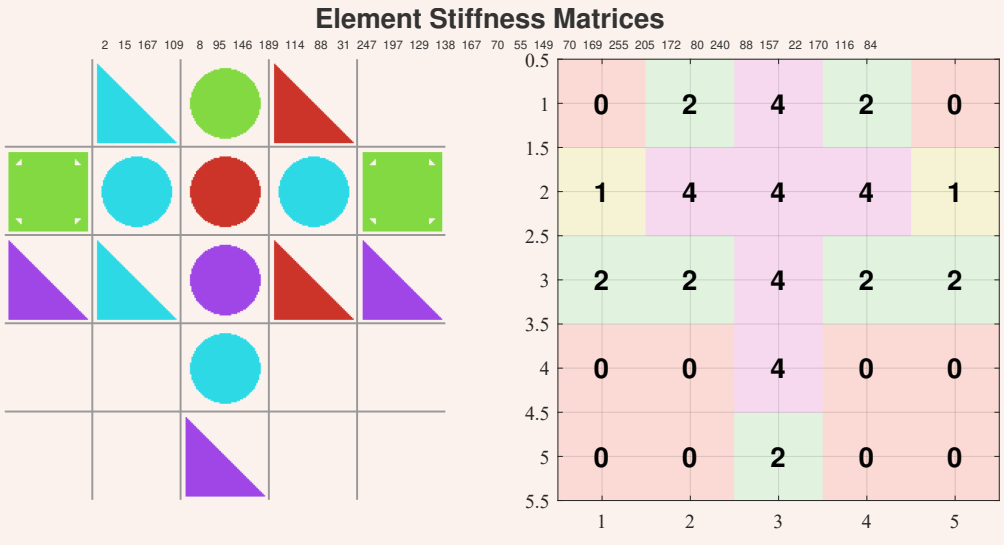
$$\begin{Bmatrix} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{x1} & v_{y1} & \beta'_{y1} & \beta_{z1} & \beta_{x2} & v_{y2} & \beta'_{y2} & \beta_{z2} \\ TW'_{11} + \frac{GJ}{L} & 0 & TW'_{12} & 0 & -TW'_{11} - \frac{GJ}{L} & 0 & TW'_{12} & 0 \\ & \frac{12EI}{L^2} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12}{EI}L^2 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ & & TW'_{22} & 0 & -TW'_{12} & TW'_{24} & 0 & 0 \\ & & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ & & & & TW'_{11} + \frac{GJ}{L} & 0 & -TW'_{12} & 0 \\ & & & & & \frac{12EI}{L^2} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & & TW'_{22} & 0 \\ & & & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{gw}} \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ v_{y2} \\ \beta'_{y3} \\ \beta_{z4} \\ \beta_{x5} \\ v_{y6} \\ \beta'_{y7} \\ \beta_{z8} \end{Bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 41.6: वारिपंग अवरोध सहित मरोड अवयव के अंत्य बल और विस्थापन

जहाँ $TW'_{ij} = \frac{GJ}{L} TW_{ij}$।



अध्याय-विशिष्ट पहचान-चिह्न, chapter H

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

42 दृढता विधि; I लंबकोणीय संरचनाएँ

सारांश

अब तक अवयव दृढता आव्यूह की संकल्पना स्पष्ट हो चुकी है। अब इस संकल्पना को संरचनात्मक दृढता आव्यूह तक विस्तृत करके एक संपूर्ण संरचना का विश्लेषण करना है। किंतु अवयव दृढता आव्यूह को संरचना की वैश्विक निर्देशांक प्रणाली के अनुरूप समायोजित करने की चुनौती सामने आएगी। यद्यपि यह कार्य सीधा प्रतीत हो सकता है, इसे अगले अध्याय के लिए रखा गया है। इस अध्याय में हम अपने अध्ययन को लंबकोणीय संरचनाओं तक सीमित करके समस्या को सरल बनाएँगे, जिससे अवयव दृढता आव्यूह को केवल निरीक्षण द्वारा समायोजित किया जा सकेगा। इस सरलीकरण के माध्यम से हम संपूर्ण संरचना की साम्यावस्था निर्धारित करने की एक क्रमबद्ध विधि सहज रूप से प्रस्तुत करेंगे। विस्थापनों की गणना हो जाने पर हम अवयवों के आंतरिक बल पुनः प्राप्त करेंगे। अतः यह अध्याय एक ऐसी प्रोग्राम-योग्य विधि प्रस्तुत करने में अत्यंत महत्त्वपूर्ण है जो अध्याय 27 में प्रस्तुत आघूर्ण-वितरण अथवा ढाल-विक्षेप विधियों की हस्त-गणनाओं का विस्तार करती है।

42.1 परिचय 1504
42.2 सिद्धांत 1505
42.2.1 नम्यता पर पुनर्विचार 1505
42.2.2 प्रत्यक्ष दृढता विधि 1506
42.2.3 अवयव से संरचना तक 1507
42.3 उदाहरण 1507
42.3.1 उदाहरण 42.1: लंबकोणीय धरन . 1507
42.3.2 उदाहरण 42.2: लंबकोणीय फ्रेम . 1510
42.3.3 उदाहरण 42.3: ग्रिड 1519
42.3.4 उदाहरण 42.4: संकर फ्रेम . . . 1522
42.3.5 उदाहरण 42.5: संकर ग्रिड . . . 1525

42.1 परिचय

1 पिछले अध्याय में हमने पहले विभिन्न प्रकार के 1D अथवा दंड अवयवों के लिए विस्थापन-बल संबंध व्युत्पन्न किए और फिर उन संबंधों का उपयोग करके पृथक अवयवों के लिए स्थानीय निर्देशांकों में अवयव दृढता आव्यूह परिभाषित किए।

2 इस अध्याय में हम इसी प्रकार की संक्रियाएँ वैश्विक निर्देशांकों में एक लंबकोणीय संरचना के लिए करना चाहते हैं।

3 पिछले अध्याय में हमारा आरंभ-बिंदु वे मूल विस्थापन-बल संबंध थे जिनसे अवयव दृढता आव्यूह [**k**] प्राप्त हुए।

4 इस अध्याय में हमारा आरंभ-बिंदु वे ही अवयव दृढता आव्यूह [**k**] हैं और हमारा उद्देश्य संरचना दृढता आव्यूह [**K**] निर्धारित करना है, जिसका प्रतिलोम लेने पर नोडीय विस्थापन प्राप्त होंगे।

5 अवयव दृढता आव्यूह पूर्णतः अवरुद्ध अवयवों के लिए व्युत्पन्न किए गए थे।

6 यह अध्याय लंबकोणीय संरचनाओं तक सीमित रहेगा; व्यापक सामान्यीकरण पर आगे चर्चा की जाएगी। दृढता आव्यूह केवल अनवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियों तक सीमित रहेंगे।

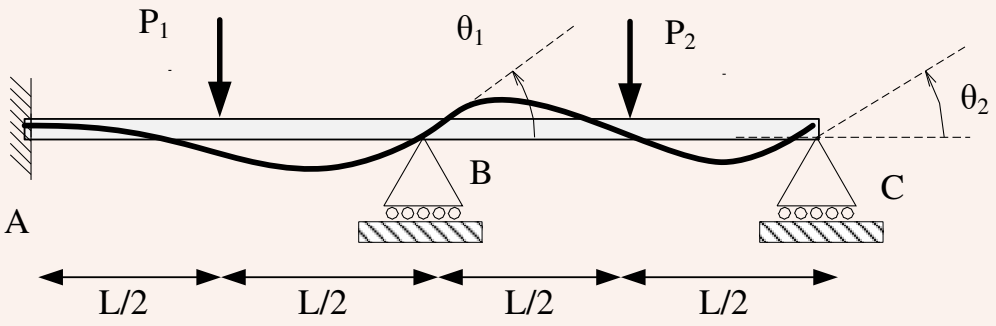
प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

7 इन उदाहरणों से संरचना दृढता आव्यूह, नोडीय विस्थापन और स्थिर-अंत क्रियाओं के परस्पर संबंध स्पष्ट हो जाएँगे। तत्पश्चात अध्याय 44 में विधि का सामान्यीकरण करके एक ऐसा कलनविधि प्रस्तुत किया जाएगा जो पृथक अवयव दृढता आव्यूहों के पदों में संरचना के वैश्विक दृढता आव्यूह के समंजन को स्वचालित कर सके।

42.2 सिद्धांत

8 दृढता विधि के परिचय के लिए एक "माध्यम" के रूप में चित्र 42.1 की समस्या पर विचार करें और ध्यान दें कि केवल दो अज्ञात विस्थापन—अधिक स्पष्टतः दो वैश्विक स्वतंत्रता-कोटियाँ—θ_1 और θ_2 हैं।



चित्र 42.1: नम्यता और दृढता विधियों की तुलना के लिए धरन उदाहरण

9 सरल शब्दों में:

नम्यता: वे बल (प्रतिक्रियाएँ) कौन-से हैं जो मुक्त की गई स्वतंत्रता-कोटियों पर विस्थापनों की संगतता सुनिश्चित करेंगे?

दृढता: वे विस्थापन कौन-से हैं जो साम्यावस्था सुनिश्चित करेंगे?

42.2.1 नम्यता पर पुनर्विचार

10 यदि हम इस समस्या का विश्लेषण बल (अथवा नम्यता) विधि से करें, तो

1. दो प्रतिक्रियाओं को *स्वेच्छया* हटाकर (जब तक संरचना स्थिर बनी रहे) हम संरचना को स्थैतिकतः निर्धार्य बनाते हैं; अब धरन स्थैतिकतः निर्धार्य है।
2. यदि हम दोनों रोलर आलंब हटा दें, तो वास्तविक भार के कारण संबद्ध विक्षेप (Δ_B और Δ_C) निर्धारित करते हैं।
3. बिंदु B और फिर C पर एकक भार लगाएँ तथा विक्षेप f_{ij} की गणना करें, जो नोड i पर नोड j के एकक बल के कारण होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. विस्थापन-संगतता समीकरण लिखें

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_B \\ R_C \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

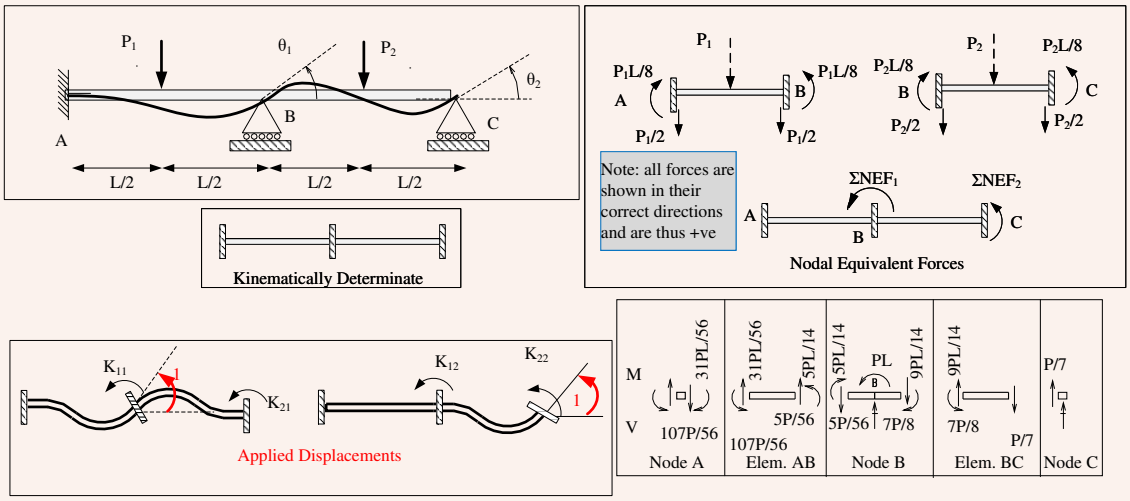
5. आव्यूह का प्रतिलोम लेकर प्रतिक्रियाएँ ज्ञात करें

42.2.2 प्रत्यक्ष दृढता विधि

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §12.2.5 देखें

11 हम इस सरल समस्या का विश्लेषण दृढता विधि से करेंगे। अपने विविक्तीकरण में हम समस्या को आंशिक अवकल समीकरण हल करके एक सतत समस्या के रूप में नहीं, बल्कि रैखिक बीजगणित द्वारा विविक्त समस्या के रूप में हल करते हैं। विविक्तीकरण नोडीय राशियों पर केंद्रित होगा और यदि अवयव के अनुदिश कोई भार हो तो उसका नोडीय समतुल्य भार (स्थिर-अंत क्रियाओं के अनुरूप, किंतु विपरीत चिह्न का) ज्ञात करना होगा।

1. प्रथम चरण में संरचना को शुद्धगतिकतः निर्धार्य बनाया जाता है (नम्यता विधि में स्थैतिकतः निर्धार्य बनाने के विपरीत)। इस स्थिति में शुद्धगतिकतः निर्धार्य का अर्थ केवल सभी स्वतंत्रता-कोटियों को अवरुद्ध करके संधि-घूर्णन रोकना है, चित्र 42.2।



चित्र 42.2: शुद्धगतिक अनिर्धार्यता की कोटि निर्धारित करने के लिए धरन उदाहरण

2. फिर हम अवयव भार से उत्पन्न स्थिर-अंत क्रियाएँ निर्धारित करके प्रत्येक स्वतंत्रता-कोटि के लिए उनका योग करते हैं: नोडीय समतुल्य भारों का योग ΣNEL_1 और ΣNEL_2।
3. तृतीय चरण में हम एक समय में प्रत्येक स्वतंत्रता-कोटि पर एकक विस्थापन (इस स्थिति में घूर्णन) आरोपित करेंगे और प्रत्येक स्थिति में क्रमशः आंतरिक प्रतिक्रिया बल K_{11}, K_{21} तथा

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

K_{12}, K_{22} निर्धारित करेंगे। ध्यान दें कि हम $[\mathbf{K}]$ का उपयोग करते हैं, न कि $[\mathbf{k}]$ का, क्योंकि ये बल वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में हैं। पुनः ध्यान दें कि हम केवल वैश्विक स्वतंत्रता-कोटि के अनुरूप प्रतिक्रिया बलों पर केंद्रित हैं। अतः हम नोड A पर प्रतिक्रिया निर्धारित करने का प्रयास नहीं कर रहे हैं।

4. अंततः हम प्रत्येक नोड पर साम्यावस्था समीकरण लिखते हैं:

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \Sigma \mathrm{NEL}_1 \\ \Sigma \mathrm{NEL}_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

[12] ध्यान दें कि FEM दाहिने पक्ष में होने के कारण लगाए गए भार की प्रतिक्रियाओं के रूप में निर्धारित होते हैं। यथार्थतः यह एक भार है जिसे समीकरण के बाएँ पक्ष में होना चाहिए और ये अवयव भार के नोडीय समतुल्य भार हैं (इस पर आगे अधिक चर्चा होगी)।

[13] अवयव दृढता आव्यूह की भाँति वैश्विक दृढता आव्यूह की प्रत्येक प्रविष्टि K_{ij}, स्वतंत्रता-कोटि i के अनुदिश उस आंतरिक बल के अनुरूप है जो स्वतंत्रता-कोटि j के अनुदिश एकक (सामान्यीकृत) विस्थापन से उत्पन्न होता है (दोनों वैश्विक निर्देशांक प्रणालियों में)।

42.2.3 अवयव से संरचना तक

[14] पृथक अवयवों के दृढता आव्यूह पहले स्थानीय निर्देशांक प्रणाली में व्युत्पन्न किए गए थे और उन्हें छोटे अक्षर $\mathbf{k}$ दिए गए थे।

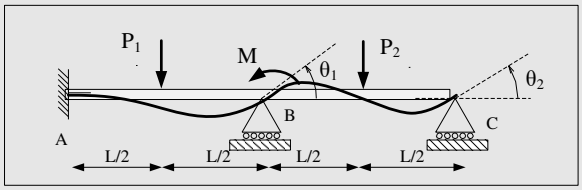
[15] अब हमें किसी संरचना का दृढता आव्यूह वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में व्युत्पन्न करना होगा और हम बड़ा अक्षर $\mathbf{K}$ उपयोग करेंगे। यह अध्याय केवल लंबकोणीय संरचनाओं पर विचार करता है, जिससे $\mathbf{k}$ से $\mathbf{K}$ में रूपांतरण सहज है (बलों और विस्थापनों के लिए भी इसी प्रकार)।

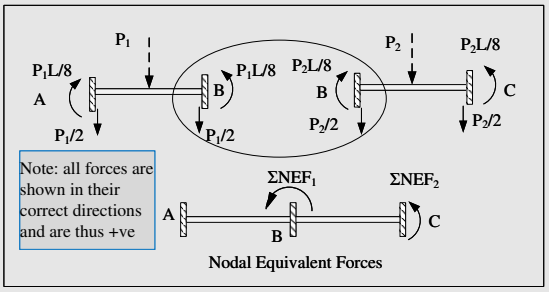
42.3 उदाहरण

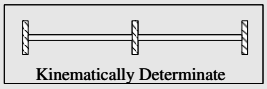
42.3.1 उदाहरण 42.1: लंबकोणीय धरन

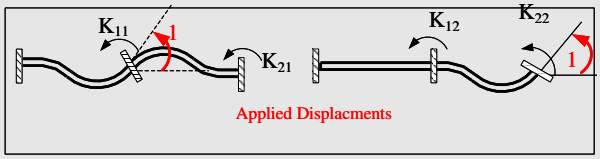
प्रारूप

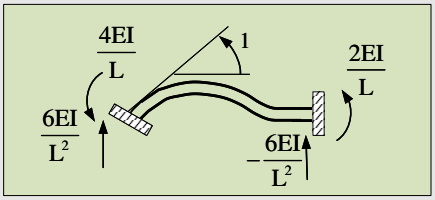
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।











यदि $P_1 = 2P$, $M = PL$, और $P_2 = P$ हैं, तो हमें विस्थापन ज्ञात करने हैं।

1. शुद्धगतिक अनिर्धार्यता की कोटि 2 है।
2. पहले परिभाषित चिह्न परिपाटी का उपयोग करके नोडीय समतुल्य भार (सदस्य के अनुदिश लगाए गए भार के समतुल्य) निर्धारित करें

$$\Sigma\text{NEF}_1 = \underbrace{\frac{P_1 L}{8}}_{BA} - \underbrace{\frac{P_2 L}{8}}_{BC} = \frac{2PL}{8} - \frac{PL}{8} = \frac{PL}{8}$$

$$\Sigma\text{NEF}_2 = \underbrace{\frac{PL}{8}}_{CB}$$

3. यदि $\frac{4EI}{L}\ (k_{44}^{BA})$ की आवश्यकता BA को घुमाने के लिए और $\frac{4EI}{L}\ (k_{22}^{BC})$ की आवश्यकता BC को घुमाने के लिए है, तो कुल बल $\frac{8EI}{L}$ लगाकर BA और BC को एक साथ घुमाया जाएगा। वैश्विक स्वतंत्रता-कोटि 1 पर घूर्णन दृढताओं का योग $K_{11} = \frac{8EI}{L}$ है;
4. इसी प्रकार $K_{21} = \frac{2EI}{L}\ (k_{42}^{BC})$। यदि अब स्वतंत्रता-कोटि 2 को एकक कोण से घुमाएँ, तो $K_{22} = \frac{4EI}{L}\ (k_{22}^{BC})$ और $K_{12} = \frac{2EI}{L}\ (k_{42}^{BC})$ होंगे। साम्यावस्था समीकरण:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} PL \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{NEF}}_{P_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ध्यान दें कि हमारे पास $P_{ext} - P_{int} = 0$ है, न कि $P_{ext} + P_{int} = 0$, क्योंकि बाह्य बलों का प्रतिरोध आंतरिक बलों द्वारा समान और विपरीत दिशा में होना चाहिए। प्रतिस्थापन और पुनर्व्यवस्था करने पर

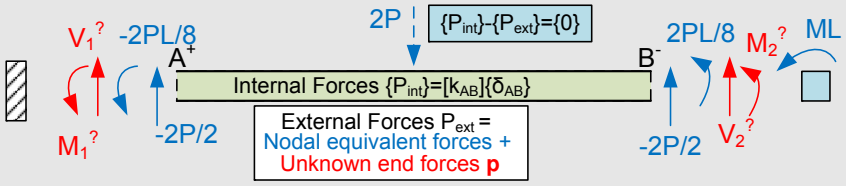
$$\begin{Bmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ + \frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \end{Bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5. दो गुणा दो आव्यूह का प्रतिलोम लें

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \\ -\frac{5}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}$$

6. अब हमें आंतरिक बल निर्धारित करने हैं।
7. स्मरण रहे कि प्रत्येक अवयव के लिए $\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{k}]\{\boldsymbol{\delta}\}$ है और इस स्थिति में $\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{P}\}$ तथा $\{\boldsymbol{\delta}\} = \{\Delta\}$ हैं; ये संबंध अवयव AB के लिए लागू हैं। अवयव दृढता आव्यूह पहले ही व्युत्पन्न किया जा चुका है और इस स्थिति में वैश्विक तथा स्थानीय स्वतंत्रता-कोटियाँ समान हैं। अब हमें अवयव के आंतरिक बलों की गणना करनी है।
8. अवयव AB के लिए अवयव स्तर पर साम्यावस्था समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है (ध्यान दें कि साम्यावस्था बनाए रखने के लिए नोडीय समतुल्य भारों को सम्मिलित करना आवश्यक है):

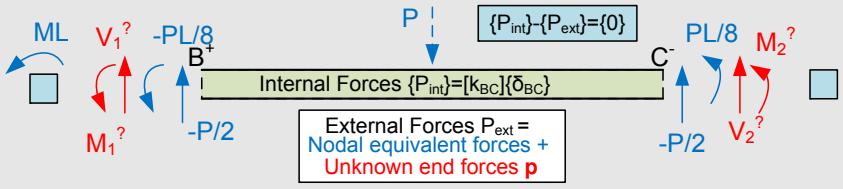


$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1^? \\ M_1^? \\ V_2^? \\ M_2^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{p}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{2P}{2} \\ -\frac{2PL}{8} \\ -\frac{2P}{2} \\ \frac{2PL}{8} \end{Bmatrix}}_{\text{NEF}}}_{p_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k}^{AB}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\delta}^{AB}\}}}_{p_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

इस चरण को बल पुनर्प्राप्ति (force recovery) कहते हैं, अर्थात् हम नोडीय विस्थापनों से आंतरिक बल निर्धारित करते हैं। हल करने पर

$$\lfloor\ V_1 \quad M_1 \quad V_2 \quad M_2\ \rfloor = \lfloor\ \frac{107}{56}P \quad \frac{31}{56}PL \quad \frac{5}{56}P \quad \frac{5}{14}PL\ \rfloor$$

9. इसी प्रकार अवयव BC के लिए:



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1^? \\ M_1^? \\ V_2^? \\ M_2^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{p}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{\text{NEF}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k}^{BC}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \\ 0 \\ -\frac{5}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\delta}^{BC}\}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

P_{ext} ; P_{int}

अथवा

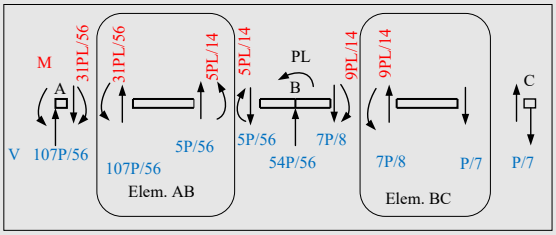
$$\lfloor\ p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4\ \rfloor = \lfloor\ \tfrac{7}{8}P \quad \tfrac{9}{14}PL \quad -\tfrac{P}{7} \quad 0\ \rfloor$$

10. इस सरल उदाहरण से निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त होते हैं:

    (a) नोड A पर केवल अवयव AB का योगदान है, जबकि नोड B पर AB और BC दोनों के योगदान हैं।

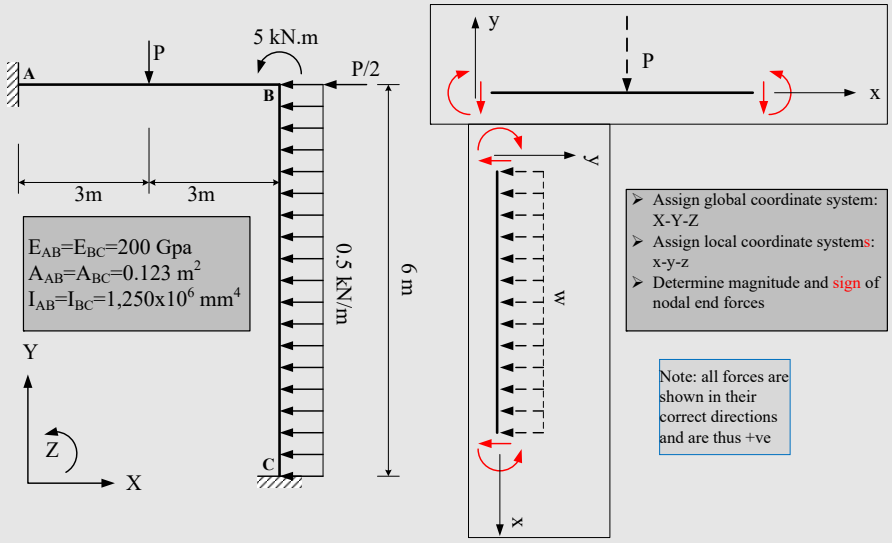
    (b) हम देखते हैं कि $p_3^{AB} \neq p_1^{BC}$, यद्यपि दोनों नोड B पर अपरूपण बल के अनुरूप हैं; उनका अंतर B पर प्रतिक्रिया के बराबर है। इसी प्रकार नोड B पर बाह्य रूप से आरोपित आघूर्ण के कारण $p_4^{AB} \neq p_2^{BC}$ है।

    (c) अंत में मुक्त-पिंड, अपरूपण और आघूर्ण आरेख प्रस्तुत करने चाहिए,



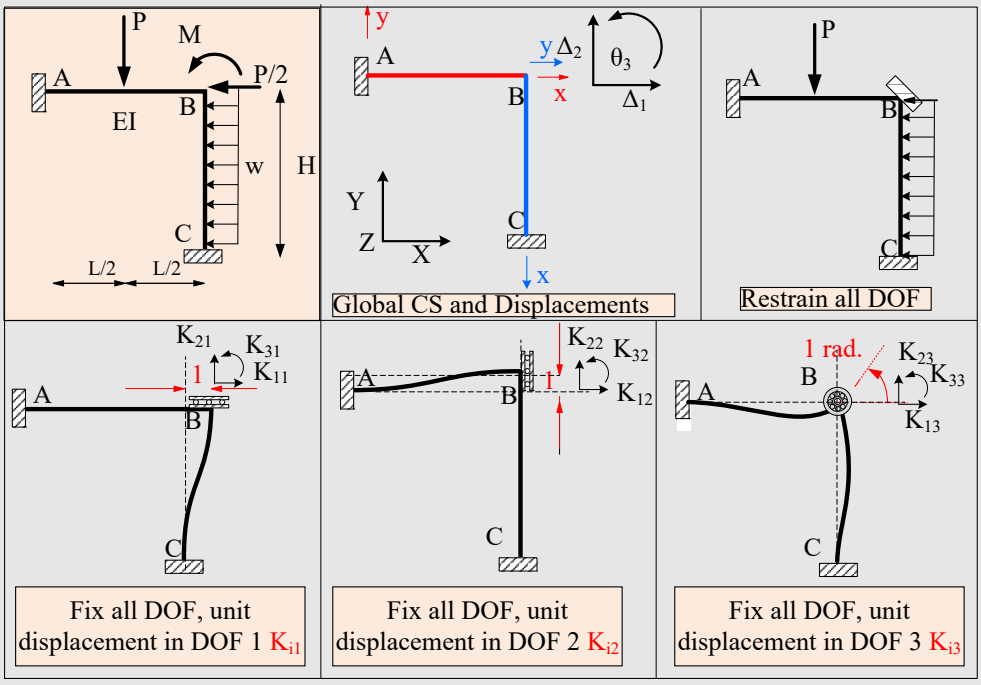
42.3.2 उदाहरण 42.2: लंबकोणीय फ्रेम

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



$P = 2$ kN, $L = H = 6$ m, $M = 5$ kN.m, $w = 0.5$ kN/m, $E = 2 \times 10^8$ kPa, $A = 0.123$ m^2, और $I^b = I^c = 0.00125$ m^4 हैं।

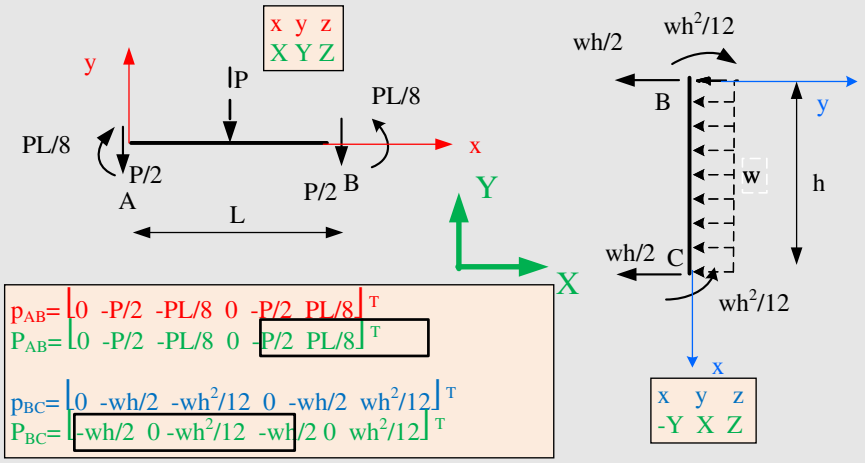
1. हम निम्नलिखित चित्र का संदर्भ लेते हैं



2. अक्षीय विकृतियाँ मानने पर हमारे पास तीन वैश्विक स्वतंत्रता-कोटियाँ Δ_1, Δ_2, और θ_3 हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. सभी स्वतंत्रता-कोटियों को अवरुद्ध करें और इस प्रकार संरचना को शुद्धगतिकतः निर्धार्य बनाएँ।
4. प्रत्येक अवयव के लिए उसकी अपनी स्थानीय निर्देशांक प्रणाली में नोडीय समतुल्य भार निर्धारित करें (अवयव 1 को A से B और अवयव 2 को B से C तक परिभाषित माना गया है)



$$\underbrace{\lfloor\, p_1^A \quad p_2^A \quad p_3^A \mid p_4^B \quad p_5^B \quad p_6^B \,\rfloor}_{AB} = \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad -\tfrac{PL}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad \tfrac{PL}{8} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{2}{2} \quad -\tfrac{(2)(6)}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{2}{2} \quad \tfrac{(2)(6)}{8} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -1.0 \quad -1.5 \mid 0 \quad -1.0 \quad 1.5 \,\rfloor$$

$$\underbrace{\lfloor\, p_1^B \quad p_2^B \quad p_3^B \mid p_4^C \quad p_5^C \quad p_6^C \,\rfloor}_{BC} = \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad -\tfrac{wH^2}{12} \mid 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad \tfrac{wH^2}{12} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{(0.5)(6)}{2} \quad -\tfrac{(0.5)(6)^2}{12} \mid 0 \quad -\tfrac{(0.5)(6)}{2} \quad \tfrac{(0.5)(6)^2}{12} \,\rfloor$$

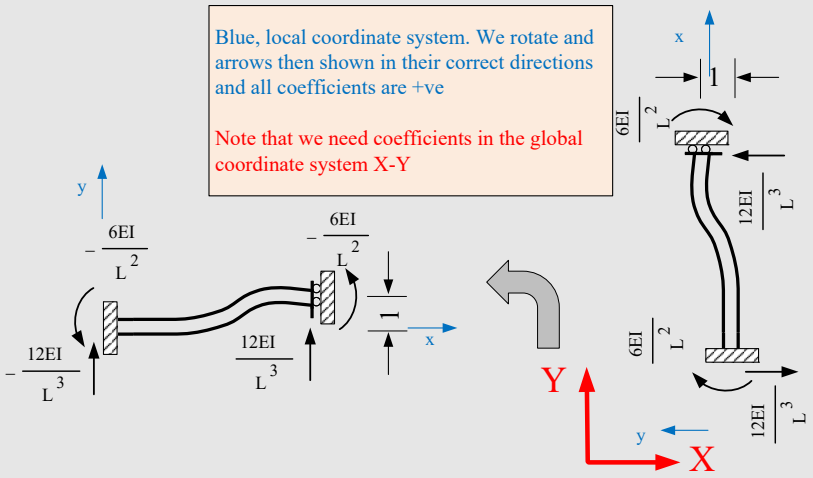
$$= \lfloor\, 0 \quad -1.5 \quad -1.5 \mid 0 \quad -1.5 \quad 1.5 \,\rfloor$$

और नोड B पर नोडीय समतुल्य बलों का योग करना होगा।

5. संरचना का वैश्विक दृढता आव्यूह निर्धारित करने के लिए 3 वैश्विक स्वतंत्रता-कोटियों में से प्रत्येक में एकक विस्थापन आरोपित करें। वैश्विक दृढता आव्यूह की प्रत्येक प्रविष्टि K_{ij}, स्वतंत्रता-कोटि i में उस आंतरिक बल के अनुरूप होगी जिसे स्वतंत्रता-कोटि j में एकक विस्थापन उत्पन्न करता है।
6. पहले व्युत्पन्न बल-विस्थापन संबंधों को स्मरण करते हुए हम AB और BC दोनों के योगदानों के पदों में वैश्विक दृढता आव्यूह का समंजन कर सकते हैं

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



7. निम्नलिखित सारणी पूरण करनी है, जिसमें स्तंभ स्वतंत्रता-कोटि j पर आरोपित विस्थापनों और पंक्तियाँ प्रत्येक अवयव में स्वतंत्रता-कोटि i पर उत्पन्न संबद्ध आंतरिक बलों के अनुरूप हैं। दोनों वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में हैं।

   - $K_{1,2}$ शून्य है, क्योंकि अन्य सभी विस्थापनों को अवरुद्ध रखते हुए स्वतंत्रता-कोटि 2 (क्षैतिज) के अनुदिश आरोपित विस्थापन दोनों में से किसी भी अवयव में आंतरिक बल उत्पन्न नहीं करता।
   - K_{31} स्वतंत्रता-कोटि 1 (क्षैतिज) में आरोपित एकक विस्थापन से उत्पन्न आंतरिक बल (यहाँ आघूर्ण) हैं। यह AB को "सक्रिय" नहीं करेगा, किंतु BC में वंकन सक्रिय करेगा। BC के लिए निम्नलिखित चित्र से (जो ऊपर पहले ही दर्शाया गया है)
   - ध्यान दें कि सभी विकर्ण पद धनात्मक हैं और सारणी सममित है।

		K_{i1} Δ_1	K_{i2} Δ_2	K_{i3} θ_3
K_{1j} (F_X)	AB BC	$\frac{EA}{L}$ $\frac{12EI^c}{H^3}$	0 0	0 $\frac{6EI^c}{H^2}$
K_{2j} (F_Y)	AB BC	0 0	$\frac{12EI^b}{L^3}$ $\frac{EA}{H}$	$-\frac{6EI^b}{L^2}$ 0
K_{3j} (M_Z)	AB BC	0 $\frac{6EI^c}{H^2}$	$-\frac{6EI^b}{L^2}$ 0	$\frac{4EI^b}{L}$ $\frac{4EI^c}{H}$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

8. योग करने पर संरचना का वैश्विक दृढता आव्यूह $[\mathbf{K}]$ है:

$$[\mathbf{K}] = \begin{matrix} \\ P_1 \\ P_2 \\ M_3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \Delta_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \Delta_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k^{AB}_{44} + k^{BC}_{22} & k^{AB}_{45} + k^{BC}_{21} & k^{AB}_{46} + k^{BC}_{23} \\ k^{AB} + k^{BC} & k^{AB}_{55} + k^{BC}_{11} & k^{AB}_{56} + k^{BC}_{13} \\ k^{AB}_{64} + k^{BC}_{32} & k^{AB}_{65} + k^{BC}_{31} & k^{AB}_{66} + k^{BC}_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \\ P_1 \\ P_2 \\ M_3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \Delta_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \Delta_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI^c}{H^3} & 0 & \frac{6EI^c}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI^b}{L^3} + \frac{EA}{H} & -\frac{6EI^b}{L^2} \\ \frac{6EI^c}{H^2} & -\frac{6EI^b}{L^2} & \frac{4EI^b}{L} + \frac{4EI^c}{H} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

9. प्रतिस्थापन करने पर

$$[\mathbf{K}] = 10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

ध्यान दें कि अक्षीय दृढता (EA/L) 4.1×10^6 है, जबकि वंकनीय दृढता $(12EI/H^3)$ 0.0071×10^6 है। अक्षीय दृढता सदैव वंकनीय दृढता से बहुत अधिक होती है। हमें P_{ext} वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में चाहिए। पूर्ववर्ती समीकरणों से: हमारे पास था

$$\underbrace{\lfloor\ p^A_1 \quad p^A_2 \quad p^A_3 \mid p^B_4 \quad p^B_5 \quad p^B_6\ \rfloor}_{AB} = \lfloor\ 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad -\tfrac{PL}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad \tfrac{PL}{8}\ \rfloor$$

$$\underbrace{\lfloor\ p^B_1 \quad p^B_2 \quad p^B_3 \mid p^C_4 \quad p^C_5 \quad p^C_6\ \rfloor}_{BC} = \lfloor\ 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad -\tfrac{wH^2}{12} \mid 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad \tfrac{wH^2}{12}\ \rfloor$$

वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में व्यक्त करने पर यह होगा

$$\underbrace{\lfloor\ P^A_1 \quad P^A_2 \quad P^A_3 \mid P^B_4 \quad P^B_5 \quad P^B_6\ \rfloor}_{AB} = \lfloor\ 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad -\tfrac{PL}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad \tfrac{PL}{8}\ \rfloor$$

$$\underbrace{\lfloor\ P^B_1 \quad P^B_2 \quad P^B_3 \mid P^C_4 \quad P^C_5 \quad P^C_6\ \rfloor}_{BC} = \lfloor\ -\tfrac{wH}{2} \quad 0 \quad -\tfrac{wH^2}{12} \mid -\tfrac{wH}{2} \quad 0 \quad \tfrac{wH^2}{12}\ \rfloor$$

10. अब वैश्विक साम्यावस्था समीकरण लिखा जा सकता है (ध्यान दें कि उदाहरणार्थ हमने w और नोड B पर आघूर्ण M रखा है)।

$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ 0 \\ M \end{Bmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{wH}{2} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} - \frac{wH^2}{12} \end{Bmatrix}}_{NEL}}_{P_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI^c}{H^3} & 0 & \frac{6EI^c}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI^b}{L^3} + \frac{EA}{H} & -\frac{6EI^b}{L^2} \\ \frac{6EI^c}{H^2} & -\frac{6EI^b}{L^2} & \frac{4EI^b}{L} + \frac{4EI^c}{H} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11. प्रतिस्थापन करने पर:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -1.5 \\ -0.5 \\ -0.75 \end{Bmatrix}}_{NEL} = \underbrace{10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

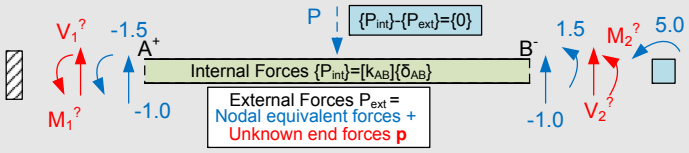
12. विस्थापनों के लिए हल करें

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -2 \\ -0.5 \\ 4.25 \end{Bmatrix}$$

अथवा

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{Bmatrix} -0.61 \text{ m} \\ 0.0084 \text{ m} \\ 12.82 \text{ radian} \end{Bmatrix}$$

13. अवयव आंतरिक बल प्राप्त करने के लिए प्रत्येक अवयव दृढता आव्यूह को स्थानीय विस्थापनों से गुणा करें। अवयव AB के लिए स्थानीय और वैश्विक निर्देशांक समान हैं



$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{P_{ext}} - \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right]}_{P_{int}} \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\} = \underbrace{10^6 \left[\begin{array}{ccc|ccc} - & - & - & -4.1\times10^6 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & -13,889. & 41,667. \\ - & - & - & 0 & -41,667. & 83,333. \\ - & - & - & 4.1\times10^6 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & 13,889. & -41,667 \\ - & - & -. & 0 & -41,667 & 166,667. \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{AB}}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.61 \\ 0.0084 \\ 12.82 \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\delta}^{AB}} - \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -0.5 \\ -0.75 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0.75 \end{array}\right\}}_{NEL^{AB}}$$

अथवा

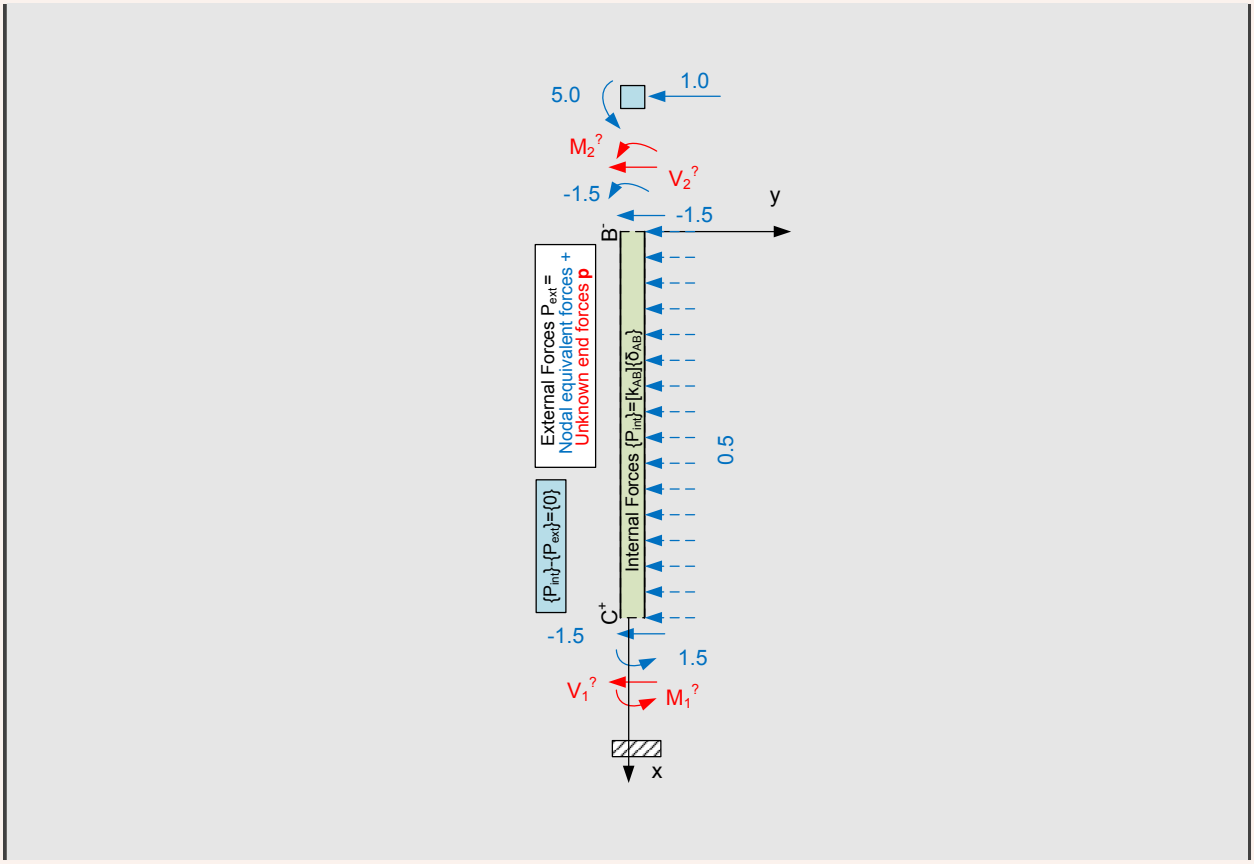
$$\left\{\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 2.52 \text{ kN} \\ 1.03 \text{ kN} \\ 1.82 \text{ kN.m.} \\ -2.52 \text{ kN} \\ -0.034 \text{ kN} \\ 1.39 \text{ kN.m} \end{array}\right\}$$

14. अवयव BC के लिए स्थानीय और वैश्विक निर्देशांक समान नहीं हैं; अतः हमें विस्थापनों को उनके वैश्विक से स्थानीय निर्देशांक घटकों में रूपांतरित करना होगा। निरीक्षण द्वारा

स्थानीय	x	y	z
वैश्विक	$-Y$	$+X$	$+Z$

15. अतः अवयव BC के आंतरिक बल इस प्रकार दिए जाते हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$
\left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}
$$

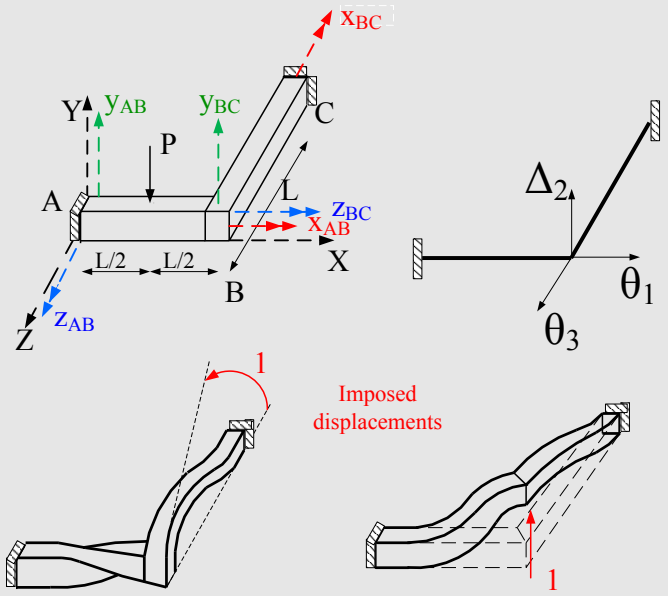
$$
= \underbrace{10^6 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4.1\times10^6 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & 13,888.9 & 41,666.7 & - & - & - \\ 0 & 41,666.7 & 16,6667. & - & - & - \\ -4.1\times10^6 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & -13,888.9 & -41,666.7 & - & - & - \\ 0 & 41,666.7 & 83,333.3 & - & - & - \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{BC}}
$$

$$
\underbrace{\left\{\begin{array}{c} -0.0084 \\ -0.61 \\ 12.82 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\delta}^{BC}} - \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ 1.5 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -0.034 \text{ kN} \\ 2.026 \text{ kN} \\ 3.612 \text{ kN.m} \\ 0.0344 \text{ kN} \\ 0.974 \text{ kN} \\ -0.456 \text{ kN.m} \end{array}\right\}
$$

इस उदाहरण के लिए एक MATLAB®कोड §I.2.4 में दिया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

42.3.3 उदाहरण 42.3: ग्रिड



दोनों अवयवों की वंकनीय और मरोड़ दृढताएँ समान हैं, EI और GJ।

1. तीन स्वतंत्रता-कोटियों θ_1, Δ_2, और θ_3 की पहचान करें।
2. सभी स्वतंत्रता-कोटियों को अवरुद्ध करके नोडीय समतुल्य भार निर्धारित करें:

$$\left\{ \begin{array}{c} T_1 \\ V_2 \\ M_3 \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{array} \right\}}_{\text{@node A}} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{array} \right\}}_{\text{@node B}}$$

3. तीनों स्वतंत्रता-कोटियों में से प्रत्येक के अनुदिश एकक विस्थापन आरोपित करके आंतरिक बल निर्धारित करें:

वैश्विक स्वतंत्रता-कोटि 1

(a) AB (मरोड़) $K_{11}^{AB} = \frac{GJ}{L}$, $K_{21}^{AB} = 0$, $K_{31}^{AB} = 0$
(b) BC (वंकन) $K_{11}^{BC} = \frac{4EI}{L}$, $K_{21}^{BC} = \frac{6EI}{L^2}$, $K_{31}^{BC} = 0$

वैश्विक स्वतंत्रता-कोटि 2

(a) AB (वंकन): $K_{12}^{AB} = 0$, $K_{22}^{AB} = \frac{12EI}{L^3}$, $K_{32}^{AB} = -\frac{6EI}{L^2}$
(b) BC (वंकन): $K_{12}^{BC} = \frac{6EI}{L^2}$, $K_{22}^{BC} = \frac{12EI}{L^3}$, $K_{32}^{BC} = 0$

वैश्विक स्वतंत्रता-कोटि 3

(a) AB (वंकन): $K_{13}^{AB} = 0$, $K_{23}^{AB} = -\frac{6EI}{L^2}$, $K_{33}^{AB} = \frac{4EI}{L}$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(b) BC (मरोड़): $K_{13}^{BC}=0,\ K_{23}^{BC}=0,\ K_{33}^{BC}=\frac{GJ}{L}$

4. संरचना दृढता आव्यूह का समंजन करें

$$
\begin{aligned}
2\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{44}^{AB}+k_{33}^{BC} & k_{45}^{AB}+k_{32}^{BC} & k_{46}^{AB}+k_{31}^{BC} \\ k_{54}^{AB}+k_{23}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{22}^{BC} & k_{56}^{AB}+k_{21}^{BC} \\ k_{64}^{AB}+k_{13}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{12}^{BC} & k_{66}^{AB}+k_{11}^{BC} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{AB}]} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{BC}]} \\
&= \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \alpha L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6L \\ 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha L^2 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 24 & -6L \\ 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{Structure}]}
\end{aligned}
$$

जहाँ $\alpha=\frac{GJ}{EI}$ है और अंतिम समीकरण में यह माना गया है कि अवयव BC के लिए नोड 1 का संबंध C तथा 2 का B से है।

5. आव्यूह रूप में संरचना का साम्यावस्था समीकरण:

$$
\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{P}_{nodes}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{P_{el}^{B}}}_{\mathbf{P}_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 24 & -6L \\ 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \Delta_2^? \\ \theta_3^? \end{Bmatrix}}_{\{\Delta\}}}_{\mathbf{P}_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

6. प्रतिलोम लेकर विस्थापनों के लिए हल करने पर

$$
\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL^2}{16EI}\frac{5+2\alpha}{(1+\alpha)(4+\alpha)} \\ -\frac{PL^3}{96EI}\frac{5+2\alpha}{1+\alpha} \\ -\frac{3PL^2}{16EI}\frac{1}{(1+\alpha)(4+\alpha)} \end{Bmatrix}
$$

7. स्थानीय और वैश्विक स्वतंत्रता-कोटियों के बीच प्रतिचित्रण

$$
\text{AB}\begin{Bmatrix} x & \leftarrow & X \\ y & \leftarrow & Y \\ z & \leftarrow & Z \end{Bmatrix};\qquad \text{BC}\begin{Bmatrix} x & \leftarrow & -Z \\ y & \leftarrow & Y \\ z & \leftarrow & X \end{Bmatrix}
$$

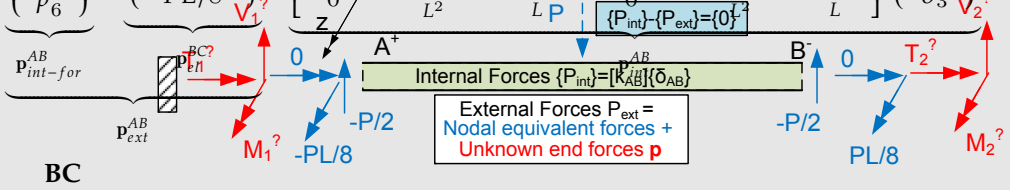
8. प्रत्येक अवयव दृढता आव्यूह $[\mathbf{k}]$ को नोडीय विस्थापन सदिश $\{\delta\}$ से गुणा करके आंतरिक बल निर्धारित करें। दोनों स्थानीय निर्देशांक प्रणाली में होने चाहिए।

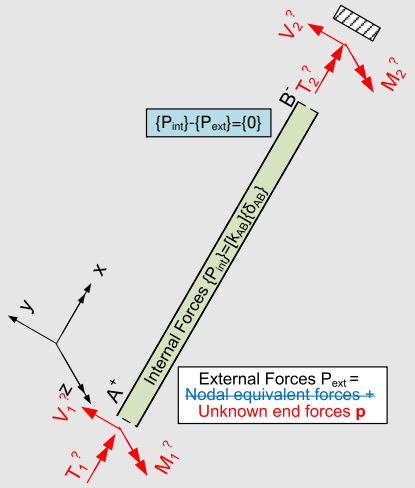
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

AB और **BC** के नोडीय विस्थापन सदिश हैं

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \hline \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{AB} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -\theta_3 \\ \Delta_2 \\ \theta_1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{BC}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}_{int-for}^{AB}} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -P/2 \\ -PL/8 \\ \hline 0 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \\ \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} \\ -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$





अनूदित

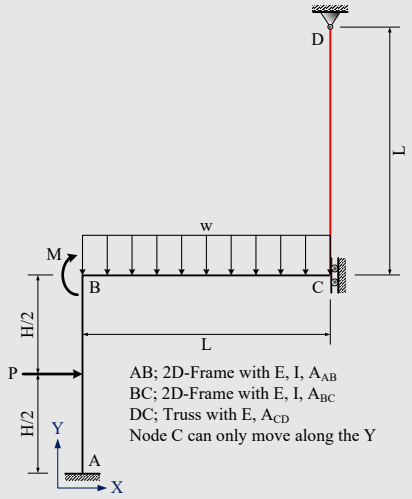
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\}}_{\mathbf{p}^{BC}_{int-for}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}}_{\mathbf{p}^{BC}_{el}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \\ \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} \\ -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}^{BC}_{int}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} -\theta_3 \\ \Delta_2 \\ \theta_1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}}_{} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

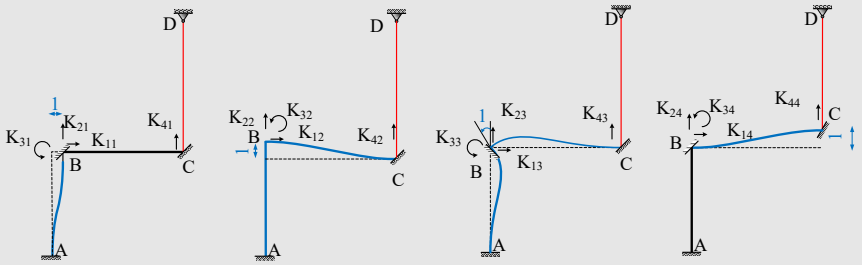
$\mathbf{p}^{BC}_{ext}$

42.3.4 उदाहरण 42.4: संकर फ्रेम

इस फ्रेम का विश्लेषण $E = 200$ GPa, $I = 200 \times 10^6$ mm^4, $L_{AB} = H = 8$m, $L_{BC} = L_{DC} = 10$ m, $A_{AB} = A_{BC} = 5,000$ mm^2, $A_{DC} = 100$ mm^2, $P = 10$ kN, $M = P \cdot L_{BC}$ और $w = 1$kN/m के लिए करना है। GPa, kN और mm का उपयोग करें।



1. वैश्विक स्वतंत्रता-कोटियाँ Δ_1^{BH}, Δ_2^{BV}, Δ_3^{BZ}, Δ_4^{CV} हैं।
2. वैश्विक स्वतंत्रता-कोटियों की पहचान करें और संबद्ध विकृति बनाएँ।



3. प्रत्येक एकक विस्थापन से संबद्ध वास्तविक बलों को सारणीबद्ध करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

		K_{i1}	K_{i2}	K_{i3}	K_{i4}
		Δ_1	Δ_2	θ_3	Δ_4
K_{1i}	AB	$\frac{12EI}{L_{AB}^3}$	0	$\frac{6EI}{L_{AB}^2}$	0
	BC	$\frac{EA_{BC}}{L_{BC}}$	0	0	0
	DC	0	0	0	0
K_{2i}	AB	0	$\frac{EA_{AB}}{L_{AB}}$	0	0
	BC	0	$\frac{12EI}{L_{BC}^3}$	$\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$-\frac{12EI}{L_{BC}^3}$
	DC	0	0	0	0
K_{3i}	AB	$\frac{6EI}{L_{AB}^2}$	0	$\frac{4EI}{L_{AB}}$	0
	BC	0	$\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$\frac{4EI}{L_{BC}}$	$-\frac{6EI}{L_{BC}^2}$
	DC	0	0	0	0
K_{4i}	AB	0	0	0	0
	BC	0	$-\frac{12EI}{L_{BC}^3}$	$-\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$\frac{12EI}{L_{BC}^3}$
	DC	0	0	0	$\frac{EA_{DC}}{L_{DC}}$

4. वैश्विक दृढता आव्यूह का विश्लेषणात्मक समंजन करें और वैश्विक साम्यावस्था समीकरण लिखें।

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -PL_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{NF} + \underbrace{\begin{Bmatrix} P/2 \\ -wL_{BC}/2 \\ PL_{AB}/8 - wL_{BC}^2/12 \\ -wL_{BC}/2 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_{AB}^3} + \frac{EA_{BC}}{L_{BC}} & 0 & \frac{6EI}{L_{AB}^2} & 0 \\ 0 & \frac{EA_{AB}}{L_{AB}} + \frac{12EI}{L_{BC}^3} & \frac{6EI}{L_{BC}^2} & -\frac{12EI}{L_{BC}^3} \\ \frac{6EI}{L_{AB}^2} & \frac{6EI}{L_{BC}^2} & \frac{4EI}{L_{AB}} + \frac{4EI}{L_{BC}} & -\frac{6EI}{L_{BC}^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L_{BC}^3} & -\frac{6EI}{L_{BC}^2} & \frac{12EI}{L_{BC}^3} \frac{EA_{DC}}{L_{DC}} \end{bmatrix}}_{K_{tt}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}}_{\Delta}$$

जहाँ NF नोडीय बल और NEF नोडीय समतुल्य बल हैं। Δ निर्धारित करने के लिए,

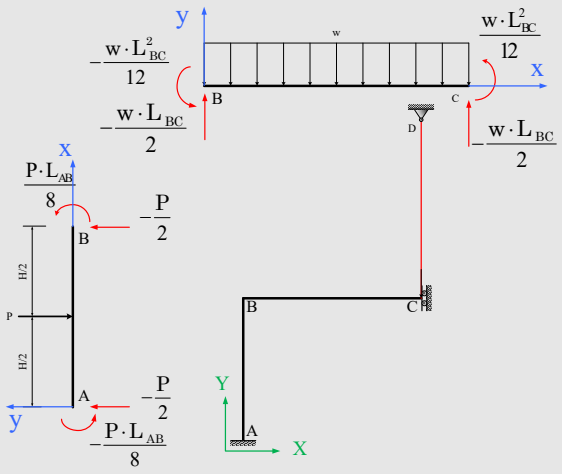
$$\Delta = [K_{tt}]^{-1}(NF + NEF)$$

5. नोडीय अंत्य बल। किंतु पहले स्थानीय और वैश्विक निर्देशांक प्रणालियों का प्रतिचित्रण करें

वैश्विक	X	Y	Z
AB	-y	x	z
BC	x	y	z

स्थानीय	x	y	z
AB	Y	-X	Z
BC	X	Y	Z

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -PL_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{NF} + \underbrace{\begin{Bmatrix} P/2 \\ -wL_{BC}/2 \\ PL_{AB}/8 - wL_{BC}^2/12 \\ -wL_{BC}/2 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

6. $E = 200GPa$, $I = 200{\times}10^6 mm^4$, $L_{AB} = H = 8m$, $L_{BC} = L_{DC} = 10m$, $A_{AB} = A_{BC} = 5,000mm^2$, $A_{DC} = 100mm^2$, $P = 10kN$, $M = P \cdot L_{BC}$ और $w = 1kN/m$ प्रतिस्थापित करें। अंत्य नोडीय बल निर्धारित करें और फिर नोडीय विस्थापनों के लिए हल करें। MATLAB®स्क्रिप्ट §I.2.5 में है।

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1640\ [mm] \\ -2.36\times10^{-5}\ [mm] \\ -0.00308\ [radian] \\ -4.999\ [mm] \end{Bmatrix}$$

7. सभी सदस्यों में आंतरिक बल निर्धारित करें।
8. अवयव नोडीय विस्थापन और समतुल्य भार एकत्र करें:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}_{AB} &= \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta_2 \quad -\Delta_1 \quad \theta_3\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad 0.0 \quad 0.00 \quad -23.6e-006 \quad -164.03e-003 \quad -3.08e-003\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{NEF_{AB}} &= \lfloor\ 0 \quad -P/2 \quad -PL_{AB}ab/8; 0 \quad -P/2 \quad PL_{AB}/8\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad -5.0 \quad -10,000.0 \quad 0.0 \quad -5.0 \quad 10,000\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{\delta}_{BC} &= \lfloor\ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \theta_3 \quad 0 \quad \Delta_4 \quad 0\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 164.03e-003 \quad -23.6e-006 \quad -3.08e-003 \quad 0.0 \quad -5.00 \quad 0.0\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{NEF_{BC}} &= \lfloor\ 0 \quad -wL_{BC}/2 \quad -wL_{BC}^2/12 \quad 0 \quad -wL_{BC}/2 \quad wL_{BC}^2/12\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad -5.0 \quad -8,333 \quad 0.0 \quad -5.0 \quad 8,333\ \rfloor^T
\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9. आंतरिक बलों की गणना इससे करें

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} NEF_1 \\ NEF_2 \\ NEF_3 \\ \hline NEF_4 \\ NEF_5 \\ NEF_6 \end{array}\right\}}_{P_{ext}} - \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \hline \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{array}\right\}}_{P_{int}} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

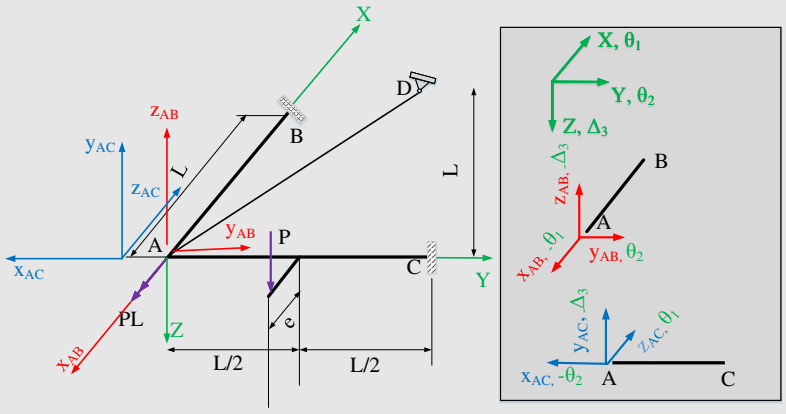
10. प्रतिस्थापन करने पर

$$\mathbf{p}_{AB} = \left\{\begin{array}{c} P_A^x \\ V_A^y \\ M_A^z \\ \hline P_B^x \\ V_B^y \\ M_B^z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0.00295\ [kN] \\ -6.403\ [kN] \\ -20,203.\ [kN \cdot mm] \\ \hline -0.00295\ [kN] \\ 16.403\ [kN] \\ -71,021.\ [kN \cdot mm] \end{array}\right\}; \mathbf{p}_{BC} = \left\{\begin{array}{c} P_B^x \\ V_B^y \\ M_B^z \\ \hline P_C^x \\ V_C^y \\ M_C^z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 16.403\ [kN] \\ 0.00295\ [kN] \\ -28,979.\ [kN \cdot mm] \\ \hline -16.403\ [kN] \\ 9.997\ [kN] \\ -20,991.\ [kN \cdot mm] \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{p}_{DC} = \left\{\begin{array}{c} P_D^x \\ P_C^x \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -9.997\ [kN] \\ 9.997\ [kN] \end{array}\right\} \quad \text{(Tension)}$$

42.3.5 उदाहरण 42.5: संकर ग्रिड

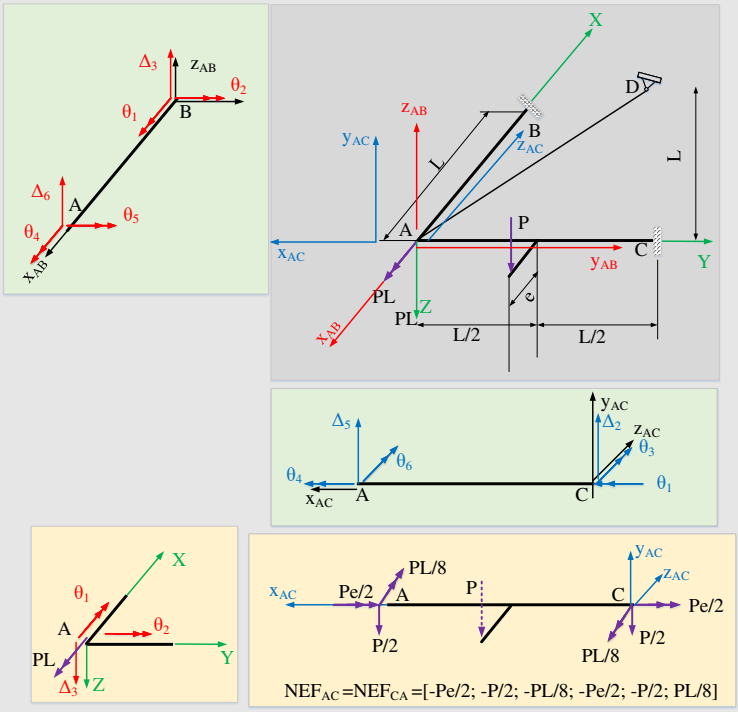
निम्नलिखित ग्रिड का विश्लेषण करें



ध्यान दें कि सदस्य AD एक केबल है जिसकी विशेषताएँ A और E हैं तथा वह $Y-Z$ तल में है। दोनों सदस्यों के कुछ स्थानीय निर्देशांक अक्ष लाल और नीले रंग में दर्शाए गए हैं। L=10 m; E=200 GPa; $I = 200 \times 10^6 \text{mm}^4$; $J = I_{xx} = 4 \times 10^6$ mm^4, $A_{AD} = 100$ mm^2, $e = 1$m, और P=10 kN का उपयोग करें। GPa, kN और mm का उपयोग करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. तीन वैश्विक स्वतंत्रता-कोटियाँ θ_1^X, θ_2^Y और Δ_3^Z हैं।



2. (a) बिंदु भार दोनों सिरों में से प्रत्येक पर अपरूपण, आघूर्ण और मरोड़ उत्पन्न करेगा। अतः नोडीय समतुल्य बल (स्थानीय निर्देशांक प्रणाली में) हैं

$$
\begin{aligned}
NEF_{CA} &= \lfloor\ -Pe/2 \quad -P/2 \quad -PL/8 \mid -Pe/2 \quad -P/2 \quad PL/8\ \rfloor^T \quad \text{Nodes C and A} \\
&= \lfloor\ -5{,}000 \quad -5 \quad -12{,}500 \mid -5{,}000 \quad -5 \quad 12{,}500\ \rfloor^T \\
NEF_{AB} &= \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T \quad \text{Nodes A and B} \\
NF &= \lfloor\ -PL \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ -100{,}000 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T
\end{aligned}
$$

(b) स्वतंत्रता-कोटि 1 पर एकक घूर्णन

$$
\begin{array}{llllll}
\text{AB} & \text{Torsion} & K_{11} = \frac{GJ}{L} & K_{21} = 0 & K_{31} = 0 \\
\text{AC} & \text{Flexure} & K_{11} = \frac{4EI}{L} & K_{21} = 0 & K_{31} = \frac{6EI}{L^2}
\end{array}
$$

(c) स्वतंत्रता-कोटि 2 पर एकक घूर्णन

$$
\begin{array}{llllll}
\text{AB} & \text{Flexure} & K_{12} = 0 & K_{22} = \frac{4EI}{L} & K_{32} = -\frac{6EI}{L^2} \\
\text{AC} & \text{Torsion} & K_{12} = 0 & K_{22} = \frac{GJ}{L} & K_{32} = 0
\end{array}
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(d) स्वतंत्रता-कोटि 3 पर एकक विस्थापन

AB	Flexure	$K_{13}=0$	$K_{23}=-\frac{6EI}{L^2}$	$K_{33}=\frac{12EI}{L^3}$
AC	Flexure	$K_{13}=\frac{6EI}{L^2}$	$K_{23}=0$	$K_{33}=\frac{12EI}{L^3}$
Cable			$K_{33}=\frac{AE}{\sqrt{2}L}\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{AE}{2L}$	

(e) प्रत्येक अवयव के लिए स्थानीय निर्देशांक प्रणाली

(f) साम्यावस्था समीकरण लिखें (नोडीय समतुल्य भार को वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में पुनः संरेखित किए जाने पर ध्यान दें)।

$$\begin{Bmatrix} -PL \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} PL/8 \\ Pe/2 \\ P/2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (4+\eta)L^2 & 0 & 6L \\ 0 & (4+\eta)L^2 & -6L \\ 6L & -6L & 24+\frac{AE}{2L}\xi \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

जहाँ $\eta=\frac{GJ}{EI}$ और $\xi=\frac{L^3}{EI}$ हैं।

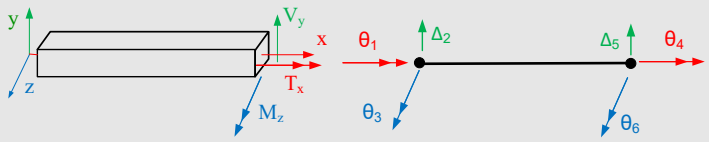
अथवा

$$\begin{Bmatrix} -100,000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12,500 \\ 5,000 \\ 5,000 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1.6032\times10^7 & 0. & 2400. \\ 0. & 1.6032\times10^7 & -2400. \\ 2400. & -2400. & 1.\times10^8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

अथवा

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.23752\times10^{-8} & -2.24103\times10^{-16} & -1.49701\times10^{-12} \\ -2.24103\times10^{-16} & 6.23752\times10^{-8} & 1.49701\times10^{-12} \\ -1.49701\times10^{-12} & 1.49701\times10^{-12} & 1\times10^{-8} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -87,500 \\ 5,000 \\ 5,000 \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} -0.00545784 \\ 0.000311884 \\ 0.0000501385 \end{Bmatrix}$$

3. आंतरिक बल निर्धारित करने के लिए स्मरण करें कि हमने निम्नलिखित स्थानीय x,y,z उपयोग किए हैं



4. अवयव AB के आंतरिक बल पुनः प्राप्त करने के लिए हम वैश्विक विस्थापनों का स्थानीय विस्थापनों से प्रतिचित्रण करते हैं

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \hline \theta_4 \\ \theta_5 \\ \Delta_6 \end{array}\right\} \leftarrow \left\{\begin{array}{c} -\theta_1 \\ \theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इसे पूर्ववर्ती अवयव दृढता आव्यूह से व्युत्पन्न किया जा सकता है, क्योंकि निर्देशांक प्रणालियाँ मेल खाती हैं $(\theta_{1x};\Delta_{2y};\theta_{3z};)$

$$\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} -\theta_1 \\ \theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

प्रतिस्थापन करने पर

$$\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 32000 & 0 & 0 & -32,000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 2,400 & 0 & -\frac{12}{25} & 2,400 \\ 0 & 2,400 & 16,000,000 & 0 & -2400 & 8,000,000 \\ -32,000 & 0 & 0 & 32,000 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25} & -2,400 & 0 & \frac{12}{25} & -2,400 \\ 0 & 2400 & \frac{2}{25} & 0 & -2,400 & 16,000,000 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} -0.00545784 \\ 0.000311884 \\ 0.0000501385 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -174.651 \\ 0.120482 \\ 802.965 \\ \hline 174.651 \\ -0.120482 \\ 0.748526 \end{array}\right\}$$

5. हम अवयव CA के लिए यही प्रक्रिया दोहराते हैं। वैश्विक विस्थापनों का स्थानीय विस्थापनों से प्रतिचित्रण करके आरंभ करें

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \hline \theta_4 \\ \theta_5 \\ \Delta_6 \end{array}\right\} \leftarrow \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \theta_1 \end{array}\right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इसे पूर्ववर्ती अवयव दृढता आव्यूह से व्युत्पन्न किया जा सकता है, क्योंकि निर्देशांक प्रणालियाँ मेल खाती हैं $(\theta_{1x}; \Delta_{2y}; \theta_{3z};)$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -Pe/2 \\ -P/2 \\ -PL/8 \\ \hline -Pe/2 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{array}\right\}}_{P_{ext}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \theta_1 \end{array}\right\}$$

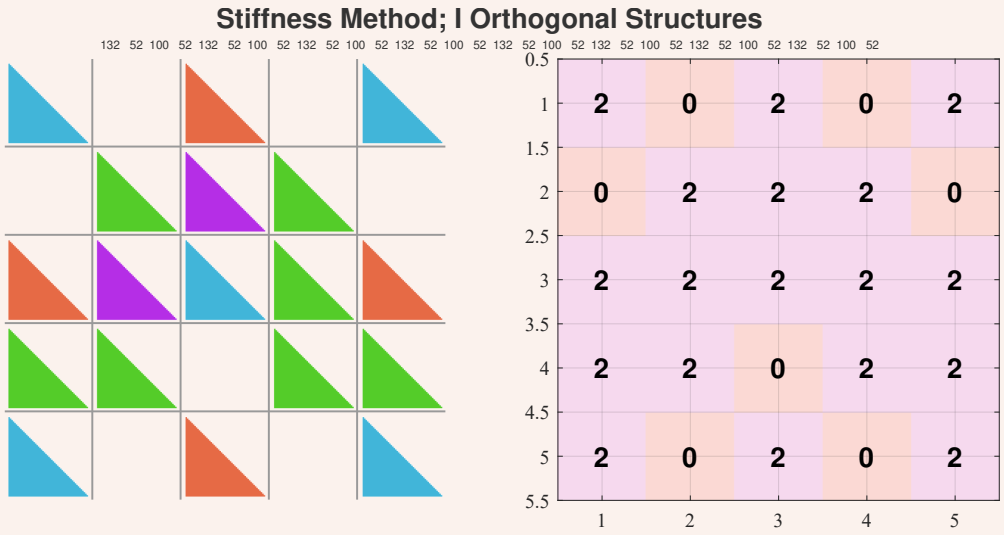
प्रतिस्थापन करने पर

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} T_C \\ V_C \\ M_C \\ \hline T_A \\ V_A \\ M_A \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -5,000 \\ -5 \\ -12,500 \\ \hline -5,000 \\ -5 \\ 12,500 \end{array}\right\}}_{P_{ext}}$$

$$\underbrace{- \begin{bmatrix} 32000 & 0 & 0 & -32,000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 2,400 & 0 & -\frac{12}{25} & 2,400 \\ 0 & 2,400 & 16,000,000 & 0 & -2400 & 8,000,000 \\ -32,000 & 0 & 0 & 32,000 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25} & -2,400 & 0 & \frac{12}{25} & -2,400 \\ 0 & 2400 & \frac{2}{25} & 0 & -2,400 & 16,000,000 \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -0.0003118 \\ -0.00005013 \\ -0.005457 \end{array}\right\}}_{P_{int}} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} T_C \\ V_C \\ M_C \\ \hline T_A \\ V_A \\ M_A \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 5,009.98 \\ -8.09879 \\ -31,162.6 \\ \hline 4,990.02 \\ 18.0988 \\ -99,825.3 \end{array}\right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अध्याय-विशिष्ट पहचान-चिह्न, chapter H

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

43 रूपांतरण आव्यूह

सारांश

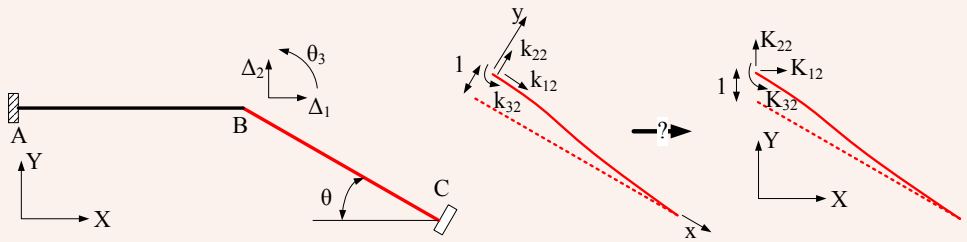
पिछले अध्याय में हमने लंबकोणीय संरचनाओं के विश्लेषण द्वारा प्रत्यक्ष दृढता विधि प्रस्तुत की थी। अतः पहले वैश्विक दृढता आव्यूह का समंजन करने (स्थानीय से वैश्विक निर्देशांक प्रणालियों में जाने) और फिर बल पुनर्प्राप्ति के लिए वैश्विक से स्थानीय प्रणाली में लौटने हेतु हमने अत्यंत सरल 90° घूर्णनों पर निर्भर किया। स्पष्टतः सामान्य संरचनाओं के लिए यह संभव नहीं है और इन संक्रियाओं को करने हेतु रूपांतरण आव्यूह प्रस्तुत करना आवश्यक है। सरल सदस्यों (जैसे 2D फ्रेम) के लिए यह प्रारंभिक हो सकता है, किंतु ग्रिड के लिए अधिक जटिल और 3D फ्रेम अवयवों के लिए कहीं अधिक जटिल हो जाता है। विभिन्न अवयवों के रूपांतरण आव्यूहों के गणितीय व्यंजक इस अध्याय का विषय हैं।

43.1 परिचय 1531
43.2 कुछ सिद्धांत 1532
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ और $[\mathbf{K}^e]$ का संबंध 1532
43.2.2 दिशा-कोज्याएँ 1533
43.3 फ्रेमवर्क अवयवों के रूपांतरण आव्यूह . . 1535
43.3.1 2D स्थितियाँ 1536
43.3.2 3D फ्रेम 1539
43.3.3 यूलरीय घूर्णन 1539
43.3.4 अवयव अक्ष का ऐंठन 1541
43.3.5 3D ट्रस 1543

43.1 परिचय

1 पिछले अध्याय में, जहाँ हमने लंबकोणीय संरचनाओं पर ध्यान केंद्रित किया था, अवयव दृढता आव्यूहों के पदों में संरचना दृढता आव्यूह $[\mathbf{K}^e]$ का समंजन अपेक्षाकृत सीधा था।

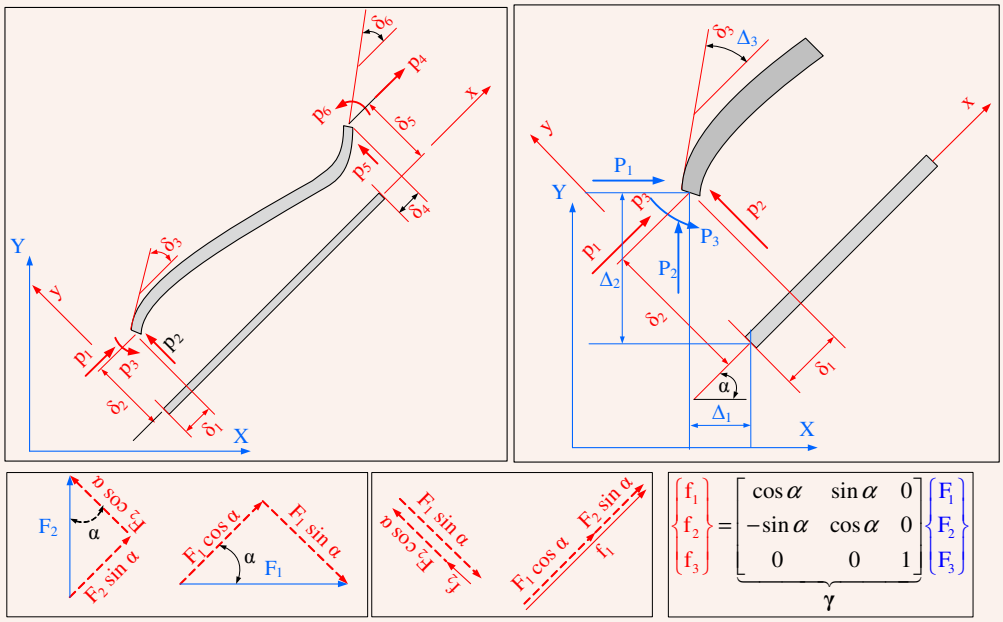
2 स्थानीय निर्देशांकों में अवयव दृढता आव्यूह से वैश्विक निर्देशांकों में अवयव दृढता आव्यूह निर्धारित करने के लिए एक रूपांतरण आव्यूह प्रस्तुत करना आवश्यक है, चित्र 43.1।



चित्र 43.1: स्थानीय ($\mathbf{k}^e$) और वैश्विक ($\mathbf{K}^e$) अवयव दृढता आव्यूह

3 निश्चय ही सरल सदस्य (जैसे फ्रेम अवयव) के लिए यह सरलता से किया जा सकता है, चित्र 43.2। किंतु हमारा उद्देश्य विभिन्न प्रकार के सदस्यों के रूपांतरण आव्यूह तर्कसंगत रूप से व्युत्पन्न करना है (जिनमें 3D फ्रेम सबसे चुनौतीपूर्ण है)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 43.2: 2D धरन-स्तंभ के लिए रूपांतरण आव्यूह

4 यह अध्याय समंजन से पहले वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में अवयव दृढता आव्यूह प्राप्त करने के लिए आवश्यक 2D और 3D रूपांतरणों का अध्ययन करेगा (जैसा अगले अध्याय में विवेचित है)।

43.2 कुछ सिद्धांत

43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ और $[\mathbf{K}^e]$ का संबंध

5 स्मरण करें

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$
$$\mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

6 एक सदिश रूपांतरण आव्यूह $[\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]$ इस प्रकार परिभाषित करें कि:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^{(e)} &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}\\ \mathbf{p}^{(e)} &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\mathbf{P}^{(e)}\end{aligned} \tag{43.1}$$

7 समीकरण 43.1 को समीकरण 43.2.1 में प्रतिस्थापित करने पर

$$\mathbf{p}^e = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$\boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}}$ से पूर्वगुणन करने पर

$$\mathbf{P}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

[8] किंतु चूँकि घूर्णन आव्यूह लंबकोणीय है, हमारे पास $\boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^T}$ है (और $\boldsymbol{\Delta}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^T}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$)

$$\mathbf{P}^{(e)} = \underbrace{\boldsymbol{\Gamma}^{(e)T}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}}_{\mathbf{K}^{(e)}}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

अथवा

$$\mathbf{K}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^T}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}$$

जो स्थानीय और वैश्विक निर्देशांकों में अवयव दृढता आव्यूहों के बीच सामान्य संबंध है।

43.2.2 दिशा-कोज्याएँ

[9] दो सदिशों का अदिश गुणनफल

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|\cos\alpha = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

जहाँ $|\mathbf{A}|$, $\vec{\mathbf{A}}$ का मानक (लंबाई) है और α दोनों सदिशों के बीच का कोण है।

[10] सदिश $\vec{\mathbf{V}}$

$$\vec{\mathbf{V}} = V_x\vec{\mathbf{i}} + V_y\vec{\mathbf{j}} + V_z\vec{\mathbf{k}}$$

को प्रसामान्यीकृत किया जा सकता है

$$\vec{\mathbf{V}}_n = \frac{V_x}{|V|}\vec{\mathbf{i}} + \frac{V_y}{|V|}\vec{\mathbf{j}} + \frac{V_z}{|V|}\vec{\mathbf{k}} = \frac{x_2-x_1}{L}\vec{\mathbf{i}} + \frac{y_2-y_1}{L}\vec{\mathbf{j}} + \frac{z_2-z_1}{L}\vec{\mathbf{k}}$$

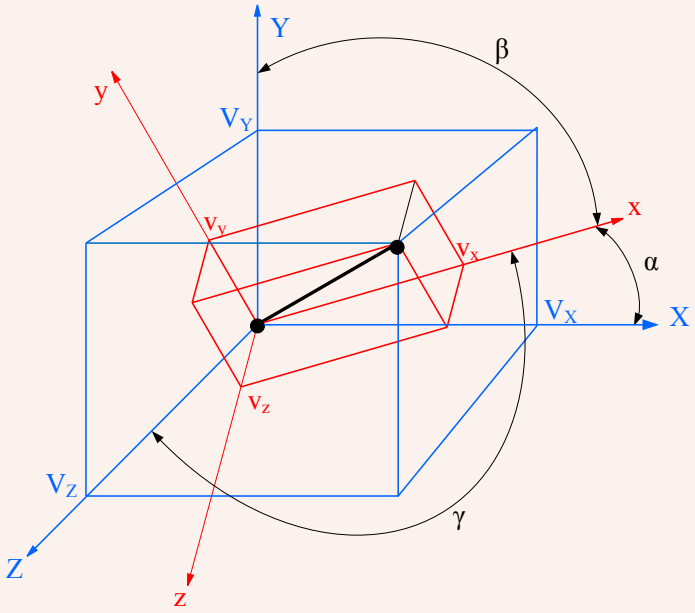
जहाँ $L = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ है; अतः सदिश $\vec{\mathbf{V}}$ की तीन दिशा-कोज्याएँ प्राप्त करने के लिए उसके प्रसामान्यीकृत रूप का लंबकोणीय निर्देशांक प्रणाली बनाने वाले तीन एकक सदिशों के साथ अदिश गुणनफल लेते हैं

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{i}} &= \frac{x_2-x_1}{L} = l_{vx}\\
\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{j}} &= \frac{y_2-y_1}{L} = l_{vy}\\
\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{k}} &= \frac{z_2-z_1}{L} = l_{vz}
\end{aligned}$$

ध्यान दें कि दोनों सदिश प्रसामान्यीकृत होने के कारण अदिश गुणनफल दिशा-कोज्या के बराबर है।

[11] हमारे सामने समस्या सदिश $\mathbf{V}$ का $(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ निर्देशांक प्रणाली से $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ में सामान्य रूपांतरण है, चित्र 43.3: जहाँ:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 43.3: स्वेच्छ 3D सदिश रूपांतरण

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} \\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} \\ l_{zX} & l_{zY} & l_{zZ} \end{bmatrix}}_{\gamma} \begin{Bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{Bmatrix} \tag{43.2}$$

जहाँ l_{ij} दिशा-कोज्या है—अक्ष i की, अक्ष j के सापेक्ष—और $l_{xX} = \cos(\alpha)$ तथा $l_{xY} = \cos(\beta)$ हैं। (स्मरण करें कि $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, अतः कोण की दिशा अप्रासंगिक है)।

12 अतः γ हमें वैश्विक से स्थानीय निर्देशांक प्रणालियों में ले जाता है। उदाहरणार्थ

$$\begin{aligned} V_x &= V_X l_{xX} + V_Y l_{xY} + V_Z l_{xZ} \\ &= V_X \cos\alpha + V_Y \cos\beta + V_Z \cos\gamma \end{aligned}$$

13 दिशा-कोज्याएँ वे एकक लंबकोणीय सदिश हैं जो निम्नलिखित संबंधों को संतुष्ट करते हैं:

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij} l_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3$$

अर्थात्:

$$l_{11}^2 + l_{12}^2 + l_{13}^2 = 1 \quad \text{or} \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 = \delta_{11}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij} l_{kj} = 0 \begin{cases} i = 1,2,3 \\ k = 1,2,3 \\ i \neq k \end{cases}$$

$$l_{11}l_{21} + l_{12}l_{22} + l_{13}l_{23} = 0 = \delta_{12}$$

[14] $[\gamma]^T$ और $[\gamma]$ का प्रत्यक्ष गुणन करके यह दर्शाया जा सकता है कि: $[\gamma]^T [\gamma] = [\mathbf{I}] \Rightarrow [\gamma]^T = [\gamma]^{-1} \Rightarrow [\gamma]$ एक *लंबकोणीय आव्यूह* (अर्थात् लंबप्रसामान्य) है।

[15] विपरीत रूपांतरण (स्थानीय से वैश्विक) होगा

$$\mathbf{V} = \gamma^T \mathbf{v}$$

[16] अंततः समीकरण 43.2 की प्रथम पंक्ति (छोटे अक्षरों $x-y-z$ के पदों में) इस प्रकार है

$$l_{xX} = C_X = \frac{x_j - x_i}{L}; \quad l_{xY} = C_Y = \frac{y_j - y_i}{L}; \quad l_{xZ} = C_Z = \frac{z_j - z_i}{L} \tag{43.3}$$

43.3 फ्रेमवर्क अवयवों के रूपांतरण आव्यूह

[17] स्पष्टतः घूर्णन आव्यूह $[\Gamma]$ अवयव प्रकार के साथ परिवर्तित होगा। सर्वाधिक सामान्य स्थिति (3D अवयव, प्रत्येक नोड पर 6 स्वतंत्रता-कोटियाँ) में हमें यह परिभाषित करना होगा:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ \hline M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ \hline F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ \hline M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \gamma & & & \\ \hline & \gamma & & \\ \hline & & \gamma & \\ \hline & & & \gamma \end{array}\right]}_{\Gamma} \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \\ \hline M_{X1} \\ M_{Y1} \\ M_{Z1} \\ \hline F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \\ \hline M_{X2} \\ M_{Y2} \\ M_{Z2} \end{Bmatrix} \tag{43.4}$$

और सदिश रूपांतरण $[\gamma]$ तथा अवयव रूपांतरण आव्यूह $[\Gamma]$ के बीच भेद करना चाहिए।

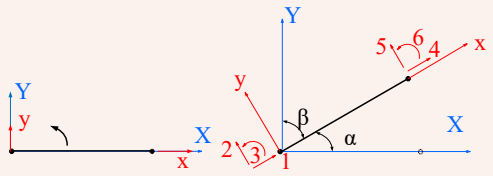
[18] अगले अनुभागों में हम प्रत्येक प्रकार के अवयव के रूपांतरण आव्यूह का अध्ययन करेंगे; वैश्विक X के साथ संरेखित अवयव से आरंभ करके उसे उसकी वर्तमान स्थिति तक घुमाएँगे, जो $x-y-z$ को परिभाषित करती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

43.3.1 2D स्थितियाँ

43.3.1.1 2D फ्रेम

19 2D फ्रेम अवयव के लिए, चित्र 43.4 और समीकरण 43.2 से सदिश घूर्णन आव्यूह 9 भिन्न कोणों



चित्र 43.4: Z (अथवा z) के सापेक्ष 2D फ्रेम अवयव का घूर्णन

की 9 दिशा-कोज्याओं के पदों में परिभाषित होता है। किंतु 2D स्थिति में चार कोण परस्पर संबंधित हैं ($l_{xX}, l_{xY}, l_{yX}, l_{yY}$) और सभी को एक ही α के पदों में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ α स्थानीय x अक्ष की दिशा है (प्रथम नोड से द्वितीय नोड तक सदस्य के अनुदिश), जिसे वैश्विक X अक्ष के सापेक्ष मापा जाता है।

20 शेष 5 पद Z और z के बीच के कोण से संबंधित हैं, जो शून्य है, तथा Z और $x-y$ तल के बीच के कोण से, जो $\pi/2$ है। अतः घूर्णन आव्यूह इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} \\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} \\ l_{zX} & l_{zY} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

और हम देखते हैं कि कोण द्वितीय अधोलिखित से प्रथम की ओर परिभाषित हैं तथा वामावर्त कोण धनात्मक हैं।

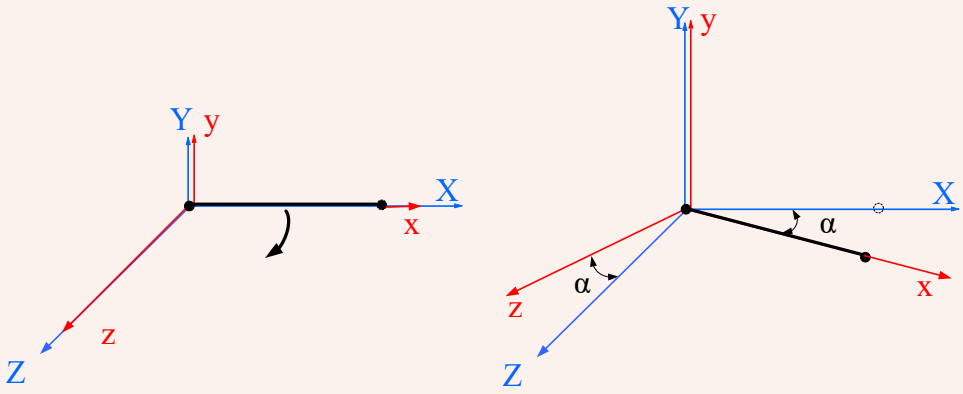
21 तब अवयव घूर्णन आव्यूह $\boldsymbol{\Gamma}$ इस प्रकार होगा

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

43.3.1.2 ग्रिड

22 ग्रिड अवयव का रूपांतरण आव्यूह, चित्र 43.5, फ्रेम अवयव के रूपांतरण आव्यूह से अत्यंत मिलता-जुलता है; घूर्णन y अक्ष के सापेक्ष है, जबकि फ्रेम में यह z अक्ष के सापेक्ष था।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 43.5: ग्रिड अवयव का घूर्णन

23 समीकरण 43.2 से सदिश घूर्णन आव्यूह 9 भिन्न कोणों की 9 दिशा-कोज्याओं के पदों में परिभाषित होता है। किंतु चार कोण परस्पर संबंधित हैं ($l_{xX}, l_{xZ}, l_{zX}, l_{zZ}$) और सभी को एक ही α के पदों में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ α स्थानीय x अक्ष की दिशा है (प्रथम नोड से द्वितीय नोड तक सदस्य के अनुदिश), जिसे वैश्विक X अक्ष के सापेक्ष मापा जाता है।

24 शेष 5 पद Y और y के बीच के कोण से संबंधित हैं, जो शून्य है, तथा Y और $x-z$ तल के बीच के कोण से, जो $\pi/2$ है। अतः घूर्णन आव्यूह इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & 0 & l_{xZ} \\ 0 & 1 & 0 \\ l_{zX} & 0 & l_{zZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

और हम देखते हैं कि कोण द्वितीय अधोलिखित से प्रथम की ओर परिभाषित हैं तथा वामावर्त कोण धनात्मक हैं।

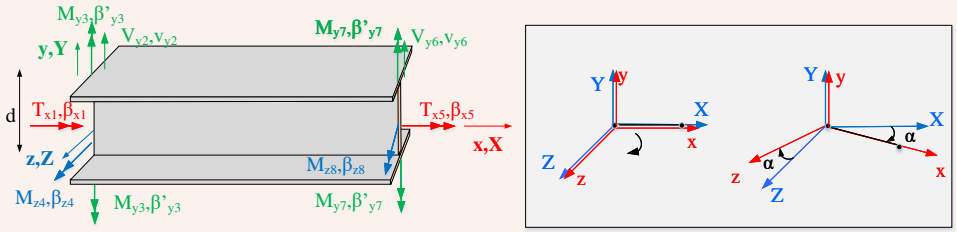
25 तब अवयव घूर्णन आव्यूह $[\boldsymbol{\Gamma}]$ इस प्रकार होगा

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

43.3.1.3 व्लासोव धरन

26 अवरुद्ध वारिंपंग वाले ग्रिड अवयव का दृढता आव्यूह समीकरण 41.3 (§41.8) में दिया गया था। इसका रूपांतरण आव्यूह ग्रिड के रूपांतरण आव्यूह के अनुरूप होगा, किंतु अब हमारे पास एक अतिरिक्त स्वतंत्रता-कोटि (M_y) है, चित्र 43.6।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 43.6: वलासोव धरन का रूपांतरण आव्यूह

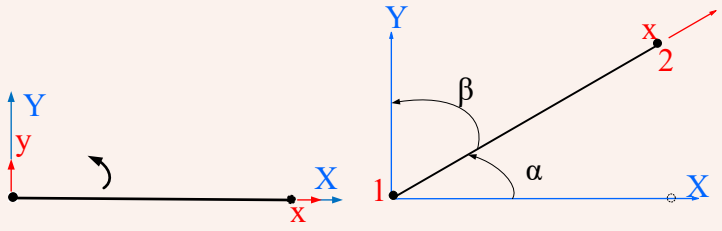
$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & 0 & 0 & l_{xZ} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_{zX} & 0 & 0 & l_{zZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & 0 & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

[27] तब अवयव घूर्णन आव्यूह $[\boldsymbol{\Gamma}]$ इस प्रकार होगा

$$\begin{Bmatrix} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ \hline T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ \hline T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{Bmatrix}$$

43.3.1.4 2D ट्रस

[28] 2D ट्रस अवयव के लिए वैश्विक निर्देशांक प्रणाली द्विविमीय है, जबकि स्थानीय प्रणाली केवल एकविमीय है; अतः सदिश रूपांतरण आव्यूह यह है, चित्र 43.7।



चित्र 43.7: 2D ट्रस का घूर्णन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

29 तब अवयव घूर्णन आव्यूह $[\boldsymbol{\Gamma}]$ का समंजन सदिश घूर्णन आव्यूह $[\boldsymbol{\gamma}]$ से किया जाएगा।

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \hline p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \hline P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

43.3.2 3D फ्रेम

30 दंड अवयव इस प्रकार परिभाषित होते हैं कि उनका स्थानीय x अक्ष उनके प्रमुख अक्ष के साथ संरेखित हो और अवयव ज्ञात निर्देशांकों वाले दो अंत्य नोडों से परिभाषित हो। अतः दिशा-कोज्याओं की परिभाषा स्मरण करने पर स्पष्ट है कि केवल प्रथम पंक्ति का मूल्यांकन C_X, C_Y, और C_Z के पदों में सरल है, जहाँ $C_X = l_{X_2X_1} = \frac{x_j - x_i}{L}$, $C_Y = l_{X_2Y_1} = \frac{y_j - y_i}{L}$, $C_Z = l_{X_2Z_1} = \frac{z_j - z_i}{L}$, $L = \sqrt{(x_j-x_i)^2 + (y_j-y_i)^2 + (z_j-z_i)^2}$। किंतु अन्य पदों का मूल्यांकन अधिक जटिल है।

31 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ से $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ में यह सामान्यीकृत रूपांतरण द्विविमीय स्थिति में एक चरण में किया गया था, किंतु 3D स्थिति में मध्यवर्ती रूपांतरण परिभाषित करने होंगे।

32 वैश्विक निर्देशांक प्रणाली के अनुरूप संदर्भ (X_1, Y_1, Z_1) निर्देशांक प्रणाली से आरंभ करके हम मूलतः X_1 अक्ष के अनुदिश स्थित अवयव को X_2 अक्ष (अथवा x) के अनुदिश उसकी नई स्थिति में रूपांतरित करना चाहते हैं।

33 2D स्थिति में यह एकल घूर्णन α से किया गया था और अन्य सभी कोण उसी के पदों में परिभाषित थे।

34 3D स्थिति में हम आरंभिक विन्यास $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ से अंतिम विन्यास $\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_2$ में रूपांतरित करना चाहते हैं। इस रूपांतरण के लिए कम-से-कम दो घूर्णन β और γ, तथा संभवतः तीसरा घूर्णन α (2D वाले से भिन्न) आवश्यक होगा, सारणी 43.1। इन तीन कोणों को *यूलरीय कोण* भी कहते हैं।

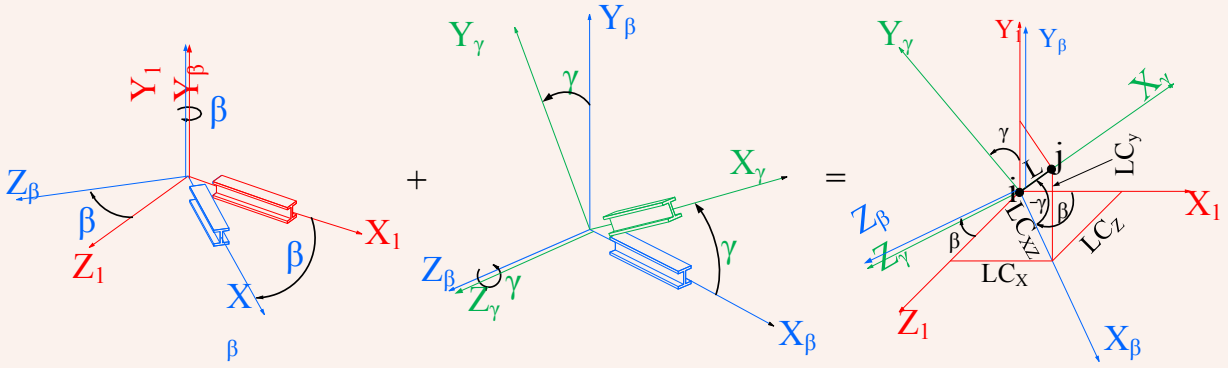
43.3.3 यूलरीय घूर्णन

35 हम रूपांतरण आव्यूह की प्रथम पंक्ति से आरंभ कर सकते हैं, जो संदर्भ अक्षों $(\mathbf{X_1}, \mathbf{Y_1}, \mathbf{Z_1})$ की दिशा-कोज्याओं के अनुरूप है, जिन्हें $\mathbf{X_2}$ के सापेक्ष मापा जाता है। इससे सदिश घूर्णन आव्यूह $[\boldsymbol{\gamma}]$ की प्रथम पंक्ति परिभाषित होगी:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

हमें अभी द्वितीय और तृतीय पंक्तियाँ परिभाषित करनी हैं। यह दो क्रमिक घूर्णनों द्वारा किया जाता है (यह मानते हुए कि X_1, Y_1, Z_1 और X_2, Y_2, Z_2 आरंभ में संपाती हैं तथा सदस्य का ऊर्ध्वाधर अक्ष ऊर्ध्वाधर ही रहता है)। चित्र 43.8 के संदर्भ में रूपांतरणों का क्रम सारणी 43.1 में दिया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 43.8: लघुकृत 3D घूर्णन

तालिका 43.1: रैखिक अवयवों के 3D रूपांतरण

से	तक	जिसके सापेक्ष	कोण
X_1, Y_1, Z_1	$X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$	$Y_1 \equiv Y_\beta$	β
$X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$	$X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma$	$Z_\beta \equiv Z_\gamma$	γ
वैकल्पिक			
$X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma$	$X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$	$X_\gamma \equiv X_\alpha$	α

β से, Y_1 अक्ष के परितः घूर्णन , $X_1 \rightarrow X_\beta$। यह घूर्णन $\mathbf{R}_\beta$, β अक्षों $(X_\beta, Y_\beta, Z_\beta)$ की दिशा-कोज्याओं से बना है, जिन्हें (X_1, Y_1, Z_1) के सापेक्ष मापा जाता है:

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_X}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_Z}{C_{XZ}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{C_Z}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_X}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.5}$$

$\cos\beta = \frac{C_X}{C_{XZ}}$, $\sin\beta = \frac{C_Z}{C_{XZ}}$, और समीकरण 43.3 से:

$$C_X = \frac{x_j - x_i}{L}; \quad C_Y = \frac{y_j - y_i}{L}; \quad C_Z = \frac{z_j - z_i}{L}; \quad C_{XZ} = \sqrt{C_X^2 + C_Z^2}$$

γ से, Z अक्ष के परितः घूर्णन

$$\mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{XZ} & C_Y & 0 \\ -C_Y & C_{XZ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.6}$$

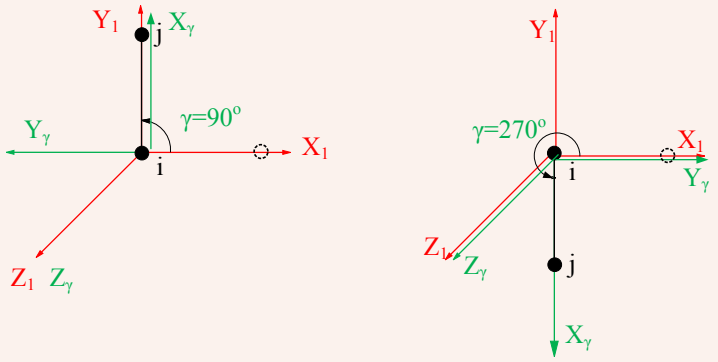
जहाँ $\cos\gamma = C_{XZ}$ और $\sin\gamma = C_Y$ हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[36] समीकरणों 43.3, 43.5 और 43.6 को संयोजित करने पर प्राप्त होता है:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y}{C_{XZ}} & C_{XZ} & \frac{-C_Y C_Z}{C_{XZ}} \\ \frac{-C_Z}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_X}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.7}$$

[37] ऊर्ध्वाधर सदस्य (वैश्विक Y के अनुदिश) के लिए पूर्ववर्ती आव्यूह मान्य नहीं रहता, क्योंकि C_{XZ} अपरिभाषित है ($X_i = X_j \Rightarrow C_X = 0$ और $Z_i = Z_j \Rightarrow C_Z = 0$)। β द्वारा कोई घूर्णन नहीं है। घूर्णन Z_1 अक्ष के सापेक्ष कोण γ से होता है, जिसका मान 90^o अथवा 270^o है। दो संभावनाएँ हैं, चित्र 43.9:



चित्र 43.9: ऊर्ध्वाधर सदस्यों के लिए 3D रूपांतरण की विशेष स्थिति

1. $x_\gamma \uparrow$: X_2 अक्ष -Y_1 के साथ, Y_2 अक्ष -X_1 के साथ और Z_2 अक्ष -Z_1 के साथ संरेखित है
2. $x_\gamma \downarrow$: X_2 अक्ष Y_1 के साथ, Y_2 अक्ष -X_1 के साथ और Z_2 अक्ष Z_1 के साथ संरेखित है

अतः y अक्ष के सापेक्ष घूर्णन आव्यूह, पदों के पुनर्क्रमण को छोड़कर, पहले z अक्ष के सापेक्ष घूर्णन के लिए व्युत्पन्न आव्यूह के समान है:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.8}$$

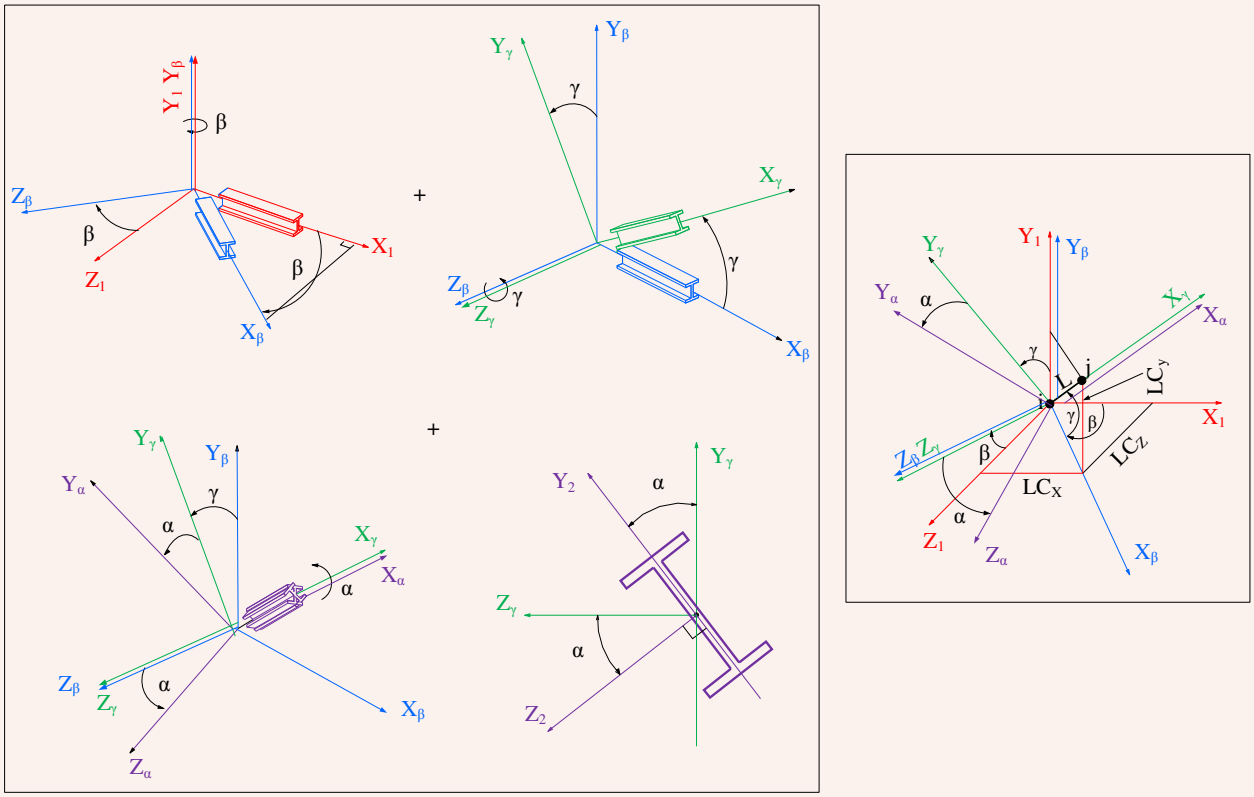
जो दोनों स्थितियों के लिए मान्य है ($C_Y = 1$ जब $\gamma = 90\,\text{deg}$ और $C_Y = -1$ जब $\gamma = 270\,\text{deg}$)।

43.3.4 अवयव अक्ष का ऐंठन

[38] यदि प्रमुख अक्षों को घुमाना हो (अवयव अक्ष के अंतिम ऐंठन सहित), तो पूर्ववर्ती रूपांतरण में कोण α का एक अतिरिक्त घूर्णन X_γ अक्ष के परितः परिभाषित करना होगा, चित्र 43.10।

[39] यह घूर्णन इस प्रकार परिभाषित है कि:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 43.10: जटिल 3D घूर्णन

1. X_α, X_2 के साथ संरेखित और Y_2 तथा Z_2 दोनों के अभिलंब है
2. Y_α कोण 0, α और $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ बनाता है, क्रमशः X_2, Y_2 और Z_2 के सापेक्ष
3. Z_α कोण 0, $\frac{\pi}{2} + \alpha$ और α बनाता है, क्रमशः X_2, Y_2 और Z_2 के सापेक्ष

[40] यह ध्यान रखते हुए कि $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$ और $\cos\beta = \sin\alpha$ हैं, इस रूपांतरण की दिशा-कोज्याएँ इस प्रकार दी जाती हैं:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{43.9}$$

जिससे $Y_2 - Z_2$ अक्ष अनुप्रस्थ काट के प्रमुख अक्षों से संपाती हो जाते हैं। इससे प्राप्त होगा:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta \tag{43.10}$$

$$= \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y \cos\alpha - C_Z \sin\alpha}{C_{XZ}} & C_{XZ}\cos\alpha & \frac{-C_Y C_Z \cos\alpha + C_X \sin\alpha}{C_{XZ}} \\ \frac{C_X C_Y \sin\alpha - C_Z \cos\alpha}{C_{XZ}} & -C_{XZ}\sin\alpha & \frac{C_Y C_Z \sin\alpha + C_X \cos\alpha}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.11}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

41 सरलतर स्थिति की भाँति ऊर्ध्वाधर सदस्यों के लिए पूर्ववर्ती समीकरण अपरिभाषित है और समीकरण 43.8 का समकक्ष व्युत्पन्न करना होगा। यह दो चरणों में किया जाएगा:

1. सदस्य को इस प्रकार घुमाएँ कि:
   (a) X_2 अक्ष Y_1 के साथ संरेखित हो
   (b) Y_2 अक्ष -X_1 के साथ संरेखित हो
   (c) Z_2 अक्ष Z_1 के साथ संरेखित हो

   यह पहले किया जा चुका है और इससे समीकरण 43.8 प्राप्त हुआ था

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.12}$$

2. द्वितीय चरण में कोण α का घूर्णन नए X_2 के सापेक्ष किया जाता है, जैसा समीकरण 43.9 में परिभाषित है।
3. अंततः दोनों रूपांतरण आव्यूहों $[\mathbf{R}][\mathbf{R}]$ को गुणा करने पर—जो समीकरणों 43.12 और 43.9 में दिए गए हैं—प्राप्त होता है:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{RR} = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ C_Y \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

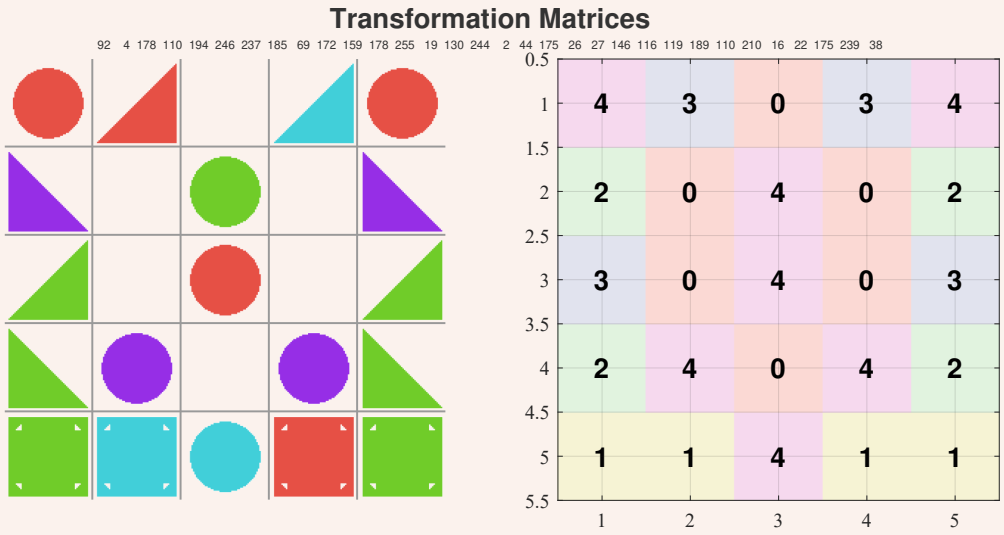
   ध्यान दें कि $\alpha = 0$ रखने पर हमें समीकरण 43.8 पुनः प्राप्त होता है।
4. अंतिम घूर्णन आव्यूह समीकरण 43.4 होगा, जिसमें इस अनुभाग में व्युत्पन्न γ प्रयुक्त होगा।

43.3.5 3D ट्रस

42 3D फ्रेम अवयव के रूपांतरण की व्युत्पत्ति के प्रथम भाग के संदर्भ में 3D ट्रस अवयवों का रूपांतरण आव्यूह है

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \hline p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अध्याय-विशिष्ट पहचान-चिह्न, chapter H

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

44 प्रत्यक्ष दृढता विधि

सारांश

अध्याय 42 में हमने पहली बार वैश्विक निर्देशांक प्रणाली, वैश्विक स्वतंत्रता-कोटियों और वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में संरचना दृढता आव्यूह की संकल्पना प्रस्तुत की थी। इसके बाद अध्याय 43 में रूपांतरण आव्यूह की संकल्पना प्रस्तुत की गई, जिसका उपयोग अवयव दृढता आव्यूहों को स्थानीय से वैश्विक निर्देशांक प्रणालियों में रूपांतरित करने के लिए किया जा सकता है। यह अध्याय, अध्याय 42 में पहले प्रस्तुत उपागम का सामान्यीकरण करके स्वेच्छ (गैर-लंबकोणीय) संरचनाओं को सम्मिलित करेगा। ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि इस अध्याय की विषयवस्तु सभी परिमित अवयव कोडों के लिए मूलभूत है; संचालन की सुविधा के लिए इन कोडों को उपयोगकर्ता-अनुकूल आलेखीय अंतरापृष्ठों से आवेष्टित किया जाता है।

44.1 उद्देश्य 1545
44.2 सिद्धांत 1545
44.3 विविक्तीकरण 1548
44.3.1 अनवरुद्ध और अवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियाँ 1548
44.3.2 संरचनात्मक विविक्तीकरण . . . 1548
44.4 कंप्यूटर कार्यान्वयन 1549
44.4.1 परिसीमा प्रतिबंध, [id] आव्यूह 1549
44.4.2 **LM** सदिश 1551
44.4.3 वैश्विक दृढता आव्यूह का समंजन 1552
44.4.4 चरणबद्ध प्रक्रिया 1552
44.5 उदाहरण 1554
44.5.1 उदाहरण 44.1: फ्रेम 1554
44.5.2 उदाहरण 44.3: ट्रस 1565

44.1 उद्देश्य

1 अब तक हमने एक “हस्तचालित” प्रक्रिया द्वारा लंबकोणीय संरचनाओं के लिए प्रत्यक्ष दृढता विधि प्रस्तुत की है और मुक्त (अर्थात् अनवरुद्ध) स्वतंत्रता-कोटियों के पदों में वैश्विक दृढता आव्यूह का समंजन किया है। हमने विभिन्न अवयव प्रकारों के रूपांतरण आव्यूह भी प्रस्तुत किए हैं और $\mathbf{K}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)T}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}$ द्वारा प्रणाली (अर्थात् वैश्विक) निर्देशांक प्रणाली में अवयव दृढता आव्यूह निर्धारित कर सकते हैं।

2 यह अध्याय प्रत्यक्ष दृढता विधि का सामान्यीकरण इस प्रकार करेगा कि वह

1. स्वेच्छ संरचनात्मक ज्यामितियों (अर्थात् गैर-लंबकोणीय) पर विचार करे।
2. *संवर्धित दृढता आव्यूह* के उपयोग द्वारा प्रतिक्रियाएँ निर्धारित करे।
3. प्रक्रिया को पूर्णतः स्वचालित करने (अर्थात् कंप्यूटर प्रोग्राम लिखने) के कलनविधियों का वर्णन करे।

44.2 सिद्धांत

3 पहले, अध्याय 42 में, हमने केवल सक्रिय (अर्थात् अनवरुद्ध) स्वतंत्रता-कोटियों के अनुरूप लघुकृत दृढता आव्यूह का समंजन किया था। नोडीय विस्थापन निर्धारित करने के लिए इसी आव्यूह का प्रतिलोम लिया गया था (अथवा अधिक उचित रूप में उसका अपघटन किया गया था)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4 सामान्यीकरण में हम *सभी* स्वतंत्रता-कोटियों (अवरुद्ध अथवा अनवरुद्ध) के पदों में *संवर्धित* दृढता आव्यूह का समंजन करना चाहते हैं।

5 इसके बाद हम आव्यूह को दो भागों में विभाजित करेंगे: अधोलिखित "u" उस भाग के लिए जहाँ विस्थापन ज्ञात हैं (शून्य अथवा अन्यथा), और t उस भाग के लिए जहाँ भार ज्ञात हैं, सारणी 40.2।

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}_t\checkmark\\\hline\mathbf{R}_u?\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}_{tt}&\mathbf{K}_{tu}\\\hline\mathbf{K}_{ut}&\mathbf{K}_{uu}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\Delta}_t?\\\hline\boldsymbol{\Delta}_u\checkmark\end{array}\right\}\tag{44.1}$$

हम ध्यान देते हैं कि $\mathbf{K}_{tt}$ संरचनात्मक दृढता आव्यूह के अनुरूप है।

6 §40.8 के संदर्भ में ध्यान दें कि दोनों प्रकार के भार (अथवा विस्थापन) *अनिवार्य* और *प्राकृतिक* परिसीमा प्रतिबंधों के अनुरूप हैं।

7 प्रथम समीकरण अज्ञात विस्थापनों की गणना संभव बनाता है। ध्यान दें कि इसके लिए (अभिकलनीय रूप से महँगा) आव्यूह-प्रतिलोमन आवश्यक है (यहाँ अपघटन अधिक उपयुक्त शब्द होगा)।

$$\boldsymbol{\Delta}_t=\mathbf{K}_{tt}^{-1}\left(\mathbf{P}_t-\mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u\right)$$

8 द्वितीय समीकरण प्रतिक्रियाओं की गणना संभव बनाता है

$$\mathbf{R}_u=\mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_t+\mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$$

यह केवल आव्यूह-गुणन है।

9 आंतरिक अभिलेख-प्रबंधन के लिए, चूँकि हम *संवर्धित* दृढता आव्यूह का समंजन कर रहे हैं, हम दो चरणों में आगे बढते हैं:

1. पहले सभी वैश्विक अनवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियों को क्रमांकित करें
2. फिर सभी वैश्विक अवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियों (अर्थात् जिनके विस्थापन ज्ञात हैं—शून्य अथवा अन्यथा) को अलग से क्रमांकित करके -1 से गुणा करें; इससे आगे चलकर अवरुद्ध और अनवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियों में भेद किया जा सकेगा।

10 अंततः अवयव आंतरिक बल (अक्षीय तथा अपरूपण बल और सदस्य के प्रत्येक सिरे पर आघूर्ण) इससे निर्धारित किए जाते हैं

$$p_{int}^{(e)}=\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

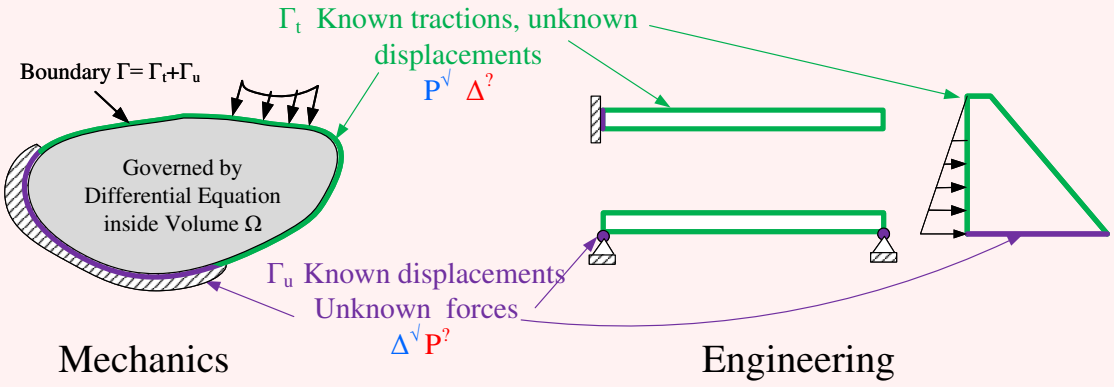
अवयव स्तर पर, जहाँ $p_{int}^{(e)}$ आंतरिक बलों का छह गुणा छह व्यूह है, $\mathbf{k}^{(e)}$ स्थानीय निर्देशांक प्रणालियों में अवयव दृढता आव्यूह है और $\boldsymbol{\delta}^{(e)}$ स्थानीय निर्देशांक प्रणाली में नोडीय विस्थापनों का सदिश है। ध्यान दें कि यह अंतिम व्यूह पहले वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में विस्थापनों की पहचान करके और फिर स्थानीय निर्देशांक प्रणाली में विस्थापन प्राप्त करने हेतु रूपांतरण आव्यूह से उसका पूर्वगुणन करके प्राप्त होता है।

11 ध्यान देना चाहिए कि समीकरण 44.1 में संवर्धित दृढता आव्यूह $\mathbf{K}$ की कोटि r, n से कम है, जबकि $\mathbf{K}_{tt}$ के लिए $r=n$ है (§L.3.1)।

12 यह अंतिम प्रक्रिया सतत परिमित अवयवों में प्रतिबल पुनर्प्राप्ति के समान है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 44.1: प्रत्यक्ष दृढता विधि का मर्म



- वैश्विक निर्देशांक प्रणाली

$$\mathbf{K}^e = \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{k}^e \boldsymbol{\Gamma}$$

$$\mathbf{K}^S = \sum_{e=1}^{e=nelem} \mathbf{K}^e$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_t^{\checkmark} \\ \hline \mathbf{R}_u^{?} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu} \\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu} \end{array} \right]}_{\text{Augmented Stiffness Matrix}} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Delta}_t^{?} \\ \hline \boldsymbol{\Delta}_u^{\checkmark} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{K}_{tt} = \mathbf{f}^{-1};\ \text{Reduced Stiffness Matrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1} \underbrace{(\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u)}_{\mathbf{P}'_t}$$

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$$

- स्थानीय निर्देशांक प्रणाली

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)} \boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

$$p_{int}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

स्पष्टता के लिए $\mathbf{P}_{el}$ का प्रभाव सम्मिलित नहीं किया गया है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

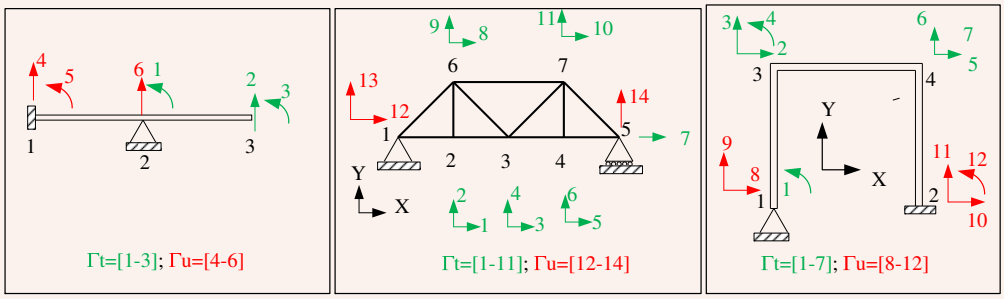
44.3 विविक्तीकरण

44.3.1 अनवरुद्ध और अवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियाँ

13 पहले हमने केवल अनवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियों (Γ_t) से संबद्ध वैश्विक स्वतंत्रता-कोटियों को अंकित किया था और फिर संबद्ध *लघुकृत* संरचना दृढता आव्यूह का प्रतिलोम लेकर विस्थापनों के लिए हल किया था।

14 प्रत्यक्ष दृढता विधि के सामान्यीकरण, समीकरण 44.1, में हम पहले Γ_t के अनुदिश स्वतंत्रता-कोटियाँ और फिर Γ_u के अनुदिश स्वतंत्रता-कोटियाँ अंकित करेंगे (सारणी 40.2 से ये क्रमशः न्यूमन/अनिवार्य और डिरिख्ले/प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंधों के अनुरूप होंगे)।

15 इससे *संवर्धित* दृढता आव्यूह प्राप्त होगा। क्रमांकन-क्रम चित्र 44.1 में दर्शाया गया है और स्वतः स्पष्ट है।



चित्र 44.1: अनवरुद्ध और अवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियाँ

44.3.2 संरचनात्मक विविक्तीकरण

16 प्रत्यक्ष दृढता विधि का अनुप्रयोग संरचना के उचित गणितीय विविक्तीकरण पर निर्भर करता है, सारणी 44.1।

तालिका 44.1: संरचनाओं का विविक्तीकरण

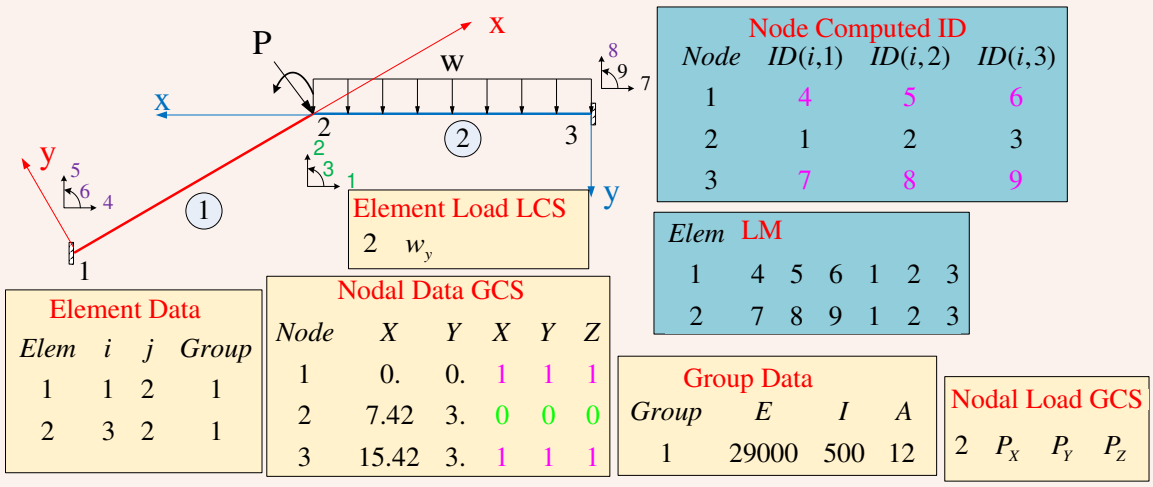
नोड	निर्देशांक	परिसीमा प्रतिबंध	भार
सदस्य	संयोजकता	प्रकार	भार
अवयव प्रकार	ज्यामितीय विशेषताएँ	प्रत्यास्थ गुण	

17 किसी संरचना के संख्यात्मक प्रतिरूपण के लिए आवश्यक है कि हम उसका गणितीय वर्णन कर सकें: ज्यामिति, परिसीमा प्रतिबंध, संयोजकता, अवयवों के गुण और भार।

18 इसे चित्र 44.2 में दर्शाए गए उदाहरण द्वारा सर्वोत्तम रूप से समझाया जा सकता है।

19 उपयोगकर्ता को निचले “सुनहरे” खानों में आँकड़े परिभाषित करने हैं। अधिक स्पष्टतः

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 44.2: संरचनात्मक विविक्तीकरण का उदाहरण

अवयव आँकड़े अवयव द्वारा जुड़े प्रथम और द्वितीय नोड (क्रम अप्रासंगिक है) तथा समूह क्रमांक परिभाषित करते हैं।

नोडीय आँकड़े प्रत्येक नोड के लिए परिभाषित करते हैं: a) वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में 2 अथवा 3 निर्देशांक; b) प्रत्येक संबद्ध स्वतंत्रता-कोटि के परिसीमा प्रतिबंध (खाना 40.2 देखें)। 0 का अर्थ मुक्त स्वतंत्रता-कोटि और 1 का अर्थ ज्ञात संबद्ध विस्थापन (अनिवार्यतः शून्य नहीं) है।

समूह आँकड़े प्रत्येक समूह क्रमांक के लिए प्रत्यास्थ और परिच्छेदीय गुण परिभाषित करते हैं।

नोडीय भार उन नोडों को सूचीबद्ध करता है जिन पर उनकी प्रत्येक वैश्विक स्वतंत्रता-कोटि के अनुदिश बिंदु भार है।

अवयव भार उन अवयवों को सूचीबद्ध करता है जिन पर सदस्य के अनुदिश भार है।

44.4 कंप्यूटर कार्यान्वयन

20 संरचना के पूर्ण विविक्तीकरण के बाद और सामान्यीकृत प्रत्यक्ष दृढता विधि (§44.2) के अनुसार यहाँ से कंप्यूटर प्रोग्राम कार्य सँभालता है।

21 विधि का एक MATLAB®कार्यान्वयन (2D फ्रेमों के लिए) §I.2.7 में दिया गया है।

44.4.1 परिसीमा प्रतिबंध, [id] आव्यूह

22 परिसीमा प्रतिबंधों के कारण संरचना में *सक्रिय* (अर्थात् अनवरुद्ध) स्वतंत्रता-कोटियों की कुल संख्या, नोडों की संख्या और प्रति नोड स्वतंत्रता-कोटियों की संख्या के गुणनफल से कम होगी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

23 किसी दिए गए नोड की वैश्विक स्वतंत्रता-कोटि प्राप्त करने के लिए एक [ID] आव्यूह इस प्रकार परिभाषित करना होगा कि:

ID के आयाम $l \times k$ हैं, जहाँ l प्रति नोड स्वतंत्रता-कोटियों की संख्या और k नोडों की संख्या है।

ID आव्यूह को शून्य से आरंभित किया जाता है।

1. निवेश चरण में प्रत्येक नोड की प्रत्येक स्वतंत्रता-कोटि के लिए ID(idof,inod) इस प्रकार पढ़ें कि:

$$\texttt{ID}(\texttt{idof},\texttt{inod}) = \begin{cases} 0 & \text{if unrestrained d.o.f.} \\ 1 & \text{if restrained d.o.f.} \end{cases}$$

2. सभी नोडीय परिसीमा प्रतिबंध पढ़े जाने के बाद समीकरण क्रमांक क्रमशः निर्दिष्ट करें

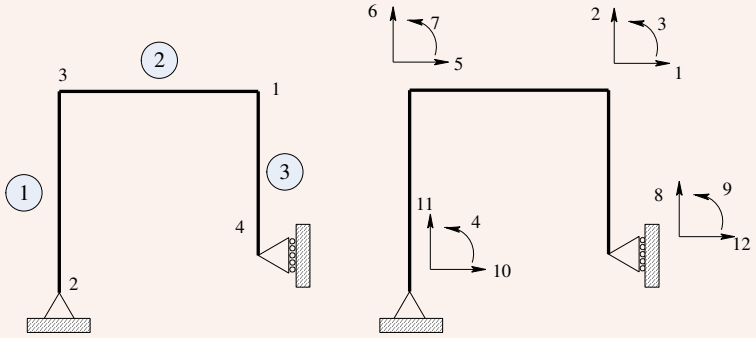
   (a) पहले सभी सक्रिय स्वतंत्रता-कोटियों को

   (b) फिर अन्य (अवरुद्ध) स्वतंत्रता-कोटियों को, -1 से आरंभ करते हुए (अथवा वैकल्पिक रूप से अंतिम अनवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटि के बाद क्रमवृद्धि जारी रखें)।

   ध्यान दें कि स्वतंत्रता-कोटियों की कुल संख्या नोडों की संख्या और प्रति नोड स्वतंत्रता-कोटियों की संख्या के गुणनफल NEQA के बराबर होगी।

3. सबसे बड़ा *धनात्मक* वैश्विक स्वतंत्रता-कोटि क्रमांक NEQ (समीकरणों की संख्या) के बराबर होगा; यही उस वर्ग आव्यूह का आकार है जिसका अपघटन करना होगा।

24 उदाहरणार्थ चित्र 44.3 में दर्शाए गए फ्रेम के लिए:



चित्र 44.3: [**ID**] आव्यूह निर्धारण का उदाहरण

1. मूल **ID** आव्यूह होगा

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. वैश्विक स्वतंत्रता-कोटियाँ (अथवा *समीकरण क्रमांक*) निर्दिष्ट करने के बाद हमारे पास होगा:

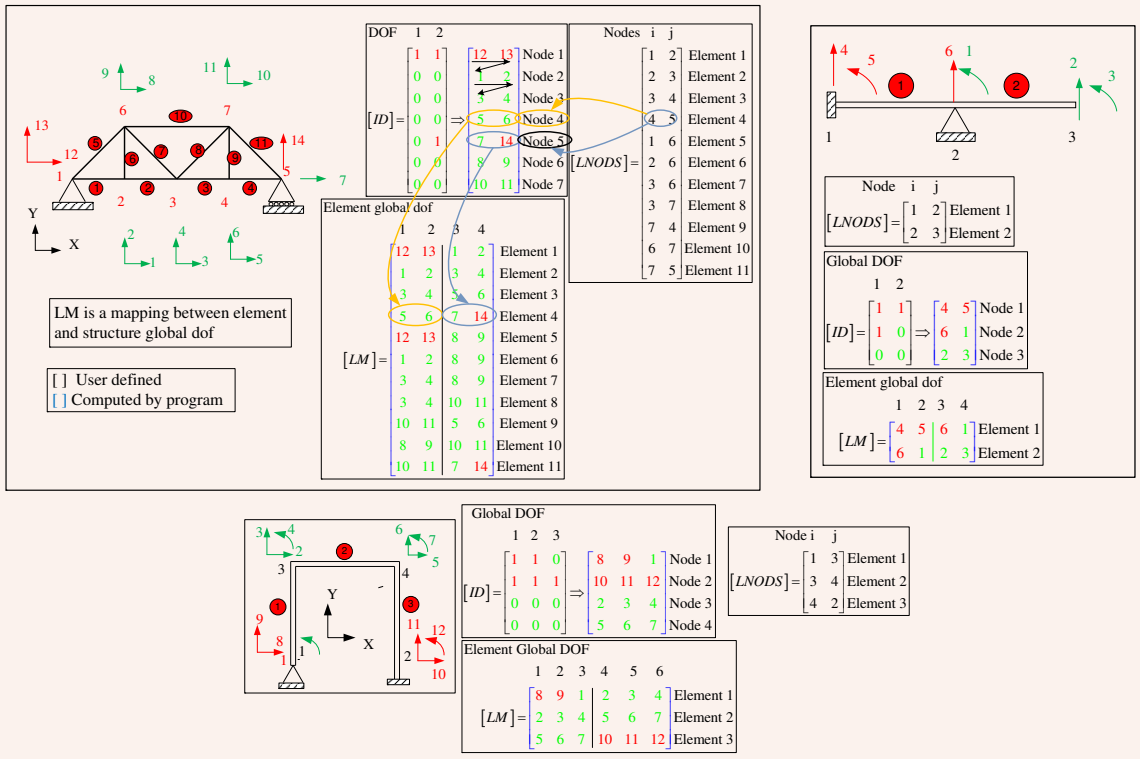
$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -10 & -11 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ -12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

44.4.2 LM सदिश

25 **LM** *स्थान आव्यूह* प्रत्येक सदस्य के लिए स्थानीय और वैश्विक स्वतंत्रता-कोटियों के बीच एक प्रतिचित्रण है। चित्र 44.3 में दर्शाई संरचना के लिए हमारे पास होगा:

$$\mathbf{LM} = \begin{bmatrix} -10 & -11 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

26 **LM** आव्यूह, जो चित्र 44.1 में दर्शाई संरचनाओं के अनुरूप हैं, चित्र 44.4 में दर्शाए गए हैं।



चित्र 44.4: **LM** निर्धारणों के उदाहरण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

44.4.3 वैश्विक दृढता आव्यूह का समंजन

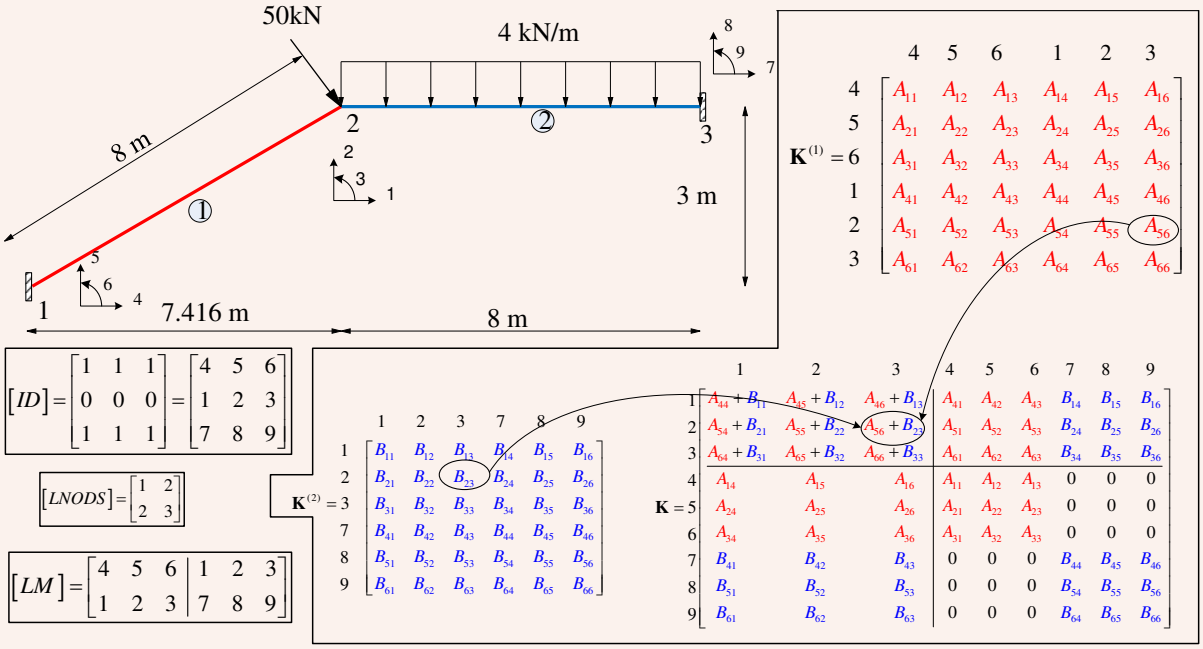
27 इसके बाद संवर्धित (अथवा वैश्विक) दृढता आव्यूह $\mathbf{K}$ का समंजन, वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में सभी पृथक अवयव दृढता आव्यूहों ($\mathbf{K}^{(e)}$) से किया जाता है। यह अनुभाग समंजन की एक प्रचलित प्रक्रिया का वर्णन करेगा, जबकि एक वैकल्पिक विधि (सर्वांगसम रूपांतरण) §46.5 में दी जाएगी।

28 प्रत्येक K_{ij} पद के लिए हम उन सभी अवयवों का योगदान जोड़ेंगे जो स्वतंत्रता-कोटि i को स्वतंत्रता-कोटि j से जोड़ सकते हैं। यह **LM** आव्यूह द्वारा किया जाएगा।

29 पहले वैश्विक दृढता आव्यूह $\mathbf{K}^S = \mathbf{0}$ को आरंभित करना चाहिए, फिर सभी अवयवों पर पुनरावृत्ति करके **LM** आव्यूह के माध्यम से समंजन करना चाहिए।

$$K_{ij}^{(e)} \rightarrow K_{st}^{(S)} \quad \text{and} \quad \begin{cases} s = LM(e,i) \\ t = LM(e,j) \end{cases}$$

30 चित्र 44.5, चित्र 44.2 में दर्शाए गए फ्रेम की समंजन प्रक्रिया दर्शाता है।



चित्र 44.5: वैश्विक दृढता आव्यूह के समंजन की प्रक्रिया

31 ध्यान दें कि वैश्विक दृढता आव्यूह के समंजन की एक वैकल्पिक विधि भी है, जो *सर्वांगसम रूपांतरण उपागम* पर आधारित है, §46.5।

44.4.4 चरणबद्ध प्रक्रिया

32 प्रत्यक्ष दृढता विधि का कलनविधि चरणबद्ध रूप में वर्णित है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रारंभिक कार्य

1. संरचना का गणितीय प्रतिरूप पढ़ें (प्रकार, निर्देशांक, संयोजकता, अनुप्रस्थ-काट और सामग्री गुण, भार)
2. नोडों की संख्या (`nnode`), अवयवों की संख्या (`nelem`), प्रति नोड स्वतंत्रता-कोटियों की अधिकतम संख्या (`ndofpn`), K_{tt} का आकार (`sizet`), स्वतंत्रता-कोटियों की कुल संख्या (`ndoft`) निर्धारित करें, **ID** को अद्यतन करें और **LM** आव्यूह निर्धारित करें

विश्लेषण, वैश्विक

1. प्रत्येक अवयव के लिए निर्धारित करें
   (a) स्थानीय अवयव से वैश्विक संरचना स्वतंत्रता-कोटियों का प्रतिचित्रण करने वाला सदिश **LM**।
   (b) अवयव दृढता आव्यूह $[\mathbf{k}^{(e)}]$
   (c) रूपांतरण आव्यूह $[\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]$
   (d) वैश्विक निर्देशांकों में अवयव दृढता आव्यूह $[\mathbf{K}^{(e)}] = [\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]^T[\mathbf{k}^{(e)}][\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]$
2. अनवरुद्ध और अवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियों के संवर्धित दृढता आव्यूह $[\mathbf{K}^{(S)}] = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{k}^{(e)}$ का समंजन करें।
3. $[\mathbf{K}_{tt}]$ को $[\mathbf{K}^{(S)}]$ से निकालें और उसका प्रतिलोम लें।
4. भार सदिश
   (a) प्रत्येक अवयव के नोडीय समतुल्य बल सदिशों की स्थानीय निर्देशांक प्रणाली में $\mathbf{p}_{El}^{(e)}$ और वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में $\mathbf{P}_{El}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^T}\mathbf{p}_{El}^{(e)}$ गणना करें
   (b) नोडीय भार और नोडीय समतुल्य बल सम्मिलित करने के लिए नोडीय भार सदिश का समंजन करें (ध्यान दें कि $\mathbf{P}$ संरचना के लिए है)। $\mathbf{P}_t = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{P}_{El}^{(e)} + \mathbf{P}_{nodes}(LM^{(e)}(i)); \forall LM^{(e)} \leq \text{size}(K_{tt})$
5. पश्च-प्रतिस्थापन करके वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में नोडीय विस्थापन $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}_t$ प्राप्त करें
6. $\mathbf{K}_{ut}$ निकालें
7. $\mathbf{P}_R$ निर्धारित करें, जो इसे संगृहीत करेगा

$$\mathbf{P}_R(\text{1:ndof-sizet}) = \sum_{e=1}^{nelem} \Gamma^{(e)}\mathbf{p}_{el}^{(e)}; \forall LM^{(e)} > \text{size}(K_{tt})$$

   ये उन स्थिर स्वतंत्रता-कोटियों के लिए वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में रूपांतरित अवयव भार हैं। अतः ये प्रतिक्रिया को प्रभावित करेंगे।
8. प्रतिक्रियाओं के लिए हल करें, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u - \mathbf{P}_R$

बल पुनर्प्राप्ति, स्थानीय (आंतरिक बल): प्रत्येक अवयव के लिए

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

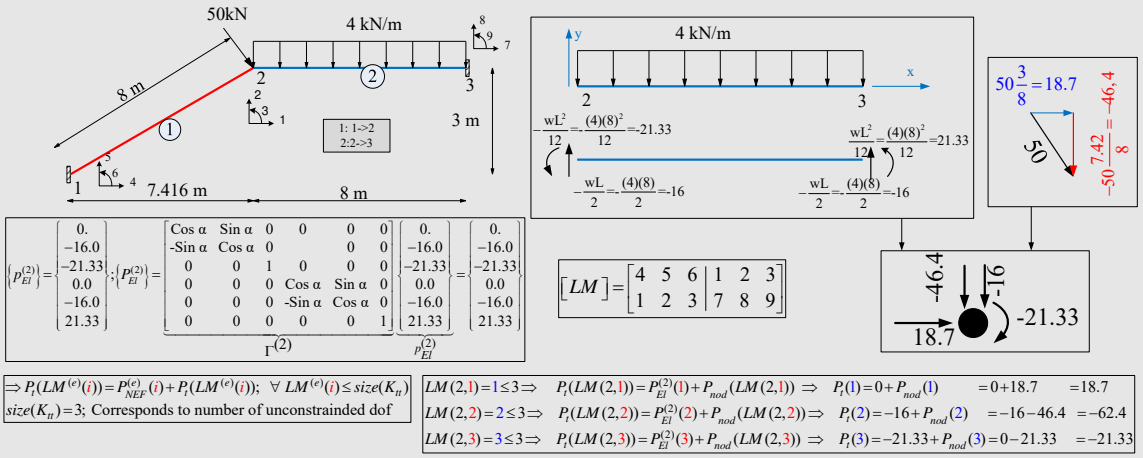
1. वैश्विक नोडीय विस्थापनों से वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में अवयव नोडीय विस्थापन निर्धारित करें
2. इसके नोडीय विस्थापन को वैश्विक से स्थानीय निर्देशांकों में रूपांतरित करें $\boldsymbol{\delta}^{(e)} = [\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$।
3. आंतरिक बल निर्धारित करें $\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)} - \mathbf{p}_{El}^{(e)}$.

44.5 उदाहरण

44.5.1 उदाहरण 44.1: फ्रेम

हम पूर्व में अध्ययन किए गए सरल फ्रेम पर पुनः विचार करते हैं और उसका संपूर्ण चरण-दर-चरण समाधान प्रस्तुत करते हैं। मध्यवर्ती मान उपयोगकर्ताओं को अपने कोड में त्रुटि-निवारण करने में सहायता देने के लिए आवश्यक होंगे (और इस समस्या का एक MATLAB®समाधान §I.2.6 में दिया गया है)।

44.5.1.1 प्रारंभिक विवरण



$$\left\{p_{El}^{(2)}\right\}=\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix};\left\{P_{El}^{(2)}\right\}=\underbrace{\begin{bmatrix}\text{Cos }\alpha & \text{Sin }\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ \text{-Sin }\alpha & \text{Cos }\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \text{Cos }\alpha & \text{Sin }\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & \text{-Sin }\alpha & \text{Cos }\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\Gamma^{(2)}}\underbrace{\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix}}_{p_{El}^{(2)}}=\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix}$$

$$[LM]=\begin{bmatrix}4&5&6&1&2&3\\1&2&3&7&8&9\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow P_t(LM^{(e)}(i)) = P_{NEF}^{(e)}(i) + P_t(LM^{(e)}(i));\ \forall\, LM^{(e)}(i) \le size(K_u)$
$size(K_u) = 3$; Corresponds to number of unconstrainded dof

$LM(2,1)=1\le 3 \Rightarrow\ P_t(LM(2,1)) = P_{El}^{(2)}(1) + P_{nod}(LM(2,1)) \Rightarrow\ P_t(1) = 0 + P_{nod}(1) = 0 + 18.7 = 18.7$
$LM(2,2)=2\le 3 \Rightarrow\ P_t(LM(2,2)) = P_{El}^{(2)}(2) + P_{nod}(LM(2,2)) \Rightarrow\ P_t(2) = -16 + P_{nod}(2) = -16 - 46.4 = -62.4$
$LM(2,3)=3\le 3 \Rightarrow\ P_t(LM(2,3)) = P_{El}^{(2)}(3) + P_{nod}(LM(2,3)) \Rightarrow\ P_t(3) = -21.33 + P_{nod}(3) = 0 - 21.33 = -21.33$

दृढता आव्यूह $\mathbf{k}^{(e)}$

$$k_1 = k_2 = 10^5 \begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रूपांतरण आव्यूह Γ

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0.9270 & 0.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3750 & 0.9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9270 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3750 & 0.9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

दृढता आव्यूह $\mathbf{K}^{(e)} \leftarrow \mathbf{k}^{(e)}$

$$[K_1] = [\Gamma_1]^T [k_1] [\Gamma_1] = 10^5 \begin{bmatrix} 1.2904 & 0.5182 & -0.0141 & -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ 0.5182 & 0.2190 & 0.0348 & -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.2000 & 0.0141 & -0.0348 & 0.100 \\ -1.2904 & -0.5182 & 0.0141 & 1.2904 & 0.5182 & 0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & -0.0348 & 0.5182 & 0.2190 & -0.0348 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.100 & 0.0141 & -0.0348 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = [\Gamma_2]^T [k_2] [\Gamma_2] = 10^5 \begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

वैश्विक दृढता आव्यूह का संयोजन

$$[K_{Aug}] = \begin{bmatrix} K_{tt} & K_{tu} \\ K_{ut} & K_{uu} \end{bmatrix}$$

$$= 10^5 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7904 & 0.5182 & 0.0141 \\ 0.5182 & 0.2284 & 0.0027 \\ 0.0141 & 0.0027 & 0.400 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & 0.0141 & -1.5000 & 0 & 0 \\ -0.5182 & -0.2190 & -0.0348 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ 0.0141 & -0.0348 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1.2904 & 0.5182 & -0.0141 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5182 & 0.2190 & 0.0348 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.2000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बल सदिश

$$p_{el}{}^{(1)(2)} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}$$

$$P_{el}{}^{(2)} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{p_{El}} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 18.75 \\ -46.35 \\ 0.0 \end{Bmatrix}}_{P_{Nodes}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{El}} = \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix}$$

विस्थापन

$$\{\Delta\} = [K_{tt}]^{-1} \{P\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 2.7904 & 0.5182 & 0.0141 \\ 0.5182 & 0.2284 & 0.0027 \\ 0.0141 & 0.0027 & 0.400 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix}$$

$$= 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0619 & -0.1405 & -0.0012 \\ -0.1405 & 0.7567 & -0.0002 \\ -0.0012 & -0.0002 & 0.2500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

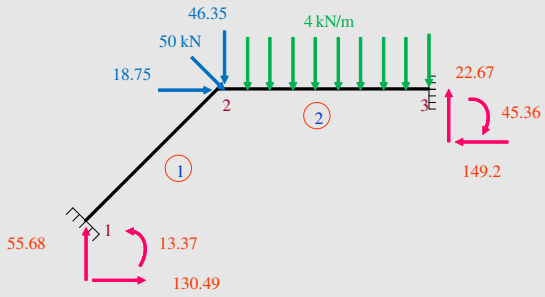
प्रतिक्रियाएँ

$$\{\mathbf{R}\} = [\mathbf{K}_{ut}]\{\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ 0.0141 & -0.0348 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ -16.00 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{El}^{(2)}}$$

$$= \begin{Bmatrix} 130.49 \\ 55.676 \\ 13.374 \\ -149.24 \\ 22.673 \\ -45.35 \end{Bmatrix}$$

जाँच



$$\Sigma F_x = 130.49 - 149.2 + 18.75 = 0.04 \checkmark$$
$$\Sigma F_y = 55.68 + 22.67 - 46.35 - (4)(8) = 0.0 \checkmark$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्थानीय विस्थापन $\delta \leftarrow \Delta$

$$[\delta_1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9270 & 0.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3750 & 0.9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9270 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3750 & 0.9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}}_{\text{Transformation Matrix}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Global Displ.}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0009 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}}$$

$$[\delta_2] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Transformation Matrix}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Global Disp}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आंतरिक बल

$$[p_1] = 10^5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}}_{\text{Element Stiffness Matrix, Local Coord.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp.}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix}}_{P_{EI}^{(1)}}$$

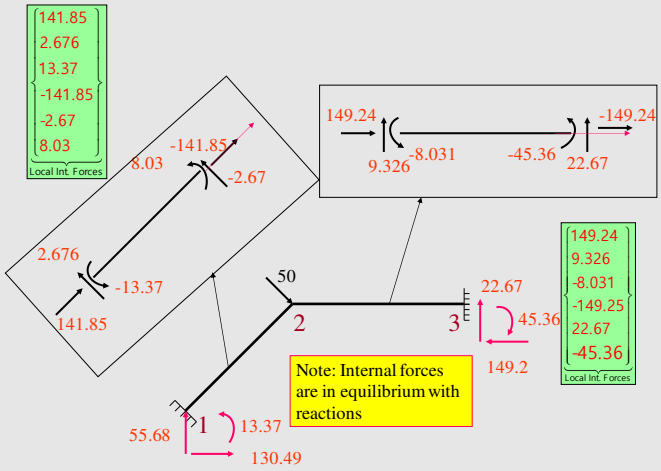
$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} 141.85 \\ 2.676 \\ 13.37 \\ -141.85 \\ -2.67 \\ 8.03 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Int. Forces}}$$

$$[p_2] = 10^5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}}_{\text{Element Stiffness Matrix Local Coord.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -16.00 \\ -21.33 \\ 0.00 \\ -16.00 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{EL}^{(2)}}$$

$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} 149.24 \\ 9.326 \\ -8.031 \\ -149.25 \\ 22.67 \\ -45.36 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Int. Forces}}$$

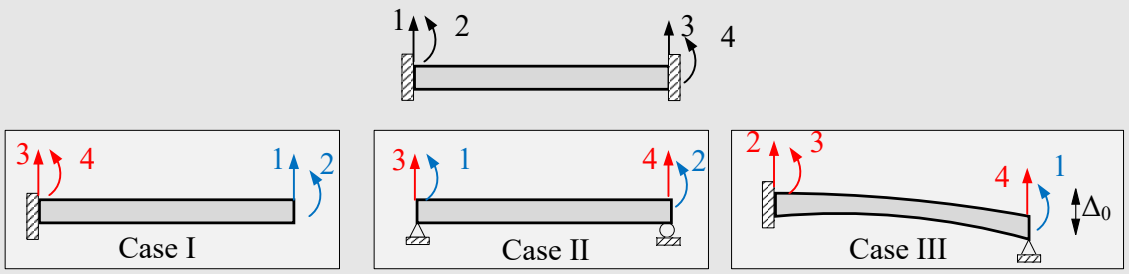
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंतिम मुक्त-पिंड आरेख



उदाहरण 44.2: धरन

यह उदाहरण प्रत्यक्ष दृढता विधि को रेखांकित करने के साथ-साथ यह भी दर्शाता है कि आंतरिक आँकड़ों को एक संहत कंप्यूटर कोड में किस प्रकार संग्रहीत किया जा सकता है।



धरन अवयव का पूर्ण दृढता आव्यूह निम्नलिखित है

$$[\mathbf{k}^e] = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

जैसा कि हम जानते हैं, यह आव्यूह एकवाची है; इसकी कोटि 2 और क्रम 4 है (क्योंकि इसमें 2 दृढ-पिंड गतियाँ भी समाहित हैं)। फिर भी ऊपर दिए गए तीन प्रकरणों पर विचार करके इसका विश्लेषण किया जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I केंटिलीवर धरन/बिंदु भार

1. अवयव दृढता आव्यूह है

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & -4 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. संवरि्धत संरचना दृढता आव्यूह संयोजित किया जाता है

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

3. वैशि्वक आव्यूह को इस प्रकार पुनरि्लखित किया जा सकता है

$$\left\{\begin{array}{c} -P\checkmark \\ 0\checkmark \\ \hline R_3? \\ R_4? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} 12EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \Delta_1? \\ \theta_2? \\ \hline \Delta_3\checkmark \\ \theta_4\checkmark \end{array}\right\}$$

4. $\mathbf{K}_{tt}$ का व्युत्क्रम निकाला जाता है (अथवा वास्तव में इसका अपघटन किया जाता है) और इसे उसी वैशि्वक आव्यूह में संग्रहीत किया जाता है

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{L^2/2EI} & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ \boxed{L^2/2EI} & \boxed{L/EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right]$$

5. इसके बाद हम समतुल्य भार, $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\Delta_u$, की गणना करते हैं और $\mathbf{P}_t$ को $\mathbf{P}'_t$ से अधिलेखित करते हैं

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\Delta_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & L^2/2EI & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{-6EI/L^2} \\ L^2/2EI & L/EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} -P \\ 0 \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6. अब हम विस्थापन $\Delta_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$ के लिए हल करते हैं और $\mathbf{P}_t$ को Δ_t से अधिलेखित करते हैं

$$\left\{\begin{array}{c}\boxed{\Delta_1}\\ \boxed{\theta_2}\\ \hline 0\\ 0\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{L^2/2EI} & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ \boxed{L^2/2EI} & \boxed{L/EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\boxed{-P}\\ \boxed{0}\\ \hline 0\\ 0\end{array}\right\} r$$

$$= \left\{\begin{array}{c}\boxed{-PL^3/3EI}\\ \boxed{-PL^2/2EI}\\ \hline 0\\ 0\end{array}\right\}$$

7. अंततः हम प्रतिक्रियाओं, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\Delta_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\Delta_u$, के लिए हल करते हैं और Δ_u को $\mathbf{R}_u$ से अधिलेखित करते हैं

$$\left\{\begin{array}{c}-PL^3/3EI\\ -PL^2/2EI\\ \hline \boxed{R_3}\\ \boxed{R_4}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & L^2/2EI & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ L^2/2EI & L/EI & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{4EI/L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\boxed{-PL^3/3EI}\\ \boxed{-PL^2/2EI}\\ \hline \boxed{0}\\ \boxed{0}\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c}-PL^3/3EI\\ -PL^2/2EI\\ \hline \boxed{P}\\ \boxed{PL}\end{array}\right\}$$

II सरल आलंबित धरन/अंत्य आघूर्ण

1. अवयव दृढता आव्यूह है

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & 1 & -4 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. संवरि्धत संरचना दृढता आव्यूह संयोजित किया जाता है

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \end{array}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. वैश्विक दृढता आव्यूह को इस प्रकार पुनर्लिखित किया जा सकता है

$$\left\{\begin{array}{c} 0\checkmark \\ M\checkmark \\ \hline R_3? \\ R_4? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} 4EI/L & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_1? \\ \theta_2? \\ \hline \Delta_3\checkmark \\ \Delta_4\checkmark \end{array}\right\}$$

4. $\mathbf{K}_{tt}$ का व्युत्क्रम निकाला जाता है

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{-L/6EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \boxed{-L/6EI} & \boxed{L/3EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right]$$

5. हम समतुल्य भार, $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$, की गणना करते हैं और $\mathbf{P}_t$ को $\mathbf{P}'_t$ से अधिलेखित करते हैं

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & -L/6EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} \\ -L/6EI & L/3EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0 \\ M \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

6. विस्थापनों के लिए हल करें, $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$, और $\mathbf{P}_t$ को $\boldsymbol{\Delta}_t$ से अधिलेखित करें

$$\left\{\begin{array}{c} \boxed{\theta_1} \\ \boxed{\theta_2} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{-L/6EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \boxed{-L/6EI} & \boxed{L/3EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{-ML/6EI} \\ \boxed{ML/3EI} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

7. प्रतिक्रियाओं के लिए हल करें, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$, और $\boldsymbol{\Delta}_u$ को $\mathbf{R}_u$ से अधिलेखित करें

$$\left\{\begin{array}{c} -ML/6EI \\ ML/3EI \\ \hline \boxed{R_1} \\ \boxed{R_2} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & -L/6EI & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ -L/6EI & L/3EI & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline \boxed{6EI/L^2} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{-12EI/L^3} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{12EI/L^3} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{-ML/6EI} \\ \boxed{ML/3EI} \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -ML/6EI \\ ML/3EI \\ \hline \boxed{M/L} \\ \boxed{-M/L} \end{array}\right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

III केंटिलीवर धरन/प्रारंभिक विस्थापन और ज्ञात विस्थापन

1. अवयव दृढता आव्यूह है

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -2 & -3 & -4 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. संवरि्धत संरचना दृढता आव्यूह संयोजित किया जाता है

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. वैश्विक आव्यूह को इस प्रकार पुनरि्लखित किया जा सकता है

$$\left\{\begin{array}{c} M\checkmark \\ \hline R_2? \\ R_3? \\ R_4? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|ccc} 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_1? \\ \hline \Delta_2\checkmark \\ \theta_3\checkmark \\ \Delta_4\checkmark \end{array}\right\}$$

4. $\mathbf{K}_{tt}$ का व्युत्क्रम निकाला जाता है (अथवा वास्तव में इसका अपघटन किया जाता है) और इसे उसी वैश्विक आव्यूह में संग्रहीत किया जाता है

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{L/4EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right]$$

5. इसके बाद हम समतुल्य भार, $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$, की गणना करते हैं और $\mathbf{P}_t$ को $\mathbf{P}'_t$ से अधिलेखित करते हैं

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{c|ccc} L/4EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\Delta^0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{M + 6EI\Delta^0/L^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6. अब हम विस्थापनों के लिए हल करते हैं, $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$, और $\mathbf{P}_t$ को $\boldsymbol{\Delta}_t$ से अधिलेखित करते हैं

$$\begin{Bmatrix} \boxed{\theta_1} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{L/4EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \boxed{M + 6EI\Delta^0/L^2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \boxed{ML/4EI + 3\Delta^0/2L} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{Bmatrix}$$

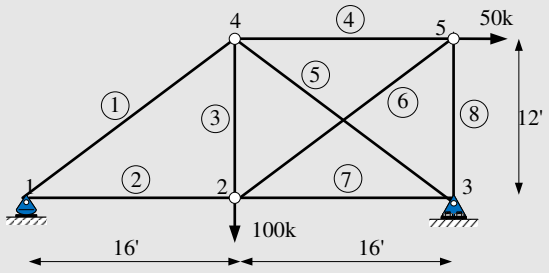
7. अंततः हम प्रतिक्रियाओं के लिए हल करते हैं, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$, और $\boldsymbol{\Delta}_u$ को $\mathbf{R}_u$ से अधिलेखित करते हैं

$$\begin{Bmatrix} ML/4EI + 3\Delta^0/2L \\ \hline \boxed{R_2} \\ \boxed{R_3} \\ \boxed{R_4} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} L/4EI & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} \\ \boxed{2EI/L} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{4EI/L} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} \end{array}\right]$$

$$\begin{Bmatrix} \boxed{ML/4EI + 3\Delta^0/2L} \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\Delta^0} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} ML/4EI + 3\Delta^0/2L \\ \hline \boxed{3M/2L - 3EI\Delta^0/L^3} \\ \boxed{M/2 - 3EI\Delta^0/L^2} \\ \boxed{-3M/2L + 3EI\Delta^0/L^3} \end{Bmatrix}$$

44.5.2 उदाहरण 44.3: ट्रस



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. स्वतंत्रता कोटियाँ और **LM** (संयोजकता: निम्नतर से उच्चतर नोड संख्या तक)

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \\ 9 & 10 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{LM} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

2. अवयव दृढता आव्यूह

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$c = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{L}; \quad s = \sin\alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{L}$

3. प्रतिस्थापन करें

अवयव 1: $L = 20', c = \frac{16-0}{20} = 0.8, s = \frac{12-0}{20} = 0.6, \frac{EA}{L} = \frac{(30{,}000ksi)(10in^2)}{20'} = 15{,}000\ k/ft.$

$$[K_1] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9{,}600 & 7200 & -9{,}600 & -7{,}200 \\ 7{,}200 & 5{,}400 & -7{,}200 & -5{,}400 \\ -9{,}600 & -7{,}200 & 9{,}600 & 7{,}200 \\ -7{,}200 & -5{,}400 & 7{,}200 & 5{,}400 \end{bmatrix} \end{array}$$

अवयव 2: $L = 16'$, $c = 1$, $s = 0$, $\frac{EA}{L} = 18{,}750$ k/ft.

$$[K_2] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18{,}750 & 0 & -18{,}750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18{,}750 & 0 & 18{,}750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

अवयव 3 $L = 12'$, $c = 0$, $s = 1$, $\frac{EA}{L} = 25{,}000\ k/ft$

$$[K_3] = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25{,}000 & 0 & -25{,}000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25{,}000 & 0 & 25{,}000 \end{bmatrix} \end{array}$$

अवयव 8 $L = 12'$, $c = 0$, $s = 1$, $\frac{EA}{L} = 25{,}000\ k/ft$

$$[K_8] = \begin{array}{c} \\ 9 \\ 10 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 9 & 10 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25{,}000 & 0 & -25{,}000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25{,}000 & 0 & 25{,}000 \end{bmatrix} \end{array}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. वैश्विक दृढता आव्यूह को k/ft में संयोजित करें। ध्यान दें कि हम संवरि्धत दृढता आव्यूह को नहीं, बल्कि उसके उप-आव्यूह $[\mathbf{K}_{tt}]$. को संयोजित कर रहे हैं।
5. k/in में परिवरि्तत करके सरलीकृत करें

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2,362.5 & -1,562.5 & 0.00 & -800 & -600 & 0 & 0 \\ & 3,925.0 & 600 & 0 & 0 & -800 & -600 \\ & & 2,533.33 & 0.00 & -2,083.33 & -600 & -450 \\ & & & 3,162.5 & 0 & -1,562.5 & 0 \\ & \text{SYMMETRIC} & & & 2,983.33 & 0 & 0 \\ & & & & & 2,362.5 & 600 \\ & & & & & & 2,533.33 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{tt}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_7 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}_t}$$

6. दृढता आव्यूह का व्युत्क्रम निकालें और विस्थापनों के लिए हल करें

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0223 \text{ in.} \\ 0.00433 \text{ in.} \\ -0.116 \text{ in.} \\ -0.0102 \text{ in.} \\ -0.0856 \text{ in.} \\ -0.00919 \text{ in.} \\ -0.0174 \text{ in.} \end{Bmatrix}$$

7. स्थानीय निर्देशांक तंत्रों में सदस्य के आंतरिक बलों (इस प्रकरण में अक्षीय बलों) के लिए हल करें

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Gamma}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}}}_{\boldsymbol{\delta}}$$

$$= \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

अवयव 1:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^1 = (15,000 \text{ kpf})\left(\frac{1}{12}\frac{\text{ft.}}{\text{in.}}\right)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & -0.6 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.0223 \\ 0.00 \\ -0.0102 \\ -0.0856 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 52.1 \text{ kip} \\ -52.1 \text{ kip} \end{Bmatrix} \text{ Compression}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवयव 2:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^2 = 18,750 \ \text{kpf}\left(\frac{1}{12}\frac{\text{ft}}{\text{in.}}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.0233 \\ 0.00 \\ 0.00433 \\ -0.116 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -43.2 \ \text{kip} \\ 43.2 \ \text{kip} \end{Bmatrix} \ \text{Tension}$$

अवयव 3:

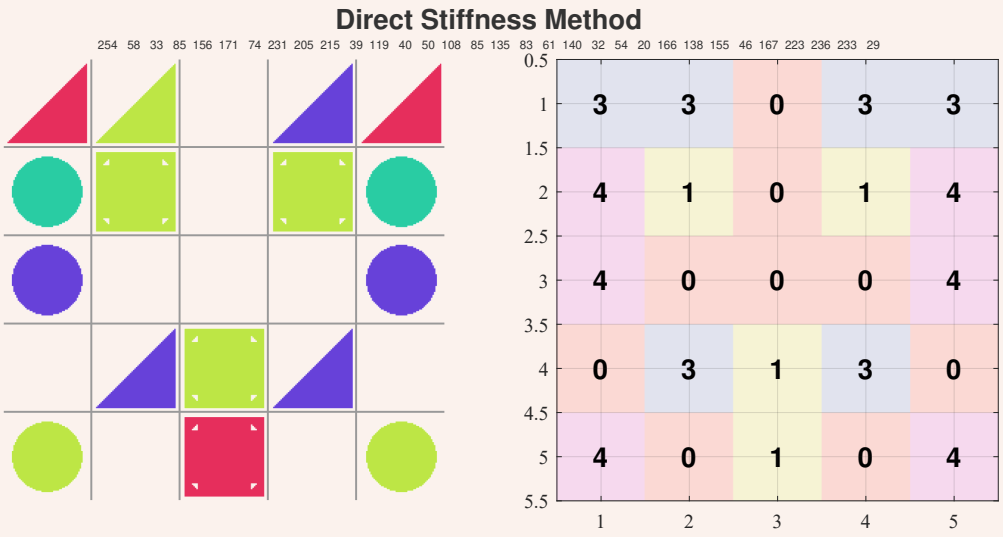
$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^3 = 25,000 \ \text{kpf}\left(\frac{1}{12}\frac{\text{ft.}}{\text{in.}}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.00433 \\ -0.116 \\ -0.0102 \\ -0.0856 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -63.3 \ \text{kip} \\ 63.3 \ \text{kip} \end{Bmatrix} \ \text{Tension}$$

अवयव 4:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^4 = 18,750 \ \text{kpf}\left(\frac{1}{12}\frac{\text{ft.}}{\text{in.}}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.0102 \\ -0.0856 \\ -0.00919 \\ -0.0174 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.58 \ \text{kip} \\ 1.58 \ \text{kip} \end{Bmatrix} \ \text{Tension}$$



अध्याय-विशिष्ट आइडेंटिकॉन, chapter H

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

45 दृढता आव्यूह के गणितीय गुण; अभिकलनीय विषय

सारांश

दृढता आव्यूह केवल विस्थापनों और बलों के बीच का प्रतिचित्रण नहीं है; इसमें अतिरिक्त "अधितथ्य" का समृद्ध भंडार भी निहित होता है, जो समाधान की परिशुद्धता के विषय में विश्लेषक को जानकारी दे सकता है। हम इस अधितथ्य का परीक्षण करेंगे और प्रतिबंध संख्या की संकल्पना प्रस्तुत करेंगे। पहले हम उपर्युक्त प्रतिचित्रण का विस्तार से परीक्षण करेंगे और 2D में निवेश तथा निर्गम सदिशों के बीच संबंधों को दृश्य रूप देंगे। इससे उन उपायों का ज्ञान होगा जिन्हें प्रतिरूपक वैश्विक दृढता आव्यूह की कुप्रतिबद्धता न्यूनतम करने के लिए अपना सकता है। इसके बाद आव्यूह के अपघटन और प्रतिलोमन की तुलना पर एक संक्षिप्त टिप्पणी प्रस्तुत की गई है। अंततः हम लगभग इष्टतम नोड-क्रमांकन पर विचार करेंगे, क्योंकि $\mathbf{K}^{-1}$ निर्धारित करने में अभिकलनीय समय घटाने के लिए इसका अत्यधिक महत्त्व है। यद्यपि ये संकल्पनाएँ आधारभूत समझ के लिए अनिवार्य नहीं हैं, तथापि एक कुशल संरचनात्मक अभियंता के लिए उपयोगी हैं।

45.1 कुप्रतिबद्ध आव्यूह 1569
45.1.1 अभिलक्षणिक मान 1569
45.1.2 प्रतिबंध संख्या 1574
45.1.3 कुप्रतिबद्ध दृढता आव्यूह . . . 1575
45.2 संख्यात्मक विचार 1579
45.2.1 प्रतिलोमन बनाम अपघटन . . . 1579
45.2.2 नोडीय क्रमांकन 1580

यह अध्याय Gavin, 2012 पर आधारित है। दृढता आव्यूहों के गणितीय गुणों की उनकी स्पष्ट और अंतर्दृष्टिपूर्ण विवेचना के लिए लेखक कृतज्ञतापूर्वक आभार व्यक्त करता है। प्रस्तुति को विस्तारित और पुनर्गठित किया गया है, और अनेक संख्यात्मक उदाहरण प्रोफेसर गैविन से उद्भूत हैं।

45.1 कुप्रतिबद्ध आव्यूह

45.1.1 अभिलक्षणिक मान

1 दृढता आव्यूह $[k]$ (अथवा $[K]$) को *विस्थापन सदिश* $\mathbf{u}$ *का बल सदिश* $\mathbf{p}$ *में प्रतिचित्रण* माना जा सकता है। इन सदिशों के संरेखित होने का कोई कारण नहीं है, चित्र 45.1a।

2 उदाहरणार्थ, इसके लिए

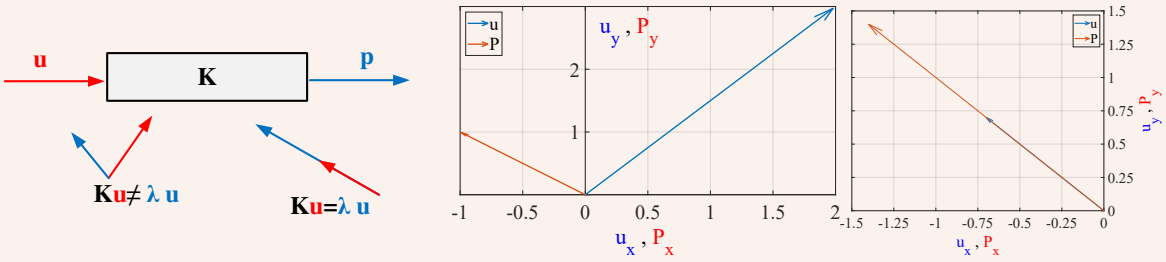
$$\underbrace{\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{truss}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\frac{AE}{L}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}}$$

$\mathbf{u}$ और $\mathbf{p}$ सदिश चित्र 45.1b में दर्शाए गए हैं ($AE/L = 1$ मानते हुए)। दूसरी ओर, इसके लिए

$$\mathbf{k}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अभिलक्षणिक सदिश $\quad -0.707 \quad 0.707 \quad$ है, और इस प्रकरण में $\mathbf{u}$ तथा $\mathbf{p}$ संरेखित हैं, चित्र 45.1c।



(a) प्रतिचित्रण (b) $\mathbf{Ku} \neq \lambda\mathbf{u}$ (c) $\mathbf{Ku} = \lambda\mathbf{u}$

चित्र 45.1: विस्थापनों का बलों में प्रतिचित्रण

[3] एकल सदिश का अनुसरण करने के स्थान पर विस्थापन सदिशों के पूर्ण *समुच्चय* के साथ एक ही समय में क्या होता है, इस पर विचार करके इस प्रतिचित्रण की ज्यामितीय विषयवस्तु को सुस्पष्ट किया जा सकता है। मान लें कि हम एकक लंबाई के प्रत्येक संभव विस्थापन सदिश $\mathbf{u}$ को एकत्र करते हैं, अर्थात् प्रत्येक ऐसा $\mathbf{u}$ जो इसे संतुष्ट करता है

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2 = 1.$$

$N = 2$ के लिए इन सदिशों के अग्रबिंदु एकक वृत्त अंकित करते हैं; सामान्य N के लिए वे एकक अधिगोला अंकित करते हैं। इस समुच्चय के प्रत्येक सदिश पर $\mathbf{K}$ लागू करने—अर्थात् प्रत्येक के लिए $\mathbf{p} = \mathbf{Ku}$ की गणना करने—से बल सदिशों का एक नया समुच्चय प्राप्त होता है। मुख्य ज्यामितीय तथ्य यह है: $\mathbf{K}$ *के अधीन विस्थापनों का एकक गोला बलों के एक दीर्घवृत्तज में प्रतिचित्रित होता है।*

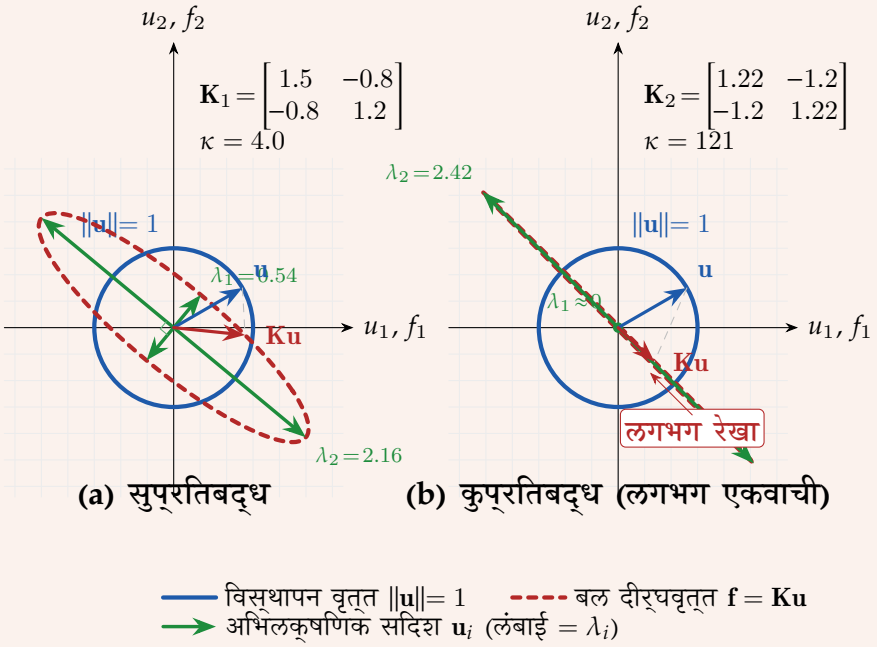
[4] इस बल दीर्घवृत्तज के अर्ध-अक्षों की लंबाइयाँ अभिलक्षणिक मान λ_i हैं, जो ठीक $\mathbf{K}$ के हैं, और उन अर्ध-अक्षों की दिशाएँ संगत अभिलक्षणिक सदिश $\mathbf{u}_i$ हैं। चूँकि वास्तविक सममित आव्यूह के अभिलक्षणिक सदिश परस्पर लंबकोणीय होते हैं, बल दीर्घवृत्तज के प्रधान अक्ष परस्पर लंबवत होते हैं, चित्र 45.2। खंड (a) के सुप्रतिबद्ध उदाहरण में,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0.54, \quad \lambda_2 = 2.16, \quad \kappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 4.0,$$

दोनों अभिलक्षणिक मान धनात्मक हैं और दीर्घवृत्त अपतित नहीं है। ध्यान दें कि $\mathbf{u}$ और $\mathbf{p} = \mathbf{Ku}$ सामान्यतः एक ही दिशा में इंगित *नहीं* करते—वे केवल तभी संपाती होते हैं जब $\mathbf{u}$ किसी अभिलक्षणिक सदिश के साथ संरेखित हो।

[5] **शून्य अथवा लगभग शून्य अभिलक्षणिक मान का ज्यामितीय अर्थ।** यदि कोई अभिलक्षणिक मान ठीक शून्य है, तो बल दीर्घवृत्तज का एक अर्ध-अक्ष एक बिंदु में संकुचित हो जाता है: $N = 2$ के लिए दीर्घवृत्त एक रेखाखंड में अपतित हो जाता है। इसका अर्थ है कि विस्थापन सदिशों का पूरा परिवार—संगत अभिलक्षणिक सदिश $\mathbf{u}_1$ से संरेखित सभी सदिश—*उसी* बल सदिश, अर्थात् शून्य सदिश, में प्रतिचित्रित होता है: $\mathbf{Ku}_1 = \mathbf{0}$. संरचना बिना कोई प्रत्यावर्ती बल विकसित किए विरूपण विधा $\mathbf{u}_1$ से गुजर सकती है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 45.2: एकक विस्थापन वृत्त का बल दीर्घवृत्त में प्रतिचित्रण, (Gavin, 2012)।

यह दृढ-पिंड *गति* अथवा *क्रियाविधि* है, और $\mathbf{K}$ एकवाची है। इसके विपरीत, $\mathbf{K}$ एकवाची होने पर किसी दिए गए बल सदिश के लिए अद्वितीय विस्थापन नहीं होता—समाधान अनिर्धारित होता है।

खंड (b) लगभग एकवाची प्रकरण दर्शाता है

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1.22 & -1.2 \\ -1.2 & 1.22 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0.02, \quad \lambda_2 = 2.42, \quad \kappa = 121.$$

न्यूनतम अभिलक्षणिक मान शून्य नहीं है, किंतु अधिकतम की तुलना में अत्यल्प है। बल दीर्घवृत्त इतना दीर्घित है कि वह लगभग रेखाखंड है: दो अत्यंत भिन्न विस्थापन सदिश $\mathbf{u}$ लगभग समान बल सदिश $\mathbf{p}$ उत्पन्न करते हैं। इसका संख्यात्मक परिणाम यह है कि परिकलित समाधान $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ अविश्वसनीय है—$\mathbf{p}$ में छोटी त्रुटियाँ (पूर्णांकन अथवा भार प्रतिरूपण से) $\mathbf{u}$ में बड़ी त्रुटियाँ उत्पन्न करती हैं।

6 **धनात्मक निश्चितता और संरचनात्मक स्थिरता।** दृढता आव्यूह $\mathbf{K}$ *धनात्मक निश्चित* तभी और केवल तभी होता है जब उसके सभी अभिलक्षणिक मान पूर्णतः धनात्मक हों:

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} > 0 \quad \forall\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_i > 0 \quad \forall\ i.$$

बायाँ पक्ष आंतरिक विकृति ऊर्जा है, जो स्थिर निष्क्रिय संरचना के किसी भी अतुच्छ विरूपण के लिए धनात्मक होनी चाहिए। समतुल्यता सिद्ध करने के लिए $\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$ प्रतिस्थापित करें और इसका उपयोग करें $\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = \sum u_j^2 > 0$:

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \lambda_i\,\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = \lambda_i \sum u_j^2.$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चूँकि $\sum u_j^2 > 0$, इसलिए U की धनात्मकता के लिए $\lambda_i > 0$ आवश्यक है। शून्य अभिलक्षणिक मान दृढ-पिंड विधा (शून्य विकृति ऊर्जा) का संकेत है; ऋणात्मक अभिलक्षणिक मान—जो निष्क्रिय संरचना के लिए भौतिक रूप से असंभव है—ऊर्जा मुक्त करने वाली विधा को सूचित करेगा। इसके अतिरिक्त, चूँकि $\mathbf{K}$ का सारणिक उसके अभिलक्षणिक मानों का गुणनफल है,

$$\det(\mathbf{K}) = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i,$$

धनात्मक निश्चित आव्यूह के लिए $\det(\mathbf{K}) > 0$ होता है और वह प्रतिलोमनीय होता है, जबकि कोई भी शून्य अभिलक्षणिक मान आव्यूह को एकवाची ($\det = 0$) बनाता है।

[7] **कठोर-आव्यूह समस्या।** किसी आव्यूह को संख्यात्मक अर्थ में कठोर कहा जाता है यदि $\kappa(\mathbf{K}) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$, हो, भले ही सभी अभिलक्षणिक मान पूर्णतः धनात्मक हों और आव्यूह औपचारिक रूप से प्रतिलोमनीय हो। कठोर आव्यूह एकवाची नहीं, किंतु कुप्रतिबद्ध होता है: आँकड़ों (भार, निर्देशांक) में परिमाण ε का सापेक्ष विक्षोभ समाधान में परिमाण $\kappa\,\varepsilon$ का सापेक्ष विक्षोभ उत्पन्न कर सकता है। संरचनात्मक विश्लेषण में यह स्थिति प्रायः तब उत्पन्न होती है जब अत्यधिक भिन्न दृढताओं वाले अवयव एक नोड साझा करते हैं—उदाहरणार्थ, किसी लगभग दृढ स्तंभ में जुडती नम्य धरन, अथवा दृढ कडी का प्रतिरूपण करने के लिए कृत्रिम रूप से बहुत बडी दृढता का उपयोग। प्रतिबंध संख्या इस संवेदनशीलता को ठीक-ठीक परिमाणित करती है और अगले अनुभाग में इसकी आगे चर्चा की गई है।

45.1.1.1 अभिलक्षणिक मानों की भौतिक व्याख्या

[8] किसी अवयव में संचित आंतरिक विकृति ऊर्जा इससे निर्धारित की जा सकती है

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{up} = \frac{1}{2}\ \mathbf{uku} \tag{45.1}$$

अब यदि हम ऐसी प्रणाली पर विचार करें जिसमें प्रत्येक नोड पर लगाया गया भार $\{\mathbf{p}\}$, अवयव के नोडीय विस्थापन $\{\mathbf{u}\}$ के गुणक λ द्वारा समानुपाती है, तो: $\mathbf{ku} = \lambda\mathbf{u}$ अथवा $(\mathbf{k} - \lambda[\mathbf{I}])\,\mathbf{u} = 0$।

[9] परिभाषानुसार यह एक *अभिलक्षणिक समस्या* है, और उतने ही अभिलक्षणिक मान λ_i होंगे जितनी स्वतंत्रता-कोटियाँ (अथवा $\mathbf{k}$ में पंक्तियाँ) होंगी। प्रत्येक अभिलक्षणिक मान λ_i के संगत एक अभिलक्षणिक सदिश $\mathbf{u}_i$ होता है।

[10] अभिलक्षणिक सदिशों को इस प्रकार प्रसामान्यीकृत किया जाता है: $\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^t = 1$, अतः

$$\mathbf{u}_i\mathbf{k}\mathbf{u}_i^t = \lambda_i$$

समीकरण 45.1 से तुलना करने पर स्पष्ट है कि

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 45.1: दृढता आव्यूह के अभिलक्षणिक मान

दृढता आव्यूह का अभिलक्षणिक मान λ_i, $\mathbf{u}_i$ द्वारा परिभाषित (प्रसामान्यीकृत) विरूपण से गुजरते अवयव में संचित आंतरिक विकृति ऊर्जा के दुगुने के बराबर है।

दृढ-पिंड गति में सभी नोड समान मात्रा में विस्थापित (अथवा घूर्णित) होते हैं और कोई आंतरिक विकृति नहीं होती। अतः दृढ-पिंड गति में विकृति ऊर्जा U (और इस प्रकार संगत λ) शून्य होनी चाहिए।

जितनी संभव स्वतंत्र दृढ-पिंड गतियाँ (अर्थात् साम्य समीकरणों की संख्या) हों, उतने ही शून्य अभिलक्षणिक मान होने चाहिए। अतः द्विविमीय लैग्रांजी अवयव के लिए दो स्थानांतरण और एक घूर्णन के संगत तीन शून्य अभिलक्षणिक मान होने चाहिए।

बहुत कम शून्य अभिलक्षणिक मान इस बात का संकेत हैं कि अवयव में विकृति-रहित दृढ-पिंड गति की क्षमता नहीं है।

बहुत अधिक शून्य अभिलक्षणिक मान अवांछित क्रियाविधि (अथवा विफलता) के संकेत हैं।

भिन्न सूत्रीकरणों पर आधारित दो समान अवयवों के दृढता आव्यूहों की तुलना में न्यूनतम विकृति ऊर्जा ($\mathbf{trk} = \Sigma\lambda_i$) वाला सर्वोत्तम है।

परिभाषा 45.2: अवयव दृढता आव्यूह की विशेषताएँ

अवयव दृढता आव्यूह में होंगे:

क्रम: स्वतंत्रता-कोटियों की संख्या (अर्थात् आव्यूह के आकार) के अनुरूप।

कोटि: रैखिकतः स्वतंत्र समीकरणों की कुल संख्या के अनुरूप, जो क्रम में से दृढ-पिंड गतियों की संख्या घटाने पर प्राप्त होती है (§L.3.1)।

कोटि न्यूनता: शून्य अभिलक्षणिक मानों की कुल संख्या में से कोटि घटाने के बराबर।

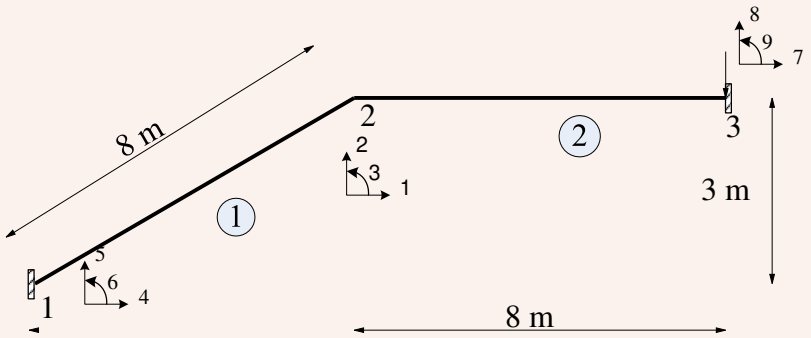
हम आगे समीकरण 46.22 में संवर्धित दृढता का व्यंजक व्युत्पन्न करेंगे:

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

जहाँ $\mathcal{B}$ स्थैतिकी (अथवा साम्य) आव्यूह है, जो बाह्य नोडीय बलों को आंतरिक बलों से संबंधित करता है; $\mathbf{d}$ नम्यता आव्यूह है, और $\mathbf{d}^{-1}$ उसका प्रतिलोम अथवा लघुकृत दृढता आव्यूह है। दृढता आव्यूह स्पष्टतः एकवाची है, क्योंकि दूसरी "पंक्ति" पहली पर रैखिकतः आश्रित है, जबकि नम्यता आव्यूह का प्रतिलोम लघुकृत दृढता आव्यूह एकवाची नहीं है। अतः $\mathcal{B}$ के आकार जितने शून्य अभिलक्षणिक मान होंगे।

उदाहरण के लिए चित्र 45.3 पर विचार करें: और अभिलक्षणिक मानों के संगत समुच्चय निम्नलिखित

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 45.3: अभिलक्षणिक मान परीक्षण समस्या

हैं

$$\lambda_{Kaug} = 10^5\lfloor\ 0.0000\quad 0.0000\quad 0.0000\quad 0.0059\quad 0.1274\quad 0.2201\quad 0.4821\quad 1.6109\quad 4.3911\ \rfloor$$
$$\lambda_{Ktt} = 10^5\lfloor\ 0.1275\quad 0.3999\quad 2.8913\ \rfloor$$
$$\lambda_{k} = 10^5\lfloor\ 0.0000\quad 0.0000\quad 0.0000\quad 0.1000\quad 0.3188\quad 3.0001\ \rfloor$$
$$\lambda_{K^1} = 10^5\lfloor\ 0.0000\quad 0.0000\quad 0.0000\quad 0.1000\quad 0.3188\quad 3.0001\ \rfloor$$
$$\lambda_{K^2} = 10^5\lfloor\ 0.0000\quad 0.0000\quad 0.0000\quad 0.1000\quad 0.3187\quad 3.0000\ \rfloor$$

हम देखते हैं कि संरचना के संवरि्धत दृढता आव्यूह और अवयव दृढता आव्यूह, दोनों के वास्तव में तीन शून्य अभिलक्षणिक मान हैं। दूसरी ओर, दोनों अवयवों के अभिलक्षणिक मान भी स्थानीय निर्देशांक प्रणाली में उनके मूल अवयव के अभिलक्षणिक मानों के समान हैं।

45.1.2 प्रतिबंध संख्या

परिभाषा 45.3: प्रतिबंध संख्या

आव्यूह $\mathbf{K}$ की प्रतिबंध संख्या इस प्रकार परिभाषित है

$$\kappa(\mathbf{K}) = \|\mathbf{K}\|_2\, \|\mathbf{K}^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

और प्रतिबंध संख्या बडी पाए जाने पर चेतावनी दी जानी चाहिए। प्रतिबंध संख्या समस्या में छोटे परिवर्तनों के सापेक्ष उसके समाधान में अधिकतम परिवर्तन (अर्थात् संवेदनशीलता) मापती है।

[18] बडी प्रतिबंध संख्या के दो प्रमुख कारण हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- संयोजकता का अभाव: ऐसे आसन्न अवयव जिन्हें एक उभयनिष्ठ नोड साझा करना चाहिए, किंतु वे संपाती भिन्न नोडों से जुडे हैं, जिसके परिणामस्वरूप किसी एक अवयव पर अपर्याप्त अवरोध रहता है।
- अत्यधिक भिन्न दृढताओं वाले अवयवों को जोडना।

19 संख्यात्मक कलनविधियों की परिशुद्धता और स्थिरता का अधिक गहन अध्ययन करने के इच्छुक पाठक को Higham, 2002 में दी गई उत्कृष्ट (और सुपाठ्य) विवेचना देखनी चाहिए।

20 उदाहरणार्थ, दो स्वतंत्रता-कोटियों वाली संरचना के (संरचनात्मक दृढता) आव्यूह[1] पर विचार करें

$$K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 = P_1$$
$$K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 = P_2$$

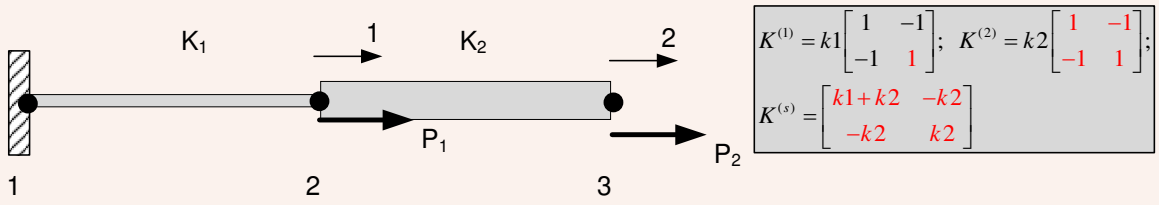
इन समीकरणों को Δ_2 के लिए Δ_1 के पदों में हल किया जा सकता है,

$$\Delta_2 = -\frac{K_{11}}{K_{12}}\Delta_1 + \frac{1}{K_{12}}P_1$$
$$\Delta_2 = -\frac{K_{21}}{K_{22}}\Delta_1 + \frac{1}{K_{22}}P_2$$

21 κ की भूमिका स्पष्ट करने के लिए हम एक संख्यात्मक उदाहरण पर विचार करेंगे।

45.1.3 कुप्रतिबद्ध दृढता आव्यूह

22 अब हम एक कठोर (अक्षीय) सदस्य को अपेक्षाकृत नम्य सदस्य से जोडकर कुप्रतिबद्ध दृढता आव्यूह निर्मित करना चाहते हैं, चित्र 45.4। संरचना दृढता आव्यूह और उसका प्रतिलोम निम्नलिखित हैं



चित्र 45.4: कुप्रतिबद्ध **K** उत्पन्न करने वाला सदस्य संयोजन

[1] मैक्सवेल की व्युत्क्रमता $K_{ij} = K_{ji}$ के कारण सभी दृढता आव्यूह सममित होते हैं

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{(K_1 + K_2)K_2 - K_2^2} \begin{bmatrix} K_2 & K_2 \\ K_2 & K_1 + K_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{K_1+K_2}{K_1 K_2} \end{bmatrix}$$

23 विस्थापन सदिश का समाधान है

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{K_1+K_2}{K_1 K_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

$\Delta_2 = f(\Delta_1, 1/K_2)$ के लिए दो समीकरण प्राप्त करने हेतु हम पुनर्व्यवस्थित करते हैं

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_1} \Rightarrow P_1 = K_1\Delta_1 - P_2 \\ \Delta_2 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2(K_1+K_2)}{K_1 K_2} \end{aligned}\right\} \Delta_2 = \Delta_1 + \frac{1}{K_2} P_2$$

इसी प्रकार

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_1} \Rightarrow P_2 = K_1\Delta_1 - P_1 \\ \Delta_2 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2(K_1+K_2)}{K_1 K_2} \end{aligned}\right\} \Delta_2 = \frac{K_1+K_2}{K_2}\Delta_1 - \frac{1}{K_2} P_1$$

अथवा

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{K_1+K_2}{K_2} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{K_2} \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_1 \end{Bmatrix}$$

हम विकर्ण के नीचे के पद पर ध्यान देते हैं; यह आव्यूह की प्रतिबंध संख्या को नियंत्रित करेगा।

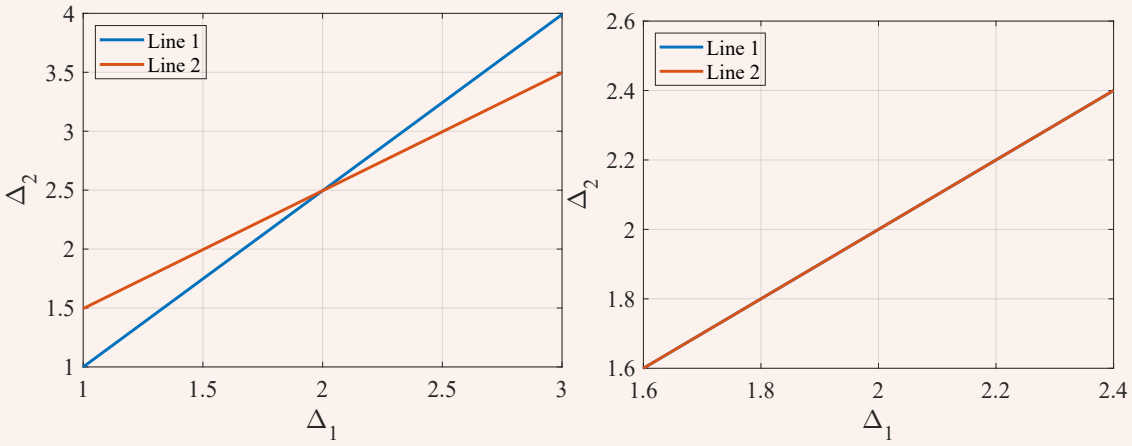
24 उदाहरणार्थ, दो प्रकरणों पर विचार करें:

$$3 \quad K_1 \quad K_2 \quad = \quad 1 \quad 2 \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 \\ 1.5000 & -1.0000 \end{bmatrix}$$
$$K_1 \quad K_2 \quad = \quad 1 \quad 10,000 \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 \\ 1.0001 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

और Δ_2 के समाधानों को Δ_1 के पदों में $P_1 \quad P_2 \quad = \quad 1 \quad 1$ के साथ आलेखित करते हैं, चित्र 45.5। और परिणाम सारणी 45.1 में संक्षेपित हैं।

25 अत्यधिक बडी प्रतिबंध संख्याओं के साथ परिशुद्धता घटती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) 1 2 (b) 1 10,000

चित्र 45.5: K_1 K_2 के पदों में कुप्रतिबद्ध आव्यूह

तालिका 45.1: कुप्रतिबद्ध आव्यूहों का प्रभाव

	सुप्रतिबद्ध		कुप्रतिबद्ध	
	K_1	K_2	K_1	K_2
2-5	1.0	2.0	1.0	10,000
2-5 (Δ_1, Δ_2)	(4.0000, 5.0000)		10^4(1.999999999999668, 2.000099999999668)	
(λ_1, λ_2)	(0.2247,-2.2247)		(0.000049998750062, -2.000049998750063)	
$\kappa(\mathbf{K})$	9.9		4.0e+04	

Matlab 64 बिट `eps`=2.2204e-16

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 45.4: परिशुद्धता और कुप्रतिबद्धता

व्यावहारिक नियम के रूप में, किसी आव्यूह को तब कुप्रतिबद्ध कहा जाता है जब प्रतिबंध संख्या ($\sim 1/(\texttt{eps})$ मशीन की परिशुद्धता के व्युत्क्रम से बडी हो; उदाहरणार्थ, 10^7 सामान्य एकल-परिशुद्धता (32 बिट) अंकगणित के लिए, और 10^{16} किसी 64 बिट कंप्यूटर के लिए। अत्यंत कुप्रतिबद्ध आव्यूहों के लिए एकल मान अपघटन तकनीकों का उपयोग करें।

[26] कुप्रतिबद्ध आव्यूहों का अपघटन प्रारंभिक पूर्वप्रतिबंधन (§L.3.4) द्वारा सर्वोत्तम रूप से किया जाता है।

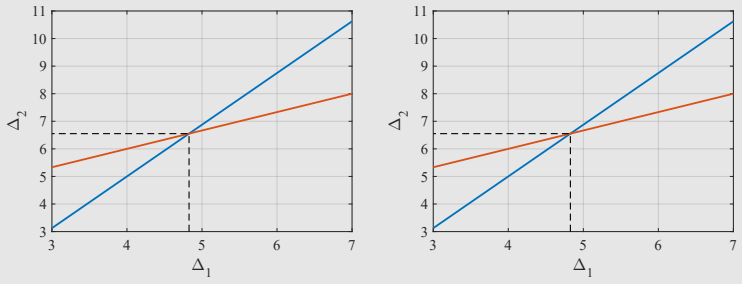
45.1.3.1 उदाहरण 45.1: कुप्रतिबद्ध

हम निम्नलिखित 4 प्रकरणों पर विचार करते हैं,

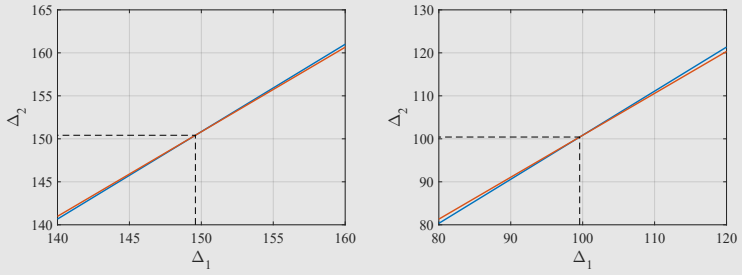
प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

		सुप्रतिबद्ध	
		प्रारंभिक	विक्षोभ सहित
$[K]$		$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.79 \\ -0.79 & 1.2 \end{bmatrix}$
Δ_1	Δ_2	4.8276 6.5517	4.7283 6.4461
λ_1	λ_2	0.5361 2.1639	0.5459 2.1541
$\kappa(\mathbf{K})$		4.04	3.95



		कुप्रतिबद्ध	
		प्रारंभिक	विक्षोभ सहित
$[K]$		$\begin{bmatrix} 1.22 & -1.2 \\ -1.2 & 1.22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.22 & -1.19 \\ -1.19 & 1.22 \end{bmatrix}$
Δ_1	Δ_2	149.5868 150.4132	99.5851 100.4149
λ_1	λ_2	0.0200 2.4200	0.0300 2.4100
$\kappa(\mathbf{K})$		121.00	80.33



हम कुप्रतिबद्ध आव्यूहों और बड़ी प्रतिबंध संख्या के बीच सहसंबंध तथा प्रतिबंध संख्याओं पर छोटे विक्षोभ का प्रभाव देखते हैं।

45.2 संख्यात्मक विचार

45.2.1 प्रतिलोमन बनाम अपघटन

[27] वैशिष्ट्यिक संरचना दृढता आव्यूह $\mathbf{K}_{tt}$ का प्रतिलोम ($\mathbf{K}_{tt}^{-1}$) निकालना आवश्यक है। सुपष्ट प्रतिलोमन केवल क्रैमर नियम से संभव है, किंतु यह विधि केवल 2×2 आव्यूह के लिए व्यवहार्य है; बड़े आव्यूह

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के लिए हम गाउस विलोपन प्रक्रियाओं के रूपांतरों द्वारा आव्यूह को LU अथवा LDU गुणनफल में "अपघटित" करते हैं (§L.2.2)। आव्यूह-अपघटन को इस प्रकार वर्गीकृत किया जा सकता है

1. प्रत्यक्ष विधियाँ, जिनमें संख्यात्मक संक्रियाओं की संख्या नियत होती है। सर्वाधिक सामान्य प्रकरण में हम **L**.**U** अपघटन करते हैं, और यदि आव्यूह सममित तथा धनात्मक निश्चित हो तो $\mathbf{L}.\mathbf{L}^T$ चोलेस्की अपघटन होता है।
2. अप्रत्यक्ष अर्थात् पुनरावर्ती विधियाँ, जिनमें संक्रियाओं की संख्या नियत नहीं होती (गाउस-साइडल)। अत्यंत बड़े आव्यूहों के लिए अधिक उपयुक्त।

[28] इनमें से कुछ विधियों का वर्णन §L.2.1 में है।

[29] उन विशेष प्रकरणों में जहाँ आव्यूह कठोर हो (बड़ी प्रतिबंध संख्या), *एकल मान अपघटन* (§L.2.2.5) अथवा पूर्वप्रतिबंधन (§L.3.4) विधियों का उपयोग करना चाहिए।

[30] निस्संदेह अधिकांश प्रकरणों में उपयोगकर्ता को समाधान-रणनीतियों की चिंता नहीं करनी पड़ती, क्योंकि इन्हें MATLAB®जैसे प्रोग्रामों में सरलता से आहूत किया जा सकता है। कुछ प्रासंगिक फलन हैं

`inv`(.)	Gauss-Jordan
`lu`(.)	LU अपघटन
`chol`(.)	चोलेस्की अपघटन
`symrcm` (.)	विरल विपरीत कथिल-मॅकी क्रमण
`spy`(.)	आव्यूह का विरलता प्रतिरूप आलेखित करता है

और इनकी विस्तृत समीक्षा अध्याय L में की गई है।

45.2.2 नोडीय क्रमांकन

[31] सामान्यतः **K** विरल होता है, अर्थात् आव्यूह में अनेक शून्य होते हैं। समाधान से निरपेक्ष, आव्यूह का अपघटन "स्काइलाइन" के नीचे के सभी K_{ij} को अधिलेखित करेगा, चाहे वे शून्य हों अथवा नहीं। "स्काइलाइन" के ऊपर के सभी शून्य पद अपरिवर्तित रहेंगे। स्काइलाइन किसी दिए गए स्तंभ का निम्नतम अशून्य पद है।

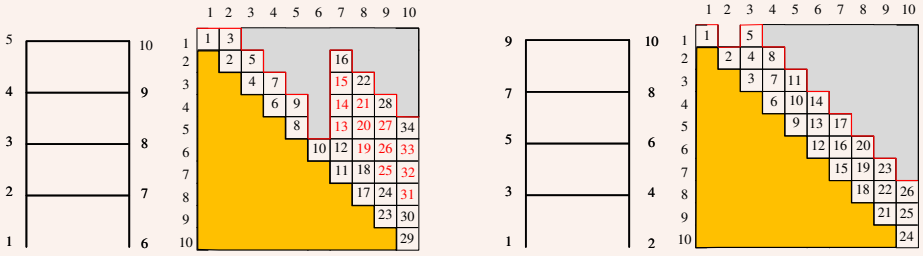
[32] भंडारण और अभिकलनीय समय दोनों को न्यूनतम करने के लिए सभी अशून्य पदों को विकर्ण के निकट समेटने से अत्यधिक लाभ होता है। एक-बे, 4-मंजिला भवन में प्रति नोड केवल एक स्वतंत्रता-कोटि मानते हुए, चित्र 45.6a और 45.6a क्रमशः अनुपयुक्त तथा विवेकपूर्ण रूप से क्रमांकित नोडों के उदाहरण हैं।

[33] रंगीन खाने विकर्ण के नीचे हैं और सममिति के कारण उन्हें संग्रहीत करने की आवश्यकता नहीं है; इसी प्रकार स्काइलाइन के ऊपर के धूसर खानों को भी संग्रहीत करने की आवश्यकता नहीं है। दूसरी ओर अशून्य पद काले और स्काइलाइन के नीचे के शून्य पद लाल रंग में चिह्नित हैं। दोनों पर अपघटन संक्रियाएँ की जाएँगी।

[34] विकर्ण के चारों ओर यथासंभव अधिक अशून्य पदों को "समेटने" से भंडारण आवश्यकता और अभिकलनीय प्रयास दोनों घटते हैं। आजकल यह कार्य जालक जनित्र स्वतः करते हैं, जो पुनर्क्रमांकन के

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

लिए आंतरिक रूप से विपरीत कथिल-मॅकी (RCMH) कलनविधि का उपयोग कर सकते हैं (Cuthill and McKee, 1969)।

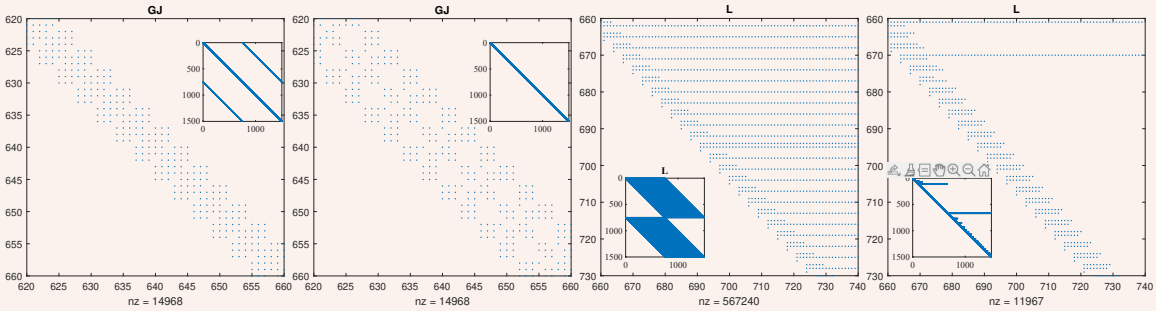


(a) अनुपयुक्त क्रमांकन (b) उचित क्रमांकन

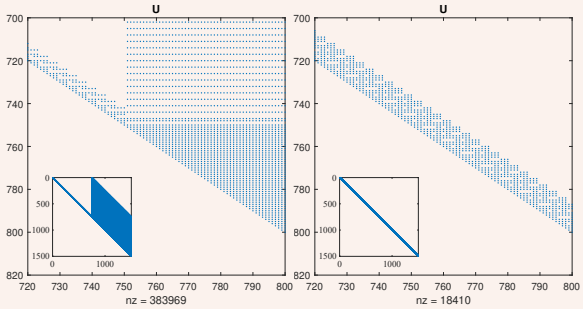
चित्र 45.6: नोडीय क्रमांकन का महत्त्व

35 संरचनात्मक दृढता आव्यूह की विरल प्रकृति तथा भंडारण आवश्यकता और अभिकलनीय लागत पर उसके प्रभाव को और स्पष्ट करने के लिए हम 250-मंजिला एकल-बे फ्रेम पर विचार करते हैं, जिसमें 1,500 ($250 \times 2 \times 3$) समीकरण हैं। विभिन्न अपघटन रणनीतियों (गाउस-जॉर्डन, LU अपघटन और चोलेस्की) के लिए हम RCMH कलनविधि सहित और उसके बिना अशून्य पदों के वितरण की तुलना करते हैं। प्रत्येक चित्र के नीचे अशून्य पदों की संख्या `nz` से अंकित है।

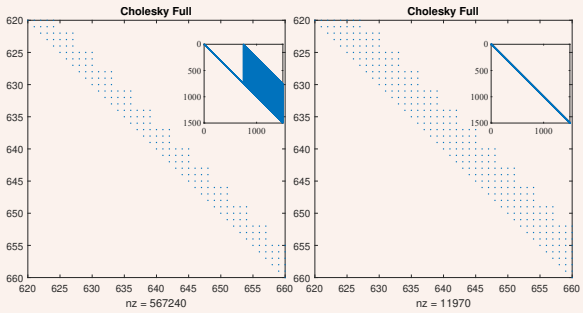
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) Gauss-Jordan (b) RCMH सहित गाउस-जॉर्डन (c) L अपघटन (d) RCMH सहित L अपघटन



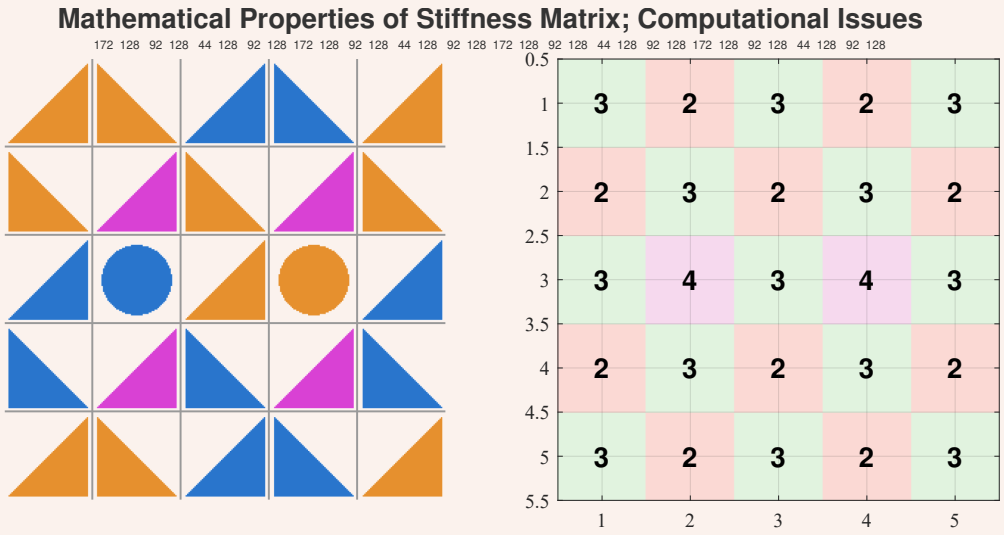
(e) U अपघटन (f) RCMH सहित U अपघटन



(g) चोलेस्की (h) RCMH सहित चोलेस्की

चित्र 45.7: संरचनात्मक दृढता आव्यूह की भंडारण आवश्यकताएँ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अध्याय-विशिष्ट आइडेंटिकॉन, chapter H

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

46 विशेष विषय

सारांश

इस अध्याय में आव्यूह संरचनात्मक विश्लेषण से संबंधित विविध विषयों का संकलन है। हम संघनन/उपसंरचनाकरण से आरंभ करते हैं, यद्यपि कंप्यूटर स्मृति की घटती लागत के कारण आजकल इनका उपयोग विरल है। इसके बाद स्थैतिकी और शुद्धगतिकी आव्यूहों की संकल्पनाएँ प्रस्तुत की जाती हैं। इन संकल्पनाओं का उपयोग दृढता-नम्यता संबंध, ट्रसों का आव्यूह विश्लेषण (§20.4), और नम्यता-आधारित अवयव का सूत्रीकरण (§61.4.1.1) व्युत्पन्न करने में किया जाएगा। फिर संवर्धित दृढता आव्यूह के समंजन (§44.4.3) की एक वैकल्पिक विधि, सर्वांगसम रूपांतरण, प्रस्तुत किया जाएगा। कुछ परिमित अवयव कोडों में यह विधि पसंद की जाती है। अध्याय का समापन तीन प्रकार के विशेष धरन-स्तंभों से होगा: a) दृढ विस्थापन वाले धरन, b) अर्ध-दृढ धरन (स्प्रिंगों द्वारा आलंबित), और c) परिवर्ती अनुप्रस्थ परिच्छेद वाले धरन।

46.1 संघनन/उपसंरचनाकरण 1584
46.2 स्थैतिकी और शुद्धगतिकी के समीकरण . 1585
46.2.1 स्थैतिकी आव्यूह $\mathcal{B}$ 1585
46.2.2 शुद्धगतिकी आव्यूह $\mathcal{A}$ 1593
46.2.3 स्थैतिकी-शुद्धगतिकी आव्यूह संबंध 1595
46.3 स्थैतिकी आव्यूह के प्रतिलोम द्वारा शुद्धगतिक संबंध 1597
46.4 दृढता-नम्यता संबंध 1598
46.4.1 दृढता से नम्यता 1598
46.4.2 नम्यता से दृढता 1599
46.4.3 नम्यता और दृढता विधियों के बीच द्वैतता 1603
46.5 $\mathbf{K}$ के लिए सर्वांगसम रूपांतरण उपागम . . 1604
46.5.1 उदाहरण 46.9: सर्वांगसम रूपांतरण 1605
46.5.2 उदाहरण 46.10: फ्रेम का सर्वांगसम रूपांतरण 1607
46.6 विशेष अवयव 1609
46.6.1 दृढ विस्थापन; 1609
46.6.2 अर्ध-दृढ धरन 1612
46.6.3 परिवर्ती अनुप्रस्थ काट 1617
46.7 आघूर्ण फ्रेमों में पार्श्व विस्थापन के स्रोत 1619

46.1 संघनन/उपसंरचनाकरण

1 संघनन प्रतिस्थापन द्वारा स्वतंत्रता-कोटियों की संख्या घटाने की प्रक्रिया है। अवयव स्तर पर हम किसी आंतरिक नोड (जैसे लैग्रांजी अवयव में) को संघनित करना चाह सकते हैं; वैश्विक स्तर पर इसका उपसंरचनाकरण से निकट संबंध है।

2 $\mathbf{kd} = \mathbf{p}$ पर विचार करें और $\mathbf{d}$ को इस प्रकार विभाजित मानें

$$\mathbf{d} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{d}_c \end{array} \right\}$$

जहाँ अधोलिखित r और c क्रमशः प्रतिधारित तथा संघनित स्वतंत्रता-कोटियों को सूचित करते हैं।

3 उपसंरचनाकरण के लिए अधोलिखित r और c अंतरापृष्ठ तथा आंतरिक स्वतंत्रता-कोटियों को सूचित करते हैं। अतः,

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{k}_{rr} & \mathbf{k}_{rc} \\ \mathbf{k}_{cr} & \mathbf{k}_{cc} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{d}_c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_r \\ \mathbf{p}_c \end{array} \right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा

$$\mathbf{k}'\mathbf{d}_r = \mathbf{p}'$$

जहाँ

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}_{rr} - \mathbf{k}_{rc}\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{k}_{cr}$$
$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_r - \mathbf{k}_{rc}\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{p}_c$$

4 उपर्युक्त दोनों समीकरणों के उभयनिष्ठ रूप को देखते हुए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि संघनन को निम्नलिखित रूपांतरण द्वारा $\mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{k}$ प्रणाली से $\mathbf{d}_r, \mathbf{p}', \mathbf{k}'$ में रूपांतरण भी माना जा सकता है

$$\mathbf{k}' = \boldsymbol{\Gamma}_c^T \mathbf{k} \boldsymbol{\Gamma}_c$$
$$\mathbf{p}' = \boldsymbol{\Gamma}_c^T \mathbf{p}$$

जहाँ

$$\boldsymbol{\Gamma}_c = \left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{k}_{cr} \\ \mathbf{I} \end{array} \right\}$$

5 $\mathbf{k}'$ एक r गुणा c आव्यूह है, जबकि $\mathbf{k}$ का आकार $r+c$ गुणा $r+c$ था (फिर भी हमें $\mathbf{k}_{cc}$, जिसका आकार c गुणा c है, का अलग से अपघटन करना होगा)।

46.2 स्थैतिकी और शुद्धगतिकी के समीकरण

46.2.1 स्थैतिकी आव्यूह $\mathcal{B}$

46.2.1.1 व्युत्पत्ति

यह अनुभाग *Matrix Structural Analysis* से लिया गया है, जिसके लेखक McGuire and Gallagher, 1979 हैं[a]।

[a]दुर्भाग्यवश, प्रथम संस्करण का मूल अनुभाग द्वितीय संस्करण से हटा दिया गया था।

46.2.1.2 स्थैतिकतः निर्धार्य

6 स्थैतिकी आव्यूह $\mathcal{B}$, वैश्विक निर्देशांकों में संरचना के सभी $\mathbf{P}$ नोडीय बलों के सदिश को सभी अज्ञात बलों (स्थानीय निर्देशांक प्रणाली में अवयव आंतरिक बल और संरचना की बाह्य प्रतिक्रियाएँ) $\mathbf{F}$ से साम्य संबंधों द्वारा जोड़ता है और इस प्रकार परिभाषित है:

$$\mathbf{P} \equiv \mathcal{B}\mathbf{F} \tag{46.1}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

7 $\mathcal{B}$ में पंक्तियों की संख्या साम्य के स्वतंत्र समीकरणों की कुल संख्या के बराबर और स्तंभों की संख्या स्वतंत्र आंतरिक बलों की संख्या के बराबर होगी। यह "संधि-विधि" द्वारा ट्रस विश्लेषण में प्राप्त साम्य आव्यूह की स्मृति दिलाता है।

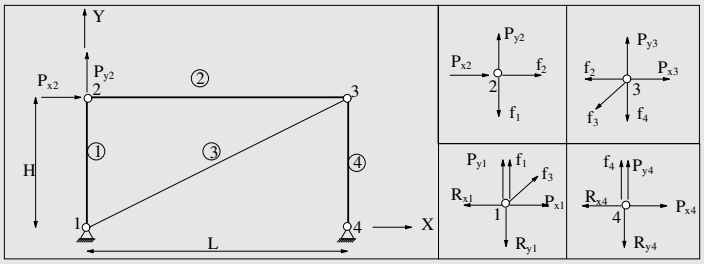
8 संरचना के प्रकार के अनुसार आंतरिक अवयव बल और साम्य बल सारणी 46.1 के अनुसार बदलेंगे। नम्यता विधि की भाँति, स्वतंत्र अवयव आंतरिक बलों के एक से अधिक संयोजन चुने जा सकते हैं।

तालिका 46.1: स्थैतिकी आव्यूह के लिए आंतरिक अवयव बल की परिभाषा

प्रकार	आंतरिक बल	साम्य समीकरण
ट्रस	एक सिरे पर अक्षीय बल	$\Sigma F_X = 0,\ \Sigma F_Y = 0$
धरन 1	एक सिरे पर अपरूपण और आघूर्ण	$\Sigma F_y^A = 0,\ \Sigma M_z^A = 0$
धरन 2	प्रत्येक सिरे पर अपरूपण	$\Sigma F_y^A = 0,\ \Sigma F_y^B = 0$
धरन 3	प्रत्येक सिरे पर आघूर्ण	$\Sigma M_z^A = 0,\ \Sigma M_z^B = 0$
2D फ्रेम 1	एक सिरे पर अक्षीय बल, अपरूपण और आघूर्ण	$\Sigma F_x^A = 0,\ \Sigma F_y^A = 0,\ \Sigma M_z^A = 0$

9 स्थैतिकतः निर्धार्य संरचना के लिए आव्यूह $\mathcal{B}$ वर्गाकार होगा, अन्यथा आयताकार (पंक्तियों से अधिक स्तंभ)।

46.2.1.2.1 उदाहरण 46.1: स्थैतिकतः निर्धार्य ट्रस का स्थैतिकी आव्यूह



इस ट्रस में 8 अज्ञात बल (4 आंतरिक सदस्य बल और 4 बाह्य प्रतिक्रियाएँ) तथा साम्य के 8 समीकरण (2 प्रति नोड, कुल 4 नोड) हैं। सभी अवयव बलों को तननात्मक और प्रतिक्रियाओं को चित्रानुसार मानते हुए साम्य समीकरण हैं:

नोड	$\Sigma F_X = 0$	$\Sigma F_Y = 0$
नोड 1	$\underbrace{P_{x1}}_{0} + F_3 C - R_{x1} = 0$	$\underbrace{P_{y1}}_{0} + F_1 + F_3 S - R_{y1} = 0$
नोड 2	$P_{x2} + F_2 = 0$	$P_{y2} - F_1 = 0$
नोड 3	$\underbrace{P_{x3}}_{0} - F_2 - F_3 C = 0$	$\underbrace{P_{y3}}_{0} - F_4 - F_3 S = 0$
नोड 4	$\underbrace{P_{x4}}_{0} + R_{x4} = 0$	$\underbrace{P_{y4}}_{0} + F_4 - R_{y4} = 0$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+H^2}} = C$ और $\sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}} = S$। इन साम्य समीकरणों को आव्यूह रूप में लिखा जा सकता है

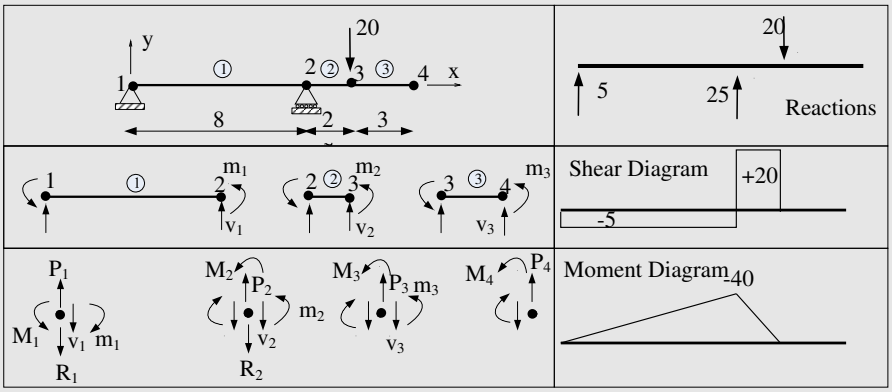
$$\begin{matrix}\Sigma F_x^1:\\ \Sigma F_y^1:\\ \Sigma F_x^2:\\ \Sigma F_y^2:\\ \Sigma F_x^3:\\ \Sigma F_y^3:\\ \Sigma F_x^4:\\ \Sigma F_y^4:\end{matrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{x1}\\ P_{y1}\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ P_{x3}\\ P_{y3}\\ P_{x4}\\ P_{y4}\end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ \hline R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{array}\right\}}_{\mathbf{F}} \tag{46.2}$$

अज्ञात बल और प्रतिक्रियाएँ $\mathcal{B}$ के प्रतिलोमन द्वारा निर्धारित की जा सकती हैं:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ \hline R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{array}\right\}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \left\{\begin{array}{c} P_{y2}\\ -P_{x2}\\ \frac{P_{x2}}{C}\\ -\frac{S}{C}P_{x2}\\ \hline P_{x2}\\ \frac{S}{C}P_{x2}+P_{y2}\\ 0\\ -\frac{S}{C}P_{x2}\end{array}\right\}$$

हम देखते हैं कि आव्यूह $\mathcal{B}$ बाह्य भार से पूर्णतः स्वतंत्र है और एक बार प्रतिलोमित होने पर न्यूनतम अभिकलनीय प्रयास से अनेक भार प्रकरणों के लिए उपयोग किया जा सकता है।

46.2.1.2.2 उदाहरण 46.2: धरन का स्थैतिकी आव्यूह



यह तीन अवयवों से बना है, जिनमें से प्रत्येक में 2 आंतरिक अज्ञात (v और m) तथा दो अज्ञात प्रतिक्रियाएँ हैं; इस प्रकार कुल 8 अज्ञात हैं। इन अज्ञातों को हल करने के लिए प्रत्येक पर साम्य के 2 समीकरण हैं, और कुल 4 नोड

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हैं। ध्यान दें कि इस समस्या में हमने प्रत्येक अवयव के दाएँ सिरे पर अपरूपण और आघूर्ण को प्राथमिक अज्ञात चुना है। बाएँ घटक साम्य से पुनर्प्राप्त किए जा सकते हैं। अतः साम्य से हमें मिलता है:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \Sigma F_1: \\ \Sigma M_1: \\ \Sigma F_2: \\ \Sigma M_2: \\ \Sigma F_3: \\ \Sigma M_3: \\ \Sigma F_4: \\ \Sigma M_4: \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \\ P_4 \\ M_4 \end{Bmatrix}}_{} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ m_1 \\ v_2 \\ m_2 \\ v_3 \\ m_3 \\ \hline R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

इस 8 गुणा 8 आव्यूह का प्रतिलोमन देने पर

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ m_1 \\ v_2 \\ m_2 \\ v_3 \\ m_3 \\ \hline R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{8} & \frac{13}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right]}_{\mathcal{B}^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -40 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 5 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

46.2.1.3 स्थैतिकतः अनिर्धार्य

10 स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना के प्रकरण में समीकरण 46.1 को इस प्रकार सामान्यीकृत किया जा सकता है:

$$\mathbf{P}_{2n\times 1} = \left[\; [\mathcal{B}_0]_{2n\times 2n} \;\middle|\; [\mathcal{B}_x]_{2n\times r} \;\right] \left\{ \frac{\mathbf{F}_0}{\mathbf{F}_x} \right\}_{(2n+r)\times 1} \tag{46.3}$$

जहाँ $\mathcal{B}_0$ एक वर्गाकार आव्यूह है, $\{\mathbf{F}_0\}$ अज्ञात आंतरिक अवयव बलों अथवा बाह्य प्रतिक्रियाओं का सदिश है, और $\mathbf{F}_x$ अज्ञात *अतिरिक्त* आंतरिक बलों अथवा प्रतिक्रियाओं का सदिश है।

11 अतः हम $\{\mathbf{F}_0\}$ को इससे निर्धारित कर सकते हैं

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathcal{B}_0^{-1}\mathbf{P} - \mathcal{B}_0^{-1}\mathcal{B}_x\mathbf{F}_x \\ &= C_{1\,2n\times 2n}\mathbf{P} - C_{2\,2n\times r}\mathbf{F}_x \end{aligned} \tag{46.4}$$

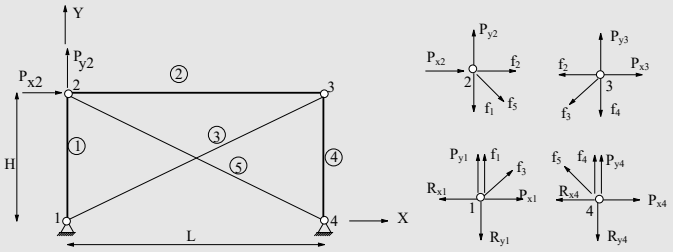
12 निम्नलिखित परिभाषाओं पर ध्यान दें, जिनका आगे उपयोग होगा:

$$\mathcal{B}_0^{-1} \equiv C_1 \tag{46.5}$$

$$-\mathcal{B}_0^{-1}\mathcal{B}_x \equiv C_2 \tag{46.6}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

46.2.1.3.1 उदाहरण 46.3: स्थैतिकतः अनिर्धार्य ट्रस का स्थैतिकी आव्यूह



प्रथम उदाहरण समस्या पर पुनः विचार करते हुए, किंतु एक अतिरिक्त सदस्य के साथ जो इसे स्थैतिकतः अनिर्धार्य बनाता है, अब इसमें 9 अज्ञात बल (5 आंतरिक सदस्य बल और 4 बाह्य प्रतिक्रियाएँ) तथा साम्य के केवल 8 समीकरण हैं। पाँचवें अवयव बल को अतिरिक्त बल चुनकर और $r = 1$ के साथ हम समीकरण 46.3 लिखते हैं

$$\mathbf{P}_{2n\times 1} = \left[\ [\mathcal{B}_0]_{2n\times 2n} \ \middle|\ [\mathcal{B}_x]_{2n\times r}\ \right] \left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}_0\\ \hline \mathbf{F}_x\end{array}\right\}_{(2n+r)\times 1}$$

$$\mathbf{P} = [\mathcal{B}_0]\,\{\mathbf{F}_0\} + [\mathcal{B}_x]\,\{\mathbf{F}_x\}$$

$$\begin{array}{l}\Sigma F_x^1:\\ \Sigma F_y^1:\\ \Sigma F_x^2:\\ \Sigma F_y^2:\\ \Sigma F_x^3:\\ \Sigma F_y^3:\\ \Sigma F_x^4:\\ \Sigma F_y^4:\end{array} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}P_{x1}\\ P_{y1}\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ P_{x3}\\ P_{y3}\\ P_{x4}\\ P_{y4}\end{array}\right\}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}_{0\,2nx2n}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ \hline R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{array}\right\}}_{\{\mathbf{F}_0\}_{2nx1}} + \underbrace{\left[\begin{array}{c}0\\ 0\\ -C\\ S\\ 0\\ 0\\ C\\ -S\end{array}\right]}_{\mathcal{B}_{x\,nx1}} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x}$$

हम आंतरिक बलों को (अब भी अज्ञात) अतिरिक्त बल के पदों में हल कर सकते हैं

$$\{\mathbf{F}_0\} = [\mathcal{B}_0]^{-1}\mathbf{P} - [\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x]\,\{\mathbf{F}_x\}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{array}\right\}}_{\{\mathbf{F}_0\}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}_0^{-1}\equiv C_1} \left[\underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}}_{\mathbf{P}} - \underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ -C\\ S\\ 0\\ 0\\ C\\ -S\end{array}\right\}}_{[\mathcal{B}_x]} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x}\right]$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा निम्नलिखित संबंधों $[\mathcal{B}_0]^{-1} \equiv [C_1]$ और $-[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x] \equiv [C_2]$ का उपयोग करने पर हमें मिलता है

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_1} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -S \\ -C \\ 1 \\ -S \\ C \\ 0 \\ -C \\ 0 \end{Bmatrix}}_{C_2} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x} \tag{46.7}$$

ध्यान दें कि यह समीकरण अज्ञात बलों को हल करने के लिए पर्याप्त नहीं है, क्योंकि $\mathbf{F}_x$ को बल-विस्थापन संबंधों (**D** अथवा **K**) द्वारा प्राप्त करना होगा।

46.2.1.4 अतिरिक्त बलों की पहचान

13 जहाँ संरचना के हस्तचालित विश्लेषण में अतिरिक्त बलों की पहचान केवल संरचना का निरीक्षण करके की जाती थी, वहीं इस पहचान-प्रक्रिया को स्वचालित किया जा सकता है।

14 इससे आरंभ करते हुए

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{2n\times 1} &= \mathcal{B}_{2n\times(2n+r)}\mathbf{F}_{(2n+r)\times 1} \\ \mathcal{B}_{2n\times(2n+r)}\mathbf{F}_{2n+r\times 1} - \mathbf{I}_{2n\times 2n}\mathbf{P}_{2n\times 1} &= \mathbf{0} \\ \left[\ \mathcal{B}\ \middle|\ -\mathbf{I}\ \right]_{2n\times(4n+r)} \left\{\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{P}}\right\} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

जहाँ $\left[\ \mathcal{B}\ \middle|\ -\mathbf{I}\ \right]$ *संवर्धित आव्यूह* के अनुरूप है।

15 यदि संवर्धित आव्यूह पर गाउस-जॉर्डन विलोपन प्रक्रिया लागू करें, तो यह समीकरण इस रूप में रूपांतरित होता है:

$$\left[\ \mathbf{I}_{2n\times 2n}\ \middle|\ -C_{2_{2n\times r}}\ \middle|\ -C_{1_{2n\times 2n}}\ \right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{F}_0 \\ \hline \mathbf{F}_x \\ \hline \mathbf{P} \end{array}\right\}_{4n+r\times 1} = \{\mathbf{0}\}$$

अथवा:

$$\{\mathbf{F}_0\}_{2n\times 1} = [C_1]_{2n\times 2n}\mathbf{P}_{2n\times 1} + [C_2]_{2n\times r}\{\mathbf{F}_x\}_{r\times 1}$$

जो समीकरण 46.4 के समान है; पूर्ववत् $\mathbf{F}_x$ अतिरिक्त बल हैं और उनका समाधान सुपष्टतः प्रत्यास्थ अवयव गुणों पर निर्भर करेगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

46.2.1.4.1 उदाहरण 46.4: अतिरिक्त बलों का चयन

पूर्ववर्ती उदाहरण के स्थैतिकतः अनिर्धार्य ट्रस पर पाँचवाँ अवयव जोड़कर पुनः विचार करने पर ट्रस अब प्रथम कोटि तक स्थैतिकतः अनिर्धार्य होगा। साम्य समीकरण 46.2 तब इस प्रकार लिखा जाएगा:

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} \Sigma F^1_x : A \\ \Sigma F^1_y : B \\ \Sigma F^2_x : C \\ \Sigma F^2_y : D \\ \Sigma F^3_x : E \\ \Sigma F^3_y : F \\ \Sigma F^4_x : G \\ \Sigma F^4_y : H \end{matrix}
\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|cccc||cc}
0 & 0 & -C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]}_{\left[\begin{array}{c||c} \mathcal{B} & -\mathbf{I} \end{array}\right]}
\underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ \hline R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \\ \hline\hline P_{x2} \\ P_{y2} \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}}
\end{array}
$$

ध्यान दें कि भार केवल नोड 2 पर लगाया गया है, अतः हमने तत्समक आव्यूह $\mathbf{I}$ के एक उपसमुच्चय पर विचार किया है।

1. हम निम्नलिखित आव्यूह से आरंभ करते हैं

$$
\begin{array}{c}
\\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x1} & R_{y1} & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 0 & -C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

2. स्तंभों की अदला-बदली करें

$$
\begin{array}{c}
\\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. संकेतानुसार संक्रिया करें

$$\begin{array}{r} \\ A \\ B' = B + DB \\ C \\ D \\ E' = \frac{E+C}{C} \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -S & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

4. संकेतानुसार संक्रिया करें

$$\begin{array}{r} \\ A' = A + CE' \\ B'' = B' + SE' \\ C' = -C \\ D \\ E' \\ F' = F - SE' \\ G \\ H' = H + F' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S/C & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S & 0 & 0 & S/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S/C & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

5. स्तंभों की अदला-बदली करें और देखें कि F_5 चयनित अतिरिक्त है।

$$\begin{array}{r} \\ A' \\ B'' \\ C' \\ D \\ E' \\ F' \\ G \\ H' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & R_{x4} & R_{y4} & F_5 & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S/C & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & S/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & S/C & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

समीकरण 46.4 से हमें मिलता है

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ F_2 \\ F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S/C & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/C & 0 \\ -S/C & 0 \\ 0 & 0 \\ -S/C & 0 \end{bmatrix}}_{C_1} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} C \\ 0 \\ -C \\ -S \\ 1 \\ -S \\ -C \\ 0 \end{Bmatrix}}_{C_2} \underbrace{\{F_5\}}_{\mathbf{F}_x}$$

जो पदों के क्रम को छोड़कर समीकरण 46.7 के परिणामों के समान है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

46.2.1.5 शुद्धगतिक अस्थिरता

16 शुद्धगतिक अस्थिरता अपर्याप्त अवरोध वाली ऐसी संरचना से उत्पन्न होती है जिसमें दृढ-पिंड गति हो सकती है। शुद्धगतिक अस्थिरता से एकवाची आव्यूह प्राप्त होगा, और इस आव्यूह के अपघटन में शून्य से भाग उत्पन्न होकर कंप्यूटर प्रोग्राम "क्रैश" करेगा। अतः "बड़ी" संरचनाओं के लिए विश्लेषण से पहले पूर्वतः यह निर्धारित करना प्रायः वांछनीय है कि संरचना शुद्धगतिक रूप से अस्थिर है अथवा नहीं।

17 स्थैतिक निर्धार्यता और अस्थिरता की शर्तों को $\mathcal{B}$ की कोटि के फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यदि $\mathcal{B}$ में n पंक्तियाँ (साम्य समीकरणों की संख्या के अनुरूप), u स्तंभ (आंतरिक बलों और प्रतिक्रियाओं की संख्या के अनुरूप), और कोटि r हो, तो शुद्धगतिक अस्थिरता की शर्तें सारणी 46.2 में संक्षेपित हैं।

तालिका 46.2: स्थैतिक निर्धार्यता और शुद्धगतिक अस्थिरता की शर्तें

$n > u$ शुद्धगतिक रूप से अस्थिर	
$n = u$ स्थैतिकतः निर्धार्य	
$n = u = r$	स्थिर
$n = u > r$	शुद्धगतिक अस्थिरता की $n - r$ विधाओं सहित अस्थिर
$n < r$ स्थैतिकतः अनिर्धार्य (कोटि $u - n$)	
$n = r$	स्थिर
$n > r$	शुद्धगतिक अस्थिरता की $n - r$ विधाओं सहित अस्थिर

18 ध्यान दें कि शुद्धगतिक अस्थिरता सदैव संरचना-पतन का पर्याय नहीं है। कुछ प्रकरणों में ज्यामिति पूर्णतः परिवर्तित होने के बाद ही साम्य पुनः प्राप्त होगा (जैसे नम्य केबल संरचनाओं में), और नई ज्यामिति के साथ साम्य समीकरण पूर्णतः पुनर्लिखित करने होंगे।

46.2.2 शुद्धगतिकी आव्यूह $\mathcal{A}$

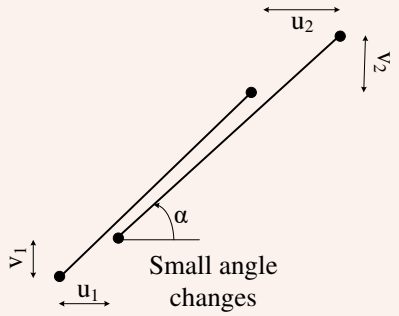
19 शुद्धगतिकी आव्यूह $\mathcal{A}$, वैश्विक निर्देशांकों में संरचना के सभी नोडीय *कुल विस्थापनों* $\boldsymbol{\Delta}$ को उनकी स्थानीय निर्देशांक प्रणाली में अवयव के *सापेक्ष विस्थापनों* और आलंब विस्थापन (जो अवतलन होने पर शून्य नहीं भी हो सकता) $\boldsymbol{\Upsilon}$ से जोड़ता है और इस प्रकार परिभाषित है:

$$\boldsymbol{\Upsilon} \equiv \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta} \tag{46.8}$$

20 $\mathcal{A}$ एक आयताकार आव्यूह है; इसकी पंक्तियों की संख्या अवयव के आंतरिक विस्थापनों की संख्या के बराबर और स्तंभों की संख्या नोडीय विस्थापनों की संख्या के बराबर है।

21 पूर्व में प्रस्तुत घूर्णन आव्यूह, जो किसी एक एकल अवयव के विस्थापनों को वैश्विक से स्थानीय निर्देशांकों में रूपांतरित करता है, के विपरीत शुद्धगतिकी आव्यूह संपूर्ण संरचना पर लागू होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 46.1: ट्रस अवयव की शुद्धगतिकी

[22] सरलता से दर्शाया जा सकता है कि ट्रसों के लिए (जो सदस्य के लघुकरण अथवा दीर्घन और कोण α में छोटे परिवर्तन के अनुरूप है):

$$\gamma^{(e)} = (u_2 - u_1)\cos\alpha + (v_2 - v_1)\sin\alpha$$

46.2.2.1 उदाहरण 46.5: शुद्धगतिकी आव्यूह: ट्रस उदाहरण

पूर्ववर्ती उदाहरण के स्थैतिकतः निर्धार्य ट्रस पर पुनः विचार करने पर शुद्धगतिकी आव्यूह होगा:

$$\Delta_1^{(e)} = v_2 - v_1; \quad \Delta_2^{(e)} = u_3 - u_2; \quad \Delta_3^{(e)} = (u_3 - u_1)C + (v_3 - v_1)S; \quad \Delta_i^{(e)} = \cdots$$

अथवा आव्यूह रूप में:

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta_1^{(e)} \\ \Delta_2^{(e)} \\ \Delta_3^{(e)} \\ \Delta_4^{(e)} \\ \hline u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -C & -S & 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}\right\}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवरोध लागू करने पर: $u_1 = 0$; $v_1 = 0$; $u_4 = 0$; और $v_4 = 0$ हमें मिलता है:

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta_1^{(e)} \\ \Delta_2^{(e)} \\ \Delta_3^{(e)} \\ \Delta_4^{(e)} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -C & -S & 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}\right\}$$

हमें ध्यान देना चाहिए कि $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ आव्यूह का परिवर्त है, जैसा समीकरण 46.2.1.4.1 में है।

46.2.3 स्थैतिकी-शुद्धगतिकी आव्यूह संबंध

23 स्थैतिकी $\mathcal{B}$ और शुद्धगतिकी $\mathcal{A}$ दोनों आव्यूहों को परिभाषित करने के बाद यह सहज है कि ये दोनों आव्यूह परस्पर संबंधित होने चाहिए। इस अनुभाग में हम स्थैतिकतः निर्धार्य और स्थैतिकतः अनिर्धार्य दोनों प्रकरणों के लिए यह संबंध निर्धारित करना चाहते हैं।

46.2.3.1 स्थैतिकतः निर्धार्य

24 बाह्य कार्य को इस प्रकार परिभाषित करते हुए

$$\left.\begin{aligned} W_{ext} &= \frac{1}{2}\mathbf{P}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{P} &= \boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{F} \end{aligned}\right\} W_{ext} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\boldsymbol{\mathcal{B}}^T\boldsymbol{\Delta}$$

25 वैकल्पिकतः आंतरिक कार्य है:

$$\left.\begin{aligned} W_{int} &= \frac{1}{2}\mathbf{F}\{\boldsymbol{\Upsilon} \\ \boldsymbol{\Upsilon} &= \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\Delta} \end{aligned}\right\} W_{int} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\Delta}$$

26 बाह्य कार्य को आंतरिक कार्य के बराबर रखने पर $W_{ext} = W_{int}$ हमें मिलता है:

$$\frac{1}{2}\mathbf{F}\boldsymbol{\mathcal{B}}^T\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\Delta}$$

अथवा

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}^T = \boldsymbol{\mathcal{A}} \tag{46.9}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[27] सातत्यक स्तर पर इसके समकक्ष हैं

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

अथवा $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$, जहाँ $\mathbf{L}$ रैखिक संकारक है (समीकरण O.7), और

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}} = 0$$

or $\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$

46.2.3.2 स्थैतिकतः अनिर्धार्य

[28] पूर्ववर्ती प्रकरण में हमने समीकरण 46.1 का उपयोग $\mathcal{B}$ के लिए किया था; स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचनाओं के सर्वाधिक सामान्य प्रकरण के लिए हम समीकरण 46.3 से आरंभ करके लिख सकते हैं:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{B}_0 & \mathcal{B}_x \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \hline \mathbf{F}_x \end{Bmatrix}$$

जहाँ $\mathbf{F}_x$ अतिरिक्त बलों के अनुरूप है। तब बाह्य कार्य होगा

$$W_{ext} = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{F}_0 & \mathbf{F}_x \end{array}\right] \begin{bmatrix} [\mathcal{B}_0]^t \\ \hline [\mathcal{B}_x]^t \end{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}$$

[29] पुनः हम समीकरण 46.8 को सामान्यीकृत करके लिख सकते हैं

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Upsilon}_0 \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 \\ \hline \mathcal{A}_x \end{bmatrix} \boldsymbol{\Delta} \tag{46.10}$$

जहाँ $\boldsymbol{\Upsilon}_0$ और $\boldsymbol{\Upsilon}_x$ क्रमशः $\mathbf{F}_0$ तथा $\{\mathbf{F}_x\}$ के अनुरूप सापेक्ष विस्थापन हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

30 फलतः आंतरिक कार्य होगा:

$$W_{int} = \frac{1}{2}\lfloor\ \mathbf{F}_0 \mid \mathbf{F}_x\ \rfloor \left[\frac{[\mathcal{A}_0]}{[\mathcal{A}_x]}\right] \boldsymbol{\Delta}$$

31 पूर्ववत् बाह्य कार्य को आंतरिक कार्य $W_{ext} = W_{int}$ के बराबर रखकर और सरलीकृत करने पर मिलता है:

$$\mathcal{B}_0^T = \mathcal{A}_0$$
$$\mathcal{B}_x^T = \mathcal{A}_x$$

VERIFY

46.3 स्थैतिकी आव्यूह के प्रतिलोम द्वारा शुद्धगतिक संबंध

32 अब हम स्थैतिकी आव्यूह के प्रतिलोम द्वारा विस्थापनों के बीच कुछ अतिरिक्त संबंध व्युत्पन्न करना चाहते हैं। इन संबंधों का उपयोग आगे नम्यता विधियों में होगा और इनका तत्काल कोई अनुप्रयोग नहीं है। समीकरण 46.10 को इस प्रकार पुनर्लिखते हुए

$$\boldsymbol{\Delta} = [\mathcal{A}_0]^{-1}\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\} = \left[[\mathcal{B}_0]^t\right]^{-1}\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\} = \left[[\mathcal{B}_0]^{-1}\right]^t\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\} \tag{46.11}$$

हम $\{\mathbf{F}_0\}$ के लिए समीकरण 46.4 से हल कर सकते हैं

$$\{\mathbf{F}_0\} = \underbrace{[\mathcal{B}_0]^{-1}}_{[C_1]}\mathbf{P} - \underbrace{[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x]}_{[C_2]}\{\mathbf{F}_x\}$$

33 इस समीकरण को $[\mathcal{B}_0]^{-1} = [C_1]$ के साथ, जो समीकरण 46.5 से है, और समीकरण 46.11 के साथ संयोजित करने पर हमें मिलता है

$$\boldsymbol{\Delta} = [C_1]^t\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\}$$

34 इसी प्रकार हम समीकरण 46.10 पर पुनः विचार करके लिख सकते हैं

$$\{\boldsymbol{\Upsilon}_x\} = [\mathcal{A}_x]\boldsymbol{\Delta}$$

पूर्ववर्ती समीकरण को समीकरण 46.3 और 46.11 के सबसे दाएँ पक्ष के साथ संयोजित करने पर हमें मिलता है

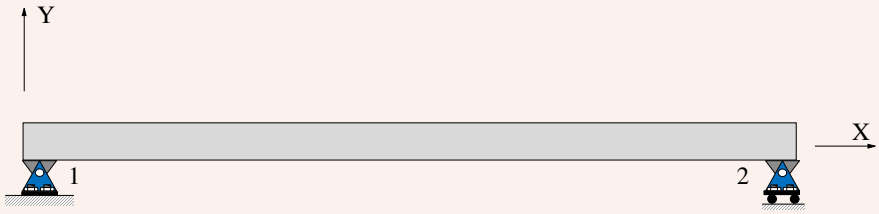
$$\{\boldsymbol{\Upsilon}_x\} = [\mathcal{B}_x]^t\left[[\mathcal{B}_0]^{-1}\right]^t\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\}$$

35 अतः $[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x] = -[C_2]$ के साथ, जो समीकरण 46.6 से है,

$$\{\boldsymbol{\Upsilon}_x\} = -[C_2]^t\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\} \tag{46.12}$$

यह समीकरण अज्ञात सापेक्ष विस्थापनों को ज्ञात सापेक्ष विस्थापनों से संबंधित करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 46.2: स्थिर और स्थैतिकतः निर्धार्य अवयव

46.4 दृढता-नम्यता संबंध

उद्देश्य

36 दृढता और नम्यता दोनों विधियाँ प्रस्तुत करने के बाद अब हम संरचना स्तर पर दोनों आव्यूहों $\mathbf{K}$ और $[\mathbf{D}]$ के बीच संबंध पर कठोरतापूर्वक विचार करेंगे।

37 हमारी व्युत्पत्तियों का आरंभिक बिंदु समीकरण 44.1 है

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}_t\\ \hline \mathbf{P}_u\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu}\\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\Delta}_t\\ \hline \boldsymbol{\Delta}_u\end{array}\right\}$$

46.4.1 दृढता से नम्यता

38 $\mathbf{d}$ प्राप्त करने के लिए संरचना को स्थिर और स्थैतिकतः निर्धार्य ढंग से आलंबित होना चाहिए, जैसे चित्र 46.2 की धरन। जिसके लिए हमें मिलेगा:

$$\boldsymbol{\delta}_f = \left\{\begin{array}{c}\theta_1\\ \theta_2\end{array}\right\} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\delta}_s = \left\{\begin{array}{c}v_1\\ v_2\end{array}\right\}$$

$$\mathbf{p}_t = \left\{\begin{array}{c}M_1\\ M_2\end{array}\right\}$$

$$\mathbf{p}_s = \left\{\begin{array}{c}V_1\\ V_2\end{array}\right\}$$

39 चूँकि $\{\boldsymbol{\delta}_u\} = \{\mathbf{0}\}$ है, उपर्युक्त समीकरण लघुकृत होकर बनता है:

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{p}_f\\ \mathbf{p}_s\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{k}_{tt}\\ \mathbf{k}_{ut}\end{array}\right]\boldsymbol{\delta}_f$$

और हमें मिलेगा:

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{k}_{tt}\boldsymbol{\delta}_t \tag{46.13}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 46.1: दृढता-नम्यता संबंध

$$\mathbf{d} = \mathbf{k}_{tt}^{-1}$$

46.4.1.1 उदाहरण 46.6: नम्यता आव्यूह

यह एक सरल प्रकरण है, जिसमें चित्र 46.2 से आरंभ करके आघूर्ण-घूर्णन संबंध है

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{EI}{L} \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right]}_{\mathbf{k}_{tt}} \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

अतः:

$$\mathbf{k}_{tt}^{-1} = \mathbf{d} = \frac{L}{EI} \frac{1}{12} \left[\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{array} \right] = \frac{L}{6EI} \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right]$$

46.4.2 नम्यता से दृढता

40 हम इससे आरंभ करते हैं

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_f^{\checkmark} \\ \hline \mathbf{p}_s^{?} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{tu} \\ \hline \mathbf{k}_{ut} & \mathbf{k}_{uu} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\delta}_f^{?} \\ \hline \boldsymbol{\delta}_s^{\checkmark} \end{array} \right\} \tag{46.14}$$

और दृढता आव्यूह के प्रत्येक पद को अलग-अलग व्युत्पन्न करना चाहेंगे।

41 $\mathbf{k}_{tt}$: समीकरण 46.14 से $\mathbf{k}$ को मुक्त और आलंबित स्वतंत्रता-कोटियों में विभाजित किया गया था, और हमने दर्शाया है कि $\mathbf{k}_{tt} = \mathbf{d}^{-1}$, अथवा $\mathbf{p}_t = \mathbf{k}_{tt}\boldsymbol{\delta}_t$, किंतु अभी $\mathbf{k}_{tu}$, $\mathbf{k}_{ut}$ और $\mathbf{k}_{uu}$ निर्धारित करने हैं।

42 $\mathbf{k}_{ut}$: चूँकि $\mathbf{d}$ एक स्थिर स्थैतिकतः निर्धार्य संरचना के लिए प्राप्त किया जाता है, हमें मिलता है:

$$\mathbf{p}_u = \mathcal{B} \underbrace{\mathbf{p}_t}_{\text{Eq. 46.13}} \tag{46.15}$$

$$= \underbrace{\mathcal{B}\mathbf{k}_{tt}}_{\mathbf{k}_{ut}} \boldsymbol{\delta}_t \tag{46.16}$$

$$\mathbf{k}_{ut} = \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} \tag{46.17}$$

जहाँ $\mathbf{P} \equiv \mathcal{B}\mathbf{F}$ स्थैतिकी साम्य आव्यूह है (समीकरण 46.1)।

43 $\mathbf{k}_{tu}$: बाह्य कार्य को आंतरिक कार्य के बराबर रखते हुए:

1. बाह्य कार्य: $W_{ext} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_t\mathbf{p}_t$
2. आंतरिक कार्य: $W_{int} = \frac{1}{2}\mathbf{p}_u\boldsymbol{\delta}_u$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

W_{ext} को W_{int} के बराबर रखकर और इसके साथ संयोजित करने पर

$$\mathbf{p}_u = \boldsymbol{\delta}_t \mathbf{k}_{ut}^T \tag{46.18}$$

समीकरण 46.14 से $\{\boldsymbol{\delta}_u\} = \{\mathbf{0}\}$ (शून्य आलंब विस्थापन) के साथ हमें मिलता है:

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{k}_{ut}^T = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T$$

44 $\mathbf{k}_{uu}$: यह अंतिम पद इससे प्राप्त होता है

$$\mathbf{p}_s = \mathcal{B}\mathbf{p}_f \tag{46.19}$$
$$\mathbf{p}_f = \mathbf{k}_{tu}\boldsymbol{\delta}_s \tag{46.20}$$
$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \tag{46.21}$$

समीकरणों 46.19, 46.20 और 46.21 को संयोजित करने पर हमें मिलता है:

$$\mathbf{p}_u = \underbrace{\mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T}_{\mathbf{k}_{uu}} \boldsymbol{\delta}_u$$

45 संक्षेप में, हमें मिलता है:

परिभाषा 46.2: नम्यता-दृढता संबंध

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right] \tag{46.22}$$

46 अत्यंत महत्त्वपूर्ण अवलोकन यह है कि दृढता आव्यूह स्पष्टतः एकवाची है, क्योंकि दूसरी "पंक्ति" पहली पर ($\mathcal{B}$ के माध्यम से) रैखिकतः आश्रित है और अतः उसका सारणिक शून्य के बराबर है।

46.4.2.1 उदाहरण 46.7: नम्यता से दृढता

चित्र 46.2 के संदर्भ में और M_1 तथा M_2 दोनों को धनात्मक (वामावर्त) मानते हुए:

1. नम्यता आव्यूह है:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{L}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. बाह्य बलों को आंतरिक बलों से संबंधित करने वाला स्थैतिकी आव्यूह $\mathcal{B}$ है:

$$\left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right]}_{\mathcal{B}} \left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\}$$

3. $\mathbf{k}_{tt}$: सरलतः होगा:

$$\mathbf{k}_{tt} = \mathbf{d}^{-1} = \frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right]$$

4. $\mathbf{k}_{tu}$: ऊपरी अविकरण पद

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T = \frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right] \frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right] = \frac{EI}{L^2}\left[\begin{array}{cc} 6 & -6 \\ 6 & -6 \end{array} \right]$$

5. $\mathbf{k}_{ut}$: निचला अविकरण पद

$$\mathbf{k}_{ut} = \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} = \frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right] \frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right] = \frac{EI}{L^2}\left[\begin{array}{cc} 6 & 6 \\ -6 & -6 \end{array} \right]$$

6. $\mathbf{k}_{uu}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{uu} &= \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T = \mathbf{k}_{ut}\mathcal{B}^T \\ &= \frac{EI}{L^2}\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc} 6 & 6 \\ -6 & -6 \end{array} \right]\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right] = \frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{array} \right] \end{aligned}$$

ध्यान दें कि हम पुनर्लिख सकते हैं:

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \hline V_1 \\ V_2 \end{array} \right\} = \frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc|cc} 4L^2 & 2L^2 & 6l & -6l \\ 2L^2 & 4L^2 & 6l & -6l \\ \hline 6l & 6l & 12 & -12 \\ -6l & -6l & -12 & 12 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \hline v_1 \\ v_2 \end{array} \right\}$$

दृढता आव्यूह को पुनर्व्यवस्थित करने पर मिलेगा:

$$\left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ M_1 \\ \hline V_2 \\ M_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{-12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & \frac{-6}{L} & 2 \\ \hline \frac{-12}{L^2} & \frac{-6}{L} & \frac{12}{L} & \frac{-6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & \frac{-6}{L} & 4 \end{array} \right]}_{\mathbf{k}} \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ \hline v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

और यह पूर्व में व्युत्पन्न वही दृढता आव्यूह है। पंक्तियों और स्तंभों की रैखिक आश्रितता इसी आव्यूह के निम्नलिखित व्यंजक से रेखांकित होती है।

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & \frac{k^r_{11}+k^r_{21}}{L} & -\frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & \frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} \\ \frac{k^r_{11}+k^r_{21}}{L} & k^r_{11} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} & k^r_{12} \\ -\frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & -\frac{k^r_{12}+k^r_{22}}{L} & \frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} \\ \frac{k^r_{12}+k^r_{22}}{L} & k^r_{21} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} & k^r_{22} \end{array} \right]$$

जहाँ k^r, k_{tt} के अनुरूप है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

46.4.2.2 उदाहरण 46.8: वक्र अवयव का दृढता आव्यूह

हम त्रिज्या R और कोण θ अंतरित करने वाले वृत्तीय चाप का दृढता आव्यूह निर्धारित करना चाहते हैं। पहले हम कैंटिलीवर चाप का नम्यता आव्यूह इससे निर्धारित करते हैं

$$\delta U = \int_s \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{R}{EI}\int_0^\theta \delta\overline{M}M d\phi$$

जहाँ M भारों द्वारा स्वेच्छ बिंदु A पर उत्पन्न वास्तविक आघूर्ण है और $\delta\overline{M}$ एकक भार द्वारा A पर उत्पन्न आभासी आघूर्ण है।

47 अतः नम्यता आव्यूह होगा:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix}$$

और

$$M = M_3 + N(R - R\cos\phi) + V(R_2\sin\phi)$$

$\delta\overline{M}+$ $\qquad 1_3 = R(1-\cos_1\phi) + R\sin_2\phi$

$f_{ij} =$ Disp. in DOF i caused by unit load in DOF j

$$f_{11} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta \delta M_{p1}\cdot M_{D1}d\phi$$
$$= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2(1-\cos\phi)^2 d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\int_o^\theta (1-2\cos\phi+\cos^2\phi)d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[\phi - 2\sin\phi + \phi/2 = 1/4\sin 2\phi\right]_o^\theta$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2\sin\phi(1-\cos\phi)d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\int_o^\theta (\sin\phi - \cos\phi\sin\phi)d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[-\cos\phi - \frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_o^\theta$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[(-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta) - (-1-0)\right]$$
$$= f_{21} = \frac{R^3}{EI}\left[1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$
\begin{aligned}
f_{13} = f_{31} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R(1-\cos\phi)d\phi \\
&= \frac{R^2}{EI}\left[\phi - \sin\phi\right]_o^\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left[\theta - \sin\theta\right] \\
f_{22} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2\sin^2\phi d\phi \\
&= \frac{R^3}{EI}\left[\frac{\phi}{\partial} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_o^\theta \\
&= f_{22}\frac{R^3}{EI}\left[\frac{\theta}{\partial} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right] \\
f_{23} = f_{32} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R\sin\phi d\phi \\
&= \frac{R^2}{EI}\left[-\cos\phi\right]_o^\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left[-\cos\theta + 1\right] \\
f_{33} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta d\theta \\
&= \frac{R\theta}{EI}
\end{aligned}
$$

46.4.3 नम्यता और दृढता विधियों के बीच द्वैतता

	नम्यता	दृढता
अनिर्धार्यता	स्थैतिक	शुद्धगतिक
नियंत्रक समीकरण	शुद्धगतिक	साम्य
प्राथमिक अज्ञात	नोडीय बल	नोडीय विस्थापन
परिवर्तनात्मक सिद्धांत	आभासी बल	आभासी विस्थापन
	$\mathbf{P} = \mathcal{B}'\mathbf{P}$	$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Delta}$
	$\mathbf{d}$	$\mathbf{K}$
	$D = \mathcal{B}^T\mathbf{d}\mathcal{B}$	$\mathbf{K} = \Sigma\boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma}$
	$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_P^? \\ \boldsymbol{\Delta}_R^\surd \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\surd \\ \mathbf{R}^? \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}^\surd \\ \mathbf{R}^? \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ff} & \mathbf{D}_{fr} \\ \mathbf{D}_{rf} & \mathbf{D}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_f^? \\ \boldsymbol{\Delta}_r^\surd \end{Bmatrix}$
	$\mathbf{R} = D_{22}^{-1}(\boldsymbol{\Delta}_R - \mathbf{D}_{21}\mathbf{P})$	$\boldsymbol{\Delta}_f = K_{ff}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{fr}\boldsymbol{\Delta}_r)$
	$\boldsymbol{\Delta}_P = D_{11}^{-1}(\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})$	$\mathbf{R} = K_{rf}\boldsymbol{\Delta}_f + \mathbf{k}_{rr}\boldsymbol{\Delta}_r$
	$\mathbf{P} = \mathcal{B}\mathbf{P}$	$\mathbf{P} = \mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Delta}$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

46.5 K के लिए सर्वांगसम रूपांतरण उपागम

टिप्पणी: यह अनुभाग मुख्यतः (Gallagher, 1975) के अनुभाग 3.3 पर आधारित है।

47 §44.4.3 में हमने संवर्धित दृढता आव्यूह संयोजित करने की प्रक्रिया दी है। यह अनुभाग एक वैकल्पिक उपागम का वर्णन करेगा।

48 n अवयवों से बनी स्वेच्छ संरचना के लिए हम वैश्विक निर्देशांकों में *असंयोजित* नोडीय भार और विस्थापन सदिशों को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं

$$\mathbf{P}^{(e)} = \lfloor\ P^1 \quad P^2 \quad \ldots \quad P^n\ \rfloor^T$$
$$\boldsymbol{\Upsilon}^{(e)} = \lfloor\ \Upsilon^1 \quad \Upsilon^2 \quad \ldots \quad \Upsilon^n\ \rfloor^T$$

जहाँ $\{\mathbf{P}^i\}$ और $\{\Delta^i\}$ अवयव i के नोडीय भार तथा विस्थापन व्यूह हैं। प्रत्येक उप-आव्यूह (अधिक शुद्धतः प्रत्येक उप-व्यूह) का आकार अवयव i के लिए वैश्विक निर्देशांकों में स्वतंत्रता-कोटियों की कुल संख्या के बराबर है।

49 इसी प्रकार हम संरचना के असंयोजित (अथवा असमंजित) वैश्विक दृढता आव्यूह को $[\mathbf{K}^{(e)}]$ के रूप में परिभाषित कर सकते हैं:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)}\{\boldsymbol{\Upsilon}\}$$
$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & & & & \\ & \mathbf{K}^2 & & & \\ & & \mathbf{K}^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{K}^n \end{bmatrix}$$

50 ध्यान दें कि इस आव्यूह के अन्य सभी पद शून्य हैं और विभिन्न उप-आव्यूहों में कोई प्रतिच्छेदन नहीं है। अतः यह आव्यूह सभी अवयवों के बीच संयोजकता नहीं दर्शाता।

51 हम निम्नलिखित संबंध स्मरण करते हैं (क्रमशः समीकरण 46.1, 46.8 और 46.9)

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$
$$\mathbf{P} = \mathcal{B}\mathbf{F}$$
$$\mathcal{B}^T = \mathcal{A}$$

अब इन आव्यूहों को दृढता आव्यूह की परिभाषा के साथ संयोजित करते हैं:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathcal{B}\mathbf{F} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathcal{B} &= \mathcal{A}^T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \mathcal{A}^T\mathbf{F} &= \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Upsilon} \\ \boldsymbol{\Upsilon} &= \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta} \end{aligned}\right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

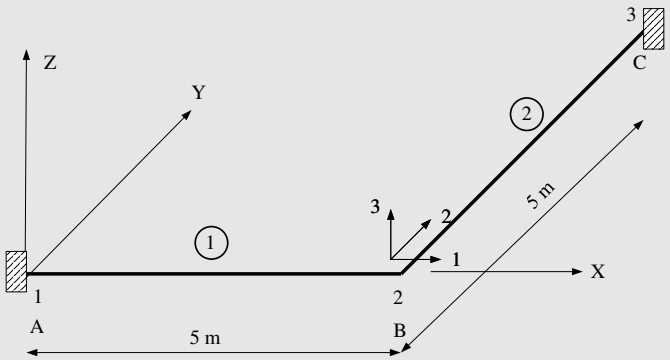
परिभाषा 46.3: सर्वांगसम रूपांतरण

$$\mathbf{K} = \mathcal{A}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathcal{A}$$

52 इस प्रकार हमने संरचना दृढता आव्यूह प्राप्त करने के लिए $[\mathbf{K}^{(e)}]$ के पदों में लिखे असंयोजित वैश्विक दृढता आव्यूह पर सर्वांगसम रूपांतरण परिभाषित किया है। ध्यान दें कि:

1. यदि $\mathbf{K}^{(e)}$ वैश्विक निर्देशांकों में व्यक्त हो, तो $\mathcal{A}$ एक बूलियन आव्यूह है।
2. यदि $\mathbf{K}^{(e)}$ स्थानीय निर्देशांकों में हो, तो $\mathcal{A}$ में अवयव से वैश्विक निर्देशांक प्रणालियों में रूपांतरण सम्मिलित होना चाहिए और वह अब बूलियन नहीं रहता।
3. $\mathbf{K}$ परिसीमा प्रतिबंधों को समाहित करता है, क्योंकि अवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियों से संबद्ध पद सम्मिलित नहीं किए जाते।
4. प्रत्यक्ष दृढता विधि के बीच समानता पर ध्यान दें: $\mathbf{K} = \sum \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Gamma}$ और सर्वांगसम रूपांतरण उपागम: $\mathbf{K} = \mathcal{A}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathcal{A}$।
5. यदि संरचना n अवयवों वाला फ्रेम हो, तो हमें मिलेगा $\mathbf{K}_{neq \times neq} = \sum_1^n \boldsymbol{\Gamma}^T_{6\times 6} \mathbf{K}_{6\times 6} \boldsymbol{\Gamma}_{6\times 6}$ और सर्वांगसम रूपांतरण उपागम: $\mathbf{K}_{neq\times neq} = \mathcal{A}^T_{neq\times 6n} \mathbf{K}^{(e)}_{6n\times 6n} \mathcal{A}_{6n\times neq}$.
6. सर्वांगसम उपागम प्रत्यक्ष दृढता विधि से कम दक्ष प्रतीत होता है, क्योंकि $\mathbf{K}^{(e)}$ और $\mathcal{A}$ दोनों $\mathbf{K}$ से बड़े हैं।

46.5.1 उदाहरण 46.9: सर्वांगसम रूपांतरण



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हम ऊपर दर्शाए ग्रिड का वैश्विक दृढता आव्यूह प्रत्यक्ष दृढता विधि और सर्वांगसम रूपांतरण विधि द्वारा संयोजित करना चाहते हैं। वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में 2 अवयव दृढता आव्यूह हैं:

$$\mathbf{K}_{AB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7.692 & 0. & 0. & -7.692 & 0. & 0. \\ & .4\times10^5 & -12. & 0. & .2\times10^5 & 12. \\ & & .0048 & 0. & -12. & -.0048 \\ \hline & & & 7.692 & 0. & 0. \\ & & & & .4\times10^5 & 12. \\ & & & & & .0048 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{K}_{BC} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1\times10^5 & 0. & 18.75 & .5\times10^5 & 0. & -18.75 \\ & 14.423 & 0. & 0. & -14.423 & 0. \\ & & .00469 & 18.75 & 0. & -.00469 \\ \hline & & & 1\times10^5 & 0. & -18.75 \\ & & & & 14.423 & 0. \\ & & & & & .00469 \end{array}\right]$$

हम दोनों उपागमों से वैश्विक दृढता आव्यूह निर्धारित करेंगे:

स्थान आव्यूह LM

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LM}^1 = \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ \rfloor^T$$

$$\mathbf{LM}^2 = \lfloor\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (7.692+1\times10^5) & (0.+0.) & (18.75+0.) \\ (0.+0.) & (.4\times10^5+14.423) & (12.+0.) \\ (0.+18.75) & (12.+0.) & (.0048+.00469) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times10^5 & 0. & 18.75 \\ 0. & .4\times10^5 & 12. \\ 18.75 & 12. & .00949 \end{bmatrix}$$

सर्वांगसम रूपांतरण

1. नोड 2 के लिए असमंजित दृढता आव्यूह $\mathbf{K}^{(e)}$ है:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Upsilon}$$

$$\left\{\begin{array}{c} M_x^1 \\ M_y^1 \\ F_z^1 \\ \hline M_x^2 \\ M_y^2 \\ F_z^2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7.692 & 0 & 0 & & 0. & \\ & .4\times10^5 & 12. & & & \\ \text{sym} & & .0048 & & & \\ \hline & 0. & & 1\times10^5 & 0. & -18.75 \\ & & & & 14.423 & 0. \\ & & & \text{sym} & & .00469 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \Theta_x^1 \\ \Theta_y^1 \\ W_z^1 \\ \hline \Theta_x^2 \\ \Theta_y^2 \\ W_z^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{element 1} \\ \\ \\ \text{element 2} \end{array}$$

ध्यान दें कि अवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियों को अनदेखा करके परिसीमा प्रतिबंध अप्रत्यक्ष रूप से समाहित किए जाते हैं; किंतु अवयवों की संयोजकता इस आव्यूह में परिलक्षित नहीं होती।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. शुद्धगतिकी आव्यूह है:

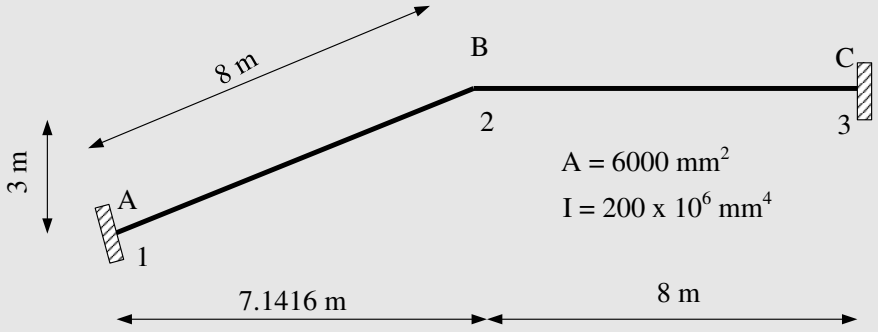
$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\Delta$$

$$\left\{\begin{array}{c}\theta_x^1\\ \theta_y^1\\ w_z^1\\ \hline \theta_x^2\\ \theta_y^2\\ w_z^2\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\theta_x\\ \theta_y\\ w_z\end{array}\right\}$$

शुद्धगतिकी आव्यूह में हम प्रत्येक अवयव के स्थानीय विस्थापनों को वैश्विक विस्थापनों से संबंधित कर रहे हैं। अतः यह आव्यूह संयोजकता आव्यूह के सदृश है। पूर्व में परिभाषित संयोजकता आव्यूह अवयव-संयोजन दर्शाता था, जबकि यह सभी अनवरुद्ध स्वतंत्रता-कोटियों के बीच संयोजकता दर्शाता है।

3. गुणनफल $\mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$ लेने पर ऊपर दर्शाया $\mathbf{K}$ पुनर्प्राप्त होगा।

46.5.2 उदाहरण 46.10: फ्रेम का सर्वांगसम रूपांतरण



अब हम स्थान-निर्धारक आव्यूह तथा दोनों सर्वांगसम उपागमों का उपयोग करके फ्रेम का दृढता आव्यूह संयोजित करना चाहते हैं। स्थानीय निर्देशांक प्रणाली में अवयवों AB और BC के दृढता आव्यूह हैं:

$$\mathbf{K}_{AB} = \mathbf{K}_{BC} = 200\left[\begin{array}{cccccc}.75&0.&0.&-.75&0.&0.\\ &.00469&18.75&0&-.0048&18.75\\ &&1\times10^5&0&-18.75&.5\times10^5\\ &&&.75&0.&0.\\ \text{sym}&&&&.00469&-18.75\\ &&&&&1\times10^5\end{array}\right]$$

जबकि घूर्णन आव्यूह है:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{AB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}.9272&.375&0.&0.&0.&0.\\ -.375&.927&0.&0.&0.&0.\\ 0.&0.&1&0.&0.&0.\\ \hline 0.&0.&0.&.9272&.375&0.\\ 0.&0.&0.&-.375&.9272&0.\\ 0.&0.&0.&0.&0.&1\end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{BC} = \mathbf{I}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तब वैश्विक निर्देशांकों में अवयव दृढता आव्यूह होंगे:

$$\mathbf{K}_{AB} = \boldsymbol{\Gamma}_{AB}^T \mathbf{K}_{AB} \boldsymbol{\Gamma}_{AB}$$

$$= 200 \begin{bmatrix} .645 & .259 & -7.031 & -.645 & -.259 & -7.031 \\ & .109 & 17.381 & -.259 & -.109 & 17.381 \\ & & 1\times 10^5 & 7.031 & -17.381 & .5\times 10^5 \\ & & & .645 & .259 & 7.031 \\ & \text{sym} & & & .109 & -17.381 \\ & & & & & 1\times 10^5 \end{bmatrix}$$

और $\mathbf{K}_{BC} = \mathbf{K}_{BC}$

स्थान-निर्धारक आव्यूह: हम वैश्विक दृढता आव्यूह सरलता से संयोजित कर सकते हैं:

$$\mathbf{K} = 200 \begin{bmatrix} (.645+.75) & (.259+0.) & (7.031+0.) \\ & (.109+.00469) & (-17.38+18.75) \\ \text{sym} & & (1+1)\times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$= 200 \begin{bmatrix} 1.395 & .259 & 7.031 \\ & .1137 & 1.37 \\ \text{sym} & & 2\times 10^5 \end{bmatrix} \tag{46.23}$$

सर्वांगसम रूपांतरण, वैश्विक अक्ष, बूलियन $\mathcal{A}$

1. हम वैश्विक निर्देशांक प्रणाली में असंयोजित वैश्विक दृढता आव्यूह से आरंभ करते हैं:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)} \boldsymbol{\Upsilon}$$

$$\left\{\begin{array}{c} P_X^1 \\ P_Y^1 \\ M_Z^1 \\ \hline P_X^2 \\ P_Y^2 \\ M_Z^2 \end{array}\right\} = 200 \left[\begin{array}{ccc|ccc} .645 & .259 & 7.031 & & & \\ & .109 & -17.381 & & 0 & \\ \text{sym} & & 1\times 10^5 & & & \\ \hline & & & .75 & 0. & 0. \\ & 0 & & & .00469 & 18.75 \\ & & & \text{sym} & & 1\times 10^5 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} U_X^1 \\ V_Y^1 \\ \Theta_Z^1 \\ \hline U_X^2 \\ V_Y^2 \\ \Theta_Z^2 \end{array}\right\}$$

2. इसके बाद शुद्धगतिकी आव्यूह $\mathcal{A}$ निर्धारित करते हैं:

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

$$\left\{\begin{array}{c} u^1 \\ v^1 \\ \theta^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ \theta^2 \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} u \\ v \\ \theta \end{array}\right\}$$

3. अंततः यदि हम गुणनफल लें $\underbrace{\mathcal{A}^T}_{3\times 6} \underbrace{\mathbf{K}^{(e)}}_{6\times 6} \underbrace{\mathcal{A}}_{6\times 3}$ तो संरचना का वैश्विक दृढता आव्यूह $\mathbf{K}$ प्राप्त होता है, जो समीकरण 46.23 में है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सर्वांगसम रूपांतरण (स्थानीय अक्ष):

1. स्थानीय निर्देशांकों में असंयोजित दृढता आव्यूह:

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

$$\left\{\begin{array}{c} P_X^1 \\ P_Y^1 \\ M_Z^1 \\ \hline P_X^2 \\ P_Y^2 \\ M_Z^2 \end{array}\right\} = 200 \left[\begin{array}{ccc|ccc} .75 & 0. & 0. & & & \\ & .00469 & -18.75 & & & \\ \text{sym} & & 1\times 10^5 & & & \\ \hline & & & .75 & 0. & 0. \\ & & & & .00469 & 18.75 \\ & & & \text{sym} & & 1\times 10^5 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u_x^1 \\ v_y^1 \\ \theta_z^1 \\ \hline u_x^2 \\ v_y^2 \\ \theta_z^2 \end{array}\right\}$$

2. अब शुद्धगतिकी आव्यूह $[\mathcal{A}]$ है:

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

$$\left\{\begin{array}{c} u_x^1 \\ v_y^1 \\ \theta_z^1 \\ \hline u_x^2 \\ v_y^2 \\ \theta_z^2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} .9272 & .375 & 0. \\ -.375 & .9272 & 0. \\ 0. & 0. & 1. \\ \hline 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} U_X \\ V_Y \\ \Theta_Z \end{array}\right\}$$

3. गुणनफल $\mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$ लेने पर संरचना का वैश्विक दृढता आव्यूह पुनर्प्राप्त होता है।

46.6 विशेष अवयव

46.6.1 दृढ विस्थापन;

53 अब तक सभी सदस्यों को दृढतः संयोजित और केंद्र रेखा से केंद्र रेखा जोडते हुए माना गया था। अनेक प्रकरणों में हमारे पास काज अथवा अर्ध-दृढ संयोजन होता है और हम सदस्य के विस्थापन को ध्यान में रखना चाह सकते हैं, चित्र 46.3।

मुक्त-पिंड आरेख

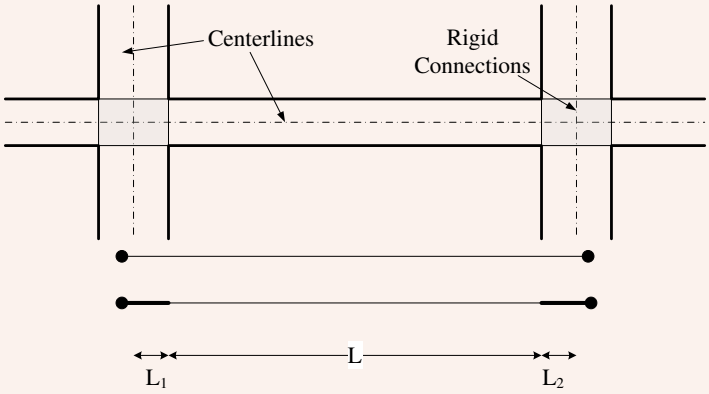
54 संगत मुक्त-पिंड आरेख, चित्र 46.4, देता है

$$\mathbf{p} = \lfloor\ N_1 \quad V_2 \quad M_3 \quad N_4 \quad V_5 \quad M_6\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{p}} = \lfloor\ \overline{N}_1 \quad \overline{V}_2 \quad \overline{M}_3 \quad \overline{N}_4 \quad \overline{V}_5 \quad \overline{M}_6\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{u}} = \lfloor\ \overline{u}_1 \quad \overline{v}_2 \quad \overline{\theta}_3 \quad \overline{u}_4 \quad \overline{v}_5 \quad \overline{\theta}_6\ \rfloor$$

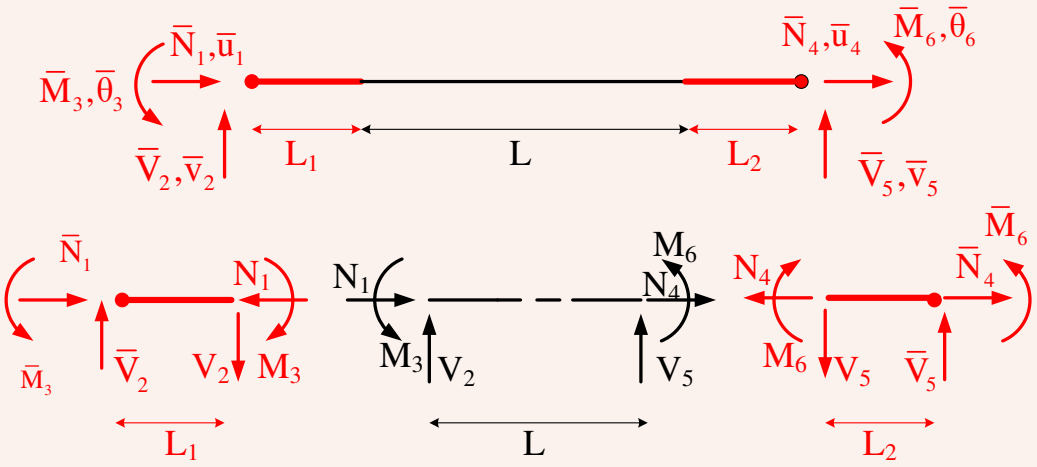
जो क्रमशः दृढ कडी के आंतरिक और बाह्य पक्षों पर कार्यरत बलों तथा बाह्य विस्थापनों को निरूपित करते हैं।

साम्य

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 46.3: दृढ विस्थापन वाली धरन



चित्र 46.4: दृढ विस्थापन वाली धरन का मुक्त-पिंड आरेख

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

55 बाह्य और आंतरिक बल साम्य में होने चाहिए

$$\overline{N}1 = N_1; \quad \overline{V}_2 = V_2; \quad \overline{M}_3 = L_1V_2 + M_3$$
$$\overline{N}4 = N_4; \quad \overline{V}_5 = V_5; \quad \overline{M}_6 = -L_2V_5 + M_6$$

अथवा

$$\overline{\mathbf{p}} = \mathcal{B}\mathbf{p} \tag{46.24}$$

$\mathcal{B}$ *स्थैतिकी आव्यूह* है (समीकरण 46.1)

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & 1 \end{bmatrix}$$

56 इसी प्रकार हम शुद्धगतिकी आव्यूह (समीकरण 46.8) $\mathcal{A}$ इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं कि

$$\mathbf{u} = \mathcal{A}\overline{\mathbf{u}} \tag{46.25}$$

और हम जानते हैं (समीकरण 46.9) कि $\mathcal{A} = \mathcal{B}^T$।

दृढता और NEF आव्यूह

57 अब हम ज्ञात पदों में दृढ विस्थापन वाले धरन अवयव की दृढता निर्धारित करने के लिए तैयार हैं

$$\mathbf{p} + \mathbf{NEF} = \mathbf{ku} \tag{46.26}$$

यदि दोनों पक्षों को $\mathcal{B}$ से गुणा करें और समीकरण 46.24 तथा 46.25 को 46.26 में प्रतिस्थापित करें:

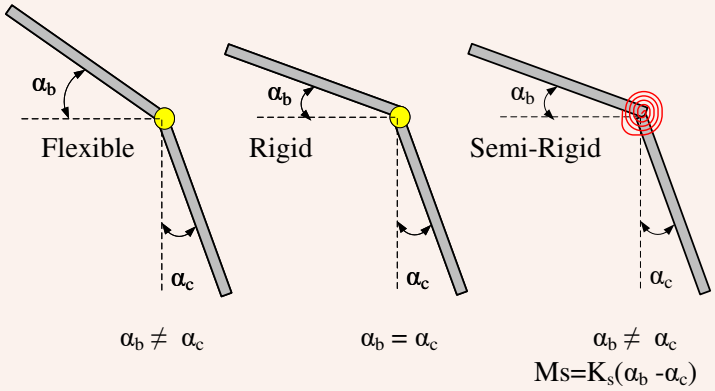
$$\mathcal{B}p + \mathcal{B}\mathbf{NEF} = \mathcal{B}\mathbf{k}\mathcal{A}\overline{\mathbf{u}}$$
$$\mathcal{B}p + \mathcal{B}\mathbf{NEF} = \mathcal{B}\mathbf{k}\mathcal{B}^T\overline{\mathbf{u}}$$
$$\overline{\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{NEF}} = \overline{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}}$$

जहाँ

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & \alpha_1 & 0-12 & \alpha_2 & \\ 0 & \alpha_1 & \gamma & 0-\alpha_1 & \beta & \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -\alpha_1 & 012 & -\alpha_2 & \\ 0 & \alpha_2 & \beta & 0 & -\alpha_2 & \gamma \end{bmatrix}$$

और $\alpha_i = 6L + 12L_i$, $\beta = 2L^2 + 6LL_1 + 6LL_2 + 12L_1L_2$, तथा $\gamma = 4L^2 + 12LL_2 + 12L_2^2$।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 46.5: नम्य, दृढ और अर्ध-दृढ धरन

58 तब नोडीय अंत्य बल होंगे

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{FN_1} \\ \overline{FV_2} \\ \overline{FM_3} \\ \overline{FN_4} \\ \overline{FV_5} \\ \overline{FM_6} \end{Bmatrix}}_{\overline{NEF}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} FN_1 \\ FV_2 \\ FM_3 \\ FN_4 \\ FV_5 \\ FM_6 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

46.6.2 अर्ध-दृढ धरन

टिप्पणी: (Kassimali, 2021, pg. 532) से अनुकूलित।

54 प्रायः धरन का संयोजन न तो पूर्णतः नम्य होता है और न दृढ, बल्कि अर्ध-दृढ होता है (जैसे प्रकार II इस्पात संयोजन), चित्र 46.5।

55 सामान्य धरन अवयव का दृढता आव्यूह समीकरण 41.1 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

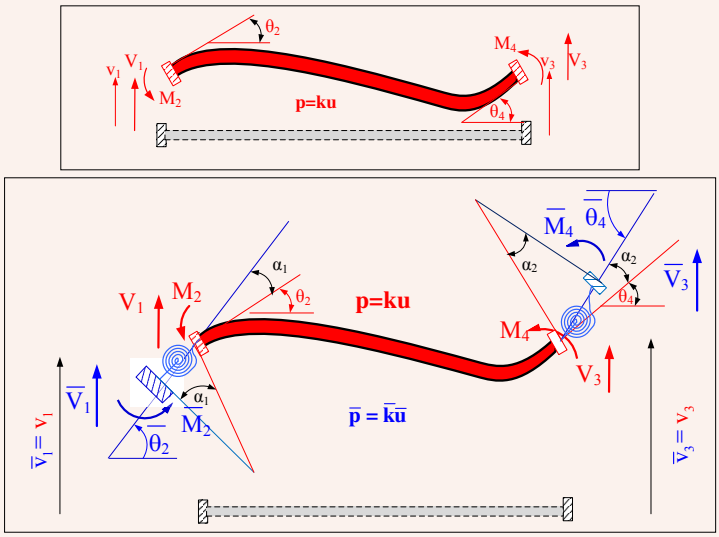
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} FV_1 \\ FM_2 \\ FV_3 \\ FM_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{NEF}} = \underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{46.27}$$

अथवा सरलतः $\mathbf{p} + \mathbf{NEF} = \mathbf{ku}$।

56 अब हम अर्ध-दृढ संयोजन वाले धरन अवयव की दृढता निर्धारित करना चाहते हैं

$$\overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{NEF}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 46.6: अर्ध-दृढ धरन के विरूपण

k, NEF और सदस्य के बाएँ तथा दाएँ सिरे (प्रथम और द्वितीय नोड) पर दो स्प्रिंग दृढताओं k^s_{lft} तथा k^s_{rgt} के पदों में।

मुक्त-पिंड आरेख

57 चित्र 46.6 के संदर्भ में हम इससे निरूपित करते हैं

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \lfloor\ V_1 \quad M_2 \quad V_3 \quad M_4\ \rfloor\\ \overline{\mathbf{p}} &= \lfloor\ \overline{V}_1 \quad \overline{M}_2 \quad \overline{V}_3 \quad \overline{M}_4\ \rfloor\\ \mathbf{u} &= \lfloor\ v_1 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_4\ \rfloor\\ \overline{\mathbf{u}} &= \lfloor\ \overline{v}_1 \quad \overline{\theta}_2 \quad \overline{v}_3 \quad \overline{\theta}_4\ \rfloor\end{aligned}$$

क्रमशः स्प्रिंगों के आंतरिक तथा बाह्य पक्षों पर कार्यरत बल और स्प्रिंगों के आंतरिक तथा बाह्य पक्षों के नोडीय विस्थापन।

साम्य

58 साम्य से $\mathbf{p} = \overline{\mathbf{p}}$ होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[59] विस्थापनों के लिए, स्प्रिंगों को अत्यल्प मानते हुए, हमें मिलता है

$$\begin{aligned} v_1 &= \overline{v}_1 \\ \theta_2 + \alpha_{\text{lft}} = \overline{\theta}_2 \Rightarrow \theta_2 &= \overline{\theta}_2 - \underbrace{\frac{M_2}{k^s_{\text{lft}}}}_{\alpha_{\text{lft}}} \\ v_3 &= \overline{v}_3 \\ \theta_4 + \alpha_{\text{rgt}} = \overline{\theta}_4 \Rightarrow \theta_4 &= \overline{\theta}_4 - \underbrace{\frac{M_4}{k^s_{\text{rgt}}}}_{\alpha_{\text{rgt}}} \end{aligned} \tag{46.28}$$

जहाँ k^s_{lft} और k^s_{rgt} क्रमशः बाएँ तथा दाएँ स्प्रिंग हैं।

[60] समीकरण 46.28 को समीकरण 46.27 में प्रतिस्थापित करने पर मिलता है

$$\begin{aligned} \overline{V}_1 + FV_1 &= \frac{EI}{L^3}\left[12\overline{v}_1 + 6L\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 12\overline{v}_3 + 6L\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\ \overline{M}_2 + FM_2 &= \frac{EI}{L^3}\left[6L\overline{v}_1 + 4L^2\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 6L\overline{v}_3 + 2L^2\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\ \overline{V}_3 + FV_3 &= \frac{EI}{L^3}\left[-12\overline{v}_1 - 6L\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) + 12\overline{v}_3 - 6L\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\ \overline{M}_4 + FM_4 &= \frac{EI}{L^3}\left[6L\overline{v}_1 + 2L^2\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 6L\overline{v}_3 + 4L^2\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \end{aligned} \tag{46.29}$$

[61] ये 4 समीकरण युग्मित हैं (M_2 और M_4 दृढता आव्यूह के भीतर और बाहर दोनों हैं); हम इन्हें अयुग्मित करके बलों को केवल विस्थापन के पदों में व्यक्त करना चाहते हैं।

$$\begin{aligned} \overline{M}_2 = {} & \frac{EI}{L^3}\frac{\phi_b}{\Phi}\left[6L(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 + 4L^2(3-2\phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 - 6L(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 + 2L^2\phi_{\text{rgt}}\overline{\theta}_4\right] \\ & + \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[(4-3\phi_{\text{rgt}})FM_2 - 2(1-\phi_{\text{rgt}})FM_4\right] \\ \overline{M}_4 = {} & \frac{EI}{L^3}\frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[6L(2-\phi_{\text{lft}})\overline{v}_1 + 2L^2\phi_{\text{lft}}\overline{\theta}_2 - 6L(2-\phi_{\text{lft}})\overline{v}_3 + 4L^2(3-2\phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\right] \\ & + \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{lft}})FM_2 + (4-3\phi_{\text{lft}})FM_4 - 2(1-\phi_{\text{lft}})FM_2\right] \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ

$$\phi_{\text{lft}} = \frac{k^s_{\text{lft}} L}{EI + k^s_{\text{lft}} L}$$
$$\phi_{\text{rgt}} = \frac{k^s_{\text{rgt}} L}{EI + k^s_{\text{rgt}} L}$$
$$\Phi = 12 - 8\phi_{\text{lft}} - 8\phi_{\text{rgt}} + 5\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}$$

ϕ की व्याख्या दृढता *गुणक* के रूप में की जा सकती है। दृढ संयोजन के लिए $\phi = 1$, जबकि हिंजित संयोजन के लिए $\phi = 0$।

62 अब इन अंतिम दो समीकरणों को समीकरण 46.29 के प्रथम और तृतीय समीकरणों में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है:

$$\overline{V}_1 = \frac{EI}{\Phi L^3}\Big[12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_b\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 + 6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 - 12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 + 6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\Big] + FV_1 - \frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{lft}})(2 - \phi_{\text{rgt}})FM_2 + (1 - \phi_{\text{rgt}})(2 - \phi_{\text{lft}})FM_4\right]$$
$$\overline{V}_3 = \frac{EI}{\Phi L^3}\Big[-12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_b\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 - 6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 + 12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 - 6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\Big] + FV_3 + \frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{lft}})(2 - \phi_{\text{rgt}})FM_2 + (1 - \phi_{\text{rgt}})(2 - \phi_{\text{lft}})FM_4\right]$$

दृढता आव्यूह

63 इन व्यंजकों को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

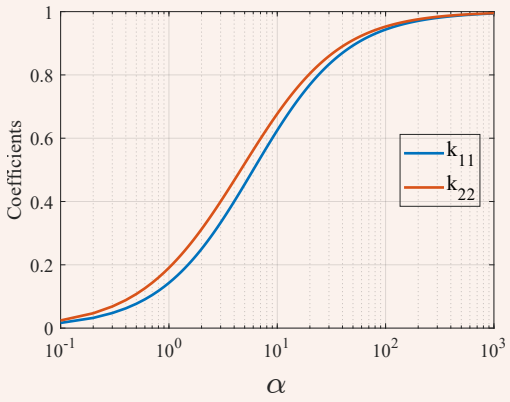
$$\overline{P} = \overline{\mathbf{k}}\overline{u} + \overline{\mathbf{NEF}}$$

जहाँ

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{\Phi L^3}\begin{bmatrix} 12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & 6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}}) & -12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & 6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_{\text{lft}}) \\ 6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}}) & 4L^2\phi_{\text{lft}}(3 - 2\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}}) & 2L^2\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}} \\ -12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}}) & 12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_b) \\ 6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_{\text{lft}}) & 2L^2\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}} & -6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_{\text{lft}}) & 4L^2\phi_{\text{rgt}}(3 - 2\phi_{\text{lft}}) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{FV_1} \\ \overline{FM_2} \\ \overline{FV_3} \\ \overline{FM_4} \end{Bmatrix}}_{\overline{NEF}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{lft}})(2 - \phi_{\text{rgt}})\right] & 0 & -\frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{rgt}})(2 - \phi_{\text{lft}})\right] \\ 0 & \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[(4 - 3\phi_{\text{rgt}})\right] & \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[-2(1 - \phi_{\text{rgt}})\right] \\ 0 & \frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{lft}})(2 - \phi_{\text{rgt}})\right] & 1 \\ 0 & \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1 - \phi_{\text{lft}})\right] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & \\ \frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{rgt}})(2 - \phi_{\text{lft}})\right] & \\ \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1 - \phi_{\text{lft}})\right] & \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} FV_1 \\ FM_2 \\ FV_3 \\ FM_4 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 46.7: अर्ध-नम्य संयोजनों के लिए $\overline{K}_{22}$ गुणांक

64 यह स्पष्ट है कि पूर्णतः दृढ संयोजनों के लिए, $\phi = 1$, धरन का मूल दृढता आव्यूह, समीकरण 46.27, पुनः प्राप्त होता है।

65 यदि स्प्रिंग दृढता k^s को $k^s = \alpha EI/L$ के रूप में व्यक्त करें, तो $\phi = \alpha/(1+\alpha)$। चित्र 46.7 में $\overline{K}_{22}$ गुणांक की α पर निर्भरता दर्शाई गई है (दोनों स्प्रिंगों की दृढता समान मानते हुए)।

प्रेक्षण

66 पूर्णतः दृढ संयोजनों के लिए, $\phi = 1$, हम धरन का मूल दृढता आव्यूह पुनः प्राप्त करते हैं।

67 यदि $\phi_1 = 0$ और $\phi_2 = 1$ रखें, तो बाईं ओर हिंज और दाईं ओर दृढ संयोजन होता है तथा संगत दृढता आव्यूह है:

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3L \\ 3L & 0 & -3L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

68 दाईं ओर हिंज वाले धरन-स्तंभ का दृढता आव्यूह तब होगा:

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 3EI/L^2 & 3EI/L & 0 & -3EI/L^2 & 0 \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & -3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यदि हिंज बाएँ सिरे पर हो

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 & -3EI/L^2 \\ 0 & 3EI/L^2 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L \end{bmatrix}$$

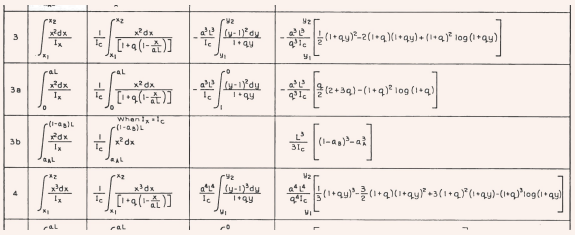
69 सावधान: शून्य स्थानीय स्वतंत्रता-कोटि के अनुरूप वैश्विक स्वतंत्रता-कोटि शून्य नहीं होनी चाहिए, अर्थात किसी अन्य अवयव को वैश्विक पद में "योगदान" देना चाहिए।

70 यदि स्प्रिंग दृढता k^s को $k^s = \alpha EI/L$ के रूप में व्यक्त करें, तो $\phi = \alpha/(1+\alpha)$। $\overline{K}_{22}$ गुणांक की α पर निर्भरता दोनों स्प्रिंगों की दृढता समान मानकर प्राप्त होती है।

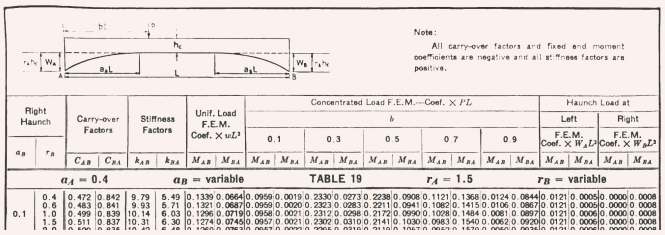
46.6.3 परिवर्ती अनुप्रस्थ काट

71 सामान्यतः आलंबों पर ऋणात्मक आघूर्ण केंद्र के धनात्मक आघूर्णों से बडे होते हैं। फलतः आलंब पर अधिक गहराई देकर अधिक जडत्वाघूर्ण वाला धरन रखना लाभकारी है। यह एकसमान भार के लिए धरन के आकार को आघूर्ण आरेख के अनुरूप बनाने का व्यावहारिक प्रयास है।

72 अतः ऐसे अवयवों का दृढता आव्यूह निर्धारित करना आवश्यक है। मेरी जानकारी में इस समस्या का सरल समाधान देने वाला कोई प्रकाशन नहीं है; सर्वाधिक प्रामाणिक संदर्भ (Portland Cement Association, 1947) है। यह हस्तपुस्तिका तीन कारणों से उल्लेखनीय उत्कृष्ट उपलब्धि थी: a) जटिल समाकलों के जटिल किंतु सुरुचिपूर्ण विश्लेषणात्मक हल, चित्र 46.8a; b) 26 सारणियों में विचार किए गए 1,320 सदस्य, जिनमें 25 भिन्न विमा-समुच्चय थे, चित्र 46.8b; c) उपयोग की सरलता। और ये गणनाएँ 1947 में, कंप्यूटर युग से बहुत पहले, की गई थीं! चित्र 46.9 के संदर्भ में हम परिभाषित करते हैं



(a) जटिल विश्लेषणात्मक समाकलन



(b) संख्यात्मक मान

चित्र 46.8: फ्रेम नियतांकों की हस्तपुस्तिका से उद्धरण (Portland Cement Association, 1947)

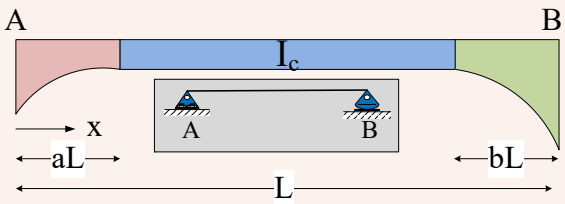
a सिरे A पर हांच की लंबाई और विस्तृति की लंबाई का अनुपात
b सिरे B पर हांच की लंबाई और विस्तृति की लंबाई का अनुपात
h_a आलंब A पर ऊँचाई
h_b आलंब B पर ऊँचाई

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

h_c मध्य-विस्तृति पर ऊँचाई
I_c मध्य-विस्तृति पर काट का जड़त्वाघूर्ण
I_x A से x दूरी पर किसी काट का जड़त्वाघूर्ण
r_a सिरे A पर आयताकार अनुप्रस्थ काट के लिए $(h_A - h_c)/h_c$
r_b सिरे B पर आयताकार अनुप्रस्थ काट के लिए $(h_B - h_c)/h_c$
x परिवर्ती बिंदु से सिरे A तक दूरी

और परिवर्ती जड़त्वाघूर्ण के लिए निम्न समीकरणों का उपयोग करते हैं:

$$I_x = \begin{cases} Ic\left[1 + r\left(1 - \frac{x}{aL}\right)^2\right]^3 & \text{परवलयिक हांच} \\ Ic\left[1 + r\left(1 - \frac{x}{aL}\right)\right]^3 & \text{सीधे हांच} \end{cases} \tag{46.30}$$



चित्र 46.9: परिवर्ती काट वाला धरन

[73] अवयव का दृढता आव्यूह नम्यता तथा स्थैतिक आव्यूहों ($\mathbf{d}$ और $\mathcal{B}$) से निकाला जाएगा (जैसा समीकरण 46.22 में व्युत्पन्न है):

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

[74] साधारण आलंबित धरन के लिए बाह्य और आंतरिक बलों को संबद्ध करने वाला स्थैतिक आव्यूह $\mathcal{B}$ है

$$\begin{Bmatrix} R_1 = V_1 \\ R_2 = V_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{l}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

[75] नम्यता आव्यूह अध्याय 25 में व्युत्पन्न किया गया था, जहाँ बल-विस्थापन संबंध इस प्रकार दिए गए हैं

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} M_1\ M_2 \\ \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पूरक आभासी कार्य (अध्याय 24) का उपयोग करने पर

$$d_{ij} = \int_0^l \delta\overline{M}(x)_i \frac{M(x)_j}{EI_z} dx \tag{46.31}$$

नियत गहराई वाले सदस्य के लिए यह सीधा है।

76 परिवर्ती गहराई वाले सदस्यों के लिए समीकरण 46.30 में दिया जडत्वाघूर्ण समीकरण 46.31 में प्रतिस्थापित कर समाकल को तीन भागों में विभाजित करना होगा:

$$\begin{aligned} d_{ij} = &\int_0^{aL} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_{Ic,a,L,r_a}} dx && \text{बायाँ हांच} \\ &+ \int_{aL}^{L-al} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_c} dx && \text{केंद्रीय भाग} \\ &+ \int_0^{bL} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_{Ic,b,L,r_b}} dx && \text{दायाँ हांच} \end{aligned}$$

77 मैंने इन समीकरणों को Mathematica से हल करने का प्रयास किया, पर प्राप्त विश्लेषणात्मक हल अत्यंत जटिल और अव्यावहारिक था। अतः हल संख्यात्मक रूप से प्राप्त करना आवश्यक है। इसके लिए एक MATLAB®कोड लिखा गया (§I.2.9), जिससे समीकरण 41.1 को परवलयिक अथवा सीधे दोनों प्रकार के हांचों की उपस्थिति दर्शाने हेतु संशोधित किया जा सके।

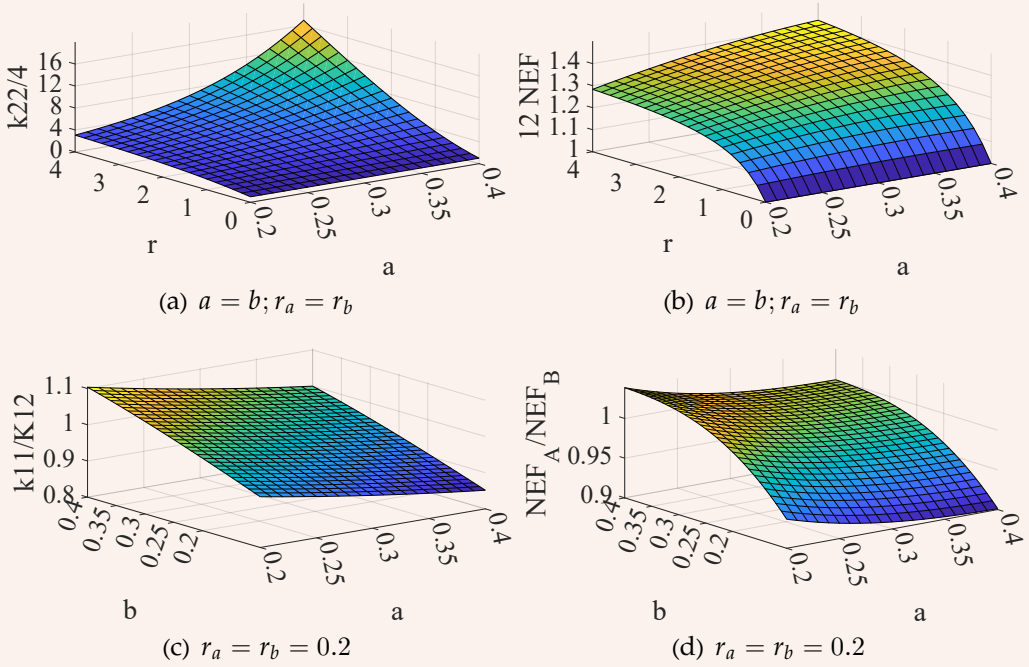
$$\mathbf{k}^b = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

इसका उपयोग $L = I_z = w = 1$ के साथ चित्र 46.10 और 46.11 में दर्शाए आलेख बनाने के लिए किया गया। ध्यान दें कि k_{22} और **NEF** को क्रमशः 4 और 12 से सामान्यीकृत किया गया है (नियत अनुप्रस्थ काट के अनुरूप गुणांक)।

46.7 आघूर्ण फ्रेमों में पार्श्व विस्थापन के स्रोत

78 किसी भवन फ्रेम का गतिक विश्लेषण करने से पहले — उसका प्राकृतिक आवर्तकाल, विधा-आकृतियाँ अथवा भूकंपीय अनुक्रिया ज्ञात करने हेतु — उसकी *पार्श्व दृढता* k को समझना आवश्यक है। प्राकृतिक आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ पूर्णतः इसी राशि से नियंत्रित होता है; k की उत्पत्ति को गलत समझने पर आगे आने वाली प्रत्येक बात अनिवार्यतः गलत समझी जाती है। इसलिए यह अनुभाग किसी जडत्व बल अथवा गतिक प्रभाव के प्रवेश से पहले आघूर्ण-प्रतिरोधी फ्रेम में पार्श्व विस्थापन के स्रोतों का सावधानीपूर्वक विश्लेषणात्मक विच्छेदन प्रस्तुत करता है।

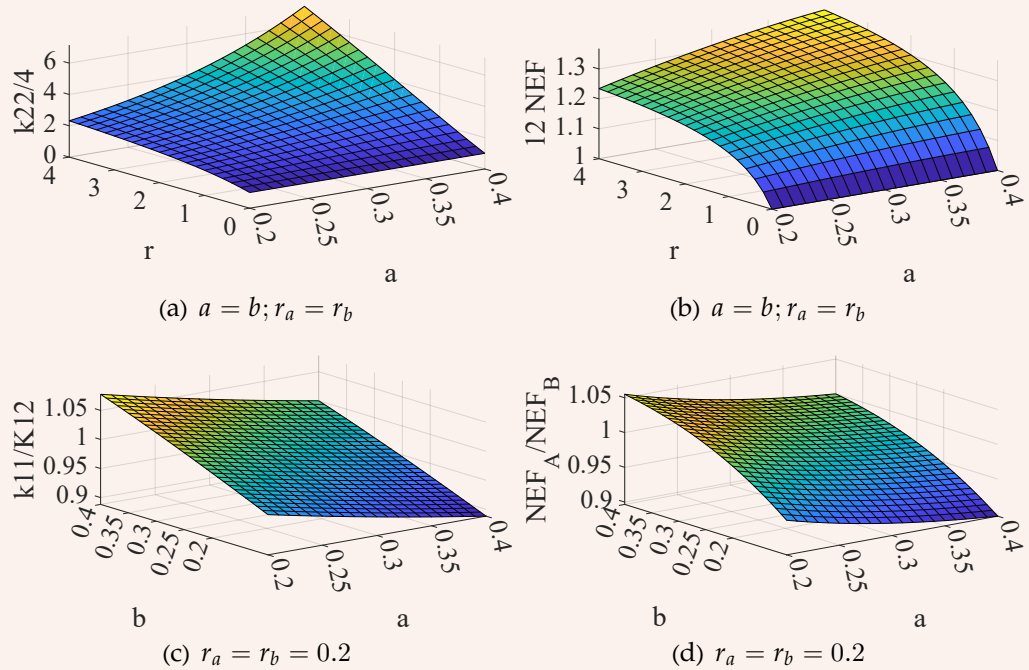
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) $a = b; r_a = r_b$ (b) $a = b; r_a = r_b$

(c) $r_a = r_b = 0.2$ (d) $r_a = r_b = 0.2$

चित्र 46.10: रैखिक रूप से परिवर्ती गहराई वाला काट; प्राचलिक अध्ययन



(a) $a = b; r_a = r_b$ (b) $a = b; r_a = r_b$

(c) $r_a = r_b = 0.2$ (d) $r_a = r_b = 0.2$

चित्र 46.11: परवलयिक रूप से परिवर्ती गहराई वाला काट; प्राचलिक अध्ययन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

79 यहाँ प्रस्तुत प्रश्न Powell, 2008 के एक प्रभावशाली निबंध से प्रेरित हैं। उनका तर्क था कि संरचनात्मक विश्लेषण की शिक्षा शास्त्रीय हस्त-गणना विधियों — ढाल-विक्षेप, आघूर्ण वितरण और दृढता आव्यूह संयोजन — पर अत्यधिक प्रयास करती है, किंतु व्यवहार में वास्तव में महत्त्वपूर्ण बातों पर बहुत कम: संगणित परिणाम का भौतिक अर्थ समझना और यह पहचानना कि वह कब गलत है।

80 Powell का उपाय था कि पहले दिन से ही विद्यार्थी के हाथ में कंप्यूटर प्रोग्राम दिया जाए और निर्देशित संख्यात्मक प्रयोगों से भौतिक अंतर्दृष्टि विकसित होने दी जाए: धरन की दृढता बदलें, विस्थापन देखें, मुक्त-पिंड से साम्य जाँचें और दोहराएँ। हम इस दर्शन से पूर्णतः सहमत हैं और नीचे के प्रश्न Powell की संरचना का निकटता से अनुसरण करते हैं।

81 किंतु इस प्रकार के ग्रंथ में — जो नियमित अभिकल्प व्यवहार विकसित करने के स्थान पर प्रथम सिद्धांतों से संरचनात्मक व्यवहार समझने के इच्छुक पाठकों के लिए है — हम जानबूझकर भिन्न मार्ग अपनाते हैं। कंप्यूटर प्रयोगों से पाठक का मार्गदर्शन करने के बजाय हम फ्रेम प्राचलों V, H, L, EI_c, और EI_b के पदों में संवृत-रूप विश्लेषणात्मक हल व्युत्पन्न करते हैं। कारण सरल है: बीजगणित उस बात को *दृश्य* बनाता है जिसे कंप्यूटर छिपा देता है।

82 संवृत-रूप व्यंजक तुरंत दिखाता है कि कौन-सा प्राचल विस्थापन नियंत्रित करता है, धरन और स्तंभ की नम्यता संधि-साम्य के माध्यम से कैसे परस्पर क्रिया करती है, धरन बदलने पर स्तंभ का नति-परिवर्तन बिंदु क्यों खिसकता है, और हिंजित तथा आबद्ध आधार दृढताओं के बीच चार का गुणक कहाँ से आता है।

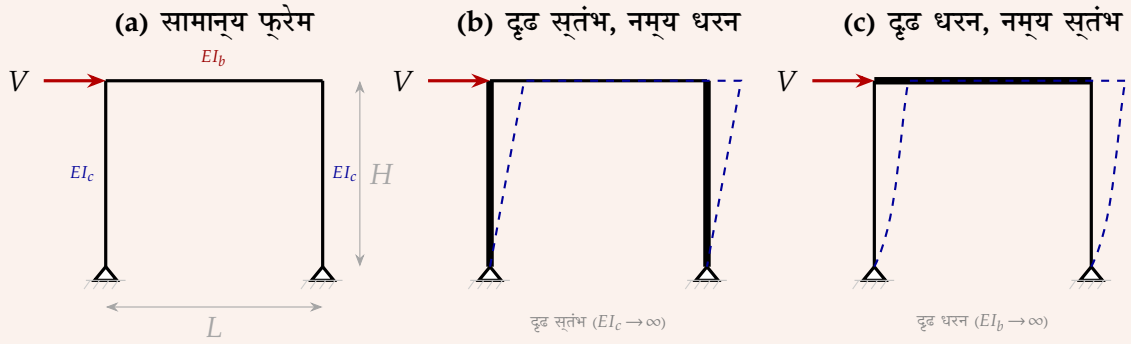
83 ये ठीक वही भौतिक सत्य हैं जिन्हें Powell अभियंताओं से समझाना चाहते हैं; हमारा केवल यह मत है कि गणिताभिमुख पाठक के लिए सुव्याख्यायित विश्लेषणात्मक व्युत्पत्ति प्राचलिक संख्यात्मक अध्ययन की अपेक्षा इस समझ तक अधिक प्रत्यक्ष और स्थायी रूप से पहुँचाती है।

84 दोनों दृष्टिकोण पूरक हैं, प्रतिस्पर्धी नहीं। जिसने एक बार बीजगणित पर काम किया है वह कंप्यूटर परिणाम में D-मान सूत्र तुरंत पहचानेगा, सहज रूप से जान सकेगा कि स्तंभ आरेख में नति-परिवर्तन बिंदु का स्थान युक्तिसंगत है या नहीं, और तुरंत समझेगा कि किसी “दृढ” अवयव को अत्यधिक विशाल दृढता देना संख्यात्मक हल को क्यों दूषित करता है।

85 Powell का कंप्यूटर प्रयोग और नीचे का विश्लेषणात्मक विवेचन अंततः वही भौतिक सत्य सिखाते हैं; उनमें केवल वहाँ तक पहुँचने का मार्ग भिन्न है।

86 पूरे विवेचन में n-मंजिला, m-बे आघूर्ण-प्रतिरोधी फ्रेम पर विचार किया गया है। मंजिलों को 1 (भूतल) से n (छत) तक क्रमांकित किया गया है; मंजिल i की ऊँचाई h_i और बे j की चौड़ाई L_j है। स्तंभ (i, j) की आनमनी दृढता $EI_{c,ij}$ है और स्तर i, बे j के धरन की आनमनी दृढता $EI_{b,ij}$ है। पार्श्व भार $\{F_i\}$ प्रत्येक तल-स्तर पर कार्य करते हैं; स्तर i पर मंजिल अपरूपण उस स्तर के ऊपर का संचयी भार है, $\hat{V}_i = \sum_{k=i}^{n} F_k$। सभी सदस्य प्रिज़्मीय हैं और विश्लेषण रैखिक प्रत्यास्थ है। अन्यथा निर्दिष्ट न होने पर आधार आबद्ध हैं। एक-मंजिला, एक-बे प्रकरण ($n = m = 1$, छत पर भार V, ऊँचाई H, चौड़ाई L) को मुख्य उदाहरण के रूप में प्रयुक्त किया गया है; जहाँ बहु-मंजिला फ्रेम का व्यवहार गुणात्मक रूप से महत्त्वपूर्ण ढंग से भिन्न है, वहाँ सामान्यीकरण स्पष्टतः दिए गए हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



मूल अध्ययन

प्रश्न 1 — पूर्ण फ्रेम विश्लेषण

धरन और स्तंभ दोनों को विरूपणीय मानकर फ्रेम का विश्लेषण कीजिए। स्वतंत्रता-कोटियों की पहचान कीजिए, पार्श्व दृढता की संरचना लिखिए, और छत विस्थापन Δ, स्तंभ सिरा-आघूर्ण तथा स्तंभ अपरूपण को V, H, L, EI_c, EI_b के पदों में ज्ञात कीजिए। बहु-मंजिला सामान्यीकरण के लिए दृढता आव्यूह की संरचना और मंजिल-विस्थापन समीकरणों का वर्णन कीजिए।

समाधान

स्वतंत्रता-कोटियाँ। एक-बे, एक-मंजिला फ्रेम में तीन स्वतंत्र स्वतंत्रता-कोटियाँ हैं: छत पार्श्वगमन Δ तथा दो धरन–स्तंभ संधि घूर्णन θ_L, θ_R। सममिति से $\theta_L = \theta_R \equiv \theta$, अतः निकाय दो अज्ञातों $(\Delta,\, \theta)$ तक घट जाता है।

ढाल-विक्षेप समीकरण। प्रत्येक स्तंभ के लिए (लंबाई H, जीवा घूर्णन $\psi = \Delta/H$, निकट-सिरे का घूर्णन θ, आबद्ध आधार पर दूर-सिरे का घूर्णन 0):

$$M_{\text{top}} = \frac{2EI_c}{H}(2\theta - 3\psi),$$
$$M_{\text{bot}} = \frac{2EI_c}{H}(\theta - 3\psi).$$

धरन के लिए (जीवा घूर्णन नहीं, प्रति-सममिति से दूर-सिरे का घूर्णन $-\theta$):

$$M_{\text{beam}} = \frac{2EI_b}{L}(2\theta + \theta) = \frac{6EI_b}{L}\,\theta.$$

संधि-साम्य (धरन स्तर पर $\sum M = 0$):

$$2M_{\text{top}} + M_{\text{beam}} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{6EI_c\,\Delta/H^2}{8EI_c/H + 2EI_b/L}.$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पार्श्व साम्य ($\sum Q = V$, प्रत्येक स्तंभ अपरूपण $Q = (M_{\text{top}} + M_{\text{bot}})/H$):

$$\boxed{\Delta = \frac{VH^3}{12EI_c} \cdot \frac{1+\rho/2}{1+\rho/6}, \qquad \rho = \frac{6EI_c\,L}{EI_b\,H}.}$$

स्तंभ अपरूपण: $Q = V/2$ (प्रति-सममिति)। स्तंभ सिरा-आघूर्ण:

$$M_{\text{bot}} = \frac{VH}{4} \cdot \frac{1+\rho/3}{1+\rho/6}, \qquad M_{\text{top}} = \frac{VH}{4} \cdot \frac{1+2\rho/3}{1+\rho/6}.$$

बहु-मंजिला सामान्यीकरण। दृढ-डायाफ्राम तलों के साथ पार्श्व स्वतंत्रता-कोटियाँ n तल विस्थापन $\{u_i\}$ हैं। इन्हें सदिश के रूप में क्रमबद्ध करने पर वैश्विक पार्श्व दृढता आव्यूह त्रिविकर्णी है:

$$\mathbf{K}_{\text{sway}} = \begin{bmatrix} k_1{+}k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & k_2{+}k_3 & -k_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -k_n & k_n \end{bmatrix},$$

जहाँ k_i स्तर i की मंजिल दृढता है (सभी स्तंभों का योग, जिसे ऊपर के अनुसार धरन नम्यता के लिए संशोधित किया गया है)। मंजिल विस्थापन $\delta_i = u_i - u_{i-1}$, $\mathbf{K}_{\text{sway}}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ से प्राप्त होते हैं।

प्रश्न 2 — अपरूपण-भवन सीमा: अनंत दृढ धरन

$EI_b \to \infty$ मानिए (चित्र c)। पार्श्व दृढता, छत विस्थापन और स्तंभ आघूर्ण आरेख व्युत्पन्न कीजिए। विकृषेपित आकृति समझाइए और n मंजिलों के लिए सामान्यीकरण कीजिए।

समाधान

$EI_b \to \infty$ होने पर संधि घूर्णन अवरुद्ध हो जाते हैं ($\theta = 0$, $\rho \to \infty$)। प्रत्येक स्तंभ द्विवक्रता में *आबद्ध–आबद्ध* सदस्य की तरह व्यवहार करता है।

पार्श्व दृढता और विस्थापन:

$$k^{\infty} = \frac{24EI_c}{H^3}, \qquad \boxed{\Delta^{\infty} = \frac{VH^3}{24EI_c}.}$$

स्तंभ आघूर्ण (ऊपर और नीचे समान, मध्य-ऊँचाई पर नति-परिवर्तन):

$$M_{\text{top}} = M_{\text{bot}} = \frac{VH}{4}.$$

विकृषेपित आकृति। धरन बिना घूर्णन के दृढ पिंड की भाँति स्थानांतरित होता है। दोनों स्तंभ द्विवक्रता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(S-आकृति) में विरूपित होते हैं और नति-परिवर्तन बिंदु ठीक मध्य-ऊँचाई पर होता है। यह प्रारंभिक अभिकल्प में व्यापक रूप से प्रयुक्त *अपरूपण-भवन* धारणा है।

बहु-मंजिला। स्तर i पर मंजिल दृढता सभी $m+1$ स्तंभों का योग है:

$$k_i = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{12\,EI_{c,ij}}{h_i^3}.$$

प्रत्येक स्तंभ अपनी दृढता के अनुपात में अपरूपण वहन करता है; मंजिलों की संख्या से स्वतंत्र, प्रत्येक स्तंभ का बंकन-आघूर्ण आरेख रैखिक है और नति-परिवर्तन बिंदु मध्य-ऊँचाई पर है। एकल छत भार V के अधीन एकसमान फ्रेम में प्रत्येक मंजिल समान मात्रा $\delta = V/k$ से विस्थापित होती है, जिससे रैखिक रूप से परिवर्ती विस्थापन परिच्छेद प्राप्त होता है।

प्रश्न 3 — धरन-नम्यता सीमा और कैंटिलीवर विधा

बंकन के लिए $EI_c \to \infty$ मानिए, किंतु परिमित अक्षीय दृढता EA_c रखिए (चित्र b)। दिखाइए कि अब फ्रेम स्तंभों के विभेदी अक्षीय विरूपण से संचालित *आनमनी* कैंटिलीवर विधा में विक्षेपित होता है। संगत छत विस्थापन व्युत्पन्न कीजिए और चर्चा कीजिए कि अपरूपण-भवन विधा की तुलना में यह विधा कब महत्त्वपूर्ण होती है।

समाधान

धरन-नम्यता योगदान (एक मंजिल)। जब स्तंभ आनमनी रूप से दृढ हों, तब स्तंभों में बंकन नहीं होता। संधि घूर्णन θ पूर्णतः धरन नम्यता से नियंत्रित होते हैं। संधि-साम्य समीकरण में $EI_c \to \infty$ रखने पर मिलता है

$$\theta = \frac{VH^2\,L}{12\,EI_b},$$

और केवल संधि घूर्णन से विस्थापन ("धरन-नम्यता विस्थापन"):

$$\Delta^{\text{beam}} = \theta H = \frac{VH^3}{12\,EI_b/L \cdot H^2}.$$

कैंटिलीवर (अक्षीय) विधा। आनमनी रूप से दृढ स्तंभों वाले बहु-मंजिला फ्रेम में फ्रेम अपने आधार के परितः ऊर्ध्वाधर कैंटिलीवर की भाँति डोलता है। स्तंभ-अक्षीय निकाय की समतुल्य आनमनी दृढता है

$$EI_{\text{eq}} = \sum_j EA_{c,j}\,s_j^2,$$

जहाँ s_j स्तंभ j की केंद्रकीय अक्ष से दूरी है। तब छत विस्थापन कैंटिलीवर के समान है:

$$\boxed{\Delta^{\text{ax}} = \frac{VH^3}{3\,EI_{\text{eq}}}.}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यह विधा कब महत्त्वपूर्ण है? अक्षीय और अपरूपण-भवन विस्थापन का अनुपात लगभग है

$$\frac{\Delta^{\mathrm{ax}}}{\Delta^{\infty}} \propto \frac{I_c\, H^2}{A_c\, s^2},$$

जो फ्रेम की *तनुता* H/B के साथ बढता है, जहाँ B बे की चौडाई है। निम्न-ऊँचाई फ्रेमों ($H/B < 3$) के लिए अक्षीय विधा नगण्य है। तनु ऊँची इमारतों ($H/B > 6$–8) में यह कुल विस्थापन का 30–50 % योगदान कर सकती है और स्तंभ क्षेत्रफल बढाकर अथवा दृढ कोर जोडकर इसे स्पष्टतः नियंत्रित करना चाहिए।

प्रश्न 4 — विस्थापन घटकों का अध्यारोपण

दिखाइए कि कुल विस्थापन को लगभग इस प्रकार विघटित किया जा सकता है

$$\Delta \approx \Delta^{\mathrm{col}} + \Delta^{\mathrm{beam}} + \Delta^{\mathrm{ax}},$$

समझाइए कि यह विघटन यथार्थ के बजाय सन्निकट क्यों है, और इसके व्यावहारिक महत्त्व पर चर्चा कीजिए।

समाधान

तीन स्रोत। प्रश्न 1 के पूर्ण विस्थापन को प्रथम कोटि तक इस प्रकार लिखा जा सकता है:

(i) **स्तंभ बंकन** Δ^{col}: धरन दृढ होने पर विस्थापन (प्रश्न 2)।
(ii) **धरन नम्यता** Δ^{beam}: स्तंभ दृढ होने पर संधि घूर्णन से अतिरिक्त विस्थापन (प्रश्न 3)।
(iii) **स्तंभ अक्षीय** Δ^{ax}: विभेदी स्तंभ दीर्घीकरण से दोलन विधा (प्रश्न 3)।

इन तीनों को जोडने से सन्निकट सूत्र मिलता है; प्रश्न 1 का यथार्थ परिणाम दिखाता है कि ये तीनों स्रोत संधि-साम्य के माध्यम से परस्पर क्रिया करते हैं और ऐसे अनुप्रस्थ-युग्मन पद उत्पन्न करते हैं जिन्हें सरल योग उपेक्षित करता है। व्यावहारिक फ्रेम अनुपातों के लिए योगात्मक सन्निकटन की त्रुटि सामान्यतः 5–15 % होती है।

यथार्थ क्यों नहीं। स्तंभ बंकन ऐसे संधि घूर्णन उत्पन्न करता है जो धरन आघूर्ण बढाते हैं; धरन नम्यता स्तंभ आघूर्ण घटाती और नति-परिवर्तन बिंदु खिसकाती है; अक्षीय विरूपण प्रभावी स्तंभ ऊँचाई को थोडा बदलता है। ये परस्पर क्रियाएँ केवल पूर्ण दृढता हल में यथार्थतः समाहित होती हैं।

व्यावहारिक महत्त्व। सन्निकटन के बावजूद यह विघटन उपलब्ध सबसे उपयोगी निदान साधन है। यह तुरंत बताता है कि कौन-सा स्रोत प्रमुख है और दृढीकरण कहाँ केंद्रित होना चाहिए: Δ^{col} घटाने के लिए स्तंभ दृढ करें, Δ^{beam} घटाने के लिए धरन दृढ करें, तथा Δ^{ax} घटाने के लिए स्तंभ क्षेत्रफल बढाएँ अथवा अपरूपण भित्ति जोडें। कोई भी कंप्यूटर परिणाम, चाहे कितना ही विस्तृत हो, यह भौतिक समझ सीधे नहीं देता।

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रश्न 5 — साम्य जाँच

मुक्त-पिंड आरेखों से सत्यापित कीजिए कि: (a) स्तंभ अपरूपणों का योग लगाए गए पार्श्व भार के बराबर है; (b) स्तंभ अपरूपण स्तंभ सिरा-आघूर्णों के अनुरूप हैं; (c) धरन–स्तंभ संयोजनों पर संधि आघूर्ण-साम्य संतुष्ट है। बहु-मंजिला फ्रेम के लिए सामान्यीकरण कीजिए।

समाधान

(a) वैश्विक कर्षैतिज साम्य। किसी स्तर पर फ्रेम में कर्षैतिज काट दर्शाता है कि स्तंभ अपरूपणों का योग उस काट के ऊपर के कुल पार्श्व बल के बराबर होना चाहिए। एक-मंजिला फ्रेम के लिए: $Q_L + Q_R = V$। प्रति-सममिति से $Q_L = Q_R = V/2$। बहु-मंजिला फ्रेम में मंजिल i पर: $\sum_j Q_{ij} = \hat{V}_i = \sum_{k \geq i} F_k$. ✓

(b) आघूर्ण–अपरूपण संगति। ऊँचाई h के एक स्तंभ को मुक्त पिंड के रूप में पृथक करने पर:

$$Q = \frac{M_{\text{top}} + M_{\text{bot}}}{h}.$$

प्रश्न 1 के आघूर्ण प्रतिस्थापित करने पर दोनों स्तंभों के लिए $Q = V/2$ की पुष्टि होती है। ✓

(c) संधि आघूर्ण-साम्य। धरन–स्तंभ संधि (छत स्तर, बायाँ स्तंभ) पर:

$$M_{\text{col,top}} + M_{\text{beam,left}} = 0,$$

अर्थात स्तंभ का शीर्ष आघूर्ण उस संधि पर धरन सिरा-आघूर्ण के बराबर और विपरीत होना चाहिए। प्रश्न 1 से प्रतिस्थापन करने पर $M_{\text{col,top}} + \dfrac{6EI_b}{L}\theta = 0$, जो ढाल-विक्षेप संधि-साम्य समीकरण से स्वभावतः संतुष्ट है। ✓

बहु-मंजिला संधि-साम्य। किसी आंतरिक संधि (तल i, स्तंभ रेखा j) पर:

$$M_{ij}^{\text{col,top}} + M_{i+1,j}^{\text{col,bot}} + M_{b,ij}^{\text{left}} + M_{b,ij}^{\text{right}} = 0.$$

इसे प्रत्येक संधि पर सत्यापित करना चाहिए; कोई भी उल्लंघन प्रतिरूपण त्रुटि दर्शाता है। ऐसी साम्य जाँच कंप्यूटर प्रतिरूप में त्रुटियाँ खोजने का सर्वाधिक विश्वसनीय साधन हैं और Powell (Powell, 2008) इन्हें उचित ही अनिवार्य अभियांत्रिकी कौशल मानते हैं।

प्रश्न 6 — प्रत्यक्ष ज्यामिति द्वारा सत्यापन

अपरूपण-भवन सीमा (प्रश्न 2) के लिए आबद्ध–आबद्ध स्तंभ हेतु $\delta = PL^3/12EI$ का उपयोग करके विस्थापन सत्यापित कीजिए। धरन-नम्यता योगदान (प्रश्न 3) के लिए धरन सिरा-घूर्णन सूत्र $\theta = ML/6EI_b$ से अतिरिक्त विस्थापन का आकलन कीजिए। दिखाइए कि इनके संयोजन से D-मान सन्निकटन कैसे प्राप्त होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समाधान

प्रत्यक्ष ज्यामिति से अपरूपण-भवन विस्थापन। ऊँचाई H के आबद्ध–आबद्ध स्तंभ में अपरूपण $Q = V/2$ के अधीन मध्य-ऊँचाई पर नति-परिवर्तन बिंदु बनता है। प्रत्येक आधा भाग लंबाई $H/2$ के आबद्ध कैंटिलीवर की भाँति भार Q के अधीन व्यवहार करता है:

$$\Delta = 2 \times \frac{Q(H/2)^3}{3EI_c} = \frac{VH^3}{24EI_c},$$

जिससे प्रश्न 2 की यथार्थ पुष्टि होती है। ✓

धरन-नम्यता संशोधन। समान और विपरीत सिरा-आघूर्णों M के अधीन प्रति-सममित रूप से मुड़े धरन का सिरा-घूर्णन $\theta = ML/6EI_b$ है। यह संधि घूर्णन स्तंभ-बंकन विस्थापन में θH जोड़ता है। पूर्ण हल से $M = M_{\text{top}}$ रखकर तथा परिणाम को दृढ-धरन विस्थापन पर संशोधन गुणक के रूप में व्यक्त करने से स्तंभ (i, j) का *D-मान* मिलता है:

$$D_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \frac{12\,EI_{c,ij}}{h_i^3}, \qquad \alpha_{ij} = \frac{K_{c,ij}}{K_{c,ij} + \dfrac{1}{2}(K_{b,ij}^{\text{above}} + K_{b,ij}^{\text{below}})},$$

with $K_c = EI_c/h$, $K_b = EI_b/L$. तब धरन नम्यता सहित मंजिल विस्थापन है:

$$\boxed{\delta_i = \frac{\hat{V}_i}{\sum_j D_{ij}}.}$$

D-मान विधि $\alpha = 1$ (दृढ धरन) होने पर यथार्थ परिणाम पुनः प्राप्त करती है और सभी व्यावहारिक दृढता अनुपातों के लिए विश्वसनीय सन्निकटन (सामान्यतः दृढता-आव्यूह परिणाम के 5–10 % के भीतर) देती है।

प्रश्न 7 — धरन सिरा-घूर्णन और आघूर्ण

प्रश्न 1 के छत विस्थापन Δ से संधि घूर्णन θ ज्ञात कीजिए और सत्यापित कीजिए कि धरन दृढता से संगणित धरन सिरा-आघूर्ण वैश्विक विश्लेषण से प्राप्त आघूर्णों के अनुरूप हैं। बहु-मंजिला फ्रेम के लिए सामान्यीकरण कीजिए और किसी सामान्य आंतरिक नोड पर संधि-साम्य समीकरण दीजिए।

समाधान

एक-मंजिला फ्रेम। प्रश्न 1 में व्युत्पन्न संधि-साम्य से:

$$\theta = \frac{6EI_c\,\Delta/H^2}{8EI_c/H + 2EI_b/L}.$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

धरन सिरा-आघूर्ण (प्रति-सममित बंकन, दूर-सिरे का घूर्णन $-\theta$):

$$M_{\text{beam}} = \frac{6EI_b}{L}\,\theta.$$

θ और फिर प्रश्न 1 का Δ प्रतिस्थापित करने पर M_{top} यथार्थतः पुनः प्राप्त होता है। ✓
बहु-मंजिला फ्रेम। किसी सामान्य आंतरिक संधि (तल i, स्तंभ रेखा j) पर संधि-साम्य समीकरण है:

$$\left(\frac{4EI_{c,ij}}{h_i} + \frac{4EI_{c,i+1,j}}{h_{i+1}} + \frac{4EI_{b,ij}}{L_j} + \frac{4EI_{b,i,j-1}}{L_{j-1}}\right)\theta_{ij} = \text{वहन पद} + \text{जीवा-घूर्णन पद}.$$

वहन पद निकटवर्ती संधियों के घूर्णनों से उत्पन्न होते हैं; जीवा-घूर्णन पद अंतर-मंजिल विस्थापनों δ_i और δ_{i+1} के समानुपाती हैं। प्रत्येक संधि पर इस समीकरण का संयोजन और मंजिल-साम्य समीकरणों से युग्मन करने पर प्रश्न 1 में हल किया गया पूर्ण दृढता निकाय प्राप्त होता है।

अतिरिक्त अध्ययन

प्रश्न A1 — हिंजित बनाम आबद्ध आधार

दृढ धरन वाले एक-मंजिला फ्रेम के लिए हिंजित और आबद्ध स्तंभ आधारों की पार्श्व दृढता की तुलना कीजिए। विश्लेषणात्मक रूप से सिद्ध कीजिए कि हिंजित-आधार फ्रेम ठीक चार गुना अधिक नम्य है। दोनों प्रकरणों के बंकन-आघूर्ण आरेख बनाकर उनकी व्याख्या कीजिए। बहु-मंजिला फ्रेम के लिए सामान्यीकरण कीजिए और चर्चा कीजिए कि आधार की दशा ऊपरी मंजिलों में कैसे प्रसारित होती है।

समाधान

आबद्ध आधार, दृढ धरन। प्रत्येक स्तंभ आबद्ध–आबद्ध है; प्रश्न 2 से:

$$k^{\text{fixed}} = \frac{24EI_c}{H^3}, \qquad \Delta^{\text{fixed}} = \frac{VH^3}{24EI_c}.$$

हिंजित आधार, दृढ धरन। प्रत्येक स्तंभ आधार पर हिंजित और शीर्ष पर आबद्ध है (घूर्णन नहीं, दृढ धरन): एक आबद्ध–हिंजित कैंटिलीवर। शीर्ष पर आबद्ध और आधार पर हिंजित स्तंभ के मानक सूत्र से:

$$k_{\text{col}}^{\text{pinned}} = \frac{3EI_c}{H^3}, \qquad k^{\text{pinned}} = \frac{6EI_c}{H^3}, \qquad \Delta^{\text{pinned}} = \frac{VH^3}{6EI_c}.$$

नम्यता अनुपात:

$$\frac{\Delta^{\text{pinned}}}{\Delta^{\text{fixed}}} = \frac{VH^3/6EI_c}{VH^3/24EI_c} = 4. \qquad \checkmark$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4 का अनुपात दृढता गुणांकों के अनुपात से सीधे मिलता है: $12EI/H^3$ (आबद्ध–आबद्ध) बनाम $3EI/H^3$ (आबद्ध–हिंजित)।

बंकन-आघूर्ण आरेख। आबद्ध आधारों के साथ दोनों स्तंभ द्विवक्रता में समान शीर्ष और तल आघूर्ण $M = VH/4$ वहन करते हैं तथा नति-परिवर्तन बिंदु मध्य-ऊँचाई पर होता है। हिंजित आधारों के साथ आघूर्ण आधार पर शून्य है, धरन स्तर पर रैखिक रूप से $M = VH/2$ तक बढता है और स्तंभ बिना नति-परिवर्तन बिंदु के एकल वक्रता में विरूपित होता है। हिंजित आधारों के साथ धरन सिरा-आघूर्ण दोगुना होता है।

बहु-मंजिला फ्रेम। 4 का गुणक केवल *प्रथम मंजिल* पर लागू होता है; ऊपरी मंजिलें ऊपर और नीचे धरनों से सीमित हैं और आधार दशा से स्वतंत्र आबद्ध–आबद्ध रहती हैं। किंतु प्रथम मंजिल का अधिक विस्थापन प्रथम-तल धरनों की आघूर्ण माँग बदल देता है: हिंजित आधारों के साथ इन धरनों को आबद्ध-आधार प्रकरण के दोगुने सिरा-आघूर्ण का प्रतिरोध करना पडता है, जो निम्न-ऊँचाई फ्रेमों में धरन अभिकल्प नियंत्रित कर सकता है।

प्रश्न A2 — परिवर्ती सदस्य आकारों का प्रभाव

चर्चा कीजिए कि विस्थापन परिच्छेद और स्तंभ आघूर्ण वितरण कैसे बदलते हैं जब (a) ऊपरी मंजिलों में स्तंभ आकार घटते हैं और (b) धरन आकार तल के अनुसार बदलते हैं। दृढता अनुपात $\rho = EI_b H/(EI_c L)$ को नियंत्रक प्राचल के रूप में पहचानिए और उसके सीमांत व्यवहार का वर्णन कीजिए।

समाधान

नियंत्रक प्राचल। प्रश्न 1 से पूर्ण विस्थापन है:

$$\Delta = \frac{VH^3}{12EI_c}\cdot\frac{1+\rho/2}{1+\rho/6}, \qquad \rho = \frac{6EI_c\,L}{EI_b\,H}.$$

सीमा	ρ	विस्थापन	स्तंभ आघूर्ण प्रतिरूप
दृढ धरन	$\rho \to 0$	$VH^3/24EI_c$	द्विवक्रता, $M_{\text{top}} = M_{\text{bot}}$
दृढ स्तंभ	$\rho \to \infty$	$VH^3L/(12EI_bH^2)$	एकल वक्रता, $M_{\text{bot}} = VH/2$
व्यावहारिक	$\rho \approx 1$–6	मध्यवर्ती	मिश्रित, मध्य-ऊँचाई से ऊपर नति-परिवर्तन बिंदु

परिवर्ती स्तंभ आकार (बहु-मंजिला)। यदि ऊपरी मंजिलों में स्तंभ आकार, मंजिल अपरूपण की अपेक्षा अधिक तीव्रता से घटते हैं, तो ऊपरी मंजिलें अपेक्षाकृत अधिक नम्य हो जाती हैं और विस्थापन परिच्छेद *शीर्ष-प्रधान* होता है। सुव्यवस्थित फ्रेम सभी स्तरों पर लगभग एकसमान विस्थापन अनुपात δ_i/h_i बनाए रखता है।

नति-परिवर्तन बिंदु का स्थान। स्तंभ (i,j) का नति-परिवर्तन बिंदु मध्य-ऊँचाई से ऊपर उठता है जब नीचे का धरन ऊपर के धरन से अधिक दृढ हो (अथवा हिंजित आधार के निकट पहुँचने पर), और धरनों

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के लगभग समान होने पर मध्य-ऊँचाई की ओर उतरता है। नति-परिवर्तन बिंदु के स्थान का अनुसरण कंप्यूटर आघूर्ण आरेख की युक्तिसंगतता की विश्वसनीय गुणात्मक जाँच है।

प्रश्न A3 — धरन–स्तंभ संयोजनों पर दृढ सिरा-क्षेत्र

प्रत्येक धरन सिरे पर लंबाई $a = d_c/2$ के दृढ सिरा-क्षेत्र जोड़िए और परिमित स्तंभ चौड़ाई d_c को ध्यान में रखिए। दिखाइए कि प्रभावी स्पष्ट विस्तृति $L' = L - d_c$ धरन दृढता गुणांक, D-मान और मंजिल विस्थापन को कैसे बदलती है। क्या ऊँचे फ्रेमों में यह संशोधन अधिक महत्त्वपूर्ण है?

समाधान

संशोधित दृढता गुणांक। सभी धरन दृढता व्यंजकों में पूर्ण विस्तृति L को स्पष्ट विस्तृति $L' = L - d_c$ से प्रतिस्थापित करने पर:

$$K_b' = \frac{EI_b}{L'} > K_b = \frac{EI_b}{L},$$

अधिक α', अधिक D-मान और इसलिए कम विस्थापन प्राप्त होता है:

$$\delta' = \frac{\hat{V}_i}{\sum_j D_{ij}'} < \delta.$$

$d_c \approx 0.4$ m और $L = 6$ m वाले सामान्य इस्पात फ्रेम के लिए संशोधन $L'/L = 5.6/6 \approx 0.93$ है, जिससे $K_b'/K_b \approx 1.07$ (7% अधिक दृढ धरन) और लगभग 5–8% विस्थापन कमी मिलती है।

ऊँचे फ्रेमों में अधिक महत्त्वपूर्ण। ऊँचे फ्रेमों में स्तंभ ऊँचाई संशोधन अनुपाततः अधिक महत्त्वपूर्ण है। यदि $h = 3.5$ m और $d_b = 0.5$ m (धरन गहराई), तो स्पष्ट स्तंभ ऊँचाई $h' = 3.0$ m तथा स्तंभ दृढता अनुपात $(h/h')^3 = (3.5/3.0)^3 \approx 1.59$ है — स्तंभ बंकन दृढता में 59% वृद्धि, जिसे गंभीर विश्लेषण में उपेक्षित नहीं किया जा सकता। बहु-मंजिला फ्रेम में पैनल क्षेत्रों की उपेक्षा सामान्यतः पार्श्व विस्थापन को 15–30% अधिक आँकती है।

प्रश्न A4 — अत्यधिक दृढ स्तंभ: संख्यात्मक परिशुद्धता

दृढ स्तंभों का अनुकरण करने के लिए $EI_c = \alpha\, EI_b$ रखिए, जहाँ $\alpha \gg 1$। दिखाइए कि दृढता आव्यूह की प्रतिबंध संख्या α के साथ कैसे बढ़ती है, संख्यात्मक परिशुद्धता की हानि का आकलन कीजिए और वह व्यावहारिक सीमा पहचानिए जिसके परे परिणाम अविश्वसनीय हो जाते हैं।

समाधान

प्रतिबंध संख्या। संयोजित दृढता आव्यूह की प्रतिबंध संख्या $\kappa(\mathbf{K}) \sim \alpha = EI_c/EI_b$ के रूप में मापित होती है। $\alpha = 10^n$ के लिए हल में परिशुद्धता के लगभग n दशमलव अंक नष्ट होते हैं। मानक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

द्वि-परिशुद्धता अंकगणित (लगभग 15 सार्थक अंक) में उपयोगी परिशुद्धता घटकर $15 - n$ अंक रह जाती है।

बल पुनर्प्राप्ति। विस्थापन स्वीकार्य रूप से यथार्थ रहने पर भी अत्यंत दृढ सदस्य के बल दृढता $\times$ विस्थापन के रूप में संगणित होते हैं: बहुत बडी संख्या को अत्यंत छोटी संख्या से गुणा करना, जो चल-बिंदु अंकगणित में *विनाशकारी निरसन* है। नम्य सदस्यों (धरनों) के बल सामान्यतः विश्वसनीय होते हैं; अत्यधिक दृढ स्तंभों के बल नहीं।

व्यावहारिक सीमा। $\alpha \approx 10^3$–10^4 तक अनुपात मानक द्वि-परिशुद्धता हलकर्ताओं में 50 मंजिल तक के फ्रेमों के लिए सुरक्षित हैं। इसके आगे वरीय उपाय विस्तारित परिशुद्धता नहीं, बल्कि दृढ कडी प्रतिबंध (प्रश्न A5) है।

भौतिक व्याख्या। संख्यात्मक विफलता से पहले ही स्तंभों को धरनों से 100 या अधिक गुना दृढ बनाने पर ऐसे परिणाम मिलते हैं जो वास्तविक दृढ-स्तंभ सीमा से भौतिक रूप से अभेद्य हैं; अतिरिक्त दृढता का विस्थापन अथवा धरन आघूर्णों पर कोई व्यावहारिक प्रभाव नहीं होता। इस परास में अपरूपण-भवन प्रतिरूप फ्रेम का मूलतः यथार्थ वर्णन है।

प्रश्न A5 — दृढ कडी प्रतिबंध: यथार्थ P, M, V मान

प्रश्न A4 के अत्यधिक दृढ स्तंभों को दृढ कडी *प्रतिबंधों* (प्रधान–अनुचर शुद्धगतिक प्रतिबंधों) से प्रतिस्थापित कीजिए। समझाइए कि यह दृष्टिकोण संख्यात्मक रूप से स्थिर और भौतिक रूप से यथार्थ दोनों क्यों है, तथा प्रतिबंधित सदस्य में संगणित $\mathrm{P}, \mathrm{M}, \mathrm{V}$ मान प्रश्न A4 के मानों से क्यों भिन्न हैं। दृढ डायाफ्राम को सर्वाधिक सामान्य विशेष प्रकरण के रूप में पहचानिए।

समाधान

शुद्धगतिक प्रतिबंध। प्रधान नोड A और अनुचर नोड B के बीच दृढ कडी लागू करती है

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{T}_{AB}\,\mathbf{u}_A,$$

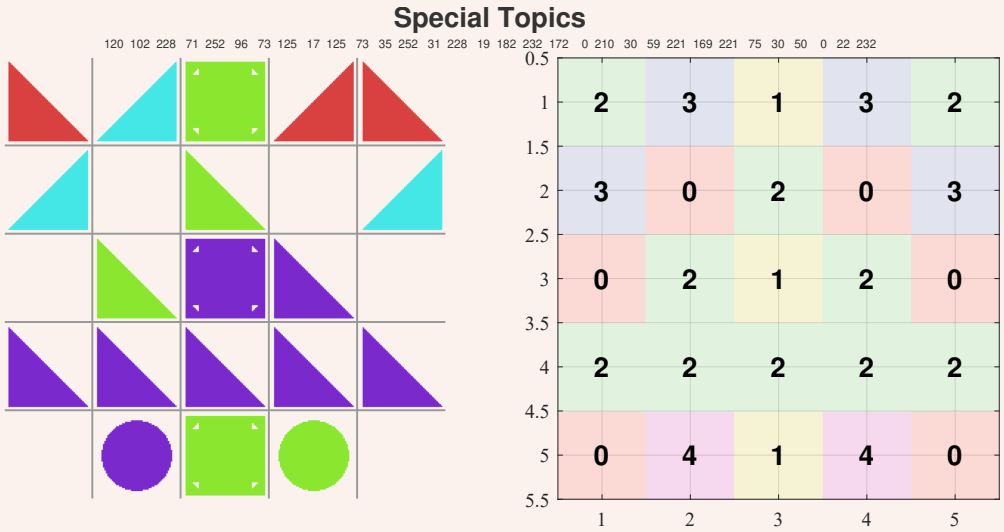
जहाँ $\mathbf{T}_{AB}$ दृढ-पिंड रूपांतरण है। अनुचर स्वतंत्रता-कोटियाँ वैश्विक निकाय से विलोपित कर दी जाती हैं; प्रतिबंध बल केवल *निकटवर्ती नम्य सदस्यों* के साम्य से पुनः प्राप्त होते हैं — गणना में कहीं भी विशाल दृढता नहीं आती। परिणाम संख्यात्मक रूप से यथार्थ और दृढता अनुपात से पूर्णतः स्वतंत्र है।

$\mathbf{P}, \mathbf{M}, \mathbf{V}$ मान प्रश्न A4 से भिन्न क्यों हैं। विशाल-दृढता प्रतिरूप में स्तंभ बल $F = K_c\,\delta$ के रूप में संगणित होते हैं, अर्थात बडी और छोटी संख्या का गुणन, जो केवल $\alpha \to \infty$ पर सही मान की ओर अभिसरित होता है और परिमित परिशुद्धता में विनाशकारी निरसन से ग्रस्त होता है। दृढ कडी में प्रतिबंध बल अनुकूलता लागू करने हेतु आवश्यक यथार्थ स्थैतिक प्रतिक्रिया है, जिसे जुडे नम्य सदस्यों के साम्य से सीधे संगणित किया जाता है। दृढ कडी प्रतिबंधों के उपयोग पर कंप्यूटर प्रतिबंधित अवयव में शून्य आंतरिक $\mathrm{P}, \mathrm{M}, \mathrm{V}$ बताता है (क्योंकि उसमें कोई विरूपण नहीं), और सभी बल प्रतिबंध प्रतिक्रियाओं के रूप में आते हैं — भौतिक रूप से यथार्थ और संख्यात्मक रूप से स्थिर।

दृढ डायाफ्राम। लगभग प्रत्येक बहु-मंजिला भवन प्रतिरूप में प्रयुक्त दृढ तल डायाफ्राम वस्तुतः दृढ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कडी प्रतिबंधों का समुच्चय है, जो लागू करता है कि किसी तल-स्तर के सभी नोड समान क्षैतिज स्थानांतरण और दृढ-पिंड घूर्णन से गुजरें। समतल-अंतर्गत डायाफ्राम बल (अक्षीय बल, अपरूपण) प्रतिबंध प्रतिक्रियाओं के रूप में पुनः प्राप्त होते हैं: यथार्थ, सु-प्रतिबंधित और प्रतिरूप में निर्दिष्ट स्लैब दृढता से स्वतंत्र। जब भी किसी संरचनात्मक अवयव को वास्तव में दृढ मानना हो, यही सिद्धांत अपनाना चाहिए: उसे अवास्तविक विशाल दृढताओं से नहीं, प्रतिबंधों से प्रतिरूपित करें।



अध्याय-विशिष्ट आइडेंटिकॉन, chapter H

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

47 यांत्रिकी में विचरण कलन: यूलर-लाग्रांज रूपरेखा

सारांश

यह अध्याय यांत्रिकी में विचरण विधियों की सैद्धांतिक रूपरेखा विकसित करता है और अगले अध्याय में विवेचित ऊर्जा-आधारित दृष्टिकोणों की नींव प्रदान करता है।

आरंभिक परिचय संरचनात्मक विश्लेषण के न्यूटनीय और लाग्रांजीय दृष्टिकोणों की तुलना करता है तथा यांत्रिकी में विचरण सिद्धांतों की भूमिका पर बल देता है। यूलर अनुभाग विचरण कलन प्रस्तुत करता है, फलनों के फलन (functional) को परिभाषित करता है और यूलर-लाग्रांज समीकरण व्युत्पन्न करता है, जो स्थैतिकी और गतिकी दोनों के केंद्र में हैं। प्रबल रूप (अवकल समीकरण) और दुर्बल रूप (समाकली कथन) के भेद तथा यांत्रिकी में उनके महत्त्व को रेखांकित किया गया है।

इसके बाद अध्याय आवश्यक और प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंधों में भेद करते हुए परिसीमा प्रतिबंधों तथा विचरण सूत्रीकरणों में उनके निहितार्थों का अध्ययन करता है।

कुल स्थितिज ऊर्जा सिद्धांत को ऊर्जा-आधारित विधियों की आधारशिला के रूप में प्रस्तुत किया गया है, जो आभासी कार्य सिद्धांत की ओर ले जाता है। अंततः Hamilton का सिद्धांत प्रस्तुत करके विचरण दृष्टिकोण को गतिक निकायों तक विस्तारित किया गया है; इसके बाद Hu-Washizu सूत्रीकरण सहित बहु-क्षेत्र विचरण सिद्धांतों पर चर्चा की गई है।

यद्यपि यह अध्याय व्यापक रूप से (Reddy, 2017; Sokolnikoff, 1956; Pilkey and Wunderlich, 1994) पर आधारित है, इस और आगामी विवेचनों में संगति हेतु संकेतन को एकीकृत करने का प्रयास किया गया है। सामग्री संरचनात्मक यांत्रिकी में गहरी गणितीय रुचि रखने वाले पाठकों के लिए है; केवल अनुप्रयोगों पर केंद्रित पाठक सीधे अगले अध्याय पर जा सकते हैं।

47.1 परिचय 1633
47.2 Euler 1634
47.2.1 प्रारंभिक बातें 1634
47.2.2 $\delta\Pi$ का अवकल रूप 1636
47.2.3 यूलर समीकरण 1637
47.2.4 $\delta\Pi$ 1638
47.2.5 प्रेक्षण 1639
47.2.6 परिसीमा प्रतिबंध 1639
47.3 कुल स्थितिज ऊर्जा सिद्धांत 1643
47.4 Hamilton 1646
47.4.1 गतिक; यूलर/लाग्रांज 1646
47.4.2 उदाहरण 47.3: Hamilton . . . 1650
47.5 सामान्य Hu-Washizu विचरण सिद्धांत 1653
47.6 “छद्म-Tonti” आरेख 1656
47.6.1 D’Alembert का सिद्धांत . . . 1656
47.6.2 Hamilton के समीकरण 1657
47.6.3 Lagrange के समीकरण 1657

47.1 परिचय

1 अब तक संरचनाओं का विश्लेषण आंशिक अवकल समीकरणों में व्यक्त विशिष्ट परिसीमा-मान समस्याओं के हल द्वारा किया गया है।

2 किंतु संरचनात्मक अभियांत्रिकी (और यांत्रिकी) को दो भिन्न दृष्टिकोणों से देखा जा सकता है:

न्यूटनीय दृष्टिकोण, संवेग-संतुलन (साम्य)।

लाग्रांजीय दृष्टिकोण: ऊर्जा-संतुलन (ऊष्मागतिकी)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[3] प्रत्यास्थ पिंडों की साम्य अवस्थाओं को अभिलक्षित करने वाले न्यूनतम सिद्धांतों का उपयोग करने वाला दूसरा दृष्टिकोण इस अध्याय में विकसित किया गया है। यह विचरण कलन की प्रत्यक्ष विधियों पर आधारित दृष्टिकोण है, जिन्हें पहले Rayleigh और W. Ritz तथा बाद में R. Courant, B. Galerkin और अन्य ने प्रस्तावित किया।

[4] यह अध्याय:

1. तथाकथित "ऊर्जा" विधियों का आधार बनने वाली विचरण विधियों के लिए कठोर रूपरेखा प्रदान करेगा और इस क्रम में प्राकृतिक तथा आवश्यक परिसीमा प्रतिबंधों की परिभाषा को औपचारिक बनाएगा।
2. विभिन्न "ऊर्जा विधियों" को एक साथ लाकर दिखाएगा कि वे सभी (मूलतः) समान हैं।
3. परिमित अवयव विधि की प्रस्तावना के रूप में *आभासी विस्थापन सिद्धांत* विकसित करेगा।
4. तथाकथित प्रबल रूप (अवकल समीकरण) और दुर्बल रूप (औसत अर्थ में किसी सिद्धांत की संतुष्टि) के बीच द्वैत दर्शाएगा।

47.2 Euler

47.2.1 प्रारंभिक बातें

[5] अवकल कलन (DC) में एक अथवा अधिक चरों का फलन होता है, जबकि विचरण कलन (VC) में किसी फलन का फलन, अर्थात फलनक, होता है।

[6] विचरण कलन की मूल समस्या ऐसा फलन $u(x)$ ज्ञात करना है कि

$$\Pi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{47.1}$$

और वह स्थिर हो

$$\delta\Pi = 0$$

जहाँ δ, *विचरण संकारक* को दर्शाता है (इसे अवकलज न समझें)

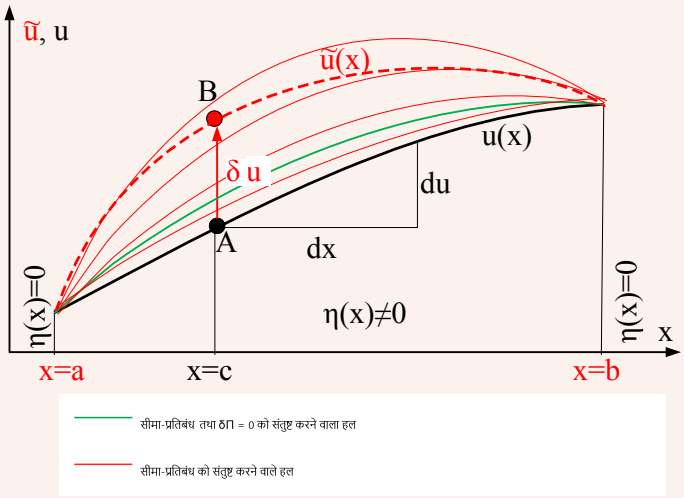
[7] $u(x)$ को x का फलन, जो अंतराल (a, b) में है, तथा F को ज्ञात वास्तविक फलन (जैसे ऊर्जा घनत्व) मानिए। फलनक का प्रांत निर्देशांक समष्टि के किसी क्षेत्र (जैसा फलन के लिए होता है) के बजाय फलन समष्टि में किसी फलन-वर्ग से संबंधित स्वीकार्य फलनों का संग्रह है।

[8] उस फलन $u(x)$ को खोजिए जो Π को चरम करता है। अतः $\tilde{u}(x)$ को चरमकारी फलन $u(x)$ के निकटवर्ती पथों का परिवार मानिए और मानिए कि अंत्य बिंदुओं $x = a, b$ पर वे संपाती हैं।

[9] $u(\tilde{x})$ को चरमकारी पथ और किसी स्वेच्छ विचरण के योग के रूप में परिभाषित कीजिए, चित्र 47.1।

$$\tilde{u}(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x) = u(x) + \delta u(x) \tag{47.2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 47.1: विचरण और अवकल संकारक

जहाँ ε एक लघु प्राचल है और $\delta u(x)$, $u(x)$ का विचरण है

$$\begin{aligned}\delta u &= \tilde{u}(x,\varepsilon) - u(x)\\ &= \varepsilon\eta(x)\end{aligned}$$

और $\eta(x)$ द्विवार अवकलनीय है, जिसका आयाम अनिर्दिष्ट है, किंतु $\eta(a) = \eta(b) = 0$ है। ध्यान दें कि $\tilde{u}$, u से संपाती है यदि $\varepsilon = 0$।

[10] ध्यान दें कि:

- DC में किसी मान को चरम करने की आवश्यक शर्त है कि प्रथम अवकलज शून्य हो, और VC में प्रथम विचरण शून्य हो।
- चरमीकरण का परिणाम DC में एकल चर x तथा VC में $u(x)$ है।

[11] विचरण संकारक δ आगे आभासी विस्थापन से संबद्ध δ के अनुरूप है।

[12] यह दिखाया जा सकता है कि विचरण और अवकलन संकारक क्रमविनिमेय हैं

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\delta u) &= \tilde{u}'(x,\varepsilon) - u'(x)\\ \delta u' &= \tilde{u}'(x,\varepsilon) - u'(x)\end{aligned}\right\} \frac{d}{dx}(\delta u) = \delta\left(\frac{du}{dx}\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

13 विचरण संकारक δ और अवकल कलन संकारक d का उपयोग समान ढंग से किया जा सकता है, अर्थात

$$\delta(u')^2 = 2u'\delta u'$$
$$\delta(u+v) = \delta u + \delta v$$
$$\delta\left(\int u dx\right) = \int (\delta u) dx$$
$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y$$

किंतु उनके अर्थ स्पष्टतः भिन्न हैं। du, dx दूरी पर स्थित निकटवर्ती बिंदु से संबद्ध है, जबकि δu फलन u में दिए गए x के लिए लघु स्वेच्छ परिवर्तन है (इससे संबद्ध कोई δx नहीं है)।

14 जिन परिसीमाओं पर u निर्दिष्ट है वहाँ उसका विचरण शून्य होना चाहिए, और अन्यत्र वह स्वेच्छ है। कहा जाता है कि विचरण δu, u का आभासी परिवर्तन है।

47.2.2 $\delta\Pi$ का अवकल रूप

15 विचरण सूत्रीकरण ($\delta\Pi = 0$) को अवकल रूप $\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$ में ढालिए और मूल कलन का उपयोग कीजिए।

16 $\Phi(\varepsilon)$ को इस प्रकार परिभाषित कीजिए

$$\Phi(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \Pi(u + \varepsilon\eta(x)) = \int_a^b F(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x))dx \tag{47.3}$$

ध्यान दें कि इसे दुर्बल रूप कहा जाएगा ("दुर्बल" क्योंकि इसमें एक कोटि कम अवकलज आवश्यक है)।

17 चूँकि $\tilde{u}(x) \to u(x)$ जब $\varepsilon \to 0$, अतः Π के चरम होने की आवश्यक शर्त है

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

18 समीकरण 47.2 से $\tilde{u} = u + \varepsilon\eta$ और $\tilde{u(x)}' = u'(x) + \varepsilon\eta'(x)$; शृंखला नियम लागू करने पर

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}}\frac{d\tilde{u}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'}\frac{d\tilde{u}'}{d\varepsilon}\right)dx = \int_a^b \left(\eta\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}} + \eta'\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'}\right)dx$$

$\varepsilon = 0$ के लिए $\tilde{u} = u$, अतः

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\eta\frac{\partial F}{\partial u} + \eta'\frac{\partial F}{\partial u'}\right)dx = 0 \tag{47.4}$$

19 द्वितीय पद का खंडशः समाकलन ($\int fg'dx = fg - \int f'gdx$) देता है

$$\int_a^b \left(\eta'\frac{\partial F}{\partial u'}\right)dx = \eta\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b - \int_a^b \eta(x)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right)dx$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

20 प्रतिस्थापन करने पर,

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I } (x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II } (x=a,b)} = 0 \tag{47.5}$$

21 प्रत्येक पद शून्य होना चाहिए।

1. प्रथम भाग यूलर *समीकरण* देगा।
2. द्वितीय भाग हमें *परिसीमा* प्रतिबंध परिभाषित करने देगा।

47.2.3 यूलर समीकरण

22 विचरण कलन का मूल प्रमेय कहता है कि सतत $\Psi(x)$ के लिए $a \le x \le b$ में और ऐसे स्ववेच्छ सतत फलन $\eta(x)$ के साथ, जो a और b पर शून्य हो,

$$\int_a^b \eta(x)\Psi(x)dx = 0 \Leftrightarrow \Psi(x) = 0$$

अतः समीकरण 47.5 का भाग I प्रबल रूप देता है।

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad \text{in} \quad a < x < b \tag{47.6}$$

23 यह अवकल समीकरण यूलर-*लाग्रांज समीकरण* कहलाता है, जो Π से संबद्ध है, और $u(x)$ द्वारा Π को चरम करने की आवश्यक शर्त है।

24 ध्यान दें कि दुर्बल रूप u' के पदों में है (समीकरण 47.3) और प्रबल रूप u'' के पदों में, समीकरण 47.6।

25 पूर्ववर्ती समीकरण को ऐसे फलनक Π के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है जो दो क्षेत्र चरों $u = u(x,y)$ और $v = v(x,y)$ पर निर्भर हो

$$\Pi = \iint F(x,y,u,v,u_{,x},u_{,y},v_{,x},v_{,y},\cdots,v_{,yy})dxdy \tag{47.7}$$

और यूलर समीकरणों की संख्या आश्रित क्षेत्र चरों के बराबर होगी

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,x}} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,y}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,yy}} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,x}} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,y}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,yy}} = 0 \end{cases} \tag{47.8}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

26 ध्यान दें कि फलनक और संगत यूलर समीकरण, समीकरण 47.1 और 47.6, अथवा समीकरण 47.7 और 47.8, एक ही समस्या का वर्णन करते हैं।

27 यूलर समीकरण सामान्यतः नियंत्रक अवकल समीकरण के अनुरूप होते हैं और प्रबल रूप (अथवा शास्त्रीय रूप) कहलाते हैं।

28 फलनक को दुर्बल रूप (अथवा सामान्यीकृत हल) कहा जाता है।

29 यांत्रिकी में साम्य को पिंड पर औसत अर्थ में लागू किया जाता है (और क्षेत्र चर का दुर्बल रूप में m बार तथा प्रबल रूप में $2m$ बार अवकलन होता है), समीकरण 47.3 *बनाम* समीकरण 47.6।

30 यह दिखाया जा सकता है कि आभासी विस्थापन सिद्धांत में यूलर समीकरण साम्य समीकरण हैं, जबकि आभासी बल सिद्धांत में वे अनुकूलता समीकरण हैं।

31 यूलर समीकरण ऐसे अवकल समीकरण हैं जिन्हें सदैव यथार्थ विधियों से हल नहीं किया जा सकता। एक वैकल्पिक विधि यूलर समीकरणों को छोड़कर समस्या के विचरण कथन से सीधे उनके हल की ओर जाती है।

32 यह दिखाया जाएगा कि परिमित अवयव सूत्रीकरण दुर्बल रूप पर आधारित है, जबकि परिमित अंतर सूत्रीकरण प्रबल रूप पर आधारित है।

47.2.4 $\delta\Pi$

33 पूर्ववर्ती अनुभाग में हमने दिखाया कि $d\Phi(\varepsilon)/d\varepsilon$, यूलर-*लाग्रांज* समीकरण की ओर ले जाता है (समीकरण 47.5)

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I } (x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II } (x=a,b)} = 0$$

अभी $\delta\Pi$ को परिभाषित करना शेष है।

34 किसी फलनक व्यंजक का प्रथम विचरण है

$$\left.\begin{aligned}\delta F &= \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' \\ \delta\Pi &= \int_a^b \delta F\, dx\end{aligned}\right\} \delta\Pi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'\delta u'}\right) dx \tag{47.9}$$

द्वितीय पद का खंडशः समाकलन (समीकरण R.3), जैसा समीकरण 47.4 में है, देता है

$$\delta\Pi = \int_a^b \delta u\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right) dx \tag{47.10}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

47.2.5 प्रेक्षण

35 अभी दिखाया गया कि Π का स्थिर मान $\delta\Pi = 0$ रखकर ज्ञात करना, Π का चरम मान $\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ को शून्य रखकर ज्ञात करने के समतुल्य है।

36 इसी प्रकार दिखाया जा सकता है कि कलन के द्वितीय अवकलज की भाँति द्वितीय विचरण $\delta^2\Pi$ से चरम को न्यूनतम अथवा अधिकतम के रूप में अभिलक्षित किया जा सकता है।

37 एक महत्त्वपूर्ण प्रेक्षण है कि विचरण सूत्रीकरण अदिश है, जबकि यूलरीय सूत्रीकरण सदिश है।

47.2.6 परिसीमा प्रतिबंध

38 समीकरण 47.5 के द्वितीय भाग पर पुनर्विचार करने से

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I } (x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II } (x=a,b)} = 0$$

परिसीमा प्रतिबंध परिभाषित किए जा सकते हैं, चित्र 47.1।

$$\underbrace{\underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{Nat.}}}_{\text{Boundary Cond.}} = 0 \tag{47.11}$$

इसे निम्न संयोजनों द्वारा प्राप्त किया जा सकता है

$$\begin{array}{rcrcll}
\eta(a) = 0 & \text{and} & \eta(b) & = 0 & \text{Essential} & \Gamma_u \\
\eta(a) = 0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & = 0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\
\frac{\partial F}{\partial u'}(a) = 0 & \text{and} & \eta(b) & = 0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\
\frac{\partial F}{\partial u'}(a) = 0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & = 0 & \text{Natural} & \Gamma_t
\end{array}$$

39 सामान्यीकरण करने पर, एक क्षेत्र चर वाली ऐसी समस्या में जिसमें नियंत्रक अवकल समीकरण का उच्चतम अवकलज कोटि $2m$ (अथवा संगत फलनक में केवल m) है, हमें चित्र 47.2 के अनुसार मिलता है,

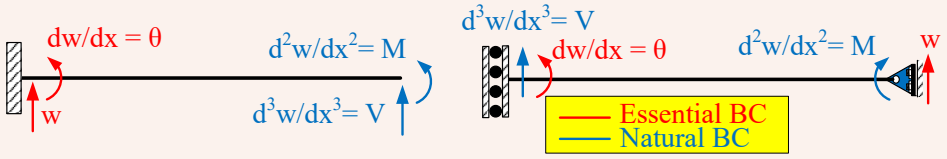
आवश्यक (अथवा बाध्य या ज्यामितीय) परिसीमा प्रतिबंध तब होते हैं जब $\eta(a)$ अथवा $\eta(b)$ =0 हो (क्योंकि यूलर समीकरण की व्युत्पत्ति के लिए यह आवश्यक था)। आवश्यक परिसीमा प्रतिबंधों में शून्य कोटि (स्वयं क्षेत्र चर) से m-1 तक के अवकलज सम्मिलित होते हैं। गणितीय रूप से यह *Dirichlet परिसीमा-मान समस्याओं* के अनुरूप है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्राकृतिक (अथवा स्थैतिक) प्रतिबंधों में, यदि η को स्वेच्छ छोड़ें, तो $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$ को $x = a$ अथवा b पर रखना आवश्यक होगा। प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंधों में m और उससे ऊपर की कोटि के अवकलज सम्मिलित होते हैं। यह परिसीमा प्रतिबंध विचरण कथन की संतुष्टि से निहित है, किंतु स्वयं फलनक में स्पष्टतः नहीं कहा गया। गणितीय रूप से यह *Neuman परिसीमा-मान समस्याओं* के अनुरूप है।

मिश्रित परिसीमा-मान समस्याओं में आवश्यक और प्राकृतिक दोनों परिसीमा प्रतिबंध परिसीमा के पूरक भागों (जैसे Γ_u और Γ_t) पर निर्दिष्ट होते हैं।

समस्या	अक्षीय सदस्य वितरित भार	आनमनी सदस्य वितरित भार
अवकल समीकरण	$AE\frac{d^2u}{dx^2} - q = 0$	$EI\frac{d^4w}{dx^4} - q = 0$
m	1	2
आवश्यक परिसीमा प्रतिबंध $[0, m-1]$	u	$w, \frac{dw}{dx}$
प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंध $[m, 2m-1]$	$\frac{du}{dx}$ अथवा $\sigma_{xx} = Eu_{,x}$	$\frac{d^2w}{dx^2}$ और $\frac{d^3w}{dx^3}$ अथवा $M = EIw_{,xx}$ और $V = EIw_{,xxx}$



चित्र 47.2: आवश्यक और प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंधों के उदाहरण

47.2.6.1 उदाहरण 47.1: यूलर: अक्षीय

स्थितिज ऊर्जा Π, अक्षीय सदस्य (L, E, A) की, जो बाएँ सिरे पर आबद्ध और दाएँ सिरे पर अक्षीय बल P के अधीन है, इस प्रकार है

$$\Pi = \underbrace{\int_0^L \frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}_{\text{Strain Energy}} \underbrace{-Pu(L)}_{\text{Work}}$$

यह अपेक्षा करके यूलर समीकरण ज्ञात कीजिए कि Π न्यूनतम हो।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समाधान I

यूलर समीकरणों की व्युत्पत्ति में प्रयुक्त प्रक्रिया का अनुसरण करते हुए Π का प्रथम विचरण है:

$$\delta\Pi = \int_0^L \underbrace{\frac{EA}{2}2\left(\frac{du}{dx}\right)}_{a}\underbrace{\delta\left(\frac{du}{dx}\right)}_{b'}dx - P\delta u(L)$$

खंडशः समाकलन करने पर (समीकरण R.3)

$$\delta\Pi = +\underbrace{EA\frac{du}{dx}}_{a}\underbrace{\delta u}_{b}\Bigg|_0^L - \int_0^L \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{a'}\underbrace{\delta u}_{b}dx - P\delta u(L) = 0$$

$$= -\int_0^L \delta u \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{\text{Euler Eq.}}dx + \underbrace{\left[\left(EA\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L} - P\right]}_{\text{B.C.}}\delta u(L)$$

$$\underbrace{-\left(EA\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=0}\underbrace{\delta u(0)}_{0}}_{0}$$

स्मरण रखें कि δ एक स्वेच्छ संकारक है जिसे कोई भी मान दिया जा सकता है; अतः δu के गुणांक, जो $(0, L)$ के बीच हैं, और δu के गुणांक, जो $x = L$ पर हैं, अलग-अलग शून्य रखकर हमें मिलता है

- यूलर समीकरण:
$$-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = EA\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad 0 < x < L$$
ध्यान दें कि फलनक u' के पदों में और यूलर समीकरण u'' के पदों में था।
- प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंध:
$$EA\frac{du}{dx} - P = 0 \quad \text{at} \quad x = L$$

समाधान II

पूर्ववर्ती व्युत्पत्ति के परिणामों का उपयोग कीजिए (समीकरण 47.6): हमने व्युत्पन्न किया है:

$$F(x, u, u') = \frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(ध्यान दें कि P सदस्य के सिरे पर लगाया गया भार है, इसलिए वह $F(x,u,u')$ के भाग के रूप में प्रकट नहीं होता। अब समीकरण 47.6 से यूलर समीकरण निर्धारित करते हैं

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= 0\\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} &= 0\\ \Rightarrow -\frac{d}{dx}(EAu') = -EA\frac{d^2u}{dx^2} &= 0 \quad \text{Euler Equation}\end{aligned}$$

अंततः परिसीमा प्रतिबंध समीकरण 47.11 से प्राप्त होते हैं:

$$\begin{aligned}\underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{Nat.}} &= 0\\ \frac{\partial F}{\partial u'} &= EAu'\\ EA\frac{du}{dx} &= 0\end{aligned}$$

47.2.6.2 उदाहरण 47.2: यूलर: बंकन

एकसमान भार p वहन करने वाले धरन की कुल स्थितिज ऊर्जा है

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2}M\kappa - pw\right)dx = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{2}(EIw'')w'' - pw\right)}_{F}dx$$

हम Π का प्रथम विचरण व्युत्पन्न करना चाहते हैं। समीकरण 47.9 का विस्तार करके और दो बार खंडशः समाकलन करने पर (समीकरण R.3)

$$\begin{aligned}\delta\Pi = \int_0^L \delta F dx &= \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w\right)dx\\ &= \int_0^L (EIw''\delta w'' - p\delta w)dx\\ &= (EIw''\delta w')|_0^L - \int_0^L \left[(EIw'')'\delta w' - p\delta w\right]dx\\ &= \underbrace{\underbrace{(EIw'')}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w'}_{\text{Ess.}}|_0^L - \underbrace{[(EIw'')'}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w]}_{\text{Ess.}}|_0^L}_{\text{BC}} + \int_0^L \underbrace{\left[(EIw'')'' + p\right]}_{\text{Euler Eq.}}\delta w dx = 0\end{aligned}$$

अथवा

$$(EIw'')'' = -p \qquad \text{for all x}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जो धरनों का नियंत्रक अवकल समीकरण है; परिसीमा प्रतिबंध हैं

Essential		Natural
$\delta w' = 0$	or	$EIw'' = -M = 0$
$\delta w = 0$	or	$(EIw'')' = -V = 0$

47.3 कुल स्थितिज ऊर्जा सिद्धांत

40 कुल स्थितिज ऊर्जा (TPE) का व्यंजक है

$$\begin{aligned}\Pi &\stackrel{\text{def}}{=} U - W_e\\ W_e &\stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma + \mathbf{uP}\\ U &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

स्थितिज ऊर्जा विचरण सिद्धांत के सामान्य रूप का फलनक प्राप्त होता है

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega}_{U} \underbrace{- \int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma - \mathbf{uP}}_{-W_e} \tag{47.12}$$

41 Π का प्रथम विचरण लेकर और इस अदिश राशि को शून्य रखकर विचरण कथन प्राप्त होता है।

42 स्थितिज ऊर्जा फलनक के सामान्य रूप (अर्थात समीकरण 47.12) का विचरण कथन है

$$\delta\Pi = \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{47.13}$$

जो *आभासी कार्य सिद्धांत* है।

43 हम विकृति-विस्थापन संबंधों को **रैखिक अवकल संकारक L** के पदों में पुनर्लिखते हैं (समीकरण O.2.3.2)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

जहाँ $\mathbf{L}$ रैखिक अवकल संकारक है और $\mathbf{u}$ समीकरण O.7 में परिभाषित विस्थापन सदिश है:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

44 चूँकि अवकल संकारक $\mathbf{L}$ रैखिक है, विकृतियों का विचरण $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ विस्थापनों के विचरण $\delta\mathbf{u}$ के पदों में व्यक्त किया जा सकता है

$$\delta\boldsymbol{\epsilon} = \delta(\mathbf{L}\mathbf{u}) = \mathbf{L}\delta\mathbf{u} \tag{47.14}$$

45 हम विचरण कथन के दो रूपों पर विचार करते हैं

1. **विकृतियों के पदों में:** जो संगत यूलर समीकरणों की व्युत्पत्ति के लिए अधिक उपयुक्त है,

$$\delta\Pi = \underbrace{\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega}_{\delta U}$$
$$\underbrace{-\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma}_{-\delta W_e} = 0 \tag{47.15}$$

2. **विस्थापनों के पदों में:** (समीकरण 47.14 का उपयोग करके) जो आगामी विविकृतीकरण के लिए अधिक उपयुक्त है।

$$\delta\Pi = \underbrace{\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u})\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega}_{\delta U}$$
$$\underbrace{-\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma}_{-\delta W_e} = 0$$

46 स्थितिज ऊर्जा विचरण सिद्धांत के सामान्य रूप के यूलर समीकरण प्राप्त करने के लिए आभासी विकृति ऊर्जा δU को समीकरण 47.15 में परिभाषित करने वाले आयतन समाकलों का खंडशः समाकलन करना होगा, ताकि विकृतियों के विचरण $\delta(\mathbf{L}\mathbf{u})$ को विस्थापनों के विचरण $\delta\mathbf{u}$ में बदला जा सके।

47 Green के प्रमेय (समीकरण R.6) का उपयोग करके इन समाकलों का खंडशः समाकलन

$$\int_\Omega R\frac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial R}{\partial x}S\mathrm{d}\Omega + \oint_\Gamma RSn_x\mathrm{d}\Gamma$$

देता है

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{d}\Omega \tag{47.16}$$
$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0)\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0)\mathrm{d}\Omega$$
$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $\mathbf{G}$ एक रूपांतरण आव्यूह है जिसमें एकक अभिलंब सदिश के दिक्-कोज्या हैं, जिससे पृष्ठीय कर्षण $\mathbf{t}$ को $\mathbf{t} = \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है, और पृष्ठीय समाकल पिंड के पूरे पृष्ठ Γ पर हैं।

48 समीकरण 47.16 को समीकरण 47.15 में प्रतिस्थापित करने पर विचरण कथन बनता है

$$\delta\Pi = -\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{L}^T \underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b}\}\mathrm{d}\Omega$$
$$+\int_{\Gamma} \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{G} \underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{t}}\}\mathrm{d}\Gamma = 0$$

49 चूँकि $\delta\mathbf{u}$ स्वेच्छ है, $\delta\Pi$ के शून्य होने के लिए कोष्ठकों के भीतर समाकल्य के दोनों व्यंजक शून्य होने चाहिए। यह पहचानते हुए कि प्रतिबल-विकृति संबंध आयतन और पृष्ठ दोनों समाकलों में आता है, यूलर समीकरण हैं

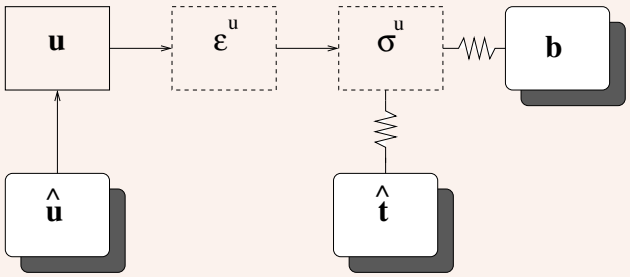
$$\text{(BE): Equilibrium} \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Omega \tag{47.17}$$
$$\text{(NBC): Natural B.C.} \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_t \tag{47.18}$$

जहाँ प्रथम यूलर समीकरण साम्य समीकरण है और द्वितीय यूलर समीकरण प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंध परिभाषित करता है। प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंध Γ_t पर परिभाषित हैं, Γ पर नहीं, क्योंकि लगाए गए पृष्ठीय कर्षण $\hat{\mathbf{t}}$ और आव्यूह-सदिश गुणनफल $\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}$ दोनों Γ_t के बाहर सर्वसम रूप से शून्य हैं।

50 सामान्यतः अवकल समीकरणों के केवल कुछ रूप ही किसी विचरण फलनक के यूलर समीकरण होते हैं।

51 प्रत्यास्थ-स्थैतिक समस्या के लिए यूलर समीकरणों से आरंभ करके अभी प्रस्तुत संक्रियाओं को उलटे क्रम में करने से कुल स्थितिज ऊर्जा फलनक व्युत्पन्न किया जा सकता है।

52 TPE का Tonti आरेख चित्र 47.3 में दिखाया गया है। इस आरेख में दृढ संबंध ठोस रेखाओं से, दुर्बल संबंध स्प्रिंग-सदृश प्रतीकों से, ठोस रेखाओं वाले बक्से प्राथमिक अज्ञात क्षेत्र को, डैशित बक्सों के चर आंतरिक रूप से व्युत्पन्न क्षेत्रों को, और छायांकित बक्से निर्दिष्ट क्षेत्रों को दर्शाते हैं।



चित्र 47.3: कुल स्थितिज ऊर्जा विधि के लिए Tonti आरेख

53 §48.4.1 इस अनुभाग का आगे विस्तार करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

47.4 Hamilton

47.4.1 गतिक; यूलर/लाग्रांज

47.4.1.1 विविक्त निकाय

54 यदि द्रव्यमान m के एकल कण पर विचार करें, जो बल $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$ के प्रभाव में गतिमान है, तो कण द्वारा अनुसरित पथ $\mathbf{r}(t)$ को Newton का गति का द्वितीय नियम संतुष्ट करना चाहिए

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

55 वास्तविक पथ से भिन्न पथ को $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ के रूप में व्यक्त किया जाता है, जहाँ $\delta\mathbf{r}$ किसी नियत समय t पर पथ का विचरण है। हम मानते हैं कि वास्तविक पथ $\mathbf{r}$ और विचरित पथ दो विशिष्ट समयों t_1 तथा t_2 को छोडकर भिन्न हैं; अर्थात $\delta\mathbf{r}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0$।

56 पूर्ववर्ती समीकरण का विचरण $\mathbf{r}$ के साथ अदिश गुणनफल लेकर और t_1 से t_2 के बीच समय के सापेक्ष समाकलन करने पर मिलता है

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}(\mathbf{r})\right]\cdot\delta\mathbf{r}dt = 0$$

प्रथम पद का खंडशः समाकलन (समीकरण R.3) देता है

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{r}\right)dt + \left(m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{47.19}$$

द्वितीय पद लुप्त हो जाता है क्योंकि $\delta\mathbf{R}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0$। साथ ही ध्यान दें कि

$$\delta K \overset{\text{def}}{=} m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \delta\left[\frac{m}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$$

अतः समीकरण 47.19 बनता है

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta K + \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r})dt = 0 \tag{47.20}$$

जो एकल कण के लिए ठीक *Hamilton के सिद्धांत का सामान्य* रूप है।

57 यदि बल $\mathbf{F}$ संरक्षी है (अर्थात उसकी स्थितिज और गतिज ऊर्जाओं का योग नियत है), तो उसे किसी विभव के प्रवणता से प्रतिस्थापित किया जा सकता है (Castigliano का प्रथम, 1st, प्रमेय)

$$\mathbf{F} = -\nabla\Pi$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{r})$ कण की स्थितिज ऊर्जा है। अतः अब समीकरण 47.20 को इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi) dt = 0 \tag{47.21}$$

क्योंकि

$$\nabla \Pi \cdot \delta \mathbf{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} \delta x_3 = \delta \Pi(x_1, x_2, x_3)$$

58 गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा का अंतर *लाग्रांजीय फलन* कहलाता है

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} K - \Pi$$

समीकरण 47.21 कण की संरक्षी गति के लिए Hamilton का सिद्धांत है

परिभाषा 47.1: Hamilton का सिद्धांत

दो स्वेच्छ समय क्षणों t_1 और t_2 के बीच संरक्षी बलों के अधीन कण की गति ऐसी होती है कि लाग्रांजीय फलन का रेखा समाकल पथ-गति के लिए चरम होता है।

59 इसे दूसरे शब्दों में भी कहा जा सकता है: *उन सभी संभावित पथों में जिनसे कण समय t_1 की अपनी स्थिति से समय t_2 की स्थिति तक जा सकता है, उसका वास्तविक पथ वह होगा जिसके लिए*

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt.$$

चरम हो।

60 यदि पथ को सामान्यीकृत निर्देशांकों[1] q_i $(i = 1, 2, 3)$, then

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \mathrm{d}t = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \mathrm{d}t \end{aligned}$$

ध्यान दें कि वर्ग कोष्ठक के भीतर का पद §47.2.4 जैसी प्रक्रिया से सरलता से व्युत्पन्न किया जा सकता है।

[1] सामान्यीकृत निर्देशांक ऐसे प्राचलों का समुच्चय हैं जिनका उपयोग विन्यास समष्टि में किसी निकाय की अवस्था निरूपित करने हेतु होता है। इन प्राचलों को किसी संदर्भ अवस्था के सापेक्ष निकाय का विन्यास अद्वितीय रूप से परिभाषित करना चाहिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[61] यदि सभी q_i रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं (अर्थात उनके बीच कोई प्रतिबंध नहीं), तो विचरण δq_i, t से स्वतंत्र हैं, सिवाय इसके कि $\delta q_i = 0$ समय t_1 और t_2 पर। अतः δq_1, δq_2, और δq_3 के गुणांक अलग-अलग लुप्त होते हैं और *लाग्रांजीय गति समीकरण*, जिन्हें यूलर-*लाग्रांज* समीकरण भी कहते हैं, प्राप्त होते हैं।

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, 3$$

जो निश्चय ही समीकरण 47.6 के अनुरूप है।

[62] असंरक्षी बलों के लिए पाठक (Reddy, 2017, pg. 148) देखें।

47.4.1.2 सांतत्य निकाय

[63] विविक्त निकायों के लिए विकसित मूलतः उसी प्रक्रिया का अनुसरण करके विरूपणीय पिंडों की गतिकी हेतु Hamilton का सिद्धांत विकसित किया जा सकता है। Newton का गति का द्वितीय नियम स्पष्टतः अब भी लागू होता है, किंतु पिंड के विरूपणीय होने से हमें संघटक समीकरण की भी आवश्यकता होगी।

[64] आरंभ करते हैं

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

किसी द्रव्य कण द्वारा अनुसरित वास्तविक पथ $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, जो स्थिति $\mathbf{x}$ में है, शुद्धगतिक (आवश्यक) परिसीमा प्रतिबंध के अनुरूप $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ तक विचरित होता है, जहाँ $\delta\mathbf{u}$ पथ का स्वीकार्य विचरण (अथवा आभासी विस्थापन) है।

[65] पूर्ववत् हम मानते हैं कि विचरित पथ समय t_1 और t_2 को छोड़कर वास्तविक पथ से भिन्न है। अतः $\delta\mathbf{u}$ का स्वीकार्य विचरण निम्न प्रतिबंध (नियंत्रक समीकरण और परिसीमा प्रतिबंध) संतुष्ट करता है

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} &= 0 && \text{on } \Gamma_u \text{ for all } t \\ \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1) &= \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_2) && \text{for all } \mathbf{x} \end{aligned} \tag{47.22}$$

जहाँ Γ_u पिंड के पृष्ठ के उस भाग को दर्शाता है जहाँ विस्थापन सदिश $\mathbf{u}$ निर्दिष्ट है।

[66] समय t पर परिणामी बल द्वारा आभासी विस्थापन $\delta\mathbf{u}$ से गति कराने में पिंड पर किया गया कार्य है

$$\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$$

जहाँ $4\mathbf{b}$ पिंड बल सदिश, $\mathbf{t}$ निर्दिष्ट कर्षण, तथा $\boldsymbol{\sigma}$ और $\boldsymbol{\varepsilon}$ क्रमशः प्रतिबल और विकृति प्रदिश हैं। अंतिम पद पिंड में संचित आंतरिक बलों के आभासी कार्य को निरूपित करता है (अतः ऋणात्मक)।

[67] जड़त्व बल $m\mathbf{a}$ द्वारा आभासी विस्थापन $\delta\mathbf{u}$ से गति करते हुए किया गया कार्य है

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega$$

जहाँ ρ द्रव्यमान घनत्व है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[68] अतः हम लिख सकते हैं

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_\Omega \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega-\left(\int_\Omega \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega+\int_{\Gamma_t}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}d\Gamma-\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}d\Omega\right)\right]dt=0\\ \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_\Omega \rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial t}d\Omega-\left(\int_\Omega \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega+\int_{\Gamma_t}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}d\Gamma-\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}d\Omega\right)\right]dt=0\end{aligned} \tag{47.23}$$

द्वितीय व्यंजक का प्रथम पद खंडशः समाकलन से प्राप्त हुआ; समाकलित पद आरंभिक और अंतिम परिसीमा प्रतिबंधों के कारण लुप्त हो जाते हैं (समीकरण 47.22)।

[69] समीकरण 47.23 सांतत्य माध्यम (संरक्षी और प्रत्यास्थ हो अथवा न हो) के लिए Hamilton के सिद्धांत का सामान्य रूप है।

[70] बाह्य कार्य का विभव आगे इस प्रकार परिभाषित है (समीकरण 48.6)।

$$\delta\mathcal{W}_e=-\int_\Omega \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega-\int_{\Gamma_t}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}d\Gamma$$

और चूँकि आदर्श प्रत्यास्थ पिंड के लिए $\mathbf{b}$ और $\mathbf{t}$ संरक्षी हैं तथा विकृति ऊर्जा U_0 इस प्रकार अस्तित्व में है कि

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial U_0}{\partial\varepsilon_{ij}},\qquad \text{where } U_0=U_0(\varepsilon_{ij})$$

(कलन का मूल प्रमेय लागू करते हुए

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\qquad\text{and}\qquad F'(x)=f(x)$$

को समीकरण 48.3 पर लागू करके)।

[71] इस अंतिम समीकरण को समीकरण 47.23 में प्रतिस्थापित करने पर मिलता है

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[K-(\mathcal{W}_e+U)\right]dt=0 \tag{47.24}$$

जहाँ K और U गतिज तथा विकृति ऊर्जाएँ हैं

$$K=\int_\Omega\frac{\rho}{2}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\frac{\mathbf{u}}{\partial t}d\Omega,\qquad U=\int_\Omega U_0d\Omega$$

[72] समीकरण 47.24 प्रत्यास्थ पिंड (पुनः, रैखिक अथवा अरैखिक) के लिए Hamilton का सिद्धांत निरूपित करता है।

[73] चूँकि $\Pi=U+\mathcal{W}_e$ कुल स्थितिज ऊर्जा है, समीकरण 48.6, गतिहीन पिंड के लिए (अर्थात बल इतने धीरे लगाए जाते हैं कि गति समय से स्वतंत्र हो और जड़त्व बल नगण्य हों) Hamilton का सिद्धांत आभासी विस्थापन सिद्धांत में घट जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[74] लाग्रांजीय $L = K - \Pi$ से संबद्ध यूलर-लाग्रांज समीकरण समीकरण 47.24 से प्राप्त किए जा सकते हैं।

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(u_i, \dot{u}_i) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} \right) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\mathbf{t} - \widehat{\mathbf{t}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \right] dt
\end{aligned}
$$

जहाँ $\widehat{\mathbf{t}}$, Γ_t के अनुदिश निरि्दष्ट पृष्ठीय कर्षण है। यह अंतिम समीकरण समीकरण 47.24 से खंडशः समाकलन, प्रवणता प्रमेयों और समीकरण 47.22 द्वारा प्राप्त होता है।

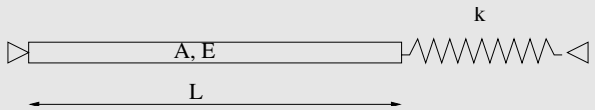
[75] चूँकि $\delta \mathbf{u}$, $t_1 < t < t_2$ के लिए और $\mathbf{x}$ के Ω के भीतर तथा Γ_t पर होने पर स्वेच्छ है, अतः

$$
\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \qquad &\text{in} \quad \Omega \\
t - \widehat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \qquad &\text{on} \quad \Gamma_t
\end{aligned}
$$

ये प्रत्यास्थ पिंड के लिए यूलर-लाग्रांज समीकरण हैं।

47.4.2 उदाहरण 47.3: Hamilton

लंबाई L, अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल A, Young मापांक E, और द्रव्यमान घनत्व ρ वाली एकसमान अनुप्रस्थ काट की छड एक सिरे पर आबद्ध है और दूसरे पर दृढता k के स्प्रिंग द्वारा दृढ आलंब से जुडी है



हम आवर्ती गति निर्धारित करना चाहते हैं, जिसका रूप है

$$u(x,t) = u_0(x) e^{i\omega t}$$

जहाँ ω प्राकृतिक कंपन की आवृत्ति और $u_0(x)$ आयाम है। गतिज और विकृति ऊर्जाएँ हैं

$$
\begin{aligned}
K &= \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \mathrm{d}\Omega = \int_0^L \frac{\rho A}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \\
U &= \int_{\Omega} \frac{E}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \mathrm{d}\Omega = \int_0^L \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{k}{2} [u(L)]^2
\end{aligned}
$$

बाह्य कार्य के विभव की अनुपस्थिति में, समीकरण 47.24 ($\mathcal{W} = 0$ सहित)

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi) dt \\
&= \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \mathrm{d}x - k[u(L)]^2 \right\} \mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हम मानते हैं

$$u(x,t) = u_0(x)e^{i\omega t}$$

जहाँ ω प्राकृतिक कंपन की आवृत्ति और $u_0(x)$ आयाम है; प्रतिस्थापन करने पर

$$\delta\left\{\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2[u_0(x)]^2 - EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2\right\} = 0$$

जहाँ अशून्य $\int_{t_1}^{t_2} \exp^{2i\omega t}\,\mathrm{d}t$ को गुणनखंड के रूप में बाहर निकाला गया है। पूर्व-व्युत्पन्न सूत्र का उपयोग करने के बजाय हम संगत यूलर समीकरण पुनः व्युत्पन्न करते हैं

$$\delta\left\{\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2(u_0)^2 - EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2\right\} =$$
$$\int_0^L \left[\rho A\omega^2 u_0\delta u_0 - EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]\mathrm{d}x - ku_0(L)\delta u_0(L) = 0$$

खंडशः समाकलन करने पर (समीकरण R.3)

$$\int_0^L \underbrace{EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u}\underbrace{\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{v'}\mathrm{d}x = \underbrace{EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u}\underbrace{\delta u_0}_{v}\Bigg|_0^L - \int_0^L \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u'}\underbrace{\delta u_0}_{v}\,\mathrm{d}x$$

प्रतिस्थापन करने पर

$$\int_0^L \left[\rho A\omega^2[u_0(x)] - EA\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]\mathrm{d}x - ku_0(L)\delta u_0(L)$$
$$= \int_0^L \rho A\omega[u_0(x)] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\underbrace{- EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)\delta u_0\Big|_0^L}_{0} - ku_0(L)\delta u_0(L) = 0$$

अथवा

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EA\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right) + \rho A\omega^2 u_0 = 0 \quad \text{for} \quad 0 < x < L$$
$$\left(EA\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} + ku_0\right) = 0 \quad \text{for} \quad x = L$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$\overline{x} = \frac{x}{L}$, $\mathrm{d}x = L\mathrm{d}\overline{x}$, $\overline{u} = \frac{u_0}{L}$, और $\alpha = \frac{kL}{EA}$, $\lambda = \frac{\omega^2 \rho L^2}{E}$ प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2 (u_0)^2 - EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda EA}{L^2}(L\overline{u})^2 - EA\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]L\mathrm{d}\overline{x} - \frac{k}{2}\left[L\overline{u}_0(1)\right]^2 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}EAL\left[\lambda(\overline{u})^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \frac{kL^2}{2}\left[\overline{u}_0(1)\right]^2 \\
&= \frac{KL^2}{2}\left\{\int_0^1 \left[\frac{\lambda}{\alpha}(\overline{u})^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\} \\
&\Rightarrow \delta\left[\frac{KL^2}{2}\left\{\int_0^1 \left[\frac{\lambda}{\alpha}(\overline{u})^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\}\right] = 0 \\
&\delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\lambda(\overline{u})^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x} - \frac{\alpha}{2}\left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\} = 0
\end{aligned}$$

Rayleigh-Ritz विधि का उपयोग करते हुए

$$u = c_1 x + c_2 x^2$$

और पूर्ववर्ती समीकरण को u के पदों में पुनर्लिखने पर

$$\begin{aligned}
&\delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\lambda(u)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{\alpha}{2}\left[u(1)\right]^2\right\} = 0 \\
&\int_0^1 \left[\lambda(c_1 x + c_2 x^2)(\delta c_1 x + \delta c_2 x^2) - (c_1 + 2c_2 x)(\delta c_1 + 2\delta c_2 x)\right]\mathrm{d}x \\
&- (c_1 + c_2)(\delta c_1 + \delta c - 2) = 0
\end{aligned}$$

δc_1 और δc_2 के गुणांक एकत्र करके और उन्हें अलग-अलग शून्य रखने पर

$$\begin{aligned}
\delta c_1 : &\int_0^1 \left[\lambda(c_1 x + c_2 x^2)x - (c_1 + 2c_2 x)\right]\mathrm{d}x - (c_1 + c_2) = 0 \\
\delta c_2 : &\int_0^1 \left[\lambda(c_1 x + c_2 x^2)x^2 - (c_1 + 2c_2 x)2x\right]\mathrm{d}x - (c_1 + c_2) = 0
\end{aligned}$$

समाकलन, न्यूनीकरण और संक्षेपण करने पर

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

अतुच्छ हल तभी और केवल तभी अस्तित्व में है जब

$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{\lambda}{3} & 2 - \frac{\lambda}{4} \\ 2 - \frac{\lambda}{4} & \frac{7}{3} - \frac{\lambda}{5} \end{vmatrix} = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा

$$15\lambda^2 - 640\lambda + 2400 = 0$$

इस द्विघात समीकरण के दो मूल हैं

$$\lambda_1 = 4.1545 \qquad \lambda_2 = 38.512$$

जो इनके अनुरूप हैं

$$\omega_1 = \frac{2.038}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{6.206}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

यथार्थ हल है

$$\lambda + \tan\lambda = 0$$

जिसके प्रथम दो मूल हैं

$$\omega_1 = \frac{2.02875}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{4.91318}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

47.5 सामान्य Hu-Washizu विचरण सिद्धांत

निम्न अनुभाग Reich, 1993 *"On the Marriage of Mixed Finite Element Methods and Fracture Mechanics: An Application to Concrete Dams"* से पुनरुत्पादित है।

[76] बहु-क्षेत्र विचरण सिद्धांत में एक से अधिक प्रधान क्षेत्र (अथवा अवस्था चर) होते हैं, अर्थात एक से अधिक अज्ञात क्षेत्र स्वतंत्र विचरणों के अधीन होते हैं।

[77] रैखिक प्रत्यास्थ-स्थैतिकी में विस्थापन $\mathbf{u}$, विकृति $\boldsymbol{\varepsilon}$, अथवा प्रतिबल $\boldsymbol{\sigma}$ प्रधान क्षेत्रों के संभावित प्रत्याशी हो सकते हैं। अतः सात संयोजन संभव हैं, (Felippa, 2000), सारणी 47.1।

[78] Hu-Washizu (HW) विचरण सिद्धांत त्रि-क्षेत्र विचरण सिद्धांत है, जिसमें *विस्थापन, विकृतियाँ और प्रतिबल स्वतंत्र क्षेत्रों* के रूप में माने जाते हैं (कुल स्थितिज ऊर्जा सिद्धांत में केवल विस्थापन के विपरीत)।

[79] स्वाभाविक रूप से TPE विचरण सिद्धांत की तुलना में दो अतिरिक्त क्षेत्र चर न केवल फलनक में, बल्कि समीकरणों के विविक्त निकाय में भी आते हैं। फलतः दिए गए विविक्तीकरण वाले प्रांत के लिए HW विचरण सिद्धांत से व्युत्पन्न विविक्त समीकरण निकाय, TPE विचरण सिद्धांत से व्युत्पन्न निकाय की अपेक्षा बहुत बड़ा होगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

u	ε	σ	Name
			एकल क्षेत्र
Y			कुल स्थितिज ऊर्जा
		Y	कुल पूरक स्थितिज ऊर्जा
	Y		कोई नाम नहीं
			दो क्षेत्र
Y		Y	Hellinger-Reissner
Y	Y		de Veubeke
	Y	Y	कोई नाम नहीं
			तीन क्षेत्र
Y	Y	Y	Hu-Washizu

तालिका 47.1: रैखिक प्रत्यास्थता में फलनक

[80] समीकरणों की बढ़ी संख्या के साथ समान विविक्तीकरण के लिए HW विचरण सिद्धांत के विविक्त रूप से प्राप्त हल में TPE के विविक्त रूप की तुलना में परिशुद्धता में उल्लेखनीय सुधार देखा जा सकता है। इसका अर्थ है कि HW के विविक्त रूप में स्थूल विविक्तीकरण से वही परिशुद्धता प्राप्त की जा सकती है जो TPE सिद्धांत में कहीं अधिक सूक्ष्म विविक्तीकरण से मिलती है।

[81] HW विचरण सिद्धांत का फलनक, Lagrange गुणकों की विधि से विकृति-विस्थापन समीकरण को परिमित सहायक प्रतिबंध के रूप में लागू करके TPE फलनक से व्युत्पन्न किया जाता है।

[82] परिमित सहायक प्रतिबंध को अवशिष्ट रूप में लिखा जाता है

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} \tag{47.25}$$

और पूरे पिंड Ω पर औसत अर्थ में लागू किया जाता है।

[83] विकृति-विस्थापन समीकरण को प्रतिबंध के रूप में लागू करने पर विचरण कथनों के विविक्त रूप में C^0 सतत विकृतियाँ और प्रतिबल प्राप्त होते हैं, जबकि TPE विचरण सिद्धांत के विविक्त कथन में असतत विकृतियाँ और प्रतिबल मिलते हैं।

[84] प्रतिबंधित फलनक लिखा जाता है

$$\Pi_{HW} = \Pi_{\text{TPE}} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}\right) \mathrm{d}\Omega \tag{47.26}$$

जहाँ $\boldsymbol{\lambda}$ Lagrange गुणक है और TPE फलनक के समाकलों (अर्थात समीकरण 47.12) से संगत होने के लिए Lagrange गुणक की इकाइयाँ प्रतिबल की होनी चाहिए। इसलिए Lagrange गुणक हेतु $\boldsymbol{\sigma}$ का उपयोग अधिक सामान्य $\boldsymbol{\lambda}$ के बजाय किया जाएगा, जिससे उसका भौतिक अर्थ अधिक स्पष्ट हो।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

85 अतः HW विचरण सिद्धांत का फलनक बनता है

$$\begin{aligned}\Pi_{HW} \;=\; &\underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}_0\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\,\mathrm{d}\Omega}_{U} \\ &\underbrace{-\int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t}\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma}_{-W_e} + \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T\left(\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon}\right)\mathrm{d}\Omega}_{\text{Constraint}}\end{aligned} \tag{47.27}$$

86 फलनक का प्रथम विचरण लेकर और इस अदिश राशि को शून्य रखकर विचरण कथन प्राप्त होता है।

87 किस क्षेत्र चर का विचरण किया गया है, उसके अनुसार व्यवस्थित पदों सहित HW फलनक का प्रथम विचरण है

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{HW} \;=\; &\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\,\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ &+\int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}_0\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega \\ &+\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T\left(\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon}\right)\mathrm{d}\Omega = 0\end{aligned} \tag{47.28}$$

ध्यान दें कि 4था और 7वाँ पद जोड़े गए और परस्पर निरस्त होते हैं।

88 चूँकि $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ और $\boldsymbol{\sigma}$ स्वतंत्र क्षेत्र चर हैं, $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ और $\delta\boldsymbol{\sigma}$ वाले पदों का अलग-अलग योग शून्य होना चाहिए; अतः उन्हें तीन पृथक विचरण कथनों में समूहित किया जाता है (आंशिक अवकल समीकरणों के हल में चर-पृथक्करण विधि के अनुरूप)

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \;=\; 0 \tag{47.29}$$

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_0)+\boldsymbol{\sigma}_0-\boldsymbol{\sigma}]\,\mathrm{d}\Omega \;=\; 0 \tag{47.30}$$

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T\left(\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon}\right)\mathrm{d}\Omega \;=\; 0 \tag{47.31}$$

89 HW विचरण सिद्धांत के सामान्य रूप के संगत यूलर समीकरण प्राप्त करने के लिए समीकरण 47.29 के आयतन समाकल में विकृतियों का विचरण $\delta(\mathbf{Lu})$ है, जो विस्थापनों $\mathbf{u}$ के पदों में परिभाषित है; इसका Green के प्रमेय (समीकरण R.2.6) से खंडशः समाकलन करना होगा, ताकि विस्थापनों के विचरण $\delta\mathbf{u}$ के पदों में विचरण कथन प्राप्त हो।

90 इस समाकल का खंडशः समाकलन (समीकरण R.3) देता है

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\,\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega \tag{47.32}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
अप्रकाशित प्रति

जहाँ $\mathbf{G}$ ऐसा रूपांतरण आव्यूह है जिसमें एकक अभिलंब सदिश के दिक्-कोज्या हैं, जिससे पृष्ठीय कर्षण $\mathbf{t}$ को $\mathbf{t} = \mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है और पृष्ठीय समाकल पिंड के पूरे पृष्ठ Γ पर है।

91 समीकरण 47.32 को समीकरण 47.29 में प्रतिस्थापित करने पर प्रथम विचरण कथन बनता है

$$-\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}})\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{47.33}$$

चूँकि $\delta\mathbf{u}$ स्वेच्छ है, समाकलों का योग शून्य होने के लिए कोष्ठकों के भीतर समाकल्य के दोनों व्यंजक शून्य होने चाहिए।

92 इसी प्रकार $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ और $\delta\boldsymbol{\sigma}$ भी स्वेच्छ हैं; अतः द्वितीय विचरण कथन (अर्थात समीकरण 47.30) के कोष्ठकों और तृतीय विचरण कथन (अर्थात समीकरण 47.31) के कोष्ठकों के व्यंजक समाकल के शून्य होने हेतु अलग-अलग शून्य होने चाहिए।

93 HW फलनक के यूलर समीकरण हैं

$$\begin{aligned}
\text{(BE): Equilibrium} \qquad & \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} && \text{on } \Omega && (47.34)\\
\text{(CE): Stress-Strain} \qquad & \mathbf{D}\,(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} && \text{on } \Omega && (47.35)\\
\text{(KE): Strain-Displacement} \qquad & \mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} && \text{on } \Omega && (47.36)\\
\text{(NBC): Natural B.C.} \qquad & \mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} && \text{on } \Gamma_t && (47.37)
\end{aligned}$$

जहाँ प्रथम यूलर समीकरण साम्य समीकरण, द्वितीय प्रतिबल-विकृति संबंध, तृतीय विकृति-विस्थापन समीकरण और चतुर्थ प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंध परिभाषित करता है।

94 प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंध Γ_t पर परिभाषित हैं, Γ पर नहीं, क्योंकि लगाए गए पृष्ठीय कर्षण $\hat{\mathbf{t}}$ और आव्यूह-सदिश गुणनफल $\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}$ दोनों Γ_t के बाहर सर्वसम रूप से शून्य हैं। यूलर समीकरणों से आरंभ करके अभी प्रस्तुत संक्रियाओं को उलटे क्रम में करने से HW फलनक व्युत्पन्न किया जा सकता है।

95 चार यूलर समीकरणों के इस अंतिम समुच्चय की तुलना मूल TPE से प्राप्त दो समीकरणों (समीकरण 47.17 और 47.18) से करनी चाहिए। अतिरिक्त दो समीकरण प्रतिबल-विकृति और विकृति-विस्थापन को सम्मिलित करते हैं। साथ ही मूल सूत्रीकरण (समीकरण 47.17 और 47.18) केवल विस्थापन ($\mathbf{u}$) के पदों में था, जबकि Hu-Washizu सूत्रीकरण तीन स्वतंत्र चरों ($\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}$ और $\boldsymbol{\varepsilon}$) के पदों में है, सारणी 47.2।

96 Hu-Washizu विचरण सिद्धांत का Tonti आरेख (§O.8) चित्र 47.4 में दिखाया गया है।

47.6 “छद्म-Tonti” आरेख

47.6.1 D’Alembert का सिद्धांत

97 D’Alembert का सिद्धांत Newton के द्वितीय नियम का ऐसा पुनर्सूत्रीकरण है जो जड़त्व बल प्रस्तुत करके गतिक निकाय को अर्ध-स्थैतिक साम्य रूप में बदलता है। गति समीकरणों को लगाए गए बलों और जड़त्व प्रतिक्रियाओं के संतुलन के रूप में व्यक्त करके यह सिद्धांत न्यूटनीय और लाग्रांजीय यांत्रिकी के बीच सेतु का कार्य करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

			TPE	HW
यूलर समीकरण				
साम्य	$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$	Ω	Y	Y
प्रतिबल-विकृति	$\mathbf{D}\,(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$	Ω	N	Y
विकृति-विस्थापन	$\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$	Ω	N	Y
प्राकृतिक परिसीमा प्रतिबंध	$\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$	Γ_t	Y	Y
चर				
विस्थापन		$\mathbf{u}$	Y	Y
विकृति		$\boldsymbol{\epsilon}$	N	Y
प्रतिबल		$\boldsymbol{\sigma}$	N	Y

तालिका 47.2: कुल स्थितिज ऊर्जा और Hu-Washizu सूत्रीकरणों की तुलना

98 D’Alembert के सिद्धांत का Tonti आरेख, चित्र 47.5c, इसे Newton के नियमों को आभासी कार्य और Lagrange के समीकरणों से जोड़ने वाले केंद्रीय नोड के रूप में रखता है और दर्शाता है कि यांत्रिक निकाय सामान्यीकृत निर्देशांकों द्वारा कैसे विकसित होते हैं। आरेख सामान्यीकृत बल, जड़त्व बल (ma), गतिज ऊर्जा (T), और स्थितिज ऊर्जा (V) भी सम्मिलित करता है और दिखाता है कि यह सिद्धांत यांत्रिकी के बल-आधारित तथा ऊर्जा-आधारित दोनों सूत्रीकरणों में कैसे समाहित होता है।

47.6.2 Hamilton के समीकरण

99 Hamilton के समीकरण Lagrange के समीकरणों के Legendre रूपांतरण से उत्पन्न होते हैं और यांत्रिकी को विन्यास-आधारित सूत्रीकरण से कला-समष्टि निरूपण में ले जाते हैं।

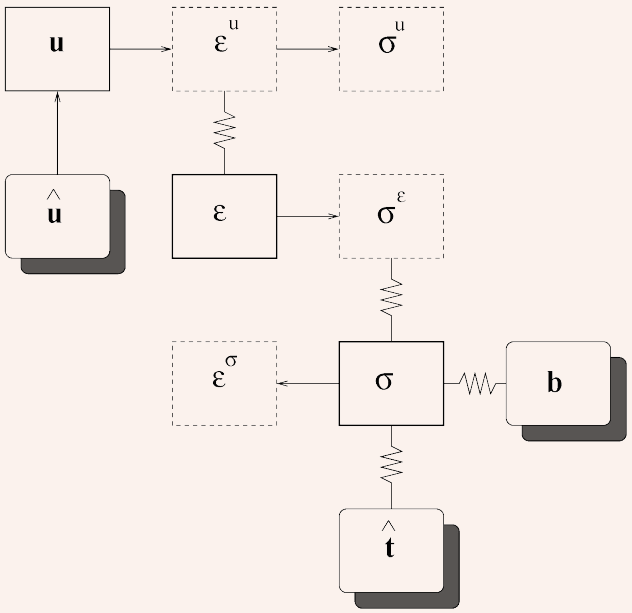
100 Hamilton के समीकरणों का Tonti आरेख, चित्र 47.5b, Newton के नियमों, D’Alembert के सिद्धांत और Lagrange के समीकरणों को सामान्यीकृत निर्देशांकों (q), सामान्यीकृत वेगों ($\dot{q}$), और सामान्यीकृत संवेगों (p) से जोड़ता है। साथ ही यह कुल ऊर्जा निरूपित करने वाले Hamiltonian फलन (H) को गतिज और स्थितिज ऊर्जा व्यंजकों से जोड़ता है। यह संरचना दर्शाती है कि Hamiltonian यांत्रिकी शास्त्रीय गतिकी के लिए कितनी शक्तिशाली रूपरेखा देती है और विहित रूपांतरणों, सम्प्रतीक ज्यामिति तथा क्वांटम यांत्रिकी में प्रत्यक्ष अनुप्रयोग संभव बनाती है।

47.6.3 Lagrange के समीकरण

101 Lagrange के समीकरण विचरण यांत्रिकी की नींव हैं और ऐसा सुरुचिपूर्ण सूत्रीकरण देते हैं जो गतिकी को पूर्णतः सामान्यीकृत निर्देशांकों (q) और वेगों ($\dot{q}$) के पदों में व्यक्त करता है।

102 Lagrange के समीकरणों का Tonti आरेख, चित्र 47.5a, उन्हें D’Alembert के सिद्धांत द्वारा न्यूटनीय यांत्रिकी से तथा आभासी कार्य और ऊर्जा विधियों से जोड़ता है। यह Legendre रूपांतरण द्वारा Hamilton के समीकरणों तक सेतु बनाता और यूलर-लाग्रांज समीकरणों से जोड़ता है, जिससे विचरण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

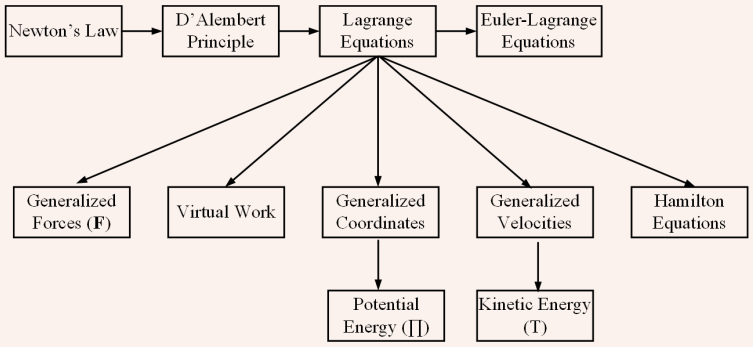


चित्र 47.4: Hu-Washizu के लिए Tonti आरेख, (Červenka, 1994)

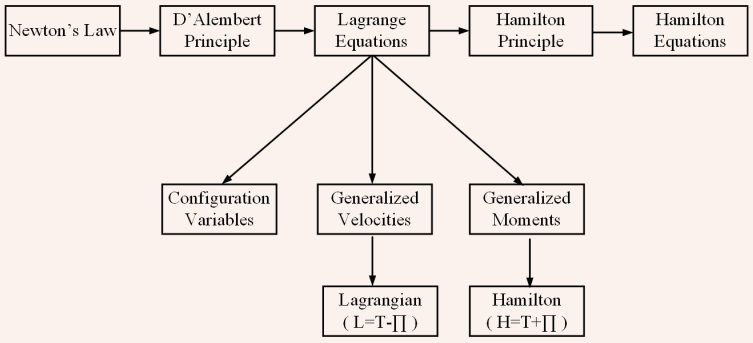
कलन के साथ उसका गहरा संबंध स्पष्ट होता है। बल-आधारित वर्णनों से ऊर्जा-आधारित दृष्टिकोणों की ओर संक्रमण दिखाकर आरेख स्पष्ट करता है कि लाग्रांजीय यांत्रिकी किस प्रकार शास्त्रीय यांत्रिकी को शक्तिशाली विश्लेषणात्मक रूपरेखा में एकीकृत करती है।

हिन्दी अनुवाद

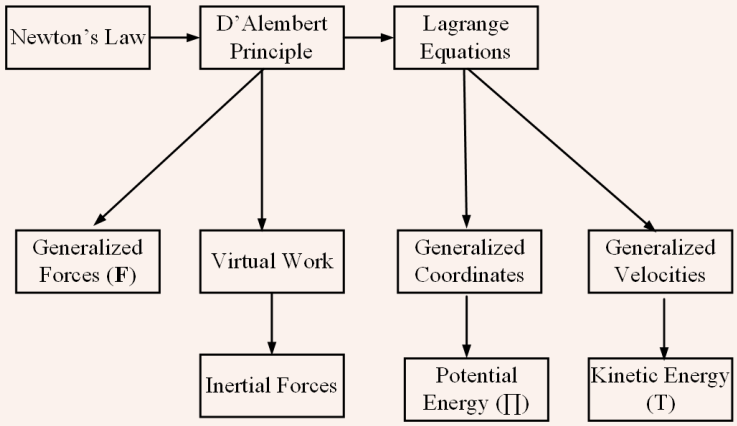
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) Lagrange



(b) Hamilton



(c) D'Alembert

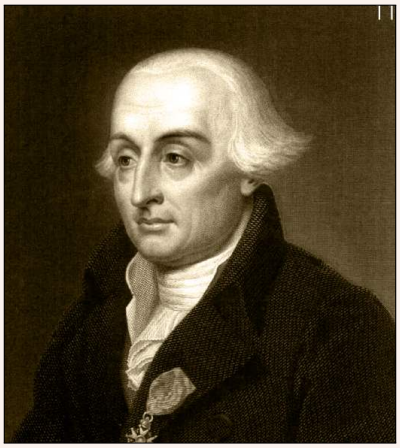
चित्र 47.5: Lagrange, Hamilton और D'Alembert के लिए Tonti आरेख

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Euler (1707)-1783)



Lagrange (1736-1813)



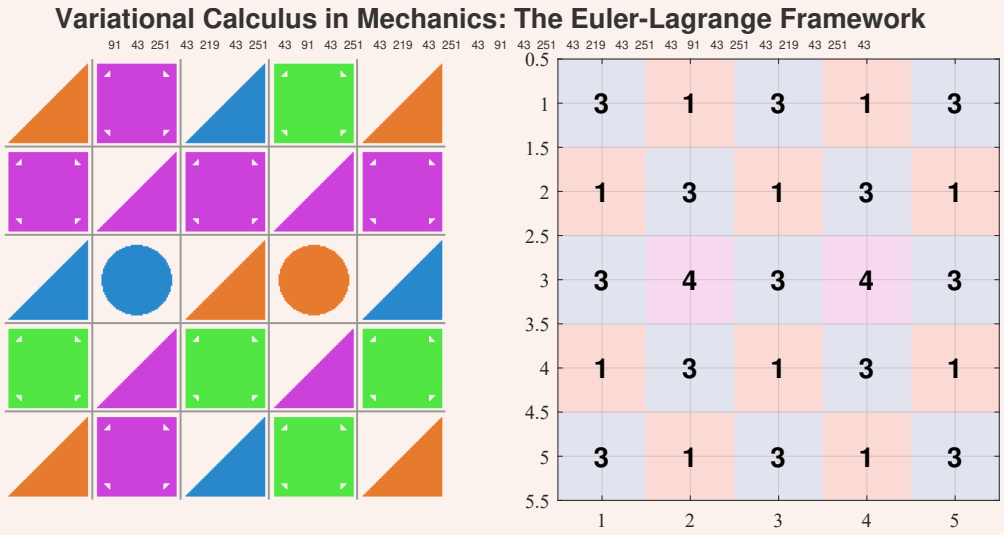
Hamilton (1805-1865)



D’Alembert (1717-1813)

समीक्षा प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अध्याय-विशिष्ट आइडेंटिकॉन, chapter H

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

48 संरचनात्मक विश्लेषण में विचरण और ऊर्जा सिद्धांत

सारांश

यह अध्याय पूर्व में अपनाए गए साम्य-आधारित (न्यूटनीय) दृष्टिकोण (अध्याय 44) की तुलना में मूलतः भिन्न हल योजना प्रस्तुत करेगा।

यह पूर्ववर्ती अध्याय में विवेचित विचरण सिद्धांतों से व्युत्पन्न फलनक की स्थिरता की संकल्पना अपनाएगा। हलों का यह वर्ग लाग्रांजीय कहलाता है।

अनेक हल व्युत्पन्न किए जाएँगे, यद्यपि वे सभी परस्पर संबंधित हैं (अर्थात किसी एक को दूसरे से व्युत्पन्न किया जा सकता है)। इससे आभासी कार्य सिद्धांत, न्यूनतम कुल स्थितिज ऊर्जा सिद्धांत, रिट्ज विधि और कास्टिलियानो के प्रमेयों के नाम से प्रसिद्ध सूत्रीकरण प्राप्त होंगे। इनमें से कुछ से पाठक पहले ही परिचित हो सकते हैं (अध्याय 24)।

अंततः आभासी विस्थापन सिद्धांत अध्याय 50 में प्रस्तुत परिमित अवयव विधि की नींव रखेगा।

48.1 परिचय 1662
48.1.1 ऊष्मागतिकी 1663
48.1.2 मूल संबंध 1663
48.1.3 परिभाषाएँ 1664
48.1.4 वास्तविक पद 1664
48.1.5 आभासी व्यंजक 1666
48.1.6 टिप्पणियाँ 1667
48.1.7 1D अवयवों पर अनुप्रयोग . . . 1669
48.1.8 VW और CVW का सारांश . . 1674
48.2 उपागम 1675
48.3 आभासी कार्य 1676
48.3.1 पूरक आभासी कार्य का सिद्धांत (PCVW) 1676
48.3.2 उदाहरण 48.2: तीन-कब्ज़ों वाली अर्धवृत्ताकार मेहराब 1680
48.3.3 आभासी कार्य का सिद्धांत (PVW) 1681
48.4 स्थितिज ऊर्जा के सिद्धांत 1685
48.4.1 कुल स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत (PTPE) 1685
48.4.2 कुल पूरक स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत (PTCPE) 1689
48.5 कास्टिलियानो के प्रमेय 1689
48.5.1 प्रथम प्रमेय 1689
48.5.2 द्वितीय प्रमेय 1692
48.6 रेले–रिट्ज विधि 1695
48.6.1 व्युत्पत्ति 1695
48.7 सारांश 1705

[1] यह अध्याय मुख्यतः (Pilkey and Wunderlich, 1994) और (Reddy, 2017) से प्रेरित है।

48.1 परिचय

[2] यह अनुभाग विभिन्न परिभाषाओं को केवल सूचीबद्ध करेगा, पदों के युग्मों को जोड़ने का प्रयास किए बिना। प्रत्येक पद का अर्थ स्पष्टतः समझ लेने के बाद यह कार्य आगे किया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

48.1.1 ऊष्मागतिकी

3 कार्य को बल और विस्थापन के गुणनफल के रूप में परिभाषित किया जाता है

$$W \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \mathbf{F}.\mathrm{ds}$$
$$\mathrm{d}W = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y$$

4 ऊर्जा कार्य करने की योग्यता अथवा क्षमता निरूपित करने वाली राशि है।

5 ऊर्जा में परिवर्तन किए गए कार्य की मात्रा के समानुपाती है। चूँकि केवल ऊर्जा परिवर्तन सम्मिलित है, ऊर्जा के मापन का आधार कोई भी दत्तांश हो सकता है। अतः ऊर्जा न उत्पन्न होती है, न उपभुक्त।

परिभाषा 48.1: ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम

कुल ऊर्जा (अर्थात गतिज ऊर्जा K और आंतरिक ऊर्जा U का योग) के परिवर्तन की समय-दर, बाह्य बलों द्वारा किए गए कार्य की दर W_e और प्रति इकाई समय ऊष्मा-अंतर्वस्तु परिवर्तन H के योग के बराबर है:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K+U) = W_e + H \tag{48.1}$$

जहाँ K गतिज ऊर्जा, U आंतरिक विकृति ऊर्जा, W बाह्य कार्य, और H निकाय में ऊष्मा निवेश है।

6 रुद्धोष्म निकाय (ऊष्मा विनिमय नहीं) में, और यदि भार अर्ध-स्थैतिक ढंग से लगाए जाएँ (गतिज ऊर्जा नहीं), तो उपर्युक्त संबंध सरल होकर बनता है:

$$W_e = U \tag{48.2}$$

7 संरचनात्मक यांत्रिकी के संदर्भ में U और W_e दोनों को अभी परिभाषित करना शेष है। यह आगे किया जाएगा।

48.1.2 मूल संबंध

8 आरंभ करने से पहले आवश्यक अनेक व्यंजकों को परिभाषित करना होगा; आगे उनका संदर्भ दिया जाएगा।

प्रतिबल-विकृति संबंध $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0$

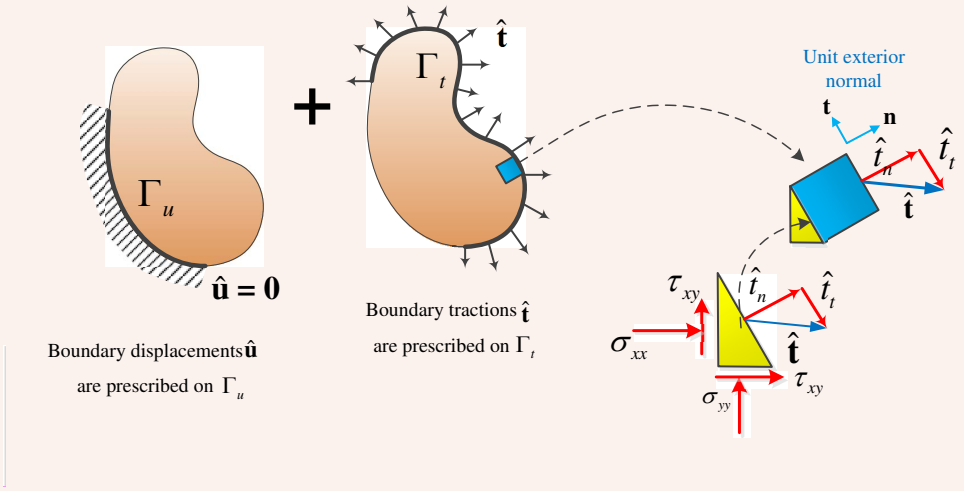
जहाँ $\mathbf{D}$ संघटक आव्यूह है; $\boldsymbol{\varepsilon}$ विस्थापनों $\mathbf{u}$ से उत्पन्न विकृति सदिश; $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ आरंभिक विकृति सदिश; $\boldsymbol{\sigma}_0$ आरंभिक प्रतिबल सदिश; और $\boldsymbol{\sigma}$ प्रतिबल सदिश है।

9 आरंभिक विकृतियाँ और प्रतिबल निकाय के तापन अथवा शीतलन या निकाय में रंध्र-दाब की उपस्थिति जैसी दशाओं के परिणाम हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बल संरचनात्मक यांत्रिकी में केवल दो प्रकार के बल हैं:

पृष्ठीय कर्षण $\hat{\mathbf{t}}$, चित्र 48.1 टिप्पणी: बिंदु बल *Dirac* फलन द्वारा कर्षण से संबंधित है, $\delta(z-d) =$



चित्र 48.1: कर्षण की परिभाषा

$0, z \neq d$, अतः:

$$\int_{\infty}^{\infty} \delta(z-d)dz = 1$$

$$\int_{0}^{L} \delta(z-d)dz = 1$$

$$\int_{0}^{L} f(z)\delta(z-d)dz = f(d)$$

पिंड बल b (जैसे गुरुत्वीय अथवा विद्युतचुंबकीय)।

बिंदु बल/आघूर्ण

$$W_e = \int_0^{\Delta_f} P d\Delta + \int_0^{\theta_f} M d\theta$$

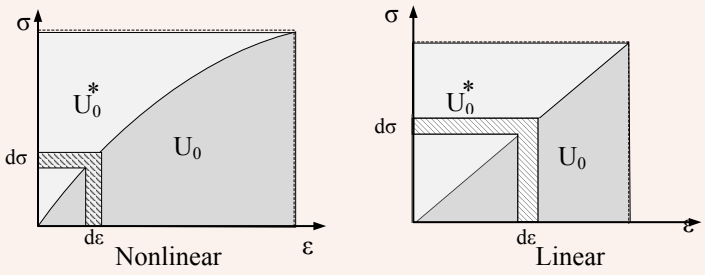
48.1.3 परिभाषाएँ

48.1.4 वास्तविक पद

आंतरिक विकृति ऊर्जा घनत्व

$$U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{48.3}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 48.2: विकृति और पूरक विकृति ऊर्जा घनत्व

पूरक विकृति ऊर्जा घनत्व $U_0^* \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$

विकृति ऊर्जा $U \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega U_0 d\Omega = \int_\Omega \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$

रैखिक प्रत्यास्थ निकाय के लिए

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathrm{d}\Omega$$

जहाँ Ω निकाय का आयतन है।

पूरक विकृति ऊर्जा $U^* \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega U_0^* d\Omega = \int_\Omega \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} d\Omega$

बाह्य कार्य

$$W_e \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma$$

$$W_e = \int_0^{\Delta_f} P \mathrm{d}\Delta + \int_0^{\theta_f} M \mathrm{d}\theta$$

रैखिक प्रत्यास्थ निकायों के लिए बिंदु भारों हेतु

$$\left.\begin{aligned} P &= K\Delta \\ W_e &= \int_0^{\Delta_P} P \mathrm{d}\Delta \end{aligned}\right\} W_e = K\int_0^{\Delta_P} \Delta \mathrm{d}\Delta = \frac{1}{2} K \Delta_P^2$$

इस अंतिम समीकरण को $P = K\Delta_P$ के साथ संयोजित करने पर मिलता है

$$W_e = \frac{1}{2} P \Delta_P \tag{48.4}$$

जहाँ K संरचना की **दृढता** है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[10] इसी प्रकार लगाए गए आघूर्ण के लिए

$$W_e = \frac{1}{2} M \theta_M \tag{48.5}$$

बाह्य कार्य का विभव

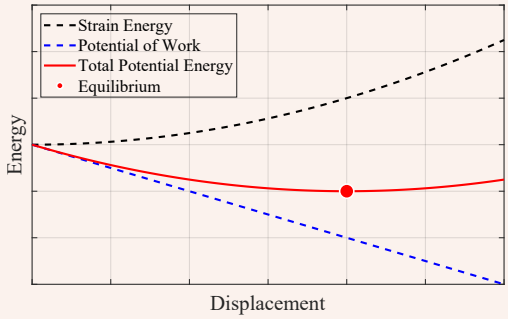
$$\mathcal{W}_e \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma + \mathbf{uP} \tag{48.6}$$

ध्यान दें कि बाह्य बलों की स्थितिज ऊर्जा बाह्य *वर्धमान* भारों के कार्य (जो विस्थापन के साथ बढ़ता है) के समान नहीं है। बाह्य बलों की स्थितिज ऊर्जा विस्थापन से गुजरते *नियत* बलों का कार्य है। अतः उनमें 1/2 का गुणक अंतर है।

स्थितिज ऊर्जा

$$\Pi \stackrel{\text{def}}{=} U - \mathcal{W}_e = \int_\Omega U_0 d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{u}\mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}\hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{uP} \right) \tag{48.7}$$

अतः स्थितिज ऊर्जा विकृति ऊर्जा और *बाह्य कार्य के विभव* (कार्य नहीं) का योग है। चित्र 48.3 में दर्शाए अनुसार विकृति ऊर्जा विस्थापन के साथ द्विघात रूप से बढ़ती है, जबकि बाह्य कार्य का विभव बढ़ते विस्थापन के साथ घटता है।



चित्र 48.3: स्थितिज ऊर्जा

पूरक स्थितिज ऊर्जा

$$\Pi^* \stackrel{\text{def}}{=} U^* - \mathcal{W}_e^* = \int_\Omega U_0^* d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{u}\mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}\hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{uP} \right)$$

48.1.5 आभासी व्यंजक

[11] ध्यान दें कि आभासी राशियों के पूर्व δ आता है। यद्यपि यहाँ इस प्रतीक को कोई विशिष्ट गणितीय महत्त्व नहीं दिया गया, इसी δ का उपयोग न्यूनतम कुल (अथवा पूरक) स्थितिज ऊर्जा सिद्धांत में अवकल संकारक दर्शाने हेतु होगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आंतरिक आभासी विकृति ऊर्जा $\delta\overline{U} = -\delta\overline{W}_i \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}d\Omega$

पूरक आभासी विकृति ऊर्जा $\delta\overline{U}^* = -\delta\overline{W}_i^* \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}\delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}d\Omega$

बाह्य आभासी कार्य $\delta\overline{W}_e \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^t\hat{\mathbf{t}}d\Gamma + \int_\Omega \delta\overline{\mathbf{u}}^t\mathbf{b}d\Omega$

पूरक बाह्य आभासी कार्य

$$\delta\overline{W}_e^* \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_u} \hat{\mathbf{u}}^t\,\delta\bar{\mathbf{t}}d\Gamma \tag{48.8}$$

48.1.6 टिप्पणियाँ

48.1.6.1 आंतरिक कार्य बनाम विकृति ऊर्जा

12 विकृति वृद्धि के दौरान किसी अवकल अवयव में आंतरिक बलों द्वारा किया गया कार्य उस पर कार्यरत प्रतिबलों द्वारा किए गए कार्य का ऋणात्मक होगा।

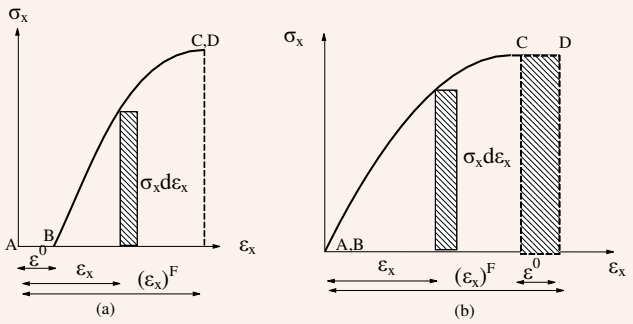
$$W_i \overset{\text{def}}{=} -\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}d\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\Omega$$

13 यदि विकृत प्रत्यास्थ ठोस को धीरे-धीरे उसकी अविकृत अवस्था में लौटने दिया जाए, तो ठोस बाह्य बलों द्वारा किए गए कार्य को लौटा देगा। यह ठोस में संचित विकृति ऊर्जा के विमोचन के कारण है।

14 अतः आरंभिक विकृतियों की अनुपस्थिति में,

$$U = -W_i$$

15 आंतरिक कार्य भार इतिहास पर निर्भर करता है; इसे दो भार प्रकरणों के अधीन अक्षीय सदस्य से दर्शाया गया है, चित्र 48.4: a) आरंभिक तापीय विकृतियाँ (बिना संगत प्रतिबल वृद्धि), जिसके बाद बाह्य



चित्र 48.4: U और W_i पर भार इतिहासों का प्रभाव

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बल; और b) बाह्य बल, जिसके बाद तापीय विकृति। दोनों प्रकरणों में आंतरिक कार्य वक्र ABCD के नीचे के क्षेत्रफल के बराबर है।

$$
\begin{aligned}
U_i &= \int_0^L \left(\int_0^{(\varepsilon_x)_F} \sigma_{xx} \mathrm{d}\varepsilon_x \right) A \mathrm{d}x \\
W_i^a &= -U_i \\
W_i^b &= -U_i - \int_0^L \left(\int_0^{\varepsilon^0} \sigma_{xx} \mathrm{d}\varepsilon_x \right) A \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

अतः W_i सदैव $-U_i$ के बराबर नहीं होता।

48.1.6.2 बाह्य कार्य की पथ-स्वतंत्रता

16 इस अनुभाग में हम सिद्ध करना चाहते हैं कि अवस्था A से B तक जाने में किया गया कुल कार्य पथ से स्वतंत्र है।

17 2D में कार्य का अवकल व्यंजक है

$$
\mathrm{d}W_e = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y \tag{48.9}
$$

18 कलन से $\mathrm{d}W_e$ के यथार्थ अवकल होने की आवश्यक और पर्याप्त शर्त है

$$
\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{48.10}
$$

19 यदि बल बंद समोच्च के अनुदिश चले (अथवा A से B और फिर किसी स्वेच्छ पथ से A लौटे), जो Γ के अनुरूप है, तो Green के प्रमेय (समीकरण R.2.6) से

$$
\oint (R\mathrm{d}x + S\mathrm{d}y) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{48.11}
$$

यदि $R = F_x$ और $S = F_y$ रखें, तो

$$
W_e = \oint (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = \int_\Gamma \underbrace{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)}_{0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{48.12}
$$

20 अतः समीकरण 48.10 से कार्य शून्य है,

21 यदि पथ को विघटित करें

$$
W_e = \oint = \int_A^B + \int_B^A = 0 \Rightarrow \int_A^B = -\int_B^A \tag{48.13}
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तो कार्य का समाकलन देता है

$$W_e = \int_A^B (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) \tag{48.14}$$

जो पथ से स्वतंत्र है।

[22] ध्यान दें कि यदि बंद पथ के चारों ओर चलने में कोई शुद्ध कार्य नहीं होता, तो निकाय संरक्षी कहलाता है। शुद्ध प्रत्यास्थ निकायों में यही प्रकरण है।

[23] जब घर्षण अथवा सुघट्य (या अवमंदित) विरूपण होते हैं, तो निकाय *असंरक्षी* होता है।

48.1.7 1D अवयवों पर अनुप्रयोग

48.1.7.1 पूरक ऊर्जा, रैखिक प्रत्यास्थ U^*

अक्षीय सदस्य

$$\left.\begin{aligned} U^* &= \int_\Omega \varepsilon \sigma d\Omega \\ \sigma &= \frac{P}{A} \\ \varepsilon &= \frac{P}{AE} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} U^* = A \int_\Omega \int_0^L \frac{P}{AE}\frac{dP}{A} dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2}{AE} dx$$

आनमनी सदस्य

$$\left.\begin{aligned} U^* &= \int_\Omega \varepsilon E \delta\varepsilon d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{E I_z} \\ d\Omega &= dA dx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \end{aligned}\right\} U^* = \int_0^L M(x)\frac{M(x)}{E I_z} dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2(x)}{E I_z} dx \tag{48.15}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

48.1.7.2 ऊर्जा, रैखिक प्रत्यास्थ U

अक्षीय सदस्य

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_\Omega \varepsilon\sigma d\Omega \\ \varepsilon &= \frac{du}{dx} \\ \sigma &= \frac{1}{E}\frac{du}{dx} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} U = \frac{A}{E}\int_\Omega\int_0^L \frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}dx = \frac{A}{2E}\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

आनमनी सदस्य

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_\Omega \varepsilon E\delta\varepsilon d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{EI_z} \\ d\Omega &= dA dx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \\ \frac{M(x)}{EI} &= \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} U = \int_0^L M(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx = \int_0^L EI_z y''\frac{EI_z y''}{EI_z}dx = EI_z\int_0^L (y'')^2 dx$$

48.1.7.3 पूरक आभासी विकृति ऊर्जा δU^*

Axial Members

[24] δ द्वारा चिह्नित आभासी राशियाँ प्रतिबल और बल हैं।

प्रत्यास्थ निकाय

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \delta\overline{\sigma}\varepsilon d\Omega \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = A\int_0^L \delta\overline{\sigma}\varepsilon dx$$

रेखीय प्रत्यास्थ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \varepsilon \delta\overline{\sigma} d\Omega \\ \delta\overline{\sigma} &= \frac{\delta\overline{P}}{A} \\ \varepsilon &= \frac{P}{AE} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \underbrace{\delta\overline{P}}_{``\delta\overline{\sigma}''} \underbrace{\frac{P}{AE}}_{``\varepsilon''} dx$$

आनमनी अवयव

प्रत्यास्थ निकाय

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \delta\overline{\sigma}_{xx}\varepsilon_x d\Omega \\ \delta\overline{M}(x) &= \int_A \delta\overline{\sigma}_x y dA \Rightarrow \frac{\delta\overline{M}(x)}{y} = \int_A \delta\overline{\sigma}_x dA \\ \phi &= \frac{\varepsilon}{y} \Rightarrow \phi y = \varepsilon_x \\ d\Omega &= \int_0^L \int_A dA dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{M}(x)\phi dx$$

रेखीय प्रत्यास्थ

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \varepsilon \underbrace{E\delta\overline{\varepsilon}}_{\delta\overline{\sigma}} d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{EI_z} \\ d\Omega &= dA dx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}(x)}_{``\delta\overline{\sigma}''} \underbrace{\frac{M(x)}{EI_z}}_{``\varepsilon''} dx$$

मरोड़ी अवयव

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

प्रत्यास्थ निकाय

$$\left.\begin{aligned} \delta U^* &= \int_\Omega \varepsilon \delta\sigma dvol \\ \delta U^* &= \int_\Omega \delta\tau_{xy}\gamma_{xy} dvol \\ \tau_{xy} &= \frac{Tr}{J} \\ \mathrm{d}\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta U^* = \int_0^L \frac{\delta T}{J}\gamma_{xy}\mathrm{d}x \tag{48.16}$$

रेखीय प्रत्यास्थ

$$\left.\begin{aligned} \delta U^* &= \int_\Omega \delta\tau_{xy} \underbrace{G\tau_{xy}}_{\gamma_{xy}} dvol \\ \tau_{xy} &= \frac{Tr}{J} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \mathrm{d}\Omega &= r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}x \\ J &= \int_o^r\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \end{aligned}\right\} \delta U^* = \int_0^L \underbrace{\delta T}_{``\delta\sigma''} \underbrace{\frac{T}{GJ}}_{``\varepsilon''} \mathrm{d}x \tag{48.17}$$

48.1.7.4 आभासी विकृति ऊर्जा δU

25 आंतरिक आभासी विकृति ऊर्जा को विकृति अथवा आंतरिक विस्थापनों के पदों में व्यक्त किया जाता है।

26 इससे परिमित अवयव विधि के मूल में स्थित सूत्रीकरण प्राप्त होगा।

अक्षीय अवयव

27 δ द्वारा चिह्नित आभासी राशियाँ विकृतियाँ और विस्थापन हैं।

प्रत्यास्थ निकाय

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U} &= \int_\Omega \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = A\int_0^L \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x dx$$

रेखीय प्रत्यास्थ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U} &= \int \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ \sigma_x &= E\varepsilon_x = E\frac{du}{dx} \\ \delta\overline{\varepsilon}_x &= \frac{d(\delta\overline{u})}{dx} \\ d\Omega &= Adx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{E\frac{du}{dx}}_{"\sigma"} \underbrace{\frac{d(\delta\overline{u})}{dx}}_{"\delta\overline{\varepsilon}"} \underbrace{Adx}_{d\Omega}$$

आनमनी अवयव

प्रत्यास्थ निकाय

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U} &= \int \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ M(x) = \int_A \sigma_x y dA &\Rightarrow \frac{M(x)}{y} = \int_A \sigma_x dA \\ \delta\overline{\phi} = \frac{\delta\overline{\varepsilon}_x}{y} &\Rightarrow \delta\overline{\phi} y = \delta\overline{\varepsilon}_x \\ d\Omega &= \int_0^L \int_A dA dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L M(x)\delta\overline{\phi} dx$$

रेखीय प्रत्यास्थ

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U} &= \int_\Omega \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ \left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M(x)y}{I_z} \\ M(x) &= \frac{d^2v}{dx^2} EI_z \end{aligned}\right\} &\sigma_x = \underbrace{\frac{d^2v}{dx^2}}_{\kappa} Ey \\ \delta\overline{\varepsilon}_x &= \frac{\delta\overline{\sigma}_x}{E} = \frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2} y \\ d\Omega &= Adx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L \int_A \frac{d^2v}{dx^2} Ey \frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2} y dA dx$$

चूँकि $\int_A y^2 dA = I_z \Rightarrow$

$$\delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{EI_z \frac{d^2v}{dx^2}}_{"\sigma"} \underbrace{\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}}_{"\delta\overline{\varepsilon}"} dx$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

48.1.8 VW और CVW का सारांश

[28] सारणी 48.1 पूर्व में परिभाषित विविध व्यंजकों का एक "विहंगम" दृश्य प्रस्तुत करती है।

टिप्पणी:

तालिका 48.1: VW, CVW, PE और CPE के समीकरणों का सारांश

आंतरिक आभासी विकृति ऊर्जाएँ				
	विकृति ऊर्जा $\delta\overline{U}$		पूरक विकृति ऊर्जा: $\delta\overline{U}^*$	
	प्रत्यास्थ	रेखीय प्रत्यास्थ	प्रत्यास्थ	रेखीय प्रत्यास्थ
अक्षीय	$A\int_0^L \sigma\delta\overline{\varepsilon}dx$	$\int_0^L \underbrace{E\frac{du}{dx}}_{\sigma}\underbrace{\frac{d(\delta\overline{u})}{dx}}_{\delta\overline{\varepsilon}}\underbrace{Adx}_{d\Omega}$	$A\int_0^L \delta\overline{\sigma}\varepsilon dx$	$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{P}}_{\delta\overline{\sigma}}\underbrace{\frac{P}{AE}}_{\varepsilon}dx$
आनमन	$\int_0^L M\delta\overline{\phi}dx$	$\int_0^L \underbrace{EI_z\frac{d^2v}{dx^2}}_{\sigma}\underbrace{\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}}_{\delta\overline{\varepsilon}}dx$	$\int_0^L \delta\overline{M}\phi dx$	$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}}_{\delta\overline{\sigma}}\underbrace{\frac{M}{EI_z}}_{\varepsilon}dx$
बाह्य आभासी कार्य				
P	$\sum_i^n P_i\delta\overline{\Delta}_i$		$\sum_i^n \delta\overline{P}_i\Delta_i$	
M	$\sum_i^n M_i\delta\overline{\theta}_i$		$\sum_i^n \delta\overline{M}_i\theta_i$	
w	$\int_0^L w(x)\delta\overline{v}(x)dx$		$\int_0^L \delta\overline{w}(x)v(x)dx$	
ऊर्जा				
	ऊर्जा U **(विस्थापन)**		पूरक ऊर्जा U^* **(बल)**	
अक्षीय	$\frac{1}{2}\frac{A}{E}\int_0^L\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$		$\frac{1}{2}\int_0^L\frac{P^2}{AE}dx$	
आनमन	$\frac{1}{2}\int_0^L EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2dx$		$\frac{1}{2}\int_0^L\frac{M^2}{EI_z}dx$	

ध्यान दें कि इस खंड में प्लवमान अवयव (चित्र और/अथवा सारणियाँ) हैं जिन्हें अगले खंड से पहले मुद्रित करना आवश्यक है। परिणामस्वरूप यहाँ रिक्त स्थान अथवा अंतराल दिखाई दे सकते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

48.2 उपागम

29 अब तक हम उन समीकरणों के प्रत्येक घटक को परिभाषित कर चुके हैं जिन्हें अभी व्युत्पन्न किया जाना है। अभी तक ये पद एक-दूसरे से स्वतंत्र थे और इनके बीच कोई संबंध नहीं था।

30 अतः विवरण में जाने से पहले दो संभावित उपागमों को देखना उचित है: आभासी कार्य का सिद्धांत (PVW) और पूरक आभासी कार्य का सिद्धांत (PCVW), जो निम्न को संबद्ध करते हैं:

बल निकाय, जो साम्य की आवश्यकताओं को संतुष्ट करते हैं;
विरूपण निकाय, जो शुद्धगतिक आवश्यकताओं को संतुष्ट करते हैं।

31 इन दोनों सिद्धांतों की व्युत्पत्ति के लिए आभासी और वास्तविक राशियों को संयोजित करने के स्पष्टतः दो मार्ग हैं; सारणी 48.2 और चित्र 48.5 देखें।

तालिका 48.2: आभासी कार्य और पूरक आभासी कार्य के सिद्धांतों के वैकल्पिक मार्ग

सिद्धांत	आभासी			वास्तविक		
	आरंभ	संतुष्टि		अभीष्ट	संतुष्टि	
	राशि	दुर्बल रूप से	सीमा-शर्त		प्रबल रूप से	सीमा-शर्त
CVW $\delta\overline{U}^* = \delta\overline{W}^*_e$	बल	साम्य	प्राकृतिक Γ_t	विस्थापन	संगतता	अनिवार्य Γ_u
VW $\delta\overline{U} = \delta\overline{W}_e$	विस्थापन	संगतता	अनिवार्य Γ_u	बल	साम्य	प्राकृतिक $\Gamma_t jh$

32 ध्यान दें कि संगतता से हमारा आशय है

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

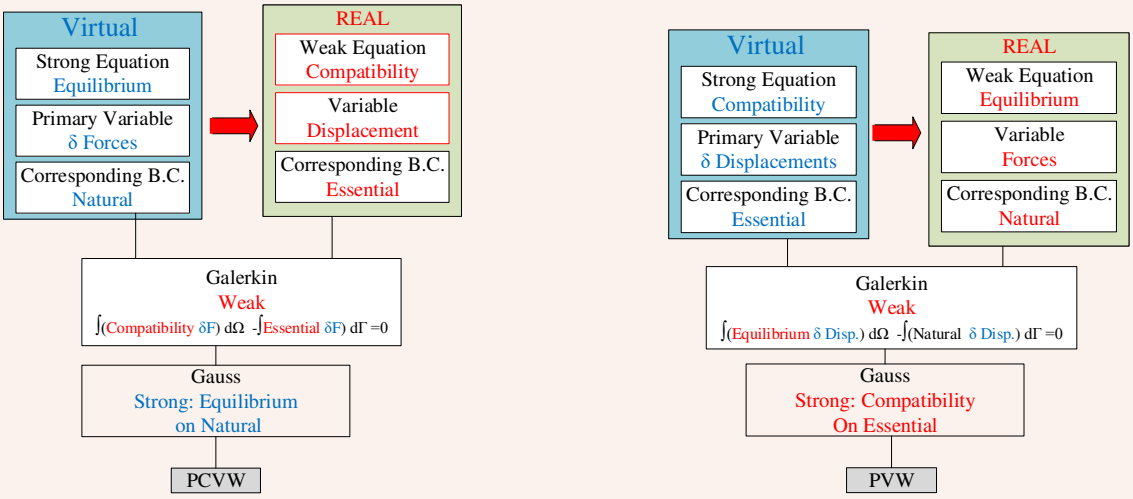
और साम्य से:

$$\text{div}\ \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

33 तथापि आगे बढ़ने से पहले पाठक को चित्र 48.5 में दर्शाई गई निम्न अवधारणाओं की अच्छी समझ होनी चाहिए:

प्रबल-दुर्बल रूप, जिनकी विवेचना §47.2.3 में की गई है।
अनिवार्य और प्राकृतिक सीमा-शर्तें जिनकी विवेचना (§47.2.6) में की गई है।
प्रत्यास्थता (मूल समीकरण) (§O.8)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) पूरक आभासी कार्य (b) आभासी कार्य

चित्र 48.5: आभासी और पूरक आभासी कार्य के सिद्धांतों के निदर्शी आरेख

48.3 आभासी कार्य

48.3.1 पूरक आभासी कार्य का सिद्धांत (PCVW)

34 हम PCVW की व्युत्पत्ति से आरंभ करते हैं, क्योंकि पाठक विक्षेपों के निर्धारण की इस विधि से पहले ही परिचित हो सकता है (जिसका योजनाबद्ध परिचय पहले §24.2 में दिया गया था)।

48.3.1.1 व्युत्पत्ति

35 पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत की व्युत्पत्ति आभासी बलों के एक स्थैतिकतः ग्राह्य समुच्चय (जो साम्य को संतुष्ट करता है) और तत्संबंधी प्राकृतिक सीमा-शर्त के अस्तित्व से आरंभ होती है। हम संगत शुद्धगतिकतः ग्राह्य वास्तविक विस्थापन ज्ञात करना चाहते हैं, जो तत्संबंधी अनिवार्य सीमा-शर्तों को भी संतुष्ट करते हों; सारणी 48.2 और चित्र 48.5a देखें।

36 शुद्धगतिक (संगतता) शर्त (विकृति-विस्थापन) निम्न प्रकार दी जाती है:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

37 ध्यान दें कि इसे (समीकरण O.7) निम्न रूप में पुनर्लिखा जा सकता है:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}u_x\\ u_y\\ u_z\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$$

और आगे (PVW की व्युत्पत्ति में) साम्य समीकरण को (समीकरण O.9) निम्न रूप में व्यक्त किया जाएगा।

$$\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}b_x\\ b_y\end{array}\right\} = 0$$

अथवा

$$\underbrace{\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}}_{\text{div }\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = 0$$

38 प्राकृतिक सीमा-शर्तें निम्न प्रकार व्यक्त की जाती हैं:

$$u_i = \hat{u} \quad \text{on} \quad \Gamma_u$$

जहाँ $\hat{u}$, Γ_u के अनुदिश ज्ञात विस्थापन हैं।

39 इन दोनों समीकरणों को निम्न रूप में पुनर्लिखा जाता है:

$$\varepsilon_{ij} - u_{i,j} = 0; \qquad u_i - \hat{u} = 0$$

40 अब हम *गैलर्किन विधि* का उपयोग करते हुए इन प्रबल अवकल समीकरणों को औसत (समाकल पर दुर्बल) अर्थ में संतुष्ट करेंगे। पहले समीकरण को आभासी प्रतिबल क्षेत्र $\delta\overline{\sigma}_{ij}$ से पूर्वगुणित कर आयतन पर समाकलित करें; दूसरे को संगत आभासी कर्षणों $\delta\bar{t}_i$ से पूर्वगुणित कर संगत पृष्ठ पर समाकलित करें। इससे दुर्बल रूप प्राप्त होता है:

$$\int_\Omega \underbrace{\left(\varepsilon_{ij} - u_{i,j}\right)\delta\overline{\sigma}_{ij}}_{\text{Compatibility}}\, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \underbrace{\left(u_i - \hat{u}\right)\delta\bar{t}_i}_{\text{Essential B.C.}}\, d\Gamma = 0 \tag{48.18}$$

41 अब $\int_{\Gamma_u} u_i\delta\bar{t}_i d\Gamma$ पर ध्यान दें।

$$\int_{\Gamma_u} u_i\delta\bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i\delta\bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_t} u_i\delta\bar{t}_i d\Gamma$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ध्यान दें कि दाहिनी ओर का दूसरा पद शून्य है, क्योंकि

$$\delta \bar{t}_i = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_t$$

प्राकृतिक सीमा-शर्तों को संतुष्ट करने के लिए ऐसा होना आवश्यक है।

42 अतः

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta \bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i \delta(\overline{\sigma}_{ij} n_j) d\Gamma \tag{48.19}$$

43 $u_i \delta \bar{t}_i$ पद पर गाउस प्रमेय (§R) को $t_i = \sigma_{ij} n_j$ के साथ लागू करने पर

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma &= \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i) n_j d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) d\Omega\end{aligned}$$

इस प्रकार अब समीकरण 48.19 को आयतन समाकल में परिवर्तित किया जा सकता है:

$$\int_{\Gamma} u_i \delta \bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Omega} u_i \delta \overline{\sigma}_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{i,j} \delta \overline{\sigma}_{ij} d\Omega$$

44 कल्पित आभासी प्रतिबल Ω के भीतर स्थैतिकतः ग्राह्य (अर्थात् साम्य में) होने चाहिए। इसके विपरीत, आभासी कार्य/विस्थापन के सिद्धांत में आभासी विस्थापन शुद्धगतिकतः ग्राह्य होने चाहिए। आयतन बलों की अनुपस्थिति में:

$$\delta \overline{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

अथवा

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta \bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Omega} u_{i,j} \delta \overline{\sigma}_{ij} d\Omega$$

45 इस अंतिम समीकरण को समीकरण 48.18 के साथ संयोजित करने पर प्राप्त होता है:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} u_{i,j} \delta \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \hat{u} \delta t_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{i,j} \delta \sigma_{ij} d\Omega = 0 \tag{48.20}$$

जिसका सरलीकृत रूप है:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \hat{u} \delta t_i d\Gamma = 0 \tag{48.21}$$

46 प्रत्येक पद कार्य का एक व्यंजक है; पहला आंतरिक पूरक आभासी कार्य और दूसरा बाह्य पूरक आभासी कार्य के अनुरूप है, समीकरण 48.8।

$$-\delta W_i^* - \delta W_e^* = 0 \tag{48.22}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा

$$\delta U_i^* = \delta W_e^* \tag{48.23}$$

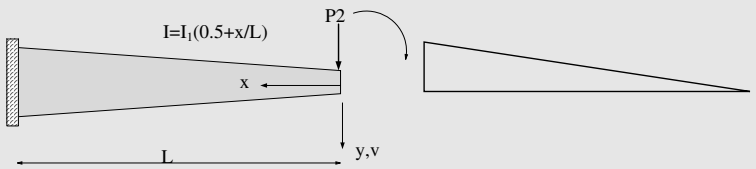
जो पूरक आभासी कार्य (अथवा आभासी बलों) का सिद्धांत है।

परिभाषा 48.2: पूरक आभासी कार्य का सिद्धांत

कोई विरूपणीय निकाय सभी शुद्धगतिक आवश्यकताओं (समीकरण 48.2) को संतुष्ट करता है, यदि सभी स्थैतिकतः ग्राह्य आभासी प्रतिबलों $\delta\overline{\sigma}_{ij}$ के लिए बाह्य पूरक आभासी कार्य और आंतरिक पूरक आभासी कार्य का योग शून्य हो।

यह सिद्धांत नम्यता आव्यूह की ओर ले जाता है।

48.3.1.2 उदाहरण 48.1: PCVW, क्रमशः परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाली कैंटिलीवर धरन



$$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}\frac{M}{EI_z}dx}_{\text{Internal}} = \underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\text{External}}$$

यहाँ $\delta\overline{M}$ और $\delta\overline{P}$ आभासी बल हैं, तथा $\frac{M}{EI_z}$ और Δ वास्तविक विस्थापन हैं।

यदि $\delta\overline{P}=1$ हो, तो $\delta\overline{M}=x$ और $M=P_2x$ अथवा:

$$(1)\Delta = \int_0^L x\frac{P_2x}{EI_1(.5+\frac{x}{L})}dx = \frac{P_2}{EI_1}\int_0^L \frac{x^2}{\frac{L+x}{2L}}dx = \frac{P_2 2L}{EI_1}\int_0^L \frac{x^2}{L+x}dx$$

Mathematica से ज्ञात है कि:

$$\int \frac{x^2}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln(a+bx)dx\right]$$

अतः $a=L$ और $b=1$ रखने पर प्राप्त होता है:

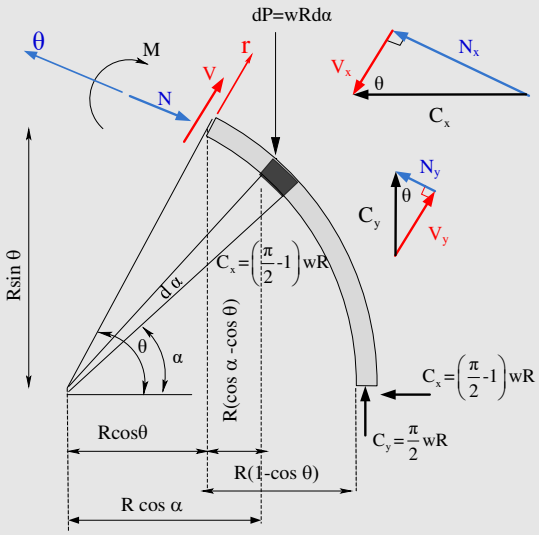
$$\Delta = \frac{2P_2L}{EI_1}\left[\frac{1}{2}(L+x)^2 - 2L(L+x) + L^2\ln(L+x)\right]\Big|_0^L = \frac{2P_2L}{EI_1}\left[L^2(\ln 2 - \frac{1}{2})\right] = \frac{P_2L^3}{2.5887EI_1}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इसी प्रकार:

$$\theta = \int_0^L \frac{M(1)}{EI_1\left(.5+\frac{x}{L}\right)} = \frac{2ML}{EI_1}\int_0^L \frac{1}{L+x} = \frac{2ML}{EI_1}\ln(L+x)\,|_0^L = \frac{ML}{.721EI_1}$$

48.3.2 उदाहरण 48.2: तीन-कब्ज़ों वाली अर्धवृत्ताकार मेहराब



हम तीन-कब्ज़ों वाली स्थैतिकतः निर्धार्य अर्धवृत्ताकार मेहराब के अपने मृत भार w के अधीन मुकुट के ऊर्ध्वाधर विक्षेप का निर्धारण करना चाहते हैं।
पहले हम आघूर्ण आरेख का वैश्लेषिक व्यंजक निर्धारित करते हैं। स्थैतिकी से दिखाया जा सकता है कि ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज प्रतिक्रियाएँ $R_v = \frac{\pi}{2}wR$ और $R_h = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR$ हैं।
इसके बाद मेहराब के मुक्त-पिंड आरेख पर विचार करते हुए, त्रिज्यीय दिशा में बलों का योग करने पर ($\Sigma F_R = 0$):

$$-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR\cos\theta + \frac{\pi}{2}wR\sin\theta - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\sin\theta + V = 0$$
$$V = wR\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos\theta + \left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\sin\theta\right]$$

इसी प्रकार, अक्षीय दिशा में बलों के योग पर विचार करने पर ($\Sigma F_T = 0$):

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR\sin\theta + \frac{\pi}{2}wR\cos\theta - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cos\theta + N = 0$$
$$N = wR\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta - \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sin\theta\right]$$

अब हम साम्य के तीसरे समीकरण ($\Sigma M_\theta = 0$) पर विचार कर सकते हैं:

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR\cdot R\sin\theta - \frac{\pi}{2}wR^2(1-\cos\theta) +$$
$$\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cdot R(\cos\alpha-\cos\theta) + M = 0$$
$$M = wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta) + \left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

वास्तविक वक्रता ϕ, आघूर्ण को EI से विभाजित करके प्राप्त होती है:

$$\phi = \frac{wR^2}{EI}\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]$$

आभासी बल δP, अभीष्ट विक्षेप की दिशा में एक इकाई ऊर्ध्वाधर बिंदु-बल होगा, जिससे निम्न आभासी आंतरिक आघूर्ण उत्पन्न होगा:

$$\delta M = \frac{R}{2}\left[1-\cos\theta-\sin\theta\right] \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

अतः आभासी कार्य समीकरण लागू करने पर प्राप्त होता है:

$$\underbrace{1}_{\delta P}\cdot\Delta = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{wR^2}{EI}\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta)+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]}_{\phi}\cdot\underbrace{\frac{R}{2}\cdot\left[1-\cos\theta-\sin\theta\right]}_{\delta M}\underbrace{R\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{wR^4}{16EI}\left[7\pi^2-18\pi-12\right]$$

$$= 0337\frac{wR^4}{EI}$$

48.3.3 आभासी कार्य का सिद्धांत (PVW)

48.3.3.1 व्युत्पत्ति

47 आभासी कार्य के सिद्धांत की व्युत्पत्ति शुद्धगतिकतः ग्राह्य आभासी विस्थापनों (जो संगतता को संतुष्ट करते हैं) और तत्संबंधी अनिवार्य सीमा-शर्त के अस्तित्व से आरंभ होती है।

48 हम वास्तविक बलों का संगत स्थैतिकतः ग्राह्य समुच्चय ज्ञात करना चाहते हैं, जो तत्संबंधी प्राकृतिक सीमा-शर्तों को भी संतुष्ट करे।

49 आंतरिक प्रतिबल साम्य में होते हैं यदि

$$\underbrace{\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}}_{\text{div }\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = 0 \tag{48.24}$$

50 संगत अनिवार्य सीमा-शर्त निम्न प्रकार दी जाती है:

$$\mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}} = 0 \quad \text{ on } \Gamma_t \quad \text{Essential B.C.} \tag{48.25}$$

जहाँ $\hat{t}$, Γ_t के अनुदिश ज्ञात कर्षण हैं।

51 समीकरण 48.24 और 48.25 मिलकर एक स्थैतिकतः ग्राह्य प्रतिबल क्षेत्र बनाते हैं।

52 हम साम्य की स्थानीय शर्त, समीकरण 48.24, और स्थैतिक सीमा-शर्त, समीकरण 48.25, को वैश्विक (अथवा समाकल/दुर्बल) रूप में संतुष्ट कराएँगे। इसके लिए दोनों समीकरणों को आभासी विस्थापन $\delta\bar{\mathbf{u}}$ से गुणा किया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

53 अतः दुर्बल रूप निम्न है:

$$-\int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \underbrace{\left(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}\right)}_{\text{Equil.}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \underbrace{(\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}})}_{\text{Essential B.C.}} d\Gamma = 0 \tag{48.26}$$

54 (आभासी) विस्थापनों के लिए एक महत्त्वपूर्ण आवश्यकता यह है कि वे संगतता की शर्त को संतुष्ट करें। इसके विपरीत, पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत में प्रतिबलों का स्थैतिकतः ग्राह्य होना आवश्यक था। आभासी विस्थापनों को अनिवार्य सीमा-शर्त संतुष्ट करनी चाहिए:

$$\mathbf{L}\delta\overline{\mathbf{u}} = \text{div}\delta\overline{\mathbf{u}} = \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{48.27}$$

55 अब $\int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{t}d\Gamma$ पर ध्यान दें।

$$\int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{t}d\Gamma = \int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{t}d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{t}d\Gamma$$

हम गाउस प्रमेय द्वारा इसे आयतन समाकल में परिवर्तित करना चाहते हैं। कर्षण सदिश की परिभाषा स्मरण करें:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} \quad \text{or} \quad t_i = \sigma_{ij}n_j$$

गाउस प्रमेय लागू करने पर प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{t}d\Gamma &= \int_{\Gamma} (\delta\overline{\mathbf{u}}^T\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n}d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}(\delta\overline{\mathbf{u}}^T\boldsymbol{\sigma})d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \text{div}\delta\overline{\mathbf{u}}^T\boldsymbol{\sigma}d\Omega + \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T\text{div}\boldsymbol{\sigma}d\Omega\end{aligned}$$

तथापि $\text{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}$, अतः

$$\int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{t}d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}\delta\overline{\mathbf{u}}^T\boldsymbol{\sigma}d\Omega + \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}d\Omega$$

56 कुछ रोचक, किंतु यहाँ लोपित चरणों के बाद, उपर्युक्त समीकरण से आभासी कार्य (विस्थापन) का सिद्धांत प्राप्त होता है:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\boldsymbol{\sigma}d\Omega}_{-\delta\overline{W}_i=\delta\overline{U}_i} \underbrace{-\int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{b}d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T\hat{\mathbf{t}}d\Gamma}_{-\delta\overline{W}_e} = 0 \tag{48.28}$$

अथवा

$$\delta\overline{U}_i = \delta\overline{W}_e$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषा 48.3: आभासी विस्थापन का सिद्धांत

कोई विरूपणीय निकाय साम्य में है (समीकरण 48.24), यदि बाह्य तथा आंतरिक आभासी कार्यों का योग उन आभासी विस्थापनों $\delta\overline{\mathbf{u}}$ के लिए शून्य हो जो शुद्धगतिक समीकरण और शुद्धगतिक सीमा-शर्तों (समीकरण 48.27) को संतुष्ट करते हैं।

[57] एक-विमीय अवयवों के लिए यह घटकर निम्न हो जाता है:

$$\underbrace{\int \sigma \delta\overline{\varepsilon} d\Omega}_{\delta\overline{U}} = \underbrace{P\delta\overline{v}}_{\delta\overline{W}}$$

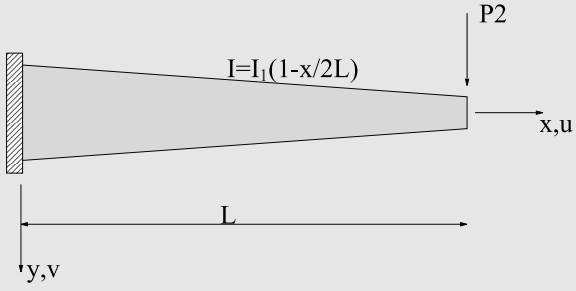
ध्यान दें कि $\delta U - \delta W = 0$ रखने पर किसी दिए गए δv_i के सभी पदों का गुणनखंड कर उन्हें शून्य के बराबर रखा जा सकता है। इससे प्राप्त होगा:

$$A_1\delta v_1 + A_2\delta v_2 + \cdots + A_n\delta v_n = 0$$

चूँकि δv_i को स्वेच्छतः चुना जा सकता है, इसलिए प्रत्येक A_i शून्य होना चाहिए। इससे n रेखीय समीकरणों का एक निकाय प्राप्त होगा:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta v_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta v_n \end{bmatrix}}_{\text{Ignore}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}}_{\text{Solve}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{48.29}$$

48.3.3.2 उदाहरण 48.3: PVW, क्रमशः परिवर्ती अनुप्रस्थ काट वाली कैंटिलीवर धरन



PVW लागू करने के लिए वास्तविक विस्थापन v और आभासी विस्थापन $\delta\overline{v}$ के सन्निकटन आवश्यक हैं। इन व्यंजकों को अनिवार्य सीमा-शर्तें (धरनों के लिए विस्थापन और ढाल) संतुष्ट करनी चाहिए।
इस समस्या के लिए प्रस्तावित सन्निकट हल हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) v_2 \tag{48.30}$$

$$v = \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] v_2 \tag{48.31}$$

वे अनिवार्य सीमा-शर्त $v = v' = 0$ को $x = 0$ पर संतुष्ट करते हैं।

हम 3 स्थितियों पर विचार करते हैं:

हल	वास्तविक	आभासी
1	Eqn. 48.30	Eqn. 48.31
2	Eqn. 48.30	Eqn. 48.30
3	Eqn. 48.31	Eqn. 48.31

- PVW के अनुप्रयोग के लिए फलनों के द्वितीय अवकलजों का मूल्यांकन आवश्यक है।

	त्रिकोणमितीय (समीकरण 48.30)	बहुपदीय (समीकरण 48.31)
v	$\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) v_2$	$\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] v_2$
$\delta\overline{v}$	$\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) \delta\overline{v}_2$	$\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \delta\overline{v}_2$
v''	$\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L} v_2$	$\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) v_2$
$\delta\overline{v}''$	$\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2$	$\left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right] \delta\overline{v}_2$

$$\delta\overline{U} = \int_0^L EI_z \frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}dx; \qquad \delta\overline{W} = P_2\delta\overline{v}_2$$

हल 1:

$$\delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) v_2}_{v''} \underbrace{\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right)\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''} \underbrace{EI_1\left(1 - \frac{x}{2L}\right)}_{EI} dx$$

$$= \frac{3\pi EI_1}{2L^3}\left[1 - \frac{10}{\pi} + \frac{16}{\pi^2}\right] v_2\delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W} = P_2\delta\overline{v}_2$$

जिससे प्राप्त होता है:

$$v_2 = \frac{P_2L^3}{2.648EI_1}$$

हल 2:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2}_{v''} \underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''} \underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI} dx = \frac{\pi^4 EI_1}{32L^3}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right)v_2\delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W} = P_2\delta\overline{v}_2$$

जिससे प्राप्त होता है:

$$v_2 = \frac{P_2L^3}{2.57EI_1}$$

हल 3:

$$\delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right]v_2}_{v''} \underbrace{\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right]\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''} \underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI} dx = \frac{9EI}{L^3}v_2\delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W} = P_2\delta\overline{v}_2$$

जिससे प्राप्त होता है:

$$v_2 = \frac{P_2L^3}{9EI_1}$$

48.4 स्थितिज ऊर्जा के सिद्धांत

58 अब एक पूर्णतः भिन्न, किंतु संबंधित उपागम प्रस्तुत किया जाएगा। वास्तविक और आभासी राशियों को परस्पर संयोजित करने के स्थान पर हम केवल कुल (अथवा पूरक) स्थितिज ऊर्जा को न्यूनतम करेंगे। ये दोनों सिद्धांत आभासी विकृति ऊर्जा के सिद्धांतों से व्युत्पन्न किए जाएँगे (और स्वाभाविक रूप से इसका प्रतिलोम प्रक्रम भी संभव है)।

59 यहाँ यह ध्यान रखना महत्त्वपूर्ण है कि δ संकारक अपना पूर्ण गणितीय अर्थ—अवकल—ग्रहण करेगा, जबकि पहले वह किसी आभासी राशि को सूचित करता था।

60 ध्यान दें कि पूरक स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत यहाँ केवल सीमित रूप से प्रासंगिक है, अतः उसकी चर्चा नहीं की जाएगी।

48.4.1 कुल स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत (PTPE)

61 हम इस सिद्धांत पर पुनः विचार करते हैं, जिसकी चर्चा पहले §47.3 में की गई थी।

48.4.1.1 व्युत्पत्ति

62 स्मरण रहे: अवकलन वह गणितीय विधि है जिसका उपयोग किसी बिंदु के परिवेश में विचरण की गणना के लिए किया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

63 यदि U_0 एक स्थितिज फलन है, तो उसका अवकल $\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij}$ लिया जाता है, और कलन का मूलभूत प्रमेय कहता है कि $\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du = f(x)$। अतः

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta U_0}{\delta \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ U_0 &= \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \\ \frac{\delta}{\delta \varepsilon_{ij}} \int_0^x \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij} \end{aligned}\right\} \frac{\delta U_0}{\delta \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \Rightarrow \delta U_0 = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$$

64 आभासी कार्य का सिद्धांत (समीकरण 48.28)

$$\int_\Omega \delta \overline{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_\Omega \delta \overline{u}_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \overline{u}_i \hat{t}_i d\Gamma = 0$$

अब निम्न रूप में पुनर्लिखा जा सकता है:

$$\int_\Omega \delta U_0 d\Omega - \int_\Omega \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \hat{t}_i d\Gamma = 0$$

65 अभी तक δ किसी आभासी राशि को सूचित करता था; अब हम अर्थ बदलते हैं और δ विचरण को सूचित करेगा।

66 यदि विरूपण के दौरान न तो पृष्ठीय कर्षण और न ही आयतन बल अपने परिमाण अथवा दिशा बदलें, तो इसे सरल किया जा सकता है:

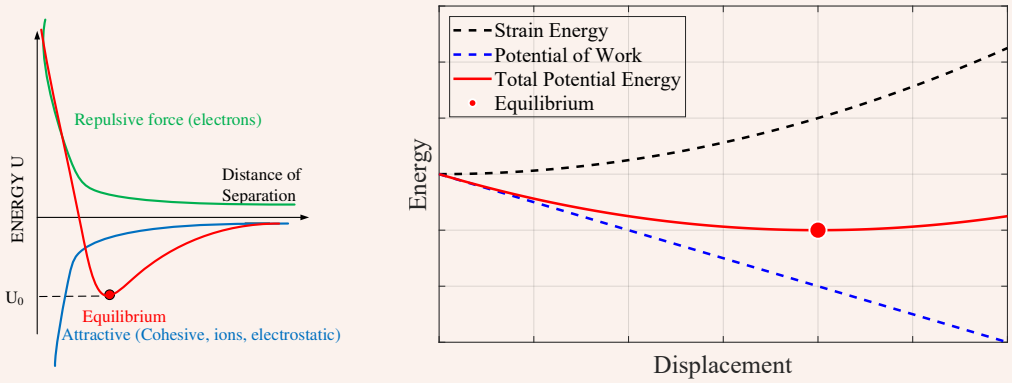
$$\delta \left[\underbrace{\overbrace{\int_\Omega U_0 d\Omega}^{U} \overbrace{- \int_\Omega u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} u_i \hat{t}_i d\Gamma}^{-\mathcal{W}_e}}_{\Pi} \right] = 0 \tag{48.32}$$

67 इस अंतिम समीकरण की तुलना समीकरण 48.7 से करने पर निष्कर्ष निकलता है कि स्थितिज ऊर्जा का विचरण शून्य है।

$$\delta \Pi = 0 \tag{48.33}$$

इसे चित्र 48.6b में स्पष्टतः दर्शाया गया है, जहाँ साम्य कुल स्थितिज ऊर्जा के न्यूनतम से मेल खाता है। यह क्वांटम यांत्रिकी में अंतरापरमाणिवक बलों की साम्य अवस्था के अनुरूप है, चित्र 48.6a।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) क्वांटम यांत्रिकी (b) चिरसम्मत यांत्रिकी

चित्र 48.6: क्वांटम और चिरसम्मत यांत्रिकी में न्यूनीकरण

परिभाषा 48.4: स्थितिज ऊर्जा के स्थिर मान का सिद्धांत

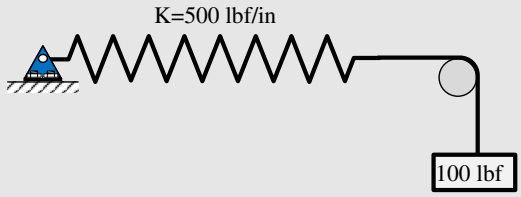
सभी शुद्धगतिकतः ग्राह्य विरूपणों (अनिवार्य सीमा-शर्तों को संतुष्ट करने वाले विस्थापनों) में वास्तविक विरूपण (साम्य को संतुष्ट करने वाले प्रतिबलों के अनुरूप विरूपण) वे हैं जिनके लिए कुल स्थितिज ऊर्जा स्थिर मान ग्रहण करती है।

[68] अनेक स्वतंत्रता-कोटियों वाली समस्याओं के लिए,

$$\delta\Pi = \underbrace{\frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_1}}_{0}\delta\Delta_1 + \underbrace{\frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_2}}_{0}\delta\Delta_2 + \cdots \underbrace{\frac{\partial\Pi}{\partial\Delta_n}}_{0}\delta\Delta_n = 0 \tag{48.34}$$

अर्थात् n अज्ञातों वाले n समीकरण।

48.4.1.2 उदाहरण 48.4: PTPE, कमानी और द्रव्यमान



हम द्रव्यमान की साम्य स्थिति निर्धारित करना चाहते हैं।
न्यूटनीय $\Delta = \frac{F}{K} = \frac{100}{500} = 0.2"$
लैग्रांजीय: विकृति ऊर्जा U और बाह्य कार्य का विभव W निम्न प्रकार दिए जाते हैं:

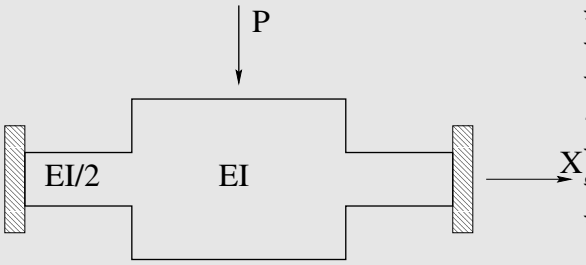
$$U = \frac{1}{2}u(Ku) = 250u^2 \qquad W_e = mgu = 100u$$

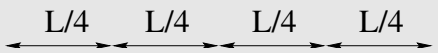
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ध्यान दें कि W_e में 1/2 नहीं है, क्योंकि कार्य के दौरान बल स्थिर रहता है। कुल स्थितिज ऊर्जा $\Pi = U - W_e$, अर्थात् $\Pi = 250u^2 - 100u$ है; इसे स्थिर होना चाहिए:

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi}{du} = 0 \Rightarrow 500u - 100 = 0 \Rightarrow u = 0.2 \text{ in}$$

48.4.1.3 उदाहरण 48.5: PTPE; परिवर्ती I वाली आबद्ध धरन





मान लें कि $v = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$।
इस हल को अनिवार्य सीमा-शर्तें $v = v' = 0,\ x = 0$ पर संतुष्ट करनी चाहिए; इसके अतिरिक्त $v = v_{max}$ और $v' = 0,\ x = \frac{L}{2}$ पर होना चाहिए।
इसे चार प्राचलों को एक ही अज्ञात राशि के पदों में निर्धारित करके लागू किया जाएगा (4 समीकरण और 4 सीमा-शर्तें):

$$\begin{array}{llll}
@x = 0 & v = 0 & & \Rightarrow a_4 = 0 \\
@x = 0 & \frac{dv}{dx} = 0 & & \Rightarrow a_3 = 0 \\
@x = \frac{L}{2} & v = v_{max} & \Rightarrow v_{max} = a_1\frac{L^3}{8} + a_2\frac{L^2}{4} & \\
@x = \frac{L}{2} & \frac{dv}{dx} = 0 & \Rightarrow \frac{3}{4}a_1L^2 + a_2L = 0 & \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{4}a_1L
\end{array}$$

प्रतिस्थापन करने पर प्राप्त होता है:

$$v = \left(-\frac{16x^3}{L^3} + \frac{12x^2}{L^2}\right) v_{max}$$

अतः इस समस्या में हल केवल एक अज्ञात चर v_{max} के पदों में है।

न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत लागू करने के लिए हमें निम्न का मूल्यांकन करना चाहिए: आंतरिक विकृति ऊर्जा U: आनमनी अवयवों के लिए विस्थापनों के पदों में व्यक्त (इस विधि में यह अनिवार्य है) ऊर्जा निम्न प्रकार दी जाती है:

$$U = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{L/2} E\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 I_z dx\right]$$

अतः $\frac{d^2v}{dx^2}$ का मूल्यांकन करना होगा:

$$\frac{dv}{dx} = \left(-\frac{48x^2}{L^3} + \frac{24x}{L^2}\right) v_{max}$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{24}{L^2}\left(1 - \frac{4x}{L}\right) v_{max}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रतिस्थापन करने पर

$$\frac{U}{2} = \frac{E}{2}\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{24^2}{L^4}\left(1-\frac{4x}{L}\right)^2 v_{max}^2 \frac{I_z}{2} dx + \frac{E}{2}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \frac{24^2}{L^4}\left(1-\frac{4x}{L}\right)^2 v_{max}^2 I_z dx$$

$$U = \frac{72EI_z}{L^3} v_{max}^2$$

बाह्य कार्य का विभव W_e: बिंदु-भार के लिए $W_e = Pv_{max}$।

अंततः,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_{max}} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial v_{max}} - \frac{\partial W_e}{\partial v_{max}} = 0 \quad \frac{144EI_z}{L^3} v_{max} = P \quad \Rightarrow v_{max} = \frac{PL^3}{144EI_z}$$

48.4.2 कुल पूरक स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत (PTCPE)

69 TPE के समान उपागम अपनाने पर सरलता से दिखाया जा सकता है कि

$$\delta\Pi^* = \delta U^* - \delta \mathcal{W}_e^* \tag{48.35}$$

48.5 कास्टिलियानो के प्रमेय

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §11.4.3 देखें

यद्यपि कास्टिलियानो का प्रमेय मूलतः आभासी कार्य के सिद्धांत के समान है, फिर भी कुछ समस्याओं के लिए यह प्रायः पसंदीदा हल-विधि होती है। इसे उदाहरणों में दर्शाया गया है।

यह विधि वास्तविक और आभासी राशियों को पृथक नहीं करती, बल्कि दोनों राशियों के पदों में विकृति ऊर्जा का एकल व्यंजक देती है और फिर आभासी राशि के सापेक्ष अवकलज लेती है।

48.5.1 प्रथम प्रमेय

70 कास्टिलियानो का प्रथम प्रमेय कुल स्थितिज ऊर्जा के सिद्धांत पर आधारित है। समीकरण 48.33 पर पुनः विचार करने पर इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$\delta\Pi = \delta U - \delta \mathcal{W}_e = 0$$

दूसरे पद को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

$$\delta \mathcal{W}_e = F\delta u + \frac{1}{2}\Delta F \delta u + \cdots$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संयोजित करने पर[1] प्राप्त होता है:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial u} - F\right)\delta u = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial u} = F$$

जो कास्टिलियानो का प्रथम प्रमेय है:

परिभाषा 48.5: कास्टिलियानो का प्रथम प्रमेय

किसी संरचना की कुल आंतरिक ऊर्जा (विकृति ऊर्जा) का किसी बिंदु पर किसी विशिष्ट विक्षेप घटक के सापेक्ष प्रथम आंशिक अवकलज, उसी बिंदु पर तथा उस विक्षेप घटक की संगत दिशा में लगाए गए बल के बराबर होता है।

[71] यह प्रथम प्रमेय रेखीय अथवा अरेखीय प्रत्यास्थ संरचनाओं पर लागू होता है, जिनमें तापमान स्थिर हो और आलंब अनम्य हों।

[72] अभी तक हमने केवल एक बल वाले निकाय पर विचार किया है। इसे N बलों वाले निकाय के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है, जहाँ

$$\mathcal{W}_e = \sum_{i=1}^{N} F_i u_i$$

तब कुल स्थितिज ऊर्जा को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

$$\Pi = U - \mathcal{W}_e = U(u_1, u_2, \cdots, u_N) - \sum_{i=1}^{N} F_i u_i$$

किसी भी आभासी विचरण δu_i के लिए, जो विस्थापन u_i में हो, कुल स्थितिज ऊर्जा का विचरण $\delta\Pi$, कुल स्थितिज ऊर्जा Π में शून्य होना चाहिए (कुल स्थितिज ऊर्जा के सिद्धांत के अनुसार):

$$\delta\Pi = \frac{\partial U}{\partial u_i}\delta u_i - F_i \delta u_i = \left(\frac{\partial U}{\partial u_i} - F_i\right)\delta u_i = 0$$

चूँकि $\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_N$ के विचरण परस्पर स्वतंत्र हैं, अतः

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} - F_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

जो कास्टिलियानो के प्रथम प्रमेय का सामान्य कथन है।

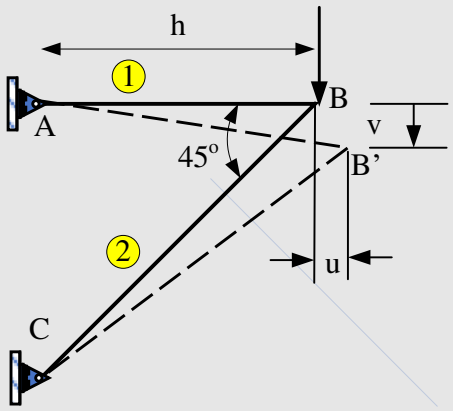
यदि किसी संरचनात्मक निकाय की विकृति ऊर्जा को N स्वतंत्र विस्थापनों $u_1, u_2, \cdots, u_N$ के पदों में व्यक्त किया जा सके, जो N निर्दिष्ट बलों $F_1, F_2, \cdots, F_N$ के अनुरूप हों, तो किसी विस्थापन u_i (भार F_i के अधीन) के सापेक्ष विकृति ऊर्जा का प्रथम आंशिक अवकलज बल F_i के बराबर होता है, जो u_i की दिशा में है।

[1] स्मरण रहे कि $\delta F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

48.5.1.1 उदाहरण 48.6: अरेखीय प्रत्यास्थ ट्रस

(Reddy, 2017) से



पास दिए गए पिन-संयोजित ट्रस में, लगाए गए भार P के अधीन संधि B के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर विस्थापन निर्धारित करने हैं। छड़ें अरेखीय प्रत्यास्थ पदार्थ से बनी हैं, जिसका प्रतिबल-विकृति व्यवहार निम्न प्रकार दिया जाता है:

$$\sigma = \begin{cases} K\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon \geq 0 \\ -K\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

और प्रत्येक अवयव का अनुप्रस्थ काट A है।

ट्रस की शुद्धगतिकी (अर्थात् विरूपण की ज्यामिति) से प्रत्येक अवयव में विकृति निम्न प्रकार दी जाती है:

$$\varepsilon_1 = \frac{AB' - AB}{AB} = \sqrt{\frac{(h+u)^2 + v^2}{h^2}} - 1$$
$$\varepsilon_2 = \frac{CB' - CB}{CB} = \sqrt{\frac{(h+u)^2 + (h-v)^2}{2h^2}} - 1$$

किंतु विस्थापन छोटे होने के कारण (अर्थात् $u^2 \simeq 0$ और $v62 \simeq 0$), यह सरल होकर निम्न बनता है:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 + 2\frac{u}{h}} - 1 \simeq \frac{u}{h}$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{1 + \frac{(u-v)}{h}} - 1 \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{u-v}{h}\right)$$

संरचना का विकृति-ऊर्जा घनत्व $U_0 = U_{01} + U_{02}$ द्वारा दिया जाता है:

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \\ &= \int_0^{\varepsilon_1} K\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_2} - K\sqrt{-\varepsilon} d\varepsilon \\ &= \frac{2K}{3}(\varepsilon_1)^{3/2} + \frac{2K}{3}(-\varepsilon_2)^{3/2} \\ &= \frac{2}{3}K\left[\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{v-u}{h}\right)^{3/2}\right] \end{aligned}$$

यहाँ अवयव 2 को संपीडन में माना गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कुल विकृति ऊर्जा $U = U_1 + U_2$ द्वारा दी जाती है:

$$U = Ah\frac{2}{3}K\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} + A\sqrt{2}h\frac{2}{3}K\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{v-u}{h}\right)^{3/2}$$
$$= \frac{AK}{3\sqrt{h}}\left[2u\sqrt{u} + (v-u)\sqrt{v-u}\right]$$

अब कास्टिलियानो के प्रथम प्रमेय का उपयोग करते हैं:

$$\frac{\partial U}{\partial u} = 0 = \frac{AK}{2\sqrt{h}}(2\sqrt{u} - \sqrt{v-u})$$
$$\frac{\partial U}{\partial v} = P = \frac{AK}{2\sqrt{h}}\sqrt{v-u}$$

u और v के लिए हल करने पर

$$u = \frac{P^2h}{A^2K^2}, \qquad v = \frac{5P^2h}{A^2K^2}$$

48.5.2 द्वितीय प्रमेय

73 कास्टिलियानो का द्वितीय प्रमेय कुल पूरक स्थितिज ऊर्जा के सिद्धांत पर आधारित है। समीकरण 48.35 पर पुनः विचार करने पर इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$\delta\Pi^* = \delta U^* - \delta\mathcal{W}_e^* \Rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial F}\delta F - u\delta F = 0$$

अथवा

$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = u$$

+

74 इस समीकरण को किसी संरचनात्मक निकाय के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है:

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_i} = u_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

परिभाषा 48.6: कास्टिलियानो का द्वितीय प्रमेय

किसी संरचना की कुल आंतरिक ऊर्जा का किसी बिंदु पर लगाए गए बल के सापेक्ष प्रथम आंशिक अवकलज, उस बल के अनुप्रयोग-बिंदु पर उसकी क्रिया-रेखा की दिशा में विक्षेप के बराबर होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[75] यदि §48.1.7.1 से U^* का व्यंजक उपयोग करें,

$$U* = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^L \dfrac{P^2}{AE} \\ \frac{1}{2}\int_0^L \dfrac{M^2}{EI} dx \end{cases}$$

तब

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \int_0^L \frac{P}{AE}\frac{\partial P}{\partial P_i} \\ \theta_i &= \frac{\partial U^*}{\partial M_i} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_i} \end{aligned} \tag{48.36}$$

48.5.2.1 उदाहरण 48.7: कास्टिलियानो 2; कैंटिलीवर धरन

हम बिंदु-भार से भारित कैंटिलीवर के सिरे का विस्थापन निर्धारित करना चाहते हैं।

समीकरण 48.15 से पूरक विकृति ऊर्जा $U^* = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x$ है, और बिंदु-भार के लिए बाह्य कार्य $\mathcal{W}^*_e = P\Delta$ है। अतः निकाय की स्थितिज ऊर्जा है:

$$\begin{aligned} \Pi^* &= U^* - \mathcal{W}^*_e \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}\mathrm{d}x - P\Delta \end{aligned} \tag{48.37}$$

किंतु बिंदु-भार के लिए आघूर्ण $M = Px$ है; ऊपर प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \tfrac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2x^2}{EI}\mathrm{d}x - P\Delta \\ &= \tfrac{1}{6}\frac{P^2L^3}{EI} - P\Delta \\ \frac{\mathrm{d}\Pi^*}{\mathrm{d}P} &= \tfrac{1}{3}\frac{P^2L^3}{EI} - \Delta = 0 \\ \Rightarrow \Delta &= \tfrac{1}{3}\frac{PL^3}{EI} \end{aligned} \tag{48.38}$$

48.5.2.2 उदाहरण 48.8: कास्टिलियानो 2; कास्टिलियानो के द्वितीय प्रमेय से समान रूप से भारित धरन का विक्षेप

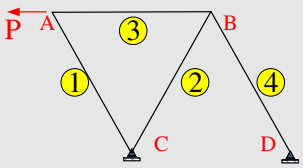
समान रूप से भारित सरल आलंबित धरन के लिए हम मध्य-विस्तार विक्षेप निर्धारित करना चाहते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस स्थिति में मध्य-विस्तार पर एक काल्पनिक बल R लगाना होगा, अतः आघूर्ण है: $M(x) = \frac{wL}{2}x + \frac{R}{2}x - w\frac{x^2}{2}$. पूरक विकृति ऊर्जा $U^* = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$ है और विस्थापन

$$\begin{aligned} \Delta &= \left.\frac{\partial U^*}{\partial R}\right|_{R=0} \\ &= \left.\left(\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} M\frac{\partial M}{\partial R}\mathrm{d}x\right)\right|_{R=0} = \left.\left\{\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}}\left[\left(\frac{wL}{2}+\frac{R}{2}\right)x - w\frac{x^2}{2}\right]\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right\}\right|_{R=0} \\ &= \frac{5wL^4}{384EI} \end{aligned} \tag{48.39}$$

48.5.2.3 उदाहरण 48.9: कास्टिलियानो 2, अरेखीय ट्रस



पास का (समबाहु) ट्रस उन छड़ों से बना है जिनका अरेखीय विस्थापन-बल संबंध $u = k_1F + k_2F^2$ है।
चूँकि पदार्थ अरेखीय है, $U_i^* \neq U_i$; अतः इस स्थिति में पूरक विकृति ऊर्जा का उपयोग करना चाहिए:

$$U_i^* = \sum \int_0^F u dF$$

स्थैतिक साम्य से

$$\lfloor\ F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4\ \rfloor = \lfloor\ 0 \quad -P \quad P \quad P\ \rfloor$$

अतः

$$\lfloor\ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\ \rfloor = \lfloor\ 0 \quad -k_1P + k_2P^2 \quad k_1P + k_2P^2 \quad k_1P + k_2P^2\ \rfloor$$

इस प्रकार संरचना की कुल पूरक विकृति ऊर्जा बनती है:

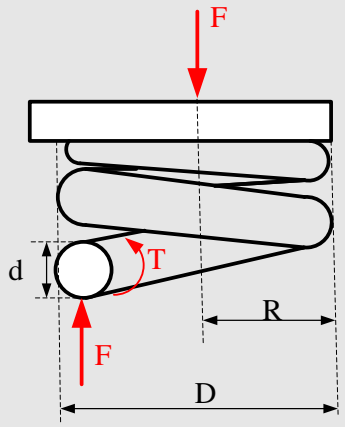
$$U_i^* = 2\left(\frac{k_1F^2}{2} + \frac{k_2P^3}{3}\right) + \left(\frac{k_1F^2}{2} - \frac{k_2P^3}{3}\right) = \frac{3k_1F^2}{2} + \frac{k_2P^3}{3}$$

अतः

$$v_A^H = \frac{\partial U_i^*}{\partial P} = 3k_1P + k_2P^2$$

48.5.2.4 उदाहरण 48.10: कास्टिलियानो 2, कमानी का विक्षेप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



पास की कुंडलाकार संपीडन कमानी वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट वाली छड़ से बनी है, जिस पर मरोड़ी अपरूपण प्रतिबल और अनुप्रस्थ अपरूपण कार्य करते हैं (आनमन की उपेक्षा की गई है)।
कुल पूरक विकृति ऊर्जा निम्न प्रकार दी जाती है:

$$U^* = U_T^* + U_S^* = \frac{T^2 L}{2GJ} + \frac{F^2 L}{2AG}$$

जहाँ L तार की लंबाई है।
$T = FD/2$, $L = N\pi D$, $J = \pi d^4/32$ और $A = \pi d^2/4$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है:

$$U^* = \frac{4NF^2D^3}{d^4G} + \frac{2NF^2D}{d^2G}$$

जहाँ N सक्रिय कुंडलियों की संख्या है।
इसके बाद कमानी का विक्षेप निर्धारित करने के लिए कास्टिलियानो का द्वितीय प्रमेय लागू करते हैं:

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{8NFD^3}{d^4G} + \frac{4NFD}{d^2G}$$

48.6 रेले–रिट्ज विधि

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §12.3.1 देखें

48.6.1 व्युत्पत्ति

76 कुल स्थितिज ऊर्जा के न्यूनीकरण में हमने स्थितिज ऊर्जा को कुछ आसंधियों पर भौतिक राशियों (विस्थापन/घूर्णन) के पदों में व्यक्त किया और फिर कहा कि विभव स्थिर है, अर्थात्

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1}\delta\Delta_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2}\delta\Delta_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_n}\delta\Delta_n$$

77 एक अधिक सामान्य (और फिर भी सन्निकट) उपागम में विस्थापनों तथा इस प्रकार विभव को किसी फलन के अज्ञात गुणांकों के पदों में व्यक्त किया जाता है, जैसे:

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi_i + \Phi_0$$

जहाँ a_i अनिर्धारित प्राचलों को सूचित करते हैं और Φ स्थान के पूर्वपरिभाषित उपयुक्त फलन हैं (आगे चलकर परिमित अवयव सूत्रीकरण में ये आकार फलन N_i होंगे)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

78 PTPE में हमारे पास n चरों (अज्ञात विस्थापनों) के पदों में एक ही विस्थापन क्षेत्र था; अब हमारे पास n गुणांकों a के पदों में विस्थापन क्षेत्र के अनेक व्यंजक हैं।

79 Φ को तीन शर्तें संतुष्ट करनी चाहिए:

1. सतत हो।
2. ग्राह्य हो, अर्थात् अनिवार्य सीमा-शर्तों को संतुष्ट करे (प्राकृतिक सीमा-शर्तें विचरणात्मक कथन में पहले ही सम्मिलित हैं। तथापि, यदि Φ उन्हें भी संतुष्ट करे तो बेहतर परिणाम मिलते हैं)।
3. स्वतंत्र और पूर्ण हो (अर्थात् यदि पर्याप्त पदों का उपयोग किया जाए तो Π में आने वाले यथार्थ विस्थापन और उनके अवकलजों का स्वेच्छतः सुमेलन किया जा सके। निम्नतम कोटि के पद भी सम्मिलित होने चाहिए)।

80 सामान्यतः Φ एक बहुपदीय अथवा त्रिकोणमितीय फलन होता है।

81 हम ऐसे प्राचल c_i निर्धारित करते हैं जो Π की स्थिरता को स्वेच्छ विचरणों δc_i के लिए संतुष्ट करें।

$$\delta\Pi(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial a_i}\delta a_i = 0$$

δa_i के स्वेच्छ और स्वतंत्र विचरणों के लिए,

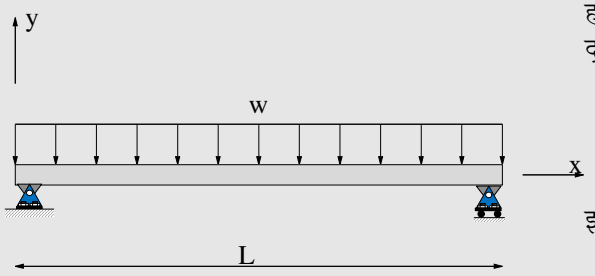
82 अतः निष्कर्षतः

$$\delta\Pi = \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\delta a_1}_{0} + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_2}\delta a_2}_{0} + \ldots + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_n}\delta a_n}_{0} = 0 \tag{48.40}$$

समीकरण 48.34 के साथ सादृश्य पर ध्यान दें।

83 इस प्रकार कुल n रेखीयतः स्वतंत्र युगपत समीकरण प्राप्त होते हैं। इन विस्थापनों से आगे विकृतियाँ और प्रतिबल (अथवा आंतरिक बल) निर्धारित किए जा सकते हैं। इस प्रकार हमने अनंत स्वतंत्रता-कोटियों वाली समस्या को सीमित स्वतंत्रता-कोटियों वाली समस्या से प्रतिस्थापित कर दिया है।

48.6.1.1 उदाहरण 48.11: रेले–रिट्ज: समान रूप से भारित सरल आलंबित धरन



हम पास की धरन का अधिकतम विक्षेप निम्न अनंत श्रेणी द्वारा दिए गए हल से निर्धारित करना चाहते हैं:

$$v(x) = a_1 \underbrace{x(L-x)}_{\Phi_1} + a_2 \underbrace{x^2(L-x)^2}_{\Phi_2} + \ldots$$

इस विशिष्ट हल के लिए केवल पहला पद रखें:

$$v(x) = a_1 x(L-x)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हम देखते हैं कि:

1. पिछले उदाहरण के विपरीत अनिवार्य (अथवा ज्यामितीय) सीमा-शर्तें $x=0$ और $x=L$ दोनों पर सीधे संतुष्ट हो जाती हैं।
2. हम v को a_1 के पदों में रखकर $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}=0$ ले सकते हैं (यदि v को a_1 और a_2 के पदों में रखा होता, तो $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}=0$ तथा $\frac{\partial \Pi}{\partial a_2}=0$ दोनों लेने पड़ते)।
3. अथवा हम a_1 को v_{max} के पदों में $x=\frac{L}{2}$ पर हल करके $\frac{\partial \Pi}{\partial v_{max}}=0$ ले सकते हैं।

$$\begin{aligned}\Pi(a_1) &= U(a_1) - W_e(a_1)\\ &= \int_0^L \frac{EI_z}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L wv(x)dx\\ &= \int_0^L \left[\frac{EI_z}{2}(-2a_1)^2 - a_1 wx(L-x)\right] dx\\ &= \frac{EI_z}{2}4a_1^2 L - a_1 w\frac{L^3}{2} + a_1 w\frac{L^3}{3}\\ &= 2a_1^2 EI_z L - \frac{a_1 wL^3}{6}\end{aligned}$$

अब $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}=0$ लेने पर प्राप्त होगा:

$$\begin{aligned}4a_1 EI_z L - \frac{wL^3}{6} &= 0\\ a_1 &= \frac{wL^2}{24EI_z}\end{aligned}$$

विस्थापन क्षेत्र को a_1 के पदों में हल करने के बाद अब $v_{\max}$ को $\frac{L}{2}$ पर निर्धारित करते हैं:

$$v = \underbrace{\frac{wL^4}{24EI_z}}_{a_1}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right) = \frac{wL^4}{96EI_z}$$

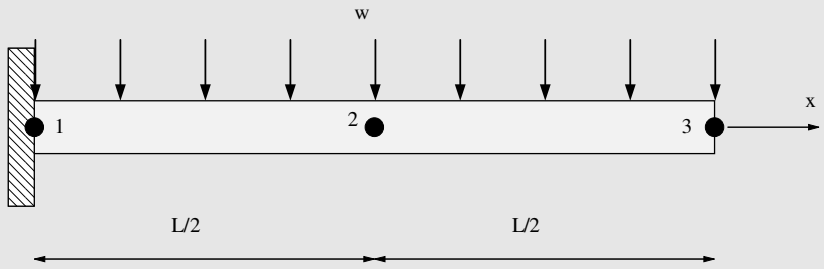
इसकी तुलना यथार्थ मान $v_{\max}^{exact} = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI_z} = \frac{wL^4}{76.8EI_z}$ से की जानी है; इसमें $\approx 17\%$ त्रुटि है।

टिप्पणी: यदि दो पद $a_1 x(L-x) + a_2 x^2(L-x)^2$ रखे जाते, तो प्राप्त होता: $a_1 = \frac{wL^2}{24EI_z}$ और $a_2 = \frac{w}{24EI_z}$ तथा $v_{\max}$, $v_{\max}^{exact}$ के बराबर होता। (क्यों?)

48.6.1.2 उदाहरण 48.12: विचरणात्मक विधियाँ

नीचे दर्शाई गई कैंटिलीवर धरन के लिए:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



जो स्थिर भार के अधीन है, हम उसी समस्या का निम्न विधियों से विश्लेषण करना चाहते हैं:

1. **पूरक आभासी कार्य का सिद्धांत**, (एक आभासी इकाई बिंदु-भार का उपयोग करके), और:
   (a) बिंदु 3 का ऊर्ध्वाधर विस्थापन निर्धारित करें।
   (b) कुल पूरक स्थितिज ऊर्जा $\left(\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}dx\right)$ की गणना करें।
2. आभासी और वास्तविक दोनों निकायों के लिए निम्न व्यंजक का उपयोग करते हुए **आभासी कार्य का सिद्धांत**:
$$v = a_1 x^2 + a_2 x^3$$
   और:
   (a) आसंधि 3 का ऊर्ध्वाधर विस्थापन निर्धारित करें।
   (b) अपने परिणामों के आधार पर आघूर्ण आरेख (विस्थापनों के द्वितीय अवकलज के पदों में व्यक्त) और अपरूपण आरेख (आघूर्ण का अवकलज) बनाएँ।
   (c) निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा की गणना करें।
   (d) अपने परिणामों की तुलना समस्या 1 (यथार्थ हल) के परिणामों से करें और चर्चा करें।

   टिप्पणी: पहले गुणांकों a_1 और a_2 को बिंदु 2 और 3 के विस्थापनों v_2 और v_3 से सुमेलित करना चाहिए।
3. **न्यूनतम कुल स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत**।
4. **रेले–रिट्ज**
5. **PVW; त्रिकोणमितीय विस्थापन**
$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) a_1 + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right) a_2$$
   बहुपदीय विस्थापन सन्निकटन के स्थान पर।

हल
कैथरीन सुफ़का का गृहकार्य-हल

ध्यान दें कि यहाँ पूर्ण चरण-दर-चरण हल दिया जाएगा (कैथरीन सुफ़का के सौजन्य से)। रेखीय रूप से परिवर्ती भार का Mathematica हल परिशिष्ट I.2.14 में दिया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. पूरक आभासी कार्य का सिद्धांत बिंदु 3 पर ऊर्ध्वाधर विस्थापन। PCVW: $\delta U^* = \delta W^*$

$$\delta U^* = \int_0^L \delta \bar{M} * MEIdx$$
$$\delta M = x$$
$$M = \frac{wx^2}{2}$$
$$\delta U^* = \int_0^L x * \frac{wx^2}{2EI} dx = \frac{w}{2EI}\int_0^L x^3 dx = \frac{w}{2EI}[\frac{x^4}{4}]_0^L = \frac{wL^4}{8EI}$$
$$\delta W^* = \delta P * \Delta$$
$$\delta P = 1$$
$$\delta W^* = \Delta$$
$$\Rightarrow \Delta = \frac{wL^4}{8EI}$$

कुल पूरक स्थितिज ऊर्जा

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(wx^2)^2}{4EI} dx = \frac{w^2}{8EI}\int_0^L x^4 dx$$
$$\Pi^* = \frac{w^2L^5}{40EI}$$

2. आभासी कार्य का सिद्धांत

1. बिंदु 3 का ऊर्ध्वाधर विस्थापन। $v = a_1x^2 + a_2x^3$

   v को बिंदु 2 और 3 के विस्थापनों v_2 और v_3 के पदों में पुनर्लिखें:

$$v_2 = v\left(\frac{L}{2}\right) = a_1\frac{L^2}{4} + a_2\frac{L^3}{8}$$
$$v_3 = v(L) = a_1L^2 + a_2L^3$$

   विस्थापनों के पदों में a_1 और a_2 के लिए हल करें:

$$a_1 = \frac{8v_2 - v_3}{L^2}$$
$$a_2 = \frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}$$

   तब

$$v = \left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)x^3$$
$$\frac{dv}{dx} = 2\left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right)x + 3\left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)x^2$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2\left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right) + 6\left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)$$

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इसी प्रकार,

$$\delta v = \left(\frac{8\delta v_2 - \delta v_3}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{-8\delta v_2 + 2\delta v_3}{L^3}\right)x^3$$
$$\frac{d^2\delta v}{dx^2} = 2\left(\frac{8\delta v_2 - \delta v_3}{L^2}\right) + 6\left(\frac{-8\delta v_2 + 2\delta v_3}{L^3}\right)x$$

2. PVW: $\delta U = \delta W$

$$\delta U = \int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx = \frac{4EI}{L^3}(64v_2\delta v_2 - 20\delta v_2 v_3 - 20v_2\delta v_3 + 7v_3\delta v_3)$$
$$\delta W = \int_0^L w\delta v dx = \frac{2wL\delta v_2}{3} + \frac{wL\delta v_3}{6}$$

3. $\delta U - \delta W = 0$

$$\frac{4EI}{L^3}(64v_2\delta v_2 - 20\delta v_2 v_3 - 20v_2\delta v_3 + 7v_3\delta v_3) - \frac{2wL\delta v_2}{3} - \frac{wL\delta v_3}{6} = 0$$
$$\left[\frac{4EI}{L^3}(64v_2 - 20v_3) - \frac{2wL}{3}\right]\delta v_2 + \left[\frac{4EI}{L^3}(-20v_2 + 7v_3) - \frac{wL}{6}\right]\delta v_3 = 0$$
$$\frac{4EI}{L^3}(64v_2 - 20v_3) - \frac{2wL}{3} = 0$$
$$64v_2 - 20v_3 = \frac{wL^4}{6EI}$$
$$64v_2 = \frac{wL^4}{6EI} + 20v_3$$
$$v_2 = \frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}$$
$$\frac{4EI}{L^3}(-20v_2 + 7v_3) - \frac{wL}{6} = 0$$
$$\frac{4EI}{L^3}\left[-20\left(\frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}\right) + 7v_3\right] - \frac{wL}{6} = 0$$
$$\frac{4EI}{L^3}\left[\frac{-5wL^4}{96EI} - \frac{25v_3}{4} + 7v_3\right] = \frac{wL}{6}$$
$$\frac{-5wL^4}{96EI} - \frac{25v_3}{4} + 7v_3 = \frac{wL^4}{24EI}$$
$$\frac{3v_3}{4} = \frac{3wL^4}{32EI}$$
$$v_3 = \frac{wL^4}{8EI}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. अपरूपण और आघूर्ण आरेख।

$$v = \frac{5wL^2}{24EI}x^2 - \frac{wL}{12EI}x^3$$
$$v'' = \frac{5wL^2}{12EI} - \frac{wL}{2EI}x$$
$$M(x)=EIv''\frac{5wL^2}{12} - \frac{wLx}{2}$$
$$V(x)=M'(x) = \frac{-wL}{2}$$

5. कुल स्थितिज ऊर्जा की गणना करें।

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L wv\,dx$$
$$v = \frac{5wL^2}{24EI}x^2 - \frac{wL}{12EI}x^3$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{5wL^2}{12EI} - \frac{wL}{2EI}x$$
$$\Pi = \frac{7w^2L^5}{8EI} - \frac{7w^2L^5}{144EI}$$
$$\Pi=\frac{119w^2L^5}{144EI}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. न्यूनतम कुल स्थितिज ऊर्जा का सिद्धांत $\delta \Pi = 0$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{2EI}{L^3}(64v_2^2 - 40v_2v_3 + 7v_3^2)$$

$$W = \int_0^L wv\,dx = \frac{2Lv_2w}{3} + \frac{Lv_3w}{6}$$

$$\Pi = U - W = \frac{2EI}{L^3}(64v_2^2 - 40v_2v_3 + 7v_3^2) - \left(\frac{2Lv_2w}{3} + \frac{Lv_3w}{6}\right)$$

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial v_2}\delta v_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial v_3}\delta v_3 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_2} = 0 \text{ and } \frac{\partial \Pi}{\partial v_3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_2} = \frac{2EI}{L^3}(128v_2 - 40v_3) - \frac{2Lw}{3} = \frac{16EI}{L^3}(16v_2 - 5v_3) - \frac{2Lw}{3} = 0 \frac{16EI}{L^3}(16v_2 - 5v_3) = \frac{2Lw}{3}$$

$$16v_2 - 5v_3 = \frac{wL^4}{24EI}$$

$$v_2 = \frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_3}\delta v_3 = \frac{2EI}{L^3}(-40v_2 + 14v_3) - \frac{Lw}{6} = \frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{80EIv_2}{L^3} - \frac{Lw}{6} = 0$$

$$\frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{80EI}{L^3}\left(\frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}\right) = \frac{wL}{6}$$

$$\frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{25EIv_3}{L^3} - \frac{5wL}{24} - = \frac{wL}{6}$$

$$\frac{3EIv_3}{L^3} = \frac{9wL}{24}$$

$$v_3 = \frac{wL^4}{8EI}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. रेले–रिट्ज $\delta\Pi = 0$

$$
\begin{aligned}
v &= a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \\
\phi_1 &= x^2 \text{ and } \phi_2 = x^3 \\
v &= a_1x^2 + a_2x^3 \\
\frac{dv}{dx} &= 2a_1x + 3a_2x^2 \\
\frac{d^2v}{dx^2} &= 2a_1 + 6a_2x \\
\Pi &= U - W \\
U &= \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx \\
&= 2EI(a_1^2L + 3a_2^2L^3 + 3a_1a_2L^2) \\
W &= \int_0^L wv\,dx = \frac{a_1wL^3}{3} + \frac{a_2wL^4}{4} \\
\Pi &= 2EI(a_1^2L + 3a_2^2L^3 + 3a_1a_2L^2) - \frac{a_1wL^3}{3} - \frac{a_2wL^4}{4} \\
\delta\Pi &= \frac{\partial\Pi}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial a_2}\delta a_2 = 0 \\
\frac{\partial\Pi}{\partial a_1} &= 0 \text{ and } \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = 0 \\
\frac{\partial\Pi}{\partial a_1} &= EI(4a_1L + 6a_2L^2) - \frac{wL^3}{3} = 0 \\
4a_1L + 6a_2L^2 &= \frac{wL^3}{3EI} \\
4a_1L &= \frac{wL^3}{3EI} - 6a_2L^2 \\
a_1 &= \frac{wL^2}{12EI} - \frac{3a_2L}{2} \\
\frac{\partial\Pi}{\partial a_2} &= 6EI(2a_2L^3 + a_1L^2) - \frac{wl^4}{4} = 0 \\
6EI\left[2a_2L^3 + \left(\frac{wL^2}{12EI} - \frac{3a_2L}{2}\right)L^2\right] - \frac{wL^4}{4} &= 0 \\
12EIL^3a_2 + \frac{wL^4}{2} - 9EIL^3a_2 - \frac{wL^4}{4} &= 0 \\
3EIL^3a_2 &= -\frac{wL^4}{4} \\
a_2 &= -\frac{wL}{12EI} \\
a_1 &= \frac{wL^2}{12EI} - \left(\frac{3L}{2} * \frac{-wL}{12EI}\right) \\
a_1 &= -\frac{wL^2}{24EI} \\
v &= \frac{-wL^2}{24EI}x^2 + \frac{-wL}{12EI}x^3 \\
v_3 &= v(L) = \frac{-wL^2}{24EI}L^2 + \frac{-wL}{12EI}L^3 \\
v_3 &= \frac{-wL^4}{8EI}
\end{aligned}
$$

टिप्पणी: v_3 ऋणात्मक है, क्योंकि विस्थापन ऋणात्मक y दिशा में है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5. PVW, त्रिकोणमितीय विस्थापन (Mathematica की कुछ सहायता से)

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)a_1 + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)a_2$$

v को बिंदु 2 और 3 के विस्थापनों v_2 और v_3 के पदों में पुनर्लिखें:

$$v_2 = v\left(\frac{L}{2}\right) = a_1(1 - \sqrt{2}/2) + a_2(1 + \sqrt{2}/2)$$
$$v_3 = v(L) = a_1 + a_2$$

विस्थापनों के पदों में a_1 और a_2 के लिए हल करें:

$$a_1 = \frac{-\sqrt{2}v_2 + v_3 + \sqrt{2}v_3}{2}$$
$$a_2 = \frac{\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3}{2}$$

अतः

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}v_2 + v_3 + \sqrt{2}v_3}{2}\right) + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)\left(\frac{\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3}{2}\right)$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{8L^2}\left[-(\sqrt{2}v_2 - v_3 + \sqrt{2}v_3)\cos\frac{\pi x}{2L} + 9(\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3)\cos\frac{3\pi x}{2L}\right]$$
$$\delta v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 + \sqrt{2}\delta v_3}{2}\right) + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 - \sqrt{2}\delta v_3}{2}\right)$$
$$\frac{d^2\delta v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{8L^2}\left[-(\sqrt{2}\delta v_2 - \delta v_3 + \sqrt{2}\delta v_3)\cos\frac{\pi x}{2L} + 9(\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 - \sqrt{2}\delta v_3)\cos\frac{3\pi x}{2L}\right]$$
$$\text{PVW} : \delta U = \delta W$$
$$\delta U = \int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx$$
$$\delta U = \frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2\delta v_2 + 2(-41 + 20\sqrt{2})\delta v_2 v_3 + 2(-41 + 20\sqrt{2})v_2\delta v_3 + (123 - 80\sqrt{2})v_3\delta v_3]$$
$$\delta W = \int_0^L w\delta v dx$$
$$\delta W = \frac{wL}{3\pi}[(4\sqrt{2})\delta v_2 + (-2 - 4\sqrt{2} + 3\pi)\delta v_3]$$
$$\delta U - \delta W = 0$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2\delta v_2 + 2(-41 + 20\sqrt{2})\delta v_2 v_3 + 2(-41 + 20\sqrt{2})v_2\delta v_3 + (123 - 80\sqrt{2})v_3\delta v_3] - \frac{wL}{3\pi}[(4\sqrt{2})\delta v_2 + (-2 - 4\sqrt{2} + 3\pi)\delta v_3] = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\left[\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2})\right]\delta v_2$$
$$+\left[\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(-2-4\sqrt{2}+3\pi)\right]\delta v_3 = 0$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2}) = 0$$
$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3] = \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2})$$
$$82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3 = \frac{256\sqrt{2}wL^4}{3\pi^5 EI}$$
$$82v_2 = \frac{256\sqrt{2}wL^4}{3\pi^5 EI} - 2(-41+20\sqrt{2})v_3$$
$$v_2 = \frac{128\sqrt{2}wL^4}{123\pi^5 EI} - \frac{(-41+20\sqrt{2})}{41}v_3$$

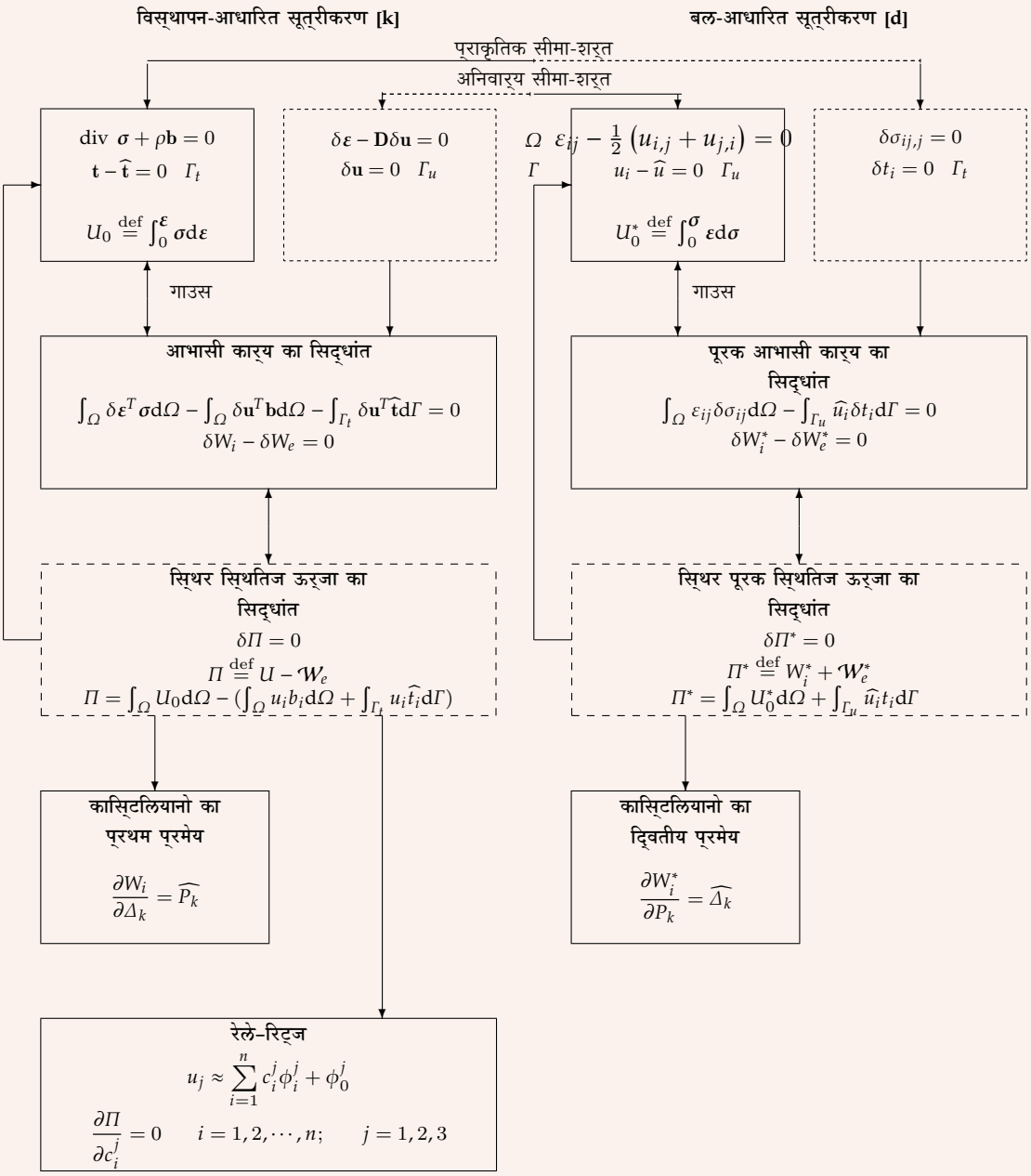
$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3]$$
$$-\frac{wL}{3\pi}(-2-4\sqrt{2}+3\pi) = 0$$
$$2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3 = \frac{64wL^4}{3\pi^5 EI}(-2-4\sqrt{2}+3\pi)$$
$$2(-41+20\sqrt{2})\left[\frac{128\sqrt{2}wL^4}{123\pi^5 EI} - \frac{(-41+20\sqrt{2})}{41}v_3\right] + (123-80\sqrt{2})v_3 = \frac{64wL^4}{3\pi^5 EI}(-2-4\sqrt{2}+3\pi)$$
$$-37.4275\frac{wL^4}{\pi^5 EI} - 7.8873v_3 + 9.8629v_3 = 37.7157\frac{wL^4}{\pi^5 EI}$$
$$1.9756v_3 = 75.1432\frac{wL^4}{\pi^5 EI}$$
$$v_3 = 0.1243\frac{wL^4}{EI}$$

48.7 सारांश

84 इस अध्याय में प्रस्तुत विविध विधियों का सारांश चित्र 48.7 में दर्शाया गया है।

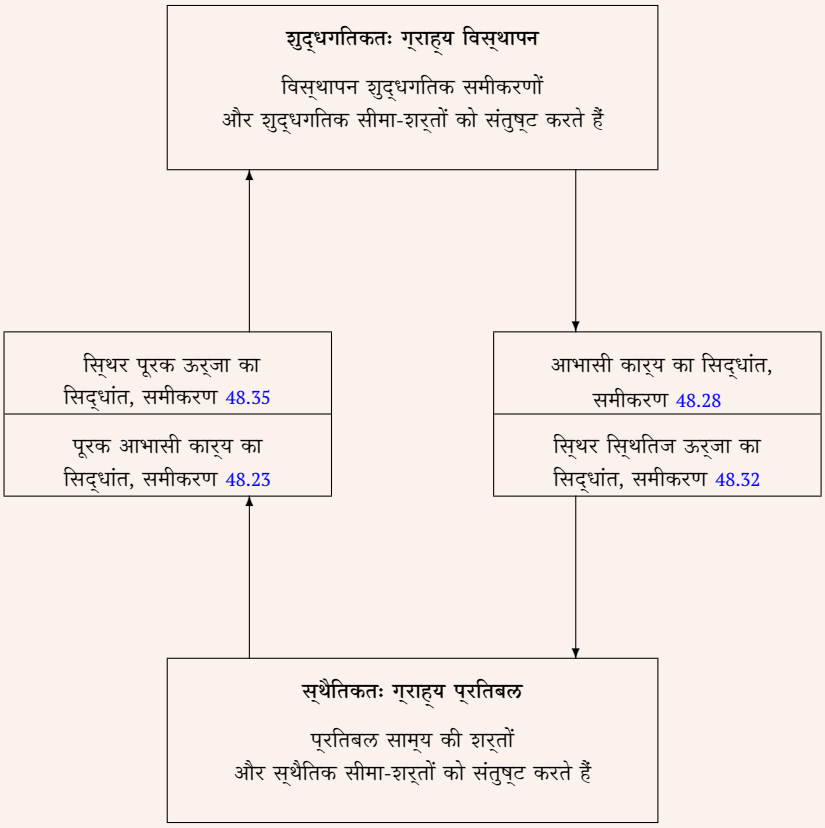
85 दोनों विचरणात्मक सिद्धांतों के बीच द्वैत को चित्र 48.8 रेखांकित करता है। शुद्धगतिकतः ग्राह्य विस्थापनों से आरंभ करने पर आभासी कार्य का सिद्धांत स्थैतिकतः ग्राह्य हल देता है। इसी प्रकार, स्थैतिकतः ग्राह्य प्रतिबलों के लिए पूरक आभासी कार्य का सिद्धांत शुद्धगतिकतः ग्राह्य हल प्रदान करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 48.7: विचरणात्मक विधियों का सारांश

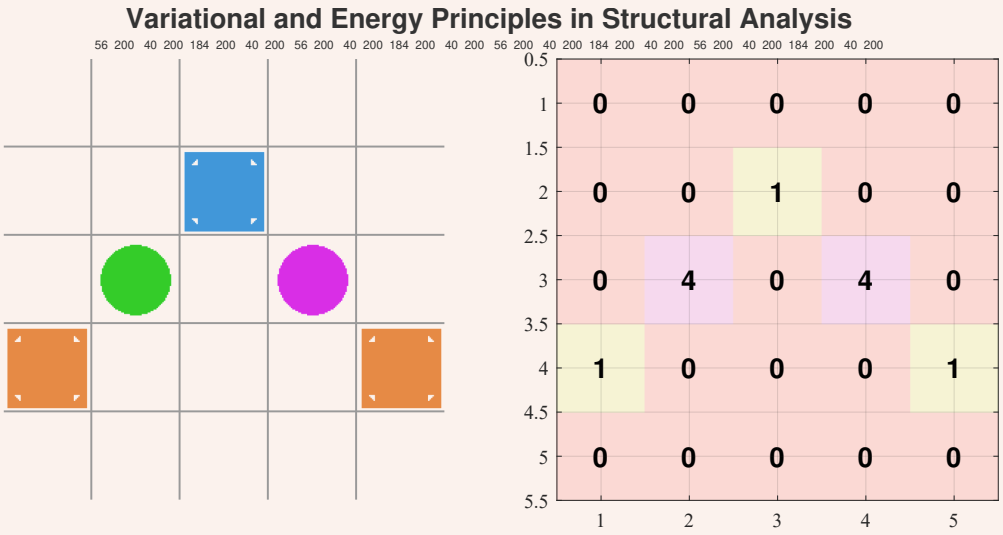
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 48.8: विचरणात्मक सिद्धांतों का द्वैत

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अध्याय-विशिष्ट आइडेंटिकॉन, chapter H

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

49 अंतर्वेशन फलन

सारांश

रेले–रिट्ज विधि में हमने विस्थापन क्षेत्र के फलनिक सन्निकटन का उपयोग करके विचरणात्मक समस्या हल की थी (§48.6)। तथापि प्रयुक्त गुणांकों का कोई भौतिक महत्त्व नहीं था। इस अध्याय में ज्ञात आसंधीय विस्थापनों के पदों में बहुपदीय विस्थापन सन्निकटन प्रस्तुत किए जाएँगे। ये अंतर्वेशन फलन आकार फलन कहलाते हैं।

विभिन्न बहुपदीय घातों के लिए कार्तीय, त्रिकोणीय और प्राकृतिक निर्देशांक निकायों के पदों में अंतर्वेशन 1D के साथ-साथ 2D और 3D (सातत्यक परिमित अवयवों के लिए) में प्रस्तुत किए जाएँगे।

जिस प्रकार प्रत्यक्ष दृढता विधि की विवेचना से पहले रूपांतरण आव्यूह प्रस्तुत किए गए थे, उसी प्रकार परिमित अवयव विधि के परिचय से पहले आकार फलनों की चर्चा की जाएगी।

49.1 परिचय 1709
49.1.1 आकार फलनों के अभिलक्षण . . 1709
49.1.2 पास्कल त्रिभुज 1710
49.1.3 निर्देशांक निकाय 1711
49.1.4 सातत्य 1716
49.2 आकार फलन 1716
49.2.1 प्रत्यक्ष सूत्रीकरण 1716
49.2.2 लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलन . . . 1723
49.2.3 हर्मिटीय अंतर्वेशन फलन 1729

49.1 परिचय

49.1.1 आकार फलनों के अभिलक्षण

1 रेले–रिट्ज विधि (§48.6) में उल्लेख किया गया था कि फलन Φ सतत और स्वतंत्र होना चाहिए, सीमा-शर्तों को संतुष्ट करना चाहिए तथा पूर्ण होना चाहिए।

2 अब परिमित अवयव विधि की ओर बढ़ते हैं, जहाँ Φ गुणांकों को *आकार फलनों* $\mathbf{N}$ द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है।

3 आकार फलन वह गणितीय फलन है जिसका उपयोग किसी अवयव के भीतर क्षेत्र चर (जैसे विस्थापन, तापमान आदि) के हल का अंतर्वेशन करने के लिए किया जाता है। आकार फलन यह परिभाषित करते हैं कि अवयव की आसंधियों पर मानों के आधार पर क्षेत्र चर अवयव के भीतर किस प्रकार बदलता है।

4 आकार फलनों के प्रमुख अभिलक्षणों में निम्न सम्मिलित हैं:

अंतर्वेशन: आकार फलन आसंधियों के बीच क्षेत्र चर का अंतर्वेशन करते हैं। यदि क्षेत्र चर आसंधियों पर ज्ञात हो, तो आकार फलन अवयव के भीतर किसी भी बिंदु पर चर की गणना संभव बनाता है।

आसंधीय मान: किसी दी गई आसंधि i पर आकार फलन N_i का मान आसंधि i पर 1 और अवयव की अन्य सभी आसंधियों पर 0 होता है। इससे आसंधियों पर अंतर्वेशन यथार्थ होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सातत्य: आकार फलनों का सातत्य अवयव के प्रकार और समस्या की प्रकृति पर निर्भर करता है। उदाहरणतः रेखीय अवयवों के आकार फलन सतत होते हैं, जबकि उच्चतर-कोटि अवयवों के आकार फलन उच्चतर-कोटि अवकलजों में भी सतत हो सकते हैं।

दृढ-पिंड गति: इसे निरूपित किया जाना चाहिए (अर्थात् $v = a_1 + \ldots$)।

स्थिर विकृति: इसे भी निरूपित किया जाना चाहिए।

विमा-निर्भरता: आकार फलन अवयव की विमीयता के अनुसार बदलते हैं।

49.1.2 पास्कल त्रिभुज

5 बहुपदीय आकार फलनों की गणितीय संरचना और गुणों (विशेषतः उच्चतर-कोटि अवयवों के लिए) के माध्यम से आकार फलनों और पास्कल त्रिभुज के बीच संबंध है।

6 (बहुपद-आधारित) आकार फलनों के गुणांकों को पास्कल त्रिभुज में पाए जाने वाले द्विपद गुणांकों से संबद्ध किया जा सकता है।

7 वास्तव में पास्कल त्रिभुज बहुपदों के प्रसार में प्रयुक्त द्विपद गुणांक प्रदान करता है। उदाहरणतः $(a+b)^n$ के प्रसार में आने वाले गुणांक ठीक पास्कल त्रिभुज की प्रविष्टियाँ हैं। इसी प्रकार 2D में आकार फलनों को x और y के संयोजनों वाले बहुपदीय पदों से लिखा जा सकता है। प्रसारित करने पर इन पदों के गुणांक द्विपद गुणांकों के प्रतिरूप का अनुसरण करते हैं।

8 किसी द्विघाती त्रिकोणीय अवयव के आकार फलन इस प्रकार हो सकते हैं:

$$N_1(x,y) = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 x^2 + e_1 xy + f_1 y^2$$

$$N_2(x,y) = a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 x^2 + e_2 xy + f_2 y^2$$

$$N_3(x,y) = a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 x^2 + e_3 xy + f_3 y^2$$

गुणांक $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ आसंधीय मानों के आधार पर निर्धारित किए जाएँगे और उन्हें द्विपद गुणांकों से संबद्ध किया जा सकता है।

9 बहुपदीय श्रेणी के पदों के रूप में आकार फलनों की योजनाबद्ध व्याख्या पास्कल त्रिभुज द्वारा दी जाती है, जिसे सारणी 49.1 में दर्शाया गया है। विविध अवयव सूत्रीकरणों में उपस्थित बहुपदीय पद सारणी 49.2

तालिका 49.1: बहुपदीय श्रेणी के पदों में आकार फलनों की व्याख्या (1d & 2d)

Constant					a_1					
Linear				$a_2 x$		$a_3 y$				
Quadratic			$a_4 x^2$		$a_5 xy$		$a_6 y^2$			
Cubic		$a_7 x^3$		$a_8 x^2 y$		$a_9 xy^2$		$a_{10} y^3$		
Quartic	$a_{11} x^4$		$a_{12} x^3 y$		$a_{13} x^2 y^2$		$a_{14} xy^3$		$a_{15} x^4$	

में दर्शाए गए हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 49.2: विविध अवयव सूत्रीकरणों में बहुपदीय पद (1d & 2d)

अवयव	पद	आसंधियों की # (पद)
रेखीय	$a_1,\ a_2$	2
द्विघाती	$a_1,\ a_2,\ a_4$	3
द्विरेखीय (त्रिभुज)	$a_1,\ a_2,\ a_3,$	3
द्विरेखीय (चतुर्भुज)	$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_5$	4
द्विद्विघाती (सेरेन्डिपिटी)	$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_8,\ a_9$	8
द्विद्विघाती (लैग्रांजीय)	$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_8,\ a_9,\ a_{13}$	9

[10] किसी पूर्ण बहुपद में पास्कल त्रिभुज की एक निश्चित रेखा के ऊपर के सभी पद होते हैं। जितने अधिक पद सम्मिलित हों, परिशुद्धता उतनी अधिक होती है। उदाहरणतः $u = a_1 + a_2x + a_3y + a_5xy$, $u = a_1 + a_2x + a_3y$ की अपेक्षा अधिक परिशुद्ध है, तथापि अभिसरण की दर अपरिवर्तित रहती है (क्योंकि दूसरा सन्निकटन पूर्ण द्विघाती नहीं है)।

[11] सन्निकटन के वे पद जो अभिसरण की दर में सुधार नहीं करते, *परजीवी* पद कहलाते हैं।

49.1.3 निर्देशांक निकाय

49.1.3.1 कार्तीय

[12] किसी अवयव (परिमित अथवा अन्य) के लिए, किसी भी बिंदु पर व्यापकीकृत विस्थापन (स्थानांतरण/घूर्णन) u का व्यंजक उसके सभी आसंधीय विस्थापनों $\overline{\mathbf{u}}$ के पदों में लिखा जा सकता है।

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i(X)\overline{\Delta}_i = \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{u}}$$

जहाँ:

1. $\overline{u}_i$, स्वतंत्रता-कोटि i के अनुरूप (व्यापकीकृत) आसंधीय विस्थापन है।
2. N_i एक अंतर्वेशन फलन, अथवा *आकार फलन* है, जिसके निम्न अभिलक्षण हैं:
   (a) $N_i = 1$, $\overline{u}_i$ पर।
   (b) $N_i = 0$, $\overline{u}_j$ पर, जहाँ $i \neq j$।
3. $\mathbf{N}$ को निम्न के आधार पर व्युत्पन्न किया जा सकता है:
   (a) बहुपदीय श्रेणी के पदों में परिभाषित कल्पित विरूपण अवस्था।
   (b) अंतर्वेशन फलन (लैग्रांजीय अथवा हर्मिटीय)।

[13] हम समस्याओं के दो वर्गों में भेद करेंगे:

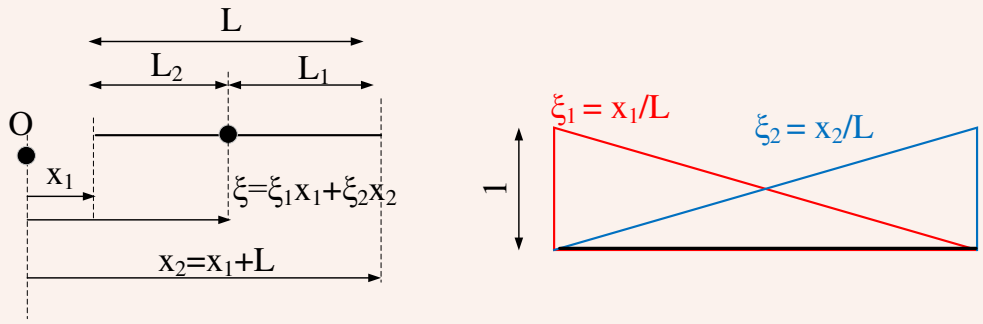
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

C^0 जहाँ अवयवों के आर-पार केवल विस्थापन सातत्य सुनिश्चित करना होता है (ट्रस, मरोड़, समतल प्रतिबल/विकृति, 3D प्रत्यास्थता)।

C^1 जहाँ विस्थापनों और उनके अवकलजों दोनों का सातत्य सुनिश्चित करना होता है (जैसे धरन, प्लेट और कवच)।

49.1.3.2 प्राकृतिक

14 हम दो प्राकृतिक निर्देशांक ξ_1 और ξ_2 परिभाषित करते हैं, चित्र 49.1।



चित्र 49.1: सरल रेखा के अनुदिश प्राकृतिक निर्देशांक निकाय

$$\xi_1 = \frac{L_1}{L} \quad \text{and} \quad \xi_2 = \frac{L_2}{L}$$

चूँकि $L_1 + L_2 = L$, अतः

$$\xi_1 + \xi_2 = 1$$

ध्यान दें कि $\xi_i = 1$, आसंधि i पर, और अन्य सभी आसंधियों पर शून्य है।

15 स्वेच्छ बिंदु P, जिसका निर्देशांक x है, के लिए

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$$

इस प्रकार प्रत्येक बिंदु x के अनुरूप (परस्पर निर्भर) प्राकृतिक निर्देशांकों ξ_1, ξ_2 का एक समुच्चय होता है। इन समीकरणों को निम्न रूप में कहा जा सकता है:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\} \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{L} \left[\begin{array}{cc} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \right\}$$

16 प्राकृतिक निर्देशांकों में अंतर्वेशन किया जा सकता है:

$$\phi = \underbrace{\lfloor \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \end{array} \rfloor}_{\mathbf{N}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\phi}_1 \\ \overline{\phi}_2 \end{array} \right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[17] ξ_1 और ξ_2 में बहुपदों का समाकलन निम्न द्वारा किया जा सकता है (समीकरण 49.1 तक नीचे एक कठोर प्रमाण विकसित किया गया है):

$$\int_L \xi_1^k \xi_2^l \mathrm{d}L = L\frac{k!\,l!}{(1+k+l)!}$$

इसके अतिरिक्त,

$$\begin{array}{rcccl} \int_L x\mathrm{d}L & = & \int_L(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\mathrm{d}L & = & \frac{L}{2}(x_1+x_2) \\ \int_L \xi_1\xi_2^2\mathrm{d}L & = & L\frac{2}{4!} & = & \frac{L}{12} \end{array}$$

49.1.3.3 त्रिकोणीय

[18] प्राकृतिक निर्देशांक विमाहीन होते हैं और वैश्विक निर्देशांक निकाय के स्थान पर अवयव की लंबाई/क्षेत्रफल/आयतन के सापेक्ष परिभाषित किए जाते हैं।

[19] उनका उपयोग प्रायः *सिम्प्लेक्स* अवयवों के सूत्रीकरण में किया जाता है (जहाँ n-विमीय समष्टि में $n+1$ शीर्ष तथा $n+1$ पृष्ठ होते हैं, जिनकी विमीयता $n-1$ है)।

[20] त्रिकोणीय अवयव क्षेत्र राशि (जैसे तापमान, विस्थापन) के लिए कार्तीय निर्देशांकों में पूर्ण बहुपद का उपयोग संभव बनाते हैं। अतः आकार फलनों में छँटे हुए पास्कल त्रिभुज के *सभी* पद प्रयुक्त होते हैं। (द्विरेखीय चतुर्भुज अवयव के लिए ऐसा नहीं होगा)।

[21] हम $\phi = \sum N_i \overline{\phi}_i$ निर्धारित करना चाहते हैं, जहाँ $\overline{\phi}_i$ आसंधीय स्वतंत्रता-कोटियाँ हैं और $N_i = N_i(L_1, L_2, L_3)$।

हम $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i L_1^q, L_2^r, L_3^s)$ से आरंभ करते हैं, जहाँ q, r और s उन n संभावित संयोजनों पर चलते हैं जिनके लिए $q+r+s=p$ है और p बहुपद की कोटि है। उदाहरणतः:

रेखीय अवयव:

$$\phi = a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3 = a'_1 + a'_2x + a'_3y$$

द्विघाती अवयव:

$$\phi = a_1L_1^2 + a_2L_2^2 + a_3L_3^2 + a_4L_1L_2 + a_5L_2L_3 + a_6L_3L_1 = a'_1 + a'_2x + a'_3y + a'_4x^2 + a'_5xy + a'_6y^2$$

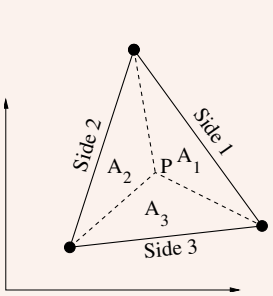
[22] रेखीय त्रिभुज के आकार फलन केवल क्षेत्रफल निर्देशांक हैं:

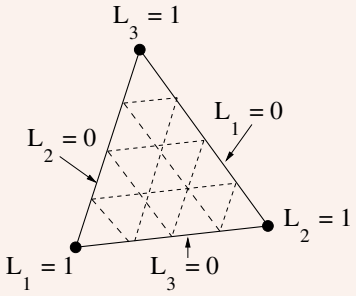
$$N_1 = L_1 \qquad N_2 = L_2 \qquad N_3 = L_3$$

और प्रत्येक किसी एक आसंधि पर एकक, अन्य पर शून्य है तथा रेखीय रूप से बदलता है।

[23] किसी त्रिकोणीय पृष्ठ के लिए कोई भी बिंदु P त्रिभुज 1-2-3 को तीन उपक्षेत्रफलों A_1, A_2, A_3 में विभाजित करता है, चित्र 49.2। अतः क्षेत्रफल निर्देशांकों को क्षेत्रफलों के अनुपात के रूप में परिभाषित

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।





चित्र 49.2: त्रिभुज के लिए प्राकृतिक निर्देशांक निकाय

करते हैं:

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_{21}}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}$$

जहाँ A त्रिभुज 1-2-3 का क्षेत्रफल है। चूँकि $A = A_1 + A_2 + A_3$, अतः

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

और केंद्रक $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{3}$ पर है।

24 पुनः बाधा समीकरण हैं:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$$

प्रतिलोम करने पर,

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^{-1}} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_{23} & y_{23} & x_{32} \\ 2A_{31} & y_{31} & x_{13} \\ 2A_{12} & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

जहाँ $x_{ij} = x_i - x_j$।

25 ध्यान दें कि क्षेत्रफल, सारणिक के आधे के बराबर है।

$$2A = |\mathbf{A}| = x_2 - x_1y_3 - y_1 - x_{31}y_{21}$$

और यदि अंकन उलट दिया जाए, जिससे 1-2-3 दक्षिणावर्त हो, तो सारणिक ऋणात्मक होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

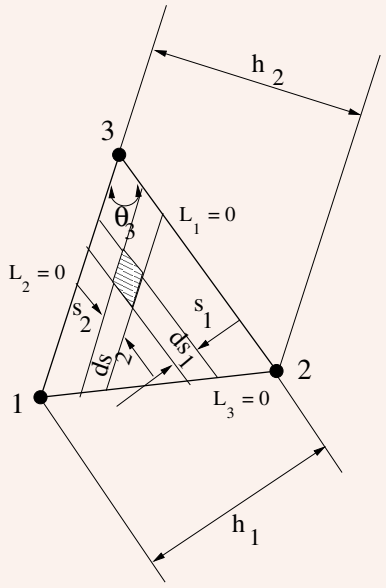
[26] फलन ϕ को क्षेत्रफल निर्देशांकों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है:

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi(L_1, L_2, L_3) \\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial x} \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial y}
\end{aligned}$$

और

$$\begin{array}{lllllllll}
\frac{\partial L_1}{\partial x} & = & \frac{y_2 - y_3}{2A}; & \frac{\partial L_2}{\partial x} & = & \frac{y_3 - y_1}{2A}; & \frac{\partial L_3}{\partial x} & = & \frac{y_1 - y_2}{2A}; \\
\frac{\partial L_1}{\partial y} & = & \frac{x_3 - x_2}{2A}; & \frac{\partial L_2}{\partial y} & = & \frac{x_1 - x_3}{2A}; & \frac{\partial L_3}{\partial y} & = & \frac{x_2 - x_1}{2A};
\end{array}$$

[27] दृढता आव्यूह के लिए समाकलन में $\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A$ रूप के व्यंजकों का क्षेत्रफल निर्देशांकों में समाकलन आवश्यक होगा। इस संक्रिया को पूरा करने के लिए चित्र 49.3 के संदर्भ में, (Eisenberg and Malvern, 1973):



चित्र 49.3: त्रिभुज पर समाकलन

$$\begin{aligned}
dA &= (\mathrm{d}s_1)\csc\theta_3(\mathrm{d}s_2) \\
&= (h_1 \mathrm{d}L_1)\csc\theta_3(h_2 \mathrm{d}L_2) \\
&= 2A\mathrm{d}L_1\mathrm{d}L_2
\end{aligned}$$

अतः

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A\int_0^1 \left[\int_0^{1-L_1} L_1^k L_2^l (1 - L_1 - L_2)^m \mathrm{d}L_2\right] \mathrm{d}L_1$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इसके बाद $L_2 = t(1 - L_1)$ और $\mathrm{d}L_2 = (1 - L_1)\mathrm{d}t$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है:

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \int_0^1 L_1^k (1 - L_1)^{l+m+1} \mathrm{d}L_1 \int_0^1 t^l (1 - t)^m \mathrm{d}t$$

दाहिनी ओर के प्रत्येक समाकल का रूप बीटा फलन (Abramowitz and Stegun, 1970) जैसा है:

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1 - t)^{w-1} \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}$$

जहाँ Γ गामा फलन को सूचित करता है, जो $\Gamma(n + 1) = n!$ संतुष्ट करता है, पूर्णांकों $n \geq 0$ के लिए। अतः

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \frac{\Gamma(k + 1)\Gamma(l + 1)\Gamma(m + 1)}{\Gamma(k + l + m + 3)}$$

चूँकि k, l और m अनऋणात्मक पूर्णांक हैं,

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \frac{k!\, l!\, m!}{(k + l + m + 2)!} \tag{49.1}$$

[28] ध्यान देना चाहिए कि उपर्युक्त संबंध का उपयोग केवल सरल भुजाओं वाले अवयवों के लिए किया जाता है, जिनका सूत्रीकरण वैश्लेषिक रूप से व्युत्पन्न किया जा सके। यदि भुजा वक्ररेखीय हो, तो इस सूत्र का उपयोग नहीं किया जाएगा और समप्राचलीय सूत्रीकरण के संदर्भ में अवयव का संख्यात्मक समाकलन किया जाएगा।

49.1.4 सातत्य

[29] C^0 सातत्य की आवश्यकता है कि फलन संलग्न परिमित अवयवों की सीमाओं के आर-पार सतत हो, किंतु उसके प्रथम अथवा उच्चतर अवकलजों का सतत होना आवश्यक नहीं (उदाहरणतः अक्षीय अथवा मरोड़ी अवयव)।

[30] C^1 सातत्य की आवश्यकता है कि फलन और उसका प्रथम अवकलज दोनों संलग्न परिमित अवयवों की सीमाओं के आर-पार सतत हों (सामान्यतः आनमनी अवयव)।

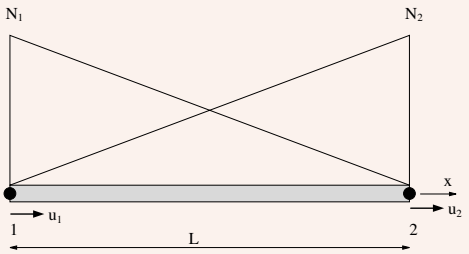
49.2 आकार फलन

49.2.1 प्रत्यक्ष सूत्रीकरण

49.2.1.1 ट्रस अवयव; रेखीय

[31] हम सरल ट्रस अवयव से आरंभ करते हैं, आकार फलन को स्पष्टतः विकसित करते हैं और फिर उसके सामान्यीकरण का सूत्र व्युत्पन्न करते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 49.4: अक्षीय परिमित अवयव

32 चित्र 49.4 के संदर्भ में, हम निम्न से आरंभ करते हैं:

$$\begin{aligned} u &= N_1 \overline{u}_1 + N_2 \overline{u}_2 \\ \theta_x &= N_1 \overline{\theta}_{x1} + N_2 \overline{\theta}_{x2} \end{aligned}$$

33 चूँकि 2 स्वतंत्रता-कोटियाँ हैं, हम रेखीय विरूपण अवस्था मानेंगे:

$$u = a_1 x + a_2 \tag{49.2}$$

जहाँ u, u अथवा θ में से कोई भी हो सकता है, और सीमा-शर्तें निम्न हैं: $u = \overline{u}_1$, $x = 0$ पर, तथा $u = \overline{u}_2$, $x = L$ पर। अतः:

$$\begin{aligned} \overline{u}_1 &= a_2 \\ \overline{u}_2 &= a_1 L + a_2 \end{aligned}$$

34 a_1 और a_2 को $\overline{u}_1$ तथा $\overline{u}_2$ के पदों में हल करने पर प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\overline{u}_2}{L} - \frac{\overline{u}_1}{L} \\ a_2 &= \overline{u}_1 \end{aligned}$$

35 इन व्यंजकों को समीकरण 49.2 में प्रतिस्थापित और पुनर्व्यवस्थित करने पर प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} u &= (\frac{\overline{u}_2}{L} - \frac{\overline{u}_1}{L}) x + \overline{u}_1 \\ &= \underbrace{(1 - \frac{x}{L})}_{N_1} \overline{u}_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2} \overline{u}_2 \end{aligned}$$

अथवा:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \tfrac{x}{L} \\ N_2 &= \tfrac{x}{L} \end{aligned} \tag{49.3}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

49.2.1.2 सामान्यीकरण

36 पूर्ववर्ती व्युत्पत्ति को निम्न लिखकर सामान्यीकृत किया जा सकता है:

$$u = a_1 x + a_2 = \underbrace{\lfloor\, x \quad 1 \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}}_{\{\mathbf{a}\}} \tag{49.4}$$

जहाँ $\mathbf{p}$ बहुपदीय सन्निकटन के अनुरूप है और $\mathbf{a}$ गुणांक सदिश है।

37 इसके बाद सीमा-शर्तें लागू करते हैं:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ L & 1 \end{array} \right]}_{\mathcal{L}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}}_{\mathbf{a}}$$

$\mathcal{L}$ का प्रतिलोम करने पर इससे प्राप्त होता है:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ L & 0 \end{array} \right]}_{\mathcal{L}^{-1}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

38 इस अंतिम समीकरण को समीकरण 49.4 में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है:

$$u = \underbrace{\underbrace{\lfloor\, (1 - \tfrac{x}{L}) \quad \tfrac{x}{L} \,\rfloor}_{\mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

अतः आकार फलन $\mathbf{N}$ निम्न से सीधे प्राप्त किए जा सकते हैं:

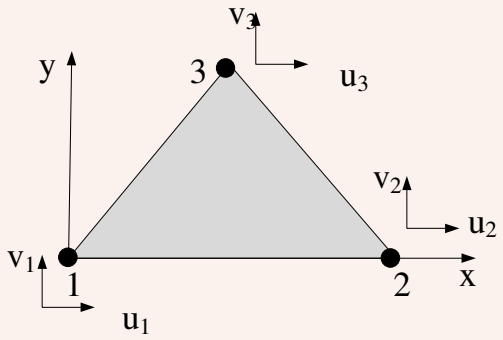
$$\mathbf{N} = \mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}$$

39 ध्यान दें कि कुछ प्रकरणों में $\mathcal{L}^{-1}$ प्राप्त करना संभव नहीं होता, और अन्य में स्वेच्छ ज्यामितियों के लिए पर्याप्त बीजगणितीय कठिनाइयाँ हो सकती हैं। अतः आगे लैग्रांजीय और हर्मिटीय अंतर्वेशन फलन प्रस्तुत किए जाएँगे।

49.2.1.3 स्थिर-विकृति त्रिभुज अवयव

40 अब एक त्रिकोणीय अवयव पर विचार करते हैं, चित्र 49.5। जिसका विस्थापन क्षेत्र *द्विरेखीय* है (x

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 49.5: स्थिर-विकृति त्रिभुज अवयव

और y दोनों में):

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \\ u &= \underbrace{\lfloor\ 1 \quad x \quad y\ \rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\}}_{\{\mathbf{a}\}} \end{aligned}$$

41 पहले की भाँति, सर्वप्रथम आकार फलन ज्ञात करते हैं; अतः पहले u विस्थापनों के लिए आसंधियों पर सीमा-शर्तें लागू करते हैं:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{array} \right]}_{[\mathcal{L}]} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\}}_{\mathbf{a}} \tag{49.5}$$

इसके बाद $\mathcal{L}$ के प्रतिलोम को समीकरण 49.5 में $\mathbf{p}$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है:

$$u = N_1 \overline{u}_1 + N_2 \overline{u}_2 + N_3 \overline{u}_3$$

जहाँ

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{x_2 y_3}(x_2 y_3 - x y_3 - x_2 y + x_3 y) \\ N_2 &= \frac{1}{x_2 y_3}(x y_3 - x_3 y) \\ N_3 &= \frac{y}{y_3} \end{aligned}$$

और ध्यान दें कि तीनों आकार फलनों में से प्रत्येक संगत आसंधि पर 1 और अन्य दो पर 0 है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

42 v के लिए भी वही आकार फलन व्युत्पन्न किए जा सकते हैं:

$$v = N_1\overline{v}_1 + N_2\overline{v}_2 + N_3\overline{v}_3$$

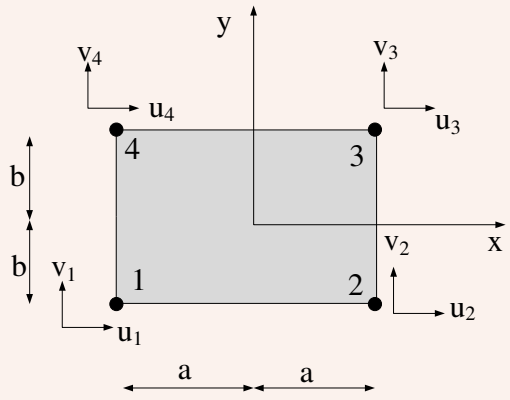
43 अतः विस्थापन क्षेत्र निम्न द्वारा दिया जाएगा:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \end{array} \right\}$$

और संगत अवयव को *स्थिर-विकृति त्रिभुज* (CST) कहा जाता है, क्योंकि उसका विस्थापन क्षेत्र रेखीय और इसलिए विकृति स्थिर होती है।

49.2.1.4 आयताकार द्विरेखीय अवयव

44 अब चतुर्भुज अवयव पर विचार करते हैं, चित्र 49.6। जिसका विस्थापन क्षेत्र *द्विरेखीय* है (x और y



चित्र 49.6: आयताकार द्विरेखीय अवयव

दोनों में)। समीकरण 49.6 के लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलन का उपयोग करते हुए और u विस्थापन से आरंभ करके, हम दो अंतर्वेशन करते हैं: पहला निचली कोर (1-2) के अनुदिश और दूसरा ऊपरी कोर (4-3) के अनुदिश।

45 समीकरण 49.6 में $m = 1$ रखने पर प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} \overline{u}_{12} &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\overline{u}_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}\overline{u}_2 \\ &= \frac{a - x}{2a}\overline{u}_1 + \frac{x + a}{2a}\overline{u}_2 \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इसी प्रकार,

$$\begin{aligned}\overline{u}_{43} &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\overline{u}_4 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}\overline{u}_3 \\ &= \frac{a - x}{2a}\overline{u}_4 + \frac{x + a}{2a}\overline{u}_3\end{aligned}$$

46 इसके बाद y दिशा में 1-4 तथा 2-3 के अनुदिश $\overline{u}_{12}$ और $\overline{u}_{43}$ के बीच अंतर्वेशन करते हैं। पुनः समीकरण 49.6 का उपयोग करते हैं, किंतु इस बार x को y से प्रतिस्थापित करते हैं:

$$\begin{aligned}u &= \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\overline{u}_{12} + \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2}\overline{u}_{43} \\ &= \frac{b - y}{2b}\frac{a - x}{2a}\overline{u}_1 + \frac{b - y}{2b}\frac{x + a}{2a}\overline{u}_2 + \frac{y + b}{2b}\frac{a - x}{2a}\overline{u}_4 + \frac{y + b}{2b}\frac{x + a}{2a}\overline{u}_3 \\ &= \underbrace{\frac{(a - x)(b - y)}{4ab}}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{(a + x)(b - y)}{4ab}}_{N_2}\overline{u}_2 + \underbrace{\frac{(a + x)(b + y)}{4ab}}_{N_3}\overline{u}_3 + \underbrace{\frac{(a - x)(b + y)}{4ab}}_{N_1}\overline{u}_4\end{aligned}$$

47 सरलता से जाँचा जा सकता है कि प्रत्येक आसंधि i पर संगत N_i का मान 1 और अन्य सभी का शून्य है, तथा किसी भी बिंदु पर $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1$ है। अतः विस्थापन क्षेत्र निम्न द्वारा दिया जाएगा:

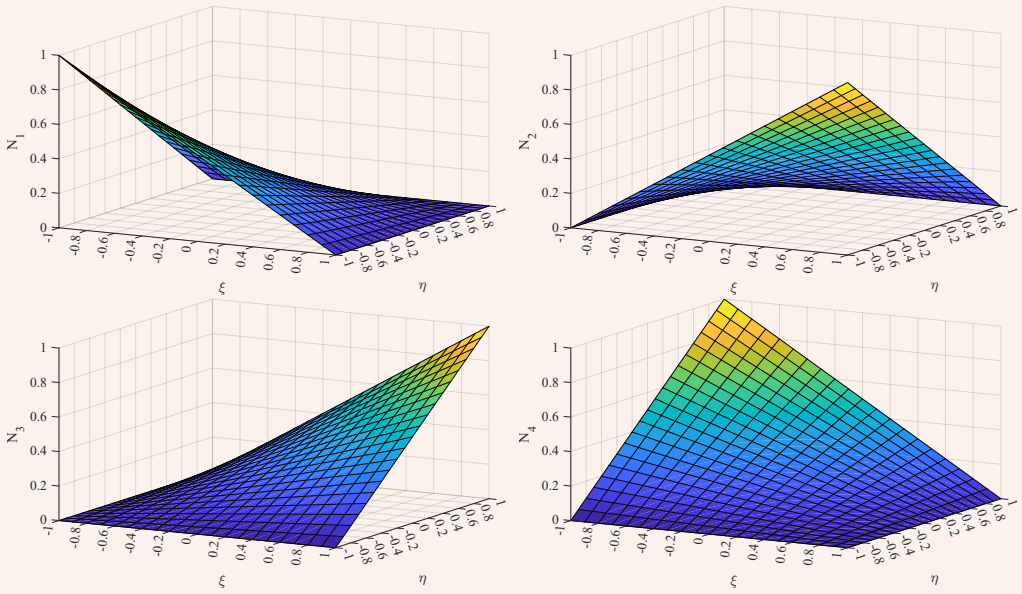
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{Bmatrix}$$

48 चार-आसंधीय समप्राचलीय चतुर्भुज अवयव के आकार फलन चित्र 49.7 में दर्शाए गए हैं।

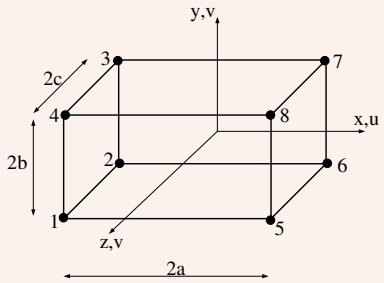
49.2.1.5 ईंट द्विवित्तिरेखीय अवयव

49 पूर्ववर्ती व्युत्पत्ति के विस्तार से, ठोस आयताकार त्तिरेखीय अवयव, चित्र 49.8, के आकार फलन निम्न द्वारा दिए जाएँगे:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 49.7: 4-आसंधीय चतुर्भुज अवयव के आकार फलन



चित्र 49.8: ठोस त्रिरेखीय आयताकार अवयव

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{w}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \overline{w}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \\ \overline{w}_4 \end{Bmatrix}$$

जहाँ

$$N_i = \frac{(a \pm x)(b \pm y)(c \pm z)}{8abc}$$

49.2.2 लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलन

49.2.2.1 चतुर्भुज

50 हमारे पूर्ववर्ती उपागम में आकार फलन निम्न द्वारा प्राप्त किए गए थे:

1. बहुपदीय फलन की कल्पना: $u = \mathbf{pa}$।
2. सीमा-शर्तों का अनुप्रयोग: $\overline{\mathbf{u}} = \mathcal{L}\mathbf{a}$।
3. $\mathcal{L}$ का प्रतिलोमन।
4. और अंततः $\mathbf{N} = \mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}$।

इन संक्रियाओं का अनुसरण करके हमने वस्तुतः C^0 अंतर-अवयव सातत्य (अर्थात् केवल विस्थापन का सातत्य) वाली समस्याओं के लिए *लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलन* परिभाषित किए हैं।

51 लैग्रांजीय अंतर्वेशन किसी फलन के बहुपदीय श्रेणी निरूपण के गुणांकों (हमारे प्रकरण में $\mathbf{N}$) को विविक्त बिंदुओं (हमारे प्रकरण में आसंधियों) पर परिभाषित मानों के पदों में निर्धारित करता है। रेखा के अनुदिश बिंदुओं के लिए इससे प्राप्त होगा:

$$N_i = \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{m+1}(x - x_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{m+1}(x_i - x_j)} \tag{49.6}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

प्रसारित करने पर पूर्ववर्ती समीकरण से प्राप्त होगा:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{m+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{m+1})} \\ N_2 &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{m+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{m+1})} \\ N_{m+1} &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}{(x_{m+1}-x_1)(x_{m+1}-x_2)\cdots(x_{m+1}-x_m)} \end{aligned}$$

52 अक्षीय अवयव के लिए $m=1$, $x_1=0$ और $x_2=L$ रखने पर उपर्युक्त समीकरणों से प्राप्त होगा:

$$u = \frac{(x-L)}{-L}\overline{u}_1 + \frac{x}{L}\overline{u}_2 = \underbrace{(1-\frac{x}{L})}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2}\overline{u}_2$$

जो समीकरण 49.3 के समान है।

49.2.2.2 त्रिभुज

53 अन्य अवयवों के आकार फलन पहले प्रयुक्त लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलन, समीकरण 49.6, से प्राप्त किए जा सकते हैं:

$$\begin{aligned} l_k^n &= \frac{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(L-L_i)}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(L_k-L_i)} \\ &= \frac{(L-L_0)(L-L_1)\cdots(L-L_{k-1})(L-L_{k+1})\cdots(L-L_n)}{(L_k-L_0)(L_k-L_1)\cdots(L_k-L_{k-1})(L_k-L_{k+1})\cdots(L_k-L_n)} \end{aligned}$$

54 अतः किसी विशिष्ट आसंधि i को तीन संख्याओं q, r और s से सूचित करते हुए, जो निर्देशांकों L_{1i}, L_{2i} और L_{3i} की स्थिति के अनुरूप हैं, आकार फलनों को तीन लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलनों के पदों में लिखा जा सकता है:

$$N_i = l_q^q(L_1)l_r^r(L_2)l_s^s(L_3)$$

55 इस सूत्र का उपयोग करने पर उच्चतर-कोटि अवयवों के आकार फलन हैं:

रेखीय त्रिभुज

$$N_i = L_i$$

द्विघाती त्रिभुज

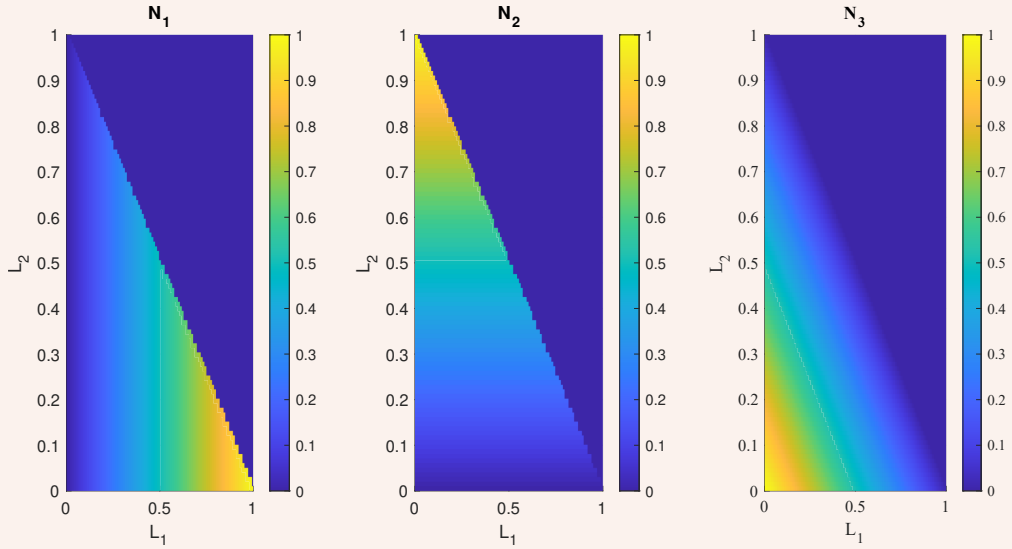
$$\begin{aligned} N_i &= L_i(2L_i-1) && \text{Corner nodes} \\ N_j &= 4L_iL_k && \text{Midside nodes, } i,j,k \text{ are on the same side} \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

त्रिघाती त्रिभुज

$$
\begin{aligned}
N_i &= \tfrac{1}{2}L_i(3L_i-1)(3L_i-2) && \text{Corner nodes}\\
N_j &= \tfrac{9}{2}L_iL_k(3L_i-1) && \text{Midside nodes, } i,j,k \text{ are on the same side}\\
N_{10} &= 27L_1L_2L_3 && \text{Internal node}
\end{aligned}
$$

56 तीन-आसंधीय रेखीय त्रिभुज के आकार फलन चित्र 49.9 में दर्शाए गए हैं। ध्यान दें कि क्षेत्रफल निर्देशांकों में आकार फलनों को देखने का एकमात्र उपाय **N** को L_1 और L_2 के पदों में निर्धारित करना है।

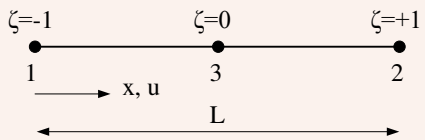


चित्र 49.9: 3-आसंधीय रेखीय त्रिकोणीय अवयव के आकार फलन

49.2.2.3 ट्रस अवयव; द्विघाती

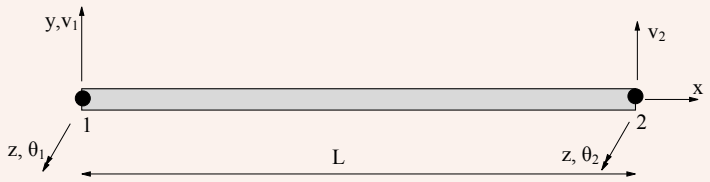
57 अब द्विघाती ट्रस अवयव के आकार फलन व्युत्पन्न करने के लिए लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलन लागू करते हैं।

58 तीन-आसंधीय द्विघाती अवयव चित्र 49.10 में दर्शाया गया है।



चित्र 49.10: तीन-आसंधीय द्विघाती छड़ अवयव

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 49.11: आनमनी परिमित अवयव

59 अवयव के आकार फलन समीकरण 49.6 के लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलन से प्राप्त किए जा सकते हैं, जिसमें x को ξ से प्रतिस्थापित करते हैं। बहुपद का kवाँ पद, जिसकी कोटि $n-1$ है, होगा:

$$\begin{aligned} N_k^n &= \frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(\xi-\xi_i)}{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(\xi_k-\xi_i)} \\ &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{k-1})(\xi-\xi_{k+1})\cdots(\xi-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)(\xi_k-\xi_2)\cdots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\cdots(\xi_k-\xi_n)} \end{aligned}$$

60 तीन-आसंधीय द्विघाती अवयव के लिए $\xi_1=-1$, $\xi_2=+1$ और $\xi_3=0$। प्रतिस्थापित करने पर तीन आकार फलन प्राप्त होते हैं:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \tfrac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} = \tfrac{(\xi-1)(\xi-0)}{(-1-1)(-1-0)} = \tfrac{1}{2}(\xi^2-\xi) \\ N_2(\xi) &= \tfrac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} = \tfrac{(\xi+1)(\xi-0)}{(1+1)(1-0)} = \tfrac{1}{2}(\xi^2+\xi) \\ N_3(\xi) &= \tfrac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)} = \tfrac{(\xi+1)(\xi-1)}{(0+1)(0-1)} = 1-\xi^2 \end{aligned}$$

अतः,

$$x(\xi) = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \lfloor\ \overline{x}_1 \quad \overline{x}_2 \quad \overline{x}_3\ \rfloor^T \qquad \text{and} \qquad u(\xi) = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \lfloor\ \overline{u}_1 \quad \overline{u}_2 \quad \overline{u}_3\ \rfloor^T \tag{49.7}$$

जहाँ

$$\lfloor \mathbf{N} \rfloor = \lfloor\ \tfrac{1}{2}(\xi^2-\xi) \quad \tfrac{1}{2}(\xi^2+\xi) \quad 1-\xi^2\ \rfloor \tag{49.8}$$

49.2.2.4 धरन

61 हम §49.2.1.2 में व्युत्पन्न समीकरणों का उपयोग करेंगे। चित्र 49.11 देखें। हमारे पास 4 स्वतंत्रता-कोटियाँ, $\{\mathbf{u}\}_{4\times1}$ हैं; अतः 4 आकार फलन, N_1 से N_4, आवश्यक होंगे, और वे 4 सीमा-शर्तों से प्राप्त किए जाएँगे। इसलिए विस्थापनों के लिए घात 3 का बहुपदीय सन्निकटन मानना होगा।

$$\begin{aligned} v &= a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \\ \theta &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3 \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ध्यान दें कि v को निम्न रूप में पुनर्लिखा जा सकता है:

$$v = \underbrace{\lfloor\, x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1 \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} \tag{49.9}$$

[62] अब सीमा-शर्तें लागू करते हैं:

1. $v = \overline{v}_1$, $x = 0$ पर।
2. $v = \overline{v}_2$, $x = L$ पर।
3. $\theta = \overline{\theta}_1 = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, $x = 0$ पर।
4. $\theta = \overline{\theta}_2 = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$, $x = L$ पर।

अथवा:

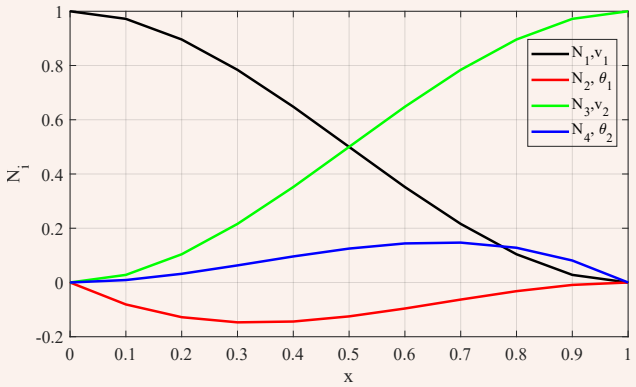
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

जिसका प्रतिलोम करने पर प्राप्त होता है:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{L}]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}} \tag{49.10}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 49.12: एकसमान धरन अवयव के आनमन के लिए आकार फलन

63 समीकरण 49.10 को समीकरण 49.9 के साथ संयोजित करने पर प्राप्त होता है:

$$
\begin{aligned}
u &= \underbrace{\lfloor\, x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1 \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{L}]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \\
&= \underbrace{\lfloor\, \underbrace{(1+2\xi^3-3\xi^2)}_{N_1} \quad \underbrace{x(1-\xi)^2}_{N_2} \quad \underbrace{(3\xi^2-2\xi^3)}_{N_3} \quad \underbrace{(\xi^2-\xi)}_{N_4} \,\rfloor}_{\underbrace{\mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}}_{\mathbf{N}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}}
\end{aligned}
$$

जहाँ $\xi = \frac{x}{l}$।

64 अतः आनमनी अवयव के आकार फलन निम्न द्वारा दिए जाते हैं:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= (1+2\xi^3-3\xi^2) \\
N_2 &= x(1-\xi)^2 \\
N_3 &= (3\xi^2-2\xi^3) \\
N_4 &= x(\xi^2-\xi)
\end{aligned}
\tag{49.11}
$$

और चित्र 49.12 में दर्शाए गए हैं। सारणी 49.3 इन आकार फलनों के अभिलक्षण दर्शाती है।

65 ध्यान दें कि नीचे (§49.2.3.1) हरिमटीय अंतर्वेशन फलनों का उपयोग करके इन्हीं आकार फलनों को पुनः व्युत्पन्न किया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

	$\xi = 0$		$\xi = 1$	
फलन	N_i	$N_{i,x}$	N_i	$N_{i,x}$
$N_1 = (1 + 2\xi^3 - 3\xi^2)$	1	0	0	0
$N_2 = x(1 - \xi)^2$	0	1	0	0
$N_3 = (3\xi^2 - 2\xi^3)$	0	0	1	0
$N_4 = x(\xi^2 - \xi)$	0	0	0	1

तालिका 49.3: धरन अवयव के आकार फलनों के अभिलक्षण

49.2.3 हर्मिटीय अंतर्वेशन फलन

66 आकार फलन के प्रथम अवकलज वाली समस्याओं में, अर्थात् C^1 अंतर-अवयव सातत्य (प्रथम अवकलज अथवा ढाल का सातत्य) वाली समस्याओं में, जैसे आनमन के लिए, लैग्रांजीय के स्थान पर *हर्मिटीय अंतर्वेशन फलनों* का उपयोग करना चाहिए।

67 हर्मिटीय अंतर्वेशन फलन खंडशः त्रिघाती फलन हैं, जो विस्थापन और ढाल के सातत्य (C^0, C^1) की शर्तों को संतुष्ट करते हैं। CAD में उनका व्यापक उपयोग बेज़ियर वक्रों के रूप में होता है।

68 हर्मिटीय अंतर्वेशन फलन बहुपदीय अंतर्वेशन का एक प्रकार है, जिसका उपयोग अंतर्वेशन बिंदुओं (आसंधियों) पर फलन के मानों और अवकलज मानों दोनों के आधार पर फलन का मान अनुमानित करने के लिए किया जाता है। हर्मिटीय अंतर्वेशन यह सुनिश्चित करता है कि अंतर्वेशित बहुपद आसंधियों पर दिए गए फलन मानों से ही नहीं, बल्कि प्रथम (और संभावितः उच्चतर) अवकलजों से भी मेल खाए। इससे अधिक चिकना और परिशुद्ध सन्निकटन मिलता है, विशेषतः जब अंतर्वेशित फलन के कुछ अवकलज मान ज्ञात हों।

69 उदाहरणतः एक सरल प्रकरण पर विचार करें, जिसमें हर्मिटीय अंतर्वेशन द्वारा फलन $f(x)$ का दो बिंदुओं x_0 और x_1 पर अंतर्वेशन करना है। हमारे पास फलन मान $f(x_0)$, $f(x_1)$ और उनके प्रथम अवकलज $f'(x_0)$, $f'(x_1)$ हैं।

70 घात 3 का हर्मिटीय अंतर्वेशन बहुपद $H(x)$ निम्न प्रकार बनाया जा सकता है:

$$H(x) = h_0(x)f(x_0) + h_1(x)f(x_1) + h_2(x)f'(x_0) + h_3(x)f'(x_1)$$

जहाँ आधार फलन $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ और $h_3(x)$ इस प्रकार परिभाषित हैं कि अंतर्वेशन शर्तें संतुष्ट हों।

71 आधार फलनों को आसंधियों पर अंतर्वेशन शर्तें संतुष्ट करने के लिए बनाया जाता है। दो आसंधियों x_0 और x_1 के लिए आधार फलन निम्न प्रकार परिभाषित किए जा सकते हैं:

$$h_0(x) = (1 - 2(x - x_0)\frac{d}{dx}L_0(x))(L_0(x))^2$$

$$h_1(x) = (1 - 2(x - x_1)\frac{d}{dx}L_1(x))(L_1(x))^2$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$h_2(x) = (x - x_0)(L_0(x))^2$$
$$h_3(x) = (x - x_1)(L_1(x))^2$$

जहाँ $L_0(x)$ और $L_1(x)$ निम्न द्वारा दिए गए रेखीय लैग्रांज आधार बहुपद हैं:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$
$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

49.2.3.1 धरन आकार फलनों पर पुनरि्वचार

72 §49.2.2.4 में हमने §49.2.1.2 में विकसित विधि का उपयोग करके और चित्र 49.11 के संदर्भ में धरन के आकार फलन व्युत्पन्न किए थे।

73 यूलर–बर्नूली धरन सिद्धांत में प्राथमिक अज्ञात अनुप्रस्थ विस्थापन w और घूर्णन (ढाल) $\theta = \frac{dw}{dx}$ हैं। आनमन से गुजरती धरनों के व्यवहार के प्रतिरूपण के लिए आकार फलनों को अवयव सीमाओं के आर-पार विस्थापन और ढाल दोनों का सातत्य सुनिश्चित करना चाहिए। हरि्मटीय आकार फलन इस उद्देश्य के लिए आदर्श हैं।

74 दो आसंधियों x_0 और x_1 वाले धरन अवयव पर विचार करें। प्रत्येक आसंधि की दो स्वतंत्रता-कोटियाँ हैं: अनुप्रस्थ विस्थापन w और घूर्णन (ढाल) $\theta = \frac{dw}{dx}$। हरि्मटीय अंतर्वेशन बहुपद इस प्रकार बनाए जाते हैं कि अवयव सीमाओं के आर-पार विस्थापन और ढाल दोनों सतत हों।

75 धरन अवयव के लिए हरि्मटीय अंतर्वेशन बहुपद $H(x)$ को आधार फलनों और आसंधीय मानों के पदों में त्रिघाती बहुपद के रूप में लिखा जा सकता है:

$$H(x) = h_0(x)w_0 + h_1(x)\theta_0 + h_2(x)w_1 + h_3(x)\theta_1$$

जहाँ:

- w_0 और θ_0, आसंधि x_0 पर विस्थापन और ढाल हैं;
- w_1 और θ_1, आसंधि x_1 पर विस्थापन और ढाल हैं;
- $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ और $h_3(x)$ हरि्मटीय आकार फलन हैं।

76 आकार फलन $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ और $h_3(x)$ निर्धारित करने के लिए आसंधियों पर निम्न शर्तें लागू करनी होंगी:

1. $H(x_0) = w_0$
2. $\frac{dH}{dx}(x_0) = \theta_0$
3. $H(x_1) = w_1$
4. $\frac{dH}{dx}(x_1) = \theta_1$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[77] आधार फलन बनाने के लिए सामान्यीकृत निर्देशांक $\xi = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ का उपयोग करते हैं। तब आधार फलन निम्न प्रकार परिभाषित होते हैं:

1. $h_0(\xi)$: x_0 पर विस्थापन।
2. $h_1(\xi)$: x_0 पर ढाल।
3. $h_2(\xi)$: x_1 पर विस्थापन।
4. $h_3(\xi)$: x_1 पर ढाल।

$h_0(x)$

$$h_0(x_0) = 1, \quad h_0'(x_0) = 0, \quad h_0(x_1) = 0, \quad h_0'(x_1) = 0$$

हम $h_0(\xi)$ को निम्न रूप में बनाते हैं:

$$h_0(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$h_1(x)$

$$h_1(x_0) = 0, \quad h_1'(x_0) = 1, \quad h_1(x_1) = 0, \quad h_1'(x_1) = 0$$

हम $h_1(\xi)$ को निम्न रूप में बनाते हैं:

$$h_1(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

$h_2(x)$

$$h_2(x_0) = 0, \quad h_2'(x_0) = 0, \quad h_2(x_1) = 1, \quad h_2'(x_1) = 0$$

हम $h_2(\xi)$ को निम्न रूप में बनाते हैं:

$$h_2(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$h_3(x)$

$$h_3(x_0) = 0, \quad h_3'(x_0) = 0, \quad h_3(x_1) = 0, \quad h_3'(x_1) = 1$$

हम $h_3(\xi)$ को निम्न रूप में बनाते हैं:

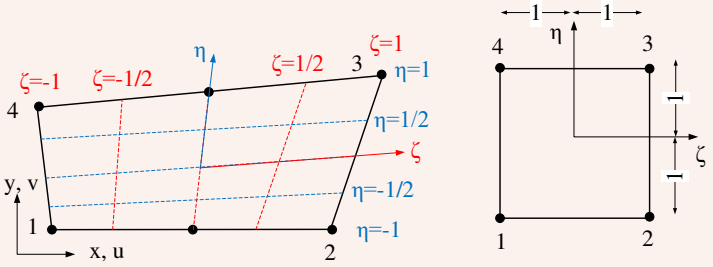
$$h_3(\xi) = \xi^2 - \xi^3$$

इन परिणामों को संयोजित करने पर धरन अवयव का हर्मिटीय अंतर्वेशन बहुपद है:

$$H(x) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)w_0 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)(x - x_0)\theta_0 + (3\xi^2 - 2\xi^3)w_1 + (\xi^2 - \xi^3)(x - x_1)\theta_1$$

जहाँ $\xi = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$। ये पहले §49.2.2.4 में व्युत्पन्न फलनों के समान हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 49.13: चार-आसंधीय समप्राचलीय अवयव

49.2.3.2 चतुर्भुज अवयव

49.2.3.2.1 रेखीय चतुर्भुज (q4) [78] हमने पहले निर्देशांक अक्षों के साथ संरेखित आयताकार अवयव का दृढता आव्यूह व्युत्पन्न किया था; यह सूत्रीकरण उसे स्वेच्छ चतुर्भुज आकार के लिए सामान्यीकृत करेगा।

[79] चित्र 49.13 अवयव को दर्शाता है।

[80] द्विविमीय प्रकरण के लिए

$$u(\xi,\eta) = \sum N_{ij}\overline{u}_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} N_j(\xi)N_i(\eta)\overline{u}_k$$

जहाँ $k=(i-1)m+j$। द्विरेखीय अवयव के लिए $n=m=2$; इसे निम्न रूप में पुनर्लिखा जा सकता है:

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \lfloor\, N_1(\xi) \quad N_2(\xi)\,\rfloor \begin{bmatrix} \overline{u}_1 & \overline{u}_3 \\ \overline{u}_2 & \overline{u}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(\eta) \\ N_2(\eta) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\xi^T \overline{\mathbf{u}} \mathbf{N}_\eta \\ &= N_1(\xi)N_1(\eta)\overline{u}_1 + N_2(\xi)N_1(\eta)\overline{u}_2 + N_1(\xi)N_2(\eta)\overline{u}_4 + N_2(\xi)N_2(\eta)\overline{u}_3 \\ &= N_1(\xi,\eta)\overline{u}_1 + N_2(\xi,\eta)\overline{u}_2 + N_3(\xi,\eta)\overline{u}_3 + N_4(\xi,\eta)\overline{u}_4 \\ &= \sum_{i=1}^{4} N_i\overline{u}_i \end{aligned}$$

[81] लैग्रांजीय अंतर्वेशन समीकरण 49.7 लागू करने पर प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)}{(\xi_1-\xi_2)} = \frac{(\xi-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)}{(\xi_2-\xi_1)} = \frac{(\xi+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+\xi) \\ N_1(\eta) &= \frac{(\eta-\eta_2)}{(\eta_1-\eta_2)} = \frac{(\eta-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-\eta) \\ N_2(\eta) &= \frac{(\eta-\eta_1)}{(\eta_2-\eta_1)} = \frac{(\eta+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+\eta) \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

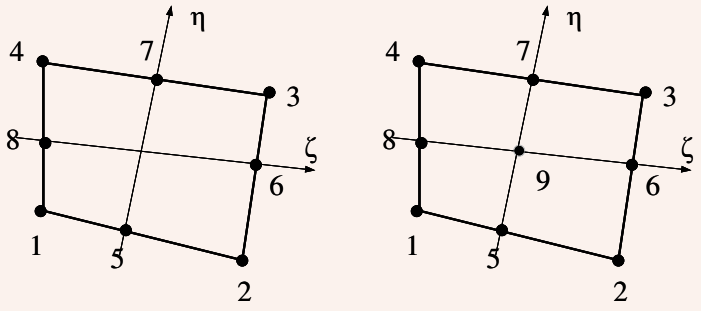
समीकरण 49.12 में प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{array}{rclrcl} N_1(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); & N_2(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \\ N_3(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); & N_4(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta); \end{array} \tag{49.12}$$

ध्यान देना चाहिए कि इस सरल प्रकरण में आकार फलन केवल निरीक्षण से निर्धारित किए जा सकते थे।

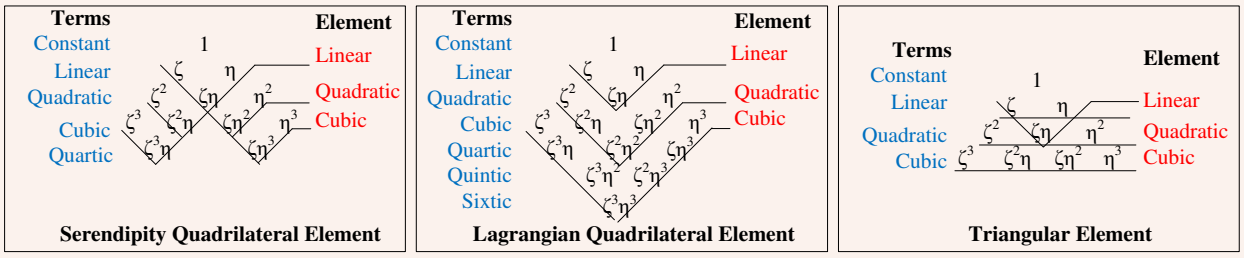
49.2.3.2.2 द्विघाती चतुर्भुज

82 द्विघाती चतुर्भुज अवयव के लिए दो संभावनाएँ हैं, चित्र 49.14।



चित्र 49.14: सेरेनिडिपिटी और लैग्रांजीय द्विघाती चतुर्भुज

83 पास्कल त्रिभुज, चित्र 49.15, का उपयोग आगे समप्राचलीय अवयवों के विस्थापन क्षेत्र में पदों के चयन को उचित ठहराने के लिए किया जाएगा।



चित्र 49.15: चतुर्भुज और त्रिभुज अवयवों के लिए पास्कल त्रिभुज

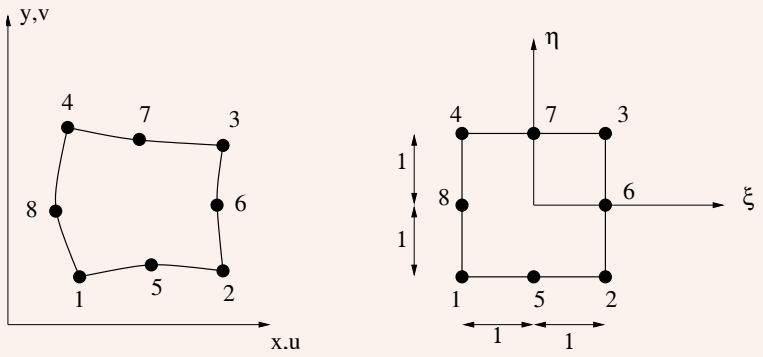
49.2.3.2.2.1 सेरेनिडिपिटी अवयव (q8)

84 पास्कल त्रिभुज के आधार पर विस्थापन क्षेत्र निम्न द्वारा दिया जाता है:

$$u = \underbrace{a_1}_{\boxed{0}} + \underbrace{a_2 x + a_3 y}_{\boxed{1}} + \underbrace{a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2}_{\boxed{2}} + \underbrace{a_8 x^2 y + a_9 x y^2}_{\boxed{3}}$$

85 इस सूत्रीकरण में x^2y^2 पद अनुपस्थित है और कल्पित बहुपदीय प्रसार के 8 पद 8 आसंधियों (4 कोनीय और 4 मध्य-भुजा) के अनुरूप हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 49.16: सेरेनिडपिटी समप्राचलीय द्विघाती परिमित अवयव: वैश्विक और जनक अवयव

[86] सारणियों 49.1 और 49.2 के सादृश्य से आकार फलन केवल निरीक्षण द्वारा (अर्थात् *संयोगवश*) प्राप्त किए जा सकते हैं:

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{4}\left(1+\xi\xi_i\right)\left(1+\eta\eta_i\right)\left(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1\right) && i=1,2,3,4 \\ N_i &= \tfrac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)\left(1+\eta\eta_i\right) && i=5,7 \\ N_i &= \tfrac{1}{2}\left(1+\xi\xi_i\right)\left(1+\eta^2\right) && i=6,8 \end{aligned}$$

और सारणी 49.4 में सारणीबद्ध हैं।

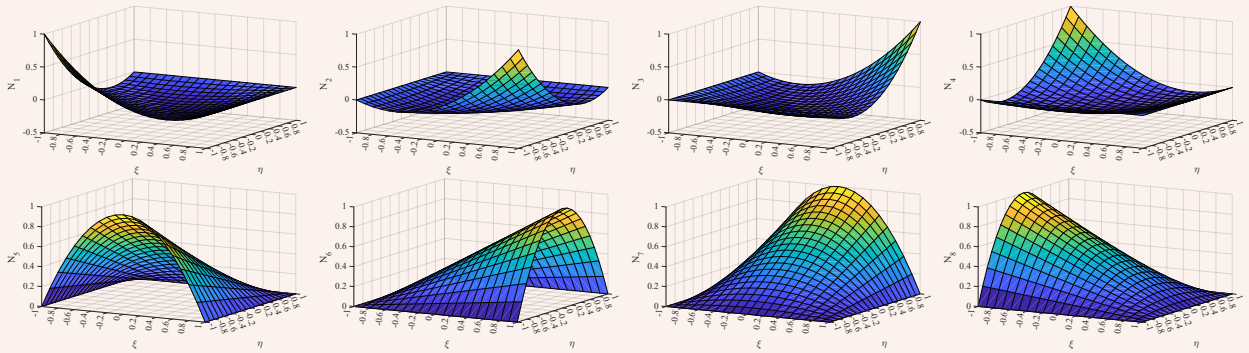
तालिका 49.4: q8 अवयव के आकार फलन और प्राकृतिक अवकलज

i	N_i	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta+\xi)$
2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta+\xi)$
4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta-\xi)$
5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-\xi(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$
7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	$-\xi(1+\eta)$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$	$-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\eta$

[87] कोनीय और मध्य-भुजा आसंधियों के आकार फलन चित्र 49.17 में दर्शाए गए हैं।

49.2.3.2.2.2 लैग्रांजीय अवयव (q9)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 49.17: 8-आसंधीय चतुर्भुज अवयव के आकार फलन

88 इस अवयव में विस्थापन क्षेत्र निम्न द्वारा दिया जाता है:

$$u = \underbrace{\underbrace{a_1}_{\boxed{0}} + \underbrace{a_2 x + a_3 y}_{\boxed{1}} + \underbrace{a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2}_{\boxed{2}} + \underbrace{a_8 x^2 y + a_9 x y^2}_{\boxed{3}} + \underbrace{a_{12} x^2 y^2}_{\boxed{4}}}_{\text{Serendipity}}$$

89 सभी द्विघाती पद उपस्थित हैं; अतः बहुपदीय प्रसार में 9 पद हैं और 9वीं आसंधि एक आंतरिक आसंधि के अनुरूप होगी।

90 इस प्रकरण में आकार फलन लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलनों से सीधे प्राप्त किए जा सकते हैं, जिससे

91 Q9 अवयव की नौ आसंधियाँ हैं और वह ऐसे आकार फलनों का उपयोग करता है जो ξ तथा η दोनों दिशाओं में द्विघाती हैं। आकार फलन लैग्रांजीय अंतर्वेशन से व्युत्पन्न किए जाते हैं।

92 Q9 अवयव की आसंधियाँ और प्राकृतिक निर्देशांक निकाय (ξ, η) में उनके निर्देशांक सारणी 49.5 में दर्शाए गए हैं।

तालिका 49.5: q9 अवयव के आसंधीय (प्राकृतिक) निर्देशांक

आसंधि	1	2	3	4	5	5	7	8	9
ξ	-1	0	1	1	1	0	-1	-1	0
τ	-1	-1	-1	0	1	1	1	0	0

93 1D में द्विघाती अवयव के लैग्रांज आकार फलन निम्न द्वारा दिए जाते हैं:

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$$

94 $\xi = -1$, $\xi = 0$ और $\xi = 1$ पर आसंधियों वाले द्विघाती अवयव के आकार फलन हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आकार फलन $N_0(\xi)$, $\xi = -1$ **के लिए**

$$N_0(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

आकार फलन $N_1(\xi)$, $\xi = 0$ **के लिए**

$$N_1(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{-1} = 1 - \xi^2$$

आकार फलन $N_2(\xi)$, $\xi = 1$ **के लिए**

$$N_2(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} = \frac{(\xi + 1)\xi}{2}$$

95 Q9 अवयव के 2D लैग्रांज आकार फलन ξ और η दिशाओं के 1D लैग्रांज आकार फलनों के गुणनफल हैं:

$$N_{ij}(\xi, \eta) = N_i(\xi) \cdot N_j(\eta)$$

96 अब आकार फलन बनाते हैं:

1. $(\xi, \eta) = (-1, -1)$ पर:

$$N_{11}(\xi, \eta) = N_0(\xi)N_0(\eta) = \left(\frac{\xi(\xi - 1)}{2}\right)\left(\frac{\eta(\eta - 1)}{2}\right) = \frac{\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1)}{4}$$

2. $(\xi, \eta) = (0, -1)$ पर:

$$N_{21}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_0(\eta) = (1 - \xi^2)\left(\frac{\eta(\eta - 1)}{2}\right) = \frac{(1 - \xi^2)\eta(\eta - 1)}{2}$$

3. $(\xi, \eta) = (1, -1)$ पर:

$$N_{31}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_0(\eta) = \left(\frac{(\xi + 1)\xi}{2}\right)\left(\frac{\eta(\eta - 1)}{2}\right) = \frac{(\xi + 1)\xi\eta(\eta - 1)}{4}$$

4. $(\xi, \eta) = (1, 0)$ पर:

$$N_{32}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_1(\eta) = \left(\frac{(\xi + 1)\xi}{2}\right)(1 - \eta^2) = \frac{(\xi + 1)\xi(1 - \eta^2)}{2}$$

5. $(\xi, \eta) = (1, 1)$ पर:

$$N_{33}(\xi, \eta) = N_2(\xi)N_2(\eta) = \left(\frac{(\xi + 1)\xi}{2}\right)\left(\frac{(\eta + 1)\eta}{2}\right) = \frac{(\xi + 1)\xi(\eta + 1)\eta}{4}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6. $(\xi, \eta) = (0, 1)$ पर:

$$N_{23}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_2(\eta) = (1 - \xi^2)\left(\frac{(\eta + 1)\eta}{2}\right) = \frac{(1 - \xi^2)(\eta + 1)\eta}{2}$$

7. $(\xi, \eta) = (-1, 1)$ पर:

$$N_{13}(\xi, \eta) = N_0(\xi)N_2(\eta) = \left(\frac{\xi(\xi - 1)}{2}\right)\left(\frac{(\eta + 1)\eta}{2}\right) = \frac{\xi(\xi - 1)(\eta + 1)\eta}{4}$$

8. $(\xi, \eta) = (-1, 0)$ पर:

$$N_{12}(\xi, \eta) = N_0(\xi)N_1(\eta) = \left(\frac{\xi(\xi - 1)}{2}\right)(1 - \eta^2) = \frac{\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2)}{2}$$

9. $(\xi, \eta) = (0, 0)$ पर:

$$N_{22}(\xi, \eta) = N_1(\xi)N_1(\eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

97 अंतिम आकार फलन को प्रायः बबल फलन कहा जाता है।

98 ये आकार फलन सेरेनिडिपिटी अवयव के आकार फलनों से थोड़ा भिन्न हैं।

99 आकार फलन चित्र 49.18 में दर्शाए गए हैं।

100 यदि कोरें समांतर न हों अथवा थोड़ी वक्र हों, तो Q9 अवयव Q8 की अपेक्षा बहुत बेहतर कार्य करते हैं।

49.2.3.3 परिवर्ती (पदानुक्रमिक) अवयव

101 उपर्युक्त आधार पर सूत्रीकरण को परिवर्ती संख्या में आसंधियों वाले चतुर्भुज अवयव के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है। इस अवयव में विभिन्न कोरों के अनुदिश विचरण की कोटियाँ भिन्न हो सकती हैं और यह परिमित अवयव जाल के क्रमिक परिष्करण को सुगम बनाने में अत्यंत उपयोगी है।

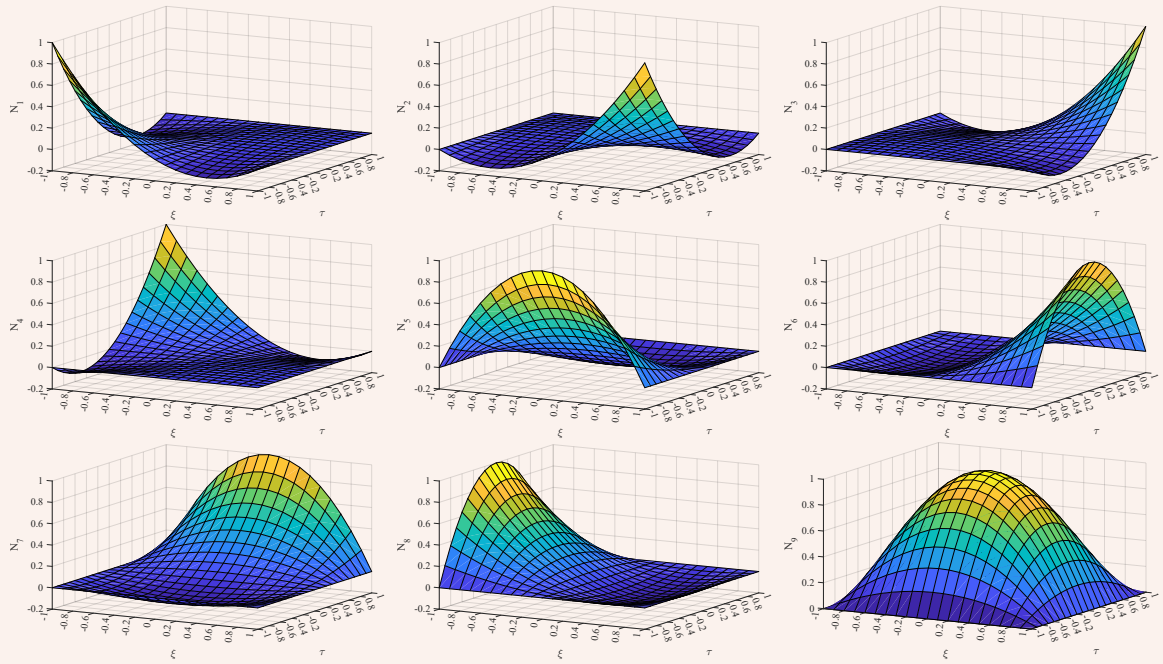
102 अपने सरलतम सूत्रीकरण में इसकी चार आसंधियाँ होती हैं और सभी भुजाओं के अनुदिश रेखीय विचरण होता है; सबसे सामान्य प्रकरण में यह पूर्ण द्विघाती अवयव है। तब आकार फलन सारणी 49.6 से प्राप्त किए जा सकते हैं। ध्यान दें कि ये आकार फलन उस पदानुक्रमिक अवयव के लिए हैं जिसमें पहले कोनीय आसंधियों और उसके बाद मध्य-भुजा आसंधियों को क्रमांकित किया गया है, चित्र 49.19।

49.2.3.4 त्रिकोणीय अवयव (t6)

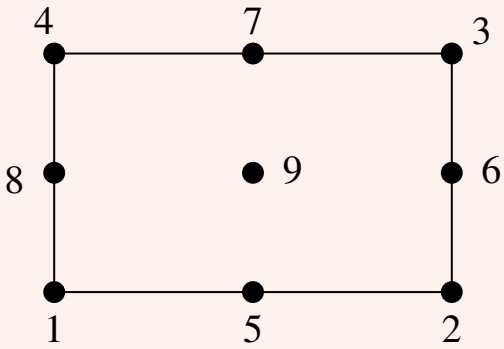
103 द्विघाती विस्थापन आकार फलनों को प्राकृतिक निर्देशांकों में निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$u = \sum_{i=1}^{6} N_i u_i \qquad v = \sum_{i=1}^{6} N_i v_i \tag{49.13}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 49.18: 9-आसंधीय चतुर्भुज अवयव के आकार फलन



चित्र 49.19: समप्राचलीय अवयवों के लिए आसंधीय क्रमांकन

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 49.6: परिवर्ती-आसंधि अवयवों के आकार फलन

		केवल यदि आसंधि i उपस्थित हो				
		$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$
N_1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$	$\frac{1}{4}N_9$
N_2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$			$\frac{1}{4}N_9$
N_3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$		$\frac{1}{4}N_9$
N_4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$	$\frac{1}{4}N_9$
N_5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_9	$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$					

जहाँ आकार फलन समीकरण 49.2.2.2 में प्राप्त किए गए थे:

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 & N_4 &= 4L_1L_2 \\ N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 & N_5 &= 4L_2L_3 \\ N_3 &= (2L_3 - 1)L_3 & N_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned} \tag{49.14}$$

104 ध्यान देना चाहिए कि वैकल्पिक रूप से इन आकार फलनों को

$$u(L_1, L_2) = a_1 + a_2L_1 + a_3L_2 + a_4L_1^2 + a_5L_1L_2 + a_6L_2^2 \tag{49.15}$$

मानकर और फिर उपयुक्त सीमा-शर्तों की संतुष्टि द्वारा गुणांक निर्धारित करके भी प्राप्त किया जा सकता था।

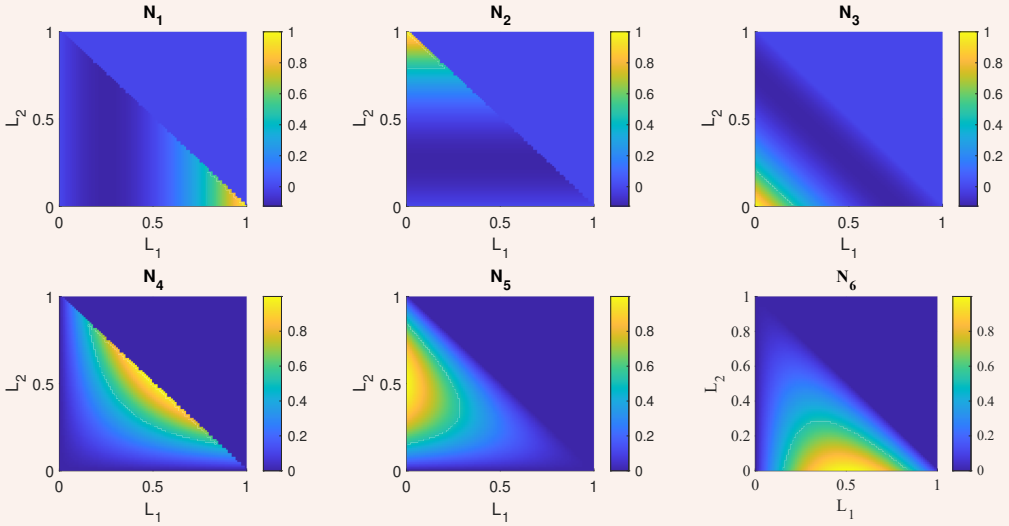
105 प्राकृतिक निर्देशांकों L_1 और L_2 के सापेक्ष आकार फलन और उनके अवकलज सारणी 49.7 में (L_1, L_2 और L_3 के पदों में) दिए गए हैं।

106 छह-आसंधीय द्विघाती त्रिभुज के आकार फलन चित्र 49.20 में दर्शाए गए हैं।

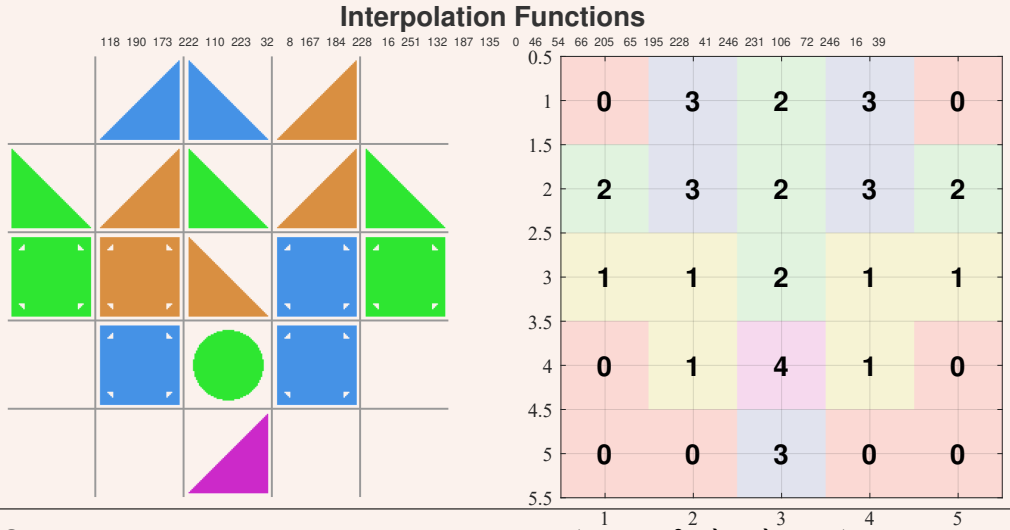
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 49.7: t6 अवयव के आकार फलन और अवकलज

i	N_i	N_{i,L_1}	N_{i,L_2}	N_{i,L_3}
1	$(2L_1-1)L_1$	$4L_1-1$	0	0
2	$(2L_2-1)L_2$	0	$4L_2-1$	0
3	$(2L_3-1)L_3$	0	0	$4L_3-1$
4	$4L_1L_2$	$4L_2$	$4L_1$	0
5	$4L_2L_3$	0	$4L_3$	$4L_2$
6	$4L_1L_3$	$4L_3$	0	$4L_1$



चित्र 49.20: 6-आसंधीय द्विघाती त्रिकोणीय अवयव के आकार फलन



OpenAI के Codex द्वारा हिंदी में अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
अप्रकाशित प्रति

50 रैखिक अवयव सूत्रीकरण

सारांश

पूर्ववर्ती अध्यायों में हमने परिवर्तनात्मक विधियों, विशेषतः आभासी कार्य के सिद्धांत, का परिचय दिया और विस्थापन क्षेत्र के लिए आसंधीय मानों के पदों में अंतर्वेशन फलनों की चर्चा की। अब इन संकल्पनाओं को परिमित अवयव विधि के सूत्रीकरण में लागू करने का समय है। यह अध्याय 1D (धरन/कैंची) तथा सातत्यक अवयवों के लिए एक सामान्य सूत्रीकरण प्रस्तुत करता है। ध्यान रहे कि यह एकमात्र उपागम नहीं है; आगामी अध्याय में हम गैलर्किन विधि (§52) का परीक्षण करेंगे, जो सभी व्यावहारिक प्रयोजनों के लिए यांत्रिकी में समान सूत्रीकरण प्रदान करेगी।

50.1 परिचय 1741
50.2 परिमित अवयव 1742
50.2.1 परिचय 1742
50.2.2 विकृति–विस्थापन संबंध 1742
50.2.3 आभासी विस्थापन और विकृतियाँ 1743
50.2.4 अवयव दृढता आव्यूह सूत्रीकरण 1743
50.2.5 प्रतिबल पुनर्प्राप्ति 1745
50.3 अनुप्रयोग 1745
50.3.1 कैंची अवयव 1745
50.3.2 आनमनी अवयव 1746
50.4 सामान्य अवयव अपेक्षाएँ 1747
50.5 विविक्तीकरण त्रुटि और अभिसरण दर . 1748
50.6 न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा-आधारित हलों का निम्न-सीमा स्वरूप 1750
50.7 हल में साम्य और सुसंगतता 1750

50.1 परिचय

[1] अब तक हमने सतत निकायों पर विचार किया है; इस अध्याय में हम पूर्व-व्युत्पन्न संबंधों को विविक्तीकृत निकायों पर लागू करना चाहते हैं। प्राथमिक हल केवल आसंधियों पर प्राप्त होते हैं (Ω के भीतर सतत हल के विपरीत)। आभासी विस्थापन के सिद्धांत के अनुप्रयोग के लिए एक कल्पित विस्थापन क्षेत्र आवश्यक है। इस विस्थापन क्षेत्र का सन्निकटन निम्नके पदों में लिखे अंतर्वेशन फलनों द्वारा किया जा सकता है:

1. अज्ञात बहुपदीय गुणांक, जो सतत निकायों के लिए सर्वाधिक उपयुक्त हैं। उदाहरणतः रेले–रिट्ज विधि में
$$v(x) = a_1 \underbrace{x(L-x)}_{\Phi_1} + a_2 \underbrace{x^2(L-x)^2}_{\Phi_2} + \dots$$
इस उपागम की एक प्रमुख कमी यह है कि गुणांकों का कोई भौतिक अर्थ नहीं होता।
2. अज्ञात आसंधीय विरूपण, जो विविक्त निकायों और स्थितिज ऊर्जा-आधारित सूत्रीकरण के लिए सर्वाधिक उपयुक्त हैं
$$v(\overline{\mathbf{u}}_i) = u = N_1\overline{\mathbf{u}}_1 + N_2\overline{\mathbf{u}}_2 + \dots + N_n\overline{\mathbf{u}}_n$$
जहाँ $\overline{\mathbf{u}}_i$ ज्ञात विस्थापन है, स्वातंत्र्य-कोटि i पर।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

50.2 परिमित अवयव

50.2.1 परिचय

2 अध्याय 41 में हमने एकविमीय दंड अवयवों के दृढता आव्यूह व्युत्पन्न किए थे; वहाँ प्रयुक्त उपागम को सामान्य परिमित अवयव के लिए व्यापक नहीं बनाया जा सकता। इसके विपरीत, इस अध्याय की व्युत्पत्ति एकविमीय दंड (अथवा लगभग सातत्यक) अवयवों और सातत्यक (2D अथवा 3D) अवयवों, दोनों पर लागू होगी।

3 यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि दृढता आव्यूह व्युत्पन्न करने की पूर्व-प्रस्तुत विधि ने यथार्थ हल दिया था, किंतु उसका सातत्यक के लिए व्यापकीकरण नहीं किया जा सकता (2D/3D अवयव)। दूसरी ओर, यहाँ प्रस्तुत विधि एक सन्निकट विधि है, जो संयोगवश एकविमीय आनमनी अवयवों के लिए यथार्थ दृढता आव्यूह देती है। सन्निकट होने पर भी, पर्याप्त अवयव प्रयुक्त किए जाने पर यह तथाकथित परिमित अवयव विधि उत्कृष्ट परिणाम देगी।

50.2.2 विकृति–विस्थापन संबंध

4 किसी अवयव के भीतर किसी भी बिंदु पर विस्थापन u को आकार फलनों $\mathbf{N}$ और आसंधीय विस्थापनों $\overline{\mathbf{u}}$ के पदों में इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\mathbf{u}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{u}}$$

5 तब विकृति को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(x)\overline{\mathbf{u}} \tag{50.1}$$

जहाँ $\mathbf{B}$ वह आव्यूह है जो आसंधीय विस्थापनों को विकृति क्षेत्र से संबद्ध करता है और स्पष्टतः $\mathbf{N}$ के अवकलजों के पदों में व्यक्त होता है।

50.2.2.1 अक्षीय सदस्य

6 समीकरण 49.3 में व्युत्पन्न आकार फलनों का उपयोग करने पर समीकरण 50.1 देता है

$$u(x) = \underbrace{\lfloor \underbrace{(1-\frac{x}{L})}_{N_1} \quad \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2} \rfloor}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{xx} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\left\lfloor \underbrace{-\frac{1}{L}}_{\frac{\partial N_1}{\partial x}} \quad \underbrace{\frac{1}{L}}_{\frac{\partial N_2}{\partial x}} \right\rfloor}_{\mathbf{B}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

50.2.2.2 आनमनी सदस्य

[7] समीकरण 49.11 में पूर्वतः व्युत्पन्न आनमनी अवयवों के आकार फलनों का उपयोग करने पर

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{y}{\rho} = y\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = y\frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}x^2}\overline{\mathbf{v}} \\ &= \underbrace{y\left[\underbrace{\frac{6}{L^2}(2\xi-1)}_{\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}} \quad \underbrace{-\frac{2}{L}(3\xi-2)}_{\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}} \quad \underbrace{\frac{6}{L^2}(-2\xi+1)}_{\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2}} \quad \underbrace{-\frac{2}{L}(3\xi-1)}_{\frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2}}\right]}_{\mathbf{B}} \underbrace{\left\{\begin{matrix}\overline{v}_1\\ \overline{\theta}_1\\ \overline{v}_2\\ \overline{\theta}_2\end{matrix}\right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}\end{aligned} \tag{50.2}$$

50.2.3 आभासी विस्थापन और विकृतियाँ

[8] आभासी विस्थापन के सिद्धांत के अनुप्रयोग को ध्यान में रखते हुए, हम आभासी विस्थापन और विकृति के सदिशों को आसंधीय विस्थापनों और आकार फलनों के पदों में परिभाषित करते हैं:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u}(x) &= \mathbf{N}(x)\delta\overline{\mathbf{u}} \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \mathbf{B}(x)\delta\overline{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

50.2.4 अवयव दृढता आव्यूह सूत्रीकरण

[9] अब आभासी विस्थापन का सिद्धांत लागू करते हुए कुछ ज्ञात संबंधों को पुनः लिखें (आव्यूहों के संबंध में सावधानी अपेक्षित है):

$$\delta U = \delta W \tag{50.3}$$

$$\delta U = \int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega \tag{50.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \tag{50.5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \tag{50.6}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\overline{\mathbf{u}}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \tag{50.7}$$

समीकरणों 50.3, 50.4, 50.5, 50.7 और 50.6 को संयोजित करने पर आंतरिक आभासी विकृति ऊर्जा निम्न प्रकार प्राप्त होती है:

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_\Omega \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T}_{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} \underbrace{\mathbf{D}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}}_{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T}_{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} \underbrace{\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0}_{\boldsymbol{\sigma}^0}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \delta\overline{\mathbf{u}}\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\Omega\overline{\mathbf{u}} - \delta\overline{\mathbf{u}}\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{50.8}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

10 इसी क्रम में आभासी बाह्य कार्य निम्न द्वारा दिया जाता है:

$$\delta W = \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}}_{\text{Virt. Nodal Displ.}} \underbrace{\overline{\mathbf{F}}}_{\text{Nodal Force}} + \int_l \delta\mathbf{u} q(x)\mathrm{d}x$$

11 इस समीकरण को $\{\delta\mathbf{u}\} = \mathbf{N}\{\delta\overline{\mathbf{u}}\}$ के साथ संयोजित करने पर मिलता है:

$$\delta W = \delta\overline{\mathbf{u}}\overline{\mathbf{F}} + \delta\overline{\mathbf{u}}\int_0^l \mathbf{N}^T\, q(x)\,\mathrm{d} \tag{50.9}$$

12 आंतरिक विकृति ऊर्जा के समीकरण 50.8 को बाह्य कार्य के समीकरण 50.9 के बराबर रखने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}} - \delta\overline{\mathbf{u}}\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathrm{d}\Omega}_{\overline{\mathbf{F}}^0}}_{\delta U} = \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\overline{\mathbf{F}} + \delta\overline{\mathbf{u}}\underbrace{\int_0^l \mathbf{N}^T\, q(x)\,\mathrm{d}x}_{\overline{\mathbf{F}}^e}}_{\delta W} \tag{50.10}$$

अथवा

$$\mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{F}}^o = \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^e \tag{50.11}$$

13 $\delta\overline{\mathbf{u}}$ पद को निरस्त करने पर यह वही साम्य समीकरण है जो पहले लिखा गया था। यह (अज्ञात) आसंधीय विस्थापन $\overline{\mathbf{u}}$, संरचना के दृढता आव्यूह $\mathbf{k}$, बाह्य आसंधीय बल सदिश $\overline{\mathbf{F}}$, वितरित अवयव बल $\overline{\mathbf{F}}^e$ और प्रारंभिक विस्थापन के सदिश को परस्पर संबद्ध करता है।

14 इस संबंध से हम निम्न परिभाषाएँ देते हैं:

परिभाषा 50.1: दृढता आव्यूह और अवयव बल

अवयव दृढता आव्यूह:

$$\mathbf{k} = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega \tag{50.12}$$

अवयव प्रारंभिक बल सदिश:

$$\overline{\mathbf{F}}^0 = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathrm{d}\Omega \tag{50.13}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवयव तुल्य भार सदिश:

$$\overline{\mathbf{F}}^e = \int_0^L \mathbf{N}\, q(x)\, \mathrm{d}x \tag{50.14}$$

15 सामान्य साम्य समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\underbrace{\mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{F}}^0}_{F_{\text{int}}} - \underbrace{\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^e}_{F_{\text{ext}}} = 0$$

यह आभासी कार्य के सिद्धांत द्वारा परिभाषित परिवर्तनक से संबद्ध विविकृतीकृत ऑयलर समीकरण (साम्य समीकरण) है।

50.2.5 प्रतिबल पुनर्प्राप्ति

16 पूर्ववर्ती अनुभाग में हमने एक सामान्य संबंध व्युत्पन्न किया, जिसमें आसंधीय विस्थापन प्राथमिक अज्ञात हैं; अब हम उन आंतरिक (सामान्यीकृत) प्रतिबलों को निर्धारित करना चाहते हैं जिनकी अभिकल्प में प्रायः आवश्यकता होती है। स्मरण रहे कि:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

आसंधीय विस्थापन का सदिश $\overline{\mathbf{u}}$ ज्ञात होने पर ये दोनों समीकरण देंगे:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}$$

हम देखते हैं कि द्वितीयक चर (विकृति और प्रतिबल) प्राथमिक चरों (विस्थापन) के अवकलज हैं; अतः वे सदैव समान परिशुद्धता से निर्धारित नहीं हो सकते।

50.3 अनुप्रयोग

50.3.1 कैंची अवयव

17 समीकरण 49.3 में व्युत्पन्न कैंची अवयव के आकार फलन हैं

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

18 संगत विकृति–विस्थापन संबंध $\mathbf{B}$ निम्न द्वारा दिया जाता है:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}x}\\ &= \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{\mathrm{d}x} & \frac{dN_2}{\mathrm{d}x}\end{bmatrix}\\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\end{aligned}$$

कैंची अवयव के लिए संघटक आव्यूह $\mathbf{D}$ अदिश E में अपचयित हो जाता है; अतः समीकरण 50.12 में प्रतिस्थापित करने पर, जहाँ $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}A\mathrm{d}x$: $\mathbf{k} = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega$ किंतु $\mathrm{d}\Omega = A\mathrm{d}x$ है और नियत अनुप्रस्थ-काट क्षेत्रफल वाले अवयव के लिए हमें प्राप्त होता है:

$$\mathbf{k} = A\int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L}\end{Bmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}\mathrm{d}x = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

50.3.2 आनमनी अवयव

19 धरन अवयव के लिए आकार फलन समीकरण 49.11 में और $\mathbf{B}$ आव्यूह समीकरण 50.2 में व्युत्पन्न किए गए थे; समीकरण 50.12 में प्रतिस्थापन करने पर:

$$\mathbf{k} = \int_0^L\int_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, y^2\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}x$$

$\int_A y^2\,\mathrm{d}A = I_z$ को ध्यान में रखते हुए समीकरण 50.12 निम्न रूप में अपचयित होता है

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}I_z\,\mathrm{d}x$$

इस सरल स्थिति में हमारे पास $\mathbf{D} = E$ है; अतः:

$$\mathbf{k} = EI_z\int_0^l \mathbf{B}^T\mathbf{B}\,\mathrm{d}x$$

20 समाकलन चर के $\mathrm{d}x$ से $\mathrm{d}\xi$ में परिवर्तन को ध्यान में रखते हुए हमें प्राप्त होता है

$$\mathbf{k} = EI_z\int_0^1 \begin{Bmatrix} \frac{6}{L^2}(2\xi-1) \\ -\frac{2}{L}(3\xi-2) \\ \frac{6}{L^2}(-2\xi+1) \\ -\frac{2}{L}(3\xi-1)\end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2}(2\xi-1) & -\frac{2}{L}(3\xi-2) & \frac{6}{L^2}(-2\xi+1) & -\frac{2}{L}(3\xi-1)\end{bmatrix} \underbrace{L\mathrm{d}\xi}_{\mathrm{d}x}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा

$$\mathbf{k} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overline{v}_1 & \overline{\theta}_1 & \overline{v}_2 & \overline{\theta}_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

जो वास्तव में समीकरण 41.1 में पूर्वतः व्युत्पन्न आव्यूह के समान है।

21 वस्तुतः, चार अध्यायों (अध्याय 47 से आरंभ होकर इस अध्याय 50 तक) के पश्चात अब हम इस आव्यूह को ऐसे सामान्यीकृत उपागम से व्युत्पन्न कर सकते हैं जिसे किसी भी प्रकार के परिमित अवयव पर लागू किया जा सकता है। आगामी अध्याय में इसी उपागम का उपयोग समप्राचलीय अवयवों के दृढता आव्यूह को व्युत्पन्न करने के लिए किया जाएगा।

50.4 सामान्य अवयव अपेक्षाएँ

22 किसी परिमित अवयव (रेले–रिट्ज सूत्रीकरण में केवल एक सन्निकट विस्थापन क्षेत्र) को दो मूलभूत *अपेक्षाएँ* पूरी करनी चाहिए

पूर्णता: परिमित अवयव विविक्तीकरण को *कम-से-कम* नियत विस्थापन और नियत विकृति (अथवा तापमान और तापमान प्रवणता) समाहित करनी चाहिए। द्विविमीय समस्याओं में निम्न को सम्मिलित करके यह प्राप्त किया जाता है

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + \text{ possibly additional terms}$$

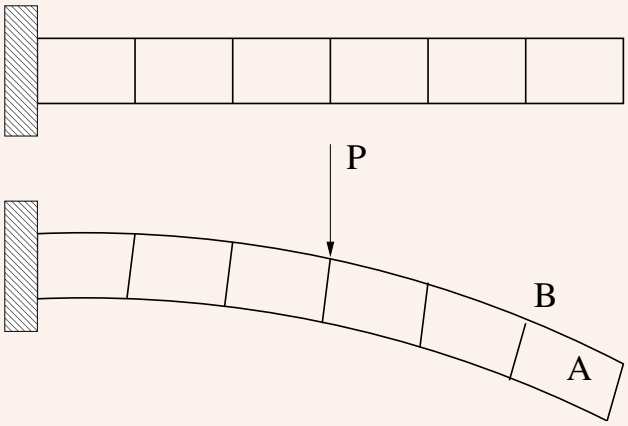
सुसंगतता अथवा अनुरूपता: अवयव सीमाओं पर क्षेत्र का सन्निकटन सतत होना चाहिए (C^0 अथवा C^1 सातत्य)। अधिकांश परिमित अवयव अनुरूप होते हैं, किंतु कुछ नहीं होते।

23 उदाहरणार्थ, चित्र 50.1 के संदर्भ में, अवयव A को आंतरिक विकृतियों/प्रतिबलों के बिना दृढ-पिंड गति करने में सक्षम होना चाहिए और आसंधि B पर विस्थापन का सातत्य होना चाहिए (किंतु इस अवयव के लिए ढाल का नहीं)।

24 यदि ये दोनों अपेक्षाएँ पूरी होती हैं, तो *अभिसरण* सुनिश्चित होता है। परिमित अवयव विधि में सन्निकट हल प्राप्त किए जाते हैं और जितने अधिक अवयव प्रयुक्त किए जाते हैं, सन्निकट हल उतना ही अधिक परिशुद्ध होता है। सीमा में, अनंततः सूक्ष्म अवयवों के लिए हल का यथार्थ हल के अनंततः निकट होना आवश्यक है। अतः पूर्णता और सुसंगतता की अपेक्षाएँ पूरी होने पर अभिसरण सुनिश्चित होता है।

25 *लैक्स तुल्यता प्रमेय*:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 50.1: पूर्णता और सुसंगतता

परिभाषा 50.2: अभिसरण निकष

अभिसरण निकष=पूर्णता+ सुसंगतता अपेक्षाएँ

26 दो अनिवार्य अपेक्षाएँ:

पैच परीक्षण: पूर्णता का आकलन पैच परीक्षण द्वारा किया जा सकता है, जिसकी चर्चा आगे की जाएगी।

शून्य विकृति ऊर्जा: संरचनात्मक समस्याओं में अवयव को दृढ-पिंड गति के अधीन करने पर विकृति ऊर्जा शून्य होनी चाहिए। स्मरण रहे कि दृढता आव्यूह सूत्रीकरण में आव्यूह एकल होता है, क्योंकि वह न केवल बल–विस्थापन संबंधों को बल्कि साम्य समीकरणों को भी अंतर्निहित करता है। इनमें से प्रत्येक समीकरण के अनुरूप एक दृढ-पिंड विधा होती है, जिसे अभिलक्षणिक मान विश्लेषण द्वारा पहचाना जा सकता है (इस पर आगे अधिक चर्चा होगी)।

50.5 विविक्तीकरण त्रुटि और अभिसरण दर

27 अवयव का आकार h शून्य की ओर अग्रसर होने की सीमा में सन्निकटन यथार्थ हल देगा।

28 कुछ स्थितियों में, यदि अवयव में प्रयुक्त बहुपदीय प्रसार सही हल को यथार्थतः निरूपित कर सकता है, तो सीमित संख्या में अवयवों (यहाँ तक कि केवल एक) से भी यथार्थ हल प्राप्त हो जाता है (जैसे शुद्ध अक्षीय भार के अधीन प्लेट में प्रयुक्त कैंची, धरन अवयव और समतल प्रतिबल अवयव)।

29 किसी भी आसंधि i के निकट यथार्थ हल को सदैव बहुपद के रूप में प्रसारित किया जा सकता है

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \ldots$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यदि आकार h के किसी अवयव में घात p का बहुपद प्रयुक्त किया जाता है, तो उस घात तक टेलर श्रेणी प्रसार समाहित किया जा सकता है और त्रुटि $O(h^{p+1})$ की कोटि की होती है।

30 अतः किसी रैखिक अवयव के लिए *अभिसरण* दर $O(h^2)$ कोटि की होती है, अर्थात जाल को आधा करने पर विस्थापन की त्रुटि मूल त्रुटि की 1/4 रह जाती है।

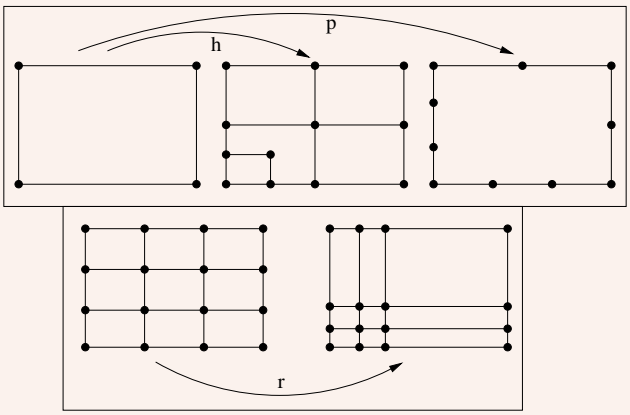
31 समान तर्क से दिखाया जा सकता है कि विस्थापन के mवें अवकलजों से दी गई विकृतियाँ (अथवा प्रतिबल) $O(h^{p+1-m})$ त्रुटि के साथ अभिसरित होनी चाहिए और विकृति ऊर्जा (जो प्रतिबलों के वर्ग से दी जाती है) की त्रुटि $O(h^{2(p+1-m)})$ होगी।

32 उपर्युक्त तर्कों से, अभिसरण कोटि का ज्ञान हलों को "सही" मान तक बहिर्वेशित करने में सहायक हो सकता है। उदाहरणार्थ, यदि विस्थापन $O(h^2)$ पर अभिसरित होता है और हमारे पास दो सन्निकट हल u_1 और u_2 हैं, जो आकार h तथा $h/2$ के जालों से प्राप्त हुए हैं, तो हम लिख सकते हैं

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^2)}{O(h/2)^2} = 4$$

जहाँ u बहिर्वेशित मान है।

33 यथार्थ हल की ओर अभिसरण को चित्र 50.2 में दर्शाई विधियों से त्वरित किया जा सकता है।



चित्र 50.2: h, p और r अभिसरण

- **h** अवयवों का आकार घटाना (अथवा जाल परिष्करण)।
- **p** बहुपद की कोटि बढाना (अवयवों की संख्या समान, किंतु आसंधियों/स्वातंत्र्य-कोटियों की संख्या अधिक)।
- **r** जाल की संस्थिति बदले बिना परिमित अवयव जाल की आसंधियों को पुनःस्थित करना।

त्वरण का तीसरा रूप तथाकथित **r** परिष्करण है, जिसमें आसंधियों/अवयवों की संख्या समान रखी जाती है, किंतु उच्च प्रतिबल प्रवणता वाले क्षेत्रों में घनत्व बढाने के लिए जाल को स्थानांतरित किया जाता है।

34 उपर्युक्त अभिसरण प्रक्रियाओं को ऐसे प्रोग्राम के अंतर्गत त्वरित किया जा सकता है जो *अनुकूली पुनर्जालन* तकनीकों को समाहित कर सके।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

35 अंततः, अतिरिक्त त्रुटियाँ कंप्यूटर के भीतर पूर्णांकन से उत्पन्न हो सकती हैं।

50.6 न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा-आधारित हलों का निम्न-सीमा स्वरूप

36 न्यूनतम कुल स्थितिज ऊर्जा के सिद्धांत से व्युत्पन्न संख्यात्मक हल एक *निम्न-सीमा* हल होता है, क्योंकि उसकी विकृति ऊर्जा यथार्थ मान (अर्थात अनंत संख्या में अवयवों से प्राप्त मान) से छोटी होती है।

37 इसे सरलता से दिखाया जा सकता है यदि हम विस्थापन u_i पर विचार करें, जो ऐसे भार P_i से उत्पन्न होता है जिसे शून्य से उसके निर्धारित मान तक बढाया जाता है। किया गया कार्य $\frac{P_i u_i}{2}$ है और आंतरिक विकृति ऊर्जा U के बराबर होना चाहिए। दूसरी ओर, प्रयुक्त भार का विभव $P_i u_i$ है और यथार्थ स्थितिज ऊर्जा है

$$\Pi_{\text{exact}} = \frac{P_i u_i^{\text{exact}}}{2} - P_i u_i^{\text{exact}} = -\frac{P_i u_i^{\text{exact}}}{2}$$

इसी प्रकार, स्थितिज ऊर्जा का सन्निकट मान है

$$\Pi_{\text{approx}} = -\frac{P_i u_i^{\text{approx}}}{2}$$

हम जानते हैं कि Π का सन्निकटन यथार्थ मान से *बीजगणितीय* रूप से अधिक है (क्योंकि यथार्थ मान न्यूनतम है); अतः

$$\underbrace{-\frac{P_i u_{i_{\text{exact}}}}{2}}_{\Pi_{\text{exact}}} < \underbrace{-\frac{P_i u_{i_{\text{approx}}}}{2}}_{\Pi_{\text{approx}}}$$

अथवा

$$u_i^{\text{approx}} < u_i^{\text{exact}} \tag{50.15}$$

अर्थात दूसरे शब्दों में, हल *अत्यधिक* दृढ है।

38 रेले–रिट्ज विधि से इसकी समानता ध्यान देने योग्य है; हमारे बहुपदीय सन्निकटन में पर्याप्त पदों की कमी ने वहाँ भी दृढ हल दिया था।

50.7 हल में साम्य और सुसंगतता

39 किसी *यथार्थ* हल में प्रत्येक अवकल अवयव पर साम्य और सुसंगतता विद्यमान रहते हैं।

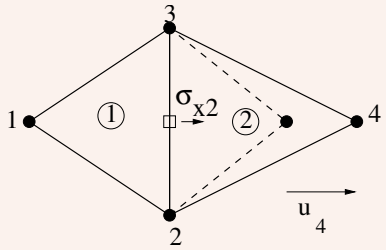
40 परिमित अवयव विविक्तीकरण में यह आवश्यक रूप से सत्य नहीं है:

आसंधीय बलों का साम्य: ये परिभाषानुसार आसंधियों पर ($\mathbf{k}^e \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} = 0$) स्वतः संतुष्ट होते हैं।

आसंधियों पर सुसंगतता: परस्पर जुडे अवयवों के संयोजक आसंधि पर (संगत स्वातंत्र्य-कोटियों के अनुदिश) समान विस्थापन होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

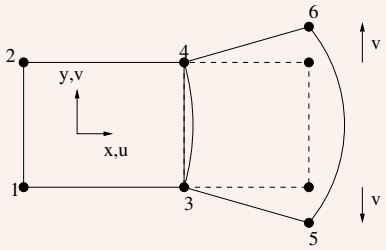
प्रतिबल का अंतरावयवीय सातत्य: यह सामान्यतः संतुष्ट नहीं होता; अर्थात अवयवों के पार साम्य आवश्यक रूप से विद्यमान नहीं रहता। उदाहरणार्थ चित्र 50.3 पर विचार करें। यदि केवल आसंधि



चित्र 50.3: प्रतिबल का अंतरावयवीय सातत्य

4 विस्थापित होती है (अन्य सभी स्थिर रहते हैं), तो अवयव सीमा 2-3 के पार σ_{xx} में असातत्य होगा।

विस्थापनों की अंतरावयवीय सुसंगतता: अधिकांश अवयव इस अपेक्षा को संतुष्ट करते हैं। यदि कोई अवयव इसे संतुष्ट नहीं करता, तो उसे *असुसंगत* अथवा *अननुरूप* कहा जाता है, चित्र 50.4।

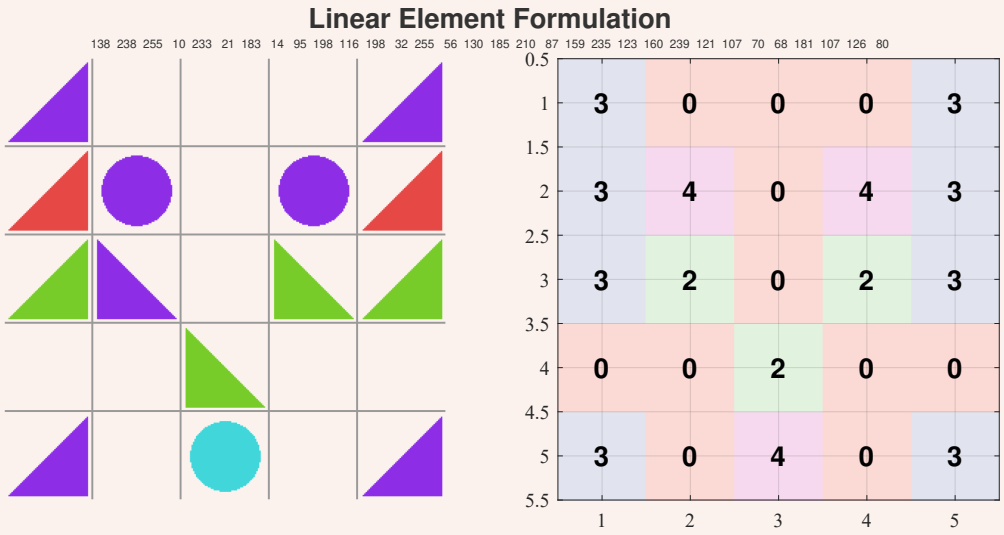


चित्र 50.4: विकृति का अंतरावयवीय सातत्य

अवयवों के भीतर साम्य: यह सदैव संतुष्ट नहीं होता। सामान्यतः प्रत्येक बिंदु पर साम्य की संतुष्टि के लिए स्वातंत्र्य-कोटियों के बीच ऐसे संबंध अपेक्षित होते हैं जो आवश्यक रूप से $\mathbf{k}^e\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{f}} = 0$ से प्राप्त नहीं होते।

अवयव के भीतर विस्थापन सुसंगतता: यह संतुष्ट होती है, क्योंकि हम केवल यह अपेक्षा करते हैं कि अवयव विस्थापन सतत और एकल-मूल्यवान हो।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अध्याय-विशिष्ट आइडेंटिकॉन, chapter H

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

51 समप्राचलीय अवयव

सारांश

यद्यपि यह पुस्तक मुख्यतः 1D अवयवों पर केंद्रित है, परिमित अवयव भाग का अंतर्निहित सिद्धांत सातत्यक अवयवों पर भी लागू होता है। एक लोकप्रिय सातत्यक अवयव समप्राचलीय सूत्रीकरण पर आधारित है। समप्राचलीय अवयव विस्थापन और ज्यामिति, दोनों के लिए समान आकार फलनों का उपयोग करते हैं। इससे अवयव में वक्र कोर संभव होते हैं और संरचना के जालन में अधिक नम्यता मिलती है। आकार फलन पूर्ववर्ती अध्याय में व्युत्पन्न किए गए थे। इस अध्याय में हम इस प्रकार के अवयव, विशेषतः Q4 अवयव, का दृढता आव्यूह कठोरता से व्युत्पन्न करेंगे। अन्य अवयवों के लिए समान प्रक्रिया अपनाई जा सकती है। यद्यपि सूत्रीकरण आरंभ में श्रमसाध्य और भ्रमपूर्ण प्रतीत हो सकता है, यह सरल कंप्यूटर प्रोग्राम कार्यान्वयन की ओर ले जाता है और द्विविमीय तथा त्रिविमीय प्रतिबल विश्लेषण के साथ-साथ असंरचनात्मक समस्याओं पर भी लागू होता है। अवयव के दृढता आव्यूह का मूल्यांकन संख्यात्मक समाकलन द्वारा किया जाएगा। अतः इस अध्याय का दूसरा भाग संख्यात्मक समाकलन का विस्तार से विवेचन करेगा।

51.1 परिचय 1753
51.2 अवयव सूत्रीकरण 1755
51.2.1 दंड अवयव 1755
51.2.2 चतुर्भुज (q4); विस्तृत सूत्रीकरण 1757
51.2.3 त्रिकोणीय अवयव 1761
51.2.4 उदाहरण 51.1: Jacobian operators 1764
51.3 संख्यात्मक समाकलन 1765
51.3.1 न्यूटन–कोट्स 1766
51.3.2 गाउस–लेजांद्र चतुर्थांश विधि . 1768
51.3.3 आयताकार और प्रिज्मीय क्षेत्र 1771
51.3.4 त्रिकोणीय क्षेत्र 1771
51.4 प्रतिबल पुनर्प्राप्ति; आसंधीय प्रतिबल . 1771
51.5 आसंधीय तुल्य भार 1774
51.5.1 गुरुत्व भार 1775
51.5.2 कर्षण भार 1776
51.5.3 प्रारंभिक विकृतियाँ/प्रतिबल; तापीय भार 1777
51.5.4 समाकलन की कोटि 1778
51.6 परजीवी अपरूपण/असुसंगत अवयव 1781
51.6.1 Q4, समस्या 1781
51.6.2 Q6, समाधान 1782
51.6.3 Qm6, अतिरिक्त सुधार 1782
51.7 घूर्णी स्वातंत्र्य-कोटियाँ 1783

51.1 परिचय

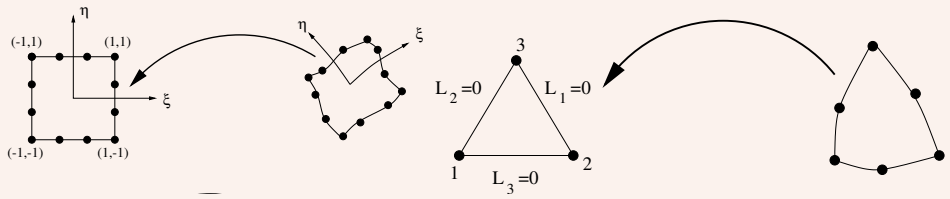
1 हमने पूर्वतः सरल परिमित अवयवों का परीक्षण किया है; इस अध्याय में हम उन सरल अवयवों को अधिक स्वेच्छ आकार वाले अन्य अवयवों में विकृत करेंगे।

2 तदनुसार, कार्तीय x, y, z समष्टि में आलेखित किए जाने पर प्राकृतिक निर्देशांक नए वक्ररेखीय समुच्चयों में विकृत होंगे, चित्र 51.1।

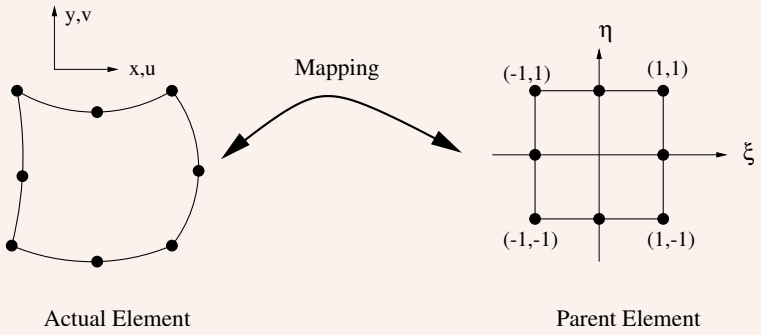
3 समप्राचलीय सूत्रीकरण में विस्थापन प्राकृतिक निर्देशांकों के पदों में व्यक्त किए जाते हैं, किंतु उनका अवकलन कार्तीय निर्देशांकों x, y, z के सापेक्ष करना आवश्यक है। यह रूपांतरण आव्यूह $\mathbf{J}$ द्वारा किया जाता है और समाकलन अब विश्लेषणात्मक रूप से नहीं, बल्कि संख्यात्मक रूप से करना पड़ता है।

4 प्राकृतिक निर्देशांकों का परिसर -1 से +1 तक होता है, चित्र 51.2।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 51.1: कुछ अवयवों का द्विविमीय प्रतिचित्रण



चित्र 51.2: वास्तविक और जनक अवयव

5 अवयव के भीतर किसी भी बिंदु पर विस्थापनों को ज्ञात आसंधीय विस्थापनों और आकार फलनों के पदों में लिखा जा सकता है

$$
\begin{aligned}
u &= N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}_e \\
v &= N_1\overline{v}_1 + N_2\overline{v}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{v}_1\\ \overline{v}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{v}}_e \\
w &= N_1\overline{w}_1 + N_2\overline{w}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{w}_1\\ \overline{w}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{w}}_e
\end{aligned}
$$

अथवा

$$
\mathbf{u} = \lfloor\ u \quad v \quad w\ \rfloor^T = [\mathbf{N}]\overline{\mathbf{u}}_e
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

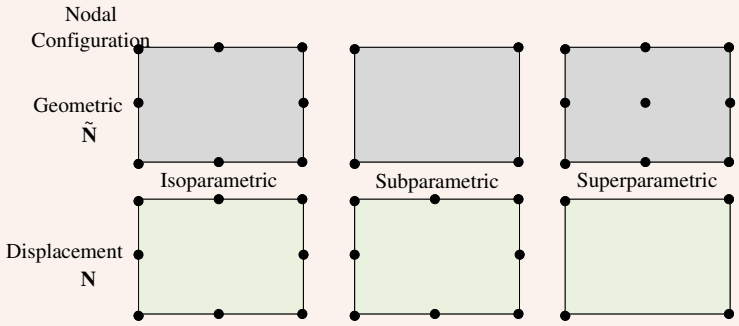
[6] जब अवयव भी विकृत हों, तब किसी भी बिंदु के निर्देशांक **भी** आसंधीय निर्देशांकों के पदों में व्यक्त किए जा सकते हैं

$$
\begin{aligned}
x &= \tilde{N}_1\overline{x}_1 + \tilde{N}_2\overline{x}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{x}}\\
y &= \tilde{N}_1\overline{y}_1 + \tilde{N}_2\overline{y}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{y}_1\\ \overline{y}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{y}}\\
z &= \tilde{N}_1\overline{z}_1 + \tilde{N}_2\overline{z}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{z}_1\\ \overline{z}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

अथवा

$$
c = \lfloor\ x \quad y \quad z\ \rfloor^T = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{c}} \tag{51.1}
$$

[7] आकार फलन आव्यूह $\mathbf{N}$ और $\tilde{\mathbf{N}}$, $\xi, \eta,$ तथा ζ के फलन हैं। अतः तीन संभावित स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं, चित्र 51.3।



चित्र 51.3: सम, अधि और अव-प्राचलीय अवयव

समप्राचलीय: $\mathbf{N}$ और $\tilde{\mathbf{N}}$ समान हैं

अवप्राचलीय: $\mathbf{N}$ की घात $[\tilde{\mathbf{N}}]$ से अधिक है

अधिप्राचलीय: $\mathbf{N}$ की घात $[\tilde{\mathbf{N}}]$ से कम है

[8] अवप्राचलीय और अधिप्राचलीय अवयवों का उपयोग अत्यंत विरल है।

51.2 अवयव सूत्रीकरण

51.2.1 दंड अवयव

[9] आकार फलन §49.2.2.3 में व्युत्पन्न किए गए थे।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

10 विकृति–विस्थापन संबंध $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}_e = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}_e$ द्वारा दिया जाता है और अवकल संकारक $\mathbf{L}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ के बराबर है। इस एकविमीय स्थिति में यह निम्न रूप में अपचयित होता है

$$\varepsilon_x = \frac{du}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}_{L} \lfloor \mathbf{N} \rfloor}_{\mathbf{B}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{array} \right\} \tag{51.2}$$

11 आकार फलन प्राकृतिक निर्देशांकों के पदों में व्यक्त हैं, अतः हम शृंखला नियम का उपयोग करते हैं:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} \tag{51.3}$$

प्रथम पद आकार फलनों, समीकरण 49.8, से सरलता से उपलब्ध हो सकता है, किंतु दूसरा नहीं।

12 यद्यपि $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}$ उपलब्ध नहीं है, उसका व्युत्क्रम $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}$ समीकरण 49.7 से निर्धारित किया जा सकता है, जिसे हम J अथवा **जैकोबियन** से निरूपित करेंगे। जैकोबियन संकारक J वह मापनी गुणक है जो कार्तीय निर्देशांकों को प्राकृतिक निर्देशांकों $\mathrm{d}x = J\mathrm{d}\xi$ से संबद्ध करता है।

$$J(\xi) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lfloor \mathbf{N} \rfloor \left\{ \begin{array}{c} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{array} \right\} = \underbrace{\underbrace{\lfloor \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(2\xi - 1) & \frac{1}{2}(2\xi + 1) & -2\xi \end{array} \rfloor}_{\frac{\mathrm{d}_\mathbf{N}}{\mathrm{d}\xi}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{array} \right\}}_{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}}$$

13 समीकरण 51.3 को हम इस प्रकार पुनः लिख सकते हैं

$$\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}}_{J^{-1}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\xi}$$

और इस प्रकार $\mathbf{B}$ आव्यूह समीकरण 51.2 में प्रतिस्थापन करके प्राप्त होता है

$$\lfloor \mathbf{B}(\xi) \rfloor = \frac{1}{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lfloor \mathbf{N} \rfloor = \frac{1}{J}\lfloor \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(2\xi - 1) & \frac{1}{2}(2\xi + 1) & -2\xi \end{array} \rfloor$$

14 अवकल क्षेत्रफल है

$$d\Omega = A\mathrm{d}x = AJd\xi$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15 प्रतिस्थापन करने पर अंततः समीकरण 50.12 से अवयव दृढता आव्यूह प्राप्त होता है

$$\mathbf{K}_e(\xi) = \int_0^L \mathbf{B}^T(\xi) AE \mathbf{B}(\xi) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T(\xi) AE \mathbf{B}(\xi) J(\xi) d\xi$$

16 हम देखते हैं कि सामान्यतः $\mathbf{B}$ के अंश और हर, दोनों में ξ पद होते हैं; अतः व्यंजक को विश्लेषणात्मक रूप से व्युत्क्रमित नहीं किया जा सकता। इसके अतिरिक्त, समाकलन सीमाएँ अब -1 से +1 तक हैं और आगे हम देखेंगे कि इसका संख्यात्मक समाकलन कैसे किया जाता है।

51.2.2 चतुर्भुज (q4); विस्तृत सूत्रीकरण

17 निर्देशांक और विस्थापन निम्न द्वारा दिए जाते हैं

$$\begin{array}{rclrcl} x &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{x}_i; & y &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{y}_i \\ u &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{u}_i; & v &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{v}_i \end{array} \tag{51.4}$$

जहाँ आकार फलन समीकरण 49.12 में व्युत्पन्न किए गए थे।

18 विकृति–विस्थापन संबंध निम्न द्वारा दिया जाता है

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}}_{\mathbf{u}} \tag{51.5}$$

किंतु विस्थापन समीकरण 51.4 से प्राप्त किए जा सकते हैं

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) \end{array} \right]}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \hline \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \hline \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \hline \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \tag{51.6}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

19 समीकरण 51.5 और 51.6 को संयोजित करने पर प्राप्त होता है

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \\
\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(\xi,\eta) \\ \varepsilon_{yy}(\xi,\eta) \\ \gamma_{xy}(\xi,\eta) \end{array} \right\} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{L}\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \qquad (51.7) \\
&= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \hline \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \hline \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \hline \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{array} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} \end{array} \right] \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}^{-1}} \qquad (51.8)
\end{aligned}
$$

20 स्थानीय निर्देशांक समुच्चय ξ, η और संगत वैश्विक समुच्चय x, y पर विचार करने पर शृंखला नियम देंगे

$$
\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\} &= \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

यह अंतिम समीकरण $\mathbf{B}$ आव्यूह में जाने वाले सभी अवयवों को प्राप्त करने की कुंजी है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

21 जैकोबियन की परिभाषा का विस्तार करने पर

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta}\end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{array}\right]}_{\mathbf{J}} \left\{\begin{array}{c}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{array}\right\} = \sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{y}_i\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{y}_i\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{array}\right\}$$

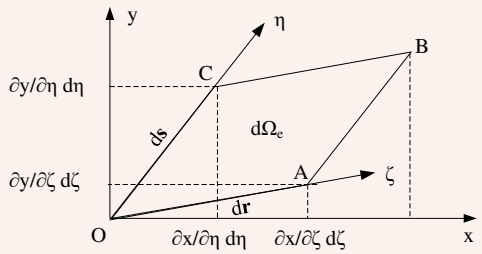
$$= \left[\begin{array}{cccc}\frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta}\end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c}\overline{x}_1 & \overline{y}_1\\ \overline{x}_2 & \overline{y}_2\\ \overline{x}_3 & \overline{y}_3\\ \overline{x}_4 & \overline{y}_4\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{array}\right\} \tag{51.9}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\left[\begin{array}{cccc}-(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta)\\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi)\end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c}\overline{x}_1 & \overline{y}_1\\ \overline{x}_2 & \overline{y}_2\\ \overline{x}_3 & \overline{y}_3\\ \overline{x}_4 & \overline{y}_4\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{array}\right\}}_{\mathbf{J}}$$

22 पुनः जैकोबियन पर लौटते हुए

$$\mathbf{J}^{-1} \overset{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{cc}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x}\\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{array}\right] = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \left[\begin{array}{cc}\frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi}\\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi}\end{array}\right] = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{y}_i & -\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{y}_i\\ -\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\overline{x}_i\end{array}\right]$$

23 कलन से, यदि ξ और η स्वेच्छ वक्ररेखीय निर्देशांक हैं, चित्र 51.4, तब



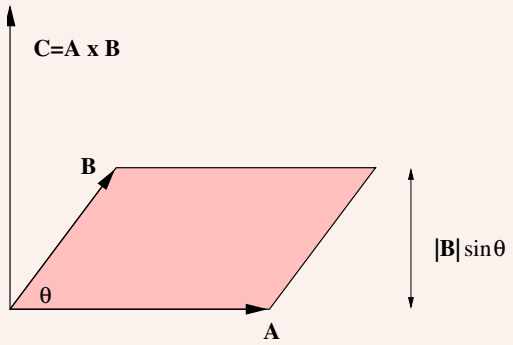
चित्र 51.4: वक्ररेखीय निर्देशांक निकाय में अवकल अवयव

$$d\mathbf{r} = \left\{\begin{array}{c}\frac{\partial x}{\partial \xi}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi}\end{array}\right\} d\xi \quad \text{and} \quad d\mathbf{s} = \left\{\begin{array}{c}\frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{array}\right\} d\eta$$

क्रमशः ξ = नियत और η = नियत रेखाओं के स्पर्शरेखीय दिशा में स्थित सदिश हैं।

24 सदिश बीजगणित से, x-y तल में स्थित दो सदिशों का सदिश गुणनफल, चित्र 51.5, है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 51.5: दो सदिशों का सदिश गुणनफल

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{A}\times\mathbf{B}\\ &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta\mathbf{k}\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & 0\\ B_x & B_y & 0\end{vmatrix} = \underbrace{(A_xB_y - B_xA_y)}_{\text{Area}}\mathbf{k}\\ |\mathbf{C}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta\end{aligned}$$

अतः अवकल क्षेत्रफल $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $d\mathbf{r}d\mathbf{s}$ के सदिश गुणनफल से प्राप्त सदिश की लंबाई के बराबर है और निम्न होता है

$$\mathrm{d}(area) = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}}_{\mathbf{J}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{51.10}$$

[25] अंततः अवयव दृढता आव्यूह निम्न से निर्धारित करें

$$\mathbf{k}_{8\times8} = \int\int \mathbf{B}^T_{8\times3}\mathbf{D}_{3x3}\mathbf{B}_{3\times8}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathbf{k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}t\det\mathbf{J}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

[26] अवयव दृढता आव्यूह के मूल्यांकन में dA सम्मिलित है। यदि हम किसी अवयव के शीर्ष पर लंबाई dr और ds वाले अनंतसूक्ष्म अवयव पर विचार करें, तो उसकी भुजाएँ मूल अवयव की सीमाओं के अनुदिश होती हैं। तब समीकरण 51.10 से

$$dA = \mathrm{d}x.\mathrm{d}y.\sin\theta$$

किंतु समीकरण 51.10 से हमारे पास $dA = \det\mathbf{J}\mathrm{d}\xi.\mathrm{d}\eta$ है; अतः

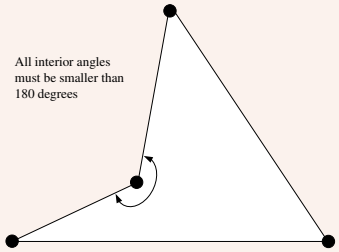
$$\det\mathbf{J} = \frac{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi.\mathrm{d}\eta}\sin\theta$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः हम देखते हैं कि यदि θ छोटा अथवा 180^o के निकट हो, तो $\det \mathbf{J}$ अत्यंत छोटा होगा; यदि कोण 180^o से अधिक हो, तो सारणिक ऋणात्मक होता है (जिसका अर्थ ऋणात्मक दृढता है और जो सामान्यतः परिमित अवयव विश्लेषण में त्रुटि/विराम उत्पन्न करेगा)।

27 सामान्यतः $30^o < \theta < 150^o$ रखने की अनुशंसा की जाती है।

28 जैकोबियन का व्युत्क्रम तब तक विद्यमान रहता है जब तक अवयव अत्यधिक विकृत न हो अथवा स्वयं पर वापस न मुड़े, चित्र 51.6 इन स्थितियों में निर्देशांकों के बीच कोई अद्वितीय संबंध नहीं होता।



चित्र 51.6: संभावित एकल जैकोबियन वाला अवयव

29 सरलता से दिखाया जा सकता है कि समांतर चतुर्भुजों के लिए जैकोबियन नियत होता है, जबकि असमांतर चतुर्भुजों के लिए ऐसा नहीं होता।

30 सामान्यतः $\mathbf{J}$, 2x2 वर्गाकार अवयव के सापेक्ष अवयव-विकृति की मात्रा का सूचक है। कभी यह नियत होता है और कभी अवयव के भीतर परिवर्तित होता है।

51.2.3 त्रिकोणीय अवयव

51.2.3.1 T3 त्रिभुज

31 इस त्रिभुज के आकार फलन §49.2.2.2 में दिए गए हैं।

32 $\mathbf{B}$ आव्यूह निम्न से प्राप्त होता है:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{L}} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{array} \right\} \tag{51.11}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

or

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(L_1,L_2,L_3) \\ \varepsilon_{yy}(L_1,L_2,L_3) \\ \varepsilon_{xy}(L_1,L_2,L_3) \end{array} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{6} \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{LN}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u}}_i \\ \overline{\mathbf{v}}_i \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{cc} \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial x} \ \frac{\partial L_2}{\partial x} \ \frac{\partial L_3}{\partial x} \rfloor [\mathbf{N}_L] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial y} \ \frac{\partial L_2}{\partial y} \ \frac{\partial L_3}{\partial y} \rfloor [\mathbf{N}_L] \\ \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial y} \ \frac{\partial L_2}{\partial y} \ \frac{\partial L_3}{\partial y} \rfloor [\mathbf{N}_L] & \lfloor \frac{\partial L_1}{\partial x} \ \frac{\partial L_2}{\partial x} \ \frac{\partial L_3}{\partial x} \rfloor [\mathbf{N}_L] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{v}} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

जहाँ

$$\begin{aligned}
[\mathbf{N}_L] &= \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial N_1}{\partial L_1} & \frac{\partial N_2}{\partial L_1} & \frac{\partial N_3}{\partial L_1} & \frac{\partial N_4}{\partial L_1} & \frac{\partial N_5}{\partial L_1} & \frac{\partial N_6}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_2} & \frac{\partial N_2}{\partial L_2} & \frac{\partial N_3}{\partial L_2} & \frac{\partial N_4}{\partial L_2} & \frac{\partial N_5}{\partial L_2} & \frac{\partial N_6}{\partial L_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_3} & \frac{\partial N_2}{\partial L_3} & \frac{\partial N_3}{\partial L_3} & \frac{\partial N_4}{\partial L_3} & \frac{\partial N_5}{\partial L_3} & \frac{\partial N_6}{\partial L_3} \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{cccccc} 4L_1-1 & 0 & 0 & 4L_2 & 0 & 4L_3 \\ 0 & 4L_2-1 & 0 & 4L_1 & 4L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 4L_3-1 & 0 & 4L_2 & 4L_1 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

[33] पूर्ववर्ती समीकरण को आगे सरलीकृत किया जा सकता है

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{N}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_y \\ \mathbf{N}_y & \mathbf{N}_x \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{v}} \end{array} \right\}$$

जहाँ

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{N}_x^T | \mathbf{N}_y^T \right] &= \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial L_1}{\partial x}(4L_1-1) & \frac{\partial L_1}{\partial y}(4L_1-1) \\ \frac{\partial L_2}{\partial x}(4L_2-1) & \frac{\partial L_2}{\partial y}(4L_2-1) \\ \frac{\partial L_3}{\partial x}(4L_3-1) & \frac{\partial L_3}{\partial y}(4L_3-1) \\ 4\frac{\partial L_1}{\partial x}L_2 + 4\frac{\partial L_2}{\partial x}L_1 & 4\frac{\partial L_1}{\partial y}L_2 + 4\frac{\partial L_2}{\partial y}L_1 \\ 4\frac{\partial L_2}{\partial x}L_3 + 4\frac{\partial L_3}{\partial x}L_2 & 4\frac{\partial L_2}{\partial y}L_3 + 4\frac{\partial L_3}{\partial y}L_2 \\ 4\frac{\partial L_3}{\partial x}L_1 + 4\frac{\partial L_1}{\partial x}L_3 & 4\frac{\partial L_3}{\partial y}L_1 + 4\frac{\partial L_1}{\partial y}L_3 \end{array} \right] \\
\lfloor \ \overline{\mathbf{u}} \ \ \overline{\mathbf{v}} \ \rfloor &= \lfloor \ \overline{u}_1 \ \ \overline{u}_2 \ \ \overline{u}_3 \ \ \overline{u}_4 \ \ \overline{u}_5 \ \ \overline{u}_6 \ | \ \overline{v}_1 \ \ \overline{v}_2 \ \ \overline{v}_3 \ \ \overline{v}_4 \ \ \overline{v}_5 \ \ \overline{v}_6 \ \rfloor
\end{aligned}$$

[34] तब समीकरण 49.1 का उपयोग करके इस व्यंजक का विश्लेषणात्मक समाकलन किया जाता है। सामान्यतः समप्राचलीय संख्यात्मक समाकलन वरीय है (अनुभाग 51.2.3)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

51.2.3.2 T6 त्रिभुज

35 छह-आसंधीय त्रिभुज के लिए किसी चर ϕ के x और y के सापेक्ष आंशिक अवकलज इस प्रकार व्यक्त किए जा सकते हैं, (Felippa, 2000)

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial x} \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \\ \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right\} \tag{51.12}$$

36 दोनों पक्षों का पक्षांतरण करने पर

$$\lfloor \begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \rfloor \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \lfloor \begin{array}{cc} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \rfloor$$

37 अब हम $\phi \equiv$ को क्रमशः 1, x और y रखते हैं:

$$\left[\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial 1}{\partial x} & \frac{\partial 1}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{array} \right]$$

38 किंतु $\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$ और $\frac{\partial 1}{\partial x} = \frac{\partial 1}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$ हैं, क्योंकि x और y स्वतंत्र निर्देशांक हैं। इसके अतिरिक्त, प्रथम पंक्ति की सभी प्रविष्टियाँ एक नियतांक (T6 अवयव के लिए 3) के बराबर हैं और संगत दक्षिण पक्ष के कारण इस पंक्ति को प्रसामान्यीकृत किया जा सकता है, जिससे इस अवयव का जैकोबियन आव्यूह प्राप्त होता है

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

39 सारणी 49.7 से प्रतिस्थापन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1(4L_1-1)+4x_4L_2+4x_6L_3 & x_2(4L_2-1)+4x_5L_3+4x_4L_1 & x_3(4L_3-1)+4x_6L_1+4x_5L_2 \\ y_1(4L_1-1)+4y_4L_2+4y_6L_3 & y_2(4L_2-1)+4y_5L_3+4y_4L_1 & y_3(4L_3-1)+4y_6L_1+4y_5L_2 \end{array} \right]}_{\mathbf{J}}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

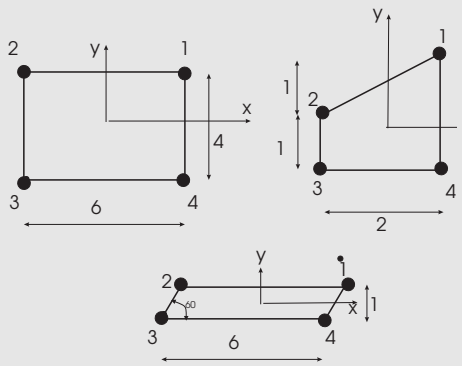
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[40] इसके बाद हम आव्यूह को व्युत्क्रमित करके छह त्रिकोणीय निर्देशांकों के आंशिक अवकलज ज्ञात करते हैं और उन्हें समीकरण 51.12 में प्रतिस्थापित करते हैं; इससे **B** आव्यूह को समीकरण 51.7 में निर्धारित किया जा सकेगा।

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(L_1,L_2,L_3) \\ \varepsilon_{yy}(L_1,L_2,L_3) \\ \gamma_{xy}(L_1,L_2,L_3) \end{array} \right\} = \underbrace{\sum_{i=1}^{6} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{LN}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

51.2.4 उदाहरण 51.1: Jacobian operators

इससे लिया गया उदाहरण
हम संलग्न 2-विमीय अवयवों के लिए जैकोबियन संकारक **J** निर्धारित करना चाहते हैं।
निर्देशांक समीकरण 51.1, आकार फलन समीकरण 49.12 और जैकोबियन समीकरण 51.9 द्वारा दिए जाते हैं।



अवयव 1:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\overline{x}_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\overline{x}_4 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\overline{x}_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\overline{x}_2 \\ &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-3) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(3) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(3) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-3) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\overline{y}_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\overline{y}_4 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\overline{y}_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\overline{y}_2 \\ &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(2) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(2) \\ [\mathbf{J}] &= \left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

हम देखते हैं कि $A = 24 = \det[J](2\times 2) = 6\times 4$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवयव 2:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-(3+1/(2\sqrt{3}))) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(3-1/2\sqrt{3})) \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(3+1/2\sqrt{3})) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-(3-1/2\sqrt{3}))) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-2) \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(2) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(2) \\ [\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

अवयव 3:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1) + \frac{1}{4}(1-\xi)(-1) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-3/4) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-3/4) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(5/4) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1/4) \\ [\mathbf{J}] &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & (1+\eta) \\ 0 & (3+\xi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

51.3 संख्यात्मक समाकलन

41 संख्यात्मक समाकलन की समझ समप्राचलीय अवयव-परिवार के उचित समाकलन के लिए ही अनिवार्य नहीं, बल्कि भारित अवशेष विधियों (अध्याय 52) को समझने में भी सहायक है।

42 समप्राचलीय अवयव सूत्रीकरण का एक निर्णायक पक्ष संख्यात्मक समाकलन है, जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\int \mathbf{F}(\xi)\mathrm{d}\xi \quad \text{or} \quad \int\int \mathbf{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

व्यवहार में हम निम्न का उपयोग करके समाकलन संख्यात्मक रूप से करते हैं

$$\int \mathbf{F}(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_i \mathbf{W}_i\mathbf{F}(\xi_i) + \mathbf{R}_n \quad \text{or} \quad \int\int \mathbf{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \sum_i\sum_j \mathbf{W}_{ij}\mathbf{F}(\xi_i,\eta_j) + \mathbf{R}_n$$

जहाँ योग सभी i और j पर विस्तृत हैं, $\mathbf{W}_i$ और $\mathbf{W}_{ij}$ भारण गुणक हैं, तथा $\mathbf{F}(\xi_i)$ और $\mathbf{F}(\xi_i,\eta_j)$ वे आव्यूह हैं जिनका मूल्यांकन उनके तर्कों में निर्दिष्ट बिंदुओं पर किया गया है।

43 आव्यूह $\mathbf{R}_n$ त्रुटि आव्यूह हैं, जिनकी सामान्यतः गणना नहीं की जाती।

44 जैसा ऊपर दिखाया गया है, परिमित अवयव दृढता आव्यूह के मूल्यांकन के लिए $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T.\mathbf{D}.\mathbf{B}$ है और प्रत्येक अवयव का पृथक समाकलन किया जाता है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

45 $\int_a^b F(\xi)d\xi$ का समाकलन मूलतः बहुपद $P(\xi)$ को $F(\xi)$ के दिए गए मानों से गुजारने और फिर सन्निकटन के रूप में $\int_a^b P(\xi)d\xi$ का उपयोग करने पर आधारित है।

$$\int_a^b F(\xi)d\xi \approx \int_a^b P(\xi)d\xi$$

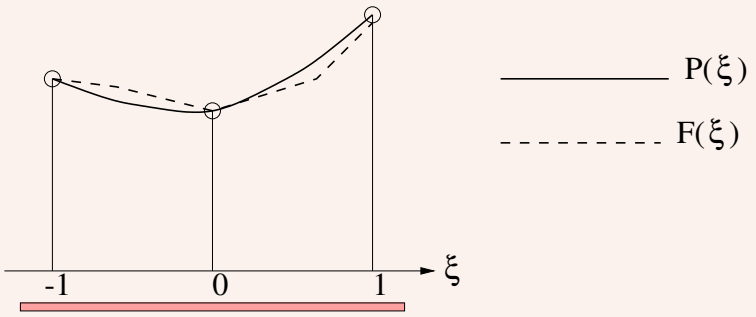
46 $P(\xi) = F(\xi)$ का n बिंदुओं पर उपयोग करते हुए और लैग्रांजीय अंतर्वेशन फलनों के गुण स्मरण करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} P(\xi) &= l_1(\xi)F(\xi_1) + l_2(\xi)F(\xi_2) + \cdots + l_n(\xi)F(\xi_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} l_i(\xi)F(\xi_i) \end{aligned}$$

और ध्यान दें कि $\xi = \xi_i$ पर $l_i = 1$ है, जबकि अन्य सभी $l_i = 0$ हैं।

51.3.1 न्यूटन–कोट्स

47 न्यूटन–कोट्स समाकलन में प्रतिचयन बिंदुओं को **समान दूरी पर** माना जाता है, चित्र 51.7, अतः हम



चित्र 51.7: न्यूटन–कोट्स संख्यात्मक समाकलन

परिभाषित करते हैं

$$\int_a^b P(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} l_i(\xi)F(\xi_i)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi F(\xi_i) \tag{51.13}$$

or

$$\begin{array}{r|rcl} \text{Approximation} & \int_a^b P(\xi)\mathrm{d}\xi & = & \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i) \\ \text{Weights} & W_i^{(n)} & = & \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi = (b-a)C_i^{(n)} \end{array}$$

जहाँ $C_i^{(n)}$, न्यूटन–कोट्स *चतुर्थांश विधि* के "भार" हैं, जो समान दूरी पर स्थित n प्रतिचयन बिंदुओं वाले संख्यात्मक समाकलन के लिए प्रयुक्त होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 51.1: न्यूटन–कोट्स चतुर्थांश सूत्रों के भार

n	$C_0^{(n)}$	$C_1^{(n)}$	$C_2^{(n)}$	$C_3^{(n)}$	$C_4^{(n)}$	त्रुटि
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$10^{-1}(b-a)^3F^{II}(\xi)$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			$10^{-3}(b-a)^5F^{IV}(\xi)$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$10^{-3}(b-a)^5F^{IV}(\xi)$
5	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	$10^{-6}(b-a)^7F^{VI}(\xi)$

[48] न्यूटन–कोट्स नियतांक और संगत शेष सारणी 51.1 में दर्शाए गए हैं, (Bathe, 1996)

[49] दिखाया जा सकता है कि यह विधि कोटि $n-1$ के बहुपद का यथार्थ समाकलन संभव करती है और यदि n विषम हो, तो कोटि n के बहुपदों का भी यथार्थ समाकलन किया जा सकता है। अतः सामान्यतः n के विषम मान प्रयुक्त किए जाते हैं,

[50] $n=2$ के लिए $[-1,1]$ पर, $\xi_1=-1$ और $\xi_2=1$ पर समान दूरी वाले बिंदु चुनकर हम $\int_{-1}^{1}P(\xi)\mathrm{d}\xi$ का मूल्यांकन करते हैं

$$\begin{aligned}
P(\xi) &= \sum_{i=1}^{2} l_i(\xi)F(\xi_i)\\
l_1(\xi) &= \frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}=\frac{1}{2}(1-\xi)\\
l_2(\xi) &= \frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}=\frac{1}{2}(1+\xi)\\
W_1^{(2)} &= \int_{-1}^{1} l_1(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-\xi)\mathrm{d}\xi=1\\
W_2^{(2)} &= \int_{-1}^{1} l_2(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\xi)\mathrm{d}\xi=1\\
\int_{-1}^{1}F(\xi)\mathrm{d}\xi &\approx \int_{-1}^{1}P(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_{i=1}^{2}W_i^{(2)}F(\xi_i)=F(-1)+F(1)
\end{aligned}$$

जो *समलंब नियम* है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

51 $n = 3$ के लिए $[-1, 1]$ पर, $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ और $\xi_3 = 1$ पर समान दूरी वाले बिंदु चुनकर हम $\int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi$ का मूल्यांकन करते हैं

$$
\begin{aligned}
P(\xi) &= \sum_{i=1}^{3} l_i(\xi) F(\xi_i) \\
l_1(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\
l_2(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = -(1 + \xi)(\xi - 1) \\
l_3(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \\
W_1^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_1(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \xi(\xi - 1)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{3} \\
W_2^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_2(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} -(1 + \xi)(\xi - 1)\mathrm{d}\xi = \frac{4}{3} \\
W_3^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_3(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \xi(1 + \xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{3} \\
\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi &\approx \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{3} W_i^{(3)} F(\xi_i) = \frac{1}{3}[F(-1) + 4F(0) + F(1)]
\end{aligned}
$$

जो *सिम्पसन नियम* है।

51.3.2 गाउस–लेजांद्र चतुर्थांश विधि

52 गाउस–लेजांद्र चतुर्थांश विधि में बिंदु नियत और समान दूरी पर नहीं होते, बल्कि *सर्वोत्तम परिशुद्धता* प्राप्त करने के लिए चुने जाते हैं।

53 पुनः हम इससे आरंभ करते हैं

$$
\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i)
$$

किंतु इस सूत्रीकरण में दोनों $W_i^{(n)}$ और ξ_i अभी निर्धारित किए जाने वाले अज्ञात हैं। अतः कुल $2n$ अज्ञात हैं।

54 समाकलन बिंदुओं पर $P(\xi_i) = F(\xi_i)$ है, किंतु मध्यवर्ती बिंदुओं पर अंतर इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$
F(\xi) = P(\xi) + \underbrace{\chi(\xi)(\beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 + \cdots)}_{0 \text{ at } \xi=\xi_i; i=1,2,\cdots,n}
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चूँकि हम चाहते हैं कि समाकलन बिंदुओं पर बायाँ पक्ष $P(\xi)$ के यथार्थतः बराबर हो, हम परिभाषित करते हैं

$$\chi(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)...(\xi - \xi_n)$$

कोटि n के बहुपद के रूप में, जो समाकलन बिंदुओं ξ_i पर शून्य के बराबर हो।

55 β_i का उपयुक्त चयन किया जाना चाहिए, जिससे मध्यवर्ती बिंदुओं पर $F(\xi)$ और $P(\xi)$ के बीच अंतर समाप्त हो।

56 समाकलन करने पर

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} P(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi$$

हम अंतिम पद को विभाजित करते हैं

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi + \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi$$

57 प्रसार के अंतिम पदों का छंटन करने पर

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi \tag{51.14}$$

हम देखते हैं कि दक्षिण पक्ष के प्रथम समाकल में कोटि $n-1$ का बहुपद और द्वितीय समाकल में कोटि $2n-1$ का बहुपद सम्मिलित है। अतः हम रखते हैं

$$\int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi = 0 \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{51.15}$$

जिससे n युगपत समीकरणों का, कोटि n का, समुच्चय प्राप्त होगा; ये अज्ञातों ξ_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$ के पदों में होंगे।

58 समीकरण 51.14 पर लौटते हुए

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi) = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i)$$

or

$$\begin{array}{r|rcl} \text{Approximation} & \int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi & \approx & \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i) \\ \text{Weights} & W_i^{(n)} & = & \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi \\ \text{Gauss Points} & \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi & = & 0 \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1 \end{array}$$

59 समाकलन बिंदु ξ_i और भार गुणांक $W_i^{(n)}$ सारणी 51.2 में दिए गए हैं, (Bathe, 1996)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 51.2: $[-1,1]$ अंतराल पर गाउस-चतुर्थांश सूत्रों के समाकलन बिंदु और भार

n	ξ_i	$W_i^{(n)}$	त्रुटि
1	0	2	$\frac{1}{3}F^{(2)}(\xi)$
2	$-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	1 1	$\frac{1}{135}F^{(4)}(\xi)$
3	$-\sqrt{3/5}$ 0 $\sqrt{3/5}$	$5/9$ $8/9$ $5/9$	$\frac{1}{15{,}750}F^{(6)}(\xi)$

51.3.2.1 लेजांद्र बहुपद

60 हल (गाउस समाकलन बिंदु) निम्न द्वारा परिभाषित लेजांद्र बहुपद के मूलों के बराबर हैं

$$\begin{aligned} L_0(\xi) &= 1 \\ L_1(\xi) &= \xi \\ L_k(\xi) &= \tfrac{2k-1}{k}\xi L_{k-1}(\xi) - \tfrac{k-1}{k}\xi L_{k-2}(\xi) \quad 2 \le k \le n \end{aligned}$$

और n गाउस समाकलन बिंदु $L_n(\xi) = 0$ के मूल ξ_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$ ज्ञात करके निर्धारित किए जाते हैं।

61 तब भारण फलन निम्न द्वारा दिए जाते हैं

$$W_i^{(n)} = \frac{2(1-\xi_i^2)}{[nL_{n-1}(\xi_i)]^2}$$

51.3.2.2 $n = 2$ के लिए गाउस-लेजांद्र चतुर्थांश विधि

62 पहले हम $n = 2$ के लिए समाकलन बिंदु ज्ञात करते हैं; $\chi(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)$ और परिणामी समीकरण हैं

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi^0 \mathrm{d}\xi &= 0 \\ \int_{-1}^{1} (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi^1 \mathrm{d}\xi &= 0 \end{aligned}$$

समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\xi_1\xi_2 = -\frac{1}{3} \quad \text{and} \quad \xi_1 + \xi_2 = 0$$

अतः

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{and} \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भार गुणांक हैं

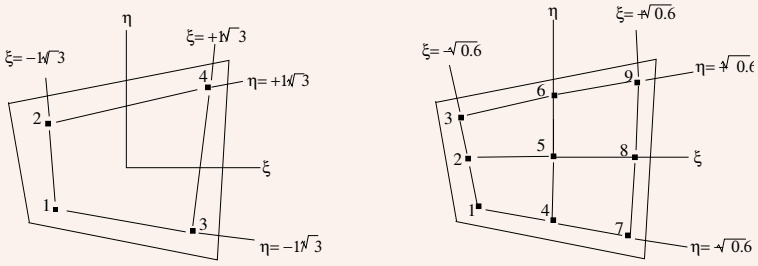
$$
\begin{aligned}
W_i^{(n)} &= \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi \\
W_1^{(2)} &= \int_{-1}^{1} \frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}\mathrm{d}\xi = \frac{-2\xi_2}{\xi_1-\xi_2} = 1.0 \\
W_2^{(2)} &= \int_{-1}^{1} \frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\mathrm{d}\xi = \frac{-2\xi_1}{\xi_1-\xi_2} = 1.0
\end{aligned}
$$

51.3.3 आयताकार और प्रिज़्मीय क्षेत्र

63 आयताकार क्षेत्र पर $F(\xi,\eta)$ का संख्यात्मक समाकलन, जहाँ $-1 \le \xi \le 1$ और $-1 \le \eta \le 1$ हैं, m और n समाकलन बिंदु (इन्हें बहुपद की कोटि न समझें) क्रमशः ξ तथा η दिशाओं में चुनकर किया जाता है

$$
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi.\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \approx \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} W_i^{(m)} W_j^{(n)} F(\xi_i,\eta_j)
$$

और इस प्रकार समाकलन बिंदुओं की कुल संख्या $m \times n$ होगी, चित्र 51.8।



चित्र 51.8: पृष्ठ पर गाउस–लेजांद्र समाकलन

51.3.4 त्रिकोणीय क्षेत्र

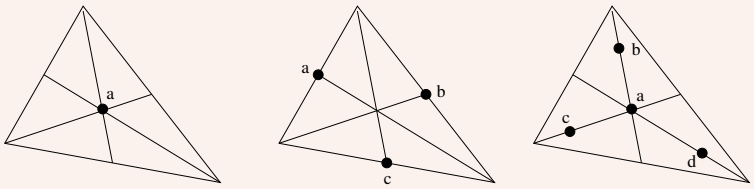
64 त्रिभुज पर संख्यात्मक समाकलन के लिए गाउस बिंदु चित्र 51.9 में दर्शाए गए हैं और संगत त्रिकोणीय निर्देशांक सारणी 51.3 में दिए गए हैं।

51.4 प्रतिबल पुनर्प्राप्ति; आसंधीय प्रतिबल

65 प्रतिबलों का मूल्यांकन निम्न से किया जाता है

$$
\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 51.9: त्रिभुज पर संख्यात्मक समाकलन

तालिका 51.3: त्रिभुज पर संख्यात्मक समाकलन के निर्देशांक और भार

कोटि	त्रुटि	बिंदु	त्रिकोणीय निर्देशांक	भार
रैखिक	$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
द्विघाती		a	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$	$\frac{1}{3}$
	$R = O(h^3)$	b	$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},$	$\frac{1}{3}$
		c	$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
घनीय		a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
	$R = O(h^4)$	b	$0.6, 0.2, 0.2$	$\frac{25}{48}$
		c	$0.2, 0.6, 0.2$	$\frac{25}{48}$
		d	$0.2, 0.2, 0.6$	$\frac{25}{48}$

सामान्यतः उनका मूल्यांकन अवयवों के आसंधीय बिंदुओं पर करना वांछनीय है। किंतु ध्यान रखना चाहिए कि भिन्न अवयवों से किसी दिए गए आसंधि पर परिकलित प्रतिबल समान होना आवश्यक नहीं है (क्योंकि विस्थापन-आधारित परिमित अवयव सूत्रीकरणों में प्रतिबलों का सतत होना आवश्यक नहीं)। अतः आसंधीय बिंदुओं पर किसी प्रकार का प्रतिबल औसतीकरण वांछनीय हो सकता है।

66 समप्राचलीय सूत्रीकरण में आसंधीय प्रतिबल अत्यंत खराब होते हैं और सर्वोत्तम परिणाम गाउस बिंदुओं पर प्राप्त होते हैं।

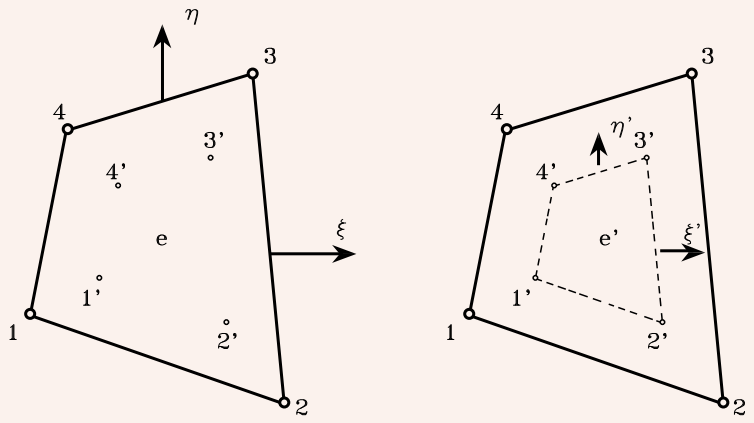
67 आसंधीय प्रतिबलों के मूल्यांकन के दो उपागम हैं:

1. आसंधियों पर σ का प्रत्यक्ष मूल्यांकन करें ($\xi = \eta = \pm 1$)
2. गाउस बिंदुओं पर प्रतिबलों का मूल्यांकन करें और फिर बहिर्वेशन करें।

दूसरा उपागम कहीं बेहतर परिणाम देता है।

68 4-आसंधीय समप्राचलीय चतुर्भुज के लिए गाउस बिंदुओं से बहिर्वेशन चित्र 51.10 द्वारा स्पष्ट किया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 51.10: 4-आसंधीय चतुर्भुज के गाउस बिंदुओं से बहिर्वेशन (Felippa, 1999)

हम अपने आसंधियों और प्राकृतिक निर्देशांकों ξ' तथा η' वाला एक "आंतरिक" अवयव निर्दिष्ट करते हैं, जो ξ और η से सारणी 51.4 द्वारा संबद्ध हैं

तालिका 51.4: द्विरेखीय चतुर्भुज आसंधियों के प्राकृतिक निर्देशांक

कोना आसंधि	ξ	η	ξ'	η'	गाउस आसंधि	ξ	η	ξ'	η'
1	-1	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	1'	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	-1	-1
2	$+1$	-1	$+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	2'	$+1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$+1$	-1
3	$+1$	$+1$	$+\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$	3'	$+1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	$+1$	$+1$
4	-1	$+1$	$-\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$	4'	$-1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	-1	$+1$

अथवा

$$\xi' = \sqrt{3}\xi \qquad \eta' = \sqrt{3}\eta$$

अतः कोई भी अदिश राशि σ (जैसे σ_{xx}), जिसके मान σ'_i गाउस अवयव के कोनों पर ज्ञात हैं, अब व्यक्त सामान्य द्विरेखीय आकार फलनों द्वारा अंतर्वेशित की जा सकती है ξ' और η' के पदों में

$$\sigma(\xi',\eta') = \lfloor\, N_1^{e'} \quad N_2^{e'} \quad N_3^{e'} \quad N_4^{e'} \,\rfloor \left\{ \begin{array}{c} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \end{array} \right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ

$$
\begin{aligned}
N_1^{e'} &= \frac{1}{4}(1-\xi')(1-\eta') \\
N_2^{e'} &= \frac{1}{4}(1+\xi')(1-\eta') \\
N_3^{e'} &= \frac{1}{4}(1+\xi')(1+\eta') \\
N_4^{e'} &= \frac{1}{4}(1-\xi')(1+\eta')
\end{aligned}
$$

इसी प्रकार, हम *बहिर्वेशित* कर सकते हैं σ को अवयव के कोनों तक। उदाहरणार्थ, कोने 1 के लिए पूर्ववर्ती समीकरणों में ξ' और η' को $-\sqrt{3}$ से प्रतिस्थापित करते हैं। चारों कोनों के लिए ऐसा करने पर हमें प्राप्त होता है

$$
\left\{\begin{array}{c}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccc} 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ \sigma'_3\\ \sigma'_4\end{array}\right\}
$$

अपेक्षानुसार प्रत्येक पंक्ति का योग एक के बराबर है और प्रतिबलों के लिए हम σ को σ_{xx}, σ_{yy} और τ_{xy} से प्रतिस्थापित करते हैं।

[69] जैसा कि हम जानते हैं, संलग्न अवयवों से भिन्न आसंधीय प्रतिबल प्राप्त होंगे। एकल मान प्राप्त करने के लिए हम निम्न में से किसी को ले सकते हैं

1. सभी आसंधीय प्रतिबलों का अभारित औसत।
2. $\det(J)$ द्वारा उनके क्षेत्रफल से निर्धारित अवयवों के सापेक्ष आकारों पर आधारित आसंधीय प्रतिबलों का भारित औसत।

51.5 आसंधीय तुल्य भार

[70] परिमित अवयव सूत्रीकरण में सभी भारों को "ऊर्जा-तुल्य" आसंधीय भार से प्रतिस्थापित किया जाना चाहिए।

[71] हम निम्न स्थितियों पर विचार करेंगे: आसंधीय भार, गुरुत्व, कर्षण और तापीय भार।

[72] किंतु पहले समीकरण 48.32 को आसंधीय मानों के पदों में पुनः लिखें

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \delta\mathbf{u}^t\mathbf{b}d\Omega &= \int_\Omega \mathbf{N}^t\mathbf{b}d\Omega \\
\int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\hat{\mathbf{t}}d\Gamma &= \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^t\hat{\mathbf{t}}d\Gamma
\end{aligned}
$$

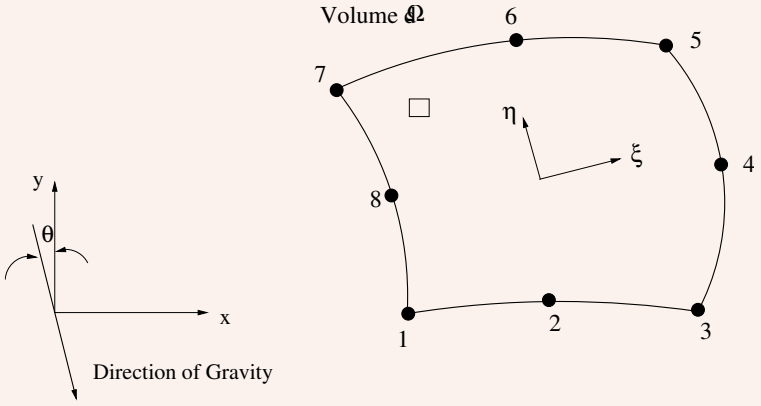
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^t \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{51.16}$$

51.5.1 गुरुत्व भार

73 गुरुत्व बल, ठोस के भीतर गुरुत्व अक्ष की दिशा में कार्यरत प्रति इकाई आयतन पिंड बल के तुल्य हैं, चित्र 51.11, (जिसका किसी भी निर्देशांक अक्ष से संपाती होना आवश्यक नहीं)।



चित्र 51.11: गुरुत्व भारण

$$\begin{aligned} dG_x &= \rho g d\Omega \sin\theta \\ dG_y &= -\rho g d\Omega \cos\theta \end{aligned}$$

जहाँ g गुरुत्वीय त्वरण और ρ द्रव्यमान घनत्व है।

74 समीकरण 51.16 से

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega$$

हमें प्राप्त होता है

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{xi} \\ P_{yi} \end{array} \right\} = \int_{\Omega_e} N_i \rho g \left\{ \begin{array}{c} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{array} \right\} d\Omega$$

अथवा आसंधि i के लिए ऊर्जा-तुल्य आसंधीय बल हैं

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{xi} \\ P_{yi} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{ngaus} \sum_{k=1}^{ngaus} \rho g t \left\{ \begin{array}{c} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{array} \right\} N_i(\xi_j \eta_k) W_j W_k \mathbf{detJ}(\xi_j, \eta_k)$$

75 कोण θ को धनात्मक y अक्ष से वामावर्त मापा जाना है।

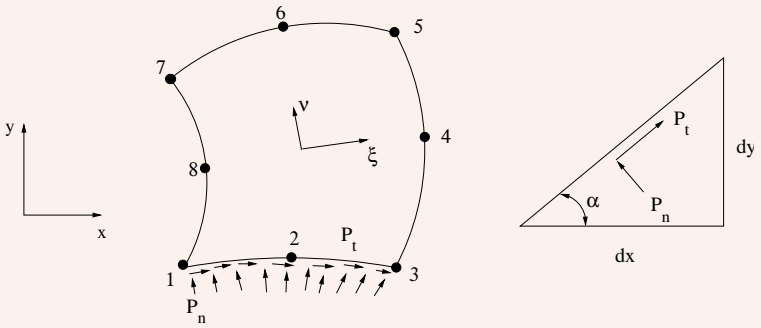
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

51.5.2 कर्षण भार

76 किसी भी अवयव कोर पर अभिलंब और स्पर्शरेखीय दिशाओं में प्रति इकाई लंबाई वितरित भार निर्दिष्ट किया जा सकता है।

77 वितरित भार का परिवर्तन बहुपदीय है और उसकी कोटि अवयव की कोटि से अधिक नहीं हो सकती। सुसंगति के लिए भारित आसंधियों को भी वामावर्त सूचीबद्ध किया जाता है।

78 पहले हम x और y दिशाओं में वितरित भार के अवयव निर्धारित करते हैं; इसके लिए भारित कोर की वृद्धिशील लंबाई dS पर कार्यरत बलों पर विचार करते हैं, चित्र 51.12:



चित्र 51.12: समप्राचलीय अवयवों में कर्षण भार

$$\begin{aligned} dP_x &= (p_t dS\cos\theta - p_n dS\sin\theta) &&= (p_t \mathrm{d}x - p_n \mathrm{d}y) \\ dP_y &= (p_n dS\cos\theta - p_t dS\sin\theta) &&= (p_n \mathrm{d}x - p_t \mathrm{d}y) \end{aligned}$$

79 किंतु चूँकि समाकलन प्राकृतिक निर्देशांकों के पदों में किया जाना है:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi \qquad \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi$$

प्रतिस्थापन करने पर

$$\begin{aligned} dP_x &= \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi \\ dP_y &= \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

80 समीकरण 51.16 से हमारे पास है

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः

$$
\begin{aligned}
P_{xi} &= \int_{\Gamma_t} N_i \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mathrm{d}\xi \\
P_{yi} &= \int_{\Gamma_t} N_i \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

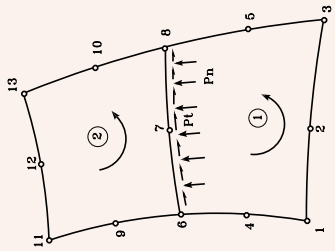
समाकलन पुनः संख्यात्मक रूप से (कोर के अनुदिश) किया जाता है और आसंधि i के लिए ऊर्जा-तुल्य आसंधीय बल हैं

$$
\begin{aligned}
P_{xi} &= \sum_{j=1}^{ngaus} N_i \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) W_j \\
P_{yi} &= \sum_{j=1}^{ngaus} N_i \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) W_j
\end{aligned}
$$

जहाँ समाकलन कोर के अनुदिश संख्यात्मक रूप से किया जाता है। ध्यान दें कि $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ और $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ सीधे जैकोबियन आव्यूह से लिए जाते हैं।

[81] ध्यान दें कि समाकलन कोर के अनुदिश किया जाना है, इसलिए हमने ξ का उपयोग किया है।

[82] संलग्न अवयवों के लिए, चित्र 51.13।



चित्र 51.13: सन्निहित समप्राचलीय अवयवों में कर्षण भार

51.5.3 प्रारंभिक विकृतियाँ/प्रतिबल; तापीय भार

[83] हम दो स्थितियों में भेद करते हैं:

समतल प्रतिबल जो सबसे सरल है

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^0_{xx} &= \alpha \Delta T \\
\varepsilon^0_{yy} &= \alpha \Delta T \\
\gamma^0_{xy} &= 0
\end{aligned}
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समतल विकृति हमारे पास है

$$\begin{aligned}\varepsilon^0_{xx} &= -\frac{\nu\sigma^0_{zz}}{E} + \alpha\Delta T\\ \varepsilon^0_{yy} &= -\frac{\nu\sigma^0_{zz}}{E} + \alpha\Delta T\\ \gamma^0_{xy} &= 0\\ \varepsilon^0_{zz} &= \frac{\sigma^0_{zz}}{E} + \alpha\Delta T = 0\end{aligned}$$

अंतिम व्यंजक द्वारा σ^0_{zz} को विलोपित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}\varepsilon^0_{xx} &= (1+\nu)\alpha\Delta T\\ \varepsilon^0_{yy} &= (1+\nu)\alpha\Delta T\\ \gamma^0_{xy} &= 0\\ \sigma^0_{zz} &= -E\alpha\Delta T\end{aligned}$$

84 तब इन व्यंजकों को समीकरण 50.13 में प्रतिस्थापित किया जाता है

$$\mathbf{f}_{0_e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_t} \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0 \mathrm{d}\Omega$$

और संख्यात्मक रूप से समाकलित किया जाता है।

51.5.4 समाकलन की कोटि

51.5.4.1 पूर्ण समाकलन

85 संख्यात्मक रूप से समाकलित अवयवों के लिए संख्यात्मक समाकलन की कोटि परम महत्त्व का प्रश्न है। यदि समाकलन की कोटि अत्यधिक हो

उच्च: तो निश्चिततः यथार्थ सूत्रीकरण प्राप्त होगा, किंतु यह संगणकीय रूप से महँगा हो सकता है।

निम्न: तब कोटि-न्यूनता हो सकती है।

अतः संख्यात्मक चतुर्थांश की कोटि का उचित चयन आवश्यक है।

86 स्मरण रहे कि

1. हम $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T\mathbf{DB}\mathrm{det}\mathbf{J}$ का समाकलन करना चाहते हैं।
2. जैकोबियन केवल समांतर चतुर्भुजों के लिए नियत होता है।
3. गाउस चतुर्थांश में n बिंदुओं वाला समाकलन कोटि $2n-1$ के बहुपद का सही समाकलन करता है (जबकि न्यूटन–कोट्स के लिए यह $n+1$ था)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः द्विरेखीय समांतर चतुर्भुज अवयव के लिए **F** कोटि 2 का बहुपदीय फलन है, जो प्राकृतिक निर्देशांकों ξ और η के पदों में है तथा जिसका $n = 2$ बिंदुओं (अर्थात 2×2) द्वारा यथार्थ समाकलन किया जा सकता है।

87 समान तर्क से, द्विघाती चतुर्भुज का तीन बिंदुओं से समाकलन किया जाना चाहिए (F अब कोटि 4 का है, अतः $2 \times 3 - 1 = 5$)।

88 सन्निकटन की ये कोटियाँ केवल समांतर चतुर्भुजों के लिए मान्य हैं; कोर के झुकने पर त्रुटि बढती है।

51.5.4.2 अपचयित समाकलन

89 अपचयित समाकलन, अर्थात यथार्थ समाकलन के लिए अपेक्षित संख्या से कम गाउस बिंदुओं का उपयोग, अवयव को नरम करेगा क्योंकि निम्न-कोटि नियम के बिंदुओं पर उच्च-कोटि बहुपदीय पद लुप्त हो सकते हैं।

90 प्रत्यास्थ पिंड में परिमित अवयव हल केवल उन्हीं विस्थापनों की अनुमति देता है जिन्हें आकार फलनों के रैखिक संयोजन द्वारा निरूपित किया जा सके। सामान्यतः यथार्थ विस्थापन क्षेत्र कल्पित विस्थापन से भिन्न होगा; दूसरे शब्दों में, आकार फलन संरचना को इच्छित प्रकार से विरूपित होने से रोकते हैं[1]।

91 चूँकि दृढता सूत्रीकरण अत्यधिक दृढ है (समीकरण 50.15), अपचयित संख्यात्मक समाकलन द्वारा लाया गया मृदुकरण लाभकारी है।

92 चतुर्भुजीय अवयवों के लिए समाकलन की अनुशंसित कोटियाँ सारणी 51.5 में दर्शाई गई हैं।

तालिका 51.5: चतुर्भुजीय अवयवों के लिए पूर्ण और अपचयित संख्यात्मक समाकलन

.

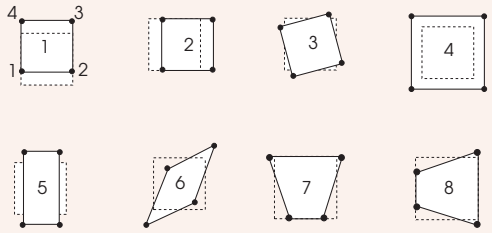
अवयव	विश्वसनीय समाकलन	अपचयित समाकलन
4-आसंधीय	2x2	-
विकृत 4-आसंधीय	2x2	-
8-आसंधीय	3x3	2x2
विकृत 8-आसंधीय	3x3	2x2
9-आसंधीय	3x3	2x2
विकृत 9-आसंधीय	3x3	2x2

93 यदि अवयव को कृत्रिम रूप से मृदु किया जाए, तो *मिथ्या शून्य-ऊर्जा विधाएँ* उत्पन्न होंगी और दृढता आव्यूह *कोटि-न्यून* होगा; अर्थात उसकी कोटि, अवयव की स्वातंत्र्य-कोटियों की संख्या में से दृढ-पिंड विधाओं की संख्या घटाने पर प्राप्त मान से कम होगी।

94 द्विरेखीय अवयव की स्वतंत्र विस्थापन विधाएँ चित्र 51.14 में दर्शाई गई हैं। प्रथम तीन विधाएँ दृढ-पिंड गतियाँ, अगली तीन नियत विकृतियाँ और अंतिम दो आनमन विधाएँ हैं।

[1] यह फूरिए श्रेणी के छंटन के अनुरूप है, जो अन्यथा भौतिक प्रेक्षणों के समुच्चय का यथार्थ प्रतिस्थापक हो सकती थी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 51.14: द्विरेखीय अवयव की स्वतंत्र विस्थापन विधाएँ

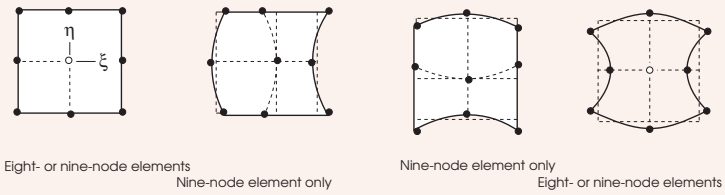
95 चूँकि अवयव सभी मिथ्या शून्य-ऊर्जा विधाओं के प्रति कोई प्रतिरोध नहीं देता (यद्यपि विस्थापन क्षेत्र का वर्णन करने के लिए उन्हें अन्य विधाओं के साथ रैखिक संयोजन में प्रयुक्त किया जा सकता है), इसलिए अपचयित समाकलन का प्रभाव परिमित अवयव प्रतिरूप की दृढता को मृदु करना है।

96 यदि हम अपचयित समाकलन योजना अपनाते हैं, तो संगणकीय प्रयास पर्याप्त घटेगा; किंतु विस्थापन विधि के कुछ अत्यंत विशिष्ट गुण त्यागने होंगे, अर्थात: a) परिबद्धता और b) यथार्थ हल की ओर एकदिष्ट अभिसरण।

97 अपचयित समाकलन से उत्पन्न समस्याएँ निम्न अवयवों के लिए स्पष्ट की गई हैं

Q4 एक-बिंदु समाकलन के लिए गाउस बिंदु केंद्र पर होता है। आनमन के अधीन अवयव के केंद्र पर $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \gamma_{xy} = 0$ है; तदनुसार $U = 0$ है, चित्र में संगत विधाओं 4 और 5 के लिए चित्र 51.14; यदि $n = 2$ हो, तो ये मिथ्या विधाएँ लुप्त हो जाएँगी।

Q9 विस्थापन $u = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2$ और $v = 0$ द्वारा दिया जाता है। यदि अवयव का समाकलन 2x2 बिंदुओं से किया जाए, तो $\xi = \eta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ पर दिखाया जा सकता है कि विकृतियाँ शून्य हैं और संगत क्रियाविधियाँ अथवा **आवरग्लास** चित्र 51.15 में दर्शाई गई हैं।



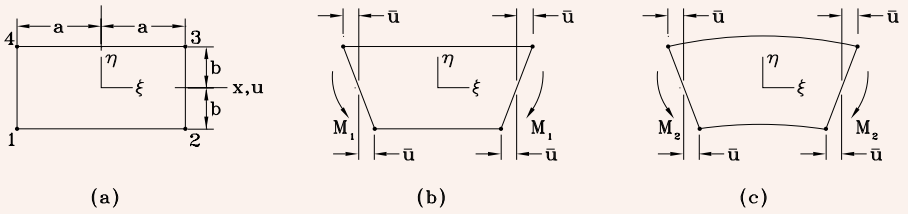
चित्र 51.15: अल्प-समाकलित द्विघाती अवयव में आवरग्लास विधाएँ

51.5.4.3 चयनात्मक अपचयित समाकलन

98 चयनात्मक समाकलन में विभिन्न विकृति पदों का समाकलन भिन्न कोटियों से किया जाता है।

99 इस तकनीक पर आगामी अध्याय में अधिक चर्चा होगी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 51.16: आनमन के अधीन आयताकार द्विरेखीय अवयव; द्विरेखीय अवयव और सही ज्यामिति

51.6 परजीवी अपरूपण/असुसंगत अवयव

51.6.1 Q4, समस्या

100 द्विरेखीय अवयव के आकार फलन समीकरण द्वारा दिए गए हैं। 49.12

$$\begin{array}{rclrcl} N_1(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); & N_2(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \\ N_3(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); & N_4(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta); \end{array} \tag{51.17}$$

जहाँ $\xi = x/a$ और $\eta = y/b$ हैं।

101 चित्र 51.16 के विस्थापन क्षेत्र को आरोपित करने पर द्विरेखीय अवयव तथा सही विस्थापन और विकृतियाँ सारणी 51.6 में दिए गए हैं।

तालिका 51.6: द्विरेखीय और यथार्थ विस्थापन/विकृतियाँ

	द्विरेखीय अवयव	यथार्थ सूत्रीकरण
u	$\xi\eta\overline{u}$	$\xi\eta\overline{u}$
v	0	$(1-\xi^2)\frac{a\overline{u}}{2b} + (1-\eta^2)\nu\frac{b\overline{u}}{2a}$
ε_{xx}	$\eta\frac{\overline{u}}{a}$	$\eta\frac{\overline{u}}{a}$
ε_{yy}	0	$-\nu\eta\frac{\overline{u}}{a}$
γ_{xy}	$\xi\frac{\overline{u}}{b}$	0

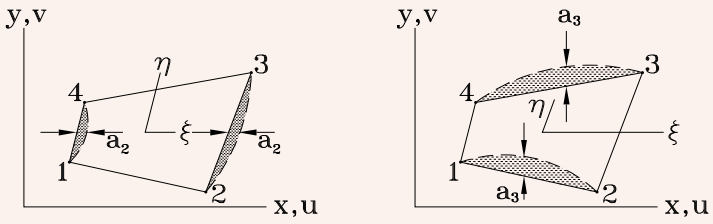
102 इस सारणी से हम देखते हैं कि परजीवी अपरूपण अवयव में संचित विकृति ऊर्जा (जो $\mathbf{P}^T.\mathbf{d}$ के बराबर है) में योगदान करता है। अतः दिए गए आरोपित विस्थापन के लिए बल अधिक होंगे और $M_1 > M_2$.

103 दोनों अवयवों की विकृति ऊर्जाओं का अनुपात परिकलित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{1+\nu}\left[\frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

अतः a/b बढ़ने पर अवयव "लॉक" हो जाता है (यह पद आगामी अध्यायों में स्पष्ट किया जाएगा)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 51.17: q6 अवयव की असुसंगत विधाओं से संबद्ध विस्थापन

104 अतः $M_1 > M_2$ उत्पन्न करने वाली अवांछित अपरूपण विकृति को *परजीवी अपरूपण* कहा जाता है।

51.6.2 Q6, समाधान

105 सारणी 51.6 के विस्थापन क्षेत्रों की तुलना करने पर हम देखते हैं कि द्विरेखीय अवयव $(1-\xi^2)$ और $(1-\eta^2)$ से संबद्ध विस्थापन विधाओं को छोड़कर यथार्थ हल से विचलित होता है।

106 लुप्त विधाओं को आंतरिक आसंधियों के रूप में जोड़कर इस स्थिति का समाधान किया जा सकता है

$$\begin{aligned} u &= \sum N_i \overline{u}_i + (1-\xi^2)a_1 + (1-\eta^2)a_2 \\ v &= \sum N_i \overline{v}_i + (1-\xi^2)a_3 + (1-\eta^2)a_4 \end{aligned}$$

जहाँ N_i समीकरण 51.17 द्वारा दिए जाते हैं और a_i आसंधि-विहीन स्वातंत्र्य-कोटियाँ हैं। अब अवयव की 6 स्वातंत्र्य-कोटियाँ हैं, अतः अवयव को कहा जाता है to as Q6.

107 $\mathbf{B}$ आव्यूह को तदनुसार समायोजित करना होगा और उसके सूत्रीकरण के बाद अतिरिक्त स्वातंत्र्य-कोटियाँ a_i संघनन (अनुभाग 46.1) द्वारा विलोपित की जाती हैं।

108 केवल दो आसंधियों द्वारा परिभाषित कोर के अनुदिश u अथवा v के द्विघाती वितरण के कारण Q6 अवयव *असुसंगत* (अथवा अननुरूप) है, चित्र 51.17।

109 इस स्थिति में मृदुकरण मानक कल्पित-विस्थापन सूत्रीकरण की अंतर्निहित अत्यधिक दृढता का प्रतिकार करता है।

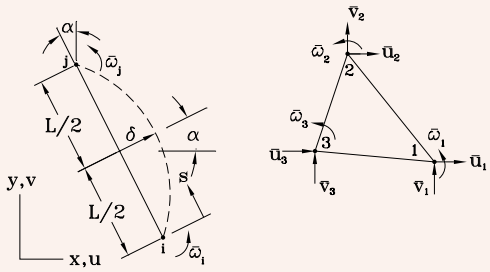
51.6.3 Qm6, अतिरिक्त सुधार

110 दिखाया जा सकता है कि Q6 अवयव पैच परीक्षण केवल तभी उत्तीर्ण करता है जब वह आयताकार हो।

111 इस कमी के समाधान हेतु हम $\mathbf{B}$ आव्यूह के उस भाग पर विचार करते हैं जो आसंधि-विहीन स्वातंत्र्य-कोटियों से संबद्ध है और उसे $\mathbf{B}_a$ कहते हैं; तब संगत सुसंगत आसंधीय भार सदिश है

$$\mathbf{p}_a^e = -\int_\Omega^e \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 51.18: ड्रिलिंग स्वातंत्र्य-कोटियों द्वारा प्रेरित पार्श्व विस्थापन

जहाँ $\boldsymbol{\sigma}_0$ आसंधीय स्वातंत्र्य-कोटियों पर d_r से संबद्ध मानक अवयव सूत्रीकरण द्वारा उत्पन्न प्रारंभिक प्रतिबलों को निरूपित करता है।

112 चूँकि मानक समप्राचलीय अवयव पैच परीक्षण उत्तीर्ण करता है, जब $\boldsymbol{\sigma}_0$ नियत हो और a_i से संबद्ध यह अतिरिक्त भार न हो, तब $\mathbf{p}_a^e$ भी शून्य होना चाहिए, नियत $\boldsymbol{\sigma}_0$ के लिए, अथवा

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}_a^T t \det\mathbf{J} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = 0$$

सामान्य (अनायताकार) अवयवों के लिए यह समीकरण संतुष्ट नहीं होता और पैच परीक्षण विफल होता है।

113 $\mathbf{B}_a$ बनाते और समाकलित करते समय $\mathbf{J}_0$ का उपयोग करके इसका कृत्रिम समाधान किया जा सकता है, जहाँ जैकोबियन का मूल्यांकन गाउस चतुर्थांश बिंदु के स्थान पर $\xi = \eta = 0$ पर किया जाता है और मोटाई के लिए संगत t_0 प्रयुक्त होता है।

114 ऐसा करने पर परिणामी अवयव QM6 कहलाता है; आयताकार होने पर यह लगभग द्विघाती अवयव जितना अच्छा कार्य करता है और द्विरेखीय अवयव से पर्याप्त अधिक परिशुद्ध होता है।

115 प्रतिबलों की गणना a_i सहित सभी स्वातंत्र्य-कोटियों से की जाती है। यदि असुसंगत विधाओं से संबद्ध अवयव आसंधीय भार $\mathbf{p}^e$ को संगत स्वातंत्र्य-कोटियों a_i की पुनर्प्राप्ति (संघनन के बाद) के समय शून्य रखा जाए, तो बेहतर परिणाम प्राप्त होते हैं।

51.7 घूर्णी स्वातंत्र्य-कोटियाँ

116 *ड्रिलिंग स्वातंत्र्य-कोटियाँ* कोने की आसंधियों पर घूर्णन हैं। समतल अवयवों के संदर्भ में वे कोरों के परवलयी विस्थापित आकारों से संबद्ध हैं, चित्र 51.18। समतल अवयवों के समुच्चय के रूप में परिभाषित कवचों में वे महत्त्वपूर्ण हैं। अतः अवयव आनमन और झिल्ली क्रिया का प्रतिरूपण कर सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

117 घूर्णन $\overline{\omega}_i$ और $\overline{\omega}_j$ को क्रमशः आसंधियों i और j पर मानें, जो लंबाई L की अवयव भुजा पर हैं; तब काल्पनिक धरन के अंत आघूर्ण होंगे

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{2EI}{L}\left(2\overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j\right) \\ M_j &= \frac{2EI}{L}\left(\overline{\omega}_i + 2\overline{\omega}_j\right) \end{aligned}$$

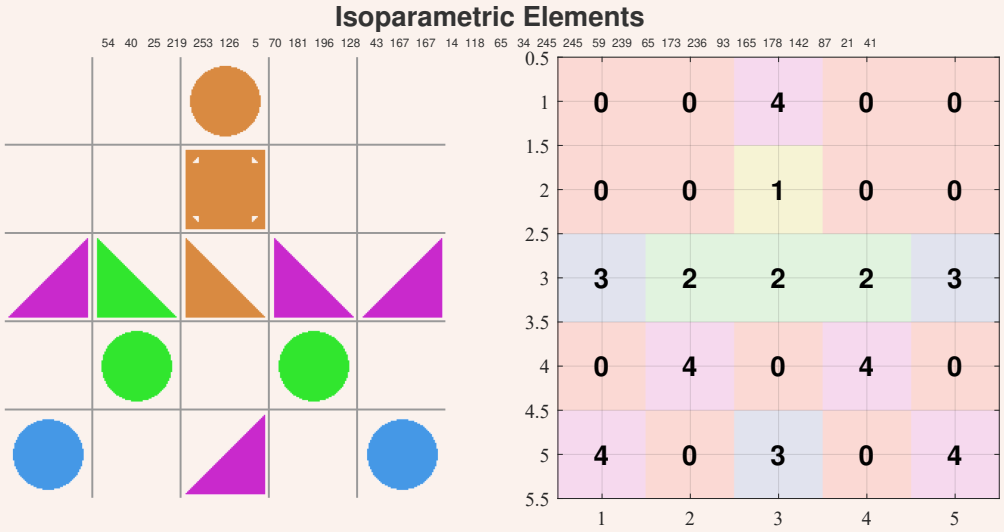
अतः $M = M_i + (M_j - M_i)\frac{x}{L}$ और आभासी बल विधि से मध्य-भुजा कोर-अभिलंब विस्थापन ज्ञात किया जा सकता है

$$\delta = \frac{L}{8}(\overline{\omega}_j - \overline{\omega}_i)$$

118 अतः कोर विस्थापन दो भागों से उत्पन्न होता है: स्थानांतरण और परवलयी विकृति:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \frac{L-s}{L}\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\} + \frac{s}{L}\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \end{array} \right\} + \frac{L-s}{2L}s(\omega_j - \omega_i)\left\{ \begin{array}{c} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{array} \right\}$$

और अन्य कोरों के लिए समान व्यंजक लिखे जा सकते हैं।



अध्याय-विशिष्ट आइडेंटिकॉन, chapter H

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

52 भारित अवशेष विधियाँ

सारांश

अध्याय 50 में प्रस्तुत परिमित अवयव सूत्रीकरण आभासी कार्य के सिद्धांत और परिवर्तनात्मक सिद्धांतों पर आधारित था। इसके अनुसार साम्यावस्था में किसी पिंड के लिए, आंतरिक प्रतिबलों द्वारा किया गया आभासी कार्य किसी भी शुद्धगतिक रूप से ग्राह्य आभासी विस्थापन हेतु बाह्य बलों द्वारा किए गए आभासी कार्य के बराबर होता है।

इसके विपरीत, यह अध्याय एक वैकल्पिक विधि प्रस्तुत करेगा। गैलर्किन विधि अवकल समीकरणों के संख्यात्मक हल में प्रयुक्त भारित अवशेष उपागम है। इसमें शासी अवकल समीकरण को परीक्षण फलनों के समुच्चय से गुणा करके समस्या-क्षेत्र पर समाकलित किया जाता है, ताकि अवशेष न्यूनतम हों।

गैलर्किन विधि अधिक सामान्य है और संरचनात्मक यांत्रिकी से परे अवकल समीकरणों की विस्तृत श्रेणी पर लागू की जा सकती है।

यह अध्याय गैलर्किन विधि को संक्षिप्त और सारगर्भित रूप में प्रस्तुत करेगा।

52.1 परिचय 1785
52.2 सामान्य सूत्रीकरण 1786
52.2.1 अवकल संकारक 1786
52.2.2 अवशेष सूत्रीकरण 1787
52.3 भारित अवशेष विधियाँ 1789
52.3.1 बिंदु सहस्थान विधि 1789
52.3.2 उपक्षेत्र सहस्थान विधि 1789
52.3.3 न्यूनतम-वर्ग विधि 1790
52.3.4 गैलर्किन विधि 1790
52.4 3D प्रत्यास्थता समस्याओं में गैलर्किन विधि के अनुप्रयोग 1792
52.4.1 दुर्बल रूप की व्युत्पत्ति 1792
52.4.2 परिमित अवयव विविक्तीकरण . . 1795

निम्न अध्याय Ottosen and Petersson, 1992 *Introduction to the Finite Element Method* से अनुकूलित है।

52.1 परिचय

1 अब तक परिमित अवयव विधि को रेले–रिट्ज विधि द्वारा परिवर्तनात्मक सिद्धांत से व्युत्पन्न किया गया था।

2 प्रत्यास्थ-स्थैतिकी में प्रयुक्त परिवर्तनात्मक सिद्धांत कुल स्थितिज ऊर्जा का न्यूनीकरण है और परिणामी दुर्बल सूत्रीकरण साम्य समीकरण (प्रबल रूप) के तुल्य होता है।

3 भौतिक विज्ञान की अनेक शाखाओं में परिवर्तनात्मक सिद्धांत उपलब्ध नहीं हो सकता और केवल एक अवकल समीकरण तथा उसकी संबद्ध सीमा शर्तें उपलब्ध होती हैं।

4 ध्यान देना चाहिए कि जब अवकल समीकरण की कोटि विषम हो, तब परिवर्तनात्मक सूत्रीकरण संभव नहीं होता।

5 ऐसी समस्याओं के लिए *भारित अवशेष विधियाँ* प्रयुक्त की जाती हैं। यह मूलतः गणितीय विधि है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[6] परिणामी सूत्रीकरण समाकलीय होता है और इसलिए “दुर्बल” है।

[7] गैलर्किन विधि अधिक सामान्य है और संरचनात्मक यांत्रिकी से परे अवकल समीकरणों की विस्तृत श्रेणी पर लागू की जा सकती है। इसके अतिरिक्त, यह परिवर्तनात्मक सिद्धांतों के अनुरूप है: विधि रिट्ज विधि और परिवर्तनात्मक सिद्धांतों से सुसंगत है।

52.2 सामान्य सूत्रीकरण

52.2.1 अवकल संकारक

[8] एक सामान्य अवकल समीकरण पर विचार करें

$$\begin{array}{lrcll} \text{Governing Differential Equation} & L\phi + g & = & 0; & \Omega \\ \text{Boundary conditions} & B_i(\phi) & = & q_i; & \Gamma_i \end{array} \tag{52.1}$$

जहाँ L एक अवकल संकारक है। 1D समस्या मानते हुए, $\phi = \phi(x)$ एक अज्ञात फलन है जो निर्धारित किए जाने वाले अवस्था चर (जैसे विस्थापन, तापमान, दाबोच्चता आदि) को निरूपित करता है; $g(x)$ एक ज्ञात प्रेरक फलन है।

[9] हम अवकल संकारक को सममित और धनात्मक निश्चित मानते हैं,

$$\begin{array}{lrcl} \text{Symmetric} & \displaystyle\int_\Omega (L[u])v\,\mathrm{d}\Omega & = & \displaystyle\int_\Omega (L[v])u\,\mathrm{d}\Omega \\ \text{Positive Definite} & \displaystyle\int_\Omega (L[u])u\,\mathrm{d}\Omega & > & 0 \end{array} \tag{52.2}$$

जहाँ u और v ऐसे कोई भी फलन हैं जो *अनिवार्य और प्राकृतिक सीमा शर्तें संतुष्ट करते हैं*; L समीकरण O.7 में परिभाषित रैखिक संकारक है।

52.2.1.1 उदाहरण 52.1: 1D अक्षीय सदस्य की सममिति और धनात्मक निश्चितता की जाँच

उदाहरण के लिए, अक्षीय दंड की स्थायी-अवस्था अनुक्रिया पर विचार करें। शासी अवकल समीकरण और सीमा शर्तें हैं

$$\begin{array}{lrcl} \text{Governing Differential Equation} & -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & 0 \\ \text{Essential Boundary conditions} & u|_{x=0} & = & 0 \\ \text{Natural Boundary conditions} & EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} & = & P \end{array}$$

अतः

$$\begin{array}{lllllllll} L[.] & = & -EA\frac{\partial^2}{\partial x^2}; & \phi & = & u; & g & = & 0; \\ B_1 & = & 1; & q_1 & = & 0; & B_2 & = & EA\frac{\partial}{\partial x}; \quad q_2 = P; \end{array}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संकारक L के सममित और धनात्मक निश्चित होने का निर्धारण करने के लिए हम $P=0$ लेते हैं और दो बार खंडशः समाकलन करते हैं[a] हमें प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}\int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v\mathrm{d}x &= -EA\frac{\partial u}{\partial x}v\Big|_0^l + \int_0^l EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x \\ &= -EA\frac{\partial u}{\partial x}v\Big|_0^l + EAu\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_0^l - \int_0^l EA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}u\mathrm{d}x\end{aligned}$$

किंतु चूँकि सीमा शर्तें $u=v=0$ हैं $x=0$ पर और $\partial u/\partial x=\partial v/\partial x=0$ हैं $x=l$ पर, इसलिए केवल निम्न शेष रहता है

$$\int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v\mathrm{d}x = \int_0^l -EA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}u\mathrm{d}x$$

अतः संकारक सममित है।

हम यह भी निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि संकारक धनात्मक निश्चित है, समीकरण 52.3 से

$$\int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u\mathrm{d}x = \int_0^l EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x$$

[a] समीकरण R.3 से: $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$

52.2.2 अवशेष सूत्रीकरण

10 अब हम समीकरण 52.1 को परिवर्तित करके 1D समस्या के लिए इस प्रकार पुनः लिखते हैं

$$\int_a^b w(L\phi+g)\mathrm{d}x = 0 \tag{52.3}$$

जहाँ w एक स्वेच्छ भार फलन है[1]। इस समीकरण द्वारा शासी अवकल समीकरण दुर्बल अर्थ में संतुष्ट होता है।

11 अब हम अज्ञात फलन $\phi(x)$ का सन्निकट संख्यात्मक हल चाहते हैं; अतः सामान्यतः मान सकते हैं

$$\begin{aligned}\phi(x)^{app} &= a_1\psi_1(x)+a_2\psi_2(x)+\cdots+a_n\psi_n(x) \\ &= \mathbf{a}\boldsymbol{\psi}\end{aligned} \tag{52.4}$$

जहाँ a_i अज्ञात प्राचल हैं और $\psi(x)$ पूर्वनिर्दिष्ट परीक्षण फलन हैं[2], चर x के।

12 पूर्ववर्ती समीकरण को समीकरण 52.3 में प्रतिस्थापित करने पर

$$\int_a^b w(L\phi^{app}+g)\mathrm{d}x = 0$$

[1] साम्य समीकरण और सीमा शर्त से आभासी कार्य के सिद्धांत की व्युत्पत्ति से समानता ध्यान देने योग्य है।

[2] आगे गैलर्किन विधि में, जो भारित अवशेषों का विशेष रूप है, ϕ विस्थापन, $\boldsymbol{\psi}$ आकार फलनों $\mathbf{N}$ और $\mathbf{a}$ आसंधीय विस्थापनों $\bar{\mathbf{u}}$ के अनुरूप होंगे।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चूँकि ϕ^{app} सामान्यतः अवकल समीकरण को यथार्थतः संतुष्ट नहीं करेगा, इसलिए

$$L\phi^{app} + g = R$$
$$\int_a^b wR = 0$$

जहाँ $R(x)$ त्रुटि का माप है और *अवशेष* कहलाता है; अतः हम भारों और अवशेषों के लंबकोणीय फलन होने की अपेक्षा आरोपित करते हैं[3]।

[13] अवशेष स्पष्टतः गुणांकों a_i पर निर्भर करता है; अतः हमारा उद्देश्य भार $w(x)$ को इस प्रकार चुनना है कि *भारित अवशेष* $w(x)R(x)$, $a-b$ पर शून्य हो।

[14] पहले स्वेच्छ भार फलन चुने जाते हैं

$$\begin{aligned} w &= c_1 W_1(x) + c_2 W_2(x) + \cdots + c_n W_n(x) \\ &= \lfloor\ W_1(x) \quad W_2(x) \quad \cdots \quad W_n(x)\ \rfloor \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{52.5}$$

और $W_i(x)$, x के पूर्वपरिभाषित फलन हैं तथा c_i प्राचल हैं। अतः समीकरण 52.3 को इस प्रकार पुनः लिख सकते हैं

$$\mathbf{c}^T \int_a^b \mathbf{W}^T R \mathrm{d}x = 0 \tag{52.6}$$

किंतु चूँकि $\mathbf{c}$ निर्देशांकों पर निर्भर नहीं करता, इसलिए

$$\int_a^b \mathbf{W}^T R \mathrm{d}x = 0 \tag{52.7}$$

यह समीकरण वास्तव में n समीकरणों के निकाय को निरूपित करता है।

[15] समीकरण 52.3 को प्रतिस्थापित करने और $\mathbf{a}$ के निर्देशांकों पर निर्भर न होने से

$$R = L(\boldsymbol{\psi}\mathbf{a}) + g = L(\boldsymbol{\psi})\mathbf{a} + g$$

अतः भारित औसत लेने पर

$$\underbrace{\left(\int_a^b \mathbf{W}^T L(\boldsymbol{\psi}) \mathrm{d}x\right)}_{\mathbf{K}^e} \mathbf{a} = \underbrace{-\int_a^b \mathbf{W} g \mathrm{d}x}_{\mathbf{f}}$$

[3] दो सदिश $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ लंबकोणीय होते हैं यदि $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0$; इसी प्रकार दो फलन $u(x)$ और $v(x)$ लंबकोणीय होते हैं यदि $\int v(x)u(x) = 0$।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \int_a^b W_1 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_1 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_1 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \int_a^b W_2 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_2 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_2 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b W_n L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_n L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_n L(\psi_n)\mathrm{d}x \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \int_a^b W_1 g\mathrm{d}x \\ \int_a^b W_2 g\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b W_n g\mathrm{d}x \end{Bmatrix}$$

16 इस प्रकार $\mathbf{K}^e$, n गुणा n आव्यूह है और पूर्ववर्ती समीकरण से अज्ञात गुणांक $\mathbf{a}$ ज्ञात किए जा सकते हैं।

52.3 भारित अवशेष विधियाँ

17 पूर्ववर्ती सूत्रीकरण अत्यंत सामान्य था और विभिन्न तकनीकें चयनित भारों, अर्थात $\mathbf{W}$ के हमारे चयन, के अनुसार भिन्न होंगी।

52.3.1 बिंदु सहस्थान विधि

18 इस विधि में भार फलन w, *डिराक डेल्टा फलन* $\delta(x - x_i)$ पर आधारित होता है और इसलिए अवशेष को n बिंदुओं पर यथार्थतः शून्य रखा जाता है। भार फलन w के लिए *डिराक डेल्टा फलन* $\delta(x - x_i)$ अपनाकर यह प्राप्त होता है, जहाँ

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} \infty & \text{if } x = x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i)\mathrm{d}x = 1$$

52.3.2 उपक्षेत्र सहस्थान विधि

19 रुचि के क्षेत्र को n उपक्षेत्रों में विभाजित करते हैं और प्रत्येक में अवशेष का समाकल शून्य रखा जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

52.3.3 न्यूनतम-वर्ग विधि

20 अवशेषों के वर्ग के समाकल को a_i के सापेक्ष न्यूनतम किया जाता है।

$$I = \int R^2(x, y, z, a_1, \cdots, a_n)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

52.3.4 गैलरि्किन विधि

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §12.3.1 देखें

21 गैलरि्किन विधि में हम चुनते हैं

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\psi}$$

अर्थात भार फलन परीक्षण फलनों के बराबर होते हैं। चूँकि परीक्षण फलन अवशेषों के लंबकोणीय हैं (समीकरण 52.3), इसलिए समीकरण 52.7 बन जाता है

$$\int_a^b \boldsymbol{\psi}^T R\mathrm{d}x = 0$$

और

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \int_a^b \psi_1 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_1 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_1 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \int_a^b \psi_2 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_2 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_2 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \psi_n L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_n L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_n L(\psi_n)\mathrm{d}x \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \int_a^b \psi_1 g\mathrm{d}x \\ \int_a^b \psi_2 g\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b \psi_n g\mathrm{d}x \end{Bmatrix}$$

52.3.4.1 उदाहरण 52.2: तंतु कंपन

हम तनाव $T(x)$ और प्रति इकाई लंबाई बाह्य अनुप्रस्थ बल $p(x,t)$ के अधीन तंतु के एक अवयव के लिए गैलरि्किन विधि द्वारा परिमित अवयव आव्यूहों का सूत्रीकरण करना चाहते हैं। प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान को ρ से निरूपित किया जाता है। हम छोटे विस्थापन मानते हैं और कंपन की मूल आवृत्ति ज्ञात करते हैं।

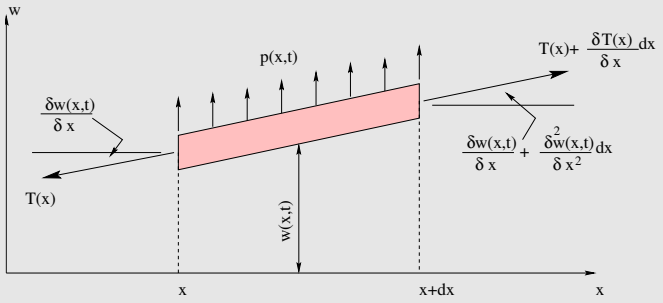
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. पहले तंतु के एक अवयव के लिए अनुप्रस्थ दिशा में न्यूटन का गति समीकरण ($\Sigma F_y = ma$) लिखते हैं

$$\left[T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right] + p(x,t)\mathrm{d}x - T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \rho \mathrm{d}x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

जो निम्न में अपचयित होता है

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] + p(x,t = \rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$



2. मुक्त कंपन की स्थिति में $p(x,t) = 0$ और नियत तनाव T =cst के लिए हमें प्राप्त होता है

$$Tw_{,xx} - \rho w_{,tt} = 0$$

जो *तरंग समीकरण* है।

3. इसके बाद गैलरि्किन विधि लागू करते हैं

$$\int_0^L \mathbf{N}^T\left[Tw_{,xx} - \rho\ddot{w}\right]\mathrm{d}x = 0$$

जहाँ $w = \mathbf{N}\overline{w}$ है।

4. खंडशः समाकलन करें

$$-\int_0^L \mathbf{N}_{,x}^T T w_{,x}\mathrm{d}x - \int_0^L \mathbf{N}^T\rho\ddot{w}\mathrm{d}x + \left[\mathbf{N}^T T w_{,x}\right]\Big|_0^L = 0$$

अंतिम पद शून्य के बराबर है, क्योंकि संगत आसंधियों पर आकार फलन शून्य हैं। आभासी विस्थापन विधि से समानता द्वारा, $\mathbf{N}$ उस आभासी विस्थापन के अनुरूप है जिसे अनिवार्य सीमा शर्तें संतुष्ट करने हेतु अवलंबों पर शून्य होना चाहिए।

5. $w = \mathbf{N}\overline{w}$ और $w_{,x} = \mathbf{N}_{,x}\overline{w}$ प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\underbrace{\int_0^L \mathbf{N}_{,x}^T T \mathbf{N}_{,x}\mathrm{d}x}_{\mathbf{k}}\,\overline{w} + \underbrace{\int_0^L \mathbf{N}^T\rho\mathbf{N}\mathrm{d}x}_{\mathbf{m}}\,\ddot{\overline{w}} = 0$$

जहाँ

$$\mathbf{N} = \lfloor\ \tfrac{L-x}{L} \quad \tfrac{x}{L}\ \rfloor \quad \text{and} \quad \mathbf{N}_{,x} = \frac{1}{L}\lfloor\ -1 \quad 1\ \rfloor$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6. प्रतिस्थापन करने पर

$$\mathbf{k} = \frac{T}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{m} = \frac{\rho L}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. यदि हम दो-अवयवीय समुच्चय पर विचार करें और स्थिर स्वातंत्र्य-कोटियों (1 और 3) को विलोपित करें, तो

$$2\frac{T}{L}\overline{w}_2 + 4\frac{\rho L}{6}\ddot{\overline{w}}_2 = 0$$

8. मुक्त कंपन के लिए

$$\overline{w}_2 = A\sin\omega t$$
$$\ddot{\overline{w}}_2 = -\omega^2 A\sin\omega t$$

9. प्रतिस्थापन करने पर

$$\left(2\frac{T}{L} - 4\frac{\rho L}{6}\omega^2\right) A\sin\omega t = 0 \;\Rightarrow\; \omega^2 = 3\frac{T}{\rho L^2}$$

ध्यान दें कि यथार्थ उत्तर $w^2 = \frac{\pi^2 T}{4\rho L^2}$ है।

52.4 3D प्रत्यास्थता समस्याओं में गैलरिकन विधि के अनुप्रयोग

22 हम गैलरिकन विधि को समस्याओं के दो वर्गों पर लागू करेंगे।

23 हम प्रत्यास्थता समस्याओं से आरंभ करते हैं, ताकि दिखाया जा सके कि गैलरिकन विधि परिवर्तनात्मक सिद्धांत से प्राप्त सूत्रीकरण के यथार्थतः समान सूत्रीकरण देती है।

24 विधि के इस "सत्यापन" के बाद हम (आगामी अध्याय में) उन समस्याओं के वर्ग पर विचार करेंगे जिनके लिए परिवर्तनात्मक सिद्धांत नहीं है और इसलिए गैलरिकन विधि ही एकमात्र लागू तकनीक है। दूसरा अनुप्रयोग ऊष्मा समीकरण होगा।

52.4.1 दुर्बल रूप की व्युत्पत्ति

25 अब हम प्रत्यास्थता समीकरण पर गैलरिकन विधि लागू करेंगे और दिखाएँगे कि परिवर्तनात्मक सिद्धांत से व्युत्पन्न आभासी कार्य का सिद्धांत पुनः प्राप्त होता है। अतः इस विशेष स्थिति में दोनों विधियाँ वास्तव में (अपेक्षानुसार) तुल्य हैं।

26 साम्य समीकरण (समीकरण O.9) से आरंभ करते हुए

$$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ और

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix};$$

27 साम्य समीकरणों का विस्तार करने पर हमारे पास है

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \tag{52.8}$$

28 समीकरण 52.8 के प्रथम समीकरण को स्वेच्छ फलन w_x से गुणा करके आयतन[4] Ω पर समाकलित करते हैं:

$$\int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x b_x \mathrm{d}\Omega = 0$$

29 अब हम ग्रीन–गाउस प्रमेय (अपसरण प्रमेय का एक रूप[5])

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma w_x \sigma_{xx} n_x \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial w_x}{\partial x} \sigma_{xx} \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma w_x \sigma_{xy} n_y \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial w_x}{\partial y} \sigma_{xy} \mathrm{d}\Omega \\ &+ \int_\Gamma w_x \sigma_{xz} n_z \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial w_x}{\partial z} \sigma_{xz} \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x b_x \mathrm{d}\Omega = 0 \end{aligned} \tag{52.9}$$

30 स्मरण रहे कि कर्षण समीकरण O.5 द्वारा दिए जाते हैं

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z \\ t_y &= \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z \\ t_z &= \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{aligned}$$

तब पूर्ववर्ती समीकरण निम्न में अपचयित होता है

$$\int_\Gamma w_x t_x \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \sigma_{xz} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x b_x \mathrm{d}\Omega = 0$$

[4] आभासी कार्य के सिद्धांत की व्युत्पत्ति से समानता ध्यान देने योग्य है।

[5] समीकरण R.6 से, $\int_\Omega \Phi \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \Phi \mathbf{v}^T \mathbf{n} \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\Phi)^T \mathbf{v} \mathrm{d}\Omega$। यदि $\mathbf{v}^T = [\ \Psi \quad 0 \quad 0\ ]$ रखें, तो प्राप्त होता है $\int_\Omega \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \Phi \Psi n_x \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Psi \mathrm{d}\Omega$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

31 इसी प्रकार, अन्य दो साम्य समीकरणों के लिए हमें प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}\int_\Gamma w_y t_y \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_y}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_y}{\partial z}\sigma_{yz}\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_y b_y \mathrm{d}\Omega &= 0\\ \int_\Gamma w_z t_z \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_z}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz}\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_z b_z \mathrm{d}\Omega &= 0\end{aligned}$$

32 इन तीनों समीकरणों का योग करने पर

$$\begin{aligned}&\underbrace{\int_\Gamma (w_x t_x + w_y t_y + w_z t_z)\mathrm{d}\Gamma}_{\mathbf{w}^T\mathbf{t}} + \underbrace{\int_\Omega (w_x b_x + w_y b_y + w_z b_z)\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{w}^T\mathbf{b}}\\ &-\int_\Omega \left[\frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz} + \right.\\ &\left.\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\sigma_{xy} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\sigma_{xz} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right)\sigma_{yz}\right]\mathrm{d}\Omega = 0\end{aligned} \tag{52.10}$$

33 अब पूर्ववर्ती समीकरण के तीसरे पद पर ध्यान केंद्रित करते हैं। $\mathbf{w} = \lfloor\ w_x \quad w_y \quad w_z\ \rfloor^T$, तब

$$(\mathbf{L}\mathbf{w})^T = \lfloor\ \tfrac{\partial w_x}{\partial x};\quad \tfrac{\partial w_y}{\partial y};\quad \tfrac{\partial w_z}{\partial z};\quad \tfrac{\partial w_x}{\partial y} + \tfrac{\partial w_y}{\partial x};\quad \tfrac{\partial w_x}{\partial z} + \tfrac{\partial w_z}{\partial x};\quad \tfrac{\partial w_y}{\partial z} + \tfrac{\partial w_z}{\partial y};\ \rfloor$$

और

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}\mathbf{w})^T\boldsymbol{\sigma} &= \tfrac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \tfrac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \tfrac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz}\\ &\quad + \left(\tfrac{\partial w_x}{\partial y} + \tfrac{\partial w_y}{\partial x}\right)\sigma_{xy} + \left(\tfrac{\partial w_x}{\partial z} + \tfrac{\partial w_z}{\partial x}\right)\sigma_{xz} + \left(\tfrac{\partial w_y}{\partial z} + \tfrac{\partial w_z}{\partial y}\right)\sigma_{yz}\end{aligned} \tag{52.11}$$

34 अतः समीकरण 52.11 को समीकरण 52.10 में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\int_\Omega (\mathbf{L}\mathbf{w})^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \mathbf{w}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \mathbf{w}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega$$

35 किंतु चूँकि $\mathbf{L}$ संकारक सममित है, समीकरण 52.2 से उपर्युक्त समीकरण को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$\int_\Omega \mathbf{w}^T(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \mathbf{w}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \mathbf{w}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega \tag{52.12}$$

जो कर्षण (प्राकृतिक) सीमा शर्तों के अधीन साम्य के अवकल समीकरण का दुर्बल रूप है।

36 *भार सदिश* $\mathbf{w}$ पूर्णतः स्ववेच्छ है। आभासी विस्थापन के सिद्धांत में यह आभासी विस्थापन के अनुरूप होगा; इस अंतिम समीकरण की तुलना समीकरण 48.26 से करें।

$$\int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{G}\underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{t}}\}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{52.13}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

52.4.2 परिमित अवयव विविक्तीकरण

37 विस्थापन क्षेत्र को इस प्रकार लिखे जाने पर

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}$$

जहाँ $\mathbf{N}$ आकार फलन हैं और $\overline{\mathbf{u}}$ ज्ञात आसंधीय विस्थापन हैं। ध्यान दें कि यह समीकरण 52.4 का अनुप्रयोग है।

38 गैलर्किन विधि भार (फलनों W_i) के लिए आकार फलनों का उपयोग करती है। अतः समीकरण 52.5 होगा

$$\mathbf{w} = \mathbf{N}\mathbf{c}; \quad \mathbf{w}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{N}^T$$

और

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{c} = \mathbf{B}\mathbf{c}$$

39 अंतिम दो समीकरणों को दुर्बल रूप में रखने और स्मरण करने पर कि L संकारक (O.7) सममित है, समीकरण 52.12 देता है

$$\mathbf{c}^T\left(\int_\Omega \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma \mathbf{N}^T\mathbf{t}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega\right) = 0$$

(समीकरण 52.6 से समानता ध्यान देने योग्य है)। चूँकि $\mathbf{c}$ एक स्वेच्छ आव्यूह है, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

$$\int_\Omega \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \mathbf{N}^T\mathbf{t}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega \tag{52.14}$$

यह समीकरण रैखिक और अरैखिक, दोनों निकायों पर लागू है। दक्षिण पक्ष भार के प्रभाव को निरूपित करता है।

40 इसके बाद हम एक संघटक प्रतिरूप, समीकरण O.11, प्रस्तुत करते हैं जिसे सदिश रूप में पुनः लिखा जाता है

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)$$

41 प्रतिबल और विकृति निम्न द्वारा दिए जाते हैं

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}\\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\end{aligned}$$

42 इन दोनों समीकरणों को समीकरण 52.14 में रखने पर प्राप्त होता है

$$\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{K}^e}\,\overline{\mathbf{u}} = \underbrace{\int_\Gamma \mathbf{N}^T\mathbf{t}\,\mathrm{d}\Gamma}_{\mathbf{f}_1} + \underbrace{\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{f}_b} + \underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\,\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{f}_0}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[43] इस प्रकार गैलरिकन उपागम का उपयोग करके हमने वही दृढता सूत्रीकरण पुनः प्राप्त किया है जो पहले परिवर्तनात्मक सिद्धांत, समीकरण 50.10, से प्राप्त हुआ था।

[44] परिवर्तनात्मक सिद्धांत उपलब्ध होने पर गैलरिकन उपागम के उपयोग का कोई स्पष्ट अतिरिक्त लाभ न हो, किंतु उसके अभाव में यही एकमात्र संभव सूत्रीकरण हो सकता है।

52.4.2.1 उदाहरण 52.3: धरन अवयव का दृढता आव्यूह

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

परिचय

हम गैलरिकन विधि का उपयोग करके धरन अवयव का दृढता आव्यूह व्युत्पन्न करना चाहते हैं।

वितरित भार $q(x)$ के अधीन ऑयलर–बर्नूली धरन के विक्षेप $v(x)$ का मूल शासी समीकरण है:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$$

अवकल समीकरण के दोनों पक्षों को भार फलन $\psi(x)$ से गुणा करके धरन अवयव की लंबाई L पर समाकलित करें:

$$\int_0^L \psi(x)\left(EI\frac{d^4v}{dx^4} - q(x)\right)dx = 0$$

v के अवकलजों की कोटि घटाने के लिए खंडशः समाकलन करें। उच्चतम अवकलज वाले पद पर विचार करें:

$$\int_0^L \psi(x)EI\frac{d^4v}{dx^4}dx$$

अवकलजों को v से ψ पर स्थानांतरित करने के लिए दो बार खंडशः समाकलन करें:

$$\int_0^L \psi EI\frac{d^4v}{dx^4}dx = -\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx + \left[\psi EI\frac{d^3v}{dx^3}\right]_0^L$$

सीमा पद $\left[\psi EI\frac{d^3v}{dx^3}\right]_0^L$ शून्य होते हैं यदि भार फलन ψ सीमा शर्तों को संतुष्ट करता है।

$\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx$ पर पुनः खंडशः समाकलन लागू करने पर:

$$-\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx = \int_0^L \frac{d^2\psi}{dx^2}EI\frac{d^2v}{dx^2}dx - \left[\frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^L$$

पुनः, सीमा पद $\left[\frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^L$, ψ के लिए उपयुक्त सीमा शर्तों के अधीन लुप्त हो जाते हैं।

इस प्रकार शासी समीकरण का दुर्बल रूप बनता है:

$$\int_0^L \frac{d^2\psi}{dx^2}EI\frac{d^2v}{dx^2}dx = \int_0^L \psi q(x)dx$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

$v(x)$ का सन्निकट हल आकार फलनों $N_i(x)$ के रैखिक संयोजन के रूप में मानें:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i N_i(x)$$

जहाँ v_i आसंधीय विस्थापन और $N_i(x)$ आकार फलन हैं।

इसी प्रकार भार फलन ψ को आकार फलन $N_j(x)$ चुनें:

$$\psi = N_j(x)$$

सन्निकटनों को दुर्बल-रूप समीकरण में प्रतिस्थापित करें:

$$\int_0^L \frac{d^2 N_j}{dx^2} EI \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i N_i(x)\right) dx = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

यह निम्न में सरल होता है:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^L \frac{d^2 N_j}{dx^2} EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} dx = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

यह स्पष्टतः दृढता आव्यूह, विस्थापन और बल के पदों में साम्य का कथन है। अतः

$$K_{ji} = \int_0^L \frac{d^2 N_j}{dx^2} EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} dx$$

$$f_j = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

घनीय आकार फलनों वाले दो-आसंधीय धरन अवयव के लिए:

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_2(x) = x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

$$N_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

$$N_4(x) = -\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

इनके द्वितीय अवकलज परिकलित करें:

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$\frac{d^2 N_2}{dx^2} = \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}$$

$$\frac{d^2 N_3}{dx^2} = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\frac{d^2N_4}{dx^2} = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

अब दृढता आव्यूह की प्रविष्टियाँ परिकलित करें:

$$K_{ij} = \int_0^L \frac{d^2N_i}{dx^2} EI \frac{d^2N_j}{dx^2} dx$$

किसी विशिष्ट धरन अवयव के लिए परिणामी दृढता आव्यूह 4×4 आव्यूह है:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

52.4.2.2 उदाहरण 52.4: ऊष्मा अंतरण

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

हम निम्न द्वारा अभिलक्षित ऊष्मा अंतरण समस्या का हल चाहते हैं

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

जहाँ $u(x,t)$ तापमान वितरण और α तापीय विसरणशीलता है।

हम इस समीकरण को क्षेत्र $0 \le x \le L$ पर निम्न प्रारंभिक और सीमा शर्तों के साथ हल करते हैं:

- प्रारंभिक शर्त: $u(x,0) = u_0(x)$,
- सीमा शर्तें: $u(0,t) = u_L$ और $u(L,t) = u_R$।

गैलरिकन विधि में निम्न चरण सम्मिलित हैं:

1. ऊष्मा समीकरण का दुर्बल रूप
2. आधार फलनों द्वारा सन्निकट हल
3. गैलरिकन सूत्रीकरण
4. समीकरण-निकाय का संयोजन
5. समय समाकलन

पहले ऊष्मा समीकरण को परीक्षण फलन $\psi(x)$ से गुणा करके क्षेत्र $[0, L]$ पर समाकलित करें:

$$\int_0^L \psi(x) \frac{\partial u}{\partial t} \, dx = \alpha \int_0^L \psi(x) \frac{\partial^2 u}{dx^2} \, dx$$

अवकलज की कोटि घटाने के लिए दक्षिण पक्ष का खंडशः समाकलन करें:

$$\alpha \int_0^L \psi(x) \frac{\partial^2 u}{dx^2} \, dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial \psi}{dx} \frac{\partial u}{dx} \, dx + \left[\alpha \psi(x) \frac{\partial u}{dx} \right]_0^L$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यह मानते हुए कि परीक्षण फलन $\psi(x)$ सीमा शर्तों को संतुष्ट करता है, जिससे सीमा पद लुप्त हो जाते हैं, हमें प्राप्त होता है:

$$\int_0^L \psi(x) \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial \psi}{dx} \frac{\partial u}{dx}\, dx$$

इसके बाद सन्निकट हल $u(x,t)$ को आधार फलनों $N_i(x)$ के रैखिक संयोजन के रूप में मानते हैं:

$$u(x,t) \approx \sum_{i=1}^{n} U_i(t) N_i(x)$$

जहाँ $U_i(t)$ निर्धारित किए जाने वाले समय-निर्भर गुणांक हैं और $N_i(x)$ स्थानिक आधार फलन हैं।

परीक्षण फलनों ψ को आधार फलनों $N_j(x)$ के समान चुनें:

$$\psi = N_j(x)$$

सन्निकट हल और परीक्षण फलनों को दुर्बल रूप में प्रतिस्थापित करते हैं:

$$\int_0^L N_j(x) \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^{n} U_i(t) N_i(x) \right) dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial N_j}{dx} \frac{\partial}{dx} \left(\sum_{i=1}^{n} U_i(t) N_i(x) \right) dx$$

यह निम्न में सरल होता है:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dU_i(t)}{dt} \int_0^L N_j(x) N_i(x)\, dx = -\alpha \sum_{i=1}^{n} U_i(t) \int_0^L \frac{\partial N_j}{dx} \frac{\partial N_i}{dx}\, dx$$

द्रव्यमान आव्यूह M और दृढता आव्यूह K परिभाषित करें:

$$M_{ji} = \int_0^L N_j(x) N_i(x)\, dx$$

$$K_{ji} = \int_0^L \frac{\partial N_j}{dx} \frac{\partial N_i}{dx}\, dx$$

समीकरण-निकाय बनता है:

$$M \frac{dU}{dt} = -\alpha K U$$

जहाँ $U = [U_1(t), U_2(t), \ldots, U_n(t)]^2$ है।

समीकरण-निकाय का समय में समाकलन करने के लिए अग्रगामी ऑयलर विधि जैसी समय-पदक्रमण विधि का उपयोग करें:

$$M \frac{U^{(k+1)} - U^{(k)}}{\Delta t} = -\alpha K U^{(k)}$$

पुनर्व्यवस्थित करने पर प्राप्त होता है:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \Delta t M^{-1} (-\alpha K U^{(k)})$$

अब विशिष्ट आधार फलनों पर विचार करते हैं। सरलता के लिए रैखिक आधार फलन लें। क्षेत्र $[0, L]$ को समान लंबाई $h = L/n$ वाले n अवयवों में विभाजित करें। आधार फलनों $N_i(x)$ को खंडशः रैखिक फलनों के रूप में परिभाषित करें, जिनका मान आसंधि i पर 1 और अन्य सभी आसंधियों पर 0 है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दो रैखिक अवयवों के लिए आधार फलन $N_1(x)$ और $N_2(x)$ इस प्रकार परिभाषित किए जा सकते हैं:

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} & 0 \le x \le h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & 0 \le x \le h \\ 1 - \frac{x-h}{h} & h \le x \le 2h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

इन आधार फलनों के लिए द्रव्यमान आव्यूह M और दृढता आव्यूह K इस प्रकार परिकलित किए जाते हैं:

$$M = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

अग्रगामी ऑयलर विधि के लिए समीकरण-निकाय बनता है:

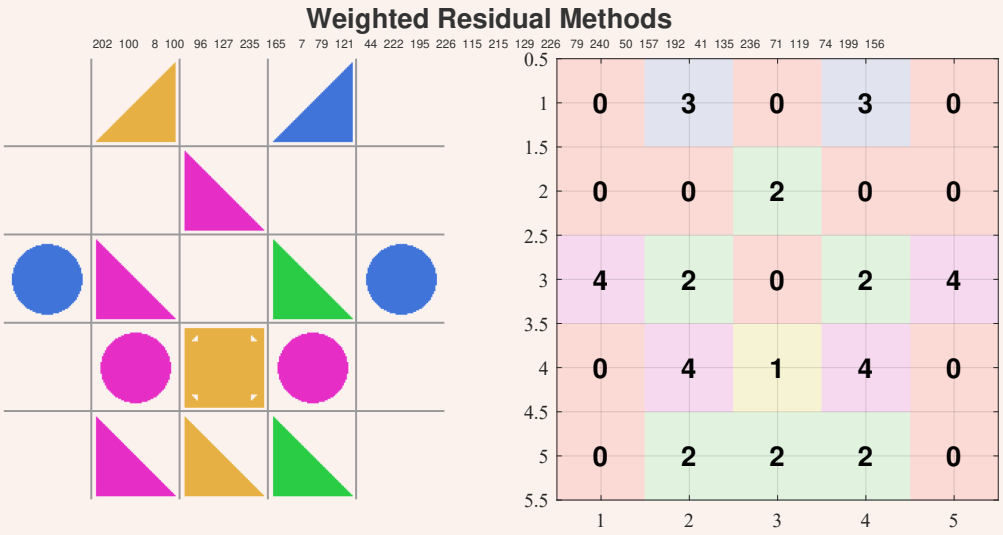
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{U^{(k+1)} - U^{(k)}}{\Delta t} = -\alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} U^{(k)}$$

$U^{(k+1)}$ के लिए हल करने पर:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - \frac{\alpha \Delta t}{h} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} U^{(k)}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अध्याय-विशिष्ट आइडेंटिकॉन, chapter H

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53 गतिकी II

सारांश

यह अध्याय प्रथम-वर्ष स्नातकोत्तर पाठ्यक्रम के लिए अभिप्रेत है और यथार्थवादी गतिक विश्लेषण हेतु आवश्यक संगणकीय तथा उन्नत साधन विकसित करता है। संरचनात्मक निकायों के सामान्य गति समीकरणों का सूत्रीकरण करने और ढाँचा संरचनाओं के लिए प्रयुक्त आदर्शीकरण स्थापित करने के बाद, यह समय विविक्तीकरण तथा चरण-दर-चरण समाकलन द्वारा क्षणिक विश्लेषण पर बल देता है। चिरसम्मत कलनविधियाँ (केंद्रीय अंतर और न्यूमार्क-प्रकार विधियाँ) स्थिरता, परिशुद्धता और संख्यात्मक अवमंदन को ध्यान में रखकर प्रस्तुत की जाती हैं। इसके बाद चर्चा को सतत निकायों और अरैखिक गतिकी तक विस्तृत किया जाता है तथा व्यावहारिक प्रतिरूपण विचारों और सत्यापन तथा वैधीकरण के स्पष्ट भेद के साथ समाप्त किया जाता है। जहाँ उपयुक्त हो, नियतात्मक अनुक्रिया मापों को उनके संभाव्यतामूलक निष्पादन-आधारित निर्वचन के लिए अध्याय 72 से आगे संबद्ध किया गया है।

~~*दिशासूचक।* अध्याय 35 ने रैखिक धारणाओं के अंतर्गत विश्लेषणात्मक समझ पर बल दिया था। वर्तमान~~ अध्याय उस बिंदु से आरंभ होता है जहाँ रैखिक संवृत-रूप विधियाँ अपनी सीमा पर पहुँचती हैं: सामान्यीकृत निकाय निरूपण, क्षणिक संगणन और अरैखिक प्रतिक्रिया।

क्षणिक गतिक विश्लेषण

सारांश

संरचनाओं के भूकंपीय परीक्षण के लिए गतिकी एक अनिवार्य आवश्यकता है। इसके मूल सिद्धांतों की पुनरावृत्ति के स्थान पर यह अध्याय परिमित अवयव विश्लेषण कोडों में कार्यान्वित संगणकीय पक्षों पर केंद्रित होगा। अध्याय गतिक विश्लेषण हेतु भवन के विविक्तीकरण से आरंभ होता है, इसके बाद गतिक समस्या का परिवर्तनात्मक सूत्रीकरण और फिर समय-समाकलन तकनीकों की चर्चा की जाती है।

53.1 परिचय 1803
53.2 गतिक विश्लेषण हेतु ढाँचा आदर्शीकरण . 1804
53.2.1 अक्षीय बनाम आनमनी दृढता . . 1804
53.2.2 प्रतिरूपण 1804
53.3 समस्या निरूपण 1808
53.3.1 विचरणात्मक निरूपण 1808
53.3.2 द्रव्यमान निरूपण 1811
53.3.3 अवमंदन 1812
53.3.4 संख्यात्मक तकनीक: ऑयलर विधियाँ 1816
53.4 काल विविक्तीकरण 1817
53.4.1 अंतर्निहित 1819
53.4.2 स्पष्ट काल समाकलन 1824
53.5 गतिक विश्लेषण की संख्यात्मक विधियाँ . 1827
53.5.1 केंद्रीय अंतर विधि 1827
53.5.2 उदाहरण 53.5: केंद्रीय अंतर स्थिरता काल चरण 1828
53.5.3 न्यूमार्क-बीटा विधि 1828
53.5.4 विधा अध्यारोपण बनाम प्रत्यक्ष समाकलन 1829
53.6 सतत निकाय 1829
53.6.1 छडों का अक्षीय कंपन 1830
53.6.2 धरनों का अनुप्रस्थ कंपन 1831
53.7 अरैखिक गतिकी 1832
53.7.1 अरैखिकता के स्रोत 1832
53.7.2 तन्यता और क्षमता अभिकल्प . 1833
53.8 व्यावहारिक विचार 1833
53.8.1 वास्तविक संरचनाओं में अवमंदन 1833

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53.8.2 मृदा-संरचना अंतःक्रिया 1833
53.8.3 समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक . 1834
53.8.4 आधार वियोजन 1834
53.9 सारांश 1834

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि के लिए, §12.3.6 देखें

53.1 परिचय

1 जब किसी संरचना पर प्रयुक्त भार (उत्तेजन) की आवृत्ति उसकी न्यूनतम प्राकृतिक कंपन आवृत्ति के लगभग एक-तिहाई से कम हो, तब जड़त्व प्रभावों की उपेक्षा करके समस्या को अर्ध-स्थैतिक माना जा सकता है; अन्यथा गतिक विश्लेषण आवश्यक है।

2 अत्यंत नम्य संरचना के लिए *धीरे-धीरे प्रयुक्त* भार भी गतिक विश्लेषण आवश्यक कर सकता है।

3 यदि संरचना संघात भार के अधीन हो, तो मुख्य चिंता (प्रतिबल) तरंग संचरण की होनी चाहिए। ऐसी समस्या में प्रायः उच्च *आवृत्तियाँ* होती हैं और गतिक विश्लेषण की अवधि लगभग उतनी होती है जितना समय तरंग को संरचना पार करने में लगता है।

4 यदि जड़त्व बल उपस्थित हों, तो समस्या गतिक होती है और निम्न में से किसी हल प्रक्रिया द्वारा उसका विश्लेषण किया जा सकता है:

1. अनुक्रिया स्पेक्ट्रम (केवल रैखिक प्रत्यास्थ निकाय)
2. विधा विश्लेषण द्वारा समय-इतिहास विश्लेषण (पुनः रैखिक प्रत्यास्थ), अथवा प्रत्यक्ष समय समाकलन।
3. प्रो. विल्सन के कथनानुसार:

   > *रे क्लफ और मुझे खेद है कि हमने 1962 में संरचनाओं के भूकंपीय विश्लेषण के लिए सन्निकट प्रतिक्रिया वर्णक्रम विधि बनाई.... उस समय व्यवसाय के अनेक सदस्य अधिकतम अवयव बलों का अनुमान लगाने के लिए विधा मानों के निरपेक्ष मानों के योग का उपयोग कर रहे थे। रे ने सुझाव दिया कि विधा मानों को संयोजित करने के लिए हम SRSS विधि का उपयोग करें। किंतु मैंने ही इस सन्निकट विधि को अनेक गतिक विश्लेषण प्रोग्रामों में रखा, जिससे अभियंता बहुत कम अथवा शून्य महत्त्व वाली अर्थहीन धनात्मक संख्याएँ उत्पन्न कर सके... RSM के साथ 50 वर्षों से अधिक कार्य करने के बाद, मैं अनुशंसा करता हूँ कि भूकंपीय विश्लेषण में इसका उपयोग न किया जाए।*
4. संरचनात्मक गतिकी की विधियाँ मूलतः परिमित अवयव विश्लेषण से स्वतंत्र हैं, क्योंकि वे मानती हैं कि दृढता, द्रव्यमान और अवमंदन आव्यूह पहले से उपलब्ध हैं। ये आव्यूह एकल स्वातंत्र्य-कोटि निकाय, ढाँचा संरचना के आदर्शीकरण/सरलीकरण अथवा अत्यंत जटिल परिमित अवयव जाल से प्राप्त हो सकते हैं। समय-इतिहास विश्लेषण प्रक्रिया समान रहती है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5 ध्यान दें कि परिशिष्ट 35.4.3 और K क्रमशः मुक्त कंपन और भूकंपीय अभिलेख निस्यंदन तकनीकों का संक्षिप्त विवेचन करेंगे।

53.2 गतिक विश्लेषण हेतु ढाँचा आदर्शीकरण

53.2.1 अक्षीय *बनाम* आनमनी दृढता

6 स्मरणार्थ, पार्श्व (जैसे भूकंपीय) भार के अधीन भवन के प्रतिरूपण का परीक्षण करने से पहले अक्षीय *बनाम* आनमनी दृढताओं के महत्त्व को परिप्रेक्ष्य में रखना उपयोगी होगा, चित्र 53.1a।

7 अक्षीय और आनमनी दृढता का अनुपात है:

$$\alpha = \frac{k_a}{k_t} = \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12EI}{L^3}} = \frac{AL^2}{12I}$$

$b \times h$ आयताकार काट के लिए, जहाँ $b = h/2$ और $L = 10h$ हैं, हमारे पास $\alpha = 100$ होगा।

8 W काट के लिए, जहाँ

$$\left.\begin{aligned} Z &\approx \frac{wd}{9} \\ \frac{Z}{S} &= \xi = 1.1 \\ S &= \frac{I}{\frac{d}{2}} \\ w &= (490)\ \text{lbs/ft}^3 A \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} I &\approx 0.208 A d^2 \\ \alpha &= \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12EI}{L^3}} = \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12E(0.208)Ad^2}{L^3}} = 0.4\left(\frac{L}{d}\right)^2 \end{aligned}$$

9 इस्पात संरचना के लिए मान सकते हैं
$L = 20d,\ \Rightarrow\ \alpha = 160$

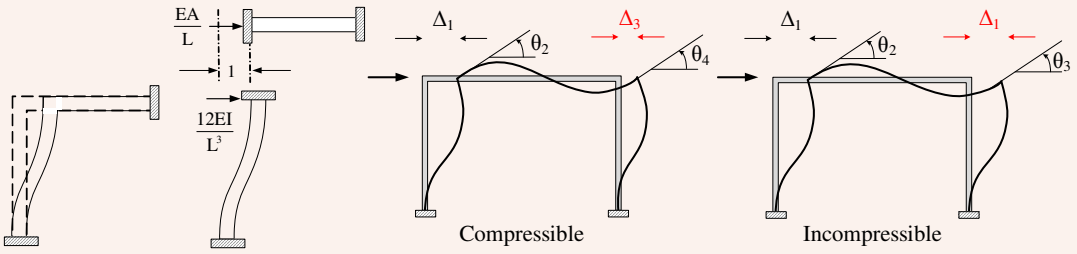
10 ध्यान दें: अक्षीय विरूपण नगण्य हो सकते हैं, किंतु अक्षीय बल नगण्य नहीं होता। भूकंपीय विश्लेषण में इसका प्रायः उपयोग करके (छोटे) बहुखंडीय भवन को संकेंद्रित द्रव्यमानों वाले एकल स्तंभ से प्रतिस्थापित किया जाता है।

11 यदि $\alpha >\approx 10$ हो, तो अक्षीय विरूपण की उपेक्षा करके स्वातंत्र्य-कोटियों की संख्या घटाई जा सकती है, चित्र 53.1b। अतः यदि ढाँचा पार्श्व (पवन अथवा भूकंप) भार के अधीन हो, तो प्रत्येक स्तंभ का अपरूपण बल उसकी आनमनी दृढता के समानुपाती है।

53.2.2 प्रतिरूपण

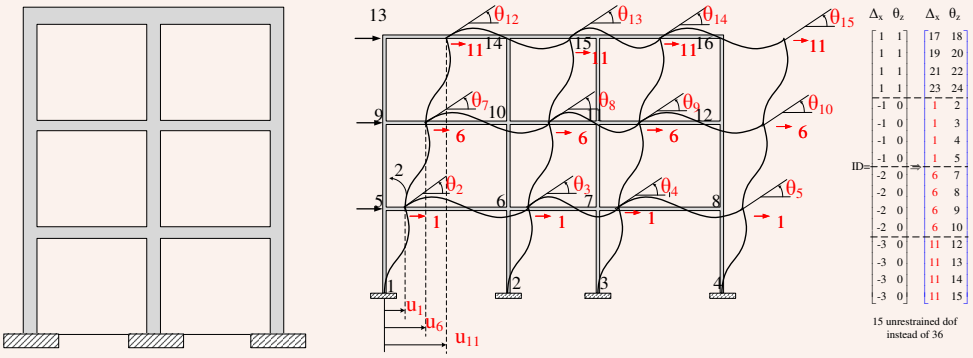
12 बहुमंजिला/बहुखंडीय ढाँचों के लिए अबाधित स्वातंत्र्य-कोटियों की संख्या (और इस प्रकार व्युत्क्रमित किए जाने वाले आव्यूहों का आकार) पर्याप्त रूप से घटाई जा सकती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) अक्षीय और आनमनी दृढताएँ (b) ढाँचा विश्लेषण पर प्रभाव

चित्र 53.1: अक्षीय *बनाम* आनमनी दृढताएँ

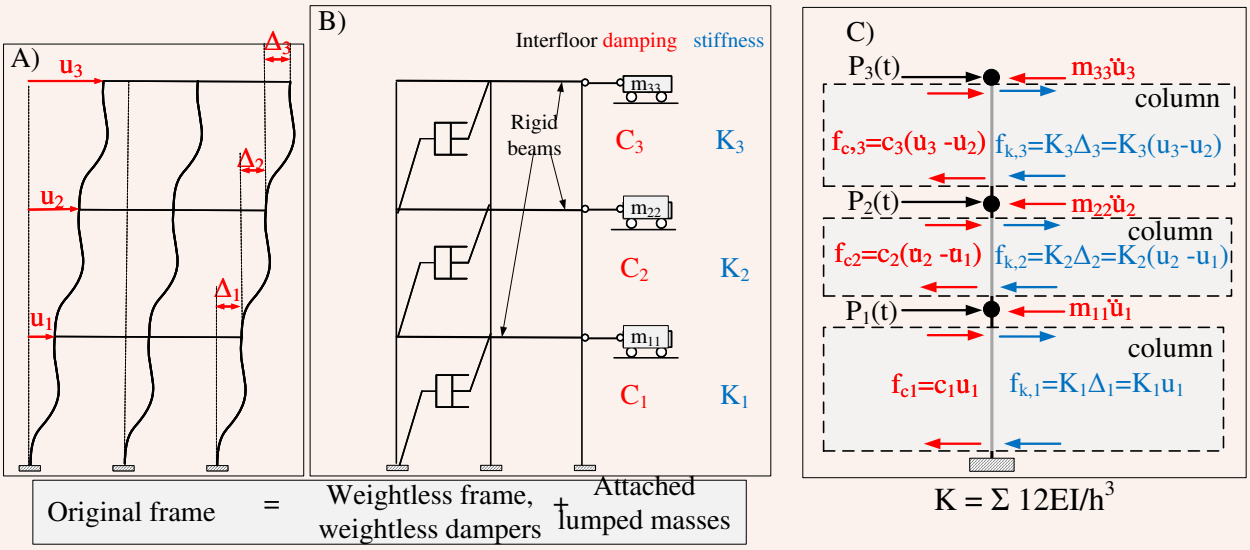


चित्र 53.2: अक्षीय दृढता की उपेक्षा पर अबाधित विस्थापनों में कमी

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

13 अक्षीय विरूपण की उपेक्षा से पार्श्व भार (पवन, भूकंप) के अधीन निम्न-ऊँचाई भवन ढाँचों का गतिक विश्लेषण बहुत सरल हो जाता है।

14 अक्षीय दृढता की उपेक्षा सहित पार्श्व भार के अधीन भवन का मुक्त-पिंड आरेख चित्र 53.1a में दर्शाया गया है।



चित्र 53.3: भूकंपीय भार हेतु भवन का प्रतिरूपण

15 दृढता और अवमंदन बल निम्न द्वारा दिए जाते हैं (ध्यान दें कि $\Delta_i = u_i - u_{i-1}$, चित्र 53.3-A)

$$\begin{aligned}
F_{K,1} &= f_{k,1} - f_{k,2} = K_1 u_1 - K_2(u_2 - u_1) \\
F_{K,2} &= f_{k,2} - f_{k,3} = K_2(u_2 - u_1) - K_3(u_3 - u_2) \\
F_{K,3} &= f_{k,3} \qquad\quad = K_3(u_3 - u_2) \\
\hline
F_{C,1} &= f_{c,1} - f_{c,2} = c_1\dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\
F_{C,2} &= f_{c,2} - f_{c,3} = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \\
F_{C,3} &= f_{c,3} \qquad\quad = c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2)
\end{aligned} \tag{53.1}$$

जहाँ $F_{K,i}$ और $F_{C,i}$ आसंधियों पर प्रयुक्त दृढता और अवमंदन के कारण परिणामी आंतरिक बल हैं। शीर्ष तल को छोडकर दो योगदान होते हैं—एक आसंधि के ऊपर और दूसरा नीचे, चित्र 53.3-C))।

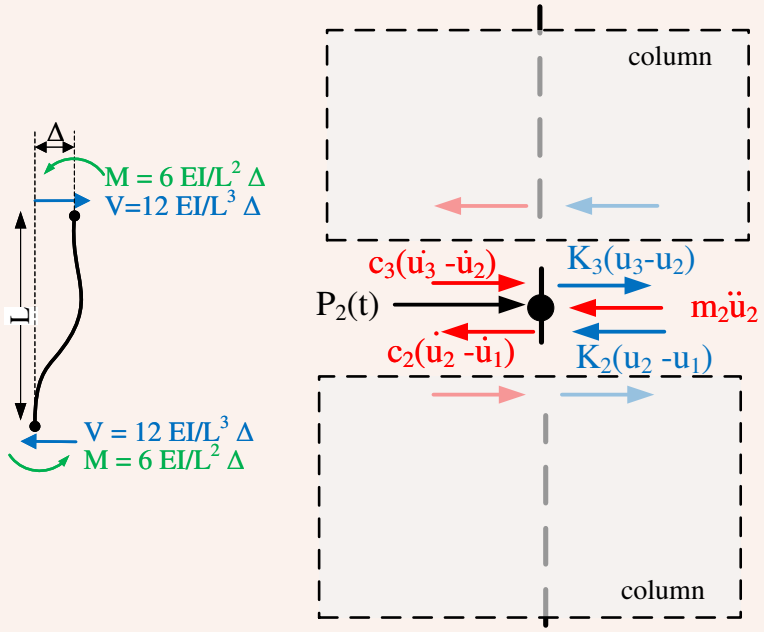
16 मंजिला दृढता उस मंजिल के सभी स्तंभों की पार्श्व दृढताओं का योग है $K_i = \sum_{columns} \frac{12EI_c}{h^3}$।

17 दृढता बल: $F_{K,i} = f_{k,i} - f_{k,i+1}$।

18 अपरूपण बल (सदस्य के अंत पर) $\mathbf{f}_i$, सापेक्ष तल विस्थापनों से $\mathbf{f}_i = K_i\Delta_i = K_i(u_i - u_{i-1})$ द्वारा संबद्ध है।

19 तीनों आसंधियों में से प्रत्येक पर न्यूटन का द्वितीय गति नियम लागू करके, चित्र 53.4, समीकरण 53.1 को इस प्रकार पुनः लिख सकते हैं

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 53.4: आसंधि का मुक्त-पिंड आरेख

$$\begin{array}{llll} P_3(t) & -m_{33}\ddot{u}_3 & -c_3(\dot{u}_3-\dot{u}_2) & -K_3(u_3-u_2) & =0 \\ P_2(t) & -m_{22}\ddot{u}_2 & +c_3(\dot{u}_3-\dot{u}_2)-c_2(\dot{u}_2-\dot{u}_1) & +K_3(u_3-u_2)-K_2(u_2-u_1) & =0 \\ P_1(t) & -m_{11}\ddot{u}_1 & +c_2(\dot{u}_2-\dot{u}_1)-c_1\dot{u}_1 & +K_2(u_2-u_1)-K_1u_1 & =0 \end{array}$$

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर:

$$\begin{array}{llll} m_{11}\ddot{u}_1 & +(c_1+c_2)\dot{u}_1-c_2\dot{u}_2 & +(k_1+k_2)u_1-k_2u_2 & =P_1(t) \\ m_{22}\ddot{u}_2 & -c_2\dot{u}_1+(c_2+c_3)\dot{u}_2-c_3\dot{u}_3 & -k_2u_1+(k_2+k_3)u_2-k_3u_3 & =P_2(t) \\ m_{33}\ddot{u}_3 & -c_3\dot{u}_2+c_3\dot{u}_3 & -K_3u_2+K_3u_3 & =P_3(t) \end{array}$$

or

$$\mathbf{M}\{\ddot{u}\}+\mathbf{C}\dot{u}+\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{P}(t)$$

जहाँ

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53.2.2.1 उदाहरण 53.1: पार्श्व भार के प्रति भवन की रैखिक प्रत्यास्थ प्रतिक्रिया का मोंटे कार्लो अनुकरण

(Bucher, 2009) से अनुकूलित।

हम चित्र 53.3 के भवन का पुनः परीक्षण करते हैं, किंतु इसे चार मंजिलों तक विस्तारित करते हैं। इस पर चार स्थैतिक भार F_i, $i = 1, 2, 3, 4$ लगाए गए हैं। मंजिल-पट्टों को दृढ माना गया है तथा स्तंभों की लंबाई समान $H = 4$ m और आनमनी दृढताएँ भिन्न EI_k, $k = 1...8$ हैं। भार और दृढताएँ *यादृच्छिक* चर हैं। भारों का प्रसामान्य वितरण 20 kN माध्य और 0.4 COV के साथ है, जबकि दृढताओं का प्रसामान्य वितरण 10 MNm^2 माध्य और 0.2 COV के साथ है। सभी चर युग्मतः स्वतंत्र हैं। हमें निम्नलिखित की गणना करनी है

- शीर्ष मंजिल के क्षैतिज विस्थापन u का माध्य मान, मानक विचलन तथा विचरण गुणांक,
- वह प्रायिकता p_F कि u का मान 0.1 m से अधिक हो।

विश्लेषण संरचना के रैखिक प्रत्यास्थ व्यवहार पर आधारित होगा और गुरुत्व के प्रभावों को सम्मिलित नहीं करेगा। शीर्ष मंजिल का विक्षेप अंतर-मंजिली सापेक्ष विस्थापनों 53.3 को जोडकर निकाला जा सकता है

$$
\begin{aligned}
u_4 &= \frac{F_4 H^3}{12\,(EI_7 + EI_8)} \\
u_3 &= \frac{(F_3 + F_4)\,H^3}{12\,(EI_5 + EI_6)} \\
u_2 &= \frac{(F_2 + F_3 + F_4)\,H^3}{12\,(EI_3 + EI_4)} \\
u_1 &= \frac{(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)\,H^3}{12\,(EI_1 + EI_2)} \\
u &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4
\end{aligned}
$$

इस उदाहरण के लिए MATLAB®कोड §I.2.15 में दिया गया है, जिससे $\mu_u = 0.0545$, $\sigma_u = 0.0128$, $COV = 0.2353$, और विफलता की प्रायिकता ${}_pF == 7.6100e-04$ प्राप्त होती है

53.3 समस्या निरूपण

53.3.1 विचरणात्मक निरूपण

20 किसी सामान्य त्रिविमीय सातत्यक में, अवमंदन के बिना प्रारंभिक आयतन Ω की गति का समीकरण है

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} \tag{53.2}$$

जहाँ $\mathbf{m}$, $\rho\mathbf{I}$ के बराबर द्रव्यमान-घनत्व आव्यूह है, और $\mathbf{b}$ पिंड बलों का सदिश है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

21 अवकल संकारक $\mathbf{L}$ (समीकरण O.7) है

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

22 रैखिक प्रत्यास्थ पदार्थ के लिए

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}$$

और अरैखिक पदार्थ के लिए, संघटक समीकरण इस प्रकार लिखे जा सकते हैं

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_i \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

जहाँ $\mathbf{D}_i$ स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह है ।

23 समीकरण 53.2 पिंड की गति को प्रबल अर्थ में वर्णित करता है, जबकि न्यूनतम पूरक आभासी कार्य (अथवा भारित अवशेष/गैलेर्किन) के सिद्धांत से दुर्बल निरूपण प्राप्त होता है

$$\int_\Omega \delta \mathbf{u}^T [\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}] \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{53.3}$$

24 गाउस अपसरण प्रमेय, समीकरण R.4, लगाने पर:

$$\int\int_A \phi \mathrm{div}\ \mathbf{q} \mathrm{d}A = \oint_s \phi \mathbf{q}^T \mathbf{n} \mathrm{d}s - \int\int_A (\boldsymbol{\nabla}\phi)^T \mathbf{q} \mathrm{d}A$$

और यह स्मरण रखते हुए कि $\mathbf{L}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\int_\Omega \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \mathrm{d}\Gamma$$

25 अतः समीकरण 53.3 निम्न रूप में परिवर्तित होता है

$$\int_\Omega [\delta \mathbf{u}^T (\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}] \mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{53.4}$$

अब तक पदार्थ के व्यवहार के संबंध में कोई धारणा नहीं बनाई गई है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

26 अब हम आभासी कार्य समीकरण (समीकरण 53.4) का स्थानिक विविक्तीकरण प्राप्त करेंगे। परिमित अवयवों के मूल सिद्धांतों से निम्न संबंध मिलते हैं:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} \\
\delta\mathbf{u}^T &= \delta\bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{N}^T \\
\ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}\ddot{\bar{\mathbf{u}}} \\
\mathbf{B} &= \mathbf{L}\mathbf{N} \\
\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T &= \delta\bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{B}^T \\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{B}\dot{\bar{\mathbf{u}}}
\end{aligned}$$

27 रैखिक समस्याओं के लिए $\boldsymbol{\sigma}_{t,n} = \mathbf{D}_e\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}_{t,n}$, और उचित प्रतिस्थापन से यह प्राप्त होता है

$$\underbrace{\underbrace{\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{m}\mathbf{N}\mathrm{d}\Omega\,\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{t,n}}_{\mathbf{M}_{tt}}}_{\mathbf{P}^{inertia}_{t,n}} + \underbrace{\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}_e\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega\,\bar{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\mathbf{K}}}_{\mathbf{P}^{int}_{t,n}} - \underbrace{\left(\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{P}^{ext}_{t,n}\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \mathbf{N}^T\mathbf{t}_{t,n}\mathrm{d}\Gamma\right)}_{\mathbf{P}^{ext}_{t,n}} = 0$$

अथवा $\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{t,n} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n}$ जो अंतर्निहित काल समाकलन में गति के अर्ध-विविक्त रैखिक समीकरण को निरूपित करता है।

28 द्रव्यमान आव्यूह और ज्यामितीय आव्यूह (समीकरण 60.5) की समानता पर ध्यान दें

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{m}\mathbf{N}\mathrm{d}\Omega \\
\mathbf{k}^{(e)}_g &= P^{(e)}\int_L \mathbf{N}_{,x}\mathbf{N}_{,x}dx
\end{aligned}$$

29 अवमंदन गुणांक की अनुपस्थिति पर भी ध्यान दें (जो एक अतार्किक संख्यात्मक "युक्ति" है)।

30 यदि हम श्यान अवमंदन मानें (नीचे देखें) और $\bar{\mathbf{u}}$ को $\mathbf{u}$ से प्रतिस्थापित करें, तो प्राप्त होता है

$$\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{P}^{int}_t = \mathbf{P}^{ext}_t \tag{53.5}$$

जहाँ $\mathbf{M}_{tt}$ और $\mathbf{C}_{tt}$ संरचना के आदर्शीकरण के लिए क्रमशः द्रव्यमान और श्यान अवमंदन आव्यूह हैं; $\ddot{\mathbf{u}}_t$ आसंधीय त्वरण सदिश, $\dot{\mathbf{u}}_t$ आसंधीय वेग सदिश, $\mathbf{P}^{int}_t$ आसंधीय विस्थापन सदिश $\mathbf{u}_t$ से उत्पन्न स्थैतिक प्रत्यास्थापक अथवा आंतरिक आसंधीय बल सदिश, और $\mathbf{P}^{ext}_t$ भूकंपीय भारण के कारण लगाए गए आसंधीय बलों का सदिश है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53.3.2 द्रव्यमान निरूपण

[31] द्रव्यमान आव्यूह के दो संभावित निरूपण हैं: संकेंद्रित और संगत।

संकेंद्रित द्रव्यमान: यह माना जाता है कि सभी द्रव्यमान अंत्य आसंधियों पर संकेंद्रित हैं। यद्यपि यह पूर्णतः सही नहीं है, इस प्रतिरूप का लाभ यह है कि हमें एक विकर्ण आव्यूह मिलता है जिसका व्युत्क्रम सरलता से निकाला जा सकता है। यदि धरन अवयव की अक्षीय गति सम्मिलित की जाए, तो संगत विस्थापन सदिश के साथ द्रव्यमान आव्यूह है

$$\mathbf{m}_e = \rho \cdot A \cdot L_e \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

हम देखते हैं कि घूर्णी DOF के अनुरूप विकर्ण पर शून्य पद हैं। घूर्णी DOF को सम्मिलित करने के लिए हम लंबाई dx की एक "चकती" पर विचार करते हैं, जो प्रथम आसंधि से निर्देशांक x पर है। प्रथम आसंधि के परितः इस "चकती" का घूर्णी जड़त्व आघूर्ण है

$$dm_r = \rho \left(\frac{I}{A} + x^2 \right) dx$$

जहाँ ρ अवयव का द्रव्यमान घनत्व (प्रति इकाई लंबाई द्रव्यमान) है, और A धरन अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल है। चूँकि अवयव के आधे भाग का घूर्णी जड़त्व प्रत्येक आसंधि पर संकेंद्रित किया जाता है, अतः हमें मिलता है

$$m_{ri} = m_{rj} = \int_0^{L/2} dm_r = \frac{\rho L}{2} \left(\frac{I}{A} + \frac{L^2}{12} \right) = \frac{\rho L}{2} \left(r_y^2 + \frac{L^2}{12} \right)$$

और निम्न घूर्णी द्रव्यमान आव्यूह को स्थानांतरीय आव्यूह में जोड़ना आवश्यक है

$$m_r = \mathbf{m}_e = \rho \cdot A \cdot L_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{ri} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{rj} \end{bmatrix} = \frac{\rho L}{2} \left(r_y^2 + \frac{L^2}{12} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

संगत द्रव्यमान: इसमें शुद्धगतिक रूप से समतुल्य द्रव्यमान आव्यूह प्रयुक्त होता है, जिसमें जड़त्व बल सभी स्वतंत्रता कोटियों से संबद्ध होते हैं। दिया है

$$\mathbf{m}_e = \int_0^{L_e} \rho \cdot A(x) \cdot \mathbf{N}_d(x)^T \cdot \mathbf{N}_d(x) \mathrm{d}x$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

धरन के आकार फलनों (समीकरण 49.11) को प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho \cdot A \cdot L_e}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22 \cdot L_e & 0 & 54 & -13 \cdot L_e \\ 0 & 22 \cdot L_e & 4 \cdot L_e^2 & 0 & 13 \cdot L_e & -3 \cdot L_e^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13 \cdot L_e & 0 & 156 & -22 \cdot L_e \\ 0 & -13 \cdot L_e & -3 \cdot L_e^2 & 0 & -22 \cdot L_e & 4 \cdot L_e^2 \end{bmatrix}$$

तत्पश्चात द्रव्यमान आव्यूह को वैश्विक निर्देश-तंत्र में रूपांतरित किया जाता है $\mathbf{M}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \mathbf{m}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$

53.3.3 अवमंदन

32 सभी संरचनाएँ अवमंदित होती हैं (ऊष्मागतिकी का $2nd$ नियम), अन्यथा उनके दोलन कभी समाप्त नहीं होंगे। अवमंदन को ऊर्जा क्षय करने वाले घर्षण बल के रूप में देखा जा सकता है और यह विभिन्न रूप ले सकता है।

33 अवमंदन का सर्वाधिक प्रयुक्त रूप तथाकथित श्यान अथवा रेले अवमंदन है, जिसे गति के समीकरण में सम्मिलित करने पर निम्न रूप प्राप्त होता है

$$\mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}_{t,n}^{int} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext}$$

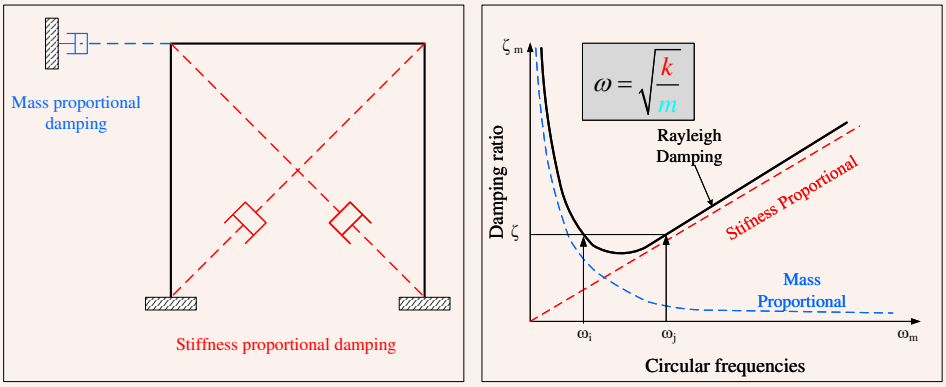
जहाँ $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$ और $\mathbf{u}_{t,n}$ वर्तमान काल चरण पर क्रमशः आसंधीय त्वरण, वेग और विस्थापन सदिश हैं; $\mathbf{P}_{t,n}^{int}$ वर्तमान काल चरण पर स्थैतिक प्रत्यास्थापक अथवा आंतरिक आसंधीय बल सदिश है।

34 अवमंदन से ऊर्जा क्षय का प्रतिरूपण अपेक्षित है। अरैखिक विश्लेषण में इसका विचार कुछ ऐसे संघटक प्रतिरूपों द्वारा किया जाता है जिनमें शैथिल्य अवमंदन सम्मिलित होता है, जैसे कंक्रीट के लिए संशोधित केंट और पार्क प्रतिरूप। अतः अरैखिक विश्लेषण में अवमंदन जोड़ते समय अत्यधिक सावधानी आवश्यक है।

35 रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण में अवमंदन का सर्वाधिक प्रचलित रूप तथाकथित श्यान अवमंदन (जिसे रेले अवमंदन के नाम से अधिक जाना जाता है) है। इस सरलीकरण में हम संरचना और किसी बाह्य स्थिर बिंदु के बीच एक श्यान अवमंदक (जो परिभाषानुसार वेग के प्रति संवेदनशील है)—द्रव्यमान-समानुपाती—तथा संरचना के भीतर सभी स्वतंत्रता कोटियों को जोड़ने वाले अवमंदकों के एक अन्य समुच्चय—दृढता-समानुपाती अवमंदक—की उपस्थिति मानते हैं, चित्र 53.5। श्यान अवमंदन: $\mathbf{C}_{tt} = a_m \cdot \mathbf{M}_{tt} + b_k \cdot \mathbf{K}_{tt}$, जहाँ a_m और b_k वे गुणांक हैं जो क्रमशः द्रव्यमान और दृढता पदों को पूर्व-गुणित करते हैं। गुणांक a_m और b_k की गणना उन दो वृत्तीय आवृत्तियों (ω_1 और ω_2, radians/sec.) के आधार पर की जाती है जिन्हें क्रमशः ξ_1 और ξ_2 पर अवमंदित करना है। यहाँ ω_m और ξ_m, m^{th} विधा की क्रमशः वृत्तीय आवृत्ति और अवमंदन अनुपात हैं। सरलता से दिखाया जा सकता है कि

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_m \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 53.5: द्रव्यमान- और दृढता-समानुपाती अवमंदन

36 यदि दोनों विधाओं के लिए समान अवमंदन अनुपात ζ मान लिया जाए (एक उचित व्यावहारिक धारणा), तो

$$a_m = \zeta \frac{2\omega_i \cdot \omega_j}{\omega_i + \omega_j}; \quad b_k = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j}$$

37 पुनः इस बात पर बल देना चाहिए कि रैखिक और अरैखिक विश्लेषणों में भिन्न अवमंदन गुणांक प्रयुक्त किए जाने चाहिए (विशेषतः यदि अरैखिक संघटक प्रतिरूप शैथिल्य अवमंदन का विचार करता हो)। इसके अतिरिक्त, यदि अरैखिक विश्लेषण में रेले अवमंदन प्रयुक्त हो, तो गुणांकों a_m और b_k को प्रत्येक काल वृद्धि पर अद्यतन करना पड सकता है, ताकि स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह $\mathbf{K}_t$ में परिवर्तन परिलक्षित हो।

38 व्यवहार में संरचना को कंपन-उत्तेजकों से उत्तेजित करके अवमंदन गुणांक प्राप्त किए जा सकते हैं, यद्यपि यह केवल प्रत्यास्थ परास के लिए संभव है।

53.3.3.1 उदाहरण 53.2: अपरूपण भवन के लिए रेले अवमंदन गुणांकों का अंशांकन

✳ एक तीन-मंजिला प्रबलित कंक्रीट अपरूपण भवन का विश्लेषण किया गया है और इसकी प्रथम दो प्राकृतिक आवृत्तियाँ $f_1 = 1.20$ Hz और $f_2 = 3.60$ Hz (अर्थात् $\omega_1 = 7.540$ rad/s और $\omega_2 = 22.619$ rad/s). दोनों विधाओं को लक्ष्य अवमंदन अनुपात $\zeta = 5\%$ रेले अवमंदन $\mathbf{C} = a_m\mathbf{M} + b_k\mathbf{K}$ का प्रयोग करते हुए प्रदान करना है। निर्धारित करें: (a) गुणांक a_m और b_k; (b) तृतीय विधा में निहित अवमंदन अनुपात ($f_3 = 6.00$ Hz, $\omega_3 = 37.699$ rad/s); (c) अभियांत्रिक अर्थ।

हल।

(a) रेले गुणांक।

दोनों लक्ष्य विधाओं में समान अवमंदन होने पर सरलीकृत सूत्र देते हैं:

$$a_m = \zeta \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = 0.05 \times \frac{2 \times 7.540 \times 22.619}{7.540 + 22.619} = 0.05 \times \frac{341.1}{30.159} = 0.565 \text{ s}^{-1}$$

$$b_k = \zeta \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} = 0.05 \times \frac{2}{30.159} = 3.32 \times 10^{-3} \text{ s}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(b) विधा 3 में निहित अवमंदन।
किसी भी विधा n, जिसकी आवृत्ति ω_n है, के लिए रेले प्रतिरूप निम्न अवमंदन अनुपात प्रदान करता है:

$$\zeta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a_m}{\omega_n} + b_k \omega_n\right)$$

विधा 3 के लिए:

$$\zeta_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{0.565}{37.699} + 3.32\times10^{-3}\times 37.699\right) = \frac{1}{2}\left(0.01499 + 0.12516\right) = 7.0\%$$

(c) अभियांत्रिक अर्थ।
तीन टिप्पणियाँ उल्लेखनीय हैं।

1. संरचना द्वारा विधाएँ 1 और 2 ठीक लक्ष्य 5% पर अवमंदित हैं।
2. अंशांकन पट्टी से ऊपर स्थित विधा 3, 7% पर अति-अवमंदित है: दृढता-समानुपाती पद $b_k\omega_n$ आवृत्ति के साथ रैखिक रूप से बढता है और उच्च विधाओं पर प्रभावी होता है। अनेक विधाओं वाले परिमित अवयव प्रतिरूप में उच्चतम-आवृत्ति (लघुतम-तरंगदैर्घ्य) विधाओं को कृत्रिम रूप से बडे अवमंदन अनुपात दिए जा सकते हैं — यह अवांछित उच्च-आवृत्ति प्रतिक्रिया दबाने के लिए प्रयुक्त एक अभिप्रेत विशेषता है, किंतु यदि वे विधाएँ वास्तविक ऊर्जा वहन करती हों तो त्रुटि का संभावित स्रोत भी है।
3. द्रव्यमान-समानुपाती पद a_m/ω_n आवृत्ति के साथ घटता है और अंशांकन पट्टी से *नीचे* की विधाओं (उदाहरणार्थ, आधार-वियोजित संरचनाओं में अत्यंत निम्न-आवृत्ति दोलन अथवा सर्पण विधाएँ) को अति-अवमंदित करेगा; इसलिए इसे सावधानी से संभालना आवश्यक है।

ये विशेषताएँ स्पष्ट करती हैं कि अंशांकन आवृत्तियों (ω_i, ω_j) का चयन केवल संख्यात्मक नहीं, बल्कि प्रतिरूपण संबंधी निर्णय है: उन्हें उस आवृत्ति परास को परिबद्ध करना चाहिए जिसमें संरचना की गतिक प्रतिक्रिया के महत्त्वपूर्ण होने की अपेक्षा है।

53.3.3.2 उदाहरण 53.3: विश्लेषणात्मक आधाररेखा: सामान्य प्रारंभिक दशाओं से मुक्त कंपन

✳ संख्यात्मक काल-चरणन पर जाने से पहले ऐसा यथार्थ संवृत-रूप परिणाम उपयोगी है जिसके विरुद्ध समाकलकों का सत्यापन किया जा सके। निम्न अवमंदित SDOF निकाय पर विचार करें:

$$m = 2\,000\ \text{kg}, \quad k = 800\,000\ \text{N/m}, \quad \zeta = 2\%$$

जिसे प्रारंभिक दशाओं $u_0 = 25\ \text{mm}$ और $v_0 = 80\ \text{mm/s}$ से मुक्त किया जाता है। निर्धारित करें: (a) निकाय के गुण; (b) यथार्थ मुक्त-कंपन प्रतिक्रिया $u(t)$; (c) आयाम और कला; (d) $t = 0.20\ \text{s}$ पर प्रतिक्रिया और प्रथम शून्य-पारण का समय।

हल।
(a) निकाय के गुण।

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800\,000}{2\,000}} = 20.00\ \text{rad/s}, \qquad T_n = \frac{2\pi}{20} = 0.3142\ \text{s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 20\sqrt{1-0.0004} = 19.996\ \text{rad/s}, \qquad T_d = 0.3143\ \text{s}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

जब $\zeta = 2\%$ हो, तब ω_d और ω_n का अंतर केवल 0.02% है, जो पुष्टि करता है कि अल्प-अवमंदित संरचनाएँ लगभग अनवमंदित प्राकृतिक आवृत्ति पर ही दोलित होती हैं।

(b) यथार्थ प्रतिक्रिया।

$u(0) = u_0$ और $\dot{u}(0) = v_0$ के साथ अल्प-अवमंदित मुक्त-कंपन हल है:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$$

संख्याएँ प्रतिस्थापित करने पर ($\zeta\omega_n = 0.02 \times 20 = 0.40\ \text{s}^{-1}$, $\omega_d \approx 19.996$):

$$\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} = \frac{80 + 0.40 \times 25}{19.996} = \frac{90}{19.996} = 4.501\ \text{mm}$$

$$u(t) = e^{-0.40t}\left[25\cos(19.996\,t) + 4.501\sin(19.996\,t)\right] \quad [\text{mm}]$$

(c) आयाम और कला।

आयाम-कला रूप $u(t) = \rho\, e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$ में:

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2} = \sqrt{25^2 + 4.501^2} = \sqrt{625 + 20.26} = 25.40\ \text{mm}$$

$$\tan\phi = \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d u_0} = \frac{4.501}{25} = 0.1800 \quad \Rightarrow \quad \phi = 10.2^\circ$$

(d) $t = 0.20$ s पर प्रतिक्रिया और प्रथम शून्य-पारण।

$$u(0.20) = e^{-0.40\times0.20}\left[25\cos(19.996 \times 0.20) + 4.501\sin(19.996 \times 0.20)\right]$$

$$= e^{-0.08}\left[25\cos(3.9992) + 4.501\sin(3.9992)\right]$$

$\cos(3.9992\ \text{rad}) = -0.6542$, $\sin(3.9992\ \text{rad}) = -0.7563$:

$$u(0.20) = 0.9231\left[25 \times (-0.6542) + 4.501 \times (-0.7563)\right] = 0.9231\left[-16.35 - 3.404\right] = -18.24\ \text{mm}$$

प्रथम शून्य-पारण $t = 0$ के बाद तब होता है जब $25\cos(\omega_d t) + 4.501\sin(\omega_d t) = 0$, i.e. $\tan(\omega_d t) = -25/4.501 = -5.554$, giving $\omega_d t = \pi - \arctan(5.554) = \pi - 1.391 = 1.749$ rad:

$$t_0 = \frac{1.749}{19.996} = 0.0875\ \text{s}$$

टिप्पणी। यह संवृत-रूप परिणाम इसी समस्या पर लगाए गए किसी भी संख्यात्मक समाकलक के लिए *सत्यापन मानदंड* का कार्य करता है: $\Delta t \to 0$ होने पर ऑयलर, केंद्रीय-अंतर और न्यूमार्क हलों को $u(0.20) = -18.24$ mm पर अभिसरित होना चाहिए। किसी एक जाँच-बिंदु पर संख्यात्मक परिणाम की इस मान से तुलना कार्यान्वयन की शुद्धता की सरल किंतु प्रभावी जाँच है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53.3.4 संख्यात्मक तकनीक: ऑयलर विधियाँ

39 ऑयलर विधि प्रारंभिक मान समस्याओं (अर्थात् गतिक समस्याओं) को हल करने की प्रथम-कोटि संख्यात्मक विधि है। यह वर्तमान बिंदु पर स्पर्शरेखा की प्रवणता से अगले बिंदु पर हल के मान का अनुमान लगाती है। इस विधि में नियत चरण-आकार प्रयुक्त होता है और प्रत्येक बिंदु पर हल निकालने के लिए केवल हल का प्रारंभिक मान तथा अवकल समीकरण आवश्यक हैं। ऑयलर विधि का मुख्य लाभ इसकी सरलता और कार्यान्वयन की सुगमता है, किंतु कुछ प्रकार के अवकल समीकरणों में इसकी परिशुद्धता कम हो सकती है और स्थिरता की समस्याएँ उत्पन्न हो सकती हैं।

40 वेग और फिर त्वरण जैसे उत्तरोत्तर उच्च अवकलजों पर विचार करते हुए हम *रूंगे-कुट्टा* विधि तक पहुँचते हैं, जिसकी निम्नतम-कोटि की विधि ऑयलर विधि है।

41 §59.1.1 में हम अवकल समीकरण का हल प्राप्त करने के लिए एक अन्य संख्यात्मक तकनीक, न्यूटन विधि, का उपयोग करेंगे।

42 हमारी समस्या में अंततः समीकरण 53.5 हल करना है, किंतु गतिक समस्या (§53.4) पर विचार करने से पहले ऑयलर विधि की संक्षिप्त समीक्षा उचित है।

43 ऑयलर विधि प्रारंभिक-मान वाले साधारण अवकल समीकरणों (जैसे संरचनात्मक गतिकी में) को हल करने की संख्यात्मक प्रक्रिया है। दूसरे शब्दों में, समय t_n पर हल ज्ञात होने पर समय t_{n+1} का हल कैसे प्राप्त किया जाए? चित्र 53.6 दोनों विधियों को दर्शाता है।

44 ध्यान दें कि हमने *अरैखिक विश्लेषण के लिए न्यूटन विधि और गतिकी के लिए ऑयलर विधि* का उल्लेख किया है।

45 हमारे प्रकरण में स्थान को परिमित अवयव द्वारा और समय को परिमित अंतर द्वारा विविक्त किया जाता है।

46 न्यूटन विधि (समीकरण 59.1) की भाँति हम टेलर श्रेणी से आरंभ करते हैं।

अग्र ऑयलर/स्पष्ट

$$y(t_n+h) \equiv y_{n+1} = y(t_n) + h \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_n} + O(h^2) \Rightarrow y^?_{n+1} \simeq y^\checkmark_n + h f(y^\checkmark_n, t_n) \tag{53.6}$$

जहाँ $h = \Delta t$, और $f(y_n, t_n) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_n}$। इसे स्पष्ट भी कहा जाता है क्योंकि y_{n+1} को y_n और $f(y_n, t_n)$ जैसी ज्ञात राशियों के रूप में स्पष्टतः दिया जाता है तथा कोई समीकरण हल नहीं करना पड़ता। स्पष्ट विधियाँ कार्यान्वित करने में सरल हैं, किंतु सशर्त रूप से स्थिर होती हैं (अर्थात् h किसी क्रांतिक मान से छोटा होना चाहिए)। यह ज्यामितीय अरैखिक समस्याओं के लिए पहले प्रयुक्त सन्निकट चरण-दर-चरण विधि के समान है।

पश्च ऑयलर/अंतर्निहित निम्न पश्च टेलर श्रेणी प्रसार से आरंभ होती है

$$y(t_n) \equiv y_n = y(t_{n+1}-h) = y(t_{n+1}) - h \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_{n+1}} + O(h^2) \Rightarrow y^?_{n+1} \simeq y^\checkmark_n + h f(y^?_{n+1}, t_{n+1})$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यह अंतर्निहित विधि है क्योंकि $f(y_{n+1}, t_{n+1})$ ज्ञात नहीं है और प्रत्येक काल चरण पर एक (सामान्यतः) अरैखिक समीकरण हल करना पड़ता है (संभवतः न्यूटन-रैफ्सन विधि द्वारा)। स्पष्टतः यह स्पष्ट विधि की अपेक्षा संगणकीय रूप से अधिक महँगी है, किंतु यह विधि अशर्त रूप से स्थिर है।

47 हम देखते हैं कि अंतर्निहित विधि (न्यूटन-रैफ्सन हल की कीमत पर) सदैव एक "यथार्थ" हल देती है। संरचनात्मक गतिकी के संदर्भ में कहा जा सकता है कि साम्य संतुष्ट होता है। स्पष्ट विधि में ऐसा नहीं होता।

53.3.4.1 उदाहरण 53.4: ऑयलर विधि

हमें निम्न प्रथम-कोटि साधारण रैखिक अवकल समीकरण हल करना है:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + (t - y(t))^2; \qquad 2 \le t \le 3; \qquad y(0) = 1; n = 0$$

- $h = 0.1$ के साथ अग्र ऑयलर

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n) \Rightarrow y_1 = 1 + 0.1\left[1 + (2. - 1.)^2\right] = 1.2$$

- पश्च ऑयलर से प्राप्त होगा

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(y_{n+1}, t_{n+1}) \\ \Rightarrow y_1 &= 1 + 0.1\left[1 + (2.1 - y_1)^2\right] \\ \Rightarrow 0 &= 0.1y_1^2 - 1.42y_1 + 1.541 \\ \Rightarrow y_1 &= 1.1839 \end{aligned}$$

इस प्रकरण में हमें एक द्विघात समीकरण हल करना पड़ा; किंतु सामान्यतः y_n ज्ञात करने के लिए न्यूटन विधि का उपयोग करना पड सकता है।

- अरैखिक संरचनात्मक विश्लेषण के संदर्भ में इसका अर्थ है कि हम $n = 1$ पर साम्य की जाँच कर रहे हैं, जबकि स्पष्ट विधि में ऐसा नहीं है।

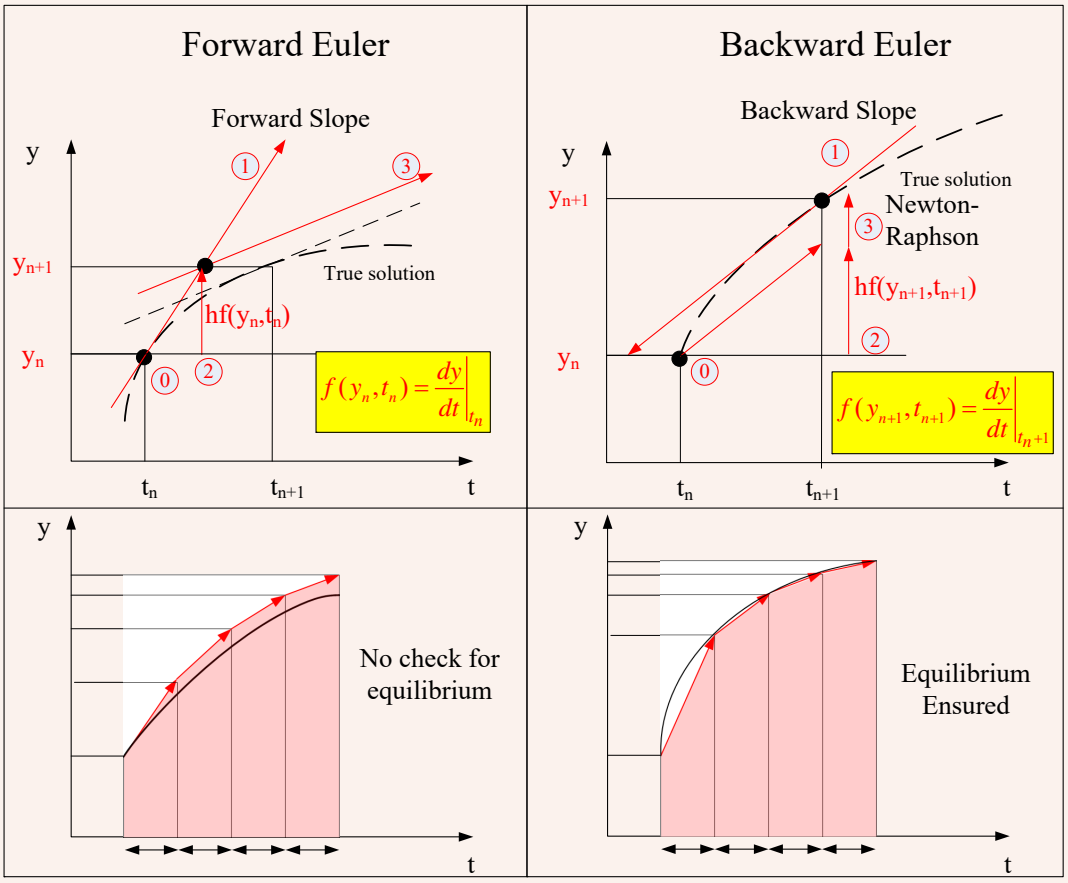
53.4 काल विविक्तीकरण

48 गणितीय रूप से समीकरण 53.5 द्वितीय-कोटि रैखिक अवकल समीकरणों के निकाय को निरूपित करता है और सिद्धांततः नियत गुणांकों वाले अवकल समीकरणों के हल की मानक प्रक्रियाओं से इन समीकरणों का हल प्राप्त किया जा सकता है।

49 किंतु यदि आव्यूहों की कोटि बड़ी हो, तो अवकल समीकरणों के सामान्य निकायों के हल हेतु प्रस्तावित प्रक्रियाएँ अत्यंत महँगी हो सकती हैं—जब तक कि गुणांक आव्यूहों $\mathbf{M}, \mathbf{C}$, और $\mathbf{K}$ की विशेषताओं का विशिष्ट लाभ न लिया जाए।

50 अतः व्यावहारिक परिमित अवयव विश्लेषण में हमारी मुख्य रुचि कुछ प्रभावी विधियों, अर्थात् प्रत्यक्ष

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 53.6: अग्र ऑयलर बनाम पश्च ऑयलर विधियाँ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समाकलन और विधा अध्यारोपण, में है। ये दोनों तकनीकें निकटतः संबंधित हैं और किसी एक विधि का चयन केवल उनकी संख्यात्मक प्रभावशीलता से निर्धारित होता है। वर्तमान कार्यान्वयन में प्रत्यक्ष समाकलन विधि प्रयुक्त है।

[51] प्रत्यक्ष समाकलन विधि में समीकरण 53.5 को संख्यात्मक चरण-दर-चरण प्रक्रिया द्वारा समाकलित किया जाता है; "प्रत्यक्ष" का अर्थ है कि संख्यात्मक समाकलन से पहले समीकरणों को किसी भिन्न रूप में रूपांतरित नहीं किया जाता।

53.4.1 अंतर्निहित

53.4.1.1 न्यूमार्क विधि

53.4.1.1.1 व्युत्पत्ति [52] न्यूमार्क विधि द्वितीय-कोटि अवकल समीकरणों (गति के समीकरण) के लिए ऑयलर विधि का सामान्यीकरण है।

[53] टेलर श्रेणी से आरंभ करते हुए

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} + \Delta t \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} \quad \text{Forward Euler}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} + \Delta t \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n} \quad \text{Backward Euler}$$

[54] न्यूमार्क विधि दक्षता के लिए उच्च-कोटि अवकलजों को सरल व्यंजकों (और इस प्रकार कम परिशुद्धता) से प्रतिस्थापित करके ऑयलर विधि से भिन्न होती है।

[55] पुनः हम पहले आसंधीय विस्थापन और वेग सदिश पदों के टेलर श्रेणी प्रसारों पर पिछले समय $n-1$ के मानों के परितः विचार करते हैं।

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t,n} &\approx \mathbf{u}_{t,n-1} + \frac{\partial \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots \\ \dot{\mathbf{u}}_{t,n} &\approx \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^2}\Delta t + \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

वे दोनों समीकरण टेलर श्रेणी के उच्च-कोटि पदों को छोड़कर सन्निकट विस्थापन और वेग सदिशों ($\mathbf{u}_{t,n}$ और $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$) को निरूपित करते हैं। हम उपर्युक्त दोनों समीकरणों के अंतिम पदों को इस प्रकार निरूपित करते हैं:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} &\approx \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial^2 t}}{\Delta t}\frac{\Delta t^3}{3!} \approx (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\frac{\Delta t^2}{3!} \\ &\approx \beta(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\,\Delta t^2 \\ \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^2}{2!} &\approx \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial^2 t}}{\Delta t}\frac{\Delta t^2}{2!} \approx (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\frac{\Delta t}{2!} \\ &\approx \gamma(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\,\Delta t \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ β और γ संख्यात्मक सन्निकटनों को निरूपित करने वाले प्राचल हैं।

[56] प्रतिस्थापन करने पर

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t^2 \cdot \beta \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}) \\ \dot{\mathbf{u}}_{t,n} &= \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \gamma \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\end{aligned}$$

[57] अतः हमें न्यूमार्क β विधि प्राप्त होती है, जिसमें निम्न समीकरण (अग्र अंतर) सम्मिलित हैं:

$$\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} \tag{53.7}$$

$$\mathbf{u}_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}\left[(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + 2\beta \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n}\right] \tag{53.8}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t\left[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \gamma \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n}\right] \tag{53.9}$$

जहाँ प्रथम समीकरण समय n पर व्यक्त साम्य समीकरण है और अन्य दो सन्निकट हल के विकास का वर्णन करने वाले परिमित-अंतर सूत्र हैं (ध्यान दें कि हमारे पास तीन समीकरण और तीन अज्ञात हैं: $\mathbf{u}_{t,n}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$ और $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}$)।

[58] β और γ वे प्राचल हैं जो स्थिरता और परिशुद्धता की विशेषताएँ निर्धारित करते हैं। न्यूमार्क β विधि की स्थिरता दशाएँ सारणी 53.1 में दी गई हैं:

- यदि $\gamma \geq \frac{1}{2}$ और $\beta \geq \frac{\gamma}{2}$ हो तो अशर्त रूप से स्थिर
- यदि $\gamma \geq \frac{1}{2}$ और $\beta < \frac{\gamma}{2}$ हो तो निम्न स्थिरता सीमा के साथ सशर्त रूप से स्थिर: $\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} = 0.551$

तालिका 53.1: विभिन्न विधियों के लिए स्थिरता दशाएँ

विधि	प्रकार	β	γ	स्थिरता दशा	परिशुद्धता की कोटि
नियत त्वरण	अंतर्निहित	1/4	1/2	अशर्त	2
रैखिक त्वरण	अंतर्निहित	1/3!=1/6	1/2!=1/2	$\Delta t \leq 2\sqrt{3}/\omega$	2
केंद्रीय अंतर	स्पष्ट	0	1/2	$\Delta t \leq 2/\omega$	2

53.4.1.1.2 न्यूमार्क β अंतर्निहित विधि [59] न्यूमार्क की अंतर्निहित विधि समीकरणों 53.7, 53.8 और 53.9 से आरंभ होती है, जिन्हें इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है:

$$\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} \tag{53.10}$$

$$\mathbf{u}_{t,n} = \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \Delta t^2 \cdot \beta \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} \tag{53.11}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \Delta t \cdot \gamma \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} \tag{53.12}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

जहाँ काल चरण $n-1$ पर ज्ञात राशियों पर $\tilde{(.)}$ चिह्न है और

$$\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$$
$$\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} = \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$$

60 समीकरण 53.11 से $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} = \frac{\mathbf{u}_{t,n}-\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}}{\Delta t^2 \cdot \beta}$ मिलता है;

61 समीकरण 53.12 में प्रतिस्थापन करके $\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}(\mathbf{u}_{t,n} - \tilde{\mathbf{u}}_{t,n})$ ज्ञात किया जा सकता है। अंततः समीकरण 53.10 में प्रतिस्थापन करने पर प्राप्त होता है:

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}\mathbf{C}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{?}$$
$$= \underbrace{\mathbf{P}^{ext}_{t,n} + \frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}\mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}}_{\checkmark}$$

62 यदि दिए गए पुनरावृत्ति चरण k में परीक्षण हल $\mathbf{u}^k_{t,n}$ और $\mathbf{P}^{int,k}_{t,n}$ हैं, तो वे गति के समीकरणों को संतुष्ट नहीं करते। अतः इस विशिष्ट चरण के लिए अवशिष्ट बल सदिश $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}$ के साथ लिख सकते हैं:

$$\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} + \overline{\mathbf{M}}_{tt}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{u}^k_{t,n}\right) - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n}$$

जहाँ $\overline{\mathbf{M}}_{tt} = \frac{\mathbf{M}_{tt}+\Delta t \cdot \gamma \cdot \mathbf{C}}{\Delta t^2 \cdot \beta}$।

63 प्रारंभिक दृढता पुनरावृत्त विधि का उपयोग करते हुए $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ को $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} = \mathbf{K}_{eff} \cdot \Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ से ज्ञात किया जा सकता है, जहाँ $\mathbf{K}_{eff}$ प्रभावी दृढता आव्यूह और $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n} - \mathbf{u}^k_{t,n}$ है।

64 प्रत्यास्थ खंड में $\mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{K}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n}$; प्रतिस्थापन करके $\mathbf{u}_{t,n}$ ज्ञात किया जा सकता है:

$$\mathbf{K}_{eff} \cdot \mathbf{u}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} + \overline{\mathbf{M}}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}$$

जहाँ $\mathbf{K}_{eff} = \overline{\mathbf{M}}_{tt} + \mathbf{K}_{tt}$ (संकेंद्रित अथवा संगत द्रव्यमान आव्यूह)।

65 अंततः हम $\delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ और अद्यतन विस्थापन सदिश $\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ को अगले पुनरावृत्ति चरण $k+1$ पर ज्ञात करते हैं:

$$\delta\mathbf{u}^k_{t,n} = \left[\mathbf{K}_{eff}\right]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n}; \quad \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \delta\mathbf{u}^k_{t,n}$$

ध्यान दें कि केवल संगत आव्यूह के लिए ही द्रव्यमान आव्यूह का व्युत्क्रम निकालना आवश्यक है।

66 अरैखिक विश्लेषण के साथ सादृश्य पर ध्यान दें, जहाँ $\delta\mathbf{u}$ अवशिष्ट बल को स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह से गुणा करने के बराबर है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53.4.1.2 हिल्बर-ह्यूजेस-टेलर विधि

67 न्यूमार्क β विधि की एक प्रमुख कमी यह है कि उच्च-आवृत्ति रव हल में बना रहता है। दूसरी ओर, जब प्राचल γ के माध्यम से रैखिक अवमंदन अथवा कृत्रिम श्यानता जोडी जाती है, तो परिशुद्धता स्पष्ट रूप से घटती है।

68 इस समस्या का समाधान हिल्बर-ह्यूजेस-टेलर विधि (HHT) (जिसे α विधि भी कहते हैं) करती है, जो परिशुद्धता को उतना घटाए बिना उच्च आवृत्तियों के लिए संख्यात्मक क्षय बढाती है।

69 HHT विधि में गति का समीकरण वर्तमान काल चरण n (अग्र अंतर) पर इस प्रकार लिखा जाता है:

$$\underbrace{\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\mathbf{P}^{inertia}_{t,n}}+\mathbf{P}^{int}_{t,n}=\mathbf{P}^{ext}_{t,n}$$

एक-चरण अंतर द्वारा इस समीकरण का सन्निकट हल खोजते हुए हम लिखते हैं,

$$\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}+(1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n-1}=(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n}-\alpha\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}$$

हम देखते हैं कि HHT विधि $\alpha(\mathbf{P}^{int}_{t,n}-\mathbf{P}^{int}_{t,n-1})$ प्रस्तुत करती है, जो दृढता-समानुपाती अवमंदन के सदृश है (वास्तव में सामान्यतः कहा जाता है कि α विधि संख्यात्मक अवमंदन प्रदान करती है)। उपर्युक्त समीकरण का प्रसार करने तथा अवमंदन और संभावित पदार्थीय अरैखिकता के प्रभाव सम्मिलित करने पर प्राप्त होता है:

$$(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n}-\alpha\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}=\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}+(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1}+(1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

यदि $-1/3\le\alpha\le 0$, $\beta=(1-\alpha)^2/4$, और $\gamma=(1-2\alpha)/2$, तो α विधि अशर्त रूप से स्थिर और द्वितीय-कोटि परिशुद्ध होती है।

70 मान लें कि हमने पिछले काल चरण $n-1$ पर प्रतिक्रिया, अर्थात् $\mathbf{u}_{t,n-1}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$ और $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$, प्राप्त कर ली है जो गति के समीकरण को संतुष्ट करती है; अब पुनरावृत्ति द्वारा वर्तमान काल चरण n पर हल निर्धारित करना है।

71 सर्वप्रथम प्रभावी बाह्य बल और प्रभावी दृढता निर्धारित करनी है।

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2\cdot\beta}\mathbf{M}_{tt}\cdot\mathbf{u}_{t,n}+\frac{\gamma}{\Delta t\cdot\beta}(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\mathbf{u}_{t,n}+(1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{?}$$

$$=\underbrace{(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}+\frac{1}{\Delta t^2\cdot\beta}\mathbf{M}_{tt}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}+\frac{\gamma}{\Delta t\cdot\beta}(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\checkmark}$$

$$\underbrace{-(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}+\alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{n-1}+\alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{\checkmark}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

72 पुनरावृत्ति चरण k में परीक्षण हल $\mathbf{u}_{t,n}^k$ और $\mathbf{P}_{t,n}^{int,k}$ आवश्यक नहीं कि गति के समीकरणों को संतुष्ट करें। अतः इस विशिष्ट चरण के लिए लिख सकते हैं:

$$\mathbf{P}_{t,n}^{R,k} = (1+\alpha)\mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \alpha\cdot\mathbf{P}_{t,n-1}^{ext} + \overline{\mathbf{M}}_{tt}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{u}_{t,n}^k\right) - (1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} - (1+\alpha)\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} + \alpha\cdot\mathbf{P}_{t,n-1}^{int}$$

जहाँ $\overline{\mathbf{M}}_{tt} = \frac{\mathbf{M}_{tt}+\Delta t\cdot\gamma(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}}{\Delta t^2\cdot\beta}$ और $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ अवशिष्ट बल सदिश है।

73 प्रारंभिक दृढता पुनरावृत्त विधि का उपयोग करते हुए $\Delta\mathbf{u}_{t,n}^k$ को $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k} = \mathbf{K}_{eff}\cdot\Delta\mathbf{u}_{t,n}^k$ से ज्ञात किया जा सकता है, जहाँ $\mathbf{K}_{eff}$ प्रभावी दृढता आव्यूह और $\Delta\mathbf{u}_{t,n}^k = \mathbf{u}_{t,n} - \mathbf{u}_{t,n}^k$ है।

74 प्रत्यास्थ खंड में प्रभावी दृढता आव्यूह निकालने हेतु $\mathbf{P}_{t,n}^{int}$ को प्रारंभिक दृढता आव्यूह $\mathbf{K}_{tt}$ के साथ इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं: $\mathbf{P}_{t,n}^{int} = \mathbf{K}_{tt}\cdot\mathbf{u}_{t,n}$।

75 प्रतिस्थापन करके $\mathbf{u}_{t,n}$ ज्ञात करते हैं:

$$\mathbf{K}_{eff}\cdot\mathbf{u}_{t,n} = (1+\alpha)\mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \alpha\cdot\mathbf{P}_{t,n-1}^{ext} + \overline{\mathbf{M}}_{tt}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - (1+\alpha)\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \alpha\cdot\mathbf{P}_{t,n-1}^{int}$$

जहाँ $\mathbf{K}_{eff} = \overline{\mathbf{M}}_{tt} + (1+\alpha)\mathbf{K}_{tt}$।

76 अंततः हम $\delta\mathbf{u}_{t,n}^k$ और अद्यतन विस्थापन सदिश $\mathbf{u}_{t,n}^{k+1}$ को अगले पुनरावृत्ति चरण $k+1$ पर ज्ञात करते हैं:

$$\delta\mathbf{u}_{t,n}^k = \left[\mathbf{K}_{eff}\right]^{-1}\cdot\mathbf{P}_{t,n}^{R,k};\ \mathbf{u}_{t,n}^{k+1} = \mathbf{u}_{t,n}^k + \delta\mathbf{u}_{t,n}^k$$

77 अंतिम टिप्पणियाँ:

- α ऐसा अवमंदन प्रस्तुत करता है जो काल वृद्धि और आसंधि के कंपन-काल के अनुपात के साथ बढता है।
- α के ऋणात्मक मान अवमंदन उत्पन्न करते हैं।
- यदि $\alpha = 0$ हो, तो कोई कृत्रिम अवमंदन नहीं होता (ऊर्जा संरक्षित रहती है) और यह ठीक नियत त्वरण (समलंब नियम)—न्यूमार्क β विधि—है, यदि $\beta = 1/4$ और $\gamma = 1/2$ हों।
- न्यूनतम मान $\alpha = -1/3$ है, जो अधिकतम कृत्रिम अवमंदन प्रदान करता है। इससे लगभग 6% अवमंदन अनुपात मिलता है, जब काल वृद्धि अध्ययनाधीन विधा के दोलन-काल की 40% हो; दोलन-काल बढने पर यह छोटा होता जाता है।
- यथार्थवादी काल वृद्धि और निम्न आवृत्तियों के लिए यह कृत्रिम अवमंदन बहुत अधिक नहीं है, किंतु उच्च आवृत्तियों के लिए उपेक्षणीय नहीं है।
- -0.05 का पूर्वनिर्धारित मान अनुशंसित है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53.4.2 स्पष्ट काल समाकलन

78 स्पष्ट काल समाकलन के लिए हम आरंभिक बिंदु के रूप में पूर्व-व्युत्पन्न अवकल समीकरण का थोड़ा परिवर्तित रूप लेते हैं, जिसमें अवमंदन के प्रभाव सम्मिलित हैं।

$$\underbrace{\mathbf{M}\ddot{\overline{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{F}_I(t)} + \underbrace{\mathbf{C}\dot{\overline{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{F}_D(t)} + \underbrace{\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}}_{\mathbf{F}_i(t)} = \underbrace{\mathbf{f}_e}_{\mathbf{f}_e(t)}$$

जहाँ $\mathbf{M}, \mathbf{C}$, और $\mathbf{K}$ क्रमशः द्रव्यमान, अवमंदन और दृढता आव्यूह हैं; $\mathbf{f}_e$ बाह्य भार सदिश है; और $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}$, तथा $\mathbf{u}$ परिमित अवयव संयोजन के क्रमशः त्वरण, वेग और विस्थापन सदिश हैं।

79 इस समीकरण को देखने का एक वैकल्पिक तरीका समय t पर स्थैतिकी के समीकरण का परीक्षण करना है, जहाँ $\mathbf{F}_I(t), \mathbf{F}_D(t), \mathbf{F}_i(t), \mathbf{F}_e(t)$ क्रमशः जड़त्व, अवमंदन, आंतरिक और बाह्य प्रत्यास्थ बल हैं।

53.4.2.1 रैखिक निकाय

80 गति के अर्ध-विविक्त समीकरण के लिए हम केंद्रीय *अंतर विधि* अपनाते हैं। यह विधि विस्थापन के काल-अवकलजों (वेग और त्वरण) के परिमित-अंतर सन्निकटन पर आधारित है। प्रत्येक काल चरण में विस्थापन का रैखिक परिवर्तन मानते हुए, समय t पर वेग और त्वरण हैं:

$$\dot{\overline{\mathbf{u}}}^t = \frac{\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}}{2\Delta t}$$
$$\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^t = \frac{\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}}{\Delta t^2}$$

जहाँ Δt काल चरण है।

81 समीकरण 53.5 में प्रतिस्थापन करने पर प्राप्त होता है

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0}\mathbf{M} + \underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1}\mathbf{C}\right)}_{\widehat{\mathbf{M}}}\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \underbrace{\mathbf{f}_e^t - \left(\mathbf{K} - \underbrace{\frac{2}{\Delta t^2}}_{a_2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^t - \left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0}\mathbf{M} - \underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1}\mathbf{C}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}}_{\widehat{\mathbf{f}}_e^t} \tag{53.13}$$

जिससे $\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$ ज्ञात किया जा सकता है।

82 ध्यान देना चाहिए कि:

- हल समय t पर साम्य दशा पर आधारित है।
- दृढता आव्यूह $\mathbf{K}$ का गुणनखंडन आवश्यक नहीं है (अर्थात् समीकरण में कोई $\mathbf{K}^{-1}$ पद नहीं आता)।
- विधि आरंभ करने के लिए समय $-\Delta t$ पर विस्थापन, वेग और त्वरण निर्धारित करने चाहिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

83 कलनविधि:

1. दृढता आव्यूह $\mathbf{K}$, द्रव्यमान आव्यूह $\mathbf{M}$, और अवमंदन आव्यूह $\mathbf{C}$ बनाएँ।
2. $\overline{\mathbf{u}}^0, \dot{\overline{\mathbf{u}}}^0, \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^0$ को समय $t = 0$ पर आरंभित करें।
3. काल चरण $\Delta t \le \Delta t_{cr}$ चुनें।
4. नियतांक $a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{1}{2\Delta t}$, $a_2 = 2a_0$, $a_3 = \frac{1}{a_2}$ निर्धारित करें।
5. गणना करें
$$\overline{\mathbf{u}}^{-\Delta t} = \overline{\mathbf{u}}^0 - \Delta t \dot{\overline{\mathbf{u}}}^0 + a_3 \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^0$$
6. प्रभावी द्रव्यमान आव्यूह , $\hat{\mathbf{M}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$, की गणना करें।
7. $\hat{\mathbf{M}}$ का त्रिकोणीकरण करें (यदि संकेंद्रित द्रव्यमान आव्यूह प्रयुक्त हो तो आवश्यक नहीं):
$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$$
8. प्रत्येक काल चरण के लिए:
   (a) समय t पर प्रभावी भार निर्धारित करें:
   $$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - (\mathbf{K} - a_2\mathbf{M})\overline{\mathbf{u}}^t - (a_0\mathbf{M} - a_1\mathbf{C})\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}$$
   (b) समय $t + \Delta t$ पर विस्थापन ज्ञात करें
   $$\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_e^t$$
   (c) आवश्यक होने पर समय t पर वेग और त्वरण, विकृतियाँ और प्रतिबल ज्ञात करें
   $$\begin{aligned}
   \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= a_0(\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}) \\
   \dot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= a_1(-\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}) \\
   \boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} &= \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \\
   \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} &= \mathbf{D}_e\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t}
   \end{aligned}$$
   (d) अगला समय $t = t + \Delta t$ अद्यतन करें और (a) पर लौटें।

84 स्पष्ट काल समाकलन के अनेक लाभ हैं; प्रमुख लाभ यह है कि दृढता आव्यूह का गुणनखंडन आवश्यक नहीं होता।

85 यदि हम संगत के स्थान पर संकेंद्रित द्रव्यमान आव्यूह अपनाएँ और अवमंदन न हो, तो कोई गुणनखंडन आवश्यक नहीं है और समीकरण 53.13 निम्न रूप में सरल हो जाता है:
$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_e^t$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ

$$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} \tag{53.14}$$

[86] अतः यदि द्रव्यमान आव्यूह विकर्ण हो, तो गुणनखंडन की आवश्यकता नहीं है। इसके अतिरिक्त, यदि संरचनात्मक दृढता आव्यूह का त्रिकोणीकरण आवश्यक न हो, तो वैश्विक दृढता आव्यूह का संयोजन भी आवश्यक नहीं है। दिखाया जा सकता है कि

$$\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}^t = \sum_i^n \mathbf{K}_{(e)}\overline{\mathbf{u}}^t = \sum \mathbf{F}_{(e)}^t$$

जिसका अर्थ है कि $\mathbf{K}_{(i)}\overline{\mathbf{u}}^t$, जो समीकरण 53.14 में आवश्यक है, का मूल्यांकन प्रभावी भार सदिश में प्रत्येक अवयव के योगदानों को जोडकर अवयव स्तर पर किया जा सकता है। अतः

$$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - \sum_i \mathbf{F}_{(i)}^t - \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}(\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t)$$

[87] चूँकि किसी संरचनात्मक दृढता आव्यूह का संयोजन आवश्यक नहीं है, अत्यंत बडी समस्याएँ प्रभावी रूप से हल की जा सकती हैं। इनमें अर्ध-स्थैतिक समस्याएँ (रैखिक और अरैखिक) भी सम्मिलित हैं, जिनमें भार समय के साथ वृद्धिशः लगाया जाता है।

[88] स्पष्ट विधि की प्रमुख कमी यह है कि यह केवल तभी अभिसरित होती है जब

$$\Delta t < \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}}$$

जहाँ ω_{max} संरचना की उच्चतम प्राकृतिक आवृत्ति (अथवा लघुतम तरंगदैर्घ्य) है (Courant, Friedrichs, and Lewy, 1967)। स्मरण रहे कि $\omega = \frac{2\pi}{T}$। इस दशा के उल्लंघन पर संख्यात्मक अस्थिरता उत्पन्न होती है। अतः पहले संपूर्ण निकाय का अभिलक्षणिक-मान विश्लेषण करना आवश्यक है। किंतु चूँकि वैश्विक संरचनात्मक दृढता आव्यूह का संयोजन आवश्यक नहीं है, इसलिए ω_{max} का ऊपरी-सीमा अनुमान इससे प्राप्त होता है

$$\omega_{max} < \omega_{max}^{(e)}$$

जहाँ $\omega_{max}^{(e)}$ किसी एक परिमित अवयव (सामान्यतः सबसे छोटे) की अधिकतम आवृत्ति है। इसे आगे इससे निर्धारित किया जा सकता है

$$\det(\mathbf{K}^{(e)} - (\omega_{max}^e)^2\mathbf{M}^e) = 0$$

[89] अरैखिक समस्याओं में $\mathbf{K}$ स्पर्शरेखीय दृढता है।

[90] ध्यान दें कि अवमंदन-रहित सरल समस्या के अभिलक्षणिक मानों (जो ω^2 के अनुरूप हैं) का निर्धारण $(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})$ परिणामी आव्यूह के सारणिक का प्रसार करके अथवा सीधे $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ के अभिलक्षणिक मान निर्धारित करके किया जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

91 वैकल्पिक रूप से,

$$\omega^e_{max} = \frac{2c}{L}$$

जहाँ c ध्वनिक तरंग चाल, $c = \sqrt{E/\rho}$, और L अवयव (e) की प्रतिनिधि लंबाई है।

92 मूलतः इसका अर्थ है कि Δt इतना छोटा होना चाहिए कि सूचना एक काल चरण में एक से अधिक अवयव पार न करे।

53.4.2.2 अरैखिक निकाय

93 अरैखिक निकायों में वृद्धिशील विस्थापन $\Delta\bar{\mathbf{u}}$, वृद्धिशील विकृतियाँ और प्रतिबल, तथा दृढता आव्यूह निम्नानुसार अद्यतन किए जाते हैं

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{\mathbf{u}} &= \bar{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \bar{\mathbf{u}}^{t} \\
\Delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\Delta\bar{\mathbf{u}} \\
\Delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}_i^{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\
\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\sigma}^{t} + \Delta\boldsymbol{\sigma} \\
\mathbf{K}_i^{t+\Delta t} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T D_i^{t+\Delta t}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}$$

ऊपर दर्शाई गई कलनविधि में प्रत्येक काल चरण पर $\mathbf{K}_i$ का मूल्यांकन करना आवश्यक है।

53.5 गतिक विश्लेषण की संख्यात्मक विधियाँ

94 गति के समीकरणों के विश्लेषणात्मक हल सरल निकायों और आदर्शीकृत भारणों तक सीमित हैं। यथार्थ संरचनाओं और उत्तेजनों के लिए संख्यात्मक काल-चरणन विधियाँ आवश्यक हैं। ये विधियाँ Δt के अंतराल वाले काल चरणों पर विविक्त मानों की गणना करके सतत प्रतिक्रिया का सन्निकटन करती हैं।

53.5.1 केंद्रीय अंतर विधि

95 केंद्रीय अंतर विधि परिमित अंतरों द्वारा वेग और त्वरण का सन्निकटन करती है:

$$\dot{u}_n \approx \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \tag{53.15}$$

$$\ddot{u}_n \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} \tag{53.16}$$

समय t_n पर गति के समीकरण में प्रतिस्थापन करने पर:

$$m\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} + c\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} + ku_n = F_n$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

u_{n+1} ज्ञात करने पर:

$$u_{n+1} = \frac{F_n - (k - 2m/(\Delta t)^2)u_n - (m/(\Delta t)^2 - c/(2\Delta t))u_{n-1}}{m/(\Delta t)^2 + c/(2\Delta t)}$$

[96] केंद्रीय अंतर विधि स्पष्ट है: u_{n+1} की गणना t_n और t_{n-1} पर ज्ञात मानों से सीधे की जाती है। किंतु यह केवल सशर्त रूप से स्थिर है; काल चरण को निम्न दशा संतुष्ट करनी चाहिए:

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi} = \frac{2}{\omega_n} \tag{53.17}$$

53.5.2 उदाहरण 53.5: केंद्रीय अंतर स्थिरता काल चरण

केंद्रीय अंतर विधि: यदि किसी निकाय का प्रभावी काल $T_n = 0.50\ \text{s}$ हो, तो केंद्रीय अंतर स्थिरता सीमा क्या होगी?

समीकरण (53.17) से:

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi} = \frac{0.50}{3.1416} = 0.159\ \text{s}$$

एक सामान्य व्यावहारिक चयन यह है कि स्थिरता संतुष्ट करने के साथ-साथ परिशुद्धता सुधारने के लिए छोटा चरण (जैसे $\Delta t = 0.05\ \text{s}$) लिया जाए।

उच्च-आवृत्ति विधाओं वाले निकायों (जैसे परिमित अवयव प्रतिरूपों) के लिए यह सीमा अत्यंत प्रतिबंधात्मक हो सकती है।

53.5.3 न्यूमार्क-बीटा विधि

[97] नेथन न्यूमार्क (1910–1981) ने प्रत्येक काल चरण के भीतर त्वरण के कल्पित परिवर्तन पर आधारित विधियों का एक कुल विकसित किया। न्यूमार्क-β विधि मानती है:

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{u}_n + \beta \ddot{u}_{n+1}\right](\Delta t)^2 \dot{u}_{n+1} \quad = \dot{u}_n + [(1-\gamma)\ddot{u}_n + \gamma \ddot{u}_{n+1}]\,\Delta t$$

प्राचल β और γ कल्पित त्वरण परिवर्तन को नियंत्रित करते हैं:

- $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/6$: रैखिक त्वरण (सशर्त रूप से स्थिर)
- $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$: औसत त्वरण (अशर्त रूप से स्थिर)
- $\gamma = 1/2$, $\beta = 0$: केंद्रीय अंतर (स्पष्ट, सशर्त रूप से स्थिर)

[98] औसत त्वरण विधि ($\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$) विशेष रूप से लोकप्रिय है क्योंकि यह अशर्त रूप से स्थिर है—कोई भी काल चरण परिबद्ध प्रतिक्रिया देता है, यद्यपि बड़े Δt के लिए परिशुद्धता घटती है। यह अंतर्निहित भी है, अर्थात् $\ddot{u}_{n+1}$ दोनों पक्षों में आता है और प्रत्येक चरण पर समीकरणों का निकाय हल करना आवश्यक होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

99 MDOF समीकरण (35.15) के लिए न्यूमार्क विधि से प्राप्त होता है:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{F}}_{n+1}$$

जहाँ प्रभावी दृढता $\hat{\mathbf{K}}$ और प्रभावी बल $\hat{\mathbf{F}}_{n+1}$ में द्रव्यमान और अवमंदन के योगदान सम्मिलित हैं। इस निकाय को प्रत्येक काल चरण पर हल करना पड़ता है, जिससे अंतर्निहित विधियाँ प्रति चरण स्पष्ट विधियों की तुलना में संगणकीय रूप से अधिक महँगी होती हैं; किंतु बड़े काल चरण उपयोग करने की क्षमता प्रायः इसकी क्षतिपूर्ति कर देती है।

53.5.4 विधा अध्यारोपण बनाम प्रत्यक्ष समाकलन

100 MDOF निकायों के गतिक विश्लेषण के लिए दो सामान्य रणनीतियाँ हैं:

101 **विधा अध्यारोपण** युग्मित समीकरणों को अयुग्मित विधा समीकरणों में रूपांतरित करता है, प्रत्येक SDOF विधा समीकरण को हल करता है और भौतिक प्रतिक्रिया का पुनर्निर्माण करता है। लाभ: भौतिक अंतर्दृष्टि, उच्च विधाओं को छाँटने की क्षमता, और कम सहभागी विधाओं वाले रैखिक निकायों के लिए दक्षता। हानियाँ: अभिलक्षणिक-मान हल आवश्यक, रैखिक निकायों तक सीमित, और अवमंदन आव्यूह का विकर्णीकरण संभव होना चाहिए।

102 **प्रत्यक्ष समाकलन** विधा रूपांतरण के बिना काल-चरणन विधियों को सीधे युग्मित MDOF समीकरणों पर लागू करता है। लाभ: अरैखिक निकायों और स्वेच्छ अवमंदन का समाधान, अभिलक्षणिक-मान हल की आवश्यकता नहीं। हानियाँ: बड़े निकायों के लिए संगणकीय रूप से महँगा और भौतिक अंतर्दृष्टि कम।

103 भूकंपीय भारण के अधीन रैखिक निकायों के लिए सामान्यतः विधा अध्यारोपण को प्राथमिकता दी जाती है। अरैखिक विश्लेषण (पराभव, संपर्क, बड़े विरूपण) के लिए प्रत्यक्ष समाकलन आवश्यक है।

सत्यापन बनाम वैधीकरण

संगणकीय गतिकी में सत्यापन और वैधीकरण के बीच भेद करना आवश्यक है। *सत्यापन* पूछता है कि क्या संख्यात्मक कलनविधि और उसका कार्यान्वयन निर्दिष्ट समीकरणों को सही ढंग से हल करते हैं (काल चरण, अभिसरण जाँच और कोड मानदंड)। *वैधीकरण* पूछता है कि क्या निर्दिष्ट समीकरण भौतिक निकाय का पर्याप्त निष्ठा से निरूपण करते हैं (प्रतिरूप का रूप, सीमा दशाएँ, अवमंदन और संघटक धारणाएँ)। कोई अनुकरण सत्यापित किंतु अवैध हो सकता है, और दोनों के बीच भ्रम संख्यात्मक परिणामों में अनुचित विश्वास का सामान्य स्रोत है।

53.6 सतत निकाय

104 वितरित द्रव्यमान और दृढता वाली संरचनाएँ—धरन, पट्ट और कवच—आंशिक अवकल समीकरणों द्वारा नियंत्रित होती हैं। यद्यपि संख्यात्मक विधियाँ अंततः इन निकायों का विविक्तीकरण करती हैं, विश्लेषणात्मक हलों की समझ विधा आकारों और प्राकृतिक आवृत्तियों की अंतर्दृष्टि देती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

53.6.1 छड़ों का अक्षीय कंपन

105 लंबाई L, अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल A, प्रत्यास्थता मापांक E, और घनत्व ρ वाली एकसमान छड़ पर विचार करें। अक्षीय विस्थापन $u(x,t)$ संतुष्ट करता है:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

अथवा तरंग चाल $c = \sqrt{E/\rho}$ परिभाषित करने पर:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

यह एकविमीय तरंग समीकरण है।

106 मुक्त कंपन के लिए हम $u(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$ रूप के हल खोजते हैं। प्रतिस्थापन से मिलता है:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0$$

जिसका हल $\phi(x) = A\cos(\omega x/c) + B\sin(\omega x/c)$ है। सीमा दशाएँ अनुमेय आवृत्तियाँ और विधा आकार निर्धारित करती हैं। दोनों सिरों पर आबद्ध छड़ के लिए:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

53.6.1.1 उदाहरण 53.6: इस्पात बंधन-छड़ की तरंग चाल और अक्षीय प्राकृतिक आवृत्तियाँ

✳ एक ठोस वृत्ताकार इस्पात बंधन-छड़ का व्यास $d = 50\ \mathrm{mm}$ और लंबाई $L = 3.0\ \mathrm{m}$ है। दोनों सिरे आबद्ध हैं (दृढ अंत्य-पट्टों से वेल्डित)। इस्पात के गुण: $E = 210\ \mathrm{GPa}$, $\rho = 7\,850\ \mathrm{kg/m^3}$। निर्धारित करें: (a) अनुदैर्घ्य तरंग चाल; (b) प्रथम तीन अक्षीय प्राकृतिक आवृत्तियाँ; (c) इनकी तुलना सामान्य भूकंपीय और पवन आवृत्ति अंतर्वस्तु से तथा संरचनात्मक प्रतिरूपण पर इसका निहितार्थ।

हल।

(a) अनुदैर्घ्य तरंग चाल।

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{210\times 10^9}{7\,850}} = \sqrt{2.675\times 10^7} = 5\,172\ \mathrm{m/s}$$

यह वह चाल है जिससे अनुदैर्घ्य प्रतिबल तरंग छड़ के अनुदिश चलती है—वायु में ध्वनि की चाल की लगभग 15 गुनी।

(b) अक्षीय प्राकृतिक आवृत्तियाँ (आबद्ध–आबद्ध छड़)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दोनों सिरों पर आबद्ध छड के लिए $\phi(0)=\phi(L)=0$ से $\phi(x)=B\sin(\omega x/c)$ आवश्यक है, जहाँ $\sin(\omega L/c)=0$; इससे $\omega_n L/c = n\pi$, और अतः:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

$$f_1 = \frac{1\times 5\,172}{2\times 3.0} = 862\ \text{Hz}$$

$$f_2 = 2f_1 = 1\,724\ \text{Hz}, \qquad f_3 = 3f_1 = 2\,586\ \text{Hz}$$

संगत प्राकृतिक काल $T_1 = 1/862 = 1.16$ ms हैं, जो भूकंप अथवा पवन अभियांत्रिकी के किसी भी संरचनात्मक विश्लेषण काल चरण (Δt सामान्यतः 0.005–0.02 s) से बहुत छोटे हैं।

(c) भूकंपीय और पवन आवृत्ति अंतर्वस्तु से तुलना।

स्रोत	प्रभावी आवृत्ति	अक्षीय छड विधाओं से संबंध
भूकंप भूमि गति	0.1–10 Hz	$< f_1/86$
पवन झोंका वर्णक्रम	0.01–2 Hz	$< f_1/430$
यंत्र कंपन	1–100 Hz	$< f_1/8.6$
अक्षीय छड विधा 1	862 Hz	—

टिप्पणी। इस तुलना से अनेक महत्त्वपूर्ण परिणाम निकलते हैं।

1. *भूकंपीय अथवा पवन भार अक्षीय विधाओं को कभी उत्तेजित नहीं करते।* आवृत्ति पृथक्करण तीन परिमाण-कोटियों का है। यह ढाँचायुक्त संरचनाओं के पार्श्व-भार विश्लेषण में अक्षीय विरूपणों की उपेक्षा (अनंत अक्षीय दृढता) करने की सामान्य प्रतिरूपण धारणा का गणितीय औचित्य है (§53.2.1)।
2. *सुपष्ट समाकलन में अक्षीय विधाएँ क्रांतिक काल चरण नियंत्रित करती हैं।* छड अवयव के लिए स्थिरता सीमा $\Delta t < 2/\omega_{\max}$, लंबाई ℓ के लिए $\Delta t < \ell/c$ है। 3 m अवयव के लिए:

$$\Delta t < \frac{3.0}{5\,172} = 5.8\times 10^{-4}\ \text{s}$$

   यह भूकंपीय प्रतिक्रिया में परिशुद्धता हेतु आवश्यक काल चरण से 10–30 गुना छोटा है, जिससे अक्षीय DOF वाले प्रतिरूपों के लिए सुपष्ट विधियाँ महँगी हो जाती हैं। अंतर्निहित विधियाँ (न्यूमार्क, HHT) अशर्त रूप से स्थिर होने के कारण इस समस्या से बचती हैं।
3. *संघात समस्याओं में तरंग संचरण महत्त्वपूर्ण है।* यदि छड पर अंत्य संघात लगे, तो प्रतिक्रिया 5 172 m/s पर प्रतिबल-तरंग संचरण द्वारा नियंत्रित होती है और विश्लेषण अवधि तरंग यात्रा समय $L/c = 0.58$ ms होती है। यह सुपष्ट गतिक कोडों (DYNA, ABAQUS/Explicit) का क्षेत्र है और माइक्रोसेकंड कोटि के काल चरणों की आवश्यकता होती है—भूकंपीय विश्लेषण से पूर्णतः भिन्न संगणकीय संसार।

53.6.2 धरनों का अनुप्रस्थ कंपन

107 अनुप्रस्थ कंपन के लिए ऑयलर-बर्नूली धरन समीकरण है:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t)$$

जहाँ $v(x,t)$ अनुप्रस्थ विस्थापन, EI आनमनी दृढता और $q(x,t)$ वितरित भार है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

108 मुक्त कंपन ($q = 0$) के लिए $v(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$ खोजने पर:

$$\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}x^4} - \beta^4\phi = 0, \qquad \beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

सामान्य हल है:

$$\phi(x) = C_1\cosh(\beta x) + C_2\sinh(\beta x) + C_3\cos(\beta x) + C_4\sin(\beta x)$$

दोनों सिरों की सीमा दशाएँ चार नियतांकों के लिए चार समीकरण देती हैं, जिससे β के लिए अभिलक्षणिक-मान समस्या प्राप्त होती है।

109 लंबाई L की साधारण आलंबित धरन के लिए:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

प्राकृतिक आवृत्तियाँ n^2 के समान बढ़ती हैं और उच्च विधाओं को निम्न विधाओं से शीघ्र पृथक करती हैं। मूल आवृत्ति ($n = 1$) है:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

110 अन्य सीमा दशाओं (आबद्ध-आबद्ध, बाहुधरन आदि) के लिए अतींद्रिय आवृत्ति समीकरण को संख्यात्मक रूप से हल करना आवश्यक है। मानक संदर्भों में आवृत्ति गुणांकों की सारणियाँ उपलब्ध हैं।

53.7 अरैखिक गतिकी

111 पिछले खंडों में रैखिक व्यवहार माना गया है: विस्थापन और वेग के समानुपाती बल। वास्तविक संरचनाएँ, विशेषतः तीव्र भूकंपीय कंपन अथवा चरम भारण में, अरैखिक प्रतिक्रिया प्रदर्शित करती हैं। अरैखिकता पदार्थीय पराभव, ज्यामितीय प्रभावों (बड़े विस्थापनों), संपर्क/अंतराल व्यवहार और घर्षण से उत्पन्न होती है।

53.7.1 अरैखिकता के स्रोत

112 **पदार्थीय अरैखिकता** तब उत्पन्न होती है जब प्रतिबल-विकृति संबंध अरैखिक हो। इस्पात में प्रतिबल के पराभव सामर्थ्य से अधिक होने पर प्रारंभिक प्रत्यास्थ व्यवहार पराभव में बदल जाता है। कंक्रीट में विदरण सेवा भारों पर भी अरैखिकता प्रस्तुत करता है। संघटक संबंध का उचित प्रतिरूपण (प्रत्यास्थ-सुघट्य, क्षति आदि) आवश्यक है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

113 **ज्यामितीय अरैखिकता** तब उत्पन्न होती है जब विस्थापन इतने बड़े हों कि साम्य समीकरण विरूपित विन्यास पर लिखने पड़ें। स्तंभों में P-Δ प्रभाव—पार्श्व विस्थापन के माध्यम से कार्यरत अक्षीय बल के कारण आघूर्ण का प्रवर्धन—एक सामान्य उदाहरण है।

114 **संपर्क अरैखिकता** उन अंतरापृष्ठों पर उत्पन्न होती है जहाँ घटक अलग हो सकते हैं अथवा संपर्क में आ सकते हैं। आधार-वियोजन बेयरिंग, प्रसार संधियाँ और विदरित खंड सभी यह व्यवहार प्रदर्शित करते हैं।

53.7.2 तन्यता और क्षमता अभिकल्प

115 *विस्थापन तन्यता* μ को अधिकतम विस्थापन और पराभव विस्थापन के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है:

$$\mu = \frac{u_{\max}}{u_y}$$

पराभव और अप्रत्यास्थ विरूपण के लिए अभिकल्पित संरचनाएँ अपनी प्रत्यास्थ क्षमता से अनुमानित तीव्रता की तुलना में कहीं अधिक शक्तिशाली भूकंप सह सकती हैं। यही *क्षमता अभिकल्प* का मूल सिद्धांत है: भंगुर अवयवों की रक्षा करते हुए सावधानीपूर्वक विस्तृत क्षेत्रों में पराभव स्वीकार करना।

116 सामर्थ्य न्यूनीकरण और तन्यता माँग के बीच संबंध को R-μ-T संबंध व्यक्त करता है। वेग-संवेदी परास में काल वाली संरचनाओं के लिए:

$$R \approx \mu$$

यह “समान विस्थापन” नियम कहता है कि पराभवी संरचना का अधिकतम विस्थापन समान काल वाली प्रत्यास्थ संरचना के विस्थापन के बराबर होता है—पराभव विस्थापन बढ़ाए बिना बल माँग घटाता है।

53.8 व्यावहारिक विचार

53.8.1 वास्तविक संरचनाओं में अवमंदन

117 संरचनाओं के मापित अवमंदन अनुपात पदार्थ, कंपन आयाम और निर्माण के प्रकार पर निर्भर करते हैं। विशिष्ट मान सारणी 53.2 में दिए गए हैं।

ये परिमाण-कोटि के मान हैं; वास्तविक अवमंदन विवरणों पर निर्भर करता है और जहाँ संभव हो, उसे मापा जाना चाहिए।

53.8.2 मृदा-संरचना अंतःक्रिया

118 किसी संरचना की गतिक प्रतिक्रिया केवल संरचना पर ही नहीं, बल्कि उसे आलंबित करने वाली मृदा पर भी निर्भर करती है। *मृदा-संरचना अंतःक्रिया* (SSI) निवेश गति और निकाय आवृत्तियों दोनों को पर्याप्त रूप से प्रभावित कर सकती है। नम्य मृदा निकाय का प्रभावी काल बढ़ाती है और मृदा में ऊर्जा के विकिरण द्वारा अतिरिक्त अवमंदन प्रस्तुत करती है। कोमल मृदा पर दृढ़ संरचनाओं के लिए SSI प्रभाव पर्याप्त हो सकते हैं; शैल पर नम्य संरचनाओं के लिए वे उपेक्षणीय हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

तालिका 53.2: विभिन्न वर्गों की संरचनाओं के प्रतिनिधि अवमंदन अनुपात

संरचना का प्रकार	अवमंदन अनुपात ζ
इस्पात, वेल्डित, पराभव-पूर्व	0.01–0.02
इस्पात, बोल्टित, पराभव-पूर्व	0.02–0.03
प्रबलित कंक्रीट, अविदरित	0.01–0.02
प्रबलित कंक्रीट, विदरित	0.03–0.05
पूर्वप्रतिबलित कंक्रीट	0.01–0.02
चिनाई, अविदरित	0.02–0.03
काष्ठ संरचनाएँ	0.05–0.10

53.8.3 समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक

119 समस्वरित द्रव्यमान अवमंदक (TMD) प्राथमिक संरचना से जुड़ा एक द्वितीयक द्रव्यमान-कमानी-अवमंदक निकाय है, जिसे किसी विशिष्ट आवृत्ति पर समस्वरित किया जाता है। जब प्राथमिक संरचना अपनी प्राकृतिक आवृत्ति पर कंपन करती है, तब TMD विपरीत दिशा में दोलित होकर प्राथमिक प्रतिक्रिया घटाता है। पवन-प्रेरित और भूकंपीय कंपन घटाने के लिए TMD का उपयोग ऊँचे भवनों (जैसे ताइपे 101) और दीर्घ-विस्तृति सेतुओं में किया जाता है।

120 अनवमंदित प्राथमिक संरचना के लिए TMD का इष्टतम समस्वरण है:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m}, \qquad \zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}}$$

जहाँ $\mu_m = m_d/m$ द्रव्यमान अनुपात (सामान्यतः 0.01 से 0.05), ω_d TMD आवृत्ति और ζ_d TMD अवमंदन अनुपात है।

53.8.4 आधार वियोजन

121 आधार वियोजन संरचना और नींव के बीच एक नम्य स्तर (सामान्यतः प्रत्यास्थलक बेयरिंग अथवा सर्पण निकाय) प्रस्तुत करता है। वियोजित संरचना का काल बहुत लंबा होता है, जिससे वह सामान्य भूकंप भूमि गतियों की उच्च-ऊर्जा अंतर्वस्तु से दूर चली जाती है। वियोजन स्तर अतिरिक्त अवमंदन भी प्रदान करता है। आधार वियोजन दृढ़, लघु-काल संरचनाओं के लिए विशेष रूप से प्रभावी है और अस्पतालों, आपात सुविधाओं तथा ऐतिहासिक भवनों में व्यापक रूप से प्रयुक्त होता है।

53.9 सारांश

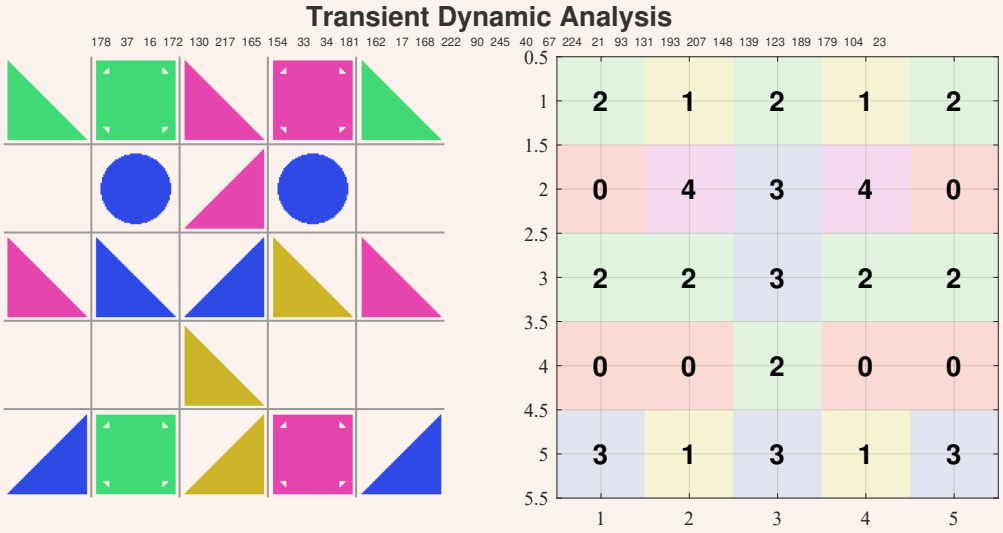
122 इस अध्याय ने संरचनात्मक गतिकी के मूल सिद्धांतों का परिचय दिया है—एकल-स्वतंत्रता-कोटि दोलक से बहु-स्वतंत्रता-कोटि निकायों तक, मुक्त कंपन से बलित प्रतिक्रिया तक, और विश्लेषणात्मक हलों से संख्यात्मक विधियों तक। प्रमुख अवधारणाओं में सम्मिलित हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. गति का समीकरण, जो जड़त्व, अवमंदन, प्रत्यास्थ और लगाए गए बलों का गतिक साम्य व्यक्त करता है।
2. गतिक प्रतिक्रिया नियंत्रित करने वाले अंतर्निहित निकाय-गुणों के रूप में प्राकृतिक आवृत्ति और अवमंदन अनुपात।
3. दोलन की प्राकृतिक विधाओं को प्रकट करने वाला मुक्त कंपन।
4. आवर्ती प्रतिक्रिया और अनुनाद की परिघटना।
5. स्वेच्छ भारण की प्रतिक्रिया के लिए डुहामेल समाकल।
6. भूकंप अभियांत्रिकी के व्यावहारिक साधनों के रूप में प्रतिक्रिया वर्णक्रम।
7. युग्मित MDOF समीकरणों को स्वतंत्र SDOF समीकरणों में रूपांतरित करने वाला विधा विश्लेषण।
8. जटिल उत्तेजनों की प्रतिक्रिया की गणना हेतु संख्यात्मक काल-चरणन विधियाँ।
9. अरैखिक गतिकी, शैथिल्य और भूकंपीय अभिकल्प में तन्यता की भूमिका।

123 संरचनात्मक गतिकी पिछले अध्यायों में विकसित स्थैतिक विश्लेषण को काल-परिवर्ती परिघटनाओं तक विस्तारित करती है। वही सिद्धांत—साम्य, सुसंगति और संघटक संबंध—लागू होते हैं, किंतु अब काल-निर्भर संदर्भ में, जहाँ जड़त्व और ऊर्जा क्षय की केंद्रीय भूमिकाएँ हैं। पवन, भूकंप, यंत्र कंपन और अन्य गतिक भारों के अधीन संरचनाओं के अभिकल्प के लिए इन अवधारणाओं में दक्षता आवश्यक है।

अग्र संदर्भ। यहाँ गणित नियतात्मक प्रतिक्रिया राशियों (काल-इतिहास, चरम माँग और व्युत्पन्न माप) का उपयोग अध्याय 72 में निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी के निवेशों के रूप में किया जाता है।



अध्याय-विशिष्ट आइडेंटिकॉन, chapter H

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

खण्ड IV

उन्नत: अरैखिक एवं अन्य विषय

प्रारूप संस्करण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण की विस्तृत शृंखला का यह तीसरा खंड अरैखिक व्यवहार और सुघट्यता पर केंद्रित उन्नत संकल्पनाओं का विकास करता है, जो सिविल अवसंरचना के वास्तविक निष्पादन के आकलन के लिए आवश्यक हैं। इसे निम्न समूहों में विभाजित किया गया है:

I सुघट्यता पदार्थ, अनुप्रस्थ काट और संरचनात्मक स्तरों पर प्रतिरूपण।

II अरैखिक विश्लेषण पदार्थगत और ज्यामितीय।

III तंतु-आधारित 1D अवयव सूत्रीकरण (दृढता और नम्यता-आधारित) तथा उपयुक्त संघटक प्रतिरूप।

IV PBEE निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी का विस्तृत विवेचन। संकट, जोखिम और अनिश्चितताओं की संकल्पनाओं के परिचय से आरंभ करके PBEE से संबंधित तीन विश्लेषणों—संकट, संरचनात्मक और हानि—का अध्ययन किया गया है। अंततः पुस्तक PBEE रूपरेखा के व्यापक विवेचन के साथ पूर्ण होती है, जिसमें तर्कसंगत निष्पादन आकलन और अभिकल्प के समर्थन के लिए प्रायिकतामूलक संकल्पनाओं को अरैखिक अनुक्रिया की भविष्यवाणी के साथ एकीकृत किया गया है।

प्रारूप

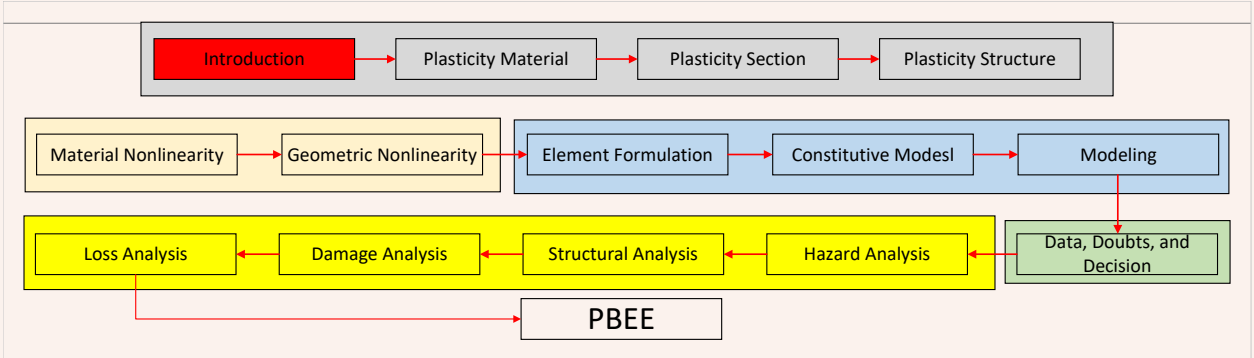
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

54 परिचय

सारांश

अरैखिक विश्लेषण (nonlinear analysis) पर केंद्रित चौथी पुस्तक का यह परिचयात्मक अध्याय अरैखिक अनुक्रियाओं के मूल कारणों तथा ज्यामितीय और पदार्थगत अरैखिकताओं के लिए क्रमशः **B** *अथवा* **D** *के माध्यम से दृढता आव्यूह पर पडने वाले उनके प्रभाव की चर्चा से आरंभ होता है। इसके पश्चात प्रथम-कोटि, द्वितीय-कोटि, रैखिक, अरैखिक तथा अस्थिरता उत्पन्न करने वाले सीमा-भारों सहित विभिन्न प्रकार के विश्लेषणों का विवेचन किया गया है। इसके बाद सुरक्षा की संकल्पना पर विचार किया गया है, जिससे अभिकल्प संहिताओं की भूमिका और विकास की चर्चा आरंभ होती है। इन संहिताओं का उद्देश्य पर्याप्त सुरक्षा सुनिश्चित करना है; ऐतिहासिक रूप से वे अनुभवजन्य नियमों पर आधारित थीं, जबकि आधुनिक संहिताएँ विफलता की प्रायिकताओं को ध्यान में रखने वाले विचारों पर आधारित हैं। अध्याय यह स्पष्ट करता है कि वास्तविक सुरक्षा गुणांक—अर्थात अभिकल्प संहिताओं पर आधारित गुणांक नहीं—निर्धारित करने अथवा क्रमिक विफलता की पहचान करने के लिए अरैखिक विश्लेषण आवश्यक है। यही इस चौथी पुस्तक का प्रमुख विषय है।*

54.1 परिचय 1838
54.1.1 अरैखिकताओं के स्रोत 1838
54.1.2 अरैखिक विश्लेषण क्यों 1840
54.2 संरचनात्मक अरैखिक विश्लेषणों के प्रकार 1841
54.3 वृद्धिशील भार/विस्थापन 1844
54.4 सुरक्षा 1844
54.4.1 पारिभाषिक शब्दावली 1844
54.4.2 सुरक्षा & भार 1845
54.5 अभिकल्प संहिताएँ 1846
54.5.1 परिचय 1846
54.5.2 विकास: प्राचीन काल 1847
54.5.3 आधुनिक काल 1849
54.5.4 सारांश 1853



54.1 परिचय

54.1.1 अरैखिकताओं के स्रोत

1 अब तक हमने स्वयं को लघु विरूपण वाले रैखिक प्रत्यास्थ प्रश्नों तक सीमित रखा है (अध्याय 29 को छोडकर)। इसका यह निहितार्थ भी था कि हमने पदार्थ की सामर्थ्य को अनंत माना, यद्यपि वास्तव में इस धारणा पर निर्भर रहने की आवश्यकता कभी नहीं पडी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2 निस्संदेह किसी भी पदार्थ की सामर्थ्य अनंत नहीं होती; किसी अवस्था पर सभी पदार्थ अप्रत्यास्थ व्यवहार आरंभ करते हैं और अंततः टूट जाते हैं।

3 अतः यह चौथी पुस्तक अरैखिकता के इन दो रूपों को संबोधित करेगी: (a) ज्यामितीय और (b) पदार्थगत।

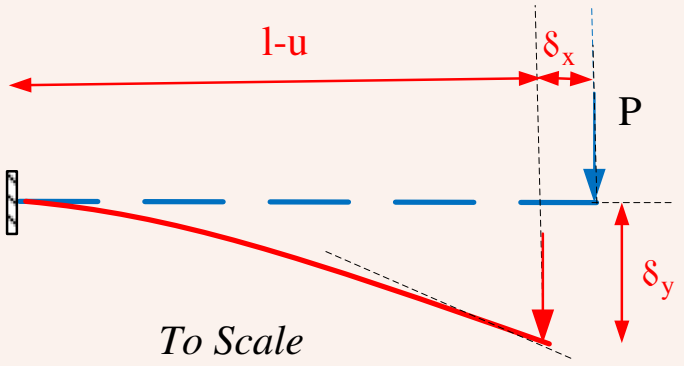
4 अध्याय 29 में हमने बृहद् विरूपण (अथवा ज्यामितीय अरैखिकता) के उदाहरणों पर संक्षेप में विचार किया था और चित्र 54.1 में दर्शाए गए प्रश्न का परीक्षण किया था, जो §29.2.3 से लिया गया है। इस बार हम परिमित-अवयव विविक्तीकरण के संदर्भ में इस प्रश्न का विधिवत् सूत्रीकरण करेंगे।

5 पदार्थगत अरैखिकता के स्रोत निम्नलिखित हैं:

इस्पात जिसकी प्रतिबल-विकृति वक्र पराभव बिंदु तक रैखिक होती है। उस बिंदु पर विकृति-कठोरण और अत्यधिक विरूपण आरंभ होते हैं।

कंक्रीट की प्रतिबल-विकृति वक्र लगभग $0.6f_c'$ से आरंभ होकर संपीडन सामर्थ्य (लगभग 0.003 विकृति पर) तक अरैखिक होती है और उसके बाद मृदुकरण होता है। ध्यान दें कि परिरोध (जो अपरूपण प्रबलन द्वारा प्रदान किया जाता है) से सामर्थ्य बढ़ती है। तनन सामर्थ्य अत्यंत कम, लगभग 0.1 f_c', होती है।

6 यद्यपि हम पदार्थ में अंतर्निहित अरैखिक प्रतिबल-विकृति संबंधों का उपयोग करेंगे, तथापि अनुप्रस्थ काट की अरैखिक अनुक्रिया को $M-\Phi$ अथवा $M-\theta$ (वक्रता अथवा घूर्णन) के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।



चित्र 54.1: ज्यामितीय अरैखिकता: बृहद् विक्षेप का उदाहरण (**B**), 29.2.3

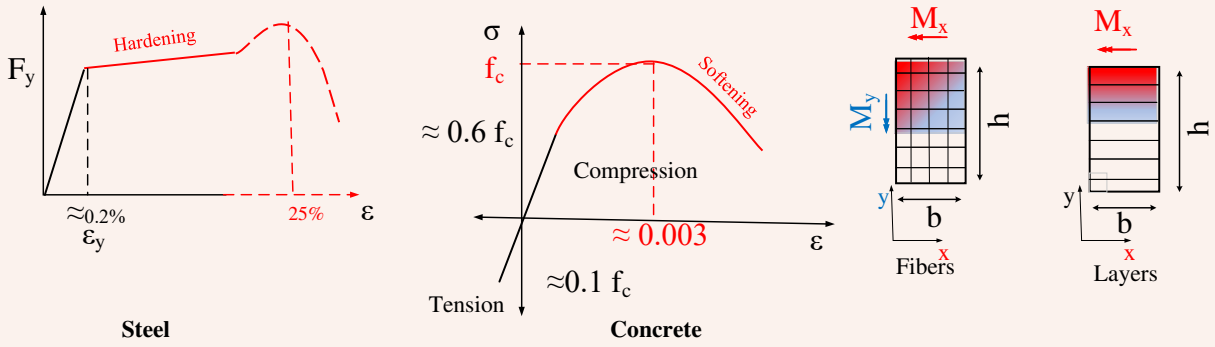
7 आगे हम देखेंगे कि 1D अवयवों की अरैखिक अनुक्रिया निरूपित करने के लिए मूलतः दो प्रकार के प्रतिरूप होते हैं।

वितरित सुघट्यता (Distributed Plasticity) जिसमें सुघटनीकरण संपूर्ण अवयव के अनुदिश होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

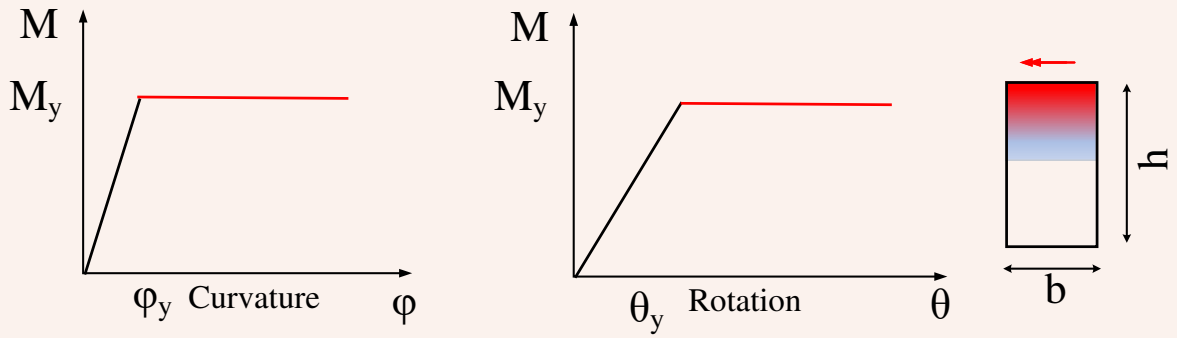
संकेन्द्रित सुघट्यता (Lumped Plasticity) जिसमें सुघट्य अनुक्रिया अवयव के सिरों तक सीमित रहती है और उनके बीच रैखिक प्रत्यास्थ अनुक्रिया होती है।

8 इस्पात और कंक्रीट की अरैखिक अनुक्रिया चित्र 54.2 में दर्शाई गई है। जहाँ इन वक्रों का उपयोग *सातत्य* परिमित अवयवों में सामान्यतः किया जाता है, वहीं इस पुस्तक के 1D अवयवों के संदर्भ में इनका उपयोग तंतु (द्विअक्षीय बंकन) अथवा स्तरित (एकाक्षीय बंकन) *वितरित सुघट्यता* प्रतिरूपों में किया जाएगा।



चित्र 54.2: पदार्थगत अरैखिकता: तंतु (**D**)

9 चित्र 54.3 संकेन्द्रित सुघट्यता के संघटक प्रतिरूपों को दर्शाता है। बंकन अनुक्रिया सामान्यतः आघूर्ण-वक्रता आरेख द्वारा और कभी-कभी आघूर्ण-घूर्णन आरेख द्वारा निरूपित की जाती है।



चित्र 54.3: पदार्थगत अरैखिकता: अनुप्रस्थ काट (**D**)

54.1.2 अरैखिक विश्लेषण क्यों

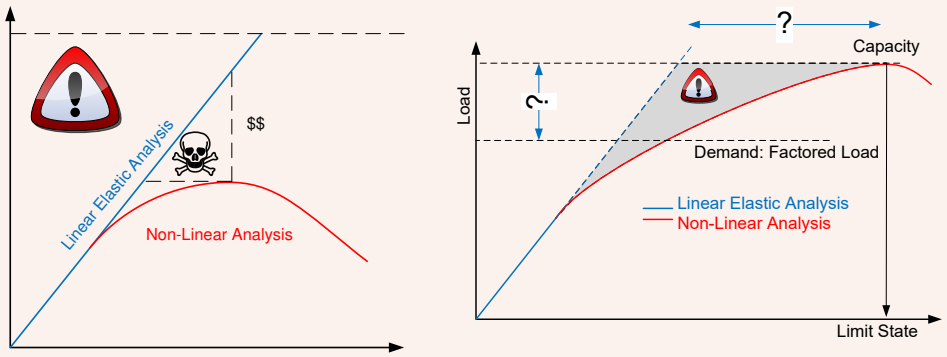
10 अभिकल्प अथवा प्रारंभिक सुरक्षा आकलन के लिए रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण उपयुक्त होता है; परंतु जब संपूर्ण संरचनात्मक अनुक्रिया अपेक्षित हो, विफलता भार यथासंभव शुद्धता से निर्धारित करना हो, अथवा "वास्तविक" सुरक्षा गुणांक ज्ञात करना हो, तब अरैखिक विश्लेषण करना आवश्यक है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11 पिछले अनुभाग से स्पष्ट है कि वास्तविक सुरक्षा गुणांक के आकलन अथवा आंशिक क्षति को ध्यान में रखने वाले विश्लेषण के लिए प्रचलित LRFD पर निर्भर नहीं रहा जा सकता। इसके लिए अरैखिक विश्लेषण आवश्यक होगा।

12 ऐसे मामलों में सरलीकृत रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण या तो चरम भार को अधिक आँकेगा अथवा विस्थापनों को कम आँकेगा। प्रथम स्थिति में समाधान अनावश्यक पुनःसंवर्धन का कारण बन सकता है; दूसरी स्थिति में अप्रत्याशित बृहद् विस्थापनों से संभावित रूप से संकटपूर्ण परिस्थितियाँ उत्पन्न हो सकती हैं, चित्र 54.4। दोनों ही स्थितियों में प्रतिबल-पुनर्वितरण निरूपित नहीं होता और स्थानीयकृत तथा वैश्विक विफलता में भेद करना असंभव होगा।

13 रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण में हम क्षमता का अधिक और विस्थापन का कम आकलन करेंगे।



चित्र 54.4: रैखिक *बनाम* अरैखिक विश्लेषण

14 यह सदैव ध्यान में रखना चाहिए कि अरैखिक विश्लेषण सुदृढ अभियांत्रिकी विवेक का विकल्प नहीं है; सामान्य विवेक, रैखिक विश्लेषण और सरलीकृत विधियों का पूर्ण उपयोग कर लेने के बाद ही इसे अंतिम उपाय के रूप में अपनाना चाहिए। आदर्शतः इसका उपयोग किसी सुदृढ परिकल्पना के सत्यापन अथवा परिमाणीकरण के लिए किया जाना चाहिए।

54.2 संरचनात्मक अरैखिक विश्लेषणों के प्रकार

15 जैसा पहले उल्लेख किया गया है, अरैखिकता के दो स्रोत हैं। पहला पदार्थ की अरैखिक अनुक्रिया के कारण और दूसरा बृहद् विस्थापनों के कारण उत्पन्न होता है।

16 अवयव दृढता आव्यूह के सूत्रीकरण में ये निम्न रूप में प्रकट होते हैं (समीकरण 50.12)

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

पहले के लिए **B** और दूसरे के लिए **D**।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

17 अरैखिक विश्लेषण के संदर्भ में इसे निम्न प्रकार पुनः लिखा जा सकता है:

$$\mathbf{K}^i_{tan} = \int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D}^i_{tan} \mathbf{B} d\Omega$$

18 इनमें से कौन-सा पद अरैखिक है, इसके आधार पर विभिन्न प्रकार के विश्लेषण उत्पन्न होंगे, सारणी 54.1। इस सारणी में क्रांतिक (द्विशाखन) विश्लेषण, अर्थात व्याकुंचन, भी सम्मिलित है।

तालिका 54.1: संरचनात्मक विश्लेषण के स्तरों का सारणीकरण

		D			
	मुक्त-पिंड आरेख पर आधारित	अविरूपित आकार		विरूपित आकार	
		प्रत्यास्थ (रैखिक)	अप्रत्यास्थ (अरैखिक)	प्रत्यास्थ (रैखिक)	अप्रत्यास्थ (अरैखिक)
B	1^{st} कोटि (रैखिक)	1 (**D**:L-**B**:L)	2 (**D**:NL-**B**:L)	क्रांतिक भार (व्याकुंचन)	
				5 प्रत्यास्थ	6 अप्रत्यास्थ
	2^{nd} कोटि (अरैखिक)	विरूपित आकार			
		3 (**D**:L-**B**:NL)	4 (**D**:NL-**B**:NL)	-	-

B ज्यामितीय अरैखिकता; **D** पदार्थगत अरैखिकता।

19 तदनुरूप भार-विस्थापन वक्र चित्र 54.5 में दर्शाए गए हैं। साथ ही अनंतस्पर्शी मान भी दर्शाए गए हैं।

20 अविरूपित मुक्त-पिंड आरेख पर आधारित सूत्रीकरण को *लाग्रांजीय (Lagrangian)* कहा जाता है, जबकि विरूपण को ध्यान में रखने वाले सूत्रीकरण को *यूलरीय (Eulerian)* कहा जाता है।

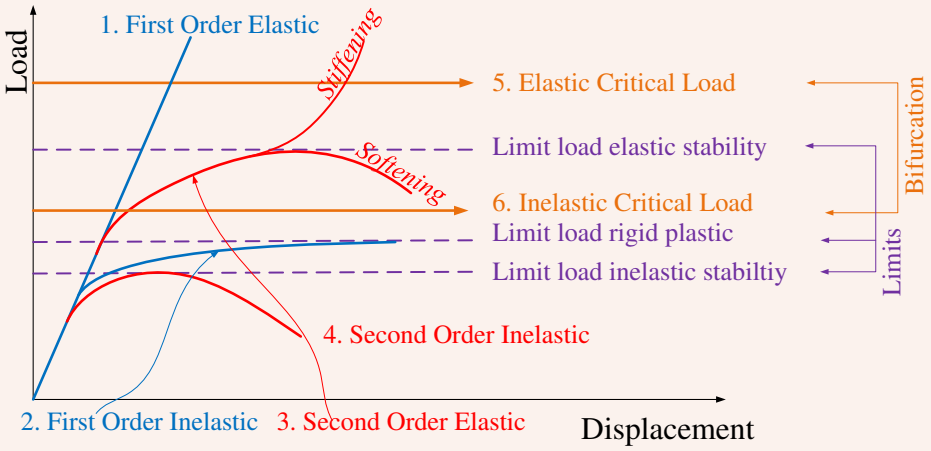
I **वृद्धिशील विश्लेषण:** सामान्यतः न्यूटन विधि द्वारा भार, विस्थापन अथवा दोनों की वृद्धियों का विश्लेषण, §59.3.1.1।

1 **(D:L-B:L); अविरूपित आकार** यह सर्वाधिक सामान्य रैखिक प्रत्यास्थ स्थिति है। सेवा भारों के लिए यह प्रायः स्वीकार्य होती है। समय-निर्भर स्थितियों में श्यान-प्रत्यास्थ प्रतिरूपों पर विचार करना आवश्यक है।

2 **(D:NL-B:L); अविरूपित आकार** यह विश्लेषण का दूसरा सर्वाधिक सामान्य रूप है, जो प्रायः चरम अथवा असामान्य भारों के निर्धारण के लिए किया जाता है। PBEE के लिए यह आवश्यक है (नीचे देखें)।

3 **(D:L-B:NL); प्रत्यास्थ** यह परिमित विरूपण और विस्थापनों के प्रभावों को ध्यान में रखता है। साम्यावस्था समीकरण विरूपित आकार की ज्यामिति (यूलरीय) के पदों में लिखे जाते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 54.5: संरचनात्मक विश्लेषण के प्रकार

इसमें पदार्थगत अरैखिकताएँ सम्मिलित नहीं होतीं, किंतु यह द्विशाखन और/अथवा बढ़ी हुई दृढ़ता (जब किसी सदस्य पर तनन अक्षीय भार कार्यरत हो) ज्ञात कर सकता है। इसका उपयोग केबल, जाल और कैटेनरी संरचनाओं के विश्लेषण में होता है।

4 (D:NL-B:NL); अप्रत्यास्थ साम्यावस्था समीकरण विरूपित आकार की ज्यामिति के पदों में लिखे जाते हैं और ज्यामितीय तथा पदार्थगत दोनों अरैखिकताओं को ध्यान में रखा जा सकता है। यह विफलता अथवा चरम भारों के निर्धारण के लिए सर्वाधिक उपयुक्त है। यह विश्लेषण का अब तक का सर्वाधिक जटिल रूप है और धातु-रूपण अनुकरण तथा संरचनाओं के विखंडन (प्रक्षेपास्त्र आघात) में प्रयुक्त होता है।

II द्विशाखन विश्लेषण: स्वमान विश्लेषण, जिनसे प्रत्यास्थ क्रांतिक भार (व्याकुंचन) प्राप्त होता है। ध्यान दें कि इनके लिए तदनुरूप भार-विस्थापन वक्र नहीं, बल्कि "व्याकुंचन विधाएँ" प्राप्त होती हैं।

5 द्विशाखन; प्रत्यास्थ

6 द्विशाखन; अप्रत्यास्थ

[21] सारणी 54.2 विभिन्न अरैखिक विश्लेषणों की मान्यताओं का सार प्रस्तुत करती है।

तालिका 54.2: विश्लेषण के विभिन्न स्तरों का पारस्परिक सहसंबंध

	1	2	3	4	5	6
D	L	NL	L	NL	L	NL
B	L	L	NL	NL	NL	NL
FBD	अविरू.	अविरू.	विरू.	विरू.	विरू.	विरू.
विश्लेषण	वृद्धि.	वृद्धि.	वृद्धि.	वृद्धि.	द्विशा.	द्विशा.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

54.3 वृद्धिशील भार/विस्थापन

22 संरचनाओं के अरैखिक विश्लेषण में भार को वृद्धिशः लगाया जाता है और प्रत्येक वृद्धि के अंत में समाधान ज्ञात किया जाता है:

1. बाह्य भार को n वृद्धियों में "विभाजित" करें (उनका समान होना आवश्यक नहीं है; प्रत्याशित चरम भार के समीप पहुँचने पर भार-वृद्धि को कम करना उचित है)।
2. प्रत्येक चरण में वृद्धिशील भार सदिश $\Delta\mathbf{P}_i$ लगाएँ।
3. साम्यावस्था को लगभग संतुष्ट करने वाला तदनुरूप विस्थापन $\mathbf{u}_i$ ज्ञात करें (विश्लेषण के अंतर्निहित वर्ग में, स्पष्ट वर्ग में नहीं)।
4. भार और विस्थापन सदिशों को अद्यतन करें:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-1} + \Delta\mathbf{P}_i$$
$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta\mathbf{u}_i$$

23 अंतर्निहित समाधान में साम्यावस्था का लगभग संतुष्ट होना सुनिश्चित करने के लिए एक अतिरिक्त पुनरावृत्तीय पाश आवश्यक है।

24 अधिकांश विश्लेषणों में भार वृद्धिशः लगाया जाता है, किंतु ऐसी समाधान रणनीति चरम-पश्च अनुक्रिया की भविष्यवाणी करने में विफल हो सकती है। यदि चरम-पश्च अनुक्रिया अपेक्षित हो, तो भार सदिश के स्थान पर विस्थापन सदिश वृद्धिशः लगाया जाना चाहिए।

54.4 सुरक्षा

54.4.1 पारिभाषिक शब्दावली

25 अंततः अरैखिक विश्लेषण किसी संरचना की वास्तविक सुरक्षा का आकलन करने का एक माध्यम मात्र है। इस पद से संबंधित विभिन्न संकल्पनाओं पर इस पुस्तक में विचार किया जाएगा।

26 सुरक्षा *(Safety)* संरचना की उस अवस्था को दर्शाती है जिसमें वह अपने अपेक्षित सेवा-काल में आने वाले भारों और पर्यावरणीय परिस्थितियों का विफलता अथवा पतन के बिना प्रतिरोध कर सके। सुरक्षा का आकलन सामान्यतः संरचना पर कार्यरत वास्तविक भारों और प्रतिबलों की तुलना विश्लेषण तथा परीक्षण से निर्धारित उनकी प्रतिरोध-क्षमता से करके किया जाता है।

27 सुरक्षा *अंतराल (Margin of safety)* वह मात्रा है जिससे संरचना पर कार्यरत वास्तविक भार और प्रतिबल उसकी प्रतिरोध-क्षमता से कम होते हैं। सुरक्षा अंतराल की गणना वास्तविक भारों और प्रतिबलों तथा संरचना की प्रतिरोध-क्षमता के अंतर को क्षमता से विभाजित करके की जाती है।

28 सुरक्षा *गुणांक (Factor of Safety)* एक अभिकल्प मानदंड है जो भार और पदार्थ-सामर्थ्य की अनिश्चितताओं को ध्यान में रखता है। यह संरचना द्वारा वहन किए जा सकने वाले अधिकतम भार और अभिप्रेत भार का अनुपात है। यह सुरक्षा और विश्वसनीयता सुनिश्चित करने के लिए अतिरिक्त अवकाश प्रदान करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

29 *जोखिम आकलन (Risk Assessment)* संभावित संकटों को कम करने के लिए किसी परियोजना अथवा निकाय से संबंधित जोखिमों की पहचान, विश्लेषण और मूल्यांकन की प्रक्रिया है।

30 *संकट विश्लेषण (Hazard Analysis)* संभावित संकटों की पहचान तथा उनकी गंभीरता और संभाव्यता के आकलन की तकनीक है। यह दुर्घटनाएँ रोकने के लिए सुरक्षा उपायों के अभिकल्प में सहायक होती है।

31 *विफलता विधा (Failure Mode)* किसी निकाय की संभावित विफलता विधाओं और निकाय के निष्पादन पर उनके प्रभावों की पहचान का क्रमबद्ध उपागम है। यह जोखिमों की प्राथमिकता निर्धारित करने और सुधारात्मक कार्यवाही लागू करने में सहायक होता है।

32 *प्रायिकतामूलक जोखिम आकलन (Probabilistic Risk Assessment)* एक मात्रात्मक विश्लेषण है जिसमें विभिन्न विफलता परिदृश्यों के जोखिम और उनके संभावित प्रभावों का आकलन प्रायिकता द्वारा किया जाता है।

33 *अतिरेकता (Redundancy)* अतिरिक्त घटकों अथवा निकायों का समावेश है जो विफलता की स्थिति में कार्यभार सँभाल सकते हैं और समग्र विश्वसनीयता तथा सुरक्षा बढाते हैं।

34 *विश्वसनीयता सूचकांक (Reliability Index)* किसी निकाय अथवा घटक की सुरक्षा या विश्वसनीयता को परिमाणित करने का माप है, §N।

35 *दोष-सहयता (Fault Tolerance)* दोषों अथवा त्रुटियों की उपस्थिति में भी किसी निकाय की सही प्रकार कार्य करते रहने की क्षमता है।

36 *सुरक्षा-क्रांतिक निकाय (Safety-Critical System)* वह निकाय है जिसकी विफलता लोगों, संपत्ति अथवा पर्यावरण को गंभीर हानि पहुँचा सकती है। ऐसे निकायों के लिए कठोर सुरक्षा उपाय आवश्यक होते हैं।

54.4.2 सुरक्षा & भार

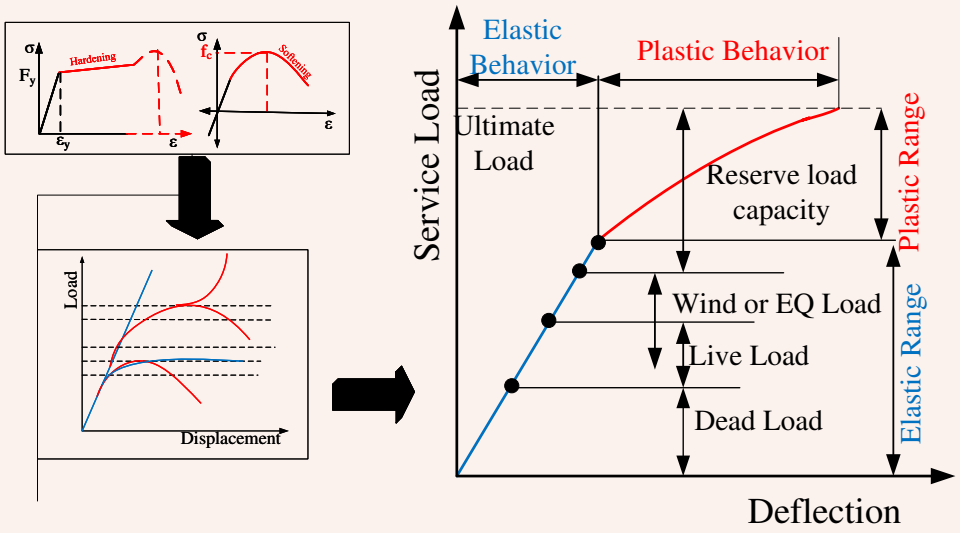
37 पदार्थ की अरैखिक प्रतिबल-विकृति वक्रों से आरंभ करके हमने विभिन्न मान्यताओं के अधीन प्रत्याशित संरचनात्मक अरैखिक अनुक्रिया पर विचार किया; अब हमें उन वक्रों के अंतर्गत भार की स्थिति निर्धारित करनी है।

38 भारों की चर्चा chapter 18 में की गई थी, किंतु अरैखिक विश्लेषण के संदर्भ में कोई दिया गया भार वैश्विक भार-विस्थापन वक्र पर कहाँ स्थित होता है? प्रत्येक भार के लिए सुरक्षा कैसे सुनिश्चित की जाती है और सर्वाधिक सुरक्षा अंतराल कहाँ आवश्यक होता है?

39 इसे चित्र 54.6 में दर्शाया गया है।

40 स्पष्ट कारणों से हम नहीं चाहते कि सेवा भार संरचना की अप्रत्यास्थ अनुक्रिया आरंभ करें। इसे पर्याप्त रूप से बडे *सुरक्षा गुणांक* द्वारा सुनिश्चित किया जाता है। तथापि विरल किंतु उच्च-तीव्रता वाले भारों की उपस्थिति में सुरक्षा अंतराल को सुरक्षित रूप से, परंतु सावधानीपूर्वक, कम किया जा सकता है—यहीं एक कुशल अभियंता अपनी विशिष्टता प्रदर्शित करता है। सामान्यतः हम प्रत्यास्थ परास से आगे नहीं जाना चाहते (यद्यपि अत्यंत प्रबल भूकंपीय उत्तेजना में इसे पार किया जा सकता है, जैसा अध्याय 72 में देखेंगे) और चरम/पतन भार के निकट नहीं पहुँचना चाहते। ऐसी प्रत्येक संभावना को पूर्णतः रोकने का प्रयास अत्यधिक महँगे अतिअभिकल्प का कारण बनता।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 54.6: भार-विक्षेप वक्र और विभिन्न अनुक्रिया परास

54.5 अभिकल्प संहिताएँ

54.5.1 परिचय

41 आधुनिक समय में सुरक्षा आवश्यकताएँ अभिकल्प संहिताओं में प्रतिष्ठापित हैं।

42 अभिकल्प संहिताएँ भवनों और अवसंरचना के अभिकल्प, निर्माण तथा अनुरक्षण के लिए मानकीकृत दिशानिर्देश और आवश्यकताएँ प्रदान करके संरचनाओं की सुरक्षा सुनिश्चित करने में निर्णायक भूमिका निभाती हैं।

मानकीकरण: अभिकल्प संहिताएँ नियमों और प्रक्रियाओं का एक सुसंगत समूह प्रदान करती हैं जिसका अभियंताओं और वास्तुकारों को पालन करना होता है। यह मानकीकरण सुनिश्चित करता है कि संरचनाओं का अभिकल्प स्वीकृत सिद्धांतों और प्रथाओं के अनुसार हो, जिससे त्रुटियों और चूकों का जोखिम कम होता है।

सुरक्षा अंतराल: अभिकल्प संहिताओं में ऐसे सुरक्षा गुणांक और अंतराल सम्मिलित होते हैं जो पदार्थ-गुणों, भारण परिस्थितियों और पर्यावरणीय प्रभावों की अनिश्चितताओं को ध्यान में रखते हैं। ये सुरक्षा अंतराल सुनिश्चित करने में सहायक होते हैं कि संरचनाएँ अप्रत्याशित प्रतिबलों और भारों को विफल हुए बिना सह सकें।

पदार्थ विनिर्देश: संहिताएँ निर्माण में प्रयुक्त किए जा सकने वाले पदार्थों के प्रकार और श्रेणियाँ निर्दिष्ट करती हैं। सामर्थ्य और टिकाऊपन जैसे पदार्थ-गुणों का मानकीकरण करके अभिकल्प संहिताएँ सुनिश्चित करती हैं कि केवल उपयुक्त पदार्थों का उपयोग हो, जिससे संरचना की समग्र सुरक्षा बढ़ती है।

भार संबंधी विचार: अभिकल्प संहिताएँ संरचना द्वारा वहन किए जाने वाले भारों की गणना के लिए

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

दिशानिर्देश देती हैं, जिनमें मृत भार (स्थायी स्थैतिक बल), जीवित भार (अस्थायी अथवा चल बल), पर्यावरणीय भार (पवन, भूकंप, हिम) और आकस्मिक भार (आघात, विस्फोट) सम्मिलित हैं। इन बलों को संरचना द्वारा सुरक्षित रूप से वहन किया जाना सुनिश्चित करने के लिए शुद्ध भार-गणना अत्यंत महत्वपूर्ण है।

संरचनात्मक विश्लेषण अभिकल्प संहिताएँ विभिन्न भारण परिस्थितियों के अधीन संरचनात्मक व्यवहार के विश्लेषण की विधियाँ निर्धारित करती हैं। इनमें प्रतिबल, स्थिरता और गतिक विश्लेषण के दिशानिर्देश सम्मिलित होते हैं, जो अभियंताओं को विभिन्न परिदृश्यों में संरचनात्मक अनुक्रिया का पूर्वानुमान करने में सहायक होते हैं।

भूकंपीय अभिकल्प: भूकंप-प्रवण क्षेत्रों में अभिकल्प संहिताओं में भूकंपीय अभिकल्प के विशिष्ट प्रावधान होते हैं। ये प्रावधान सुनिश्चित करते हैं कि संरचनाएँ भूकंपीय बलों को सहने के लिए अभिकल्पित हों और भूकंप के समय विनाशकारी विफलता का जोखिम कम हो।

गुणवत्ता नियंत्रण और निरीक्षण: अभिकल्प संहिताएँ संपूर्ण निर्माण प्रक्रिया के दौरान गुणवत्ता-नियंत्रण प्रक्रियाएँ और नियमित निरीक्षण अनिवार्य करती हैं। इससे यह सत्यापित होता है कि निर्माण कार्य अभिकल्प विनिर्देशों के अनुरूप है और किसी विचलन अथवा कमी को तुरंत दूर किया जाता है।

अद्यतन और संशोधन: नवीन शोध निष्कर्षों, प्रौद्योगिकीय प्रगति और पूर्व संरचनात्मक विफलताओं से प्राप्त शिक्षाओं को समाहित करने के लिए अभिकल्प संहिताओं को नियमित रूप से अद्यतन किया जाता है। यह सतत सुधार प्रक्रिया सुनिश्चित करती है कि संरचनात्मक सुरक्षा को प्रोत्साहित करने में संहिताएँ प्रासंगिक और प्रभावी बनी रहें।

विधिक और विनियामक अनुपालन: अभिकल्प संहिताओं का अनुपालन प्रायः विधिक आवश्यकता होता है। अभिकल्प संहिताओं पर आधारित भवन संहिताओं को स्थानीय प्राधिकरण लागू करते हैं ताकि सभी निर्माण परियोजनाएँ न्यूनतम सुरक्षा मानकों को पूरा करें। अनुपालन न करने पर जुर्माना, दंड और महँगे संशोधनों की आवश्यकता सहित विधिक परिणाम हो सकते हैं।

व्यावसायिक उत्तरदायित्व: अभिकल्प संहिताओं का पालन अभियंताओं और वास्तुकारों के व्यावसायिक उत्तरदायित्व का मूलभूत पक्ष है। यह सार्वजनिक सुरक्षा के प्रति प्रतिबद्धता दर्शाता है और ग्राहकों, विनियामक निकायों तथा सामान्य जनता के विश्वास को बनाए रखने में सहायक होता है।

54.5.2 विकास: प्राचीन काल

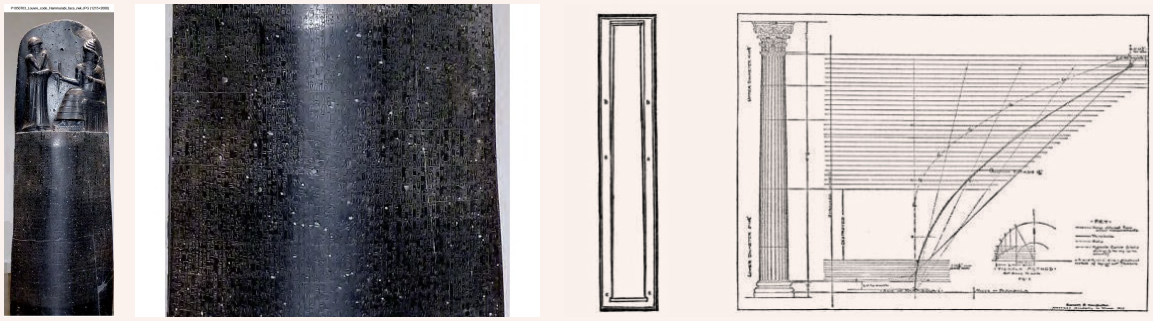
54.5.2.1 मेसोपोटामिया; हम्मुराबी

43 हम्मुराबी की संहिता (1780 BC) में निर्माण संबंधी प्रावधान सम्मिलित थे। काले डायोराइट की एकल चार-टन शिला से उत्कीर्ण इस भव्य प्रस्तर-स्तंभ पर 282 आदेश यदि-तब रूप में लिखे गए हैं—आधुनिक समय में इन्हें निर्णय-तर्क सारणियाँ कहा जाएगा—चित्र 54.7a। आधुनिक संरचनात्मक अभियंताओं के लिए विशेष रूप से प्रासंगिक प्रावधान निम्नलिखित हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> *228. यदि कोई निर्माता किसी व्यक्ति के लिए घर बनाए और उसे पूरा करे, तो उस व्यक्ति को प्रत्येक सार कृषेत्रफल के लिए उसे दो शेकेल धन शुल्क देना होगा।*
> *229. यदि कोई निर्माता किसी व्यक्ति के लिए घर बनाए, उसे उचित रूप से न बनाए, और उसका बनाया घर गिरकर स्वामी की मृत्यु का कारण बने, तो उस निर्माता को मृत्युदंड दिया जाएगा।*
> *230. यदि उससे स्वामी के पुत्र की मृत्यु हो, तो उस निर्माता के पुत्र को मृत्युदंड दिया जाएगा।*
> *231. यदि उससे स्वामी के दास की मृत्यु हो, तो वह घर के स्वामी को दास के बदले दास देगा।*
> *232. यदि उससे वस्तुओं की कृषति हो, तो वह नष्ट हुई सभी वस्तुओं की कृषतिपूर्ति करेगा; और क्योंकि उसने घर उचित रूप से नहीं बनाया और वह गिर गया, इसलिए वह अपने साधनों से घर का पुनर्निर्माण करेगा।*
> *233. यदि कोई निर्माता किसी व्यक्ति के लिए घर बनाए और अभी उसे पूरा भी न किया हो; यदि दीवारें गिरती हुई प्रतीत हों, तो निर्माता अपने साधनों से उन दीवारों को दृढ बनाएगा।*
>
> हम्मुराबी की संहिता (1780 BC)

44 फिर भी संहिता की कठोरता को इतिहास में पहली बार दोष सिद्ध होने तक निर्दोष माने जाने की संकल्पना द्वारा संतुलित किया गया था।



(a) हम्मुराबी की संहिता (Musée du Louvre)

(b) वित्रुवियस, पुस्तक IV

चित्र 54.7: प्राचीन काल की अभिकल्प संहिताएँ

54.5.2.2 रोमन; वित्रुवियस

45 वित्रुवियस (Vitruvius, 1960 PDF)—जिनकी अधिक विस्तृत चर्चा §6.3.1 और 15.2.1 में है—की दस *वास्तुकला विषयक पुस्तकें* वास्तव में आरंभिक अभिकल्प संहिताओं में से एक मानी जा सकती हैं।

46 उदाहरणार्थ पुस्तक III का अध्याय IV (मंदिरों की नींव और अधःसंरचनाएँ), चित्र 54.7b, निम्न शब्दों से आरंभ होता है:

> इन निर्माणों की नींव, यदि ठोस भूमि उपलब्ध हो, तो उसी में खोदी जानी चाहिए और कार्य के परिमाण के अनुसार जितनी गहराई आवश्यक प्रतीत हो उतनी गहराई तक ठोस भूमि में ले जानी चाहिए; संपूर्ण अधःसंरचना यथासंभव ठोस बनाई जानी चाहिए। भूमि के ऊपर स्तंभों के नीचे ऐसी दीवारें बनाई जाएँ जो स्तंभों से आधी अधिक मोटी हों, जिससे निचला भाग ऊपरी भाग से अधिक दृढ हो। इसीलिए उन्हें "स्टेरियोबेट्स" कहा जाता है, क्योंकि वे भार वहन करती हैं। आधारों के प्रक्षेप इस ठोस नींव से बाहर नहीं निकलने चाहिए। भूमि के ऊपर भी दीवार की यही मोटाई बनाए रखी जाए

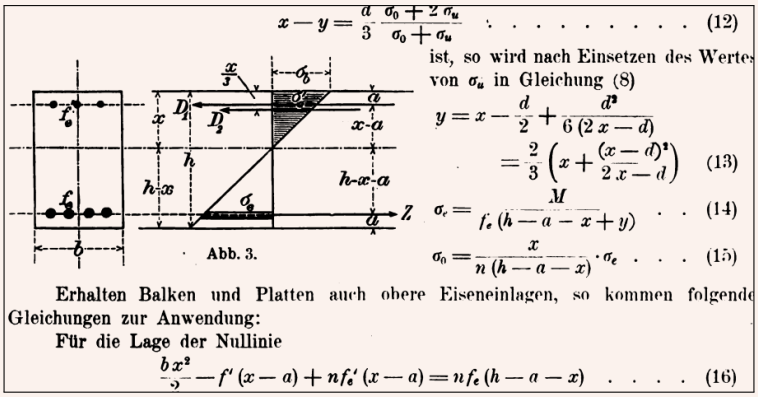
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

> और इन दीवारों के बीच के अंतरालों पर मेहराब बनाए जाएँ अथवा उन्हें दृढता से कूटी हुई मिट्टी से भरा जाए, ताकि दीवारें उचित दूरी पर बनी रहें।
>
> वित्रुवियस, अध्याय IV, पुस्तक III

54.5.3 आधुनिक काल

47 सुपष्टतः प्राचीन "संहिताएँ" पीढी-दर-पीढी हस्तांतरित अनुभवजन्य नियमों पर आधारित थीं। इनका उपयोग गॉथिक गिरजाघरों (§4), मेहराबों (§31) और अन्य संरचनाओं के अभिकल्प में किया गया। जब गैलीलियो (§6.6.2) ने पहली बार प्रयोगात्मक यांत्रिकी और प्रतिबलों की उपेक्षा न किए जाने की संकल्पना प्रस्तुत की, तभी बहुत बाद में "संहिताएँ" विज्ञान—मुख्यतः अनुप्रयुक्त यांत्रिकी—पर आधारित प्रलेखों में विकसित हुईं।

48 प्रबलित कंक्रीट के लिए सबसे पुरानी अभिकल्प संहिता *Beton-Reglement fur Eisenbetonbau* (प्रबलित कंक्रीट निर्माण के लिए कंक्रीट विनियम) है, जिसे जर्मनी में 1904 में विकसित किया गया था, चित्र 54.8। यह संहिता फ्रांसीसी अभियंता François Hennebique के कार्य पर आधारित थी, जिन्होंने 19वीं शताब्दी के उत्तरार्ध में कंक्रीट के प्रबलन की एक प्रणाली विकसित की थी। इसमें प्रबलित कंक्रीट संरचनाओं के अभिकल्प और निर्माण के लिए नियम और दिशानिर्देश निर्धारित किए गए थे, जिनमें कंक्रीट और प्रबलन इस्पात के गुणों के विनिर्देशों के साथ अभिकल्प गणनाएँ और विवरण-निर्धारण की आवश्यकताएँ सम्मिलित थीं। इसे जर्मनी और अन्य यूरोपीय देशों में व्यापक रूप से अपनाया गया और यह विश्वभर में बाद में विकसित प्रबलित कंक्रीट संहिताओं का प्रतिरूप बना।



$$x - y = \frac{a}{3}\,\frac{\sigma_0 + 2\sigma_u}{\sigma_0 + \sigma_u} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

ist, so wird nach Einsetzen des Wertes von σ_u in Gleichung (8)

$$y = x - \frac{d}{2} + \frac{d^3}{6\,(2x-d)}$$

$$= \frac{2}{3}\left(x + \frac{(x-d)^2}{2x-d}\right) \quad (13)$$

$$\sigma_e = \frac{M}{f_e\,(h-a-x+y)} \quad \ldots \quad (14)$$

$$\sigma_0 = \frac{x}{n\,(h-a-x)}\cdot\sigma_e \quad \ldots \quad (15)$$

Abb. 3.

Erhalten Balken und Platten auch obere Eiseneinlagen, so kommen folgende Gleichungen zur Anwendung:

Für die Lage der Nullinie

$$\frac{bx^2}{2} - f'(x-a) + nf_e'(x-a) = nf_e(h-a-x) \quad \ldots \quad (16)$$

चित्र 54.8: *beton-reglement fur Eisenbetonbau*

49 *Beton-Reglement* के विकास के बाद प्रबलित कंक्रीट अभिकल्प के लिए अनेक अन्य संहिताएँ और मानक विकसित हुए, जिनमें प्रौद्योगिकी की प्रगति तथा भवन संहिताओं और विनियमों में हुए परिवर्तन प्रतिबिंबित होते हैं। तथापि प्रबलित कंक्रीट अभिकल्प के मूल सिद्धांत—जिनमें तनन सामर्थ्य प्रदान करने के लिए प्रबलन इस्पात का उपयोग तथा उचित विवरण-निर्धारण और निर्माण पद्धतियों का महत्त्व सम्मिलित है—अधिकांशतः अपरिवर्तित रहे हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

50 इसी प्रकार संयुक्त राज्य अमेरिका में 20वीं शताब्दी के आरंभ में भवन संहिताएँ तब विकसित हुईं जब नगरों ने भवन-निर्माण से संबंधित सुरक्षा चिंताओं को संबोधित करने के लिए विनियम लागू करना आरंभ किया। National Board of Fire Underwriters ने 1915 में प्रथम आदर्श भवन संहिता विकसित की, जिसका प्रमुख केंद्र अग्नि-सुरक्षा था।

51 आदर्श भवन संहिताओं के विकास को प्रोत्साहित करने के लिए 1927 में Building Officials and Code Administrators International (BOCA) की स्थापना हुई और 1940 में BOCA National Building Code का प्रथम संस्करण प्रकाशित हुआ। International Conference of Building Officials (ICBO) की स्थापना भी 1920 के दशक में हुई और उसने 1940 में अपनी आदर्श भवन संहिता विकसित की, जो Uniform Building Code के नाम से प्रसिद्ध हुई।

52 संयुक्त राज्य अमेरिका में American Concrete Institute (ACI) की स्थापना 1904 में हुई, किंतु विशेष रूप से प्रबलित कंक्रीट को समर्पित प्रथम ACI संहिता 1915 में प्रकाशित हुई। “Building Code Requirements for Reinforced Concrete” शीर्षक वाली इस संहिता ने संयुक्त राज्य अमेरिका में प्रबलित कंक्रीट संरचनाओं के अभिकल्प और निर्माण के लिए दिशानिर्देश स्थापित किए।

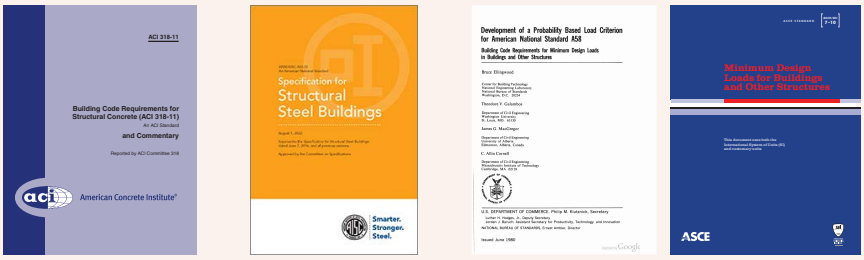
53 इस्पात की सबसे पुरानी अभिकल्प संहिता Specification for the Design, Fabrication, and Erection of Structural Steel for Buildings है, जिसे American Institute of Steel Construction (AISC) ने पहली बार 1923 में प्रकाशित किया। भवन निर्माण में संरचनात्मक इस्पात के उपयोग को प्रोत्साहित करने के लिए इस संस्था की स्थापना 1921 में हुई थी; विनिर्देश के प्रथम संस्करण ने अभिकल्प, निर्माण और स्थापन सहित संरचनात्मक अनुप्रयोगों में इस्पात के उपयोग के दिशानिर्देश प्रदान किए।

54 यद्यपि अभिकल्प के विवरण मूलतः समान रहे हैं—जैसे आंतरिक और बाह्य बलों के बीच साम्यावस्था बनाए रखना अथवा विक्षेप सीमित करना—तथापि सभी संहिताओं (कंक्रीट, इस्पात, काष्ठ आदि) का समग्र दर्शन विकसित हुआ है। इन्हें, चित्र 54.9, मोटे तौर पर निम्न श्रेणियों में बाँटा जा सकता है:

स्वीकार्य प्रतिबल अभिकल्प (Allowable Stress Design) सुरक्षा की संकल्पना प्रस्तुत करने का सबसे पुराना और सरलतम उपागम।

भार एवं प्रतिरोध गुणांक अभिकल्प (Load and Resistance Factor Design) ACI संहिता में 1977 और AISC में 1986 में प्रस्तुत। प्रमुख संदर्भ Ellingwood।

निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी 1 & 2 मुख्यतः भूकंपीय अभिकल्प के लिए विकसित।



चित्र 54.9: आधुनिक अभिकल्प संहिताओं के उदाहरण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

54.5.3.1 स्वीकार्य प्रतिबल अभिकल्प, ASD

55 ASD सर्वाधिक सहज और सरल उपागम है। वास्तविक सामर्थ्य को एक गुणांक (सामान्यतः 60%) से घटाया जाता है और उसे अधिकतम स्वीकार्य प्रतिबल (तनन, संपीडन अथवा बंकन) माना जाता है।

56 इस विधि की प्रमुख सीमा यह है कि सुरक्षा गुणांक केवल सामर्थ्य (क्षमता) में chap:trustregion से प्रभावित होता है, भार (माँग) में नहीं।

54.5.3.2 भार एवं प्रतिरोध गुणांक अभिकल्प, LRFD

प्रमुख संकल्पनाएँ

57 भार और प्रतिरोध नियतात्मक राशियाँ नहीं हैं (जैसा स्वीकार्य प्रतिबल अभिकल्प, ASD, में माना जाता है), बल्कि अपने-अपने प्रायिकता वितरण फलनों वाले यादृच्छिक चर हैं। अतः हम *विफलता की प्रायिकता* की चर्चा कर सकते हैं।

58 क्षमता और माँग दोनों होने के कारण प्रत्येक को उपयुक्त गुणांक से गुणा किया जाएगा। भार को α गुणांक से गुणा किया जाएगा, (ASCE/SEI 7-16, 2017), और क्षमता (चरम प्रतिरोध) को Φ से घटाया जाएगा।

59 α और Φ इस प्रकार निर्धारित किए जाएँगे कि विफलता की प्रायिकता किसी निश्चित मान से अधिक न हो। अतः LRFD को सामान्यतः निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है:

$$\Phi C_n \geq \Sigma \alpha_i D_i \tag{54.1}$$

जहाँ C_n और D क्रमशः नाममात्र क्षमता और माँग (अथवा नाममात्र प्रतिरोध और भार) हैं। सीमा अवस्था सामान्यतः अरैखिक विश्लेषण के बिना सुघट्य क्षमता से निर्धारित की जाती है। LRFD का उद्देश्य ऐसा विश्वसनीयता सूचकांक (अध्याय N) प्राप्त करना है कि $\beta >\sim 3.5$ हो (सारणी N.1)। विश्वसनीयता सूचकांक किसी संरचना की पर्याप्तता का एक "सार्वभौमिक" संकेतक है और इसे (1) संरचना के स्वास्थ्य के आकलन तथा (2) संभावित सुधार के लिए लक्षित विभिन्न संरचनाओं की तुलना के मापदंड के रूप में उपयोग किया जा सकता है।

60 विश्वसनीयता सूचकांक की परिभाषा परिशिष्ट N में दी गई है।

LRFD की सीमाएँ

61 LRFD की तीन प्रमुख सीमाएँ हैं:

1. यह असंगत है: विश्लेषण रैखिक, परंतु अभिकल्प सुघट्य।
2. यह विफलता के समीप भार-पुनर्वितरण की उपेक्षा करता है (यद्यपि ACI ऋणात्मक आघूर्णों को घटाकर इसके एक भाग को अंतर्निहित रूप से ध्यान में रखता है)।
3. यह संकट के केवल एक स्तर—एक संरचनात्मक घटक की विफलता, न कि संपूर्ण निकाय की—को संबोधित करता है।

62 स्थैतिक विश्लेषणों में ये सीमाएँ नगण्य हो सकती हैं, किंतु वे तब समस्याप्रद होती हैं जब (a) संरचना की वास्तविक सुरक्षा निर्धारित करनी हो और (b) गतिक भार के अधीन आंशिक क्षति आर्थिक दृष्टि से स्वीकार्य हो। अगली विधि इन सीमाओं को संबोधित करती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

54.5.3.3 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी

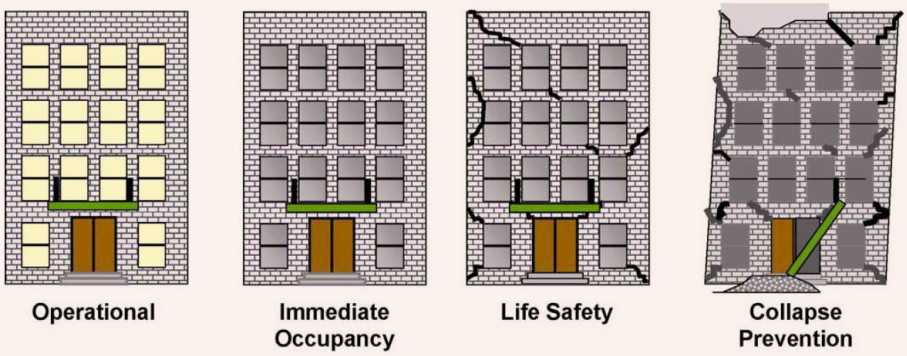
63 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) भूकंप अभियांत्रिकी का ऐसा उपागम है जो भूकंपीय भारण के अधीन संरचनाओं के निर्दिष्ट निष्पादन उद्देश्यों की प्राप्ति पर केंद्रित है। PBEE में निष्पादन उद्देश्य सामान्यतः भूकंप के दौरान संरचना द्वारा सही जा सकने वाली क्षति के स्तर तथा भूकंप के बाद उसकी कार्यशीलता के पदों में परिभाषित किए जाते हैं।

64 संभावित संकट के परिमाणीकरण और वास्तविक भवन-अनुक्रिया के आकलन में अंतर्निहित अनिश्चितताओं को ध्यान में रखते हुए PBEE स्पष्ट रूप से मूल्यांकन करता है कि संभावित संकट के अधीन भवन का निष्पादन कैसा होने की संभावना है।

65 LRFD के विपरीत यह स्वयं को संकट के एक स्तर तक सीमित नहीं करता, बल्कि अनेक स्तरों पर विचार करता है। निष्पादन को जनहानि की प्रायिकता, मरम्मत और प्रतिस्थापन लागत, मरम्मत समय तथा असुरक्षित घोषित किए जाने के पदों में मापा जाता है।

66 निष्पादन का आकलन किसी विशेष भूकंप परिदृश्य अथवा तीव्रता के लिए, या निर्दिष्ट समयावधि में घटित हो सकने वाले सभी भूकंपों और प्रत्येक की संभाव्यता को ध्यान में रखकर किया जा सकता है। निष्पादन को चित्र 54.10 में दर्शाए गए निम्न पृथक निष्पादन स्तरों के रूप में व्यक्त किया जाता है:

1. परिचालनशील
2. तत्काल अधिभोग
3. जीवन सुरक्षा
4. पतन निवारण



चित्र 54.10: निष्पादन स्तर

67 कुछ सीमाएँ निम्नलिखित हैं:

- सीमा अवस्थाएँ घटक-आधारित हैं, वास्तविक रूप से संपूर्ण निकाय-आधारित नहीं (यदि एक घटक विफल हो, तो क्या वह क्रमिक पतन आरंभ करेगा?)।
- केवल MCE घटना (2%/50 वर्ष) पर विचार किया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

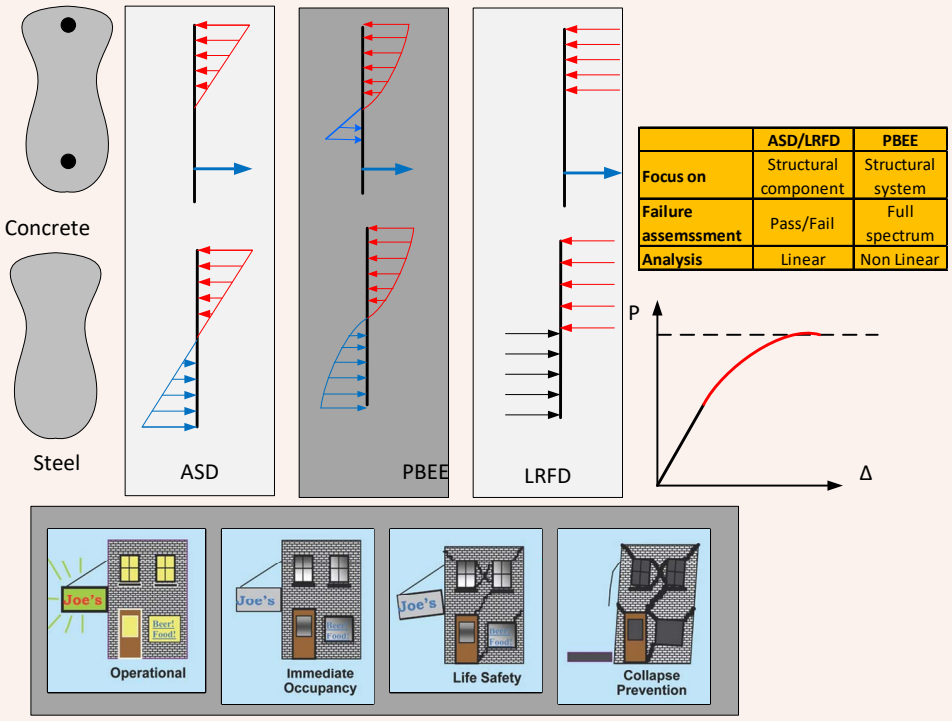
- chap:trustregion और प्रायिकता का सीमित निरूपण।
- संहिता से उच्चतर अभिकल्प के लिए सीमित जानकारी।

[68] PBEE वर्तमान अत्याधुनिक व्यावहारिक पद्धति है और इसका उपयोग केवल उच्च-स्तरीय कंपनियों द्वारा किया जाता है।

[69] PBEE का अधिक विस्तृत विवेचन अध्याय 72 में दिया गया है।

54.5.4 सारांश

[70] पूर्व में चर्चित अभिकल्प प्रतिमानों का सार चित्र 54.11 में दिया गया है।



चित्र 54.11: विभिन्न अभिकल्प रूपरेखाओं की तुलना

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप सामग्री

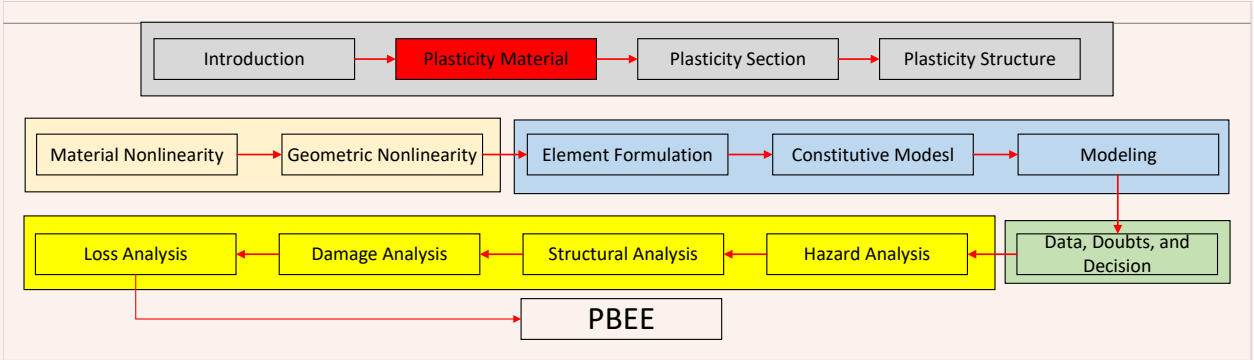
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

55 सुघट्यता I: तंतु & सातत्य (परिमित-अवयव विश्लेषण के लिए)

सारांश

यह सुघट्यता पर केंद्रित तीन अध्यायों में से पहला है। इस अध्याय में[1] *हमारा ध्यान सातत्य परिमित अवयव की भावना में एक "गाउस-बिंदु" अथवा वितरित सुघट्यता अवयवों के किसी तंतु/स्तर पर केंद्रित है। यह मूलतः सुघट्यता के आधारभूत सिद्धांतों की समीक्षा है, जैसी असंख्य पाठ्यपुस्तकों में मिलती है। हम धातुओं और सीमेंटयुक्त पदार्थों के सुघट्य पराभव मानदंडों से आरंभ करते हैं। प्रयोगशाला प्रेक्षणों और सूक्ष्मदर्शीय विफलताओं के संक्षिप्त अवलोकन के पश्चात स्पर्शरेखीय प्रत्यास्थता मापांक की व्युत्पत्ति पर बल देते हुए सुघट्यता सिद्धांत के मूलाधार प्रस्तुत किए गए हैं। दो उपागमों का विवेचन किया गया है। प्रथम, सामान्यीकृत व्युत्पत्ति, पराभव फलन, प्रवाह नियम (और Kuhn-Tucker प्रतिबंध) तथा संगति प्रतिबंधों की संकल्पनाएँ प्रस्तुत करती है। दूसरा, अत्यंत सरल उपागम, 1D तक सीमित है और सरल अभियांत्रिकी विचारों पर आधारित है। अगले अध्याय में अनुप्रस्थ काट की सुघट्यता और उसके बाद वाले अध्याय में संरचनात्मक सुघट्यता का विवेचन किया जाएगा।*

55.1 परिचय 1856
55.2 सुघट्य पराभव प्रतिबंध 1856
55.2.1 द्रवस्थैतिक दाब से स्वतंत्र प्रतिरूप 1856
55.2.2 द्रवस्थैतिक दाब पर निर्भर प्रतिरूप 1858
55.3 प्रयोगशाला प्रेक्षण 1860
55.3.1 धातुएँ 1860
55.3.2 कंक्रीट 1861
55.4 सूक्ष्मदर्शीय विफलताएँ 1862
55.4.1 रासायनिक आबंध 1862
55.4.2 तन्य और भंगुर विफलताएँ . . . 1863
55.4.3 विस्थापन-दोष 1863
55.5 सुघट्यता के मूलाधार 1864
55.5.1 परिचय 1864
55.5.2 स्पर्शरेखीय प्रत्यास्थता मापांक 1865



[1] पाठक को इस अध्याय का अध्ययन आरंभ करने से पहले परिशिष्ट O की पुनरावृत्ति करने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

55.1 परिचय

1 विफलता के तीन प्रमुख प्रकार हैं: दरार/भंग, व्याकुंचन/अस्थिरता और पराभव/सुघट्यता। यह अध्याय सुघट्यता को संबोधित करेगा।

2 कंक्रीट में सुघट्य विफलता प्रायः कंक्रीट के "संदलन" (देखें §55.2.1) अथवा प्रबलन के पराभव (§55.2.2) से संबंधित होती है।

3 यह अध्याय सुघट्यता-आधारित विफलता मानदंडों का संक्षिप्त परिचय देगा, जिनका अरैखिक परिमित-अवयव विश्लेषणों में लगभग सार्वभौमिक उपयोग होता है।

55.2 सुघट्य पराभव प्रतिबंध

4 एकाक्षीय रूप से भारित संरचनात्मक अवयव में पराभव को $|\frac{\sigma}{\sigma_{yld}}| \overset{?}{\geq} 1$ से सरलता से निर्धारित किया जा सकता है। परंतु सामान्य त्रिविमीय प्रतिबल अवस्था के लिए क्या किया जाए?

5 इसके लिए मुख्य प्रतिबलों और एकाक्षीय पराभव प्रतिबल के फलन के रूप में एक *पराभव फलन* F प्रस्तुत किया जाता है:

$$F(\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}; \sigma_y) \begin{cases} < 0 & \text{प्रत्यास्थ} \\ = 0 & \text{सुघट्य} \\ > 0 & \text{असंभव} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}\varepsilon^p}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}\varepsilon^p}{\mathrm{d}t} \geq 0$$

ध्यान दें कि F शून्य से अधिक नहीं हो सकता, उसी कारण से जिस कारण एकाक्षीय प्रतिबल पराभव प्रतिबल से अधिक नहीं हो सकता। दो मुख्य प्रतिबलों $\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}$ के पदों में F को चित्र 55.1 में दर्शाया गया है। F द्वारा परिभाषित क्षेत्र *पराभव पृष्ठ* बनाता है।

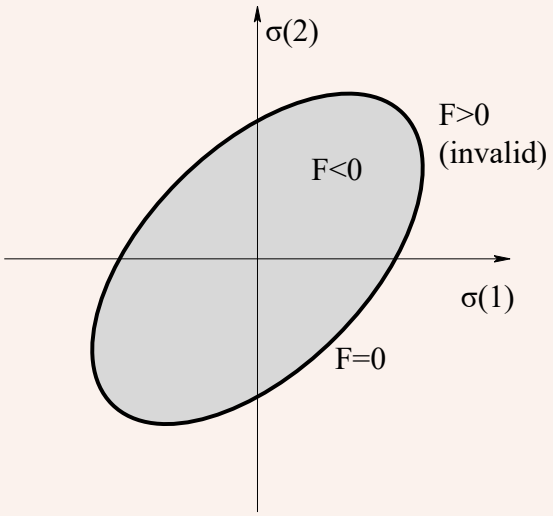
6 पराभव पृष्ठों के दो वर्ग हैं: वे जो द्रवस्थैतिक प्रतिबल (समीकरण O.2.2.1) से स्वतंत्र हैं और वे जो उस पर निर्भर हैं (Chen and Zhang, 1990)।

55.2.1 द्रवस्थैतिक दाब से स्वतंत्र प्रतिरूप

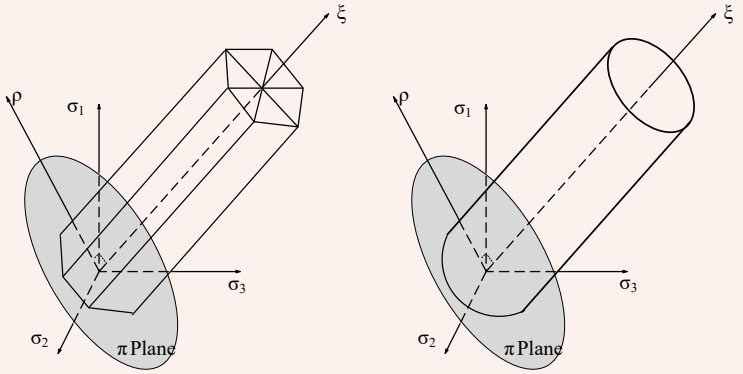
7 द्रवस्थैतिक दाब से स्वतंत्र पराभव पृष्ठों (जैसे इस्पात के लिए) की याम्योत्तर रेखाएँ द्रवस्थैतिक अक्ष के समानांतर सीधी रेखाएँ होती हैं। अतः इस प्रकार के पदार्थ में पराभव का प्रमुख कारण अपरूपण प्रतिबल होना चाहिए। चूँकि अपरूपण प्रतिबल की दिशा नहीं, बल्कि उसका परिमाण महत्त्वपूर्ण होता है, इसलिए द्रवस्थैतिक दाब से स्वतंत्र पदार्थों (जैसे इस्पात) का तनन और संपीडन में प्रत्यास्थ-सुघट्य व्यवहार समतुल्य होना चाहिए।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 55.1: पराभव पृष्ठ: परिभाषा



(a) Tresca (b) von Mises

चित्र 55.2: द्रवस्थैतिक दाब से स्वतंत्र प्रतिरूप

Tresca: मानदंड की परिकल्पना है कि पराभव तब होता है जब अधिकतम अपरूपण प्रतिबल सीमा-मान k तक पहुँचता है, चित्र 55.2a।

$$F\left(\max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_2|,\frac{1}{2}|\sigma_2-\sigma_3|,\frac{1}{2}|\sigma_3-\sigma_1|\right)-k\right)=0$$

एकाक्षीय तनन परीक्षण से $k=\sigma_y/2$ और शुद्ध अपरूपण परीक्षण से $k=\tau_y$ निर्धारित होता है। अतः Tresca मानदंड में तनन सामर्थ्य और अपरूपण सामर्थ्य का संबंध निम्न है:

$$\sigma_y = 2\tau_y$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Tresca मानदंड को निम्न रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है:

$$2\sqrt{J_2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sigma_y=0 \quad \text{के लिए} \quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$$

Tresca सबसे पहले प्रस्तावित मानदंड था और इसका उपयोग मुख्यतः प्रत्यास्थ-सुघट्य प्रश्नों में होता है। तथापि एकल कोनों के कारण यह संख्यात्मक विश्लेषण में अनेक समस्याएँ उत्पन्न करता है।

Von Mises: von Mises मानदंड की परिकल्पना की अनेक भौतिक व्याख्याएँ हैं, जो सभी समतुल्य हैं, चित्र 55.2b:

1. पदार्थ तब पराभवित होगा जब दूसरा विचलक प्रतिबल निश्चर क्रांतिक मान तक पहुँच जाए:

$$F(J_2)=J_2-k^2=0 \tag{55.1}$$

2. पदार्थ तब पराभवित होगा जब अधिकतम विरूपक (अपरूपण) ऊर्जा उसी क्रांतिक मान तक पहुँच जाए जो एकाक्षीय तनन में पराभव के लिए होता है।
3. जब दूरी (ρ), प्रतिबल बिंदु P और द्रवस्थैतिक अक्ष ξ के बीच, निम्न के बराबर हो:

$$\rho_0=\tau_y\sqrt{2}$$

समीकरण 55.1 और एकाक्षीय परीक्षण से k का मान $k=\sigma_y/\sqrt{3}$ तथा शुद्ध अपरूपण परीक्षण से $k=\tau_y$ प्राप्त होता है। अतः von Mises मानदंड में तनन सामर्थ्य और अपरूपण सामर्थ्य का संबंध निम्न है:

$$\sigma_y=\sqrt{3}\tau_y$$

अतः समीकरण 55.1 को निम्न रूप में पुनः लिखा जा सकता है:

$$f(J_2)=J_2-\frac{\sigma_y^2}{3}=0$$

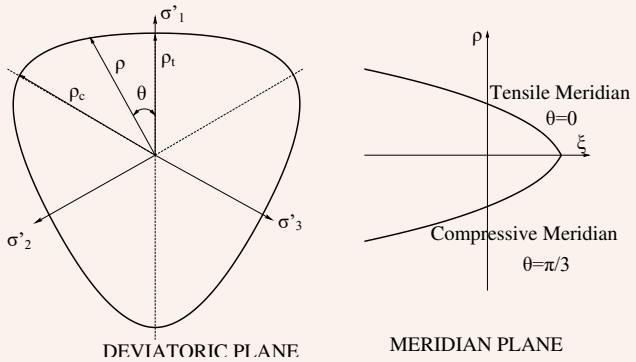
55.2.2 द्रवस्थैतिक दाब पर निर्भर प्रतिरूप

[8] दाब-संवेदी घर्षणीय पदार्थों (जैसे मृदा, शैल और कंक्रीट) के लिए प्रथम और द्वितीय दोनों प्रतिबल निश्चरों के प्रभावों को ध्यान में रखना आवश्यक है; इसे पराभव पृष्ठ के पदों में अधिक स्पष्ट रूप से समझाया जा सकता है।

[9] पराभव पृष्ठ के अनुप्रस्थ काट पराभव पृष्ठ और विचलक तल (ρ,θ) की प्रतिच्छेदन वक्रें हैं। यह तल द्रवस्थैतिक अक्ष ξ के लंबवत होता है और इस पर $\xi=$ नियत रहता है। इस पराभव पृष्ठ के अनुप्रस्थ काटों में त्रिगुण सममिति होगी।

[10] पराभव पृष्ठ की याम्योत्तर रेखाएँ पृष्ठ और उस याम्योत्तर तल (ξ,ρ) की प्रतिच्छेदन वक्रें हैं जिसमें द्रवस्थैतिक अक्ष स्थित है। $\theta=0$ वाला याम्योत्तर तल तनन याम्योत्तर है और एकाक्षीय तनन पराभव

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 55.3: दाब-निर्भर पराभव पृष्ठ

बिंदु से गुजरता है। $\theta = \pi/3$ वाला याम्योत्तर तल संपीडन याम्योत्तर है और एकाक्षीय संपीडन पराभव बिंदु से गुजरता है, चित्र 55.3। तनन याम्योत्तर पर पराभव पृष्ठ की त्रिज्या ρ_t और संपीडन याम्योत्तर पर ρ_c है।

Rankine: मानदंड की परिकल्पना है कि पराभव तब होता है जब अधिकतम मुख्य प्रतिबल तनन सामर्थ्य तक पहुँचता है, चित्र 55.4a।

$$\sigma_1 = \sigma_y; \quad \sigma_2 = \sigma_y; \quad \sigma_3 = \sigma_y;$$

Mohr-Coulomb: मानदंड को Tresca मानदंड का विस्तार माना जा सकता है। अधिकतम अपरूपण प्रतिबल एक नियतांक और उसी तल पर कार्यरत अभिलंब प्रतिबल के एक फलन का योग है, चित्र 55.4b।

$$|\tau| = c - \sigma \tan\phi$$

जहाँ c संसंजन और ϕ आंतरिक घर्षण कोण है। c और ϕ दोनों पदार्थ-गुण हैं जिन्हें एकाक्षीय तनन और एकाक्षीय संपीडन परीक्षणों से अंशांकित किया जा सकता है।

$$\begin{cases} \sigma_t &= \frac{2c\cos\phi}{1+\sin\phi} \\ \sigma_c &= \frac{2c\cos\phi}{1-\sin\phi} \end{cases}$$

निश्चरों के पदों में Mohr-Coulomb मानदंड को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

$$\frac{1}{3}I_1\sin\phi + \sqrt{J_2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{\frac{J_2}{3}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\phi - c\cos\phi = 0$$
$$\text{के लिए} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

Drucker-Prager: परिकल्पना von Mises मानदंड का सरल विस्तार है जिसमें I_1 के माध्यम से पदार्थ के पराभव पर द्रवस्थैतिक दाब का प्रभाव सम्मिलित किया जाता है, चित्र 55.4c:

$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + J_2 - k$$

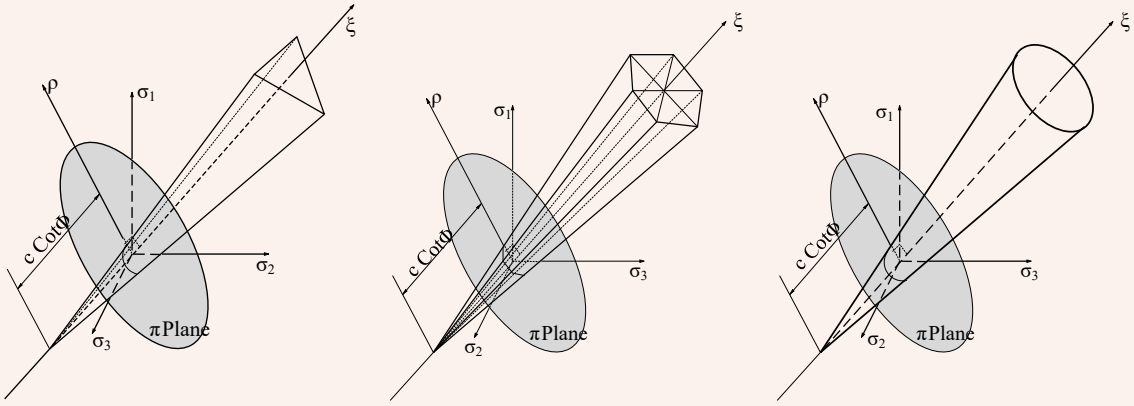
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सामर्थ्य प्राचल α और k एकाक्षीय तनन और संपीडन परीक्षणों से निर्धारित किए जा सकते हैं:

$$\begin{cases} \sigma_t &= \dfrac{\sqrt{3}k}{1+\sqrt{3}\alpha} \\ \sigma_c &= \dfrac{\sqrt{3}k}{1-\sqrt{3}\alpha} \end{cases}$$

अथवा

$$\begin{cases} \alpha &= \dfrac{m-1}{\sqrt{3}(m+1)} \\ k &= \dfrac{2\sigma_c}{\sqrt{3}(m+1)} \end{cases}$$



(a) Rankine (b) Mohr-Coulomb (c) Drucker-Prager

चित्र 55.4: द्रवस्थैतिक दाब पर निर्भर प्रतिरूप

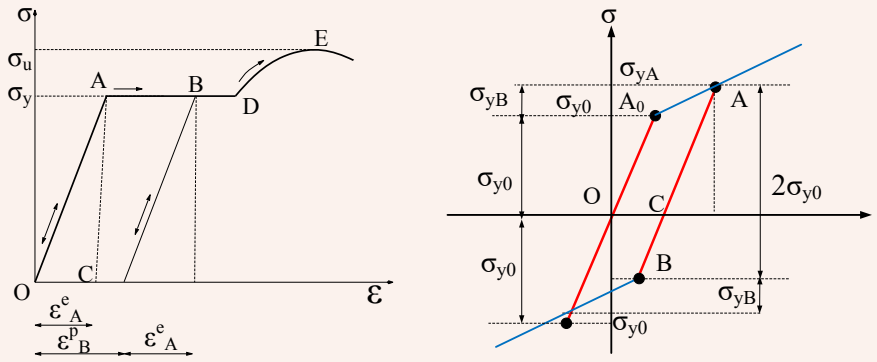
55.3 प्रयोगशाला प्रेक्षण

55.3.1 धातुएँ

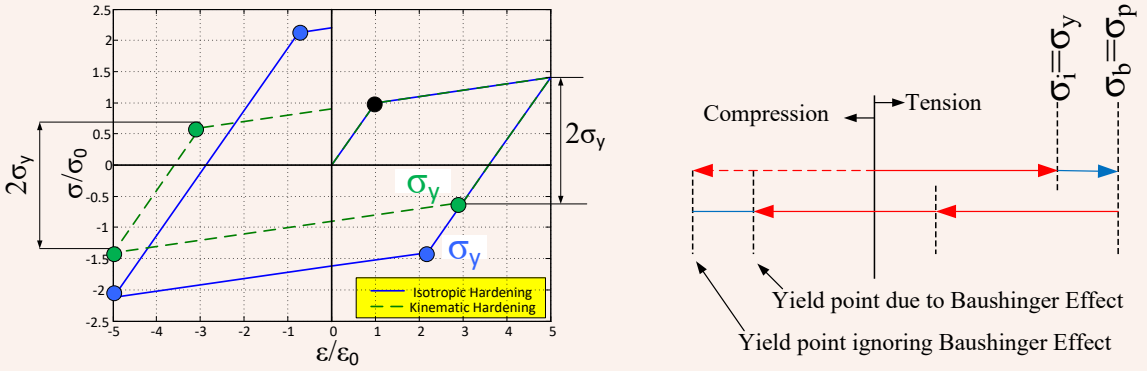
[11] इस्पात कूपन को विभिन्न चरणों में भारित और अभारित करने पर, चित्र 55.5a, हम देखते हैं कि A तक प्रारंभिक भारण पथ का अनुसरण करते हुए रैखिक प्रत्यास्थ अभारण होता है। O-A व्यवहार भार-पथ से स्वतंत्र है। A पर प्रत्यास्थ सीमा प्राप्त होती है। इसके बाद पदार्थ सुघट्य हो जाता है और अनुत्क्रमणीय व्यवहार करता है: पहले पराभव (A-D), तत्पश्चात कठोरण होता है। अभारण के बाद पदार्थ में स्थायी विकृति अथवा सुघट्य विकृति ε^p रह जाती है। अतः कुल विकृति ε_B का B पर केवल एक भाग, अर्थात प्रत्यास्थ विकृति ε^e_A, अभारण पर पुनः प्राप्त होता है।

[12] एक दिशा में विकृति-कठोरण के पश्चात विपरीत दिशा में उत्क्रमित भारण से प्राप्त प्रतिबल-विकृति वक्र शुद्ध तनन अथवा संपीडन से प्राप्त वक्र से भिन्न होती है। B पर संपीडन में नया पराभव बिंदु ऐसे प्रतिबल σ^B_y के अनुरूप है जो σ^0_y से कम और पूर्व पराभव प्रतिबल A से बहुत कम है। इस परिघटना को

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) समदैशिक कठोरण



(b) शुद्धगतिक कठोरण; Bauschinger प्रभाव

चित्र 55.5: धातुओं का प्रतिबल-विकृति व्यवहार; Bauschinger प्रभाव

Bauschinger प्रभाव अथवा शुद्धगतिक कठोरण (समदैशिक कठोरण के विपरीत) कहा जाता है, चित्र 55.5b।

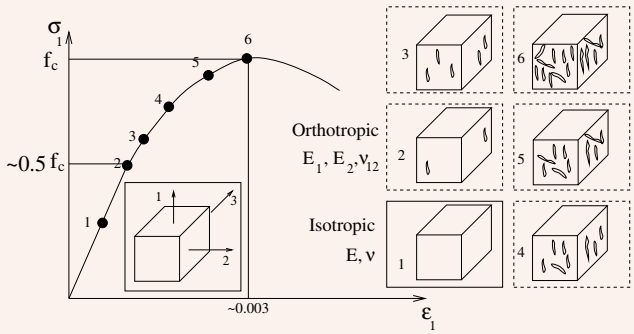
[13] सुघट्य परास में प्रतिबल-विकृति व्यवहार पथ-निर्भर होता है; अर्थात विकृति केवल वर्तमान प्रतिबल अवस्था पर निर्भर नहीं होती। वह संपूर्ण भारण इतिहास, अर्थात प्रतिबल और विरूपण इतिहास, पर भी निर्भर होती है।

55.3.2 कंक्रीट

[14] कंक्रीट में संकुचन के कारण सूक्ष्म दरारें होती हैं और आरंभ में वह समदैशिक होता है। संपीडन के अधीन प्रतिबल के $\simeq 0.5 f_c'$ तक पहुँचने पर समुच्चयों के चारों ओर अंतरापृष्ठीय दरारें प्रसारित होती हैं और संपीडन प्रतिबल की दिशा में संरेखित होने लगती हैं। चरम प्रतिबल पर सूक्ष्म दरारों के सहसंयोजन से एक क्रियाविधि बनती है (Hsu et al., 1963) (Slate and Olsefski, 1963), चित्र 55.6।

[15] यदि भार लगाया जाए तो चरम पर आकस्मिक विफलता होती है; यदि विस्थापन आरोपित किया जाए तो चरम-पश्च मृदुकरण होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

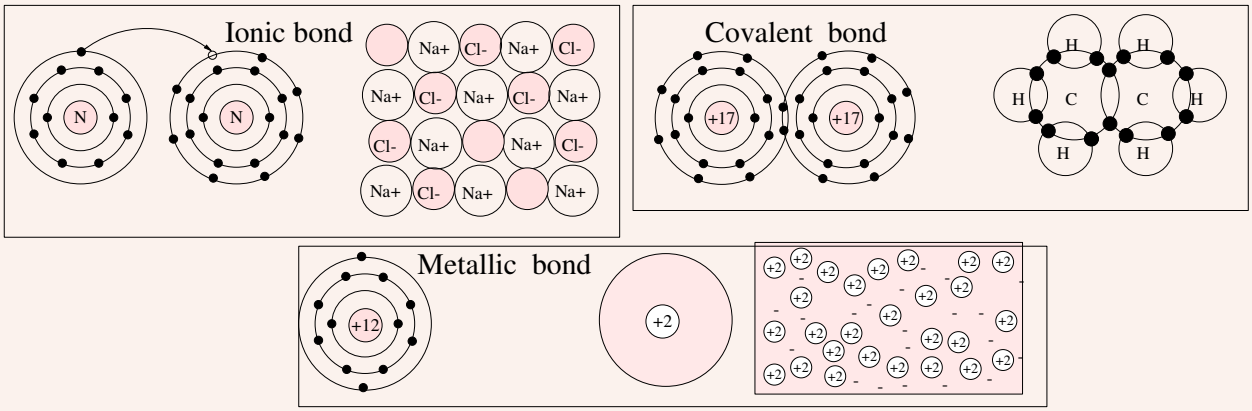


चित्र 55.6: कंक्रीट की सूक्ष्म दरारें

55.4 सूक्ष्मदर्शीय विफलताएँ

55.4.1 रासायनिक आबंध

16 तन्य विफलता और विस्थापन-दोष दोनों की व्याख्या के लिए रासायनिक आबंधों को समझना महत्त्वपूर्ण है, चित्र 55.7। आयनिक आबंध में इलेक्ट्रॉन एक परमाणु से पड़ोसी परमाणु को स्थानांतरित होते हैं और स्थिरवैद्युत आकर्षण परमाणुओं को बाँधकर रखता है। इलेक्ट्रॉन त्यागने वाला परमाणु धनावेशित और उसे ग्रहण करने वाला परमाणु ऋणावेशित हो जाता है। सहसंयोजक आबंध तब बनता है जब पड़ोसी परमाणुओं के बीच इलेक्ट्रॉन लगभग समान रूप से साझा किए जाते हैं। यद्यपि समीपस्थ परमाणुओं के बीच स्थिरवैद्युत आकर्षण बल आयनिक आबंध की अपेक्षा कम होता है, सहसंयोजक आबंध अत्यधिक दिशात्मक होते हैं और इस कारण परमाणुओं की परस्पर सरकने की गति का प्रतिरोध करते हैं। हीरे में सहसंयोजक आबंध होते हैं। धात्विक आबंध में इलेक्ट्रॉन अस्थानीकृत होते हैं अथवा धात्विक क्रिस्टल में समान रूप से वितरित रहते हैं; आबंध दो परमाणुओं के बीच स्थानीयकृत नहीं होता। इसे इलेक्ट्रॉनों के समुद्र में धनात्मक आयनों के रूप में सर्वोत्तम ढंग से वर्णित किया जाता है।

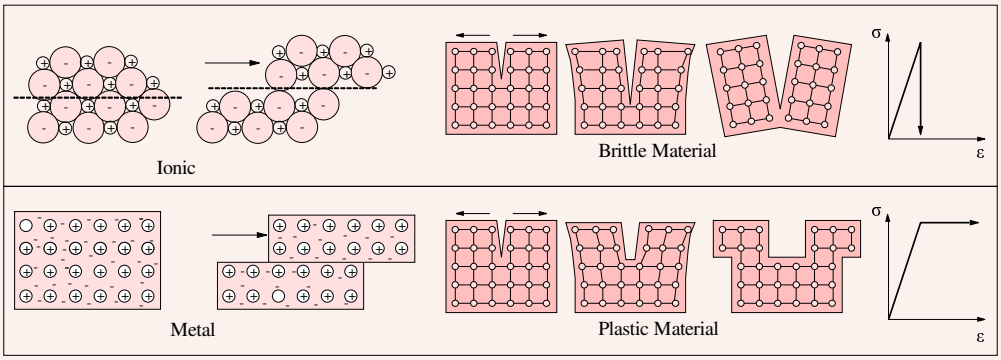


चित्र 55.7: रासायनिक आबंध

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

55.4.2 तन्य और भंगुर विफलताएँ

17 आयनिक ठोस में प्रत्येक आयन विपरीत आवेश वाले आयनों से घिरा होता है; अतः सर्पण प्राप्त करना अत्यंत कठिन होता है और पदार्थ भंगुर रूप से टूटकर अनुक्रिया करता है, चित्र 55.8। जब पर्याप्त परिमाण का बल परमाणुओं को एक साम्यावस्था स्थिति से दूसरी में विस्थापित करता है, तब वैद्युत आवेश प्रतिबंध की परवाह किए बिना सर्पण तल के अनुदिश सुघट्य विरूपण होता है और तन्य अनुक्रिया उत्पन्न होती है।



चित्र 55.8: तन्य और भंगुर आबंध

55.4.3 विस्थापन-दोष

18 पूर्ण क्रिस्टलों की सैद्धांतिक सामर्थ्य—दो समीपस्थ परमाणुओं को अलग करने के लिए आवश्यक प्रतिबल—लगभग $E/10$ होती है, किंतु यादृच्छिक अपूर्णताओं की उपस्थिति के कारण यह कभी प्राप्त नहीं होती। कोर विस्थापन-दोष परमाण्विक तल के आंतरिक दोषों के कारण उत्पन्न होता है। τ के कारण परमाणु A और C के बीच परमाण्विक आबंधों को तब तक तोड़ने वाला प्रेरक बल होता है जब तक विस्थापन-दोष क्रिस्टल से पूर्णतः बाहर नहीं निकल जाता। इसे विस्थापन-दोष विसर्पण कहा जाता है, चित्र 55.9।

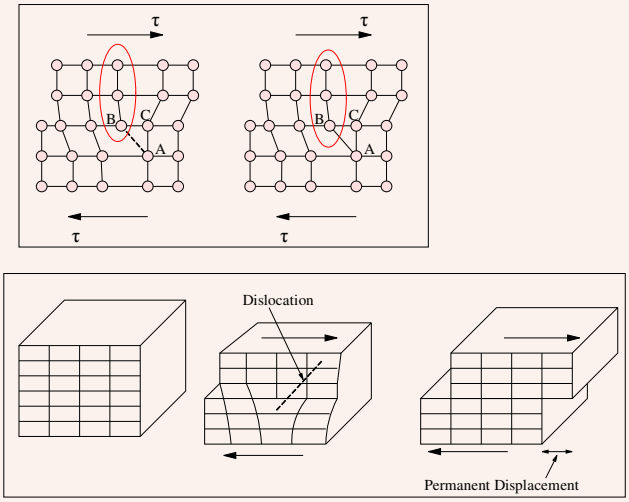
19 जब विस्थापन-दोष क्रिस्टल से बाहर निकलता है, तब स्थायी विस्थापन-अंतर रह जाता है।

20 *पराभव प्रतिबल* तब प्राप्त होता है जब आरोपित अपरूपण प्रतिबल उस अपरूपण प्रतिबल के बराबर हो जाता है जो विस्थापन-दोषों को बाधाओं द्वारा लगाए गए लघु-परास बलों पर विजय पाने के लिए पर्याप्त ऊर्जा प्रदान करता है।

21 *कार्य-कठोरण (Work-Hardening)* की व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है कि सुघट्य विरूपण के साथ विस्थापन-दोषों की संख्या बढ़ती है, इस प्रतिरोध को पार करने के लिए अधिक प्रतिबल आवश्यक होते हैं और विकृति-कठोरण उत्पन्न होता है।

22 *Bauschinger प्रभाव* तब उत्पन्न होता है जब विरूपण अथवा विस्थापन-दोष संचित होकर विस्थापन-दोष पुंज बनाते हैं। चूँकि विकृति-कठोरण बढ़े हुए विस्थापन-दोष घनत्व से संबंधित है, प्रतिबल उत्क्रमण द्वारा विस्थापन-दोषों की संख्या घटाने पर सामर्थ्य घटती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 55.9: विस्थापन-दोष

55.5 सुघट्यता के मूलाधार

55.5.1 परिचय

23 प्रत्यास्थ-सुघट्यता के दो प्रमुख सिद्धांत हैं:

विरूपण सिद्धांत (Deformation Theory) अथवा समग्र सिद्धांत यह मानता है कि सुघट्य विरूपण को उस पथ अथवा क्रम पर अनिवार्य रूप से विचार किए बिना कुल विकृति से अभिलक्षित किया जा सकता है जिससे वह विकृति प्राप्त हुई। $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ सुघट्यता के छेदक-प्रकार सूत्रीकरण की ओर ले जाता है, जो कुल विकृति के प्रत्यास्थ और सुघट्य घटकों में योगात्मक अपघटन पर आधारित है।

दर सिद्धांत (Rate Theory) (Prandtl-Reuss), जिसे वृद्धिशील सिद्धांत अथवा प्रवाह सिद्धांत भी कहा जाता है, सुघट्य विरूपण को दर-निर्भर प्रक्रिया के रूप में वर्णित करता है, जिसमें भार लगाने की दर पदार्थ की सुघट्य अनुक्रिया को प्रभावित करती है। इसे निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

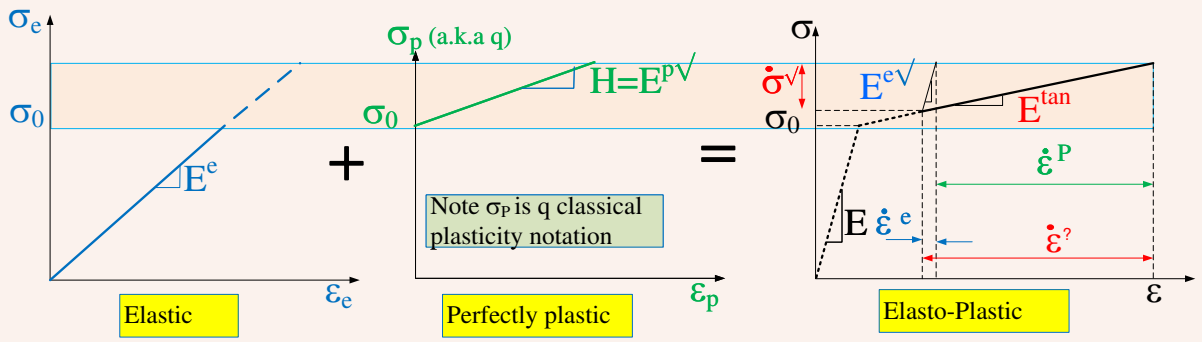
दर सिद्धांत अंतर्निहित रूप से पथ-निर्भर है; अर्थात सुघट्य अनुक्रिया केवल वर्तमान अवस्था पर नहीं, बल्कि भारण के इतिहास और दर पर भी निर्भर होती है। इसलिए यह असमानुपाती भारण और उन स्थितियों के लिए अधिक उपयुक्त है जिनमें भारण की दिशा अथवा तीव्रता समय के साथ बदलती है।

दर सिद्धांत का उपयोग सर्वाधिक व्यापक रूप से होता है।

24 चित्र 55.10 के संदर्भ में कुल विकृति-वृद्धि को प्रत्यास्थ और सुघट्य भागों में अपघटित किया जा सकता है:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप



चित्र 55.10: प्रत्यास्थ-सुघट्य प्रतिबल-विकृति अनुक्रिया

25 तथापि संघटक नियम से केवल प्रत्यास्थ भाग ज्ञात होता है:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \tag{55.2}$$

26 सुघट्य विकृति और तदनुरूप सुघट्य प्रतिबल-वृद्धि निम्न हैं:

$$\dot{\sigma_p} = \dot{q} = H\dot{\varepsilon^p} \tag{55.3}$$

जहाँ H कठोरण मापांक अथवा सुघट्य मापांक है।

55.5.2 सुपरशरेखीय प्रत्यास्थता मापांक

27 चित्र 55.10 के संदर्भ में, कुल वृद्धिशील विकृति $\dot{\varepsilon}$ दिए होने पर अब तदनुरूप वृद्धिशील सुघट्य प्रतिबल $\dot{\sigma}$ इस प्रकार निर्धारित करना है कि

$$\dot{\sigma} = E^{tan}\dot{\varepsilon} \tag{55.4}$$

इसके लिए तथाकथित सुपरशरेखीय प्रत्यास्थता मापांक E^{tan} आवश्यक होगा (इसे H से भ्रमित न करें)।

28 दो उपागम संभव हैं:

1. सामान्यीकृत 3D यांत्रिकी; इसके लिए निम्न आवश्यक होंगे:
   (a) पराभव फलन
   (b) प्रवाह नियम
   (c) संगति प्रतिबंध
2. अभियांत्रिकी 1D

प्रत्येक को पृथक रूप से संबोधित किया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

55.5.2.1 सामान्यीकृत व्युत्पत्ति

55.5.2.1.1 पराभव फलन; समदैशिक कठोरण प्रतिरूप

29 पराभव फलन वर्तमान प्रतिबल स्तर में से प्रारंभिक पराभव प्रतिबल घटाकर प्राप्त होता है; इसमें α का ऐसा फलन जोड़ा जा सकता है जो कठोरण के प्रकार का वर्णन करता है। 1D में इसे निम्न रूप में परिभाषित किया जा सकता है:

$$h(\sigma, q) = |\sigma| - q \leq 0 \tag{55.5}$$

q पराभव पृष्ठ की गति और विरूपण (कठोरण अथवा मृदुकरण) निर्धारित करता है। यदि $h < 0$ हो तो प्रतिबल प्रत्यास्थ प्रक्षेत्र के भीतर है; यदि $h = 0$ हो तो प्रतिबल अपनी सुघट्य सीमा तक पहुँच चुका है।

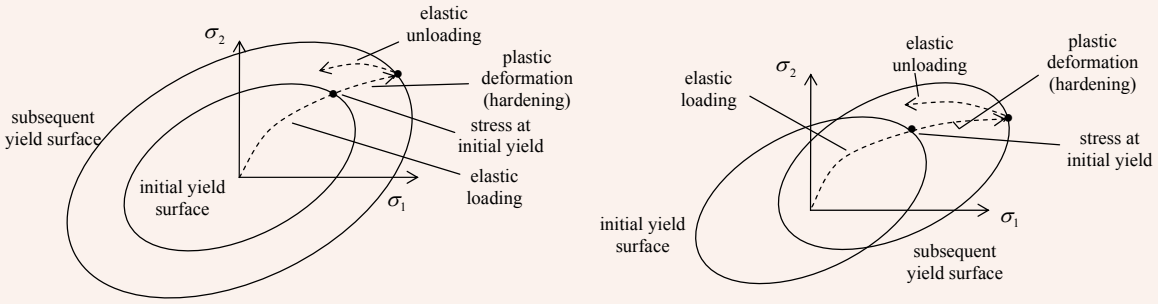
30 पहले विकृति पराभव तक पहुँचती है ($\sigma_0 = \sigma_y$)। उस बिंदु पर विकृति में आगे की वृद्धि से q का विस्तार होता है, जो प्रत्यास्थ प्रक्षेत्र को भी विस्तारित करता है।

55.5.2.1.2 प्रवाह नियम

31 जब प्रतिबल पराभव पृष्ठ के भीतर होता है, तब व्यवहार प्रत्यास्थ होता है, हुक का नियम लागू होता है, विकृतियाँ पुनर्प्राप्य होती हैं और ऊर्जा का अपव्यय नहीं होता । अतः जब संरचना पर आरोपित भार प्रतिबल प्रदिश को पराभव पृष्ठ के बाहर ले जाने का प्रयास करता है, तब प्रतिबल प्रदिश पराभव पृष्ठ पर ही अवरुद्ध रहता है और संरचना सुघट्य रूप से विकृत होती है।

32 यदि पदार्थ प्रत्यास्थ–पूर्णतः सुघट्य अनुक्रिया के स्थान पर कठोरण प्रदर्शित करता है, तो प्रतिबल बिंदु को पराभव पृष्ठ पर बनाए रखते हुए पराभव पृष्ठ विस्तृत होता है अथवा स्थानांतरित होता है।

33 मुख्य प्रश्न यह है कि सुघट्य प्रवाह की दिशा क्या होगी (अर्थात् $\boldsymbol{\varepsilon}^P$ के घटकों के सापेक्ष परिमाण क्या होंगे)। इसका उत्तर प्रवाह नियम अथवा अभिलंबता नियम देता है।



(a) समदैशिक (b) शुद्धगतिक

चित्र 55.11: कठोरण प्रतिरूप

34 प्रवाह नियम यह मानता है कि सुघट्य विकृति-वृद्धि और विचलनात्मक प्रतिबल प्रदिश की मुख्य दिशाएँ समान हैं; यह सुघट्य विकृति के विकास को इस प्रकार परिभाषित करता है:

$$\dot{\varepsilon}^p := \lambda \cdot \frac{\partial g(\sigma, \varepsilon^p, q)}{\partial \sigma} = \lambda \cdot h(\sigma,\ q) \tag{55.6}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $g(\sigma, \varepsilon^p, q)$ सुघट्य विभव है और λ सुघट्य गुणक है, जो सुघट्य विरूपण का परिमाण मापता है (जैसा कि आगे देखा जाएगा, यह पद अंततः विलोपित होकर हमें वांछित E^{tan} प्रदान करेगा)।

35 यदि $g \equiv h$ हो, तो प्रवाह नियम सहचारी होता है (सामान्यतः धातुओं में)। यदि $g \neq h$ हो, तो प्रवाह नियम असहचारी होता है (विस्फारण प्रदर्शित करने वाले कंक्रीट और भू-पदार्थों में)।

36 समदैशिक कठोरण प्रतिरूपों और सहचारी प्रवाह नियम के लिए,

$$g(\sigma, \varepsilon^p, q) = h(\sigma, q) = |\sigma| - q \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$$

जहाँ $\text{sign}(\sigma)$ का मान 1 है यदि $\sigma \geq 0$, अथवा -1 है यदि $\sigma < 0$। तब समीकरण 55.6 से,

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \cdot \text{sign}(\sigma)$$

or

$$\lambda = |\dot{\varepsilon}^p| \geq 0$$

37 सरलता के लिए, द्विरेखीय वक्र वाले प्रत्यास्थ-सुघट्य कठोरण पदार्थ की धारणा के अंतर्गत,

$$h(\sigma,\ q) = -\frac{\partial g}{\partial q} = 1$$

अतः प्रतिबल को (समीकरण 55.2) इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \Rightarrow \dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}) = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \text{sign}(\sigma)) \tag{55.7}$$

और समीकरण 55.3 से

$$\dot{q} = H\dot{\varepsilon^p} \Rightarrow \dot{q} = H \cdot \lambda \cdot h(\sigma,\ q) = H \cdot \lambda \tag{55.8}$$

55.5.2.1.2.1 कून–टकर प्रतिबंध

38 प्रत्यास्थ प्रक्षेत्र में पराभव फलन f ऋणात्मक रहना चाहिए और सुघट्य गुणक शून्य होता है। सुघट्य प्रवाह के दौरान पराभव फलन f शून्य तथा सुघट्य गुणक धनात्मक होना चाहिए।

39 इन प्रतिबंधों को तथाकथित कून–टकर प्रतिबंध द्वारा संक्षेप में व्यक्त किया जा सकता है:

$$\begin{aligned} \text{प्रत्यास्थ भारण और भारमुक्ति}: f < 0,\ \ \dot{\gamma} = 0 \\ \text{सुघट्य भारण}: f = 0,\ \ \dot{\gamma} > 0 \end{aligned} \tag{55.9}$$

अथवा $f \leq 0$ और $\dot{\gamma} \geq 0$ की सामान्य स्थिति के लिए संयुक्त रूप में:

$$f \cdot \dot{\gamma} = 0 \tag{55.10}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

55.5.2.1.3 संगतता प्रतिबंध

40 सुघट्य भारण के दौरान प्रतिबल पथ पराभव पृष्ठ के अनुदिश चलने के लिए प्रतिबंधित होता है। अतः यह संगतता प्रतिबंध पराभव पृष्ठ से आगे जाने को रोकता है और गणितीय रूप से $\dot{f}(\sigma, q) = 0$ द्वारा व्यक्त होता है, अर्थात्

$$\begin{aligned}\dot{f}(\sigma,\ q) &= \frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\dot{q} = 0\end{aligned} \tag{55.11}$$

55.5.2.1.4 सुपरशज्या मापांक

41 अब अंततः समीकरण 55.4 को हल किया जा सकता है:

$$\dot{\sigma} = E^{tan}\,\dot{\varepsilon}$$

जहाँ सुपरशज्या मापांक किसी निरिदष्ट प्रतिबल अथवा विकृति पर प्रतिबल–विकृति वक्र की ढाल है। समानुपाती सीमा से नीचे सुपरशज्या मापांक यंग मापांक के तुल्य होता है; इसे $\dot{\sigma^p} = \dot{q} = H\dot{\varepsilon^p}$ के साथ भ्रमित नहीं करना चाहिए। निम्न प्रतिस्थापन करने पर

प्रवाह-नियम समीकरण 55.7	$\dot{\sigma} = E\cdot(\dot{\varepsilon} - \lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma})$
समीकरण 55.8	$\dot{q} = H\cdot\lambda\cdot h(\sigma,\ q)$
संगतता समीकरण 55.11	$\dot{f}(\sigma,\ q) = \frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\dot{q} = 0$

प्राप्त होता है:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot E\cdot\left(\dot{\varepsilon} - \lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot H\cdot\lambda\cdot h(\sigma,\ q) = 0$$

42 अतः,

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot E\cdot\dot{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot E\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial q}\cdot H\cdot h(\sigma,\ q)}$$

पुनः निम्न में प्रतिस्थापन करने पर

$$\dot{\sigma} = E\cdot(\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma}\cdot\text{sign}(\sigma))$$

प्रतिबल-वृद्धि के लिए निम्न सुपष्ट व्यंजक प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= E\cdot\left(\dot{\varepsilon} - \lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right) \\ &= \underbrace{\left(E - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot E^2\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot E\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial q}\cdot H\cdot h(\sigma,\ q)}\right)}_{\text{(परिभाषानुसार) } E^{tan}}\cdot\dot{\varepsilon}\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[43] एक विमा में द्विरेखीय वक्र वाले प्रत्यास्थ-सुघट्य कठोरण पदार्थ के लिए,

$$\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \dot{\varepsilon}}{E + H}$$

और स्पर्शज्या मापांक निम्न रूप में सरल हो जाता है:

$$\begin{aligned} E^{tan} &= E - \frac{\text{sign}(\sigma) \cdot E^2 \cdot \text{sign}(\sigma)}{\text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \text{sign}(\sigma) - (-1) \cdot H \cdot (1)} \\ &= E - \frac{E^2}{E + H} = \frac{E \cdot H}{E + H} \end{aligned} \tag{55.12}$$

ध्यान दें कि यदि $H = E/9$ हो, तो $E^{tan} = E/10$।

55.5.2.2 स्पर्शज्या मापांक: अभियांत्रिकी व्युत्पत्ति

[44] स्पर्शज्या मापांक की एक सरलतर (और अधिक सहज) व्युत्पत्ति आगे दी गई है।

[45] दर सिद्धांत को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

यदि $\sigma \leq \sigma_y$ (प्रत्यास्थता) हो, तो

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

और यदि $\sigma > \sigma_y$ (सुघट्यता) हो, तो

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{H} = \frac{\dot{\sigma}}{E^{tan}} \end{aligned}$$

जहाँ

$$E^{tan} = \frac{E.H}{E + H}$$

[46] ध्यान दें कि

$$E^{tan} = \begin{cases} > 0, & \text{कठोरण} \\ = 0, & \text{पूर्णतः सुघट्य} \\ < 0, & \text{मृदुकरण} \end{cases}$$

[47] E_t कठोरण के प्रकार (समदैशिक अथवा शुद्धगतिक) से स्वतंत्र है।

[48] टिप्पणी: अरैखिक संरचनात्मक विश्लेषण में इसका समकक्ष वह स्थिति है जहाँ किसी दिए गए काल-चरण पर अवयव के स्पर्शज्या दृढता आव्यूह का निर्धारण किया जाता है। संकल्पनात्मक रूप से यह प्रक्रिया पहले भाग में किए गए वैश्लेषिक कार्य के समान है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[49] अनेक प्रतिरोधकों के समांतर संयोजन में तुल्य प्रतिरोधक के साथ इसकी सादृश्यता पर ध्यान दें।

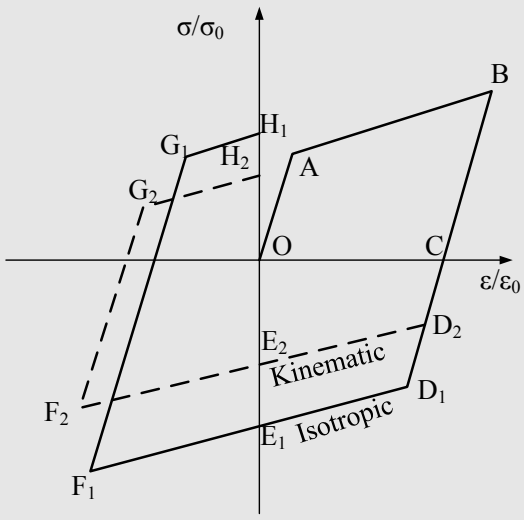
$$R_{eq} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$$

55.5.2.3 उदाहरण 55.1: सुपरशज्या मापांक

सरल तनाव में $\sigma - \varepsilon$ अनुक्रिया को निम्न रैखिक कार्य-कठोरण प्रतिरूप द्वारा सन्निकट किया जाता है:

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon; & 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0; \\ \sigma &= \sigma_0 + m\varepsilon^p; & \varepsilon_0 \le \varepsilon; \qquad \varepsilon_0 = \tfrac{\sigma_0}{E} \end{aligned}$$

जहाँ $m = E/9$। किसी पदार्थ-अवयव पर निम्न एकाक्षीय विकृति इतिहास लागू होता है: $\varepsilon = 0 \to \varepsilon_1$ (B) $\to 0$ (E) $\to -\varepsilon_1$ (F) $\to 0$ (H); प्रारंभिक भारण B पर समाप्त होता है, जहाँ $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\sigma = (1.0+\alpha)\sigma_0$ तथा $0 \le \alpha \le 1$.। उद्देश्य A, B, C, D, E, F और G के परिणामों (प्रतिबल एवं विकृति) को α के पदों में सारणीबद्ध करना तथा $\alpha = 0.4$ के लिए परिणाम आलेखित करना है। वृद्धिशील रूप का उपयोग करते हुए (जिसमें प्रत्यास्थ अथवा सुघट्य अवस्था के अनुसार प्रतिबल-विकृति अनुक्रिया रैखिक होती है), कुल विकृति-वृद्धि ज्ञात करनी है: प्रत्यास्थ अवस्था में $d\varepsilon = d\sigma/E$ अथवा सुघट्य अवस्था में $d\varepsilon/dE^p$।



समदैशिक कठोरण

प्रारंभिक टिप्पणी: सुपरशज्या मापांक और सुघट्य मापांक को परस्पर भ्रमित नहीं करना चाहिए। सुघट्य मापांक के लिए $d\varepsilon_p = d\sigma/E_p$ तथा सुपरशज्या मापांक के लिए $d\varepsilon = d\sigma/E_t$ है, जहाँ $E^t = \frac{E.E_p}{E+E_p}$ और $E_p = m = E/9$। अतः $E_t = E/10$।

A विकृति के शून्य से $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ तक बढ़ने के दौरान यह एक मध्यवर्ती बिंदु है; इसके अनुरूप $\sigma_A = \sigma_0$ और $\varepsilon_A = \varepsilon_0$ हैं।

B प्रतिबल $\sigma_B = (1+\alpha)\sigma_0$ है। संगत विकृति ज्ञात करने के दो उपाय हैं:

1. E_t का उपयोग करके: $\varepsilon_B = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{(1+\alpha)\sigma_0 - \sigma_0}{E/10} = (1+10\alpha)\varepsilon_0$
2. m का उपयोग करके: $\sigma = \sigma_0 + m\varepsilon_p$; $\underbrace{(1+\alpha)\sigma_0}_{\sigma_B} = \sigma_0 + m(\varepsilon_B - \varepsilon_0)$; $\varepsilon_e = \frac{\sigma_0(1+\alpha)}{E}$; $\Rightarrow$ $\varepsilon_B = (1+10\alpha)\varepsilon_0$

C अब $\sigma_C = 0$ है और पदार्थ निम्न संबंध के अनुसार प्रत्यास्थ रूप से भारमुक्त हो रहा है:

$$\varepsilon_C = \varepsilon_B - \sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - \frac{(1+\alpha)\sigma_0}{E} = 9\alpha\varepsilon_0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D $\varepsilon = \varepsilon_1$ से $\varepsilon = 0$ तक की विकृति यात्रा का एक मध्यवर्ती बिंदु है। इस बिंदु पर **समदैशिक कठोरण** है; अतः $\sigma_D = -\sigma_B = -(1+\alpha)\sigma_0$, और संगत विकृति बिंदु B से ज्ञात की जाती है:

$$\varepsilon_D = \varepsilon_B - 2\sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - 2\frac{(1+10\alpha)\sigma_0}{E} = (8\alpha - 1)\varepsilon_0$$

E यहाँ $\varepsilon_E = 0$ है; पदार्थ सुघट्य भारण से गुजर रहा है और

$$\sigma_E = \sigma_D + \Delta\sigma = -(1+\alpha)\sigma_0 - E_t \underbrace{\Delta\varepsilon}_{\varepsilon_D} = \ldots = -(0.9 + 1.8\alpha)\sigma_0$$

F EF के अनुदिश पदार्थ अभी भी सुघट्य भारण अवस्था में है और $\varepsilon_F = -\varepsilon_B = -(1+10\alpha)\varepsilon_0$। संगत σ_F निम्न संबंधों से प्राप्त किया जा सकता है: $\sigma_F = \sigma_D + \Delta\sigma$; $\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_D$। प्रतिस्थापन तथा पश्चगणना से $\Delta\varepsilon = -18\alpha\varepsilon_0$ और $\Delta\sigma = -1.8\alpha E\varepsilon_0$ मिलते हैं; अतः $\sigma_F = -(1+2.8\alpha)\sigma_0$।

G पदार्थ पहले भारमुक्ति अवस्था में और फिर विपरीत प्रत्यास्थ भारण में रहता है; बिंदु G पर सुघट्य भारण आरंभ होगा। समदैशिक कठोरण की धारणा के कारण $\sigma_G = -\sigma_F = (1+2.8\alpha)\sigma_0$; तथा $\varepsilon_G = \varepsilon_F + 2\sigma_F/E$, जो प्रत्यास्थ भारमुक्ति के अनुरूप है।

$$\varepsilon_G = -(1+10\alpha)\varepsilon_0 + 2(1+2.8\alpha) = (1 - 4.4\alpha)\varepsilon_0$$

H अब पदार्थ $\varepsilon_H = 0$ के साथ पुनः सुघट्य रूप से भारित हो रहा है और $\sigma_H = \sigma_G - E_t\varepsilon_G = (1+2.8\alpha)\sigma_0 + E_t(4.4\alpha - 1)\varepsilon_0$ अथवा $\sigma_H = (0.9 + 3.24\alpha)\sigma_0$।

ध्यान दें कि प्रत्येक अवस्था n का निर्धारण केवल अवस्था $n-1$ पर निर्भर करता है।

शुद्धगतिक कठोरण

टिप्पणी: पहले तीन बिंदु समदैशिक कठोरण प्रतिरूप के समान हैं।

A विकृति के शून्य से $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ तक बढने के दौरान यह एक मध्यवर्ती बिंदु है; इसके अनुरूप $\sigma_A = \sigma_0$ और $\varepsilon_A = \varepsilon_0$ हैं।

B प्रतिबल $\sigma_B = (1+\alpha)\sigma_0$ है। संगत विकृति के लिए, $\sigma = \sigma_0 + m\varepsilon_p$; $\underbrace{(1+\alpha)\sigma_0}_{\sigma_B} = \sigma_0 + m(\varepsilon_B - \varepsilon_e)$; $\varepsilon_e = \frac{\sigma_0(1+\alpha)}{E}$; $\Rightarrow \varepsilon_B = (1+10\alpha)\varepsilon_0$

C अब $\sigma_C = 0$ है और पदार्थ निम्न संबंध के अनुसार प्रत्यास्थ रूप से भारमुक्त हो रहा है:

$$\varepsilon_C = \varepsilon_B - \sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - \frac{(1+10\alpha)\sigma_0}{E} = 9\alpha\varepsilon_0$$

D $\varepsilon = \varepsilon_1$ से $\varepsilon = 0$ तक की विकृति यात्रा का एक मध्यवर्ती बिंदु है। इस बिंदु पर **शुद्धगतिक कठोरण** है; अतः $\sigma_D = \sigma_B - 2\sigma_0 = (\alpha - 1)\sigma_0$, और संगत विकृति बिंदु C से ज्ञात की जाती है:

$$\varepsilon_D = \varepsilon_C + \sigma_D/E = 9\alpha\varepsilon_0 + \frac{(\alpha-1)\sigma_0}{E} = (10\alpha - 1)\varepsilon_0$$

E यहाँ $\varepsilon_E = 0$ है; पदार्थ सुघट्य भारण से गुजर रहा है और

$$\sigma_E = \sigma_D + \Delta\sigma = (\alpha-1)\sigma_0 - E_t \underbrace{\Delta\varepsilon}_{\varepsilon_D} = \ldots = -0.9\sigma_0$$

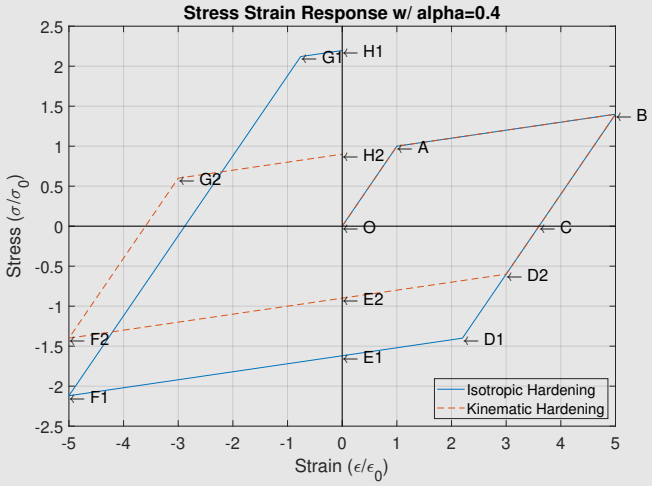
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

F EF के अनुदिश पदार्थ अभी भी सुघट्य भारण अवस्था में है और $\varepsilon_F = -\varepsilon_B = -(1+10\alpha)\varepsilon_0$। संगत σ_F निम्न संबंधों से प्राप्त किया जा सकता है: $\sigma_F = \sigma_D + \Delta\sigma$; $\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_D$। प्रतिस्थापन करने पर $\sigma_F = -(1+\alpha)\sigma_0$ प्राप्त होता है।

G पदार्थ पहले भारमुक्त अवस्था में और फिर विपरीत प्रत्यास्थ भारण में रहता है; बिंदु G पर सुघट्य भारण आरंभ होगा। **शुद्धगतिक कठोरण** की धारणा के कारण $\sigma_G - \sigma_F = -(\sigma_D - \sigma_B)$ अथवा $\sigma_G = -\sigma_0 - \alpha\sigma_0 + \sigma_0 + \alpha\sigma_0 - \alpha\sigma_0 + \sigma_0 = (1-\alpha)\sigma_0$।

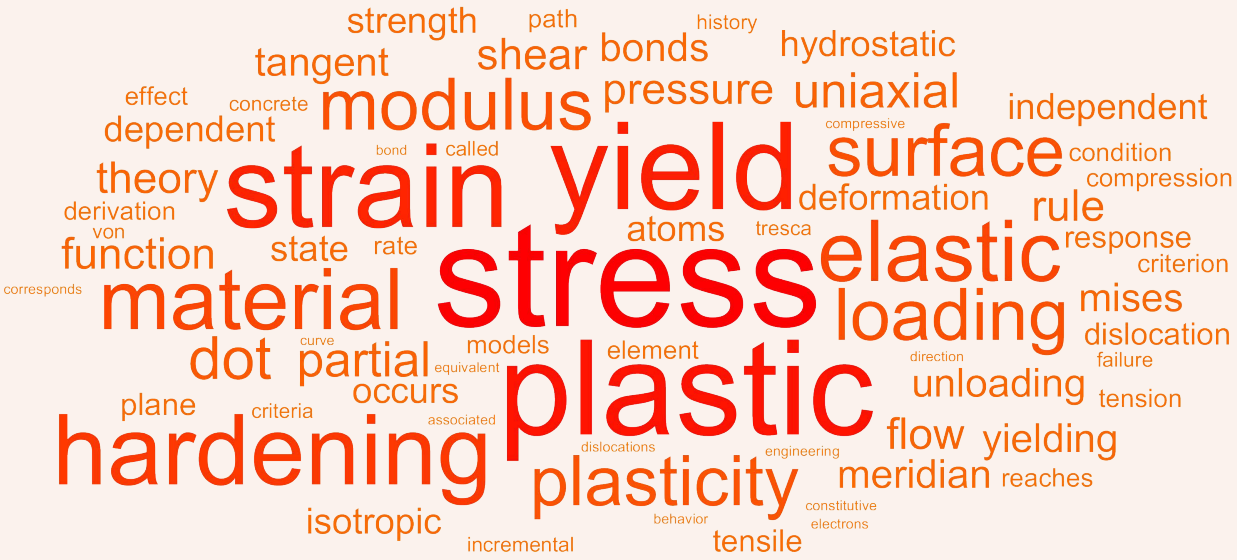
$$\varepsilon_G = \varepsilon_F + \frac{\sigma_G - \sigma_F}{E} = -\varepsilon_0 - 10\alpha\varepsilon_0 + (1-\alpha)\varepsilon_0 + (1+\alpha)\varepsilon_0 = (1-10\alpha)\varepsilon_0$$

H अब पदार्थ $\varepsilon_H = 0$ के साथ पुनः सुघट्य रूप से भारित हो रहा है और $\sigma_H = \sigma_G - E_t\varepsilon_G = (1-\alpha)\sigma_0 - \frac{1}{10}(1-10\alpha)\sigma_0 or \sigma_H = 0.9\sigma_0$।



इस समस्या का MATLAB®-आधारित समाधान परिशिष्ट I.3.1 में दिया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप सामग्री

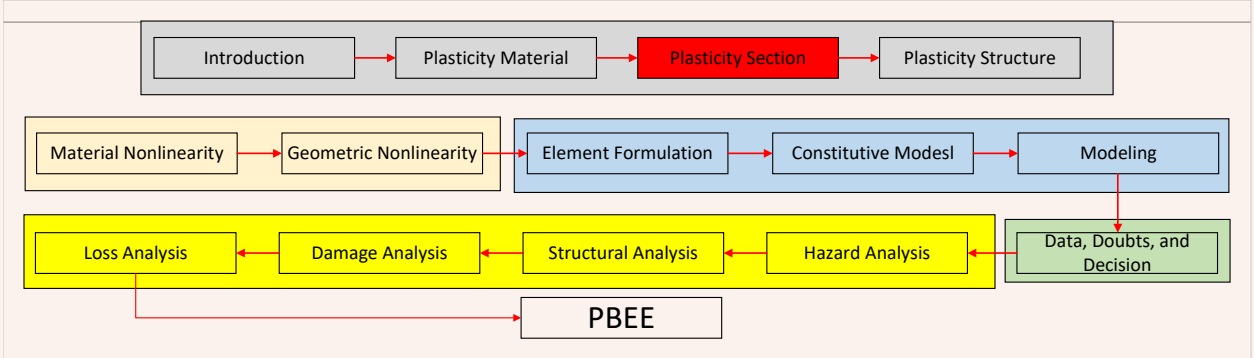
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

56 सुघट्यता II: परिच्छेद

सारांश

बिंदु-सुघट्यता के पश्चात् यह अध्याय परिच्छेदीय सुघट्यता पर केंद्रित है। पहले आघूर्ण–वक्रता संबंध की समीक्षा की जाएगी और फिर उसे इस्पात स्तंभ के अरैखिक पुशओवर विश्लेषण में लागू किया जाएगा। इसके बाद परिच्छेद को परतों में विभाजित किया जाएगा। किसी पूर्वनिर्धारित $M-\phi$ संबंध का आश्रय लेने के स्थान पर, परिच्छेद की परतों पर लागू $\sigma-\varepsilon$ संबंध से इसे व्युत्पन्न किया जाएगा। तत्पश्चात् इसे पूर्व में विश्लेषित उसी पुशओवर समस्या पर लागू किया जाएगा और प्रबलित-कंक्रीट धरनों के लिए विहटनी प्रतिबल-खंड धारणा की यथार्थता सत्यापित की जाएगी। अंततः वैश्लेषिक अथवा संख्यात्मक उपागम का उपयोग करके परतदार उपागम को स्वेच्छ परिच्छेदों के लिए सामान्यीकृत किया जाएगा।

56.1 परिचय 1874
56.2 सैद्धांतिक रूपरेखा: धारणाएँ और प्रमुख परिणाम 1874
56.3 आघूर्ण–वक्रता: $M-\Phi$ 1876
56.3.1 आघूर्ण–वक्रता संबंध से 1878
56.3.2 प्रतिबल–विकृति संबंध से 1880
56.4 आघूर्ण–वक्रता का सामान्यीकरण 1888
56.4.1 वैश्लेषिक उपागम 1888
56.4.2 संख्यात्मक उपागम 1896



56.1 परिचय

[1] पिछले अध्याय का विश्लेषण किसी विशिष्ट गाउस बिंदु पर प्रतिबल–विकृति ($\sigma-\varepsilon$) अनुक्रिया पर केंद्रित था। उस आधारभूत समझ का विस्तार करते हुए वर्तमान अध्याय धरन-स्तंभ अवयव के अनुप्रस्थ परिच्छेद पर आघूर्ण–वक्रता ($M-\Phi$) संबंध का अध्ययन करता है। यह संबंध बंकन के अधीन संरचनात्मक व्यवहार का एक महत्त्वपूर्ण निरूपक है। इसे प्रयोगात्मक प्रेक्षण द्वारा अथवा अनुप्रस्थ परिच्छेद को पृथक तंतुओं में संगणकीय रूप से विभाजित करके निर्धारित किया जा सकता है; प्रत्येक तंतु अपने संबंधित प्रतिबल–विकृति ($\sigma-\varepsilon$) संघटक नियम द्वारा नियंत्रित होता है।

56.2 सैद्धांतिक रूपरेखा: धारणाएँ और प्रमुख परिणाम

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[2] आगे दी गई व्युत्पत्तियों को समुचित रूप से समझने के लिए सैद्धांतिक रूपरेखा के आधारभूत विचारों को पहले स्पष्ट करना आवश्यक है।

धारणाएँ

बल: परिच्छेद पर कार्यरत प्रमुख भारों के रूप में अक्षीय बल N तथा बंकन आघूर्ण M दोनों पर विचार किया जाता है।

समतल परिच्छेद समतल रहते हैं (बर्नूली की परिकल्पना): विरूपण के अधीन समतल परिच्छेदों के समतल बने रहने की धारणा मूलभूत है; इससे परिच्छेद की गहराई में रैखिक विकृति-वितरण सुनिश्चित होता है।

पूर्ण आबंध (प्रबलित कंक्रीट के लिए): प्रबलित-कंक्रीट (R/C) सदस्यों में इस्पात प्रबलन और कंक्रीट के बीच पूर्ण आबंध माना जाता है, जिससे दोनों पदार्थों में विकृति-सुसंगतता बनी रहती है।

नियामक समीकरण

बलों और आघूर्णों का साम्य: अनुप्रस्थ परिच्छेद पर साम्य की शर्तें सुनिश्चित करती हैं कि आंतरिक बल और आघूर्ण बाह्य भारण को संतुलित करें।

विकृति और वक्रता की सुसंगतता: परिच्छेद में विकृति-वितरण को वक्रता से संबद्ध माना जाता है, $\varepsilon = \Phi \cdot y = \frac{M}{E \cdot I} \cdot y$; यह संबंध पदार्थीय और ज्यामितीय गुणों के माध्यम से आरोपित आघूर्ण को परिणामी वक्रता से जोड़ता है।

संघटक नियम

आघूर्ण–वक्रता संबंध ($M - \Phi$): यह संबंध परिच्छेद की आनमनी दृढता और अनुक्रिया का अभिलक्षण करता है तथा बंकन का प्रतिरोध करने की पदार्थ की क्षमता को प्रतिबिंबित करता है।

प्रतिबल–विकृति संबंध ($\sigma - \varepsilon$): प्रत्येक पदार्थ-तंतु को नियंत्रित करने वाला यह नियम निर्धारित करता है कि प्रत्येक खंड प्रतिबल के प्रति कैसी अनुक्रिया करता है; अनेक पदार्थों की परस्पर क्रिया वाले संयुक्त परिच्छेदों के लिए यह आधारभूत है।

वक्रता धरन की प्रति इकाई लंबाई घूर्णन के रूप में परिभाषित (§22.3) किसी अनुप्रस्थ परिच्छेद पर वक्रता Φ को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है:

$$\Phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

जहाँ ρ वक्रता-त्रिज्या, θ कोणीय घूर्णन और y विक्षेप को निरूपित करते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिणाम

आघूर्ण–वक्रता ($M - \Phi$): आनमनी निष्पादन के मूल्यांकन का एक प्रमुख संबंध।

भार–विक्षेप अनुक्रिया (पुशओवर, $P - \Delta$): बढ़ते भार के अधीन संरचना के क्रमिक विक्षेप का मूल्यांकन करती है, जो तन्य व्यवहार का संकेत है।

अंतःक्रिया आरेख ($M - N$): आघूर्ण और अक्षीय बल की अंतःक्रिया का वर्णन करता है तथा संयुक्त भारण के अधीन अभिकल्प के लिए आवश्यक है।

तन्यता अनुपात[1]**:**

$$\xi = \frac{\Phi_u}{\Phi_y}$$

जहाँ Φ_u विफलता पर चरम वक्रता है (कंक्रीट की सीमांत संपीडन विकृति द्वारा परिभाषित), और Φ_y पराभव पर वक्रता है, जो तनन प्रबलन के प्रारंभिक पराभव को चिह्नित करती है।

[3] ध्यान देना चाहिए कि सरलता और दक्षता के लिए इस्पात सदस्यों के $M - \Phi$ विश्लेषण में सामान्यतः अपरतदार उपागम प्रयुक्त होता है, जबकि कंक्रीट के अधिक जटिल अरैखिक व्यवहार को समाविष्ट करने के लिए परतदार उपागम को वरीयता दी जाती है। यह चयन प्रत्येक पदार्थ में निहित भिन्न तन्यता और आबंध अभिलक्षणों को प्रतिबिंबित करता है।

56.3 आघूर्ण–वक्रता: $M - \Phi$

[4] *आघूर्ण–वक्रता* ($M - \Phi$) संबंध संरचनात्मक अभियांत्रिकी का एक मूलभूत उपकरण है, जिसका उपयोग बंकन भारों के अधीन धरनों और स्तंभों के आनमनी व्यवहार को समझने और पूर्वानुमानित करने में किया जाता है।

[5] यह आरोपित बंकन आघूर्ण (M) और परिणामी वक्रता (Φ) के बीच संबंध परिभाषित करता है; वक्रता धरन के अनुदिश प्रति इकाई लंबाई कोणीय घूर्णन के परिवर्तन की दर है। संरचनात्मक अवयवों के विश्लेषण के लिए यह संबंध महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि यह बताता है कि अनुप्रस्थ परिच्छेद किस प्रकार विरूपित होगा और भार वहन करेगा; इससे संरचनाओं की स्थिरता और सुरक्षा सुनिश्चित करने में सहायता मिलती है।

[6] आघूर्ण–वक्रता विश्लेषण अनेक कारणों से आवश्यक है:

- **आनमनी दृढता का पूर्वानुमान:** यह परिच्छेद की दृढता, अर्थात् बंकन के प्रति उसके प्रतिरोध, का आकलन करने में सहायता देता है। दिए गए आघूर्ण के लिए अधिक दृढ परिच्छेद की वक्रता कम होगी।
- **तन्यता की समझ:** विफल हुए बिना विरूपित होने की परिच्छेद की क्षमता, अर्थात् तन्यता, भूकंपीय क्षेत्रों की संरचनाओं के लिए अत्यंत महत्त्वपूर्ण है। आघूर्ण–वक्रता संबंध यह दिखाकर तन्यता का परिमाणीकरण करते हैं कि चरम सामर्थ्य तक पहुँचने से पहले परिच्छेद कितनी वक्रता सह सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **चरम क्षमता का मूल्यांकन:** चरम आघूर्ण क्षमता (जब परिच्छेद बंकन में विफल होता है) एक आवश्यक अभिकल्प प्राचल है, विशेषतः प्रबलित-कंक्रीट अथवा संयुक्त परिच्छेदों के लिए, जिनका व्यवहार प्रायः अरैखिक और जटिल होता है।

धरनों अथवा स्तंभों के अरैखिक व्यवहार का विश्लेषण दो प्रमुख विधियों से किया जा सकता है:

1. सीधे **अरैखिक आघूर्ण–वक्रता संबंध** का उपयोग करके।
2. **अरैखिक प्रतिबल–विकृति संबंध** से आरंभ करके आघूर्ण–वक्रता अनुक्रिया व्युत्पन्न करके।

आघूर्ण–वक्रता की गणना में परिच्छेद के ज्यामितीय तथा पदार्थीय दोनों गुण सम्मिलित होते हैं:

1. **धारणाएँ और ज्यामिति:** सामान्यतः माना जाता है कि बंकन के अधीन *समतल परिच्छेद समतल रहते* हैं (बर्नूली की परिकल्पना), अर्थात् परिच्छेद की गहराई में विकृति-वितरण रैखिक रहता है। यह धारणा परिच्छेद में विकृति और वक्रता के संबंध को सरल बनाती है।
2. **परिच्छेद/पदार्थ संघटक नियम:** दो संभावित अभिलक्षणों में से एक उपलब्ध होता है:

   आघूर्ण–वक्रता $M - \Phi$ के रूप में दी जाती है। यह सरलतम स्थिति है और एक परिच्छेद अभिलक्षण है।

   प्रतिबल–विकृति अधिक सामान्य स्थिति है। यह एक *परत अथवा तंतु* अभिलक्षण है।

   पहली स्थिति में संपूर्ण परिच्छेद एक साथ सुघटित होता है, जबकि दूसरी स्थिति में सुघटन परिच्छेद में क्रमिक रूप से होता है।
3. **परत अथवा तंतु अपघटन:** (केवल तब, जब आघूर्ण–वक्रता संबंध के स्थान पर प्रतिबल–विकृति संबंध दिया गया हो)। अनुप्रस्थ परिच्छेद को छोटे अवयवों अथवा तंतुओं में विभाजित किया जाता है, जिनमें प्रत्येक की अपनी प्रतिबल–विकृति अनुक्रिया होती है। दी गई वक्रता के लिए प्रत्येक तंतु की विकृति उदासीन अक्ष से उसकी दूरी के आधार पर गणित की जाती है और संगत प्रतिबल पदार्थीय नियमों से प्राप्त होते हैं। इसे वैश्लेषिक रूप से (स्पष्ट परत/तंतु की आवश्यकता नहीं, क्योंकि उसे dy प्रतिस्थापित करता है) अथवा संख्यात्मक रूप से किया जा सकता है। मध्यवर्ती परिणाम के रूप में इससे आघूर्ण–वक्रता संबंध प्राप्त होगा।
4. **आंतरिक बलों का समाकलन:** परिणामी बंकन आघूर्ण (M) निर्धारित करने के लिए प्रत्येक खंड/तंतु के आंतरिक बलों (प्रतिबलों) को परिच्छेद में समाकलित किया जाता है। वक्रता के बढ़ते मानों के लिए यह प्रक्रिया दोहराई जाती है, जिससे क्रमिक बंकन के अधीन परिच्छेद का व्यवहार दर्शाने वाला $M - \Phi$ वक्र बनता है।
5. **अरैखिक विश्लेषण:** वक्रता बढ़ने पर $M - \Phi$ संबंध सामान्यतः अरैखिक हो जाता है, विशेषतः प्रबलित-कंक्रीट परिच्छेदों में, जहाँ कंक्रीट में दरारें आरंभ होती हैं और इस्पात पराभवित होता है। परिच्छेद की पूर्ण आनमनी क्षमता और पराभवोत्तर व्यवहार को समझने के लिए यह अरैखिक अनुक्रिया आवश्यक है।

आघूर्ण–वक्रता विश्लेषण का व्यापक उपयोग निम्न क्षेत्रों में होता है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **धरन और स्तंभ अभिकल्प:** बंकन भारों के अधीन परिच्छेद का व्यवहार निर्धारित करना, जिससे आयामों, प्रबलन और पदार्थ-चयन संबंधी निर्णय लिए जाते हैं।
- **भूकंपीय अभिकल्प:** यह सुनिश्चित करना कि संरचनात्मक अवयवों में पर्याप्त तन्यता और ऊर्जा-अपव्यय क्षमता हो।
- **अरैखिक परिमित-अवयव प्रतिरूपण:** विभिन्न भारण स्थितियों के अधीन जटिल संरचनात्मक तंत्रों के विस्तृत अनुकरण के लिए निवेश प्रदान करना।

10 समग्रतः $M - \Phi$ संबंध आनमनी निष्पादन की विस्तृत समझ देता है और वास्तविक भारण स्थितियों में अवयवों के व्यवहार का यथार्थ पूर्वानुमान करके अधिक सुरक्षित तथा प्रत्यास्थक्षम संरचनाओं के अभिकल्प में सहायता करता है।

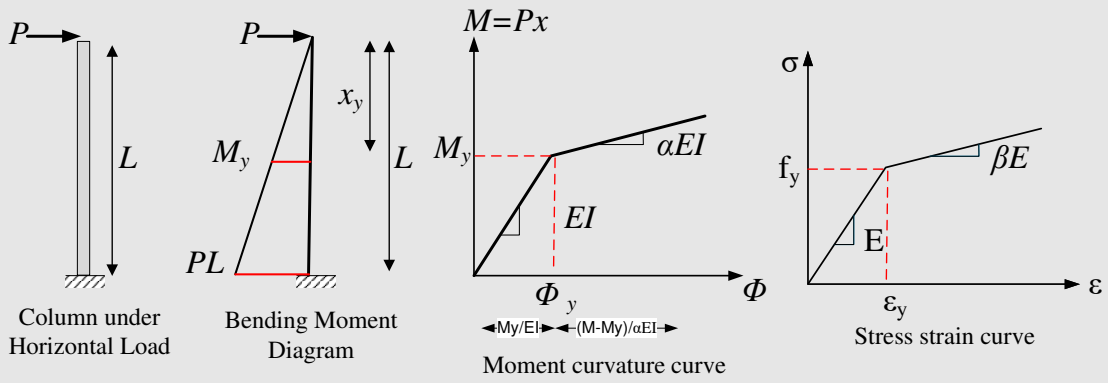
56.3.1 आघूर्ण–वक्रता संबंध से

11 प्रक्रिया पर्याप्त सीधी है और अगले उदाहरण द्वारा स्पष्ट की गई है।

56.3.1.1 उदाहरण 56.1: अरैखिक परिच्छेदीय विश्लेषण: वैश्लेषिक

भाग I: परिच्छेद

निम्न समस्या के लिए आघूर्ण–वक्रता संबंध निर्धारित और आलेखित करना है।



पराभव x_y पर होता है, जहाँ

$$x_y = \frac{M_y}{P} \leq L$$

वक्रताएँ निम्न प्रकार दी जाती हैं:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{P.x}{E.I} & \text{यदि } x < x_y \\ \frac{M_y}{E.I} + \frac{P.x - M_y}{\alpha.E.I} & \text{यदि } x > x_y \end{cases}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विस्थापन पूरक आभासी कार्य (आभासी बल) के सिद्धांत से प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}
\delta\overline{M} &= x \\
\delta\overline{P}\Delta &= \int_0^L \delta\overline{M}.\Phi dx = \int_0^L x\ .\Phi.dx \\
&= \int_0^{x_y} x\frac{P.x}{E.I}dx + \int_{x_y}^L x\left(\frac{M_y}{E.I} + \frac{P.x - M_y}{\alpha.E.I}\right)\cdot dx \\
&= \frac{P.{x_y}^3}{3.E.I} + \frac{3(-1+\alpha)M_y\left(L^2 - {x_y}^2\right) + 2.P\left(L^3 - {x_y}^3\right)}{6E.I.\alpha}
\end{aligned}$$

प्रतिस्थापन $x_y = M_y/P$ रखने पर प्राप्त होता है: बल–विस्थापन अथवा पुशओवर

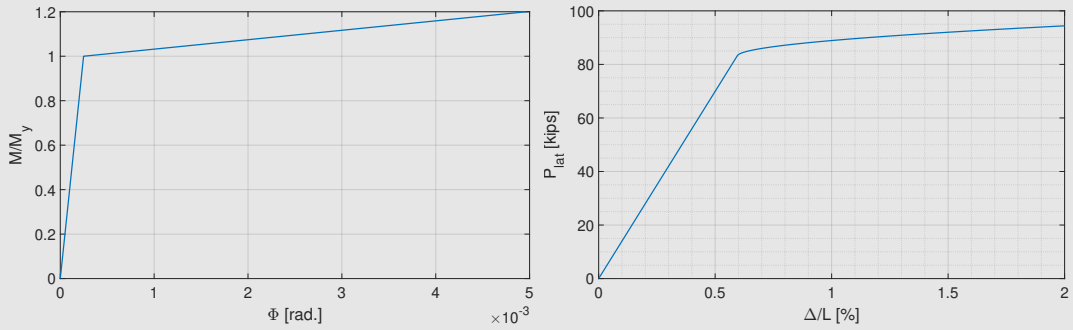
$$\Delta = \frac{2L^3P^3 - (\alpha-1)M_y\left(M_y^2 - 3L^2P^2\right)}{6\alpha EIP^2}$$

जो स्पष्टतः एक अरैखिक संबंध है।

```
clear all;clc;close all
% Initialization for figures
fs = 24;scrsz = get(0,'ScreenSize');figpos = [2 2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2];
% units: kips in; Rectangular section (to make it simpler)
E=29000;fy=36;h=10;h2=h/2;b=10;beta=0.01;I=b*h^3/12;
L=6*12;alpha=0.01;S=I/h2;%7 ft long column; 10x10 inch
EI=E*I; My=S*fy; Phiy=My/EI;A=b*h;
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
% P A R T  I;
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
%=======================
% MOMENT CURVATURE PLOT
%=======================
M(1) = 0; Phi(1) = 0.;M(2) = My; Phi(2) = Phiy;
M(3) = 1.2*M(2); Phi(3) = (M(3)-My)/(alpha*EI);
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(Phi,M/My,'LineWidth',2)
xlabel('\Phi [rad.]'); ylabel('M/M_y');
grid ; set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'NonLayeredMomentCurvature.pdf','BackgroundColor','none')
%=========================
% LOAD DISPLACEMENT PLOT
%=========================
DeltaP=0.5;P(1)=0.0; Delta(1)=0;
for i=2:1000
P(i) = P(i-1)+DeltaP;
xy = My/P(i);
if xy>L
Delta(i) = P(i)*L^3/(3*E*I);
else
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Delta(i) = (2*L^3*P(i)^3 - My*(My^2 - 3*L^2*P(i)^2)*(-1 + alpha))/...
(6.*EI*P(i)^2*alpha);
end
end
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(100*Delta/L,P,'LineWidth',2)
xlabel('\Delta/L [%]'); ylabel('P_l_a_t [kips]');xlim([0,2])
grid;grid minor;
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'NonLayeredLoadDisplacement.pdf','BackgroundColor','none')
Delta0=Delta;P0=P; % Store results for Part II
```



56.3.2 प्रतिबल–विकृति संबंध से

पूर्ववर्ती अनुभाग में संपूर्ण परिच्छेद के संभावित सुघटन पर विचार किया गया था। वस्तुतः यह एक क्रमिक प्रक्रिया है, जो चरम तंतुओं से आरंभ होकर धीरे-धीरे उदासीन अक्ष की ओर बढ़ती है।

अतः अधिक परिष्कृत उपागम अपेक्षित है। इसके लिए अनुप्रस्थ परिच्छेद की ऐसी परतों पर विचार किया जाएगा जो आसन्न परतों से स्वतंत्र रूप से कार्य कर सकती हैं। दूसरे शब्दों में, उदासीन अक्ष तक पहुँचने तक बाहरी परतों के क्रमिक सुघटन का अध्ययन किया जाएगा।

इसलिए प्रत्येक परत को उसके अपने $\sigma - \varepsilon$ संघटक समीकरण द्वारा अभिलक्षित करना और फिर निम्न व्युत्पन्न करना आवश्यक है:

1. अरैखिक आघूर्ण–वक्रता संबंध (पूर्व में माने गए द्विरेखीय संबंध के विपरीत)।
2. संगत बल–विस्थापन संबंध।

अरैखिक प्रतिबल–विकृति संबंध से आरंभ करने पर वक्रता अनुप्रस्थ परिच्छेद में पदार्थ के अरैखिक व्यवहार का समाकलन करके व्युत्पन्न की जाती है।

इस स्थिति में प्रतिबल σ, विकृति ϵ का अरैखिक फलन है:

$$\sigma = g(\epsilon)$$

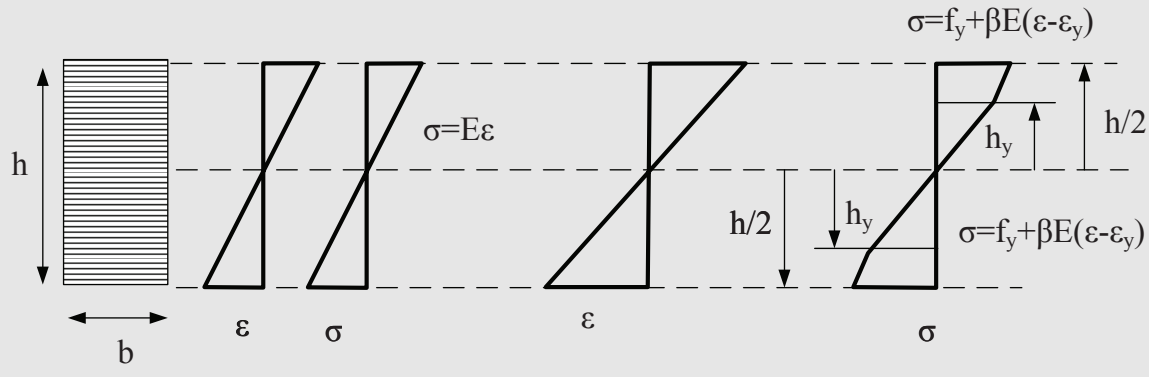
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $g(\epsilon)$ अरैखिक पदार्थीय अनुक्रिया को निरूपित करता है, जैसे धातुओं में कठोरण अथवा कंक्रीट में अरैखिक संपीडन।

17 विश्लेषण:

1. **बंकन में विकृति-वितरण**: जब धरन का परिच्छेद मुडता है, तब विकृति $\epsilon(y)$, उदासीन अक्ष से दूरी y पर, वक्रता के समानुपाती होती है:
$$\epsilon(y) = -\kappa y$$
2. **अरैखिक विकृति से अरैखिक प्रतिबल**: अरैखिक प्रतिबल–विकृति संबंध $\sigma = g(\epsilon)$ लागू करने पर किसी तंतु y पर प्रतिबल है:
$$\sigma(y) = g(-\kappa y)$$
3. **बंकन आघूर्ण के लिए समाकलन**: अनुप्रस्थ परिच्छेदीय क्षेत्रफल A पर प्रतिबल-वितरण का समाकलन करके बंकन आघूर्ण M प्राप्त होता है:
$$M = \int_A \sigma(y) \cdot y \, dA = \int_A g(-\kappa y) \cdot y \, dA$$
$g(\epsilon)$ की अरैखिकता के कारण इस समाकल का सामान्यतः संख्यात्मक हल किया जाता है।
4. **खंडशः अथवा वृद्धिशील विश्लेषण**: निम्न जैसे खंडशः प्रतिबल–विकृति संबंध के लिए:
$$g(\epsilon) = \begin{cases} E\epsilon, & \epsilon \le \epsilon_y \\ E'(\epsilon - \epsilon_y) + \sigma_y, & \epsilon > \epsilon_y \end{cases}$$
जहाँ $E' < E$ पराभवोत्तर दृढता को निरूपित करता है, आघूर्ण–वक्रता संबंध भी खंडशः हो जाता है और समाकलन अलग-अलग खंडों में किया जाता है।

56.3.2.1 उदाहरण 56.2: परतदार: इस्पात



पूर्ववर्ती उदाहरण के समान आयताकार परिच्छेद पर विचार किया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भाग I: आघूर्ण–वक्रता समीकरण की व्युत्पत्ति

- पराभव सर्वप्रथम बाहरी तंतुओं में x_y पर होता है, जहाँ ($\Phi = \varepsilon/y$, समीकरण 22.15, स्मरण रखते हुए):

$$P.x_y = E.I.\Phi_y = E.I\frac{\varepsilon_y}{h/2} \Rightarrow x_y = \frac{2.f_y.I}{P.h} \leq L$$

- वह अधिकतम वक्रता, जिसके नीचे सभी प्रतिबल प्रत्यास्थ हैं, निम्न है:

$$\Phi_y = \frac{2.f_y}{E.h}$$

- यदि $h \leq h_y$ हो, तो प्रतिबल-वितरण रैखिक प्रत्यास्थ है और

$$\Phi = \frac{M}{E.I} = \frac{P.x}{E.I}$$

- यदि $h > h_y$ हो, तो उदासीन अक्ष से दूरी h_y पर कठोरण आरंभ होता है और

$$h_y = \frac{f_y}{E.\Phi} \leq \frac{h}{2}$$

- प्रतिबल निम्न प्रकार दिए जाते हैं:

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} E.\varepsilon & \text{यदि} \quad h < h_y \\ f_y + \beta E.(\varepsilon - \varepsilon_y) & \text{यदि} \quad h_y < h \end{cases}$$

- $\varepsilon = \Phi y$ को स्मरण रखते हुए आंतरिक प्रतिरोधी आघूर्ण निम्न होगा:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-h/2}^{h/2} b.\sigma_{xx}.y.dy \\ &= 2.b.\int_0^{h_y} E.(\Phi.y).y dy + 2b\int_{h_y}^{h/2} [f_y + \beta.E.(\Phi y - \varepsilon_y)].y.dy \\ &= 2E.b.\Phi\int_0^{h_y} y^2.dy + 2b\int_{h_y}^{h} \left[f_y.y + \beta.E.\Phi.y^2 - \beta f_y.y\right] dy \\ &= \frac{-\left(b\left(3.f_y\left(h^2 - 4.{h_y}^2\right)(-1+\beta) + E\Phi\left(8{h_y}^3(-1+\beta) - h^3\beta\right)\right)\right)}{12} \end{aligned}$$

  h_y का मान (Mathematica का उपयोग करके) प्रतिस्थापित करने पर यह निम्न आघूर्ण–वक्रता संबंध में सरल हो जाता है:

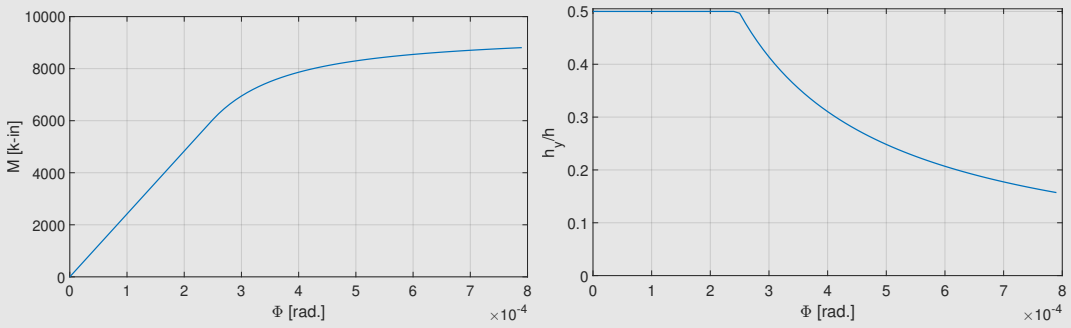
$$M = \frac{b\left(4{f_y}^3(-1+\beta) - 3E^2 f_y h^2 \Phi^2(-1+\beta) + E^3 h^3 \Phi^3 \beta\right)}{12E^2\Phi^2}$$

  जो मूलतः वक्रता $\Phi > \Phi_y$ के पदों में आघूर्ण का व्यंजक है।
- इस संबंध का उपयोग करके पूर्ववर्ती उदाहरण की प्रक्रिया दोहराई जा सकती है और विस्थापन निर्धारित करने के लिए आभासी बल का सिद्धांत लागू किया जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- संख्यात्मक समाधान:

```
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
% Note this is appended to the previoous Metlab code
% P A R T   II   L A Y E R E D   S E C T I O N
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
% Plot M-phi and h-phi for the section based on layers
% this is a section property, nothing to do with the actual column
%=================================================================
clear P Delta phi M
epsiy=E/fy; phi_y=fy/(E*h2);delta=10^-5;phi(1)=0.;
M(1)=0.;hy(1)=h2;k=0;
for i=2:80
phi(i)=phi(i-1)+delta; hy(i)=fy/(E*phi(i));
if hy(i)>h2
M(i)=phi(i)*E*I; hy(i)=h2;
else
M(i)=(b*(4*fy^3*(-1 + beta) - 3*E^2*fy*h^2*phi(i)^2*(-1 + beta)...
+ E^3*h^3*phi(i)^3*beta))/(12.*E^2*phi(i)^2);
k=k+1;
nlphi(k)=phi(i); nlM(k)=M(i);
end
fprintf("i %6.0f hy %10.4e phi %10.4e phi_y %10.4e\n",i,hy(i),phi(i),phi_y);
end
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(phi,M,'linewidth',2);
xlabel("\Phi [rad.]");ylabel("M [k-in]");grid;
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'M-phi.pdf','BackgroundColor','none')
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(phi,hy/h,'linewidth',2);
xlabel("\Phi [rad.]");ylabel('h_y/h');grid;
ylim([0.,0.505]);set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'h-phi.pdf','BackgroundColor','none')
```

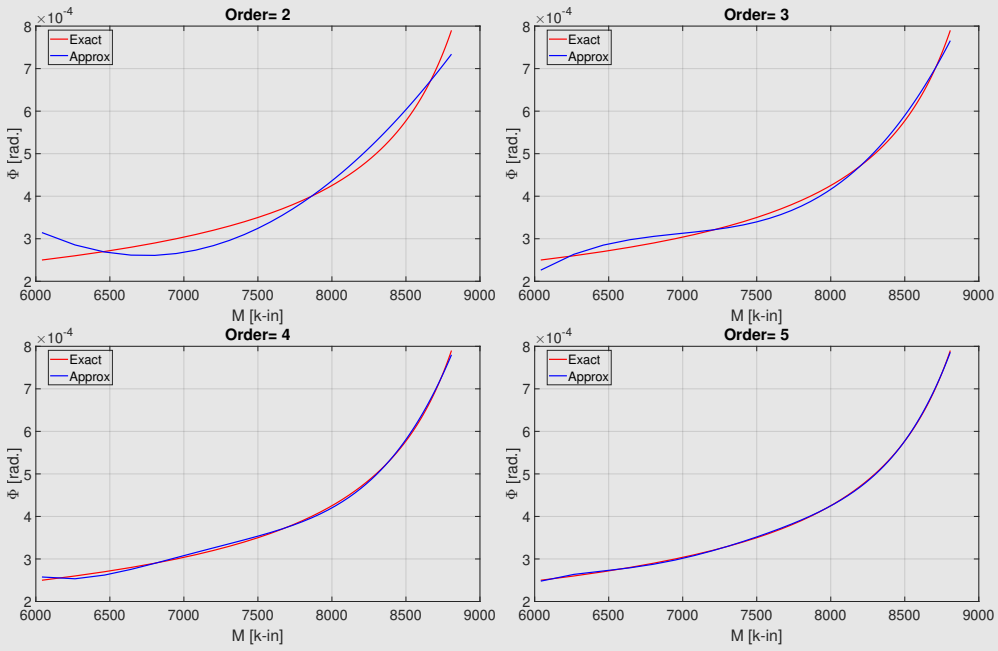



```
%=======================================================
% Fit polynomial in nonlinear portion of the curve
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% ================================================
for i=2:5
clear p
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
[p]=polyfit(nlM,nlphi,i); f=polyval(p,nlM);
fn=['Poly-fit-' num2str(i) '.pdf'];
plot(nlM,nlphi,'r',nlM,f,'b','linewidth',2);
asc=num2str(i);
lgnd=legend('Exact','Approx','Location','Best');
ylabel('\Phi [rad.]');
xlabel('M [k-in]');grid;title(['Order= ', asc])
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
fn=['Poly-fit-' num2str(i) '.pdf'];
exportgraphics(gca,fn,'BackgroundColor','none')
end
```

- चूँकि वक्रता–आघूर्ण संबंध ($\Phi = \Phi(M)$) आवश्यक होगा, अतः आघूर्ण–वक्रता संबंध के अरैखिक भाग पर एक बहुपद समायोजित किया जाता है।



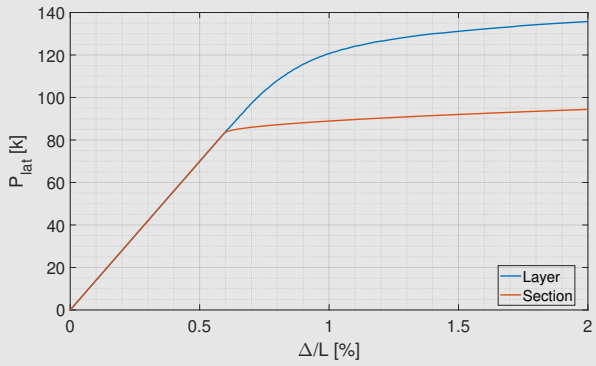
- कोटि 5 का बहुपद चुनने पर गुणांक निम्न हैं:

$$\Phi = 2.12\times10^{-20}M^5 - 7.58\times10^{-16}M^4 + 1.08\times10^{-11}M^3 - 7.71\times10^{-8}M^2 + 2.74\times10^{-4}M^2 - 3.88\times10^{-1}M$$

```
%=====================================================================
% Compute the deflection as in Part I but with the new M-phi relations
%=====================================================================
P_y=2*fy*I/(h*L);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

```
P_max=2*P_y;
np=400;
delta_P=P_max/np;
EI=E*I;delta_L=0.001*L;
%
P(1)=0.;delta(1)=0;
for i=2:np
P(i)=P(i-1)+delta_P; x_y(i)=2*fy*I/(h*P(i));
if x_y(i)>L
delta_1=P(i)*L^3/(3*EI);
% Entire Beam is in the linear range
delta_2=0.;
else
delta_1=P(i)*x_y(i)^3/(3*EI);
delta_2=0.;
for x=x_y(i):delta_L:L
M=P(i)*x; phi=polyval(p,M); delta_2=delta_2+phi*x*delta_L;
end
end
delta(i)=delta_1+delta_2;
end
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(100*delta/L,P,100*Delta0/L,P0,'linewidth',2);grid;
xlabel("\Delta/L [%]");ylabel("P_l_a_t [k]");grid minor;
xlim([0,2]);lgd=legend('Layer','Section','location','best')
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');set(lgd,'color','none');
exportgraphics(gca,'Pushover-Final.pdf','BackgroundColor','none')
```



परतदार परिमित अवयव का कार्यान्वयन आगे §61.4 में दिया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

56.3.2.2 उदाहरण 56.3: परतदार: कंक्रीट/ACI

चरम आनमनी क्षमता के ACI समीकरण (विहटनी प्रतिबल-खंड, चित्र 36.7) की पर्याप्तता का मूल्यांकन कंक्रीट के निम्न प्रतिबल-विकृति वक्र (Desayi, 1964) पर विचार करके करना है (अन्य समीकरण (Saenz, 1964), (Kent and Park, 1971) तथा (Mander, Priestley, and Park, 1988) द्वारा प्रस्तावित किए गए हैं)।

$$\sigma = \frac{2\frac{f_c'}{\varepsilon_{max}}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2}$$

जहाँ f_c', ε_{max} के अनुरूप है। $b = 10"$, $d = 23"$, $f_c' = 4,000$ psi, $f_y = 60$ ksi और $\varepsilon_{max} = 0.003$ वाले R/C धरन के लिए यथार्थ संतुलित इस्पात अनुपात निर्धारित किया जाएगा।

चरम आघूर्ण M_u

प्रतिबल-विकृति

$$\sigma = \frac{2\frac{4,000}{.003}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{.003}\right)^2} = \frac{2.667\times10^6\varepsilon}{1+1.11\times10^5\varepsilon^2}$$

सुसंगतता विफलता पर संदलन मानते हुए विकृति-वितरण निम्न होगा:

$$\varepsilon = \frac{0.003}{c}y$$

इन दोनों समीकरणों को संयोजित करने पर:

$$\sigma = \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}$$

कुल संपीडन बल निम्न है:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^c dF = b\int_0^c \sigma dy = b\int_0^c \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy = b\frac{8,000}{c}\int_0^c \frac{y}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy \\ &= 8,000\frac{b}{c}\frac{1}{2\left(\frac{1}{c}\right)^2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c = 8,000\frac{b}{c}\frac{c^2}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c \\ &= 4,000bc\ln(2) = 2,773bc \end{aligned}$$

साम्य के लिए $C = T$ आवश्यक है:

$$2,773bc = A_s f_y$$

विकृति आरेख से:

$$\frac{.003}{c} = \frac{\varepsilon_y + .003}{d} \Rightarrow c = \frac{(.003)d}{\varepsilon_y + .003} \tag{56.1}$$

$$c = \frac{(.003)(23)}{\frac{60}{29,000} + .003} = 13.6\text{in.} \tag{56.2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समीकरण 56.3.2.2 और समीकरण 56.2 को संयोजित करने पर

$$A_s=\frac{(2,773)(10)(13.6)}{60,000}=6.28\text{in.}^2$$

आघूर्ण निर्धारित करने के लिए पहले उदासीन अक्ष से मापे गए संपीडन बल का केंद्रक निर्धारित करना होगा:

$$\begin{aligned}\overline{y}\overset{\text{def}}{=}\frac{\int ydA}{A}&=\frac{b\int y\overbrace{\sigma dy}^{dC}}{C}=\frac{b\int_0^c\frac{8,000\frac{y^2}{c}}{1+(y/c)^2}}{2,773bc}dy=\frac{8,000b}{2,773bc^2}\int_0^c\frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2y^2}dy\\&=\frac{2.885}{c^2}\int_0^c\frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2y^2}dy=\frac{2.885}{(13.61)^2}\left[\frac{y}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}\int_0^c\frac{dy}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2y^2}\right]\\&=.01557\left[yc^2-c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}}\tan^{-1}y\sqrt{\frac{1}{c^2}}\right]\right]\Bigg|_0^c\\&=.01557\left[c^3-c^3\tan^{-1}(1)\right]=(.01557)(13.61)^3(1-\tan^{-1}(1))=8.43\text{in.}\end{aligned}$$

इसके बाद आघूर्ण ज्ञात किया जाता है:

$$M=A_sf_y(d-c+\overline{y})=(6.28)(60)(23-13.61-8.43)=6,713\text{ k.in}$$

ACI संहिता का उपयोग

§36.4.1 के संदर्भ में

$$\begin{aligned}\rho_b&=.85\beta_1\frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+60}=(.85)^2\frac{4}{60}\frac{87}{147}=.0285\\A_s&=\rho_bbd=(.0285)(10)(23)=6.55\text{in.}^2\\a&=\frac{A_sf_y}{.85f'cb}=\frac{(6.55)(60)}{(.85)(4)(10)}=11.57\text{in.}\\M&=A_sf_y\left(d-\frac{a}{2}\right)=(6.55)(60)\left(23-\frac{11.57}{2}\right)=6,765\text{k.in}\\c&=\frac{a}{\beta_1}=\frac{11.57}{.85}=13.61\text{in.}\end{aligned}$$

सारांश

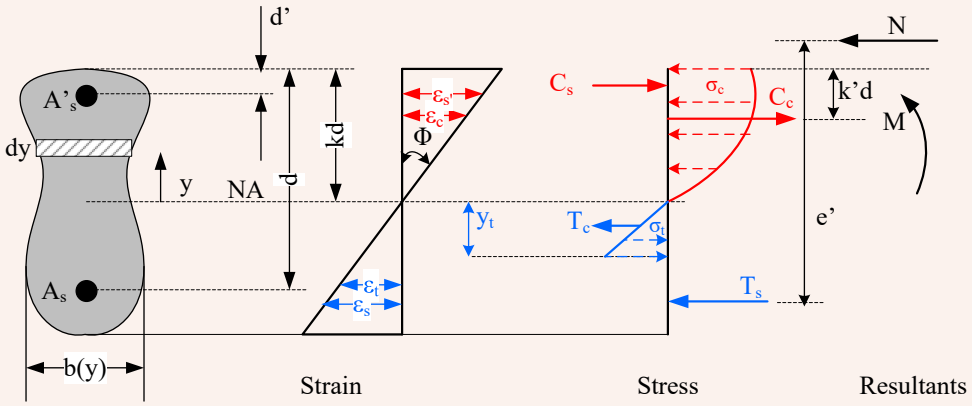
		यथार्थ	ACI
A_s	in^2	6.28	6.55
c	Kip	13.6	13.6
$\overline{y}'$	in.	5.18	5.78
M	K-in	6,713	6,765

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

56.4 आघूर्ण–वक्रता का सामान्यीकरण

19 इस अनुभाग में स्वेच्छ अनुप्रस्थ परिच्छेद पर विचार करके $M-\Phi$ संबंध निर्धारित करने की प्रक्रिया को सामान्यीकृत किया जाएगा, चित्र 56.1।

nxt पहले वैश्लेषिक और फिर संख्यात्मक उपागम पर विचार किया जाएगा।



चित्र 56.1: $M-\Phi$ के निर्धारण के लिए विचारित स्वेच्छ अनुप्रस्थ परिच्छेद

20 बाह्य अक्षीय बल N_{ext}, जिसे उत्केंद्रता e' के साथ आरोपित किया गया है, नियत माना जाता है।

21 बलों के आंतरिक साम्य के लिए आवश्यक है:

$$N_{ext} = N_{int}; \quad M_{int} = N_{int}.e';$$

और उद्देश्य $M-\Phi$ संबंध निर्धारित करना है।

$$N_{int} = \underbrace{\int_0^{k.d} \sigma_c b_c dy}_{C_c} + \underbrace{A'_s f'_s}_{C_s} - \underbrace{\int_0^{y_t} \sigma_t b_t dy}_{T_c} - \underbrace{A_s f_s}_{Ts} \tag{56.3}$$

$$N_{int}e' + M = C_c(d-k'd) + C_s(d-d') - T_c(d-kd-\frac{2}{3}y_t) \tag{56.4}$$

जहाँ: $\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_c)$, $b_c = b_c(y_c)$, $\sigma_t = \sigma_t(\varepsilon_t)$, $b_t = b_t(y_t)$।

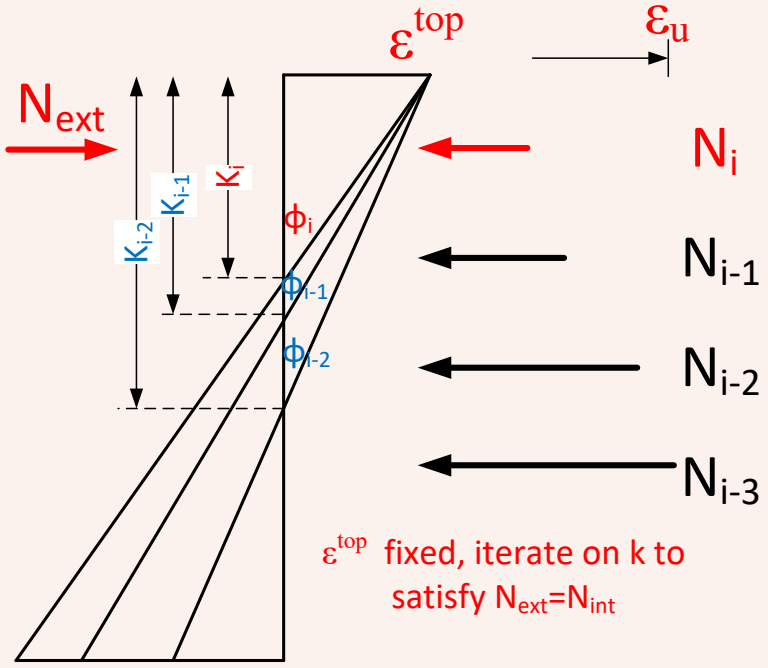
56.4.1 वैश्लेषिक उपागम

22 दिए गए (और नियत) N_{ext} के लिए ε_c^{top} को क्रमशः बढाया जाएगा (अर्थात् Φ को अप्रत्यक्ष रूप से), और k तथा संगत M_{int} ज्ञात किए जाएँगे, चित्र 56.2।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[23] समस्या अरैखिक है, क्योंकि अक्षीय बलों का साम्य सुनिश्चित करने वाला k का केवल एक मान है।

[24] सावधानी: यदि $N_{ext} \neq 0$ हो, तो नियत बल के कारण प्रारंभिक विकृति जोड़नी होगी।



चित्र 56.2: $M - \Phi$ को वैश्लेषिक रूप से निर्धारित करने की वृद्धिशील प्रक्रिया

1. ऊपरी विकृति बढ़ाएँ:

$$\varepsilon_{n+1}^{top} = \varepsilon_n^{top} + \Delta\varepsilon^{top} < \varepsilon_u$$

2. k मानकर बल निर्धारित करें:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\varepsilon_c^{top}}{k.d} = \frac{\varepsilon_s'}{k.d - d'} = \frac{\varepsilon_s}{d - kd} \\ \varepsilon_s &= \Phi(d - k.d) \\ f_s &= E_s\varepsilon_s\end{aligned}$$

3. समीकरण 56.3 से N_{int} की गणना करें। यदि

$$|N_{ext} - N_{int}| > \varepsilon$$

तो k संशोधित करके पुनरावृत्ति करें; अन्यथा प्रक्रिया से बाहर आएँ।

4. समीकरण 56.4 से संगत M ज्ञात करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5. संगत वक्रता निम्न से निर्धारित करें:

$$\Phi_{i+1} = -\frac{\varepsilon_{i+1}^{top}}{k_{i+1} d}$$

और दृढता:

$$EI_{i+1} = \frac{dM}{d\Phi}$$

[25] पूर्ण होने पर $M - \Phi$ आलेखित करें और Φ_{cr}, Φ_y तथा Φ_u पहचानें।

[26] तन्यता अनुपात निर्धारित करें:

$$\xi = \frac{\Phi_u}{\Phi_y}$$

[27] ध्यान दें कि विभिन्न N के लिए विश्लेषण दोहराने पर धरन-स्तंभ *अंतःक्रिया आरेख* (M_u के अनुरूप) बनाया जा सकता है।

56.4.1.1 उदाहरण 56.4: I-आकार R/C परिच्छेद की आघूर्ण–वक्रता

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रबलित-कंक्रीट अनुप्रस्थ परिच्छेद की आघूर्ण–वक्रता अनुक्रिया की गणना और आलेखन तथा वक्रता-तन्यता की गणना के लिए Matlab में एक प्रोग्राम विकसित करना है।

माना जाएगा कि जब तनन विकृति दरार-विकृति ε_{cr} से अधिक हो, तब कंक्रीट कोई तनन प्रतिबल वहन नहीं करता। आलेख में केवल धनात्मक बंकन (निचले फलक पर तनन) की अनुक्रिया सम्मिलित होगी।

अक्षीय भार को इस अनुप्रस्थ परिच्छेद की अक्षीय संपीडन क्षमता का लगभग 10% माना जाएगा (अर्थात् $N \simeq 0.1 A_g f'_c$)।

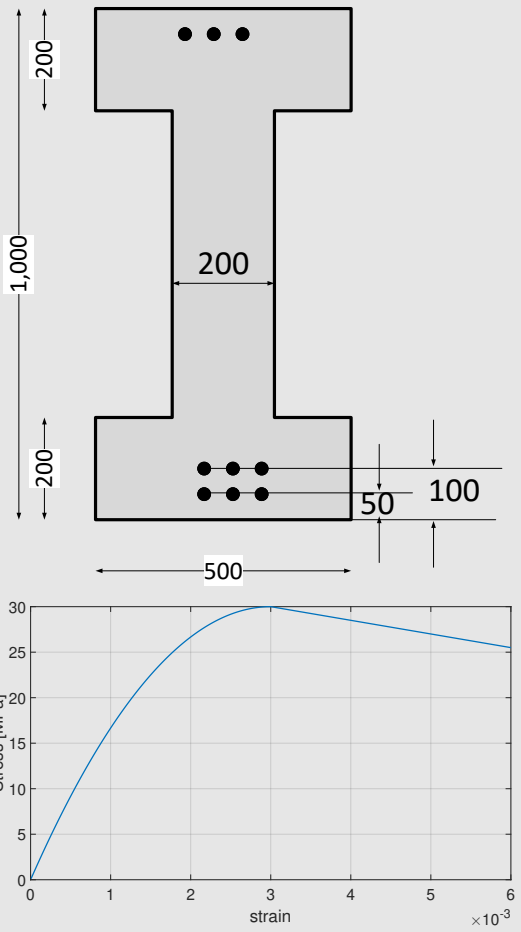
निम्न संघटक संबंध प्रयुक्त होंगे: संपीडन में कंक्रीट (सरल परवलयिक), f'_c = 30 MPa, जिसके लिए

$$f_c = \begin{cases} f'_c \left[\dfrac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] & \text{के लिए} \varepsilon_c < \varepsilon_0 \\ f'_c \left[1 - 0.15 \left(\dfrac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right] & \text{के लिए} \varepsilon_c > \varepsilon_0 \end{cases}$$

जहाँ ε_0=0.003 तथा $\varepsilon_u = 2\varepsilon_0$।

तनन में कंक्रीट: $f_{cr} = 0.6\sqrt{f'_c}$ (MPa), $E_c = 5,500\sqrt{f'_c}$ (MPa) तथा $f_c = E_c \varepsilon_c \le f_{cr}$।

प्रबलन रैखिक प्रत्यास्थ/पूर्णतः सुघट्य है, जिसमें $E_s = 200,000$ MPa तथा $f_y = 400$ MPa। प्रत्येक छड US#8 (मेट्रिक #25) है और उसका A_s=510 mm^2 है।




```
%%  Jordan Brennise & Dean Van
clear;clc,close
scrsz = get(0,'ScreenSize');figpos = [2 2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2];
h=1000;bw=200;bf=500;hf=200;
%
y_As=75; % distance from origin to bottom steel
As=6*510; % tension steel
y_Aps=950; % distance from origin to top steel
Aps=3*510; % compression steel
%
Es=200000; % MPa
fy=400;
%
fp_c=30; % MPa
Ec=5500*sqrt(fp_c); % MPa
epsip_c=0.003;
epsi_u=2*epsip_c;
f_cr=0.6*sqrt(fp_c); % MPa
%============================================================
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    Ac=bf*bw*2+bw*(h-2*hf); % mm^2
    Nappl=0.1*fp_c*Ac; % Applied normal force
    nl=100; % number of layers in tension or compression
    epsilon=0.000001;
    Bmin=1.0-epsilon;Bmax=1.0+epsilon;Nmax=Bmax*Nappl;Nmin=Bmin*Nappl;
    % We bound phi, the angle between the vertical and the strain on a linear
    stress-strain relationship. This is done by limiting the failure strain epsip_c
    =0.003. Use plane sections and an estimate of c to find the failure phi
    associated with this failure strain.
    c=0.1*h; % Estimate of c
    phi_fail=epsip_c/c;
    delta_phi=phi_fail/100; % estimate of upper limit of phi
    % Start the loop to determine the curvature, phi, and N. Initialize phi. Assign
     an initial internal moment and force of zero (KN-m and KN, respectively).
    Limit neutral axis location  yn(iphi) to bounds within the column depth, h.
    Begin the internal forces loop by specifying that the neutral axis only be
    varied while internal force N is outside established Nmin and Nmax bounds.
    iphi=1;
    phiM(1)=0;M(1)=0; % initialization of data to be plotted
    EndRun=0; % flag to interupt iterations later
    for phi=delta_phi:delta_phi:phi_fail % loop on phi
    % initialization
    iphi=iphi+1; % counter
    phiM(iphi)=phi; % store for plotting
    ymin=0; % initial values
    ymax=h;
    yn(iphi)=(ymin+ymax)/2; %start with neutral axis in the middle
    %Iterate until convergence
    iter=0; %counter
    N=0;
    while N < Nmin ||  N > Nmax %loop while B outside acceptable range
    iter=iter+1;
    % Use a while loop. If the previous internal force is outside of the set force
    bounds, recalculate the internal stresses with the next phi until the internal
    force converge with the limits. These internal force calculations begin with
    the steel, both in tension and compression (and the top and bottom of the
    section, respectively). These internal stresses are calculated for a single
    layer of steel in both compression and tension. It is important to note to
    ensure that the steel stress is bounded by the yield stress of steel when in
    tension.
    %Steel forces
    fs= phiM(iphi)*(yn(iphi)-y_As)*Es; %stress in tension steel
    if fs > fy
    fs=fy; %check if steel is yielding
    end
    F_TR=As*fs; %tensile force in bottom steel
    MF_TR=F_TR*y_As; %Moment caused by tension reinforcement
    fps=phiM(iphi)*(y_Aps-yn(iphi))*Es; %stress in compression steel
    if fps > fy
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

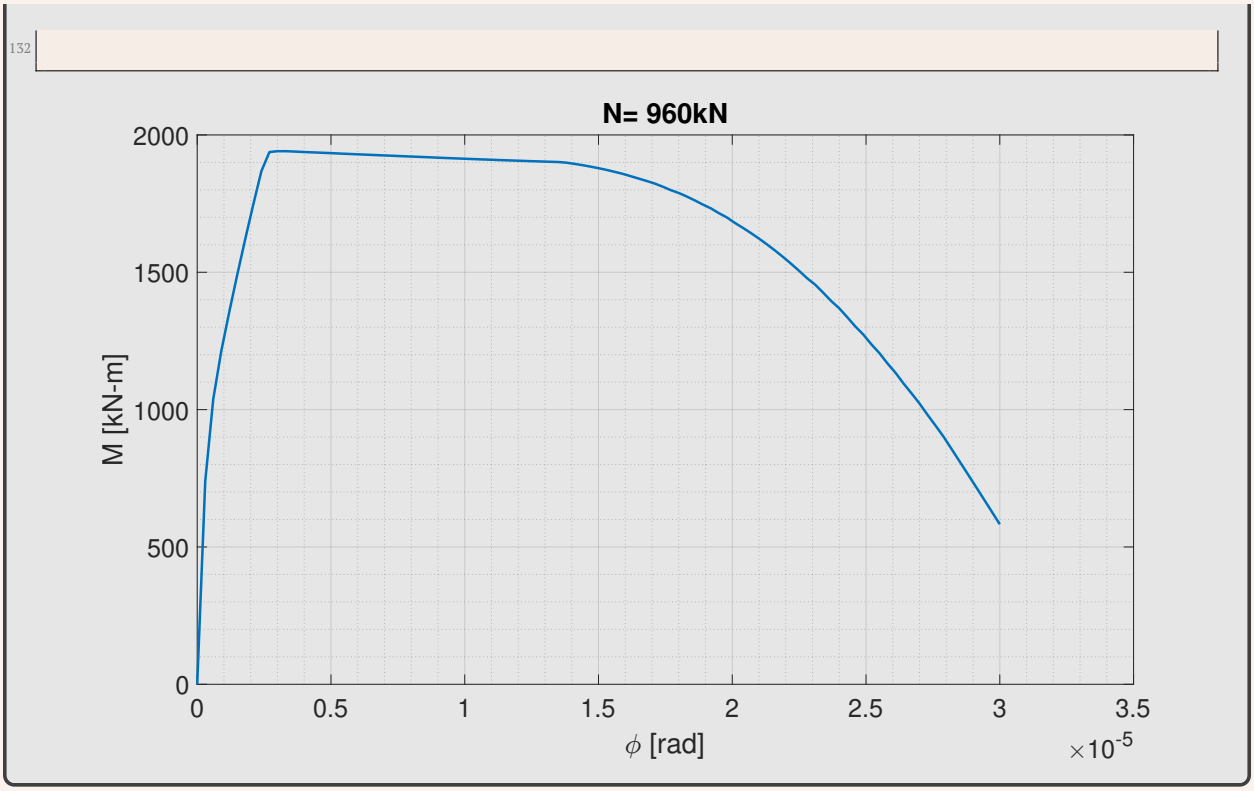
```
    fps=fy; % check if steel is yielding
    end
    F_CR=-fps*Aps;  % Compressive force in top steel
    MF_CR=F_CR*y_Aps; % Moment caused by compression reinforcement
    % Next compute the internal forces for the concrete, both in tension and
    compression (and the top and bottom of the section, respectively). Unlike the
    steel, which had its internal stresses calculated for a single layer of steel
    in both compression and tension, the concrete internal stresses are computed
    for a series of layers throughout the section. This began at the bottom (yc=0)
    and continued for a number of layers (nl) with height delta_yc. Included is an
    if statement to ensure that the change in width of the section from web to
    flange are captured depending on the location of yc(ic). In order to compute
    the internal stresses in compression, an external script was used,
    stress_strain(fp_c, epsip_c, epsi_u, epsi_c).  This script used the
    relationship for compressive stress in concrete as a function of strain, but
    accounting for failure. Tension in concrete is done similarly, but the stress
    for this was calculated using a simple relationship.
    % Loop over the layers:
    % Compression in concrete
    yc=0;
    ic=0;
    delta_yc=(h-yn(iphi))/nl;
    for ic=1:nl % loop over the layers
    yc(ic)=yn(iphi)+(ic-0.5)*delta_yc; % store in array for possible plotting
    b=bw; % check width
    if yc(ic) > h-hf
    b=bf;
    end
    epsi_c=phi*yc(ic); % strain at layer location
    F_CC(ic)=-b*delta_yc*stress_strain(fp_c,epsip_c,epsi_u,epsi_c); %concrete
    compression at that layer
    MF_CC(ic)=F_CC(ic)*yc(ic); % Moment contribution from layer force
    end
    % Tension in concrete
    it=0;
    yt=0;
    delta_yt=(yn(iphi))/nl;
    for it=1:nl
    yt(it)=(it-0.5)*delta_yt;
    b=bf; % Check for width
    if yt(it) > hf
    b=bw;
    end
    epsi_t=phi*(yn(iphi)-yt(it));
    ft=Ec*epsi_t;
    if ft > f_cr
    ft=0;
    end
    F_TC(it)=b*delta_yt*ft;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
MF_TC(it)=F_TC(it)*yt(it);
end
% Using the internal forces for steel and concrete (both in compression and tension), compute the total force through equilibrium. Assume compression to be negative and tension to be positive. The N value for internal force is compared to the bounds set earlier, and is recomputed with an increased phi if it is outside those bounds. If this is the case, then the neutral axis is shifted accordingly, phi will be increased, and N recomputed through the steps above. When the internal force are within the bounds set, then we will compute total moment for that phi and plot the moment curvature at equilibrium.
% Compute total force should be -ve
N=F_CR+sum(F_CC)+sum(F_TC)+F_TR;
N=-N; % make it positive
%%%
% make adjustments
 if N < Nmin
ymax=yn(iphi);
yn(iphi)=0.5*(yn(iphi)+ymin);
end
 if  N > Nmax
ymin=yn(iphi);
yn(iphi)=0.5*(yn(iphi)+ymax);
end
% sanity check in case yn(iphi) is getting to close to the top
 if yn(iphi)<0.01*h
EndRun=1;
break
end
end
M(iphi)=-(MF_CR+sum(MF_CC)+sum(MF_TC)+MF_TR)/1000000; % convert N-mm to kN-m
 if EndRun == 1
break
end
end
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(phiM,M,'linewidth',2);grid minor; grid
xlabel('\Phi [rad]');ylabel('M [kN-m]');titre=['N= ' num2str(Nappl/1000 ) 'kN'];
title(titre);
set(gca,'fontsize',20);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'Concrete-M-Phi.pdf','BackgroundColor','none')
%=====================================================================
function fc= stress_strain(fp_c, epsip_c, epsi_u, epsi_c)
if epsi_c < epsip_c
fc=fp_c*(2*epsi_c/epsip_c -(epsi_c/epsip_c)^2);
else
fc=fp_c*(1-0.15*((epsi_c-epsip_c)/(epsi_u-epsip_c)));
end
end
```

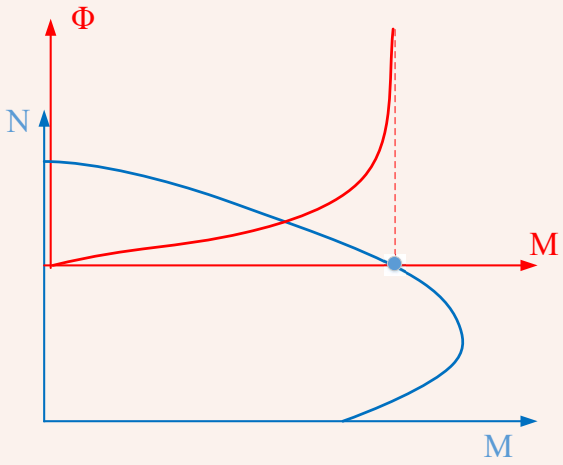
प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



56.4.1.2 अंतःक्रिया आरेख $M - N$

28 विभिन्न N_{ext} के लिए पूर्ववर्ती प्रक्रिया दोहराकर धरन-स्तंभ *अंतःक्रिया आरेख* व्युत्पन्न किया जा सकता है, चित्र 56.3। यह किसी स्तंभ द्वारा वहन किए जा सकने वाले अक्षीय भार P_n और उसकी



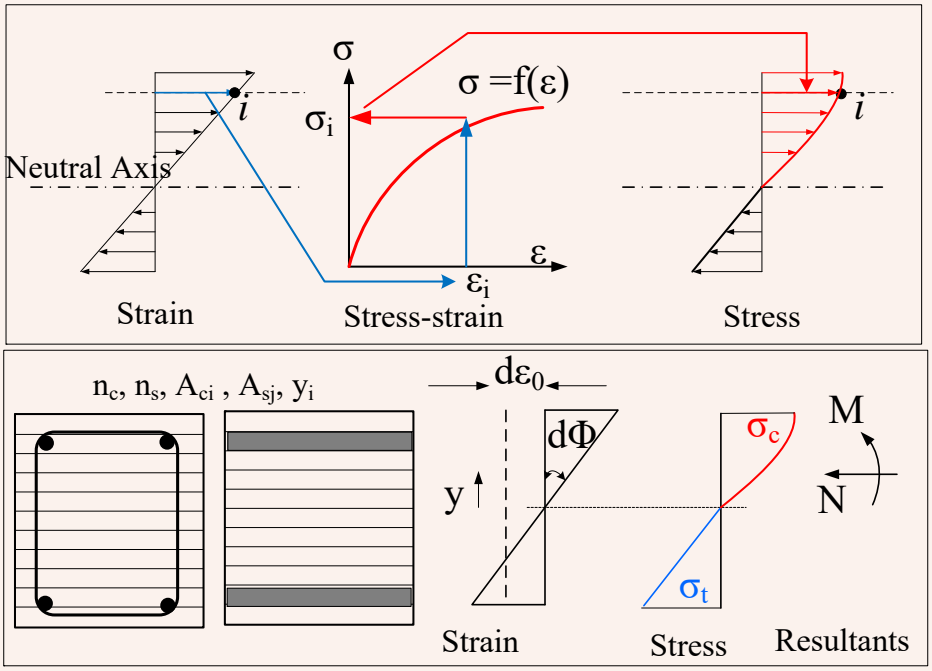
चित्र 56.3: आघूर्ण–वक्रता और आघूर्ण–अक्षीय बल (अंतःक्रिया) आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आघूर्ण क्षमता M_n का आलेख है[2]।

56.4.2 संख्यात्मक उपागम

29 पूर्व वर्णित वैश्लेषिक उपागम को संख्यात्मक रूप से कार्यान्वित किया जा सकता है। पहले अनुप्रस्थ परिच्छेद को परतों में *विविक्तित* करना होगा[3], चित्र 56.4।



चित्र 56.4: अनुप्रस्थ परिच्छेद का परतों में विविक्तीकरण

अतः कंक्रीट परिच्छेद को n_c परतों (सूचकांक i) और इस्पात को n_s परतों (सूचकांक j) में विभाजित किया जाता है[4]। A_{ci} और $A_{sj} = A_s$ क्रमशः प्रत्येक कंक्रीट तथा इस्पात परत के क्षेत्रफल हैं; y_i उदासीन अक्ष से तंतु i की दूरी है।

30 दिए गए (और नियत) N_{ext} के लिए Φ को $\Delta\Phi$ से क्रमशः बढाया जाएगा[5], और N_{int} ज्ञात किया जाएगा। अतः M_{ext} को दिए गए Φ के लिए निर्धारित करना है। किसी भी परिच्छेद पर $\varepsilon(y) = \varepsilon_0 + y\Phi$, जहाँ ε_0, N_{ext} के कारण उत्पन्न अक्षीय विकृति है।

[2]अधोलिपि n नाममात्र मान को सूचित करती है।
[3]द्विअक्षीय आघूर्ण अथवा मरोड होने पर तंतुओं में।
[4]आगे परिरुद्ध (इस्पात पिंजरे के भीतर) और अपरिरुद्ध कंक्रीट में भेद किया जाएगा, क्योंकि उनके गुण भिन्न होते हैं।
[5]वैश्लेषिक उपागम में ε_c^{top} बढाकर k ज्ञात किया गया था।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

31 दी गई विकृति के लिए परिणामी आंतरिक बल:

$$N_{int} = \int E d\varepsilon dA = \int E dA d\varepsilon_0 + \int E dA y d\Phi$$
$$= \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci} + \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}\right]}_{\text{प्रारंभिक विकृति}} \varepsilon_0 + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci}y_i + \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}y_i\right]}_{\text{वक्रता } \Phi} \Phi \tag{56.5}$$

$$M = \int E d\varepsilon y dA \tag{56.6}$$

32 कलन-विधि के रूप में, चित्र 56.5:

1. वक्रता बढ़ाएँ: $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta\Phi$ (N_{ext} नियत)।
2. उदासीन अक्ष का स्थान (k) मानें और विकृति-रूपरेखा $\varepsilon(y_i) = d\varepsilon_0 + y_i d\Phi$ अद्यतन करें, जहाँ $d\varepsilon_0 = (\Delta N - E_x \Delta\Phi)/E_a$।
3. यदि $\varepsilon \geq \varepsilon_u$ (कंक्रीट के लिए सामान्यतः 0.003) हो, तो प्रक्रिया समाप्त करें।
4. समीकरण 56.5 से N_{int} निर्धारित करें:

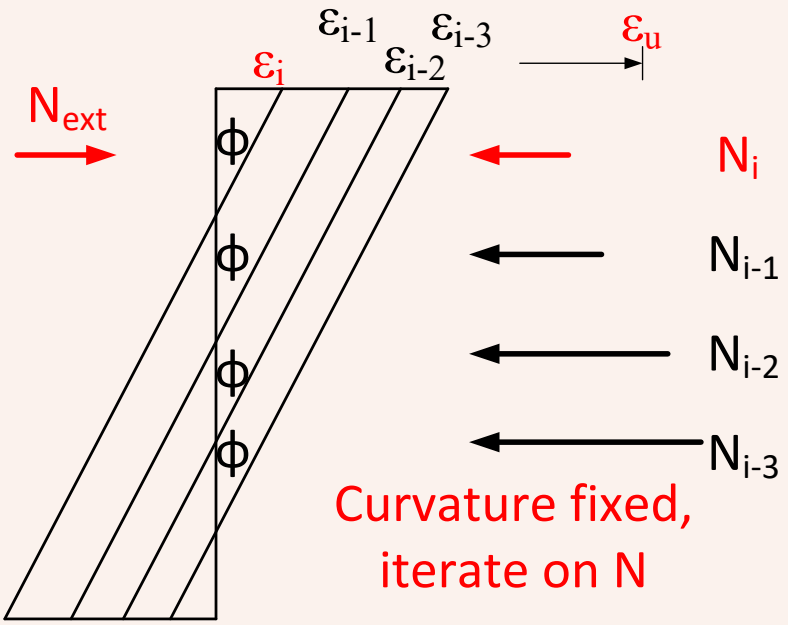
$$N_{comp} = \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci}A_{ci} + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{sj}A_{sj}$$
$$\sigma_{ci} = \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci}(\varepsilon_0 + y_i\Phi)$$
$$\sigma_{sj} = \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}(\varepsilon_0 + y_j\Phi)$$

5. यदि $|N_{ext} - N_{int}| > \varepsilon$ हो, तो k समायोजित करके पुनरावृत्ति करें; अन्यथा प्रक्रिया से बाहर आएँ।
6. गणना करें:

$$M_{int} = \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci}A_{ci}y_i + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{sj}A_{sj}y_i$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 56.5: $M - \Phi$ को संख्यात्मक रूप से निर्धारित करने का वृद्धिशील उपागम

[33] अभिसरण सुनिश्चित करना कठिन हो सकता है। अतः पहले y_{min} और y_{max} दोनों के लिए एक बड़ा परिसीमन अंतराल परिभाषित किया जाएगा; प्रत्येक पुनरावृत्ति में उनमें से एक को तब तक अद्यतन किया जाएगा जब तक परिसीमन अंतराल पर्याप्त रूप से छोटा न हो जाए। अतः,

चरण 1 प्रारंभिक वक्रता और उदासीन अक्ष से आरंभ करें, अर्थात् मानें: Φ, $y_n(1), y_{min}(1), y_{max}(1)$।

संपीडन और तनन परिच्छेदों को लंबाई L_e वाली समान गहराई की परतों में विभाजित करना चाहिए। जाल की तुलना में फ्लैंजों को बहुत कम परतें आवंटित न हों, इसका ध्यान रखें।

सुझाए गए चर-नाम:

- कंक्रीट संपीडन बल F_{CC}
- कंक्रीट तनन बल F_{CT}
- इस्पात तनन बल F_{ST}
- इस्पात संपीडन बल F_{SC}
- F_{CT}: केवल यदि परत दरारित न हो।

चरण 2 अभिलंब बल

$$N_i = F_{cr} + F_{cc} - F_{ct} - F_{tr}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

निर्धारित करें तथा सीमाएँ B, y_{min} और y_{max} के लिए, निर्दिष्ट करें; इन्हें प्रत्येक पुनरावृत्ति के अंत में अद्यतन किया जाएगा:

$$\underbrace{N_{min}}_{B_{min}N_{appl}} < N < \underbrace{N_{max}}_{B_{max}N_{appl}}$$

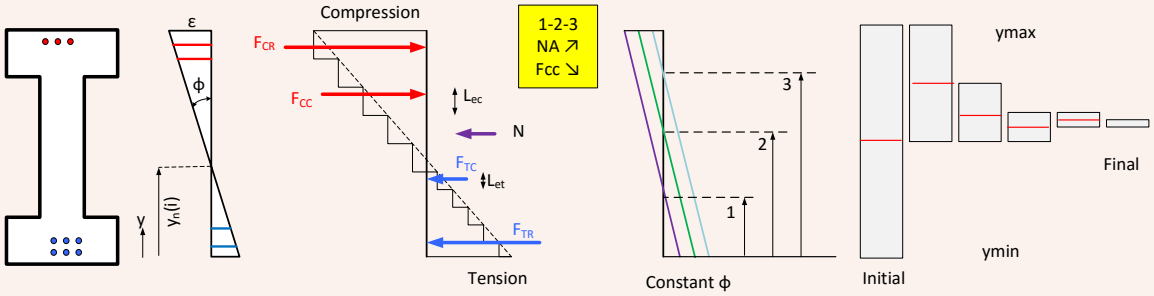
उदाहरणतः $[B_{min}, B_{max}] = [0.95, 1.05]$, जो ±5% विचलन के अनुरूप है।

चरण 3 पुनरावृत्ति आरंभ करें।

`While` $N < N_{min} \| N > N_{max}$

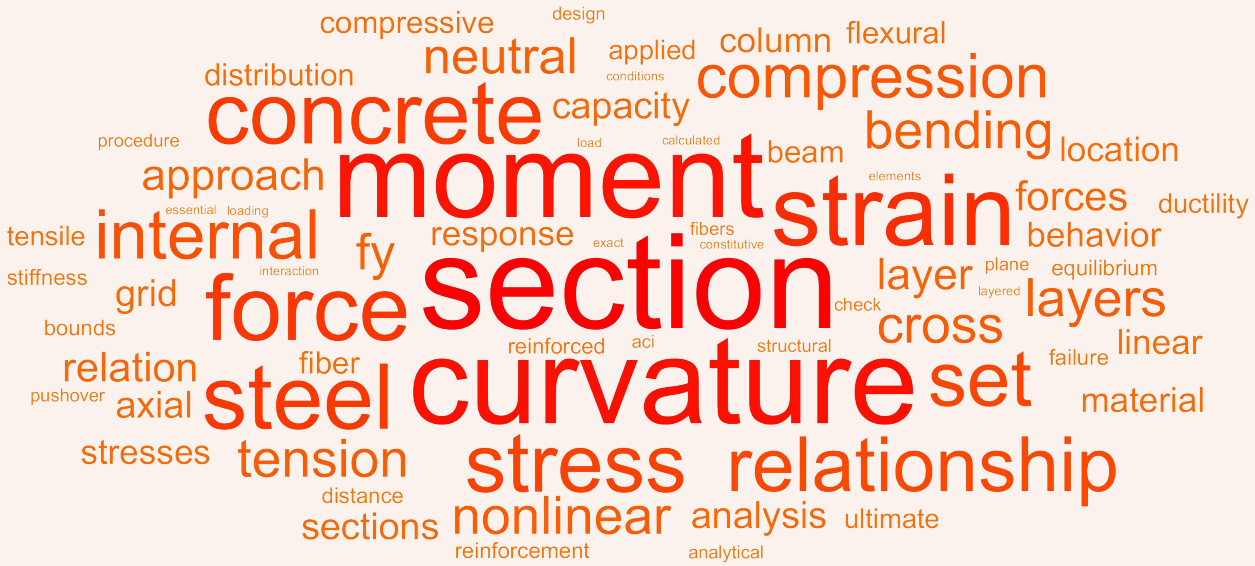
$$\text{यदि} \begin{cases} \text{यदि } N < N_{min} \Rightarrow y_{max} \downarrow \begin{cases} y_n(i) = 0.5(y_n(i-1) + y_{min} \\ y_{max} = y_n(i) \end{cases} \\ \text{यदि } N > N_{max} \Rightarrow y_{min} \uparrow \begin{cases} y_n(i) = 0.5(y_n(i-1) + y_{max} \\ y_{min} = y_n(i) \end{cases} \end{cases} \tag{56.7}$$

N_i को अद्यतन करें
यदि $N_{min} < N_{appl} < N_{max}$ शर्त संतुष्ट है; लूप से बाहर आकर आघूर्ण की गणना करें



[34] इस उपागम पर आगे §61.4 में अवयव-दृढता संरूपण के संदर्भ में पुनः विचार किया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप सामग्री

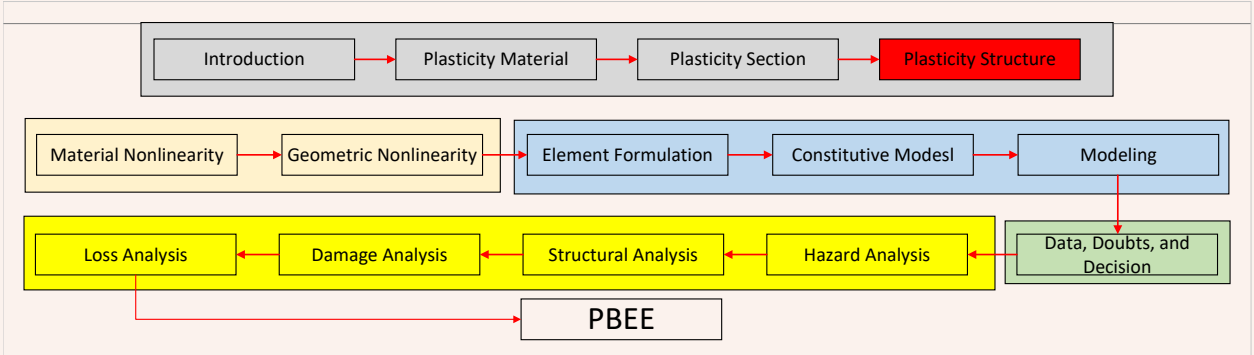
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

57 सुघट्यता III: संरचना–पराभव रेखाएँ

सारांश

सुघट्यता पर आधारित इस शृंखला के अंतिम अध्याय में ध्यान संरचनात्मक अवयवों के स्थानीय सुघट्य व्यवहार से विस्तृत होकर चरम भार स्थितियों के अधीन संपूर्ण संरचनात्मक तंत्रों के व्यवहार पर केंद्रित होता है। अध्याय का आरंभ धरन-पतन के विश्लेषण से होता है, जिसमें उन सुघट्य संधियों के निर्माण पर ध्यान दिया गया है जो भार-क्षमता तक पहुँचने पर धरनों को यंत्रावली में परिवर्तित कर देती हैं। इसके बाद पट्टिकाओं के पराभव-रेखा सिद्धांत का अध्ययन किया जाता है, जहाँ भारण के अधीन विफलता-प्रतिरूप विशिष्ट रेखाओं के अनुदिश विकसित होते हैं। पट्टिका-भारण की जटिल और वितरित प्रकृति के बावजूद पराभव-रेखा सिद्धांत पतन-यंत्रावलियों के पूर्वानुमान का एक दक्ष साधन प्रदान करता है। अंत में पराभव-रेखा सिद्धांत, संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूपों और पुशओवर विश्लेषण के बीच सादृश्यों पर चर्चा की जाती है। ये सादृश्य इन विधियों के साझा सिद्धांतों को स्पष्ट करते हैं; सभी विधियाँ विशिष्ट क्षेत्रों में अप्रत्यास्थ अनुक्रिया को केंद्रित करके पतन-व्यवहार का सन्निकटन करती हैं और इस प्रकार सीमांत अवस्था में संरचनात्मक सुरक्षा के मूल्यांकन के व्यावहारिक उपकरण प्रदान करती हैं।

57.1 परिचय 1902
57.2 रैखिक अवयव (धरन, ढाँचे) 1903
57.2.1 शुद्धगतिक: ऊपरी सीमा 1903
57.2.2 स्थैतिकी; निचली सीमा . . . 1909
57.3 समतलीय अवयव (पट्टिकाएँ) 1918
57.3.1 स्थैतिकी: निचली सीमा 1919
57.3.2 शुद्धगतिकी: ऊपरी सीमा 1920
57.4 पुशओवर विश्लेषण 1923
57.5 निचली सीमा विश्लेषण और 1924
57.5.1 पुशओवर विश्लेषण के बीच अनुरूपताएँ 1924
57.5.2 संहत सुघट्यता 1928
58.1 ChatGPT द्वारा प्रस्तावित रूपरेखा . . 1932
58.1.1 अभिप्रेरणा और भौतिक आधार (~1.5 pages) 1932
58.2 ऊष्मागतिकीय संरूपण (~2 pages) . . . 1932
58.3 अदिश समदैशिक क्षति: मज़ार्स प्रतिरूप (~4 pages) 1932
58.4 तनाव–संपीडन असममिति और एकपक्षीय प्रभाव (~2 pages) 1932
58.5 क्षति–सुघट्यता युग्मन (~2 pages) . . 1933
58.6 नियमितीकरण और जालक वस्तुनिष्ठता (~3 pages) 1933
58.7 धरन और स्तंभ अवयवों पर अनुप्रयोग (~3 pages) 1933
58.8 प्राचल-अभिज्ञान और व्यावहारिक मार्ग-दर्शिका (~1.5 pages) 1933
58.9 ग्रंथसूची टिप्पणियाँ और आगे का अध्ययन (~0.5 pages) 1933



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

57.1 परिचय

1 पहले बिंदु पर और फिर परिच्छेद में स्थानीय स्तर पर सुघट्यता की भूमिका का अध्ययन करने के बाद अब विश्लेषण को संपूर्ण संरचनाओं तक विस्तारित किया जाता है। यह अध्याय संरचनात्मक विश्लेषण में सुघट्यता की भूमिका का अध्ययन करता है और विशेष रूप से इस बात पर केंद्रित है कि संरचनाएँ अपनी चरम भार-वहन क्षमता तक कैसे पहुँचती हैं।

2 अब तक संरचनात्मक विश्लेषण रैखिक प्रत्यास्थ उपागम द्वारा किया गया, जिससे भार–विस्थापन संबंध निर्धारित किए जा सके। सेवा-भारों के अधीन संरचना का सामान्य व्यवहार समझने के लिए ऐसा विश्लेषण प्रायः पर्याप्त होता है, क्योंकि उस अवस्था में विक्षेप स्वीकार्य सीमाओं के भीतर रहते हैं। किंतु केवल प्रत्यास्थ उपागम विफलता के समीप पहुँचती संरचना के व्यवहार को पूर्णतः निरूपित नहीं करता, विशेषतः उन तन्य तंत्रों में जहाँ सुघट्यता की महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है।

3 इस अध्याय में ध्यान विफलता तक के भार–विस्थापन संबंध के स्थान पर संरचना के पतन-भार के निर्धारण पर केंद्रित होता है। स्तंभ व्याकुंचन के समान यहाँ उद्देश्य उस अवस्था तक की वृद्धिशील भार–विस्थापन अनुक्रिया व्युत्पन्न किए बिना संरचना की चरम सामर्थ्य अथवा विफलता-यंत्रावली का आकलन करना है। यह विश्लेषण चित्र 54.5 के प्रकार 6 के अनुरूप है।

4 प्रत्यास्थ और सुघट्य समाधानों के बीच महत्त्वपूर्ण अंतर निम्न हैं:

प्रत्यास्थ समाधान निम्न मानदंड पूरे करता है:

1. **साम्य**: आरोपित भारों के अधीन संरचना साम्यावस्था में है।
2. **प्रत्यास्थ शर्त**: सभी आंतरिक आघूर्ण प्रत्यास्थ परास में हैं, $|M| < M_{\text{yld}}$।
3. **सुसंगतता (सांतत्य)**: संपूर्ण संरचना में विरूपण-सुसंगतता बनी रहती है, जिससे सतत विस्थापन क्षेत्र सुनिश्चित होते हैं।

सुघट्य समाधान निम्न मानदंड पूरे करता है:

1. **साम्य**: आरोपित भारों के अधीन संरचना साम्य बनाए रखती है।
2. **पराभव शर्त**: आघूर्ण सुघट्य आघूर्ण क्षमता $|M| \leq M_{\text{pl}}$ तक पहुँचते हैं, जो सुघट्य व्यवहार के आरंभ को दर्शाता है।
3. **यंत्रावली**: भार में और वृद्धि के बिना अतिरिक्त विरूपण हो सकते हैं, जो दर्शाता है कि संरचना यंत्रावली बन चुकी है।
4. **सुघट्य संधियों पर कार्य–ऊर्जा सिद्धांत**:

$$\text{बाह्य कार्य}\,(W_e) = \text{अपव्यय ऊर्जा}\,(D \geq 0) + \text{विकृति ऊर्जा}\,(U = 0).$$

सुघट्य विश्लेषण की धारणाएँ

1. सभी बाह्य भार समानुपाती रूप से बढ़ते हैं।
2. पदार्थ का व्यवहार प्रत्यास्थ-सुघट्य है, जिससे सुघट्य संधियाँ विकसित हो सकती हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. विरूपण छोटे हैं, अतः ज्यामितीय अरैखिकता पर विचार नहीं किया जाता।

[5] धरनों और ढाँचों में विफलता सामान्यतः पर्याप्त संख्या में सुघट्य *संधियाँ* बनने के बाद होती है; ये संरचना को *यंत्रावली* में परिवर्तित कर देती हैं, जिससे आंशिक अथवा पूर्ण पतन होता है। विश्लेषण के लिए सामान्यतः प्रत्यास्थ–पूर्णतः सुघट्य पदार्थीय अनुक्रिया मानी जाती है, जिसमें सुघट्य संधि पर आंतरिक आघूर्ण M_p तक पहुँचने के बाद अतिरिक्त घूर्णन के प्रति और प्रतिरोध नहीं रहता।

[6] संरचना के चरम (अथवा *सीमांत*) भार दो भिन्न उपागमों से निर्धारित किए जा सकते हैं, जिनका सारांश तालिका 57.1 में है:

ऊपरी सीमा; शुद्धगतिक उपागम: यह उपागम किसी संभावित पतन-यंत्रावली को मानकर संगत भार की गणना करता है। व्युत्पन्न भार सदैव वास्तविक चरम भार से अधिक अथवा उसके बराबर होगा। संधि-निर्माण के वास्तविक क्रम पर विचार किए बिना यंत्रावली के लिए आवश्यक सभी सुघट्य संधियों का एक साथ निर्माण माना जाता है। यह उपागम साम्य और सुघट्यता की शर्तें संतुष्ट करता है, किंतु वास्तविक पतन-यंत्रावली का यथार्थ पूर्वानुमान आवश्यक नहीं कि करे।

निचली सीमा; स्थैतिक उपागम: यहाँ आरोपित भारों के साथ साम्य में ऐसा आघूर्ण-वितरण माना जाता है जिसमें कोई आंतरिक आघूर्ण M_p से अधिक न हो। यह भार-अनुमान सदैव वास्तविक चरम भार से कम अथवा उसके बराबर होगा। विधि संधियों के निर्माण-क्रम का अनुकरण करने का प्रयास करती है और सुघट्यता सीमा न पार होने को सुनिश्चित करके संरक्षणात्मक भार-अनुमान देती है, यद्यपि यंत्रावली शर्त पूर्णतः संतुष्ट न भी हो सकती है।

तालिका 57.1: सीमांत भार विश्लेषण के शुद्धगतिक और स्थैतिक उपागमों की तुलना

विधि	सीमा	धारणा	संतुष्ट शर्त	संभावित उल्लंघन
शुद्धगतिक	ऊपरी	यंत्रावली	सुघट्यता	यंत्रावली का निर्माण
स्थैतिक	निचली	साम्य	यंत्रावली	सुघट्यता

प्रत्येक उपागम के गुणों और सीमाओं का विस्तृत अध्ययन किया जाएगा।

57.2 रैखिक अवयव (धरन, ढाँचे)

57.2.1 शुद्धगतिक: ऊपरी सीमा

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यदि कोई ऐसा शुद्धगतिक रूप से ग्राह्य विरूपण क्षेत्र विद्यमान हो जिसके लिए बाह्य बलों द्वारा किए गए कार्य की दर आंतरिक ऊर्जा-अपव्यय की दर से अधिक हो, तो संरचना का पतन होगा।

57.2.1 शुद्धगतिक: ऊपरी सीमा

7 ऊपरी सीमा प्रमेय, जिसे कभी-कभी *असुरक्षित भार प्रमेय* कहा जाता है, संभावित विरूपण-यंत्रावलियों का विश्लेषण करके संरचना के पतन-भार का अनुमान देता है। प्रमेय के अनुसार किसी काल्पनिक, शुद्धगतिक रूप से ग्राह्य विरूपण-यंत्रावली के आधार पर पतन उत्पन्न करने वाला कोई भी भार वास्तविक पतन-भार की ऊपरी सीमा होगा। इसका तात्पर्य है कि यदि यह भार संरचना की क्षमता से अधिक हो, तो पतन अनिवार्य है।

8 यह प्रमेय *आभासी कार्य के सिद्धांत* §48.3.3, से निकटता से संबंधित है, जिसे आभासी विस्थापनों का सिद्धांत भी कहा जाता है। दोनों सिद्धांतों में किसी मानी गई विरूपण अथवा पतन-यंत्रावली के अधीन बाह्य और आंतरिक कार्य-दरों की तुलना करके साम्य तथा पतन की शर्तों का मूल्यांकन किया जाता है।

9 आभासी कार्य सिद्धांत के अनुसार साम्य के लिए आभासी विस्थापन के दौरान भारों द्वारा किया गया बाह्य आभासी कार्य संरचना के प्रतिरोधी बलों द्वारा किए गए आंतरिक आभासी कार्य के बराबर होना चाहिए। जब यह संतुलन यंत्रावली उत्पन्न करने वाले ढंग से भंग होता है, तब पतन-भार पहचाना जा सकता है।

शुद्धगतिक रूप से ग्राह्य क्षेत्र की परिभाषा

10 *शुद्धगतिक रूप से ग्राह्य क्षेत्र* ऐसी काल्पनिक विरूपण अवस्था को निरूपित करता है जो संरचना के प्रतिबंधों और मानी गई पतन-यंत्रावली के अनुरूप हो। किसी विरूपण क्षेत्र के शुद्धगतिक रूप से ग्राह्य होने के लिए:

- बाह्य कार्य W_e, जो आरोपित बलों $\mathbf{F}$ द्वारा विरूपण $_F$ पर किया जाता है, धनात्मक होना चाहिए; इसका अर्थ है कि संरचना आरोपित भारों की दिशा में विरूपित होती है।
- आंतरिक कार्य W_i, जो सुघट्य आघूर्णों $\mathbf{M}_p$ द्वारा सुघट्य संधि-स्थानों के घूर्णनों $\boldsymbol{\theta}$ पर किया जाता है, भी धनात्मक होता है; इससे स्पष्ट होता है कि आंतरिक प्रतिरोध बाह्य भार की प्रतिक्रिया में कार्य कर रहे हैं।

कार्य-तुल्यता द्वारा पतन का निर्धारण

11 यह जाँचने के लिए कि कोई दिया गया भार पतन उत्पन्न करेगा या नहीं, आरोपित भार द्वारा किए गए बाह्य कार्य को सुघट्य संधियों में अपव्ययित आंतरिक कार्य के बराबर रखा जाता है। यह उपागम किसी विशिष्ट पतन-यंत्रावली की परिकल्पना और उससे संबद्ध कार्य की गणना पर आधारित है। किसी संभावित यंत्रावली i के लिए पतन-बिंदु पर बाह्य और आंतरिक कार्य का साम्य निम्न अपेक्षित करता है:

$$U_i = \lambda_i W_i$$

जहाँ: W_i मानी गई यंत्रावली में आभासी विस्थापन के दौरान आरोपित भार द्वारा किया गया बाह्य कार्य है; λ_i एक *शुद्धगतिक गुणक* है, जो यंत्रावली i की पतन-अवस्था तक पहुँचने के लिए आरोपित भारों को मापित करता है; U_i यंत्रावली की सुघट्य संधियों द्वारा अपव्ययित कुल आंतरिक ऊर्जा है।

12 यह आंतरिक ऊर्जा इस प्रकार व्यक्त की जा सकती है:

$$U_i = \sum_{j=1}^{n} M_{p_j} \theta_{ij}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ: M_{p_j}, j^{th} सुघट्य संधि-स्थान की सुघट्य आघूर्ण क्षमता है; θ_{ij}, j^{th} स्थान पर यंत्रावली i के लिए संधि-घूर्णन है; और n संरचना में संभावित सुघट्य संधियों अथवा क्रांतिक परिच्छेदों की कुल संख्या है।

कार्य-तुल्यता प्रक्रिया की व्याख्या

बाह्य कार्य की गणना: बाह्य कार्य W_i, आरोपित भारों द्वारा उत्पन्न विस्थापन पर निर्भर करता है। संरचना पर आरोपित प्रत्येक भार F_k, भार की दिशा में अपने विस्थापन Δ_{F_k} के आधार पर कार्य में योगदान देता है। सभी आरोपित भारों के कार्य-योगदान जोड़ने पर कुल बाह्य कार्य मिलता है:

$$W_i = \sum_k F_k \Delta_{F_k}$$

जहाँ F_k, k^{th} आरोपित भार है और Δ_{F_k} मानी गई पतन-यंत्रावली में उसका संगत विस्थापन है।

आंतरिक अपव्ययित ऊर्जा की गणना: आंतरिक कार्य U_i, सुघट्य संधियों के घूर्णन से अपव्ययित ऊर्जा है। प्रत्येक संधि-घूर्णन θ_{ij}, सुघट्य आघूर्ण M_{p_j} के अधीन, इस आंतरिक ऊर्जा में योगदान देता है। प्रत्येक संधि के इन ऊर्जा-योगदानों का योग मानी गई यंत्रावली की कुल अपव्ययित ऊर्जा निर्धारित करता है, जैसा ऊपर के समीकरण में दर्शाया गया है।

[13] U_i को $\lambda_i W_i$ के बराबर रखकर λ_i ज्ञात किया जाता है—अर्थात् मानी गई यंत्रावली के लिए संरचना को पतन तक पहुँचाने वाला भार-गुणक। अनेक यंत्रावलियों पर विचार करने पर न्यूनतम λ_i पतन-भार की सर्वाधिक क्रांतिक ऊपरी सीमा देता है।

शुद्धगतिक (ऊपरी सीमा) विधि की धारणाएँ

[14] पतन-विश्लेषण को साध्य बनाने के लिए ऊपरी सीमा विधि अनेक सरलीकारक धारणाओं पर आधारित है:

- **प्रत्यास्थ–पूर्णतः सुघट्य व्यवहार**: संरचनात्मक सदस्यों को प्रत्यास्थ–पूर्णतः सुघट्य ढंग से व्यवहार करने वाला माना जाता है। अर्थात् पराभव आरंभ होने पर सदस्य अतिरिक्त प्रतिरोध के बिना सुघट्य विरूपण सह सकते हैं; पराभव-बिंदु के बाद विकृति-कठोरण नहीं होता।
- **संधियों पर स्थानीयकृत सुघट्यता**: सुघट्य विरूपण केवल सुघट्य संधि कहे जाने वाले विशिष्ट स्थानों पर माना जाता है। ये संधियाँ वहाँ बनती हैं जहाँ आघूर्ण सुघट्य आघूर्ण क्षमता M_p तक पहुँचता है। संधियों के बीच सदस्य प्रत्यास्थ माने जाते हैं, जिससे विश्लेषण पृथक सुघट्य क्षेत्रों पर केंद्रित होकर सरल हो जाता है।
- **सुघट्य आघूर्ण द्वारा नियंत्रित पतन**: प्रत्येक अनुप्रस्थ परिच्छेद पर सुघट्य आघूर्ण M_p उस अधिकतम आघूर्ण को निरूपित करता है जिसका परिच्छेद प्रतिरोध कर सकता है। इस आघूर्ण तक पहुँचने पर परिच्छेद पूर्णतः पराभवित माना जाता है और अतिरिक्त आघूर्ण-प्रतिरोध संभव नहीं होता। अतः संरचना का पतन-भार इन सुघट्य आघूर्ण क्षमताओं से नियंत्रित होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्वतंत्र यंत्रावलियों की संख्या

15 संरचना में संभावित स्वतंत्र पतन-यंत्रावलियों की संख्या n, संभावित सुघट्य संधि-स्थानों और अति-स्थैतिकता से प्रभावित होती है। सामान्यतः n निम्न संबंध से निर्धारित होता है:

$$n = h - r$$

जहाँ: h संरचना में संभावित सुघट्य संधि-स्थानों की संख्या है; r अतिस्थैतिकता की कोटि है, जो स्थैतिक निर्धार्यता से अधिक प्रतिबंधों की संख्या निरूपित करती है।

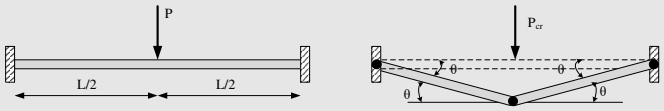
16 यह संबंध संभावित पतन-विधाओं को समझने में सहायता करता है। अधिक अतिस्थैतिकता (बड़ा r) वाली संरचनाओं में भार-पुनर्वितरण क्षमता अधिक होने से अधिक स्वतंत्र पतन-यंत्रावलियाँ विकसित हो सकती हैं।

17 n की गणना से व्यवहार्य पतन-विन्यासों की कुल संख्या पहचानी जा सकती है; प्रत्येक विन्यास किसी भिन्न संभावित यंत्रावली के अनुरूप होता है। इन यंत्रावलियों का अध्ययन आरोपित भारण के अधीन पतन के संभावित ढंग और स्थान की अंतर्दृष्टि देता है, जिससे संरचनात्मक सुरक्षा का व्यापक मूल्यांकन संभव होता है।

57.2.1.1 उदाहरण 57.1: आबद्ध धरन: केंद्रीय भार

- $n = 3 - 2 = 1$
- किया गया आंतरिक कार्य:

$$M_p\theta + M_p\theta + 2M_p\theta = 4M_p\theta$$



- बिंदु-भार द्वारा किया गया बाह्य कार्य:

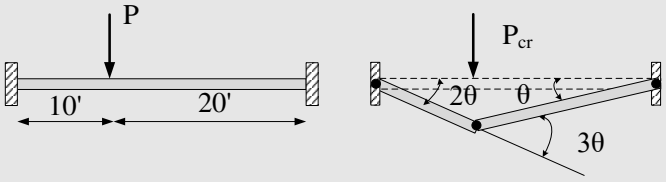
$$P_{cr}\theta L/2$$

- दोनों को बराबर रखने पर प्राप्त होता है:

$$P_{cr} = 8M_p/L.$$

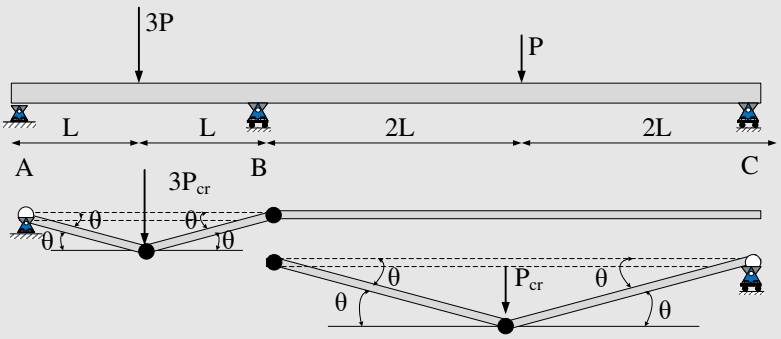
57.2.1.2 उदाहरण 57.2: आबद्ध धरन: उत्केंद्रित भार

$$W_{int} = W_{ext}$$
$$M_p(\theta + 2\theta + 3\theta) = P_{cr}\Delta$$
$$6M_p\theta = P_{cr}\theta(20)$$
$$\Rightarrow P_{cr} = 6\frac{M_P}{20}$$
$$P_{cr}{=}0.3M_p$$



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

57.2.1.3 उदाहरण 57.3: सतत धरन

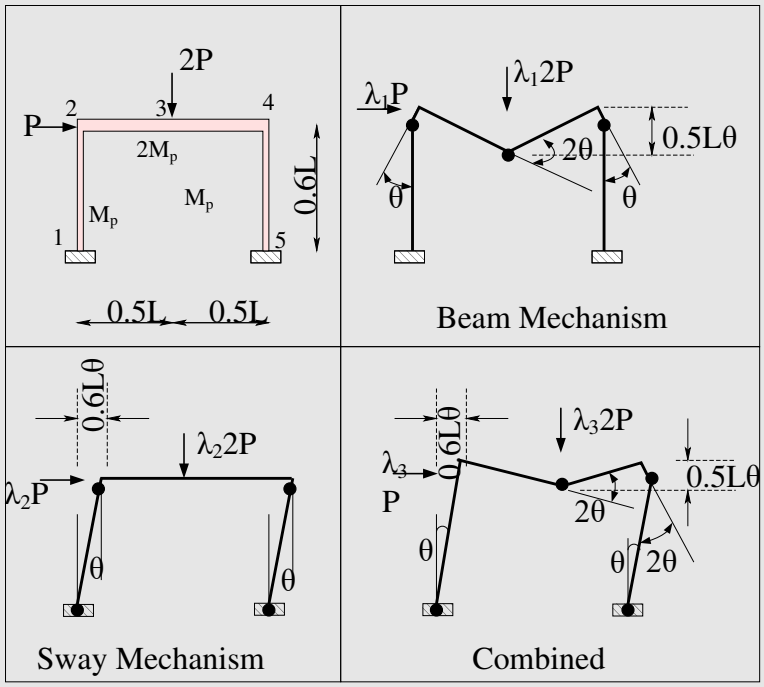


ऊर्ध्वाधर बलों द्वारा किए गए बाह्य कार्य को आंतरिक कार्य के बराबर रखने पर:

- विस्तार AB: $3P_{cr}L\theta = 3M_p\theta$ अथवा $P_{cr} = \frac{M_p}{L}$.
- विस्तार BC: $2P_{cr}L\theta = 3M_p\theta$ अथवा $P_{cr} = \frac{3}{2}\frac{M_p}{L}$

57.2.1.4 उदाहरण 57.4: लंबकोणीय ढाँचा

- $n = 5 - 3 = 2$ स्वतंत्र विधाएँ।
- संभावित यंत्रावलियों की कुल संख्या तीन है (एक अन्य दो पर निर्भर है)।
- यह सत्यापित करने के लिए कि λ वास्तव में न्यूनतम सीमा है, संगत आघूर्ण आरेख बनाकर जाँचा जा सकता है कि किसी भी परिच्छेद पर आघूर्ण M_p से अधिक न हो।



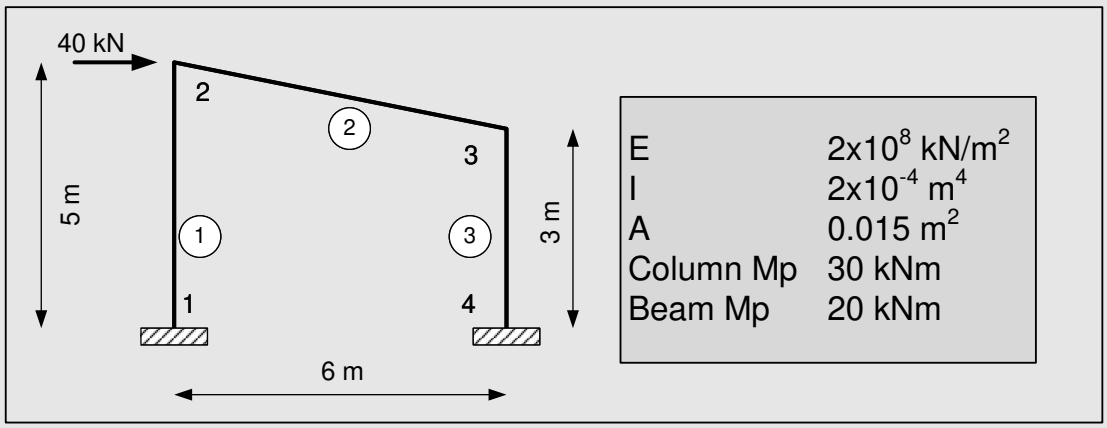
प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

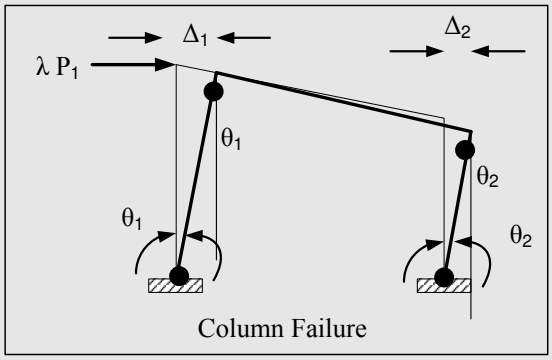
धरन यंत्रावली	$M_p(\theta+\theta)+2M_p(2\theta)=\lambda_1(2P)(0.5L\theta)$	$\Rightarrow \lambda_1 = 6\dfrac{M_p}{PL}$
पार्श्वगमन यंत्रावली	$M_p(\theta+\theta+\theta+\theta)=\lambda_2(P)(0.6L\theta)$	$\Rightarrow \lambda_2 = 6.67\dfrac{M_p}{PL}$
संयुक्त यंत्रावली	$M_p(\theta+\theta+2\theta)+2M_p(2\theta)=\lambda_3\left(P(0.6L\theta)+2P(0.5L\theta)\right)$	$\Rightarrow \lambda_3 = 5\dfrac{M_p}{PL}$

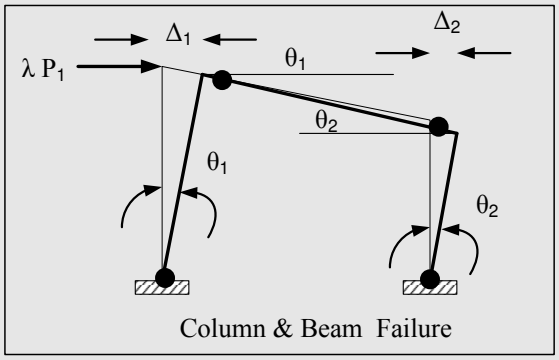
57.2.1.5 उदाहरण 57.5: आनत ढाँचा

निम्न ढाँचे का पतन-भार शुद्धगतिक ऊपरी सीमा उपागम द्वारा निर्धारित करना है।



पहले संभावित सुघट्य संधियों के स्थान निर्धारित किए जाते हैं:





और फिर प्रत्येक विफलता-विधा पर अलग से विचार किया जाता है:

स्तंभों में विफलता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_2 \\
5\theta_1 &= 3\theta_2 \\
\theta_1 &= 0.6\theta_2 \\
\lambda_1 P(5\theta_1) &= M_p^c(\theta_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_2) \\
\lambda_1 &= \frac{16}{15}\frac{M_p^c}{P} = \frac{16}{15}\frac{30}{40} = 0.8
\end{aligned}
$$

संयुक्त विफलता

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_2 \\
5\theta_1 &= 3\theta_2 \\
\theta_1 &= 0.6\theta_2 \\
\lambda_2 P(5\theta_1) &= M_p^c(\theta_1 + \theta_2) + M_p^b(\theta_1 + \theta_2) \\
&= \frac{8}{3}M_p^c\theta_1 + \frac{8}{3}M_p^b\theta_1 \\
\lambda_2(40)(5) &= \frac{8}{3}(30) + \frac{8}{3}(20) \\
\lambda_2 &= \frac{2}{3} = 0.67
\end{aligned}
$$

अतः दूसरी स्थिति नियंत्रक है और $P_{crit} = (0.67)(40) = 26.8\text{kN}$।

57.2.2 स्थैतिकी; निचली सीमा

परिभाषा 57.2: निचली सीमा प्रमेय

यदि आंतरिक बलों का ऐसा साम्य वितरण स्थापित किया जा सके जो आरोपित भारों को संतुलित करे और संपूर्ण संरचना में पराभव सीमा पर अथवा उससे नीचे रहे, तो संरचना का पतन नहीं होगा, अथवा वह पतन की अवस्था पर होगी।

18 निचली सीमा प्रमेय, जिसे *स्थैतिक अथवा सुरक्षित भार प्रमेय* भी कहा जाता है, यह सुनिश्चित करते हुए संरचना के पतन भार का आकलन करने की विधि प्रदान करता है कि आंतरिक बल और आघूर्ण पराभव क्षमता को पार किए बिना बाह्य भारों के साथ साम्य में रहें।

19 यह प्रमेय भार-वहन क्षमता का सुरक्षित और रूढ़िवादी आकलन सुनिश्चित करता है, क्योंकि इसमें केवल उन्हीं वितरणों पर विचार किया जाता है जो प्रत्यास्थ–सुघट्य परिसर में रहते हैं और अनिवार्य रूप से आवश्यक यंत्रावलियों के अतिरिक्त किसी अन्य यंत्रावली के निर्माण की कल्पना नहीं की जाती।

20 यह प्रमेय पूरक *आभासी कार्य के सिद्धांत* के अनुरूप है, §48.3.1, जहाँ पराभव प्रतिबंधों का पालन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करते हुए बाह्य भारों को प्रतिसंतुलित करने वाले आंतरिक बलों के आधार पर साम्य स्थापित किया जाता है। स्थैतिक पद्धति में हम ऐसे स्वीकार्य बल-वितरण को खोजते हैं जो साम्य में हो और सामग्री में किसी अतिप्रतिबल से बचे; इस प्रकार पतन भार की निचली सीमा प्राप्त होती है।

निचली सीमा पद्धति की मान्यताएँ

21 निचली सीमा विधि लागू करते समय निम्नलिखित मान्यताएँ आवश्यक हैं:

- **आंतरिक और बाह्य बलों का साम्य**: आरोपित भार संरचना के प्रत्येक बिंदु पर आंतरिक बलों और आघूर्णों के साथ साम्य में होने चाहिए। इसके लिए संरचना के किसी भी भाग में कोई परिणामी असंतुलित बल अथवा आघूर्ण शेष रखे बिना बलों और आघूर्णों का संतुलन आवश्यक है।
- **पर्याप्त सुघट्य संधियों का निर्माण**: आंतरिक बलों और आघूर्णों को पर्याप्त संख्या में सुघट्य संधियों का निर्माण संभव करना चाहिए, ताकि पतन यंत्रावली बन सके। पतन यंत्रावली तब बनती है जब संरचना ऐसी विन्यास-अवस्था पर पहुँचती है जहाँ वह अतिरिक्त भार का प्रतिरोध नहीं कर सकती; प्रायः विशिष्ट स्थानों पर संधियों का विकास इसका संकेत होता है।

22 इस पद्धति में परिकलित भार आघूर्णों के ऐसे कल्पित वितरण पर आधारित है जो:

- आरोपित भारण के साथ साम्य बनाए रखता है।
- सुनिश्चित करता है कि कोई भी आंतरिक आघूर्ण सुघट्य आघूर्ण क्षमता M_p से अधिक न हो।

23 यह विधि स्वभावतः रूढ़िवादी आकलन देती है, क्योंकि यह केवल उन्हीं आघूर्ण-वितरणों पर केंद्रित होती है जो निर्दिष्ट पराभव सीमा से आगे पराभव को रोकते हैं; अतः प्राप्त भार वास्तविक पतन भार से कम अथवा उसके बराबर होता है।

स्थैतिक समाधान-विधि

24 चरम भार निर्धारित करने की स्थैतिक (अथवा निचली सीमा) विधि में निम्नलिखित विस्तृत चरण सम्मिलित हैं:

1. **अतिरिक्त आघूर्णों का चयन:** संरचना के उन अतिरिक्त आघूर्णों को पहचानें जो समग्र साम्य में योगदान करते हैं। स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना में ये वे अतिरिक्त आंतरिक आघूर्ण हैं जिन्हें स्थैतिक निर्धार्यता से अधिक बंधनों के कारण साम्य बनाए रखने के लिए निर्धारित करना पड़ता है। इस चयन में ऐसे स्थानों की पहचान की जाती है जहाँ समग्र साम्य को भंग किए बिना आघूर्ण परिवर्तित हो सकते हैं।
2. **स्थैतिकतः निर्धार्य आघूर्ण आरेख का निर्माण:** आरंभ में अतिरिक्त बंधनों को संकल्पनात्मक रूप से हटाकर संरचना को स्थैतिकतः निर्धार्य विन्यास में सरल बनाएँ। आरोपित भारण के अधीन संरचना के इस निर्धार्य रूप का आघूर्ण आरेख बनाएँ। यह आधारभूत आरेख उस आघूर्ण-वितरण को दर्शाता है जो संरचना में अतिरिक्त बंधन अथवा अतिरिक्त अज्ञात न होने पर विद्यमान होता।
3. **निर्धार्य आघूर्ण आरेख पर अतिरिक्त आघूर्णों का अध्यारोपण:** निर्धार्य आघूर्ण आरेख स्थापित करने के बाद उस पर अतिरिक्त आघूर्णों का अध्यारोपण किया जाता है। पूर्णतः बंधित (अनिर्धार्य)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संरचना का वास्तविक आघूर्ण-वितरण प्राप्त करने के लिए इन अतिरिक्त आघूर्णों को आधारभूत वितरण में जोड़ा जाता है। इस अध्यारोपण से संयुक्त अथवा कुल आघूर्ण-वितरण प्राप्त होता है, जो आरोपित भार के अधीन वास्तविक आंतरिक आघूर्णों को निरूपित करता है।

4. **शिखर आघूर्णों को सुघट्य आघूर्ण क्षमता M_p के बराबर रखना:** अतिरिक्त आघूर्णों को इस प्रकार समायोजित करें कि कुल आघूर्ण आरेख के शिखर आघूर्ण संरचना के किसी भी परिच्छेद पर सुघट्य आघूर्ण क्षमता M_p से अधिक न हों। यह चरण महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि यह सुनिश्चित कर पराभव प्रतिबंध का पालन करता है कि किसी परिच्छेद में अतिप्रतिबल न हो। शिखर आघूर्णों को M_p के बराबर रखना प्रत्यास्थ और सुघट्य व्यवहार के बीच संक्रमण-सीमा निर्धारित करता है तथा पूर्ण भार-वहन क्षमता तक पहुँच चुके परिच्छेदों की पहचान करता है।
5. **यंत्रावली के निर्माण की जाँच:** पुष्टि करें कि जहाँ आघूर्ण M_p तक पहुँचते हैं वहाँ बनी सुघट्य संधियों की संख्या यंत्रावली उत्पन्न करने के लिए पर्याप्त है। यंत्रावली तब बनती है जब संरचना भार में वृद्धि के बिना अतिरिक्त विरूपण कर सकती है और इस प्रकार प्रभावी रूप से अस्थिर हो जाती है। यंत्रावली का निर्माण दर्शाता है कि संरचना पतन के कगार पर है, क्योंकि भार में आगे की कोई वृद्धि अनियंत्रित विरूपण उत्पन्न करेगी।
6. **साम्य प्रतिबंधों से चरम भार की गणना:** अंतिम आघूर्ण-वितरण प्राप्त होने पर साम्य समीकरण लागू कर उस चरम भार की गणना करें जिसे संरचना पराभव प्रतिबंधों का उल्लंघन किए बिना वहन कर सकती है। यह चरम भार आरोपित भार के उस परिमाण के अनुरूप है जिस पर निचली सीमा विधि के अनुसार संरचना पतन-अवस्था में पहुँचती है। यह भार संरचना की वास्तविक क्षमता का रूढ़िवादी आकलन है और सुनिश्चित करता है कि संरचना का कोई भाग अपनी सुघट्य सीमा से अधिक न जाए।

निचली सीमा पद्धति का सारांश

25 निचली सीमा पद्धति निम्न उपायों द्वारा संरचना की भार-वहन क्षमता का व्यवस्थित मूल्यांकन प्रदान करती है:

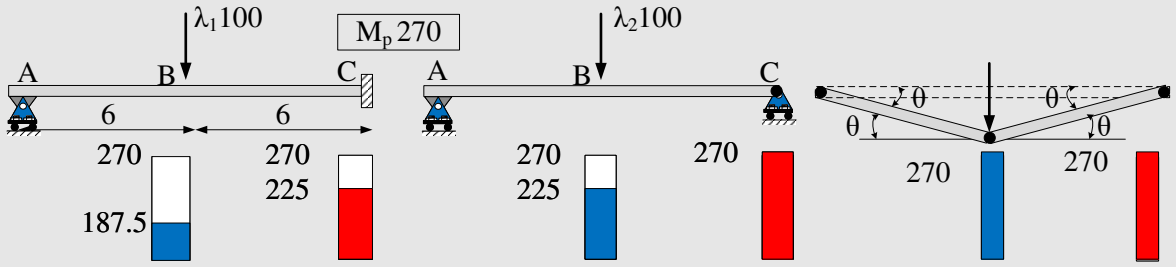
- आंतरिक और बाह्य बलों का साम्य सुनिश्चित करना।
- आघूर्णों के सावधानीपूर्वक वितरण द्वारा पराभव प्रतिबंधों का पालन करना।
- संधि-निर्माण के क्रम के विषय में कल्पनाओं से बचना, जिससे ऐसा सुरक्षित आकलन मिलता है जो वास्तविक पतन भार को कम आँक सकता है।

26 यह पद्धति संरचनात्मक अभियांत्रिकी में विशेषतः उपयोगी है, क्योंकि इससे प्राप्त पतन भार अधिकतम वास्तविक चरम भार के बराबर, और अन्यथा उससे कम होता है; अतः सुरक्षा सुनिश्चित होती है।

27 केवल साम्य और पराभव प्रतिबंधों का उपयोग करके निचली सीमा विधि विशिष्ट पतन यंत्रावलियों संबंधी कल्पनाओं से बचती है और संरचनात्मक सुरक्षा के मूल्यांकन की सुदृढ विधि प्रदान करती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

57.2.2.1 उदाहरण 57.6: आधारित बाहुधरन I

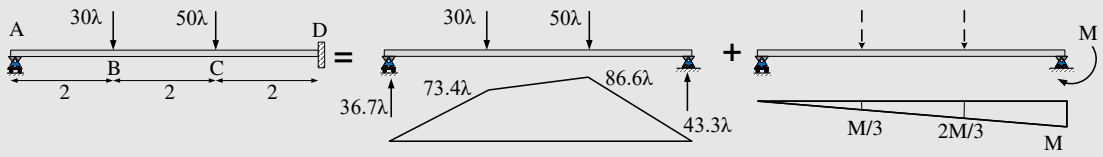


- एक वृद्धिशील विश्लेषण करें।
- चरण 1: P=100 के अधीन एक स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना है (परिमाण अप्रासंगिक है; यह 1, 10 आदि भी हो सकता था); विश्लेषण से प्राप्त होता है:

$$\begin{array}{rclcrcl} M_C & = & \frac{3}{16}PL = 225 & \Rightarrow & \lambda_1^C & = & \frac{270}{225} = 1.2 \\ M_B & = & \frac{5}{32}PL = 187.5 & \Rightarrow & \lambda_1^B & = & \frac{270}{187.5} = 1.44 \end{array}$$

  अतः पहली संधि C पर बनती है, और $P = 1.2(100) = 120$, $M_C^{total} = 1.2(225) = 270$, तथा $M_B^{total} = 1.2(187.5) = 225$।
- चरण 2: C पर संधि बन चुकी है ($M_C = 0$); अब पुनः P=100 के मध्य-बिंदु भार और $M_B = PL/4$=300 वाली स्थैतिकतः निर्धार्य धरन है। B पर शेष सुघट्य आघूर्ण क्षमता 270-225=45 है, $\Rightarrow \lambda_2 = 45/300$=0.15।
- दोनों भारों को जोड़ने पर (अब M_C^{total}=270 तथा M_B^{total}=225+0.15(300)=270), कुल $\lambda_C = \lambda_1 + \lambda_2 = 1.2 + 0.15 = 1.35$ है; अतः पतन भार $1.35(100) = 135$ है।

57.2.2.2 उदाहरण 57.7: आधारित बाहुधरन II



- यह स्थैतिकतः अनिर्धार्य संरचना है। पहली संधि कहाँ बनती है यह निर्धारित करने के लिए विश्लेषण करने के स्थान पर हम दो कल्पनाएँ करते हैं।
- पहले C और D पर संधियों के निर्माण पर विचार करें।

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} M^D & & & = & M_p \\ M^C & = & 86.6\lambda - \frac{2}{3}M^D & = & M_p \end{array} \right. \Rightarrow \lambda = \frac{M_p}{52}$$

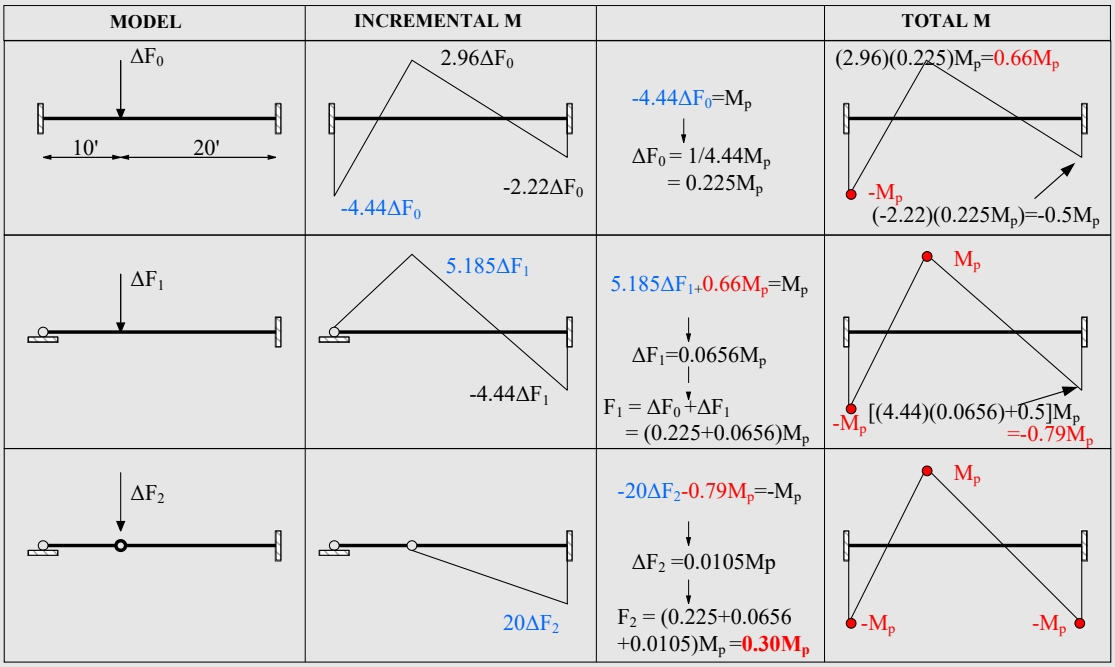
- दूसरी संभावना B और D पर संधियाँ हैं।

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} M^D & & & = & M_p \\ M^B & = & 73.4\lambda - \frac{1}{3}M^D & = & M_p \end{array} \right. \Rightarrow \lambda = \frac{M_p}{55}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- अतः दूसरी स्थिति नियंत्रक है।

57.2.2.3 उदाहरण 57.8: आबद्ध धरन



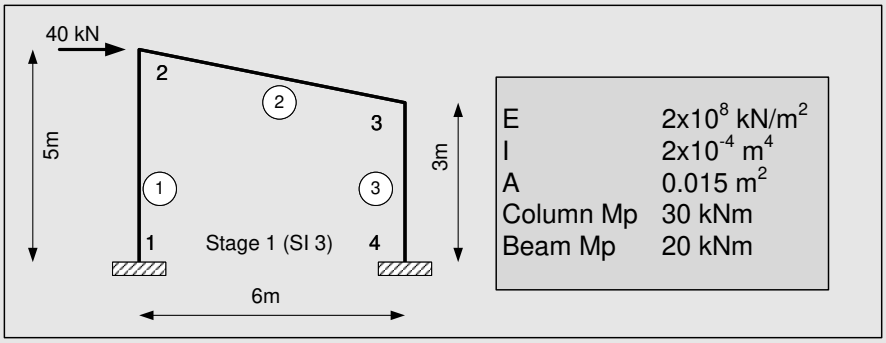
1. पहले मूल संरचना पर विचार करते हैं।
   (a) भार F_0 आरोपित करें और संगत आघूर्ण आरेख निर्धारित करें।
   (b) महत्तम आघूर्ण ($-4.44F_0$) पहचानें और उसे M_P के बराबर रखें। यही वह पहला बिंदु है जहाँ सुघट्य संधि बनेगी।
   (c) आघूर्ण आरेख को M_P के पदों में पुनः बनाएँ।
2. इसके बाद बाएँ आधार पर सुघट्य संधि वाली संरचना पर विचार करें।
   (a) वृद्धिशील भार ΔF_1 आरोपित करें।
   (b) ΔF_1 के पदों में संगत आघूर्ण आरेख बनाएँ।
   (c) महत्तम **कुल** आघूर्ण के बिंदु को भार के नीचे स्थित बिंदु मानते हुए $5.185\Delta F_1 + 0.666M_P$ को M_P के बराबर रखें।
   (d) ΔF_1 ज्ञात करें और कुल बाह्य आरोपित भार निर्धारित करें।
   (e) अद्यतन कुल आघूर्ण आरेख बनाएँ। अब दो सुघट्य संधियाँ हैं; पतन उत्पन्न करने वाली यंत्रावली के लिए अभी तीसरी संधि आवश्यक है।
3. अंततः दो सुघट्य संधियों वाली संशोधित संरचना का विश्लेषण करें।

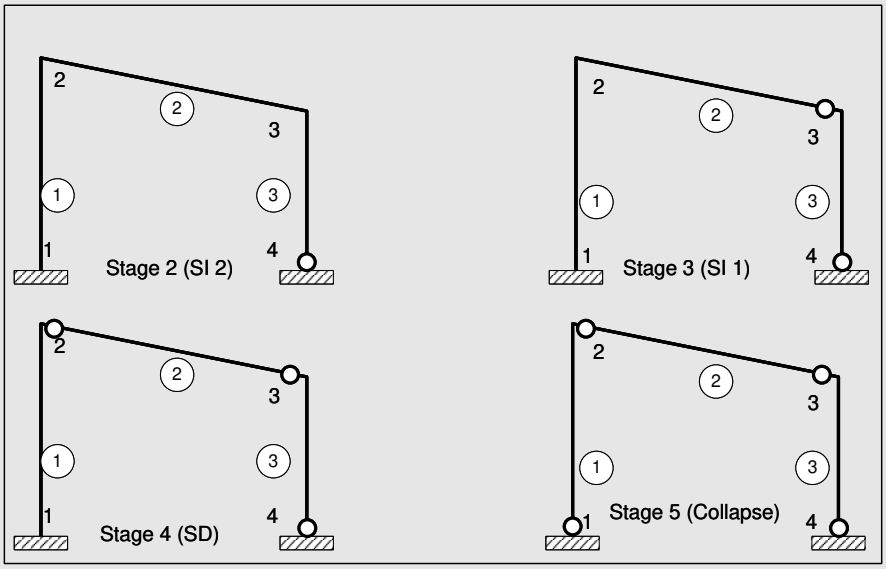
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(a) वृद्धिशील भार ΔF_2 आरोपित करें।
(b) ΔF_2 के पदों में संगत आघूर्ण आरेख बनाएँ।
(c) दाएँ नोड पर कुल आघूर्ण को M_P के बराबर रखें।
(d) ΔF_2 ज्ञात करें और कुल बाह्य भार निर्धारित करें। यह भार संरचना के विफलता भार के अनुरूप होगा।

57.2.2.4 उदाहरण 57.9: आनत ढाँचा

अब हम पूर्ववर्ती आनत ढाँचे का स्थैतिक निचली सीमा पद्धति से पुनर्विश्लेषण करना चाहते हैं।





विभिन्न चरणों पर विचार करना होगा। चरण 1 से 4 (पतन) तक, 1-2-3 क्रमशः तृतीय, द्वितीय और प्रथम कोटि तक स्थैतिकतः अनिर्धार्य हैं; चरण 4 स्थैतिकतः निर्धार्य है; और अंततः चरण 5 पतन यंत्रावली है। अतः पहले 3 विश्लेषण किसी सरल संगणक प्रोग्राम से और चौथा हस्त-गणना द्वारा करेंगे। M_p सुघट्य आघूर्ण है, M_i प्रत्येक संधि पर आघूर्ण है (आरंभिक मान एक के बराबर है), और M_0 प्रत्येक चरण के अंत में संरचनात्मक विश्लेषण से प्राप्त आघूर्ण है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चरण 1 विश्लेषण करें और α गुणांक निर्धारित करें:

अवयव 1:

$$\text{J1} \qquad M_0 = 27.21 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_1}{M_0} = \frac{30}{27.21} = 1.103$$

$$\text{J2} \qquad M_0 = -21.75 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-30}{-21.75} = 1.379$$

अवयव 2:

$$\text{J2} \qquad M_0 = -21.75 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-20}{-21.75} = 0.916$$

$$\text{J3} \qquad M_0 = 31.00 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_3}{M_0} = \frac{20}{31} = 0.645$$

अवयव 3:

$$\text{J3} \qquad M_0 = 31.00 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_3}{M_0} = \frac{30}{31} = 0.968$$

$$\text{J4} \qquad M_0 = -59.62 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_4}{M_0} = \frac{-30}{-59.62} = 0.503$$

स्तंभ के दाएँ निचले सिरे पर α न्यूनतम है; अतः पहली संधि दाएँ निचले सिरे पर ही बननी चाहिए। आघूर्णों को अद्यतन करें:

अवयव 1:

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 0.503 \times 27.21 = 13.69$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-21.75) = -10.94$$

अवयव 2:

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-21.75) = -10.94$$
$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 0.503 \times 31.00 = 15.59$$

अवयव 3:

$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 0.503 \times 31.00 = 15.59$$
$$M_4 = M_4 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-59.62) = -30$$

चरण 2 पुनः विश्लेषण करें और α गुणांक निर्धारित करें:

अवयव 1:

$$\text{J1} \qquad M_0 = 65.09 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_1}{M_0} = \frac{30 - 13.69}{65.09} = 0.251$$

$$\text{J2} \qquad M_0 = -47.24 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-30 + 10.94}{-47.24} = 0.403$$

अवयव 2

$$\text{J2} \quad M_0 = -47.24 \quad M_2 = -21.75 \quad \alpha = \frac{M_p - M_2}{M_0} = \frac{-20 + 10.94}{47.24} = 0.192$$

$$\text{J3} \quad M_0 = 52.61 \quad M_3 = 31.00 \quad \alpha = \frac{M_p - M_3}{M_0} = \frac{20 - 15.59}{52.61} = 0.083$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अवयव 3

$$\text{J3} \qquad M_0 = 52.61 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_3}{M_0} = \frac{30 - 15.59}{52.61} = 0.273$$

$$\text{J4} \qquad M_4 = 0$$

इस बार न्यूनतम α धरन के दाएँ सिरे के अनुरूप है। दूसरी संधि इसी स्थान पर बनेगी। आघूर्णों को अद्यतन करें: आघूर्णों का अद्यतन।

अवयव 1

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 13.69 + 0.083 \times 65.09 = 19.09$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = -10.94 + 0.083 \times (-47.24) = -14.86$$

अवयव 2

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = -10.94 + 0.083 \times (-47.24) = -14.86$$
$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 15.59 + 0.08 \times 52.61 = 20$$

अवयव 3

$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 15.59 + 0.083 \times 52.61 = 20$$
$$M_4 = M_4 = -30$$

चरण 3 विश्लेषण करें और α गुणांक निर्धारित करें:

अवयव 1

$$\text{J1} \qquad M_0 = 129.70 \qquad \alpha = \frac{M_p - M_1}{M_0} = \frac{30 - 19.09}{129.70} = 0.084$$

$$\text{J2} \qquad M_0 = -70.31 \qquad \alpha = \frac{M_p - M_2}{M_0} = \frac{-30 + 14.86}{-70.31} = 0.215$$

अवयव 2

$$\text{J 2} \qquad M_0 = -70.31; \mathrm{M}_2 = -70.31 \qquad \alpha = \frac{M_\rho - M_2}{M_0} = \frac{-20 + 14.86}{-70.31} = 0.073$$

आघूर्णों को अद्यतन करें।

अवयव 1

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 19.09 + 0.073 \times 129.70 = 28.56$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = -14.86 + 0.073 \times (-70.31) = -20$$

अवयव 2

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = -14.86 + 0.073 \times (-70.31) = -20$$
$$M_3 = M_3 = 20$$

अवयव 3

$$M_3 = M_3 = 20$$
$$M_4 = M_4 = -30$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चरण 4 संधि बाएँ स्तंभ के निचले सिरे पर बननी चाहिए।

अवयव 1

$$\mathrm{J1}M_0 = 40 \times 5 = 200 \qquad \alpha = \frac{M_p - M_1}{M_0} = \frac{30 - 28.56}{200} = 0.007$$

अंततः

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ &= 0.503 + 0.083 + 0.073 + 0.007 = 0.666\end{aligned}$$

अतः पतन भार होगा:

$$F_{cr} = \alpha F = 0.666 \times 40 = 26.64\mathrm{KN}$$

इन विश्लेषणों के परिणाम निम्न तालिका में सर्वोत्तम रूप से दर्शाए गए हैं।

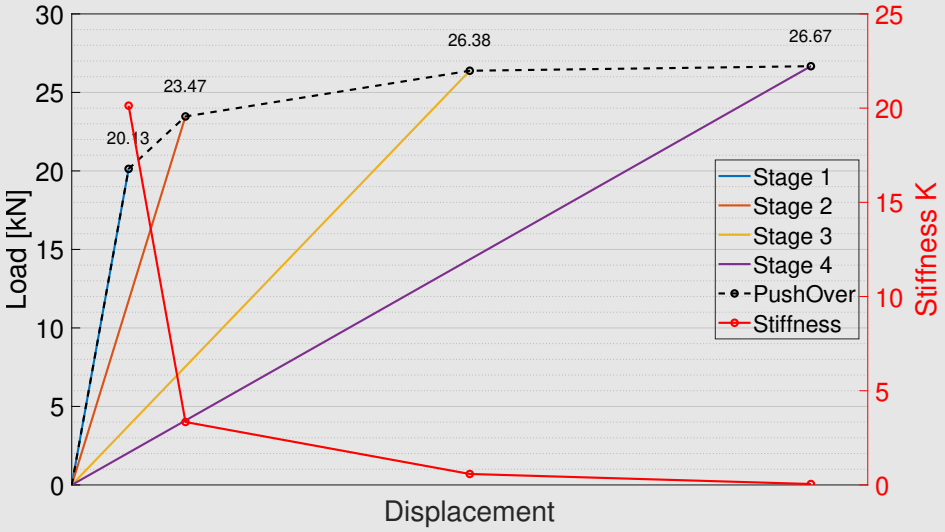
Member	Joint	Moment M_0 (kNm)	Moment M_i (kNm)	Residual Plastic Moment M_p-M_i (kNm)	Load Factor $\alpha=(M_p-M_i)/M_0$	Critical Load Factor α_{cr}	Cumulative Load Factor α_{cum}	Cumulative Moment $M_{j+1}=M_j+\alpha_{cr}M_0$ $=\alpha_{cum}M_0$ (kNm)	Plastic Moment M_p (kNm)	Critical Load $P_{cr}=P*\alpha_{cr}$ (kN)
Stage 1										
1	1	27.21	0.00	30.00	1.10	0.50	0.50	13.69	30	20.13
	2	-21.75	0.00	-30.00	1.38			-10.94	-30	
2	2	-21.75	0.00	-20.00	0.92			-10.94	-20	
	3	31.00	0.00	20.00	0.65			15.60	20	
3	3	31.00	0.00	30.00	0.97			15.60	30	
	4	-59.62	0.00	-30.00	0.50			-30.00	-30	
Stage 2										
1	1	65.09	13.69	16.31	0.25	0.08	0.59	19.14	30	23.47
	2	-47.24	-10.94	-19.06	0.40			-14.90	-30	
2	2	-47.24	-10.94	-9.06	0.19			-14.90	-20	
	3	52.61	15.60	4.40	0.08			20.00	20	
3	3	52.61	15.60	14.40	0.27			20.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
Stage 3										
1	1	129.70	19.14	10.86	0.08	0.07	0.66	28.55	30	26.38
	2	-70.31	-14.90	-15.10	0.21			-20.00	-30	
2	2	-70.31	-14.90	-5.10	0.07			-20.00	-20	
	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	20	
3	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
Stage 4										
1	1	200.00	28.55	1.45	0.01	0.01	0.67	30.00	30	**26.67**
	2	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
2	2	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-20	
	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	20	
3	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	

अतः $P_{crit} = 26.67$ kN। M_p सुघट्य आघूर्ण है, M_i प्रत्येक नोड पर आघूर्ण है, और M_0 प्रत्येक चरण में प्रत्येक अवयव के प्रत्येक नोड पर आघूर्ण है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

टिप्पणी

यद्यपि प्रत्येक चरण के विस्थापन निर्धारित किए जा सकते थे, उन्हें प्रस्तुत नहीं किया गया है। यदि उन्हें प्रस्तुत किया जाता, तो निम्न के समान आलेख प्राप्त होता:



हम देखते हैं कि भार बढने के साथ सुघट्य संधियों की संख्या बढती है; अतः विफलता पर दृढता घटकर शून्य हो जाती है।

57.3 समतलीय अवयव (पट्टिकाएँ)

28 ACI संहिता: पट्टिका का अभिकल्प रैखिक प्रत्यास्थ सातत्य पर आधारित शास्त्रीय समाधानों, विविक्त अवयवों पर आधारित संख्यात्मक समाधानों, अथवा पराभव-रेखा विश्लेषणों के संयुक्त उपयोग से किया जा सकता है।

29 *पराभव-रेखा सिद्धांत* (YLT) चरम सीमा-अवस्था पर विफलता यंत्रावलियों का अध्ययन करता है। यह सरल है, किंतु इसके लिए विफलता प्रतिरूपों से परिचित होना आवश्यक है (अर्थात पट्टिकाएँ किस प्रकार विफल हो सकती हैं, इसका ज्ञान)।

30 जब पट्टिका पतन के कगार पर होती है (यंत्रावली बनाने के लिए वास्तविक अथवा सुघट्य संधियों की पर्याप्त संख्या), तब घूर्णन-अक्ष आधार-रेखाओं के अनुदिश अथवा स्तंभों जैसे बिंदु-आधारों के ऊपर स्थित होते हैं। पट्टिका खंडों को इन घूर्णन-अक्षों के परितः अंतरिक्ष में दृढ पिंडों के समान घूमता माना जा सकता है।

31 YL के दो प्रकार हैं: धनात्मक (नीचे दरार) और ऋणात्मक (ऊपर दरार)।

32 YL प्रतिरूप स्थापित करने के दिशानिर्देश:

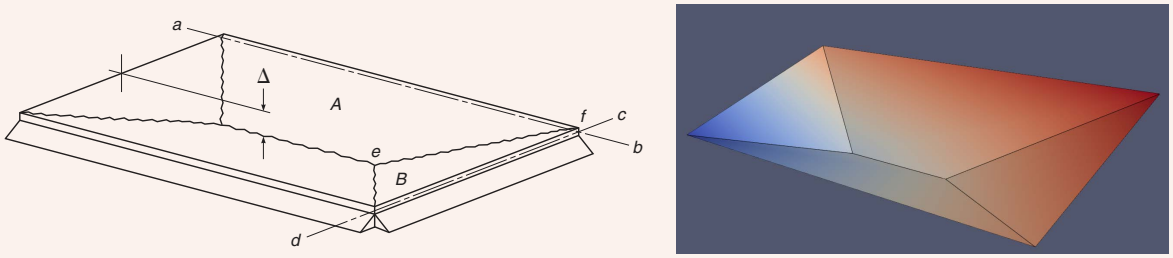
1. YL सरल रेखाएँ होती हैं (दो तलों की प्रतिच्छेदन रेखाएँ)।
2. YL घूर्णन-अक्ष होती हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

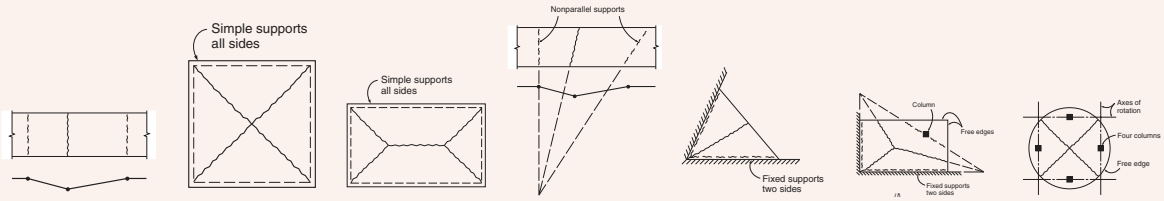
3. पट्टिका के आधारित किनारे भी घूर्णन-अक्ष स्थापित करते हैं। यदि आबद्ध हो: ऋणात्मक YL; यदि मुक्त हो: कोई अवरोध नहीं।
4. सातत्यपूर्ण आधार धनात्मक अथवा अधोवलित YL को प्रतिकर्षित करते हैं और सरल आधार उन्हें आकर्षित करते हैं।
5. घूर्णन-अक्ष प्रत्येक स्तंभ-आधार के ऊपर से गुजरता है। उसका अभिविन्यास अन्य विचारों पर निर्भर करता है।
6. संकेंद्रित भारों के नीचे YL बाहर की ओर विकीर्ण होते हुए बनती हैं।
7. दो पट्टिका खंडों के बीच की YL को संलग्न पट्टिका खंडों के घूर्णन-अक्षों के प्रतिच्छेदन-बिंदु से होकर गुजरना चाहिए।

33 उदाहरणार्थ, चारों ओर सरलतः आधारित आयताकार पट्टिका, चित्र 57.1a, में खंड A और B क्रमशः ab और cd के परितः घूमेंगे।

34 YL प्रतिरूपों की जाँच का उद्देश्य वह एक प्रतिरूप खोजना है जो न्यूनतम भार क्षमता देता है।



(a) आयताकार



(b) अन्य

चित्र 57.1: पट्टिकाओं में पराभव रेखाएँ

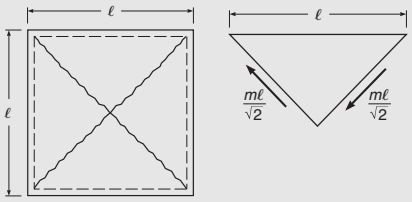
57.3.1 स्थैतिकी: निचली सीमा

35 पट्टिकाओं के लिए निचली सीमा पद्धति का उपयोग दुष्कर है, किंतु असंभव नहीं। निम्न एक सरल उदाहरण है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

57.3.1.1 उदाहरण 57.10: वर्गाकार पट्टिका

एक वर्गाकार पट्टिका चारों ओर सरलतः आधारित है और समदैशिक रूप से प्रबलित है। प्रति रैखिक फुट सुघट्य आघूर्ण m_P दिया है; एकसमान w_{ult} निर्धारित करें। ध्यान दें कि पट्टिका विश्लेषण के लिए इस विधि का उपयोग विरल ही किया जाता है। सममिति के कारण YL प्रतिरूप दर्शाए अनुसार है। चार पट्टिका खंडों में से किसी एक का उसके आधार के परितः आघूर्ण-साम्य लेने पर:



$$M_{ext} = w \underbrace{\frac{l^2}{4}}_{\text{area}} \underbrace{\frac{L}{6}}_{\text{moment arm}}$$

$$M_{int} = 2 \underbrace{\frac{m_p l}{\sqrt{2}}}_{\text{moment}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{Hor. component}}$$

$$M_{ext} = M_{int} \Rightarrow w_{ult} = \frac{24 m_p}{l^2}$$

57.3.2 शुद्धगतिकी: ऊपरी सीमा

36 पहले पट्टिकाओं की पराभव रेखाओं के संदर्भ में कार्य को परिभाषित करें:

बाह्य कार्य

$$W_{ext} = \sigma(N_i \delta_i)$$

जहाँ N परिणामी बल और δ संगत ऊर्ध्वाधर विस्थापन है। बाह्य कार्य का निर्धारण सुगम बनाने के लिए पट्टिका को विभिन्न अवयवों में विभाजित करना, चित्र 57.2, और केंद्र पर इकाई $\delta = 1$ के संगत विस्थापन निर्धारित करना वांछनीय हो सकता है।

आंतरिक कार्य:

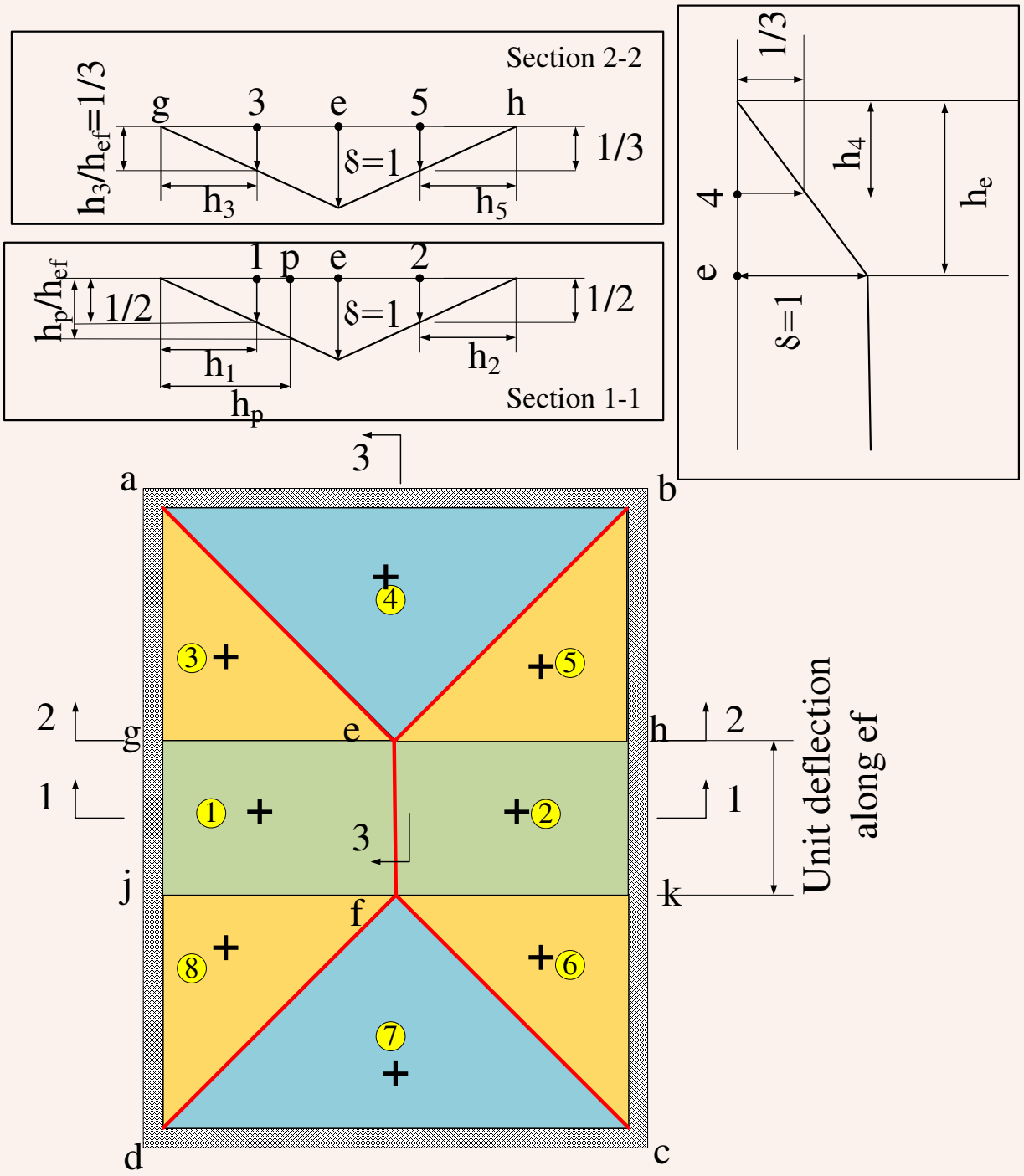
$$W_{int} = \sum ml\theta$$

जहाँ m पट्टिका में प्रति मीटर विस्तार आंतरिक आघूर्ण है, l YL की लंबाई अथवा संगत क्षेत्र के घूर्णन-अक्ष पर उसकी प्रक्षेपित लंबाई है, और θ उस क्षेत्र का अपने अक्ष के परितः घूर्णन है।

37 इसकी प्रक्रिया धरनों के लिए प्रयुक्त प्रक्रिया के समान है: ऊर्जा संरक्षण।

ध्यान दें कि इस खंड में प्लवमान अवयव (चित्र और/अथवा सारणियाँ) हैं जिन्हें अगले खंड से पहले मुद्रित करना आवश्यक है। परिणामस्वरूप यहाँ रिक्त स्थान अथवा अंतराल दिखाई दे सकते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

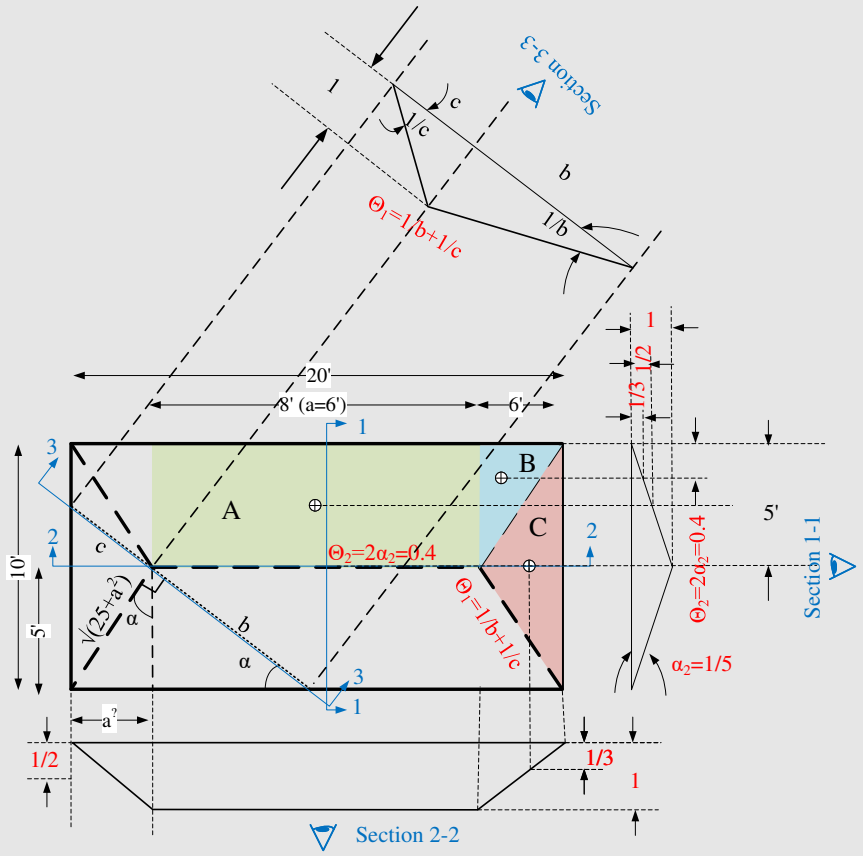


चित्र 57.2: आयताकार पट्टिकाओं में पराभव रेखाओं का निर्धारण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

57.3.2.1 उदाहरण 57.11: आयताकार पट्टिका

निम्न द्विविदश पट्टिका चारों ओर सरलतः आधारित है और एकसमान भार w वहन करती है। हमें पट्टिका का आवश्यक प्रतिरोध निर्धारित करना है।



- धनात्मक YL दर्शाए अनुसार बनती हैं; विमा a अज्ञात है।
- ज्यामिति से: विकर्ण की लंबाई $=\sqrt{25+a^2}$, और समरूप त्रिभुजों से

$$\frac{b}{5}=\frac{\sqrt{25+a^2}}{a}\Rightarrow b=5\frac{\sqrt{25+a^2}}{a}$$
$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{25+a^2}}{5}\Rightarrow c=a\frac{\sqrt{25+a^2}}{5}$$

- इकाई विक्षेप के संगत, विकर्ण YL पर सुघट्य संधि का घूर्णन है:

$$\theta_1=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a}{5\sqrt{25+a^2}}+\frac{5}{a\sqrt{25+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{25+a^2}}\left(\frac{a}{5}+\frac{5}{a}\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- पट्टिका के लंबे किनारों के समांतर पराभव रेखा का घूर्णन:

$$\theta_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0.40$$

- $a = 6$ ft मानें; तब विकर्ण YL की लंबाई $\sqrt{25+36} = 7.81$ ft है।
- विकर्ण YL का संगत घूर्णन है:

$$\theta_1 = \frac{1}{7.81}\left(\frac{6}{5} + \frac{5}{6}\right) = 0.261$$

- केंद्रीय YL पर घूर्णन-कोण: $\theta_2 = 0.4$।
- आंतरिक कार्य है:

$$W_{int} = 4(m_p \times 7.81 \times 0.261) + (m_p \times (20 - 6 - 6) \times 0.4) = 11.36 m_p$$

- बाह्य कार्य है:

$$W_{ext} = \underbrace{2\left(10 \times 6 \times \frac{1}{2}w \times \frac{1}{3}\right)}_{\text{A}} + + \underbrace{4\left(6 \times 5 \times \frac{1}{2}w \times \frac{1}{3}\right)}_{\text{B}} + \underbrace{2\left(8 \times 5w \times \frac{1}{2}\right)}_{\text{C}} = 80w$$

- $W_{int} = W_{ext}$ रखने पर $w_{ult} = \frac{11.36 M_P}{80} = 0.14 m_P$ प्राप्त होता है।

क्रमिक परीक्षण

a	W_{int}	W_{ext}	w_{ult}	
6.0	11.36 m_P	80.0 w	0.142 m_P	
6.5	11.08 m_P	78.4 w	0.141 m_P	नियंत्रक
7.0	10.87 m_P	76.6 w	0.142 m_P	
7.5	10.69 m_P	75.0 w	0.143 m_P	

- ध्यान दें कि यदि इसके स्थान पर इकाई-चौड़ाई की पट्टी पर विचार किया जाता, तो

$$m_p = \frac{w_{ult} L^2}{8} \Rightarrow w_{ult} = \frac{8 m_p}{L^2} = \frac{8 m_p}{10^2} = 0.08 m_p$$

$0.141 m_p$ के स्थान पर यह मान प्राप्त होता।

57.4 पुशओवर विश्लेषण

[38] पुशओवर विश्लेषण एक अरैखिक स्थैतिक प्रक्रिया है, जिसका सामान्यतः भूकंपीय अभिकल्प में उपयोग किया जाता है।

[39] यहाँ इसका संक्षिप्त परिचय (अधिक विस्तृत विवेचन अध्याय 69.4.1 में) निचली सीमा विश्लेषण के

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

साथ इसकी समानता को रेखांकित करने के लिए दिया गया है; इस समानता पर अगले अनुभाग में चर्चा होगी।

40 पुशओवर विश्लेषण भूकंप-सदृश परिस्थितियों में संरचना की प्रतिक्रिया का अनुकरण करने के लिए क्रमशः बढते पार्श्व भार लगाता है:

- **वृद्धिशील भारण**: पुशओवर विश्लेषण में भारों को तब तक वृद्धिशील रूप से आरोपित किया जाता है जब तक संरचना विफलता यंत्रावली विकसित कर अपनी चरम क्षमता तक नहीं पहुँचती। भार-वितरण सामान्यतः भूकंप में प्रत्याशित पार्श्व बलों को निरूपित करता है।
- **क्रमिक अप्रत्यास्थ व्यवहार**: भार बढने पर संरचना महत्त्वपूर्ण बिंदुओं (सुघट्य संधियों) पर पराभव आरंभ करती है। इसे भार–विस्थापन वक्र द्वारा अभिलेखित किया जाता है, जो प्रत्यास्थ सीमा तक और उसके आगे संरचनात्मक प्रतिक्रिया को निरूपित करता है।
- **यंत्रावली का निर्माण**: पुशओवर विश्लेषण पतन यंत्रावलियों की पहचान करता है, जिससे गंभीर भारण में संरचना के विरूपण, दुर्बल बिंदुओं और समग्र तन्यता की जानकारी मिलती है।
- **अरैखिक सामग्री व्यवहार**: यह विश्लेषण अरैखिक, अप्रत्यास्थ विरूपण को अभिलेखित करता है, जो प्रत्यास्थोत्तर व्यवहार और विफलता प्रतिरूपों को दर्शाने के कारण भूकंपीय अभिकल्प में महत्त्वपूर्ण है।

57.5 निचली सीमा विश्लेषण और

57.5.1 पुशओवर विश्लेषण के बीच अनुरूपताएँ

41 संरचनात्मक अभियांत्रिकी में निचली सीमा विश्लेषण और पुशओवर विश्लेषण के बीच प्रबल अनुरूपताएँ हैं, चित्र 57.3।

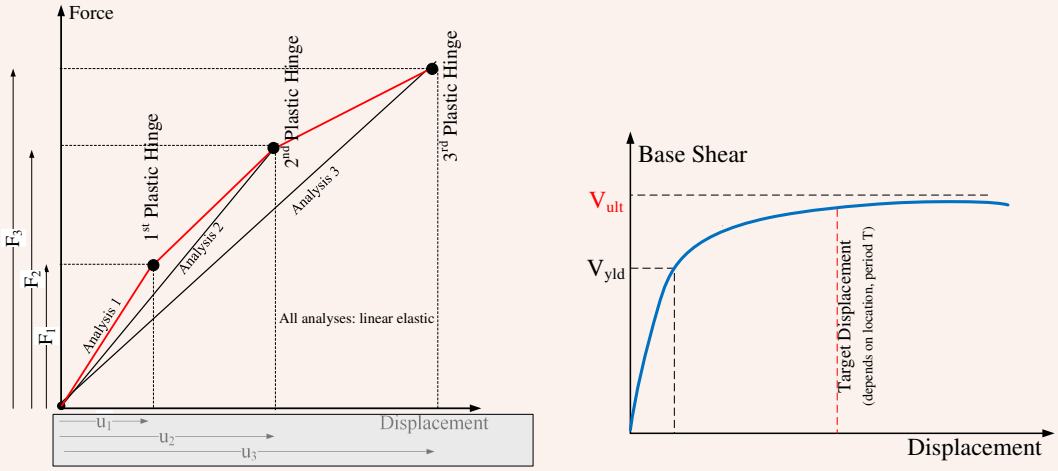
42 यद्यपि दोनों विधियों का उद्देश्य संरचना की भार-वहन क्षमता निर्धारित करना है, उनकी कार्यपद्धति और अनुप्रयोग-संदर्भ भिन्न हैं।

निचली सीमा और पुशओवर विश्लेषण के बीच प्रमुख समानताएँ

43 भिन्न प्रकार से लागू किए जाने पर भी दोनों विश्लेषण निम्न मूलभूत समानताएँ रखते हैं:

- **चरम भार क्षमता का निर्धारण**: दोनों का उद्देश्य चरम भार क्षमता निर्धारित करना है; किंतु निचली सीमा विश्लेषण रूढिवादी आकलन देता है, जबकि पुशओवर विश्लेषण यथार्थवादी आकलन देता है।
- **चरम भारण में संरचनात्मक सुरक्षा पर ध्यान**: दोनों विधियाँ भिन्न भार-प्रकारों के साथ चरम दशाओं में भार क्षमता का मूल्यांकन करती हैं। निचली सीमा विश्लेषण स्थैतिक भारों के लिए उपयुक्त है, जबकि पुशओवर विश्लेषण सामान्यतः पार्श्व भूकंपीय भारों के लिए प्रयुक्त होता है।
- **अप्रत्यास्थ सामग्री व्यवहार**: दोनों विधियों में सुघट्यता सिद्धांत सम्मिलित है; निचली सीमा

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप



(a) निचली सीमा विश्लेषण (b) पुशओवर

चित्र 57.3: स्थैतिक निचली सीमा समाधान *बनाम* पुशओवर विश्लेषण

विश्लेषण साम्य और पराभव पर केंद्रित होता है, जबकि पुशओवर विश्लेषण सुघट्य संधियों के क्रमिक निर्माण का अवलोकन करता है।

निचली सीमा और पुशओवर विश्लेषण के बीच प्रमुख भिन्नताएँ

44 दोनों विधियों के बीच महत्त्वपूर्ण भिन्नताएँ हैं:

- **साम्य और यंत्रावलियों के प्रति पद्धति**: निचली सीमा विश्लेषण पतन यंत्रावली की आवश्यकता के बिना सुरक्षित बल-वितरण द्वारा साम्य सुनिश्चित करता है। पुशओवर विश्लेषण में भार बढ़ने के साथ यंत्रावली-निर्माण देखने के लिए क्रमिक भारण किया जाता है।
- **अनुप्रयोग-संदर्भ**: निचली सीमा विश्लेषण सामान्यतः सुघट्य अभिकल्प में स्थैतिक भारों के लिए प्रयुक्त होता है, जबकि पुशओवर विश्लेषण भूकंपीय अभिकल्प में पार्श्व भारों का अनुकरण करता है।
- **अरैखिक विरूपण पर विचार**: पुशओवर विश्लेषण स्पष्टतः अप्रत्यास्थ विरूपणों को सम्मिलित

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करता है और भार–विस्थापन वक्र देता है, जबकि निचली सीमा विश्लेषण विरूपण का प्रतिरूपण किए बिना केवल पराभव और साम्य सुनिश्चित करता है।

- **पतन यंत्रावली का दृश्यांकन**: पुशओवर विश्लेषण पतन यंत्रावलियों और दुर्बल बिंदुओं का दृश्यांकन संभव बनाता है, जो भूकंपीय निष्पादन मूल्यांकन के लिए आवश्यक है; इसके विपरीत निचली सीमा विश्लेषण पतन का प्रतिरूपण नहीं करता।
- **भारण की प्रकृति और अनुप्रयोग**: निचली सीमा विश्लेषण वृद्धिशील प्रगति के बिना स्थैतिक भार लगाता है। इसके विपरीत पुशओवर विश्लेषण पतन तक पार्श्व भार को क्रमशः बढ़ाता है, जिससे यह गतिक भारण-संदर्भों के लिए उपयुक्त होता है।

45 सारांशतः:

- **निचली सीमा विश्लेषण**: साम्य और पराभव प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाला बल-वितरण खोजकर भार क्षमता का रूढ़िवादी आकलन देता है। इसमें पतन यंत्रावली अथवा अरैखिक विरूपण विश्लेषण की आवश्यकता नहीं होती और यह केवल सुरक्षित भार-वितरण पर केंद्रित रहता है।
- **पुशओवर विश्लेषण**: पतन यंत्रावली बनने तक वृद्धिशील पार्श्व भारण द्वारा चरम भार का यथार्थवादी आकलन देता है। यह अरैखिक, अप्रत्यास्थ विरूपण को अभिलेखित करता और संरचनात्मक विफलता प्रतिरूपों को दर्शाता है; अतः भूकंपीय अभिकल्प में विशेषतः उपयोगी है।

46 मूलतः दोनों विश्लेषण, तालिका 57.2, भार क्षमता के मूल्यांकन के लिए सुघट्यता सिद्धांत के नियमों का उपयोग करते हैं; किंतु उनकी भिन्नताएँ पृथक कार्यपद्धतियों और अनुप्रयोगों को दर्शाती हैं: निचली सीमा विश्लेषण साम्य-केंद्रित और रूढ़िवादी है, जबकि पुशओवर विश्लेषण विरूपण-केंद्रित और यथार्थवादी है तथा क्रमिक भारण में पतन यंत्रावलियों पर बल देता है।

प्रति अभिप्राय

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 57.2: निचली सीमा विश्लेषण और पुशओवर विश्लेषण की तुलना

पक्ष	निचली सीमा विश्लेषण	पुशओवर विश्लेषण
उद्देश्य	साम्य और पराभव की संतुष्टि सुनिश्चित कर चरम भार क्षमता का रूढ़िवादी आकलन देता है।	विफलता यंत्रावली बनने तक पार्श्व भारों को वृद्धिशील रूप से लगाकर चरम भार का यथार्थवादी आकलन देता है।
साम्य की आवश्यकता	पतन यंत्रावली की आवश्यकता के बिना साम्य और पराभव दोनों प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाला बल-वितरण खोजता है।	पतन यंत्रावली बनने तक सुघट्य संधियों के क्रमिक निर्माण का अवलोकन करता है।
अनुप्रयोग-संदर्भ	सामान्यतः स्थैतिक भारों के सुघट्य अभिकल्प में, विशेषतः इस्पात और कंक्रीट संरचनाओं के लिए प्रयुक्त।	मुख्यतः भूकंपीय अभिकल्प में, भूकंप-प्रभावों के अनुकरण हेतु पार्श्व भार लगाते हुए प्रयुक्त।
सामग्री व्यवहार	पराभव प्रतिबंधों द्वारा अप्रत्यास्थ सामग्री व्यवहार पर विचार करता है, किंतु अरैखिक विरूपण का स्पष्ट प्रतिरूपण नहीं करता।	अरैखिक, अप्रत्यास्थ विरूपण अभिलेखित कर प्रत्यास्थोत्तर व्यवहार के मूल्यांकन हेतु भार–विस्थापन वक्र देता है।
यंत्रावली दृश्यांकन	केवल साम्य प्राप्त करने पर केंद्रित होने से पतन यंत्रावलियों अथवा विस्थापन प्रतिरूपों का दृश्यांकन नहीं करता।	पतन यंत्रावलियों का दृश्यांकन कर बढ़ते भारों में दुर्बल बिंदु और समग्र तन्यता पहचानने में सहायता देता है।
भारण की प्रकृति	वृद्धिशील प्रगति के बिना स्थैतिक भार का अनुप्रयोग; एकल सुरक्षित भार-स्तर निर्धारित करता है।	भूकंप-जनित बलों का अनुकरण करने के लिए वृद्धिशील पार्श्व भार, जो पतन होने तक बढ़ता है।
निर्गम	विरूपण व्यवहार का विवरण दिए बिना साम्य और पराभव प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाला सुरक्षित भार-स्तर।	सुघट्य संधि-निर्माण और चरम क्षमता सहित संरचना की क्रमिक प्रतिक्रिया दर्शाने वाला भार–विस्थापन वक्र।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

57.5.2 संहत सुघट्यता

47 अंततः संहत सुघट्यता (§62.3) के साथ अनुरूपता उल्लेखनीय है। वास्तव में, संहत सुघट्यता प्रतिरूप को निचली सीमा प्रमेय का सरलीकृत निरूपण माना जा सकता है। इस प्रतिरूप में सुघट्य विरूपण विविक्त सुघट्य क्षेत्रों अथवा संधियों में संकेंद्रित होता है, जिन्हें सुघट्य विरूपण की यंत्रावलियाँ माना जा सकता है। इन क्षेत्रों में पूर्ण सुघट्यता की कल्पना करके प्रतिरूप सुघट्य यंत्रावलियों के निर्माण से संबद्ध भार को अभिलेखित करने पर केंद्रित रहता है।

48 संहत सुघट्यता प्रतिरूप (§62.3) और निचली सीमा पराभव-रेखा सिद्धांत, यद्यपि संरचनात्मक विश्लेषण के भिन्न पक्षों के लिए विकसित किए गए हैं, सुघटीकरण और पराभव के निरूपण में गहन संकल्पनात्मक अनुरूपता रखते हैं।

49 दोनों प्रतिरूपों में यह कल्पना की जाती है कि पराभव अथवा सुघटीकरण अत्यधिक स्थानिक है और विरूपण तथा ऊर्जा अपव्यय को संरचना के विशिष्ट, परिबद्ध क्षेत्रों में केंद्रित करता है। यह पद्धति चरम संरचनात्मक व्यवहार के मूल्यांकन हेतु सरल किंतु प्रभावी प्रतिरूपों में विशेषतः उपयोगी है।

संहत सुघट्यता प्रतिरूप: सुघट्य संधि-निर्माण का संकेंद्रण

50 संहत सुघट्यता प्रतिरूप में समस्त सुघटीकरण को सुघट्य संधि कहलाने वाले विविक्त स्थानों पर घटित माना जाता है, जो सामान्यतः अधिकतम बंकन आघूर्णों के बिंदु होते हैं।

51 इस पद्धति में संरचना के शेष भाग में प्रत्यास्थ व्यवहार बने रहने की कल्पना की जाती है, जिससे पराभवोत्तर व्यवहार का सरलीकृत विश्लेषण संभव होता है।

52 सुघट्य संधि का निर्माण दर्शाता है कि अवयव उस स्थान पर अपनी आघूर्ण क्षमता तक पहुँच गया है; अतः अप्रत्यास्थ विरूपण इन संधियों में स्थानिक हो जाता है। भार बढ़ने पर संरचना में अतिरिक्त सुघट्य संधियाँ तब तक बनती हैं जब तक यंत्रावली उत्पन्न नहीं हो जाती, जिससे पतन भार का पूर्वानुमान संभव होता है।

53 सुघटीकरण का यह स्थानिकीकरण संगणकीय जटिलता घटाता और विश्लेषण को महत्त्वपूर्ण परिच्छेदों पर केंद्रित करता है; अतः संपूर्ण संरचना के विस्तृत अरैखिक विश्लेषण के बिना उसकी चरम भार-वहन क्षमता के मूल्यांकन में यह उपयोगी पद्धति है।

निचली सीमा पराभव-रेखा सिद्धांत: पराभव रेखाओं का स्थानिकीकरण

54 निचली सीमा पराभव-रेखा सिद्धांत भी पराभव को विविक्त रेखाओं अथवा क्षेत्रों—पराभव रेखाओं—पर केंद्रित करता है, जहाँ पट्टिका में सुघट्य विरूपण होने की कल्पना की जाती है।

55 यह सिद्धांत इस आधार पर कार्य करता है कि पतन संभव करने और यंत्रावली बनाने के लिए पराभव रेखाएँ न्यूनतम कार्य के पथों के अनुदिश बनती हैं।

56 पराभव-रेखा सिद्धांत पतन भार के आकलन के लिए आभासी कार्य के सिद्धांत का उपयोग करता है और मानता है कि सुघट्य विरूपण इन रेखाओं तक सीमित हैं जबकि शेष पट्टिका दृढ रहती है।

57 संहत सुघट्यता प्रतिरूप की भाँति पराभव-रेखा सिद्धांत भी सुघट्यता के स्थानिकीकरण से जटिलता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
समीक्षाधीन प्रारूप

घटाता है। इससे अभियंता संपूर्ण पृष्ठ पर विस्तृत सुघट्यता विश्लेषण की अपेक्षा अपेक्षाकृत सरल गणनाओं द्वारा पट्टिकाओं और प्लेटों के चरम भार का सन्निकटन कर सकते हैं।

संकल्पनात्मक अनुरूपता: अप्रत्यास्थ व्यवहार का स्थानिकीकरण

58 दोनों प्रतिरूप इस विचार का उपयोग करते हैं कि अप्रत्यास्थ व्यवहार को विशिष्ट क्षेत्रों तक सीमित किया जा सकता है; इससे पूर्ण-स्तरीय सुघट्यता विश्लेषण की आवश्यकता घटती और पतन यंत्रावलियों का पूर्वानुमान सरल होता है।

59 संहत सुघट्यता प्रतिरूप सुघटीकरण को सुघट्य संधियों पर स्थानिक करता है, जबकि पराभव-रेखा सिद्धांत पराभव को रेखाओं के अनुदिश स्थानिक करता है। इन स्थानिक बिंदुओं अथवा रेखाओं पर विरूपण को संकेंद्रित कर दोनों पद्धतियाँ संरचना की क्षमता का निचली सीमा आकलन संभव बनाती हैं और जटिल संरचनात्मक तंत्रों का विश्लेषण अधिक सुगम करती हैं।

60 तालिका 57.3 दोनों पद्धतियों के बीच अनुरूपताएँ दर्शाती है।

प्रारूप

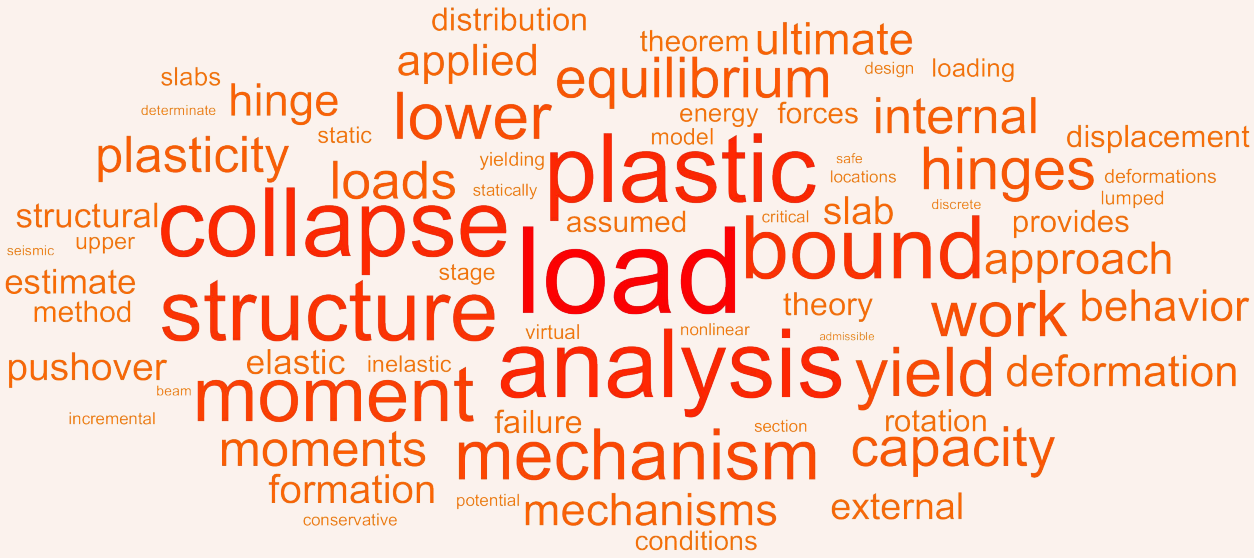
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 57.3: संहत सुघट्यता और निचली सीमा विश्लेषण

पक्ष	संहत सुघट्यता प्रतिरूप	निचली सीमा पराभव-रेखा सिद्धांत
संरचना का प्रकार	ढाँचे, धरन और समान रैखिक अवयव	प्लेटें और पट्टिकाएँ
अप्रत्यास्थ व्यवहार का स्थानिकीकरण	सुघट्य संधियों (विविक्त बिंदुओं) पर	पराभव रेखाओं (विविक्त रेखाओं) के अनुदिश
स्थानिक क्षेत्र के बाहर व्यवहार	प्रत्यास्थ बने रहने की कल्पना	दृढ बने रहने की कल्पना
पतन यंत्रावली	यंत्रावली बनने तक अनेक सुघट्य संधियों का निर्माण	पतन यंत्रावली उत्पन्न करने वाली पराभव रेखाओं का निर्माण
विश्लेषण पद्धति	उन महत्त्वपूर्ण परिच्छेदों पर केंद्रित होकर सरलीकरण जहाँ सुघट्य संधियाँ बनती हैं	पराभव रेखाओं के अनुदिश पराभव की कल्पना द्वारा सरलीकरण
चरम भार का पूर्वानुमान	अधिकतम आघूर्णों पर स्थानिक सुघट्य संधियों द्वारा	न्यूनतम कार्य के पथ दर्शाने वाली पराभव रेखाओं द्वारा
निचली सीमा सिद्धांतों का उपयोग	पतन भार का निचली सीमा आकलन देता है	पतन भार का निचली सीमा आकलन देता है
प्रमुख अनुप्रयोग	ढाँचों की चरम भार-वहन क्षमता का विश्लेषण	पट्टिकाओं और प्लेटों की चरम भार-वहन क्षमता का विश्लेषण

प्रति प्रकाशन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप सामग्री

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

58 क्षति यांत्रिकी

यह अध्याय बाद में क्षति यांत्रिकी के किसी प्रतिष्ठित विशेषज्ञ द्वारा लिखा जाएगा।

58.1 ChatGPT द्वारा प्रस्तावित रूपरेखा

58.1.1 अभिप्रेरणा और भौतिक आधार (~1.5 pages)

प्रायोगिक चित्र से आरंभ करें: अर्ध-भंगुर सामग्रियों में सूक्ष्म-दरारों को प्रमुख अवनयन यंत्रावली के रूप में प्रस्तुत करें और क्षति को सुघट्यता से पृथक पहचानने की आवश्यकता स्पष्ट करें। एक अथवा दो प्रतीकात्मक प्रायोगिक वक्र (कंक्रीट का एकाक्षीय तनाव और संपीडन) सिद्धांत को तत्काल प्रेरणा से जोड़ देंगे।

58.2 ऊष्मागतिकीय संरूपण (~2 pages)

क्लॉसियस–डुहेम असमिका, क्षति चर D (आरंभ में अदिश), प्रभावी प्रतिबल $\tilde{\sigma} = \sigma/(1-D)$, और क्षतिग्रस्त सामग्री की प्रत्यास्थ विकृति ऊर्जा। यह संरूपण स्थापित करता है कि क्षति यांत्रिकी कोई तदर्थ रचना नहीं, बल्कि सुघट्यता के समान ऊष्मागतिकीय औपचारिकता का अंग है—जो सुघट्यता से पहले ही परिचित पाठकों के लिए आवश्यक है।

58.3 अदिश समदैशिक क्षति: मज़ार्स प्रतिरूप (~4 pages)

यह अध्याय का केंद्रीय भाग है। तुल्य विकृति $\tilde{\varepsilon}$, क्षति मानदंड $f(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa \le 0$, और द्वि-शाखीय विकास नियम (D_t, D_c, जिन्हें α_t और α_c द्वारा संयोजित किया जाता है)। मानक परीक्षणों से प्राचल-अभिज्ञान। एकाक्षीय भारण-पथ के अनुदिश चरण-दर-चरण अनुसरित संख्यात्मक उदाहरण विद्यार्थियों के लिए विशेष रूप से उपयोगी होगा।

58.4 तनाव–संपीडन असममिति और एकपक्षीय प्रभाव (~2 pages)

संपीडन में दरारों का बंद होना और दृढता की आंशिक पुनःप्राप्ति—चक्रीय भारण अथवा संयुक्त बंकन के अधीन संरचनाओं के प्रतिरूपण की सबसे महत्त्वपूर्ण सूक्ष्मताओं में से एक। एकपक्षीय प्रतिबंध और प्रतिरूप में उसका निरूपण।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

58.5 क्षति-सुघट्यता युग्मन (~2 pages)

युग्मित प्रतिरूपों—अनुत्क्रमणीय विकृतियों और दृढता अवनयन—का संक्षिप्त प्रस्तुतीकरण; ये संपीडन के अधीन कंक्रीट और इस्पात के लिए अपरिहार्य हैं। लेमैत्र का प्रभावी प्रतिबल सिद्धांत और आधुनिक युग्मित संरूपणों (ग्रास्ल-यिरासेक, डेस्मोरा) में उसकी भूमिका।

58.6 नियमितीकरण और जालक वस्तुनिष्ठता (~3 pages)

परिमित अवयव पाठकों के लिए यह सबसे महत्त्वपूर्ण अनुभाग है। स्थानीय मृदुकरण रोगात्मक जालक-निर्भरता उत्पन्न करता है। व्यावहारिक उपचार के रूप में दरार-पट्टी प्रतिरूप (बज़ां)—अवयव आकार h के अनुसार मृदुकरण शाखा का समायोजन, जिससे भंजन ऊर्जा G_f संरक्षित रहे। अधिक कठोर विकल्पों के रूप में समाकलीय अस्थानीय क्षति और अंतर्निहित प्रवणता संरूपण। समस्या और उसके समाधान का संख्यात्मक चित्रण अत्यंत शिक्षाप्रद होगा।

58.7 धरन और स्तंभ अवयवों पर अनुप्रयोग (~3 pages)

यह अनुभाग अध्याय को पुस्तक के शेष भाग से जोड़ता है। परिच्छेद दृढता में क्षति चर का समावेश—अनुप्रस्थ परिच्छेद पर समाकलित क्षति क्षेत्र के फलन के रूप में EI और EA में कमी। धरन अवयव में अभिलाक्षणिक लंबाई की संकल्पना। यदि स्थान उपलब्ध हो, तो प्रबलित कंक्रीट धरन अथवा स्तंभ का ऐसा उदाहरण आदर्श चित्रण होगा जो क्रमिक दृढता अवनयन और उसके संरचनात्मक परिणामों को दर्शाए।

58.8 प्राचल-अभिज्ञान और व्यावहारिक मार्गदर्शिका (~1.5 pages)

साधारण और उच्च-निष्पादन कंक्रीट के लिए विशिष्ट परिसरों सहित मज़ार्स प्रतिरूप प्राचलों की तालिका। मानक परीक्षणों (ब्राज़ीली परीक्षण, एकाक्षीय संपीडन, त्रिरबिंदु बंकन) से अभिज्ञान की प्रक्रिया।

58.9 ग्रंथसूची टिप्पणियाँ और आगे का अध्ययन (~0.5 pages)

आधारभूत संदर्भ—मज़ार्स 1984/1986, लेमैत्र 1985, पिज़ोदिए-काबो & बज़ां 1987, बज़ां & ओह 1983—और आगे अध्ययन करने के इच्छुक पाठकों के लिए कुछ नवीन समीक्षा लेख।

—

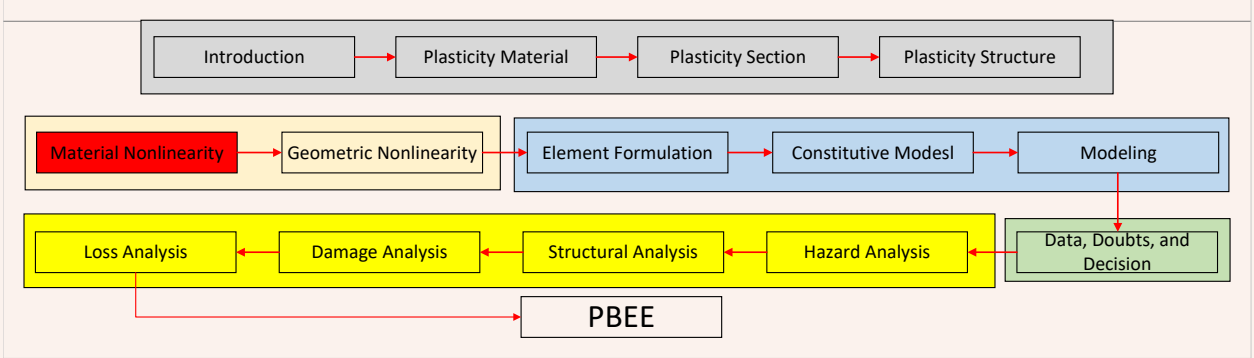
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

59 अरैखिक विश्लेषण; सामग्री

सारांश

§54.1 में अरैखिक विश्लेषण के संक्षिप्त परिचय के पश्चात यह अध्याय संरचनात्मक अभियांत्रिकी में सामग्री-व्यवहार के अरैखिक विश्लेषण का विस्तृत अध्ययन करता है और संख्यात्मक प्रतिरूपण तकनीकों तथा उनके अनुप्रयोगों पर केंद्रित है। अरैखिक समीकरणों के मूल ज्ञात करने की विधियों—न्यूटन विधि, छेदक विधि और स्पष्ट योजनाओं—के सामान्य अवलोकन से आरंभ करते हुए, यह अध्याय जटिल संरचनात्मक समीकरणों के समाधान में प्रत्येक पद्धति की क्षमताएँ और सीमाएँ रेखांकित करता है। इसके बाद आरोपित बलों के अधीन संरचनात्मक प्रतिक्रिया का विश्लेषण करने के लिए न्यूटन विधि पर आधारित वृद्धिशील भार-नियंत्रण विधियाँ प्रस्तुत की जाती हैं। अंततः अध्याय विस्थापन-नियंत्रण तकनीकों का अध्ययन करता है, जो शिखरोत्तर और मृदुकरण प्रतिक्रियाओं को अभिलेखित करने की स्थिर और परिशुद्ध पद्धति देती हैं तथा भंगुर और विकृति-मृदुकरण सामग्रियों के विश्लेषण में अत्यंत महत्त्वपूर्ण हैं। इन विधियों द्वारा अध्याय संरचनात्मक विश्लेषण की अरैखिक समस्याओं के समाधान हेतु व्यापक उपकरण-समुच्चय प्रदान करता है और अभियांत्रिकी अनुप्रयोगों की उन्नति में पुनरावृत्तीय समाधानों के महत्त्व पर बल देता है।

59.1 संख्यात्मक मूल-निर्धारण 1934
59.1.1 न्यूटन विधियाँ 1935
59.1.2 छेदक विधि 1942
59.1.3 स्पष्ट 1943
59.2 संरचनात्मक यांत्रिकी से संबंध; अंतर्निहित 1944
59.3 समाकलन विधियाँ 1945
59.3.1 भार नियंत्रण 1945
59.3.2 विस्थापन नियंत्रण 1954



59.1 संख्यात्मक मूल-निर्धारण

1 अरैखिक विश्लेषण में मूल-निर्धारण विधियाँ उन समीकरणों के समाधान के लिए आवश्यक हैं जिनके पारंपरिक वैश्लेषिक समाधान संभवतः उपलब्ध नहीं होते।

2 संख्यात्मक तकनीकें इन समाधानों के सन्निकटन हेतु पुनरावृत्तीय पद्धतियाँ प्रदान करती हैं, जो अरैखिक संरचनात्मक विश्लेषण में अत्यंत महत्त्वपूर्ण हैं।

3 यह अनुभाग मूल-निर्धारण की कई प्रमुख विधियाँ प्रस्तुत करता है और न्यूटन विधि, छेदक विधि तथा स्पष्ट मूल-निर्धारण तकनीकों पर केंद्रित है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[4] प्रत्येक विधि के विशिष्ट लाभ हैं और वह भिन्न परिस्थितियों में लागू होती है। उदाहरणार्थ, न्यूटन विधि तीव्र अभिसरण प्राप्त करने के लिए अवकलजों का उपयोग करती है; अतः सुचारु फलनों और उपलब्ध अवकलजों वाली समस्याओं के लिए उपयुक्त है। इसके विपरीत छेदक विधि अवकलजों का संख्यात्मक सन्निकटन करती है, जो वैश्लेषिक अवकलज प्राप्त करना कठिन अथवा असंभव होने पर उपयोगी है।

[5] हम इन मूल-निर्धारण विधियों का सामग्री-अरैखिकताओं पर अनुप्रयोग देखेंगे और संरचनात्मक अभियांत्रिकी के व्यापक संदर्भ में उनकी भूमिका की जाँच करेंगे।

59.1.1 न्यूटन विधियाँ

59.1.1.1 परिचय

[6] न्यूटन विधि अरैखिक समीकरणों के मूल ज्ञात करने की व्यापक रूप से प्रयुक्त उच्च-कोटि पुनरावृत्तीय तकनीक है, जो फलन के अवकलज का उपयोग कर समाधान का क्रमिक सन्निकटन करती है।

[7] यह विधि प्रत्येक पुनरावृत्ति में सन्निकटन को परिष्कृत करती है और आरंभिक अनुमान वास्तविक मूल के निकट होने पर तीव्र अभिसरण का लक्ष्य रखती है। सरलतर विधियों से भिन्न, न्यूटन पद्धति अपनी द्विघाती अभिसरण दर के कारण सुचारु, सुव्यवहृत फलनों के लिए विशेषतः प्रभावी है; अनुकूल परिस्थितियों में प्रत्येक चरण के साथ त्रुटि पर्याप्त रूप से घटती है।

[8] संरचनात्मक अभियांत्रिकी अनुप्रयोगों में न्यूटन विधि अरैखिक विश्लेषण के लिए विशेषतः उपयोगी है, जहाँ यह भारण दशाओं में उत्पन्न साम्य समीकरणों को हल करने में सहायता करती है। रैखिक समस्याओं में न्यूटन विधि अद्वितीय समाधान पर शीघ्र अभिसरित होगी।

[9] अरैखिक समीकरणों में अभिसरण अधिक चुनौतीपूर्ण हो सकता है, क्योंकि समाधान सदैव विद्यमान नहीं होता अथवा अनेक संभव मूल हो सकते हैं। ऐसी स्थितियों में, यदि समाधान विद्यमान हो, तो न्यूटन विधि उसके सन्निकटन का दक्ष मार्ग देती है; अतः उन व्यावहारिक अभियांत्रिकी समस्याओं में अमूल्य है जहाँ यथार्थ समाधान प्रायः दुर्लभ होते हैं।

[10] मूल-निर्धारण की न्यूटन विधि की तुलना ऑयलर विधि (§53.3.4) से की जानी चाहिए, जिसका उपयोग आरंभिक मान और नियामक अवकल समीकरण के आधार पर पूर्वानुमान के लिए होता है।

[11] रैखिक समस्याओं का सदैव एक अद्वितीय समाधान होता है; किंतु अरैखिक समस्याओं में न तो समाधान के अस्तित्व और न उसकी अद्वितीयता की गारंटी दी जा सकती है (जैसे कोई परवलय x अक्ष को संभवतः न काटे, जबकि घन बहुपद सदैव काटेगा)।

[12] समाधान विद्यमान होने पर भी अधिकतम एक सन्निकट संख्यात्मक समाधान प्राप्त किया जा सकता है।

[13] संख्यात्मक समाधान की सर्वाधिक प्रयुक्त श्रेणी “न्यूटन विधियाँ” अथवा “अर्ध-न्यूटन” है। अन्य विधियों में द्विभाजन विधि सम्मिलित हो सकती है (जिसका अभिसरण केवल रैखिक है)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

59.1.1.2 टेलर श्रेणी और रैखिकीकरण

14 टेलर श्रेणी प्रसार एक आधारभूत गणितीय उपकरण है, जिसमें चयनित बिंदु के परितः अनंत श्रेणी के रूप में व्यक्त कर अरैखिक फलनों का सन्निकटन किया जाता है।

15 इस श्रेणी को केवल कुछ आरंभिक पदों तक छाँटकर फलन का रैखिकीकृत रूप प्राप्त किया जा सकता है। यह रैखिक सन्निकटन न्यूटन विधि जैसी पुनरावृत्तीय विधियों में विशेषतः उपयोगी है, जहाँ प्रत्येक अगला चरण किसी सरलीकृत रैखिक समीकरण के समाधान पर निर्भर करता है।

16 मूल-निर्धारण अनुप्रयोगों में रैखिकीकरण आरंभिक अनुमान के निकट जटिल अरैखिक फलनों के व्यवहार के सन्निकटन की सुगम विधि देता है और समाधान पर दक्ष अभिसरण संभव बनाता है।

17 मूलतः यह विधि $f(x) = 0$ को वर्तमान सन्निकटन x_n के परितः समीकरण का रैखिकीकरण करके हल करती है और परिणामी रैखिक समीकरण से अगला सन्निकटन x_{n+1} प्राप्त करती है।

18 ऑयलर विधि (समीकरण 53.6) की भाँति न्यूटन विधि भी टेलर श्रेणी से आरंभ होती है, जिसमें फलन को बिंदु $\overline{x}$ के सापेक्ष अनंत श्रेणी के रूप में व्यक्त किया जाता है:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{(x-\overline{x})^2}{2!}f''(\overline{x}) + \dots \\ &= f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + \mathcal{O}(\underbrace{|x-\overline{x}|^2|}_{\xi^2}) \end{aligned}$$

उच्चतर कोटि के पदों की उपेक्षा करने पर रैखिक फलन प्राप्त होता है:

$$L(x) = f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x})$$

19 यदि $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ दो चरों का फलन है, तो $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ और $\mathbf{x} = \lfloor\ x_1 \quad x_2\ \rfloor^T$। नियत बिंदु $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ के परितः टेलर श्रेणी प्रसार होगा:

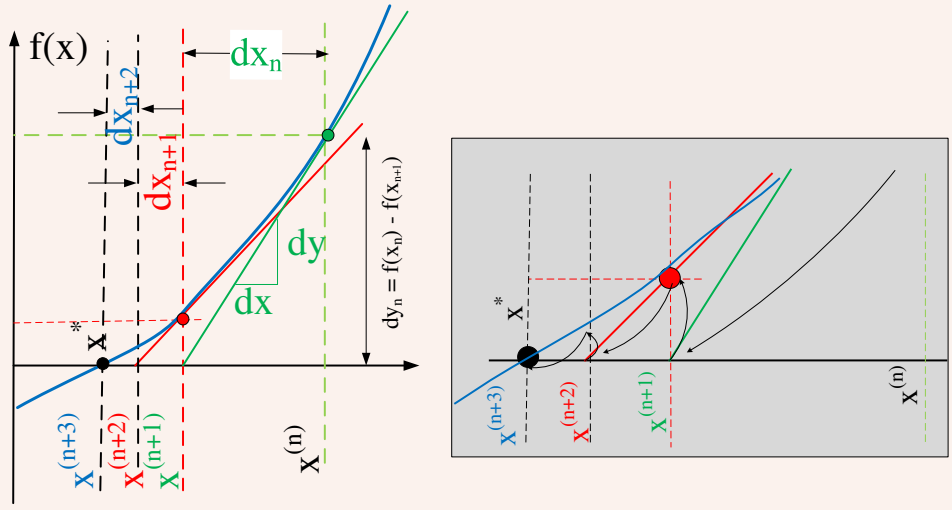
$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \tag{59.1}$$

उच्चतर कोटि के पदों की उपेक्षा करने पर समीकरण पुनः रैखिकीकृत हो जाता है।

20 If we set $f(x) = 0 \Rightarrow x \simeq \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}$ यह $\overline{x}$ पर सन्निकट समाधान है, जिसमें $f'(x)$ भी उपलब्ध होना माना गया है, चित्र 59.1।

21 पुनरावृत्तीय प्रक्रिया में इस समीकरण को इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 59.1: न्यूटन विधि

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_n) \Rightarrow dx = \frac{dy}{f'(x_n)} = \frac{\overbrace{f(x_{n+1})}^{0} - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \simeq x_n \underbrace{- \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\delta x_n}$$

अभिसरण तब सुनिश्चित होगा जब

$$|\delta x_n| \leq \varepsilon_\delta \quad \text{or} \quad |f(x_{n+1})| \leq \varepsilon_f$$

```
1: procedure NEWTON(f(x), f'(x), x_0, TOL)
2:     x ← x_0
3:     while abs(f(x)) > tol do
4:         x ← x − f(x)/f'(x)
5:     end while
6: end procedure
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

59.1.1.2.1 उदाहरण 59.1: न्यूटन विधि, अदिश

$f(x) = Tan(x) - x = 0$ हल करें, जो संधित-संधित स्तंभ के नियामक व्याकुंचन समीकरण (§29.3.2.1.3, समीकरण 29.23) के अनुरूप है।

```
clear
xn = 4.3;n = 0;epsi=1e-4;maxiter = 20;
disp("            ");disp("    n          xn                    norm")
xn_m1=0.;
for i = 1:maxiter
    f_x=tan(xn)-xn;df_dx=sec(xn)^2-1;
    xn = xn - f_x/df_dx;
    my_norm = abs(xn-xn_m1);
    disp(sprintf( "%5i   %16.15e   %16.15e",i, xn,my_norm"))
    if my_norm <epsi
      break
  end
  xn_m1=xn;
end

```

ध्यान दें कि यह विशेष रूप से संवेदनशील समस्या है, क्योंकि $\tan x$ असांतत्यपूर्ण है; आरंभिक अनुमान में छोटा परिवर्तन भी समाधान का अपसरण उत्पन्न कर सकता है।

एकल चर के लिए

$$x_{n+1} \simeq x_n \underbrace{- \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\delta x_n} \Rightarrow f(x) + f'(x)(x_2 - x_1) \simeq 0$$

स्पष्टतः इस विधि को दो अज्ञातों में दो फलनों $f_1(\mathbf{x})$ और $f_2(\mathbf{x})$ तक विस्तारित किया जा सकता है:

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

अथवा

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\overline{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \\ f_2(\overline{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

जहाँ $\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})$ जैकोबियन आव्यूह है:

$$\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{59.2}$$

और $\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})$ आव्यूह-सदिश गुणनफल है।

ध्यान दें कि i^{th} पंक्ति i^{th} घटक फलन f_i की प्रवणता ($\mathbf{V}f_i.$) के अनुरूप है, और अदिश अवकलज का स्थान आंशिक अवकलजों के 2×2 जैकोबियन आव्यूह ने लिया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

25 समस्या को m अज्ञातों वाले m अरैखिक समीकरणों तक और व्यापक बनाया जा सकता है:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}$$

इस तंत्र का जैकोबियन आव्यूह $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ एक $m \times m$ आव्यूह होगा, जिसकी (i, j) प्रविष्ट फलन i के चर j के सापेक्ष आंशिक अवकलज, अर्थात $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$, के अनुरूप होगी।

26 न्यूटन विधि के प्रत्येक चरण में सन्निकट मान $\mathbf{x}_n$, अरैखिक समीकरणों के यथार्थ समाधान $\mathbf{x}^*$ के लिए उपलब्ध होता है, जहाँ $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$। अतः हम रैखिकीकृत समीकरण-तंत्र को हल करके $\mathbf{x}_{n+1}$ निर्धारित करते हैं:

$$\begin{aligned} L^{(n)}(\mathbf{x}_{n+1}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n - \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = f'(x)$ और $m = 1$ के प्रकरण के बीच समानता पर ध्यान दें।

27 प्रत्येक चरण में जैकोबियन आव्यूह का नए बिंदु पर मूल्यांकन करना चाहिए और फिर इस नए अद्यतन आव्यूह से रैखिक समीकरण-तंत्र हल करना चाहिए।

28 अभिसरण तब सुनिश्चित होगा जब

$$\| \delta\mathbf{x}_n \| \leq \varepsilon_\delta \quad \text{or} \quad \| \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}) \| \leq \varepsilon_f$$

जहाँ $\| \mathbf{v} \|$ *यूक्लिडीय मानक* है, सदिश $\mathbf{v}$ के लिए (शुद्धतः इसे $\| \mathbf{v} \|_2$ लिखा जाना चाहिए), जिसकी गणना सदिश घटकों के वर्गों के योग के वर्गमूल के रूप में होती है:

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}$$

N-विमीय समष्टि में।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
procedure NEWTON(f, J, x0, TOL, MAX_ITER)
    x ← x_0
    i ← 0
    while i < max_iter|norm(f(x) < tol do
        fx ← f(x)                          ▷ Evaluate function at current point
        Jx ← J(x)                          ▷ Evaluate Jacobian at current point
        p = solve(Jx, −fx)                 ▷ Compute search direction using the Jacobian
        x = x + p                          ▷ Update current point
        i ← i + 1                          ▷ Increment iteration counter
    end while
    Return x                               ▷ Last iterate
end procedure
```

59.1.1.3 अभिसरण और त्रुटि आकलन

[29] विधि का अभिसरण और त्रुटि की कोटि सुनिश्चित करनी चाहिए।

[30] $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ दिए होने पर, अभिसरण गुणक $\rho^{(n)}$ को x_{n+1} की त्रुटि और x_n की त्रुटि के अनुपात के रूप में परिभाषित करें। यथार्थ समाधान (x^*, जहाँ $g(x^*) = x^*$) के निकट $\rho^{(n)} \simeq g'(x^*)$ होता है और इसे उपगामी अभिसरण गुणक कहा जाता है।

[31] $g'(x)$ निर्धारित करने पर

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

यदि $f'(x^*) \neq 0$ और $f''(x^*)$ परिमित हैं, तो $g'(x^*)$=0; अतः जब और यदि $x_n \to x^*$, तब अभिसरण गुणक शून्य की ओर अग्रसर होता है।

[32] त्रुटि $x^* - x_n$ निर्धारित करने के लिए,

$$x^* - x_{n+1} = x^* - x_n - \frac{f(x^*) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$\Rightarrow x^* - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

अतः यदि पुनरावृत्ति x^* पर अभिसरित होती है, तो प्राप्त होता है:

$$\underbrace{x^* - x_{n+1}}_{\text{error at } n+1} \simeq -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \underbrace{(x^* - x_n)^2}_{\text{error at } n} \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

बशर्ते $f'(x^*)$ और $f''(x^*)$ दोनों परिमित तथा अशून्य हों।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तुटि, x_n की तुटि के वर्ग के समानुपाती होती जाती है जब n अनंत की ओर बढता है।

अन्य विधियों (जैसे द्विभाजन) का अभिसरण रैखिक होगा।

59.1.1.4 अंतिम टिप्पणियाँ

न्यूटन विधि:

1. अवकलज की वैश्लेषिक अभिव्यक्ति आवश्यक करती है।
2. आरंभिक मान सही मान से बहुत दूर होने पर अभिसरण सुनिश्चित नहीं हो सकता (इसीलिए पुनरावृत्तियों की संख्या पर ऊपरी सीमा रखनी चाहिए)।
3. ढाल शून्य के निकट होने पर विफल होती है (जैसे शिखर भार के आसपास)।
4. कम वक्रता वाले वक्रों के साथ सर्वोत्तम कार्य करती है।
5. अभिसरण द्विघाती है।
$$\| x_{n+1} - x^* \| \leq c \| x_n - x^* \|^2$$
किंतु व्यवहार में c का मान ज्ञात नहीं होता।

59.1.1.4.1 उदाहरण 59.2: न्यूटन विधि; सदिश

निम्न हल करें: $f(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 \\ x_3 - x_2 \sin(x_1) \\ 3x_2 + 4x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ -x_2 \cos(x_1) & -\sin(x_1) & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
f = @(x) [x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-9
x(3)-x(2)*sin(x(1))
3*x(2)+4*x(3)] ;
% The Jacobian mat r i x :
J = @(x) [2*x(1) 2*x(2) 2*x(3)
-x(2)*cos(x(1)) -sin(x(1)) 1
0 3 4] ;
% i n i t i a l guess :
x = [-1;-2;1] ;
maxiter = 10;
tol = 1e-12;
disp(' ')
disp('iteration x(1) x(2) x(3) norm(delta) ')
for n=1:maxiter
delta = -J(x)\f(x);
x = x + delta ;
disp(sprintf( '%5i %10.5e %10.5e %10.5e %8.3e',...
n, x(1), x(2) , x(3) ,norm(delta, inf))) ;
if norm(delta, inf) < tol
break
end
end
if n==maxiter
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
disp("Warning: may not have converged  tolerance not satisfied")
end
```

59.1.2 छेदक विधि

छेदक विधि एक मूल-निर्धारण कलनविधि है, जो दो आरंभिक अनुमानों के बीच क्रमिक छेदक रेखाएँ बनाकर फलन $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ के मूल का बेहतर पुनरावृत्तीय सन्निकटन करती है।

न्यूटन विधि में फलन का अवकलज आवश्यक होता है, जबकि छेदक विधि परिमित-अंतर सन्निकटन का उपयोग करती है; अतः अवकलजों की गणना कठिन अथवा असंभव होने पर विशेषतः उपयोगी है।

प्रत्येक पुनरावृत्ति में छेदक विधि पिछले दो सन्निकटनों के बीच बनी छेदक रेखा की ढाल से बहिर्वेशन करके मूल का सन्निकटन करती है। यह ढाल अवकलज का आकलन देती है, जिससे स्पष्ट अवकलज-गणना के स्थान पर केवल फलन-मूल्यांकनों से मूल पर अभिसरण संभव होता है।

छेदक विधि सामान्यतः न्यूटन विधि से धीमी अभिसरित होती है, किंतु अवकलजों पर निर्भर न होने के कारण संरचनात्मक विश्लेषण और सामग्री प्रतिरूपण जैसे जटिल अनुप्रयोगों में प्राथमिक विकल्प हो सकती है, जहाँ यथार्थ अवकलज उपलब्ध न हों।

छेदक विधि को न्यूटन विधि का परिमित-अंतर सन्निकटन माना जा सकता है। तथापि छेदक विधि न्यूटन विधि से पुरानी है।

जब $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ की गणना लगभग असंभव हो, जैसा कि $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ के लिए हो सकता है (जो संभवतः वैश्लेषिक रूप से परिभाषित न हो), तब हम निम्न सरल सन्निकटन से जैकोबियन को संख्यात्मक रूप से निर्धारित करेंगे:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_{n+1}) \simeq \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})}{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}$$

$\mathbf{J}\mathbf{x}_n)^{-1}$ के लिए प्रतिस्थापन करने पर

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \underbrace{\frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})}}_{\simeq J^{-1}(\mathbf{x}_n)} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

न्यूटन विधि के विपरीत, इस विधि को आरंभ करने के लिए दो आरंभिक अनुमान $\mathbf{x}_0$ और $\mathbf{x}_1$ आवश्यक होंगे।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
procedure SECANT_METHOD(f, x_0, x1, TOL, MAX_ITER)
    fx0 ← f(x0)
    INITIALIZE VALUES
    fx1 = (x1)
    i ← 0
    ITERATE UNTIL CONVERGENCE OR MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS REACHED
    while abs(fx1) > tol  &  i < max_iter do
        Compute new approximation to the root
        x2 ← x1 − fx1 ∗ (x1 − x0)/(fx1 − fx0)
        fx2 ← f(x2)
        Update values for next iteration
        x0 ← x1
        fx0 ← fx1
        x1 ← x2
        fx1 ← fx2
        i ← i + 1
    end while
    Return the root and number of iterations used
    Return x1, i                                          ▷ Last iterate
end procedure
```

59.1.3 स्पष्ट

42 स्पष्ट समाकलन योजना (जिसे “चरण-दर-चरण” भी कहते हैं) में भार वृद्धिशील रूप से आरोपित किया जाता है और प्रत्येक वृद्धि के अंत में, चित्र 59.2:

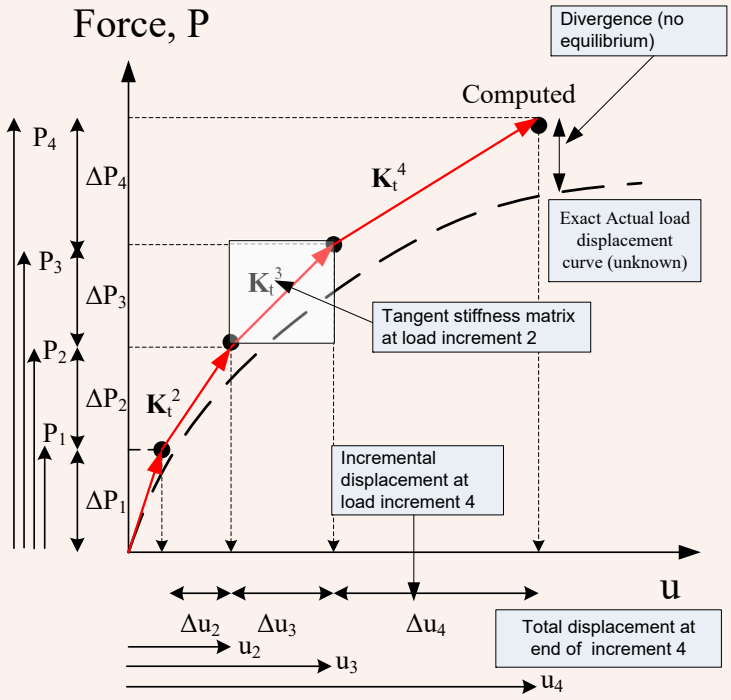
1. वर्तमान विस्थापनों के आधार पर स्पर्शरेखीय दृढता की गणना करें; यह भार–विस्थापन वक्र की ढाल है।
2. दृढता आव्यूह का व्युत्क्रम लेकर उसे वृद्धिशील भार से गुणा करें, जिससे संगत वृद्धिशील विस्थापन प्राप्त हो।
3. वास्तविक भार (सभी पिछले वृद्धिशील भारों का योग) के संगत वास्तविक विस्थापन के लिए वृद्धिशील विस्थापन को पिछले विस्थापनों के योग में जोड़ें।

43 प्रमुख लाभ: समाधान सदैव प्राप्त होगा।

44 प्रमुख हानि: प्रत्येक वृद्धि के अंत में हम यह सत्यापित नहीं करते कि आंतरिक और बाह्य बलों का साम्य संतुष्ट है। भार बढने पर इससे अपसारी समाधान प्राप्त हो सकता है। तथापि कुछ उन्नत प्रोग्राम साम्य के स्थान पर ऊर्जा संतुलन की जाँच करते हैं।

45 इस समस्या का आंशिक उपचार त्रुटियों को न्यूनतम करने के लिए अत्यंत छोटी भार-वृद्धियाँ अपनाना है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 59.2: स्पष्ट समाकलन योजना

46 इस विधि का उपयोग अत्यंत सावधानी से करना चाहिए, क्योंकि प्रतिरूप और उसके प्राचल कितने भी अच्छे अथवा खराब हों, समाधान सदैव प्राप्त होगा।

47 दुर्भाग्यवश कुछ संघटक प्रतिरूप अंतर्निहित समाकलन योजना में चलाने पर अत्यंत अस्थिर होते हैं; फलतः उन्हें स्पष्ट योजना में उपयोग (अथवा दुरुपयोग) किया जाता है।

59.2 संरचनात्मक यांत्रिकी से संबंध; अंतर्निहित

48 अंतर्निहित विधियाँ संरचनात्मक यांत्रिकी की आधारशिला हैं, विशेषतः उन अरैखिक समस्याओं के विश्लेषण में जहाँ भार के अधीन साम्य बनाए रखना आवश्यक होता है।

49 संरचनात्मक विश्लेषण में साम्य प्राप्त करने का अर्थ संरचना के नोडों पर आंतरिक और बाह्य बलों को संतुलित करना है। यह संतुलन ऐसे अरैखिक समीकरण के रूप में व्यक्त होता है जिसमें आंतरिक बल सदिश विस्थापनों पर निर्भर करता है, अतः समस्या स्वभावतः अरैखिक होती है।

50 इस अनुभाग में हम वृद्धिशील भार विश्लेषणों में साम्य हल करने हेतु अंतर्निहित विधियों, विशेषतः न्यूटन विधि, के उपयोग का अध्ययन करते हैं। प्रत्येक चरण पर अवशिष्ट बल (बाह्य और आंतरिक बलों का अंतर) को शून्य की ओर जाना चाहिए, जो साम्य-अवस्था दर्शाता है।

51 विस्थापनों को पुनरावृत्तीय रूप से अद्यतन करके अंतर्निहित विधियाँ इस संतुलन तक पहुँचने की

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

व्यवस्थित पद्धति देती हैं और संपूर्ण भारण-प्रक्रिया में समाधान की स्थिरता तथा परिशुद्धता सुनिश्चित करती हैं।

52 यह पद्धति संरक्षी तंत्रों के लिए आवश्यक है, जहाँ बलों को विस्थापनों से स्वतंत्र माना जाता है; इससे विश्वसनीय परिशुद्धता बनाए रखते हुए जटिल संरचनात्मक व्यवहार सरल किया जा सकता है।

53 पुनः, हम समीकरण 50.11 को निम्न रूप में हल करना चाहते हैं:

$$\underbrace{\mathbf{k}\overline{\boldsymbol{\Delta}} - \overline{\mathbf{F}}^{o}}_{\mathbf{P}^{int}} - \underbrace{\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^{e}}_{\mathbf{P}^{ext}} = 0$$

$\mathbf{P}_n^{ext}$ और $\mathbf{P}_n^{int}$ दोनों आभासी विस्थापन के सिद्धांत से निर्धारित होते हैं। चूँकि आंतरिक नोडीय बल सदिश $\mathbf{P}_n^{int}$ नोडीय विस्थापनों $\mathbf{u}_n$ का फलन है, समस्या अरैखिक है।

54 ऐसे वृद्धिशील भार विश्लेषण में, जिसमें वृद्धि n के अंत में साम्य (लगभग) संतुष्ट था, हमारे पास है:

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_n^{ext} - \mathbf{P}_n^{int} = 0$$

जो अवशिष्ट बल है (पुनरावृत्तियों की संख्या n बढ़ने पर इसे शून्य की ओर जाना चाहिए)।

55 अतः हम निम्न को हल करने के लिए न्यूटन विधि का उपयोग करेंगे:

$$\mathbf{R}_n(\mathbf{u}) = 0$$

56 ध्यान दें कि हमने बलों को विस्थापनों से स्वतंत्र माना है—*संरक्षी तंत्र*—और $P-\Delta$ प्रभावों की उपेक्षा की है।

57 भार-नियंत्रण कलनविधियों और अरैखिक विश्लेषणों के बीच समानता तालिका 59.1 में दर्शाई गई है।

59.3 समाकलन विधियाँ

58 हम वृद्धिशील भार अथवा वृद्धिशील विस्थापन में से क्या आरोपित कर रहे हैं, इसके अनुसार कलनविधि में थोड़ा परिवर्तन होगा।

59.3.1 भार नियंत्रण

59.3.1.1 न्यूटन–रैफसन/स्पर्शरेखीय दृढ़ता विधि

59 विवरण में जाने से पहले, द्विचरणीय पद्धति को चित्र 59.3 द्वारा समझाया जा सकता है।

पूर्वानुमानक (भार-वृद्धि से संबद्ध) आरंभिक स्पर्शरेखीय दृढ़ता आव्यूह के आधार पर, स्पष्ट विधि की भाँति वृद्धिशील विस्थापन निर्धारित करता है।

संशोधक चरण, जिसमें साम्य की पुनरावृत्तीय जाँच की जाती है।

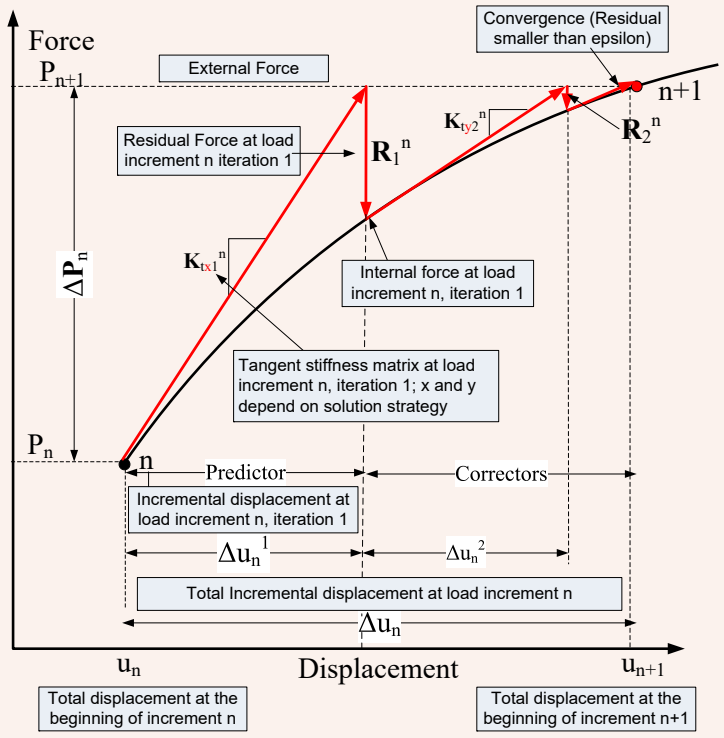
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 59.1: गणित की अर्ध-न्यूटन विधि और संरचनात्मक यांत्रिकी के अंतर्निहित विश्लेषण के बीच समानता

पक्ष	अर्ध-न्यूटन विधि (गणित)	संरचनात्मक यांत्रिकी (अंतर्निहित विश्लेषण)
उद्देश्य	अरैखिक फलन $f(x) = 0$ का मूल ज्ञात करना	अरैखिक संरचनात्मक तंत्रों में साम्य प्राप्त करना
समीकरण	$f(x) = 0$	$\mathbf{P}^{ext} - \mathbf{P}^{int} = 0$ (बल-साम्य)
आरंभिक अनुमान	मूल का आरंभिक मान x_0	आरंभिक विस्थापन अनुमान $\mathbf{u}_0$
रैखिकीकरण	$f(x)$ का x_n के निकट $f'(x)$ से रैखिकीकरण	$\mathbf{u}_n$ के परितः साम्य का स्पर्शरेखीय दृढता $\mathbf{K}_T$ से रैखिकीकरण
अद्यतन नियम	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{u}_n)$
पुनरावृत्ति मानदंड	त्रुटि में कमी, जैसे $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \leq \epsilon$	अवशिष्ट बल में कमी, जैसे $\lVert \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}) \rVert \leq \epsilon$
अभिसरण आवश्यकता	अवकलज $f'(x)$ शून्य नहीं होना चाहिए	स्पर्शरेखीय दृढता $\mathbf{K}_T$ एकल नहीं होनी चाहिए
संगणकीय आवश्यकता	प्रत्येक चरण पर फलन और उसके अवकलज की गणना	प्रत्येक चरण पर आंतरिक बलों और स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह की गणना
अभिसरण दर	द्विघाती अभिसरण (आदर्श परिस्थितियाँ)	आदर्श साम्य परिस्थितियों में द्विघाती अभिसरण
परिणाम	$f(x) = 0$ का सन्निकट मूल	आरोपित भारों के अधीन सन्निकट साम्य विन्यास

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 59.3: न्यूटन विधि की व्याख्या (भार नियंत्रण के लिए)

1. पूर्वानुमानित विस्थापनों के आधार पर संगत आंतरिक बलों की गणना करें (स्पष्ट विधि में इनका मूल्यांकन नहीं होता)।
2. बाह्य और आंतरिक बलों के अंतर के रूप में अवशिष्ट बल की गणना करें (साम्य प्राप्त होने पर यह शून्य होना चाहिए)।
3. यदि अवशिष्ट उपयोगकर्ता द्वारा निर्दिष्ट अभिसरण मानदंड से अधिक हो, तो स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह के व्युत्क्रम (इस पर आगे अधिक चर्चा होगी) को अवशिष्ट बल से गुणा करके विस्थापन अद्यतन करें।
4. कुल विस्थापन सदिश अद्यतन करें। अतः प्रत्येक भार-वृद्धि के लिए संख्यात्मक सहयता के भीतर साम्य संतुष्ट होने तक अनेक पुनरावृत्तियाँ होंगी।

60 प्रत्येक भार-वृद्धि के अंत में आंतरिक बलों को बाह्य बलों के साथ साम्य में होना चाहिए। अतः अवशिष्ट बलों का सदिश $\mathbf{R}_n^k$ है:

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}) = \overline{\mathbf{P}}^{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}) - \overline{\mathbf{P}}^{ext} = 0 \tag{59.3}$$

जहाँ $\overline{\mathbf{P}}^{int}$ आंतरिक बलों का सदिश है, जिसे सामान्यतः प्रतिक्रिया सदिश भी कहा जाता है ।

61 प्रत्येक चरण $n+1$ के आरंभ में हम उन विस्थापनों $\overline{\mathbf{u}}_n$ से आरंभ करते हैं जिन्हें पिछले चरण में साम्य द्वारा परिकलित किया गया था, $\mathbf{R}_n^k \approx 0$ or $\overline{\mathbf{P}}_n^{int} \approx \overline{\mathbf{P}}_n^{ext}$.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62 अब बाह्य बल बढ़ाए जाते हैं:

$$\overline{\mathbf{P}}_n^{ext} \longrightarrow \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext} = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext} + \Delta\overline{\mathbf{P}}^{ext}$$

और हम संगत विस्थापन $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}$ इस प्रकार निर्धारित करना चाहते हैं कि साम्य संतुष्ट हो:

$$\mathbf{R}_{n+1}^{k} \approx 0 \Rightarrow \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{int} \approx \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext}$$

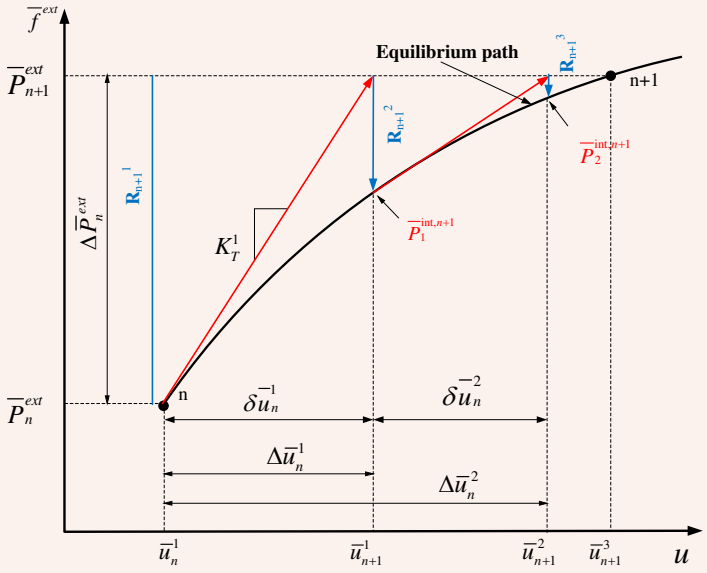
63 वर्तमान चरण (अधोलिखित n से पहचाना गया) के भीतर साम्य प्राप्त करने हेतु हम उपरिलिखित k के माध्यम से पुनरावृत्ति करेंगे।

64 $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{0}$ का आरंभिक अनुमान $\overline{\mathbf{u}}_n$ लिया जाता है, और इस आरंभिक अवस्था के परितः रैखिकीकरण के आधार पर प्राप्त होता है:

$$\overline{\mathbf{P}}_{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{0}) + \mathbf{K}_T(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{0})\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{1} = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext}$$

जहाँ $\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{1}$ अज्ञात विस्थापन-वृद्धि $\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1} = \overline{\mathbf{u}}_{n+1} - \overline{\mathbf{u}}_n$ का प्रथम सन्निकटन है।

65 वैकल्पिक रूप से हम समीकरण 59.3 के रैखिकीकरण से आरंभ करते हैं, चित्र 59.4:



चित्र 59.4: भार नियंत्रण के लिए न्यूटन–रैफसन विधि

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i}) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{u}}}\right)_{n+1}^{i} \delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = 0 \tag{59.4}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ i एक गणक है जो $\overline{\mathbf{u}}^1_{n+1} = \overline{\mathbf{u}}_n$ से आरंभ होता है। हम देखते हैं कि

$$\frac{\partial \mathbf{R}^k_n}{\partial \overline{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{P}}^{int}}{\partial \overline{\mathbf{u}}} = \mathbf{K}_T$$

66 $\overline{\mathbf{P}}^{ext}$ को नियत और $\mathbf{K}_T$ को स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह मानने पर समीकरण 59.4 देता है:

$$\mathbf{K}^i_T \delta \overline{\mathbf{u}}^i_n = -\mathbf{R}^i_{n+1}$$

अथवा

$$\delta \overline{\mathbf{u}}^i_n = -(\mathbf{K}^i_T)^{-1} \mathbf{R}^i_{n+1} \tag{59.5}$$

67 क्रमिक सन्निकटनों की श्रेणी देती है:

$$\overline{\mathbf{u}}^{i+1}_{n+1} = \overline{\mathbf{u}}_n + \Delta \overline{\mathbf{u}}^i_n = \overline{\mathbf{u}}^i_{n+1} + \delta \overline{\mathbf{u}}^i_n$$

जिसमें

$$\Delta \overline{\mathbf{u}}^i_n = \sum_{k \le i} \delta \overline{\mathbf{u}}^k_n$$

68 ध्यान देना चाहिए कि प्रत्येक पुनरावृत्ति में तीन संगणकीय रूप से महँगे चरण सम्मिलित हैं:

1. आंतरिक बलों (अथवा प्रतिक्रियाओं), $\overline{\mathbf{P}}^{int}$, का मूल्यांकन
2. वैश्विक स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह, $\mathbf{K}_T$, का मूल्यांकन
3. रैखिक समीकरण-तंत्र का समाधान

69 यद्यपि अभिसरण के लिए इस विधि में पुनरावृत्तियों की न्यूनतम संख्या लगती है, प्रत्येक वृद्धि पर आवश्यक आव्यूह-विघटन के कारण यह संगणकीय रूप से महँगी हो सकती है। अतः इसे संशोधित किया जा सकता है, तालिका 59.2।

तालिका 59.2: न्यूटन–रैफसन विधि के रूपांतर

विधि	स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह की गणना			
	पूर्वानुमानक (x का K^n_{txi} में उपयोग)		संशोधक (y का K^n_{tyi} में उपयोग)	
	वृद्धि	पुनरावृत्ति	वृद्धि	पुनरावृत्ति
न्यूटन–रैफसन	n	1	n	i
संशोधित न्यूटन–रैफसन	n	1	n	1
आरंभिक दृढता	1	1	1	1

70 ध्यान दें कि पूर्वतः यह निर्धारित करना लगभग असंभव है कि इनमें से कौन-सी विधि किसी विशिष्ट समस्या के लिए सर्वाधिक उपयुक्त है। अनेक विधियों का परीक्षण करना पड सकता है (और कुछ को अभिसरण में कठिनाई हो सकती है)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

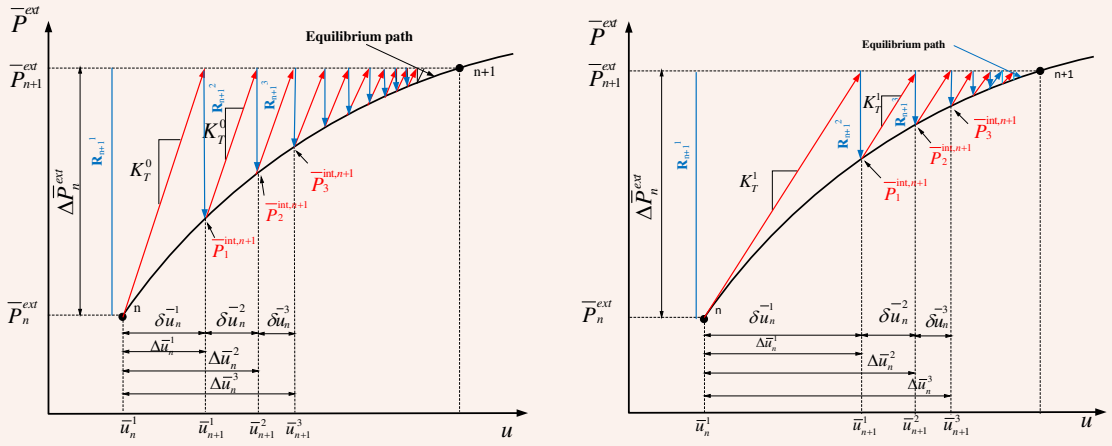
59.3.1.2 संशोधित न्यूटन–रैफसन

71 यह विधि मूलतः न्यूटन–रैफसन के समान है; किंतु समीकरण 59.5 में $(\mathbf{K}_T^i)$ के स्थान पर $\overline{\mathbf{K}}_T$ प्रयुक्त होता है, जो निम्न में से किसी की प्रथम पुनरावृत्ति का स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह है:

- पहली वृद्धि $\overline{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}_{T,0}^1$, चित्र 59.5a
- वर्तमान वृद्धि $\overline{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}_n^1$, चित्र 59.5b।

और

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\overline{\mathbf{K}}_T)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$



(a) विश्लेषण पर (b) वृद्धि पर

चित्र 59.5: संशोधित न्यूटन–रैफसन विधि, आरंभिक स्पर्शरेखा

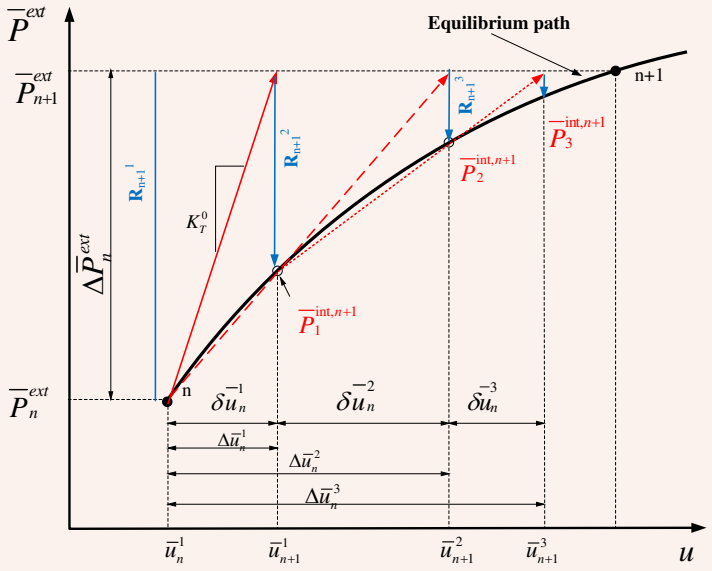
72 सामान्यतः इस विधि की अतिरिक्त पुनरावृत्तियों के लिए आवश्यक CPU समय, प्रत्येक पुनरावृत्ति में दृढता आव्यूह के संयोजन और विघटन से बचाए गए समय से कम होता है। यह उल्लेखनीय है कि स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह का वास्तविक स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह होना आवश्यक नहीं; उसके किसी सन्निकटन अथवा आरंभिक दृढता आव्यूह से भी सामान्यतः संतोषजनक परिणाम मिलेंगे, यद्यपि अतिरिक्त पुनरावृत्तियों की कीमत पर।

59.3.1.3 छेदक न्यूटन

73 यह विधि प्रथम दो विधियों के बीच समझौता है। पहले संशोधित न्यूटन–रैफसन के दो चक्रों से दो विस्थापन ज्ञात किए जाते हैं; फिर उन दोनों बिंदुओं के बीच वक्र की छेदक स्थापित कर उसके अनुदिश एक चरण लिया जाता है, चित्र 59.6।

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\overline{\mathbf{K}}_T)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप



चित्र 59.6: वृद्धिशील छेदक, अर्ध-न्यूटन विधि

74 इसके बाद प्रत्येक चरण पिछले दो बिंदुओं को जोड़ने वाली छेदक के अनुदिश लिया जाएगा।

75 निम्न से आरंभ करते हुए

$$\delta\overline{\mathbf{u}}^1_n = -\mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}^1_{n+1}$$

छेदक ढाल निर्धारित की जा सकती है:

$$(\mathbf{K}^2_S)^{-1} = -\frac{\delta\overline{\mathbf{u}}^1_n}{(\mathbf{R}^1_{n+1} - \mathbf{R}^2_{n+1})}$$

और तब

$$\delta\overline{\mathbf{u}}^2_n = -(\mathbf{K}^2_S)^{-1}\mathbf{R}^2_{n+1}$$

इस प्रक्रिया को निम्न रूप में व्यापक बनाया जा सकता है:

$$\delta\overline{\mathbf{u}}^i_n = -(\mathbf{K}^i_S)^{-1}\mathbf{R}^i_{n+1}$$

$$(\mathbf{K}^i_S)^{-1} = -\frac{\delta\overline{\mathbf{u}}^i_n}{(\mathbf{R}^{i-1}_{n+1} - \mathbf{R}^i_{n+1})}$$

59.3.1.4 अभिसरण मानदंड

76 सभी पूर्ववर्ती विधियों में पुनरावृत्तियाँ तब तक की जाती हैं जब तक विभिन्न अभिसरण मानदंडों में से एक अथवा सभी संतुष्ट न हों। समापन प्रतिबंध परिभाषित करने के लिए विस्थापनों, भारों और/अथवा वृद्धिशील ऊर्जा पर वैकल्पिक रूप से सापेक्ष अभिसरण मानदंड लागू किए जाते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

77 यह ध्यान रखना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है कि अभिसरण का अभाव संरचना की स्थानीय अथवा वैश्विक विफलता दर्शाता है। दूसरे शब्दों में, शिखर भार अंतिम वृद्धि से संबद्ध भार के अनुरूप होता है।

78 सापेक्ष विस्थापन मानदंड विस्थापन संशोधनों $\delta\overline{\mathbf{u}}^{j}$ और अद्यतन वृद्धिशील विस्थापनों $\delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1}$ के पदों में इस प्रकार परिभाषित है:

$$\varepsilon_u = \frac{\| \delta\overline{\mathbf{u}}^{j} \|_2}{\| \Delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1} \|_2}$$

जहाँ $\| \dots \|_2$ यूक्लिडीय मानक है।

79 यूक्लिडीय मानक, जिसे L_2 मानक भी कहा जाता है, सदिश $\mathbf{v}$ के लिए इस प्रकार परिभाषित है:

$$\| \mathbf{v} \|_2 = \left[\sum_{i=1}^{N} v_i^2 \right]^{1/2}$$

जहाँ N, $\mathbf{v}$ का आकार है।

80 सापेक्ष भार मानदंड अद्यतन अवशिष्ट भारों $\mathbf{R}^{j+1}$ और प्रतिक्रियाओं $\overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}$ के पदों में निम्न में से किसी एक रूप में परिभाषित है:

$$\varepsilon_r = \frac{\| \mathbf{R}^{j+1} \|_2}{\| \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int} \|_2}$$

अथवा

$$\varepsilon_r = \frac{\| \mathbf{R}^{j+1} \|_\infty}{\| \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int} \|_\infty}$$

जहाँ $\| \dots \|_\infty$, $\mathbf{v}$ का अनंत मानक है, जो इस प्रकार परिभाषित है:

$$\| \mathbf{v} \|_\infty = \max \left(\sum_{i=1}^{N} |v_i| \right)$$

जहाँ N, $\mathbf{v}$ का आकार है।

81 सापेक्ष वृद्धिशील ऊर्जा मानदंड विस्थापन संशोधनों $\delta\overline{\mathbf{u}}^{j}$, अद्यतन अवशिष्ट भारों $\mathbf{R}^{j+1}$, अद्यतन वृद्धिशील विस्थापनों $\Delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1}$ और अद्यतन प्रतिक्रियाओं $\overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}$ के पदों में इस प्रकार परिभाषित है:

$$\varepsilon_W = \frac{\delta\overline{\mathbf{u}}^{j} \cdot \mathbf{R}^{j+1}}{\Delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1} \cdot \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}}$$

जहाँ अंश पुनरावृत्ति j के लिए वृद्धिशील ऊर्जा का परिवर्तन है और हर वृद्धिशील ऊर्जा है।

59.3.1.5 सारांश तालिका

82 तालिका 59.3 अरैखिक विश्लेषण की विभिन्न भार-नियंत्रण कलनविधियों की तुलना करती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 59.3: अरैखिक विश्लेषण में भार-नियंत्रण कलनविधियों की तुलना

पक्ष	न्यूटन–रैफसन	संशोधित न्यूटन–रैफसन	छेदक विधि	स्पष्ट विधि
उद्देश्य	स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह से अरैखिक फलन का मूल ज्ञात करना; साम्य प्राप्त करना	न्यूटन–रैफसन के समान, किंतु दृढता आव्यूह का पुनः उपयोग करके सरलीकरण	बिंदुओं के बीच छेदक रेखाओं से स्पष्ट अवकलज के बिना मूल ज्ञात करना	सरलीकृत स्पर्शरेखीय दृढता के साथ भारों को वृद्धिशील रूप से लगाना
अवकलज पर निर्भरता	अवकलज (स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह) आवश्यक	आरंभिक स्पर्शरेखीय दृढता आवश्यक, किंतु प्रत्येक पुनरावृत्ति में अद्यतन नहीं	परिमित अंतरों से अवकलज का सन्निकटन	कोई अवकलज आवश्यक नहीं
परिशुद्धता	उच्च (द्विघाती अभिसरण)	मध्यम (न्यूटन–रैफसन से धीमी, किंतु प्रायः पर्याप्त)	मध्यम (न्यूटन–रैफसन से धीमी, किंतु स्पष्ट अवकलज से बचती है)	निम्न परिशुद्धता; समाधान अपसरित हो सकता है
संगणकीय दक्षता	प्रत्येक पुनरावृत्ति में दृढता आव्यूह की पुनर्गणना के कारण संगणकीय रूप से महँगी	मध्यम; आरंभिक दृढता आव्यूह का पुनः उपयोग	मध्यम; दृढता पुनर्गणना से बचती है, स्पष्ट विधि से कम पुनरावृत्तियाँ	दक्ष, किंतु परिशुद्धता हेतु छोटी भारवृद्धियाँ आवश्यक
पुनरावृत्ति प्रक्रिया	प्रत्येक वृद्धि में साम्य-जाँच सहित पूर्वानुमानक–संशोधक चक्र	आरंभिक दृढता आव्यूह का उपयोग; कम पुनर्गणनाएँ	दो आरंभिक अनुमान और क्रमिक छेदक-आधारित सन्निकटन	प्रति भार-चरण पुनरावृत्ति के बिना चरण-दर-चरण गणना
अभिसरण मानदंड	सही आरंभिक अनुमान के निकट द्विघाती अभिसरण; ढाल शून्य के निकट न हो	धीमा अभिसरण, किंतु जहाँ दृढता पुनर्गणना महँगी हो वहाँ उपयुक्त	रैखिक अभिसरण; स्पष्ट अवकलज के बिना स्थितियों के लिए अच्छा	अभिसरण लागू नहीं; अपसरित हो सकती है
सामान्य अनुप्रयोग	उपलब्ध अवकलजों वाली अरैखिक संरचनात्मक समस्याएँ	मध्यम दृढता-पुनर्गणना लागत वाली अरैखिक समस्याओं के लिए उपयुक्त	अज्ञात अथवा कठिनाई से परिकलनीय अवकलज वाली स्थितियाँ	वे स्थितियाँ जहाँ स्पष्ट काल-समाकलन वांछित है
लाभ	कम पुनरावृत्तियों में तीव्र अभिसरण	मध्यम अभिसरण के साथ संगणकीय भार घटाती है	अवकलज-गणना से बचती है	सदैव समाधान देती है
हानियाँ	प्रति पुनरावृत्ति उच्च संगणकीय लागत	न्यूटन–रैफसन की तुलना में अधिक पुनरावृत्तियाँ आवश्यक	धीमा अभिसरण; अच्छे आरंभिक अनुमान आवश्यक	साम्य लागू न होने से अशुद्ध समाधान दे सकती है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

59.3.2 विस्थापन नियंत्रण

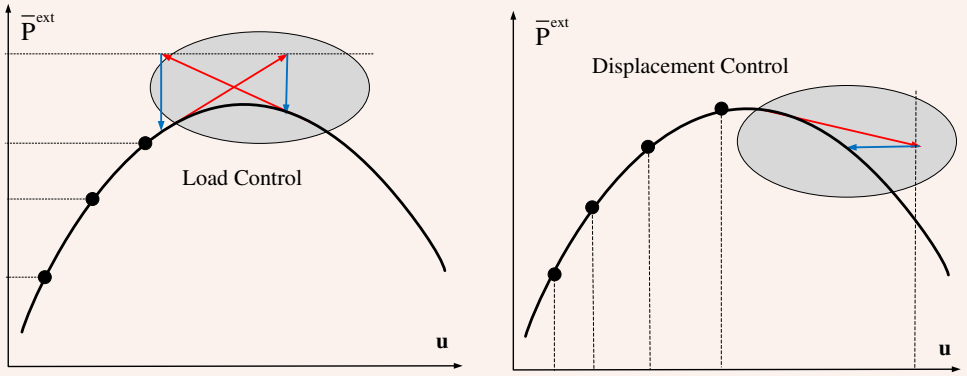
83 पूर्व वर्णित भार-नियंत्रण विधि वास्तव में अत्यंत शक्तिशाली और सरलता से दृश्यनीय है। किंतु कभी-कभी समाधान दोलित अथवा अपसरित होता है—यह साम्य पुनः स्थापित न होने का स्पष्ट संकेत है, चित्र 59.7। अधिकांश स्थितियों में यह शिखर भार पर "विफलता" का पर्याय है। विफलता संरचनात्मक अथवा केवल किसी उपक्षेत्र में स्थानिक हो सकती है।

84 अरैखिक संरचनात्मक विश्लेषण में भारों को वृद्धिशील रूप से लगाने और संरचना की प्रतिक्रिया अनुरेखित करने के लिए भार-नियंत्रण विधियाँ प्रायः प्रयुक्त होती हैं। किंतु मृदुकरण सामग्रियों[1] अथवा शिखरोत्तर व्यवहार वाली स्थितियों में पारंपरिक भार-नियंत्रण तकनीकें समस्याप्रद हो सकती हैं। संरचना के अपनी शिखर भार क्षमता के निकट पहुँचने पर भार–विस्थापन प्रतिक्रिया में आकस्मिक आरपार अथवा आकस्मिक प्रत्यावर्तन अस्थिरताएँ दिखाई दे सकती हैं, जो भार-आधारित अभिसरण को कठिन अथवा असंभव बना देती हैं।

85 इन समस्याओं के समाधान के लिए विस्थापन-नियंत्रण विधियाँ उपयोगी विकल्प देती हैं। भारों को वृद्धिशील रूप से लगाने और परिणामी विस्थापन ज्ञात करने के स्थान पर विस्थापन-नियंत्रण तकनीकें विस्थापनों को वृद्धिशील रूप से आरोपित करती और संगत आंतरिक बलों की गणना करती हैं। यह पद्धति उन क्षेत्रों में भी विस्थापनों पर नियंत्रण बनाए रखकर विश्लेषण-प्रक्रिया की स्थिरता सुनिश्चित करती है जहाँ भार–विस्थापन वक्र जटिल, अनेकदिष्ट व्यवहार दर्शाता है।

86 विस्थापन नियंत्रण शिखरोत्तर और मृदुकरण प्रतिक्रियाओं को अभिलेखित करने में विशेषतः लाभप्रद है; ये संरचनाओं की पूर्ण तन्यता अथवा विफलता विधाओं को समझने के लिए प्रायः महत्त्वपूर्ण होती हैं, विशेषतः कंक्रीट जैसी भंगुर अथवा विकृति-मृदुकरण सामग्रियों वाली संरचनाओं में। नियंत्रित विस्थापनों द्वारा साम्य लागू करके यह विधि शिखर भार से आगे संरचनात्मक प्रतिक्रिया अनुरेखित करने की क्षमता बढ़ाती है और संरचनात्मक प्रत्यास्थता, अवशिष्ट क्षमता तथा तन्यता की आवश्यक जानकारी देती है।

87 विस्थापन नियंत्रण में (जैसा नीचे आगे समझाया गया है) पुनर्स्थापन बल सदैव निर्धारित किया जा सकता है (जब तक आकस्मिक प्रत्यावर्तन न हो)।



चित्र 59.7: न्यूटन विधि; भार बनाम विस्थापन नियंत्रण

[1]चित्र O.11 के साथ अनुरूपता पर ध्यान दें, क्योंकि शिखर के निकट अवशिष्ट का निर्धारण असंभव हो जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

88 विस्थापन नियंत्रण के लिए अवशिष्ट विस्थापनों का सदिश $\mathbf{R}_n^k$ इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

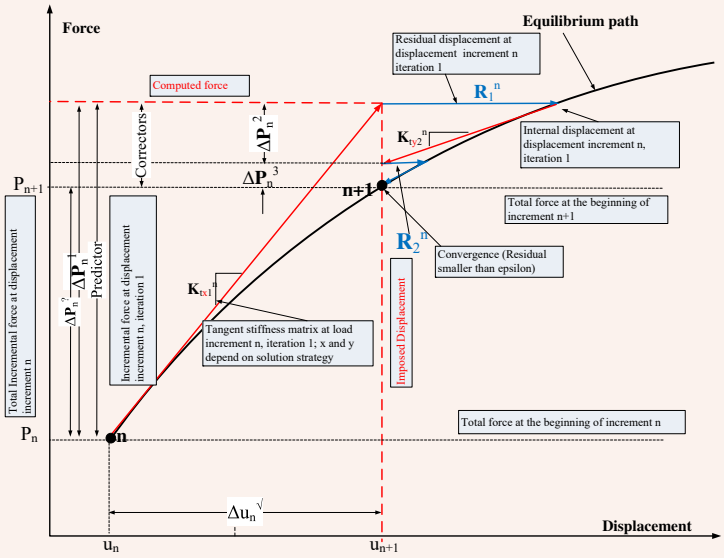
$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}) = \overline{\mathbf{u}}^{int}(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}) - \overline{\mathbf{u}}^{ext} = 0 \tag{59.6}$$

समीकरण 59.3 के साथ अंतर पर ध्यान दें।

89 अतः शिखरोत्तर प्रतिक्रिया अभिलेखित करने के लिए संख्यात्मक रूप से विस्थापन-नियंत्रण कलनविधि अपनानी होगी।

90 प्रत्येक चरण $n+1$ के आरंभ में हम उन बलों $\overline{\mathbf{P}}_n$ से आरंभ करते हैं जिन्हें पिछले चरण में साम्य द्वारा परिकलित किया गया था, $\mathbf{R}_n^k \approx 0$ or $\overline{\mathbf{u}}_n^{int} \approx \overline{\mathbf{u}}_n^{ext}$, Figure 59.8.

91 अब बाह्य विस्थापन $\overline{\mathbf{u}}_n^{ext}$ से बढाकर $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext} = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext} + \Delta\overline{\mathbf{u}}^{ext}$ किए जाते हैं और हम साम्य द्वारा संगत बल $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}$ निर्धारित करना चाहते हैं, $\mathbf{R}_{n+1}^k \approx 0$ or $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{int} \approx \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext}$. वर्तमान चरण (अधोलिखित n से पहचाना गया) के भीतर साम्य प्राप्त करने हेतु हम उपरिलिखित k के माध्यम से पुनरावृत्ति करेंगे, चित्र 59.8।



चित्र 59.8: न्यूटन विधि; विस्थापन नियंत्रण (चित्र 59.3 से तुलना करें)

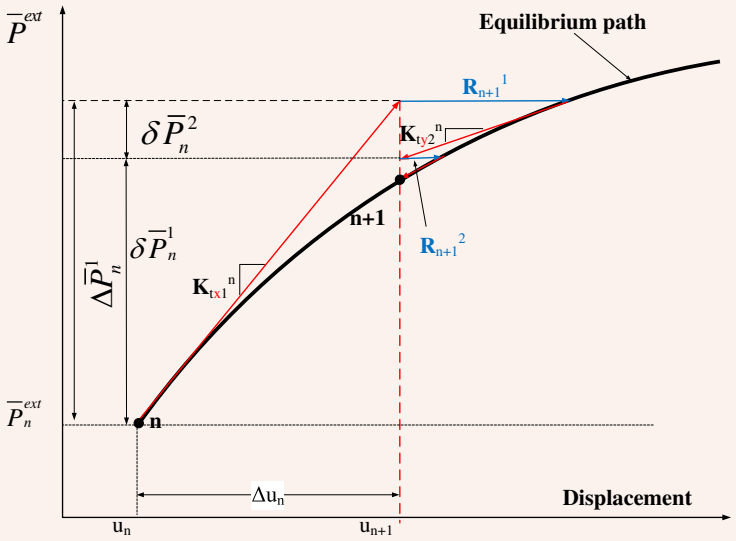
92 $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^0$ का आरंभिक अनुमान $\overline{\mathbf{P}}_n$ लिया जाता है, और इस आरंभिक अवस्था के परितः रैखिकीकरण के आधार पर प्राप्त होता है:

$$\overline{\mathbf{u}}_{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0) + \mathbf{K}_T(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^0)\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext}$$

जहाँ $\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^1$ अज्ञात विस्थापन-वृद्धि $\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1} = \overline{\mathbf{P}}_{n+1} - \overline{\mathbf{P}}_n$ का प्रथम सन्निकटन है।

93 वैकल्पिक रूप से हम समीकरण 59.6 के रैखिकीकरण से आरंभ करते हैं, चित्र 59.9।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 59.9: न्यूटन–रैफसन विधि; विस्थापन नियंत्रण

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{i}) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{P}}}\right)_{n+1}^{i} \delta \overline{\mathbf{P}}_n^i = 0 \tag{59.7}$$

जहाँ i एक गणक है जो $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{P}}_n$ से आरंभ होता है। हम देखते हैं कि

$$\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{P}}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}^{int}}{\partial \overline{\mathbf{P}}} = \mathbf{K}_T$$

94 $\overline{\mathbf{u}}^{ext}$ को नियत और $\mathbf{K}_T$ को स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह मानने पर समीकरण 59.7 देता है:

$$\mathbf{K}_T^i \delta \overline{\mathbf{P}}_n^i = -\mathbf{R}_{n+1}^i$$

अथवा

$$\delta \overline{\mathbf{P}}_n^i = -(\mathbf{K}_T^i)^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^i$$

95 अतः क्रमिक सन्निकटनों की श्रेणी देती है:

$$\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{i+1} = \overline{\mathbf{P}}_n + \Delta \overline{\mathbf{P}}_n^i = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^i + \delta \overline{\mathbf{P}}_n^i$$

जिसमें

$$\Delta \overline{\mathbf{P}}_n^i = \sum_{k \le i} \delta \overline{\mathbf{P}}_n^k$$

और यह अत्यंत तीव्रता से अभिसरित होती है।

96 ध्यान देना चाहिए कि प्रत्येक पुनरावृत्ति में तीन संगणकीय रूप से महँगे चरण सम्मिलित हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. आंतरिक विस्थापनों $\overline{\mathbf{u}}^{int}$ का मूल्यांकन
2. वैश्विक स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह $\mathbf{K}_T$ का मूल्यांकन
3. रैखिक समीकरण-तंत्र का समाधान



समीक्षाधीन प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

60 अरैखिक विश्लेषण; ज्यामितीय

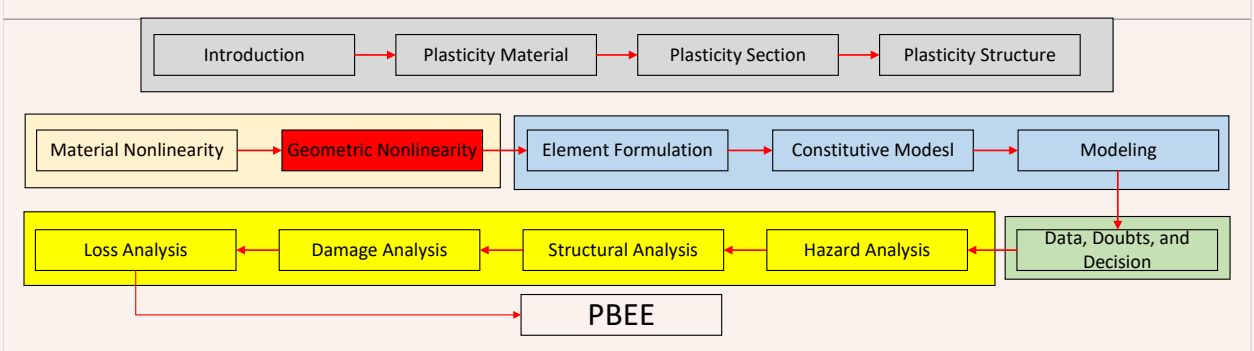
सारांश

ज्यामितीय अरैखिकता संरचनात्मक विश्लेषण का आधारभूत विचार है, जो बड़ी विकृतियों और/अथवा बड़े विस्थापनों वाली स्थितियों में उत्पन्न होती है; प्रत्येक के लिए विशिष्ट वैश्लेषिक पद्धति आवश्यक है। बड़ी विकृतियों के लिए प्रत्यास्थ दृढता आव्यूह में समायोजन आवश्यक होता है, जिससे $P-\delta$ विश्लेषण प्राप्त होता है; जबकि बड़े विस्थापनों में द्वितीयक विरूपण सम्मिलित होते हैं, जिनके लिए $P-\Delta$ विश्लेषण आवश्यक है। ये अरैखिक प्रभाव संयुक्त रूप से संरचना की भार क्षमता, स्थिरता और दृढता को प्रभावित करते हैं और परिशुद्ध संरचनात्मक प्रतिरूपण में अतिरिक्त चुनौतियाँ उत्पन्न करते हैं।

यह अध्याय ज्यामितीय दृढता आव्यूह $\mathbf{k}_g$ की व्यापक व्युत्पत्ति से आरंभ होता है, जो बड़ी विकृतियों और विस्थापनों से उत्पन्न ज्यामितीय अरैखिकताओं को सम्मिलित करने के लिए प्रत्यास्थ दृढता आव्यूह का पूरक है। यह आव्यूह संरचनात्मक अवयवों के व्याकुंचन भारों का परिशुद्ध पूर्वानुमान करने और दृढता तथा आंतरिक बलों पर पार्श्व भारों के प्रभाव का मूल्यांकन करने के लिए आवश्यक है। इसके बाद के अनुभाग उन मृदुकरण अथवा दृढीकरण प्रभावों का अध्ययन करते हैं जिन्हें पार्श्व भार संरचनाओं पर उत्पन्न कर सकते हैं और जो विभिन्न भारण परिस्थितियों में स्थिरता तथा विरूपण अभिलक्षणों को प्रभावित करते हैं।

अरैखिक संरचनात्मक व्यवहार की पुनरावृत्तीय प्रकृति के समाधान हेतु वृद्धिशील कलनविधि प्रस्तुत की गई है। यह चरण-दर-चरण पद्धति प्रत्येक अवस्था पर संरचनात्मक दृढता की पुनर्गणना करती है और विरूपण के दौरान संरचना की गतिक प्रतिक्रिया को अभिलेखित करती है। अध्याय में समाविष्ट अनेक MATLAB कूटों द्वारा व्यावहारिक अनुप्रयोग पर बल दिया गया है; संक्षिप्त प्रोग्रामिंग पसंद करने वालों के लिए वैकल्पिक Mathematica स्क्रिप्ट भी दी गई हैं। ये उदाहरण पाठकों को सैद्धांतिक सिद्धांतों का वास्तविक समस्याओं पर अनुप्रयोग संभव बनाते हैं और स्तंभों तथा ढाँचों के व्याकुंचन विश्लेषण एवं बाहुधरन धरनों के बड़े विक्षेप जैसे विषय समेटते हैं, जहाँ ज्यामितीय अरैखिकता की महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है। इन उदाहरणों द्वारा पाठक संरचनात्मक निष्पादन पर ज्यामितीय अरैखिकता के प्रभाव की व्यावहारिक समझ प्राप्त करते हैं और जटिल वास्तविक अभियांत्रिकी चुनौतियों को प्रभावी रूप से हल करने में सक्षम होते हैं।

60.1 ज्यामितीय दृढता आव्यूह 1959
60.1.1 व्युत्पत्ति 1959
60.1.2 प्रत्यास्थ अस्थिरता; द्विशाखन विश्लेषण 1962
60.2 वृद्धिशील स्पष्ट विश्लेषण 1970
60.2.1 उदाहरण 60.5: ब्रैकट धरन का बृहत् विक्षेप 1972
60.3 $P-\Delta$ पर पुनर्विचार 1976
60.3.1 उदाहरण 60.6: $\mathbf{K}_{geom}$ के बिना व्याकुंचन भार 1976



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

60.1 ज्यामितीय दृढता आव्यूह

1 ज्यामितीय दृढता आव्यूह बडी विकृतियों (अर्थात बडे विस्थापनों) के अधीन संरचनाओं के विश्लेषण का आवश्यक घटक है।

2 पहले इसकी व्युत्पत्ति करेंगे, फिर संरचनाओं के व्याकुंचन भार की संख्यात्मक गणना में इसका उपयोग करेंगे और तत्पश्चात अवयव की दृढता पर इसके प्रभाव (अर्थात मृदुकरण अथवा दृढीकरण) का मूल्यांकन करेंगे।

60.1.1 व्युत्पत्ति

3 इस प्रथम अनुभाग में तथाकथित *ज्यामितीय दृढता आव्यूह* की व्युत्पत्ति से आरंभ करते हैं। यह पूर्व व्युत्पन्न प्रत्यास्थ दृढता आव्यूह (§50.2.4) का एक "पूरक" है और केवल बडी विकृतियों (जिनकी पहले उपेक्षा की गई थी) को सम्मिलित करता है।

60.1.1.1 दुर्बल रूप

4 §50.2 में विवेचित परिमित अवयव के मूल संरूपण (छोटी विकृतियों की कल्पना सहित) का बडी विकृतियाँ सम्मिलित करने के लिए अब पुनर्विचार आवश्यक है।

5 पूर्ववत, समस्या को परिमित अवयव द्वारा विविक्त करने के लिए पहले नियामक अवकल समीकरण का दुर्बल रूप प्राप्त करना और फिर आभासी विकृति ऊर्जा का सिद्धांत लागू करना होगा। किंतु पहले के विपरीत, विकृति की अभिव्यक्ति में अतिरिक्त उच्चतर-कोटि पद (जिनकी आरंभ में उपेक्षा हुई थी) सम्मिलित किए जाएँगे।

60.1.1.2 विकृति

6 धरन–स्तंभ की विकृति को दो भागों में विघटित किया जा सकता है:

अक्षीय: बडे विस्थापनों को सम्मिलित करते हुए (समीकरण O.6 से)

$$\varepsilon_{xx} = \underbrace{u_{,x}}_{\text{First Order}} + \underbrace{\frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2)}_{\text{Second Order}}$$

जहाँ u और v क्रमशः अक्षीय और अनुप्रस्थ विस्थापन हैं। द्वितीय-कोटि पद वैश्लेषिक समाधान में विरूपित आकृति पर साम्य समीकरण लिखने का "प्रतिरूप" है (अथवा सरलतः बडी विकृतियों को सम्मिलित करता है)।

बंकनीय: ऑयलर–बर्नूली कल्पना (§22.2) से

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{M}{EI} \\ \sigma_{xx} &= -\frac{My}{I} \end{aligned}\right\} \varepsilon_{xx} = -y\frac{d^2v}{dx^2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

7 पुनर्व्यवस्थित करने पर कुल विकृति होती है:

$$\varepsilon_{xx}(x,y) = \underbrace{\underbrace{\frac{du}{dx}}_{\text{Axial}} \underbrace{- y\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)}_{\text{Flexure}}}_{\text{Small Deformation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}_{\text{Large Deformation}} \tag{60.1}$$

8 ध्यान दें कि दूसरा पद ऋणात्मक है, क्योंकि धनात्मक y (ऊपरी भाग) पर संपीडन प्रतिबल होते हैं। प्रथम और द्वितीय पद क्रमशः अक्षीय और बंकनीय विकृतियों के परिचित घटक हैं, जबकि तीसरा (अरैखिक) पद बड़े-विक्षेप विकृति–विस्थापन संबंध से प्राप्त होता है।

60.1.1.3 आंतरिक विकृति ऊर्जा

9 अवयव की (प्रत्यास्थ) आभासी विकृति ऊर्जा (मूलतः समीकरण 50.4) अब होती है:

$$\delta U_i^{(e)} = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}\,d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega E\varepsilon_{xx}\delta\varepsilon_{xx}\,d\Omega$$

10 समीकरण 60.1 को $U_i^{(e)}$ में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}\delta U_i^{(e)} = \frac{1}{2}\int_L\int_A \Bigg[&\frac{du}{dx}\frac{d\delta u}{dx} + y^2\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\left(\frac{d\delta v}{dx}\right)^2 \\ &- 2y\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx} - y\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right)\Bigg] E\,dA\,dx\end{aligned}$$

11 $\int_A dA = A$, $\int_A y dA \overset{\text{def}}{=} 0$ और $\int_A y^2 dA \overset{\text{def}}{=} I$ स्मरण रखते हुए, उच्चतम-कोटि पद त्यागकर और अक्षीय भारण के स्वतंत्र पूर्व-व्याकुंचन विश्लेषण की कल्पना के अधीन, जहाँ

$$P^{(e)} = EA\frac{du}{dx} \Rightarrow A\frac{du}{dx} = \frac{P^{(e)}}{E}$$

प्राप्त होता है:

$$\delta U_i^{(e)} = \delta U_i^{(e,a)} + \delta U_i^{(e,f)} \tag{60.2}$$

$$\delta U_i^{(e,a)} = \frac{1}{2}\int_L EA\frac{d\delta u}{dx}\frac{du}{dx}dx \tag{60.3}$$

$$\delta U_i^{(e,f)} = \frac{1}{2}\int_L \left[EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + P^{(e)}\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right] dx \tag{60.4}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$

12 पुनः, बडी विकृतियों के अधीन धरन–स्तंभ का दृढता आव्यूह व्युत्पन्न करने के लिए §50.2.4 में विवेचित प्रक्रिया का अनुसरण करते हैं। चार संधि-विस्थापनों के पदों में अनुप्रस्थ विस्थापनों का फलनिक निरूपण मानते हुए

$$
\begin{aligned}
v &= \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}} \\
\frac{dv}{dx} &= \mathbf{N}_{,x}\overline{\mathbf{u}} \\
\frac{d^2v}{dx^2} &= \mathbf{N}_{,xx}\overline{\mathbf{u}}
\end{aligned}
$$

जहाँ आकार फलन समीकरण 49.3 से दिए गए हैं।

13 आंतरिक आभासी विकृति ऊर्जा बाह्य आभासी कार्य के बराबर होनी चाहिए:

$$
\begin{aligned}
\delta U_i^{(e,f)} &= \frac{1}{2}\int_L \left[EI \frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + P^{(e)}\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right] dx \\
\delta W_e &= P^{(e)}\int_0^L \left[\left(\frac{d\delta u}{dx}\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{d\delta v}{dx}\frac{dv}{dx}\right)\right] dx \\
\left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g\right]\mathbf{u}_e &= \mathbf{P} \\
\left[\mathbf{k}_e^{(e)}\right] &= \left[\int_L EI \underbrace{\{\mathbf{N}_{,xx}\}}_{\mathbf{B}^T}\underbrace{\lfloor \mathbf{N}_{,xx}\rfloor}_{\mathbf{B}} dx\right] \\
\left[\mathbf{k}_g^{(e)}\right] &= \left[P^{(e)}\int_L \{\mathbf{N}_{,x}\}\lfloor \mathbf{N}_{,x}\rfloor dx\right] \quad \text{Geometric Stiffness Matrix}
\end{aligned}
\tag{60.5}
$$

ध्यान दें कि ज्यामितीय दृढता आव्यूह के पद केवल ज्यामितीय प्राचलों (लंबाई) पर निर्भर करते हैं।

14 आकार फलनों को प्रतिस्थापित करने पर:

$$
\mathbf{k}_g^{(e)} = \frac{P}{L}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\
0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\
0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2
\end{bmatrix}
\end{array}
\tag{60.6}
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

15 साम्य संबंध है:

$$\mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{P}}$$
$$\mathbf{k}^{(e)} = \mathbf{k}_e^{(e)} + \mathbf{k}_g^{(e)}$$
$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g$$

हम देखते हैं कि तनन भार P, जिसे $\mathbf{K}_g$ द्वारा लगाया जाता है, के लिए संरचना अधिक दृढ और संपीडन में अधिक दुर्बल हो जाती है।

60.1.2 प्रत्यास्थ अस्थिरता; द्विशाखन विश्लेषण

16 ज्यामितीय दृढता आव्यूह की व्युत्पत्ति के बाद देखें कि संरचना का व्याकुंचन भार निर्धारित करने में इसका उपयोग कैसे होता है। अतः वह गुणक λ, जो प्रथम-कोटि रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण से प्राप्त आरंभिक भार सदिश $\overline{\mathbf{P}}^*$ (जो इकाई हो सकता है) पर लागू होकर व्याकुंचन उत्पन्न करेगा, निर्धारित करेंगे:

$$\overline{\mathbf{P}}_{cr} = \lambda \overline{\mathbf{P}}^*$$

17 चूँकि ज्यामितीय दृढता आव्यूह आंतरिक बलों के समानुपाती है,

$$\mathbf{K}_g = \lambda \mathbf{K}_g^*$$

जहाँ $\mathbf{K}_g^*$ संदर्भ भार $\overline{\mathbf{P}}^*$ (सामान्यतः इकाई) के ज्यामितीय दृढता आव्यूह के अनुरूप है।

18 चूँकि प्रत्यास्थ दृढता आव्यूह $\mathbf{K}_e$ नियत रहता है, लिख सकते हैं:

$$(\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*)\overline{\mathbf{u}} - \underbrace{\lambda \overline{\mathbf{P}}^*}_{\overline{\mathbf{P}}_{cr}} = 0$$

19 तब विस्थापन दिए जाते हैं:

$$\overline{\mathbf{u}} = (\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*)^{-1} \lambda \overline{\mathbf{P}}^*$$

और विस्थापनों के अनंत की ओर जाने (अर्थात व्याकुंचन/द्विशाखन/अस्थिरता) के लिए:

$$|\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*| = 0 \Rightarrow |\mathbf{K}_g^{*-1}\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{I}| = 0$$

यह एक अभिलाक्षणिक मान समस्या है, जिससे अभिलाक्षणिक मान $\boldsymbol{\lambda}$ हल किए जा सकते हैं।

20 किंतु $\mathbf{K}_g^*$ के विकरण पर कुछ शून्य पद हैं (समीकरण 60.6); अतः वैकल्पिक संरूपण का उपयोग करते हैं:

$$|\mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{K}_g^* + \frac{1}{\lambda}\mathbf{I}| = 0$$

किंतु $\mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{K}_g^*$ संभवतः सममित न हो।

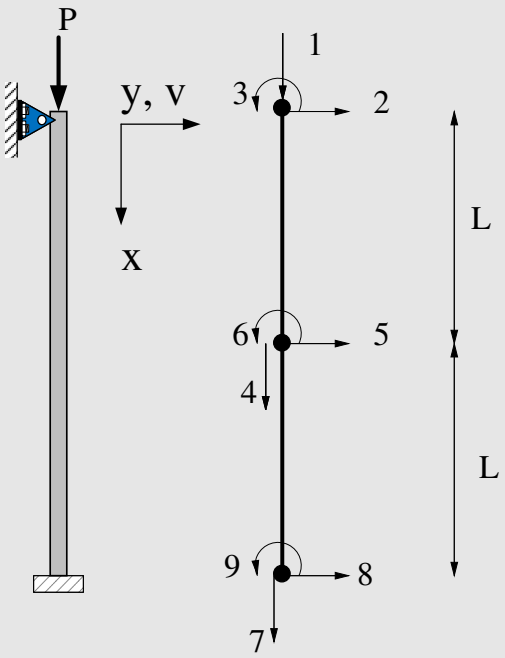
21 λ का न्यूनतम मान λ_{crit} संरचना का व्याकुंचन भार देगा, और व्याकुंचन भार होंगे:

$$\overline{\mathbf{P}}_{crit} = \lambda_{crit} \overline{\mathbf{P}}^*$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

60.1.2.1 उदाहरण 60.1: स्तंभ व्याकुंचन

हम आबद्ध-संधित स्तंभ का व्याकुंचन भार संख्यात्मक रूप से निर्धारित करना और परिणामों की तुलना §29.3.2.1.3 के वैश्लेषिक समाधान से करना चाहते हैं। प्रत्यास्थ और ज्यामितीय दृढता आव्यूह इस प्रकार दिए गए हैं:



$$\mathbf{k}_e^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{k}_g^1 = \frac{-P}{L} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

अब अवयव दृढताओं से संरचना के दृढता आव्यूह $\mathbf{K}_e$ और $\mathbf{K}_g$ संयोजित किए जा सकते हैं। स्तंभ के शून्य विस्थापनों के अनुरूप पंक्तियाँ और स्तंभ 2, 7, 8, 9 हटाने पर प्राप्त होता है:

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{L^3} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 2\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -6L & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{K}_g = \frac{-P}{L} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15}L^2 & \frac{-L}{10} & \frac{-L^2}{30} \\ 0 & 0 & \frac{-L}{10} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & \frac{4}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

यह ध्यान रखते हुए कि इस स्थिति में $\mathbf{K}_g^* = \mathbf{K}_g$ जब $P = 1$, सारणिक $|\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*| = 0$ देता है:

$$\begin{array}{c|} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac{AL^2}{I} & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 2\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L^2 - \frac{2}{15}\frac{\lambda L^4}{EI} & -6L + \frac{1}{10}\frac{\lambda L^3}{EI} & 2L^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda L^4}{EI} \\ 0 & 0 & -6L + \frac{1}{10}\frac{\lambda L^3}{EI} & 24 - \frac{12}{5}\frac{\lambda L^2}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 2L^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda L^4}{EI} & 0 & 8L^2 - \frac{4}{15}\frac{\lambda L^4}{EI} \end{vmatrix} \end{array} = 0$$

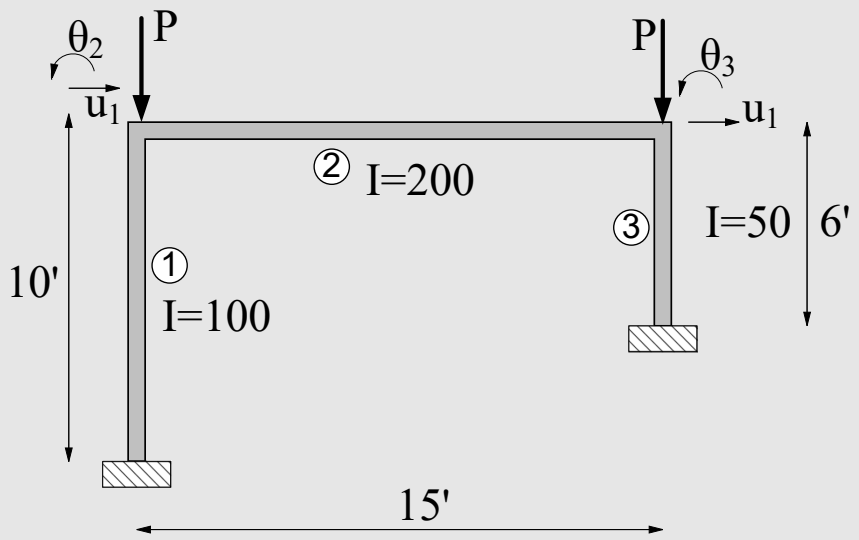
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस बिंदु पर हम संख्यात्मक अथवा बीजीय समाधान कर सकते हैं। साहसपूर्वक दूसरा विकल्प चुनें: $\phi = \frac{AL^2}{I}$ और $\mu = \frac{\lambda L^2}{EI}$ प्रस्तुत करने पर सारणिक होता है:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & \\ 1 & \phi & -\phi & 0 & 0 & 0 & \\ 4 & -\phi & 2\phi & 0 & 0 & 0 & \\ 3 & 0 & 0 & 2\left(2-\frac{\mu}{15}\right) & -6L+\frac{\mu}{10} & 2+\frac{\mu}{30} & \\ 5 & 0 & 0 & -6L+\frac{\mu}{10} & 12\left(2-\frac{\mu}{5}\right) & 0 & \\ 6 & 0 & 0 & 2+\frac{\mu}{30} & 0 & 4\left(2-\frac{\mu}{15}\right) & \end{array} = 0$$

सारणिक का प्रसार करने पर μ में घन समीकरण $3\mu^3 - 220\mu^2 + 3,840\mu - 14,400 = 0$ प्राप्त होता है, जिसका न्यूनतम मूल $\mu = 5.1772$ है। अतः $2L$ लंबाई के स्तंभ का व्याकुंचन भार $P_{cr} = \lambda = \frac{5.1772EI}{L^2}$ है। L लंबाई के स्तंभ का यथार्थ समाधान है: $P_{cr} = \frac{(4.4934)^2}{L^2}EI = \frac{(4.4934)^2}{(2L)^2}EI = 5.0477\frac{EI}{L^2}$ अतः संख्यात्मक मान यथार्थ मान से लगभग 2.6 प्रतिशत अधिक है।

60.1.2.2 उदाहरण 60.2: ढाँचा व्याकुंचन; Matlab समाधान



न्यूनतम व्याकुंचन भार प्रवर्धन गुणक λ, 2,017 kips के बराबर है।

Matlab समाधान

```
% Main Function
% zero the matrices
k=zeros(6,6,3) ; K=zeros(6,6,3) ; Gamma=zeros(6,6,3) ;
% Structural properties units : in^2 , in^4 , and ksi
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
A=[24.5 34.6 18]; II=[100 200 50];EE=29000;
% Element 1
i =[0,0]  ; j =[0,120] ; [k(:,:,1),K(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=stiff(EE, II(1),A(1),i, j
    ) ;
% Element 2
i =j ;     j =[180,120]; [k(:,:,2),K(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=stiff(EE, II(2),A(2),i ,j
    ) ;
% Element 3
i =j;      j =[180, 48]; [k(:,:,3),K(:,:,3),Gamma(:,:,3)]=stiff(EE, II(3),A(3),i ,j
    ) ;
% Define ID matrix % Note that this is the transpose of what we use
ID=[-4 5 -6; 1 -7 2;1 -8 3; -9 -10 -11] ;
% Determine the LM matrix
LM=[-4 -5 -6 1 -7 2; 1 -7 2 1 -8 3; 1 -8 3 -9 -10 -11];
% Assemble augmented stiffness matrix
Kaug=zeros(11) ;
for elem=1:3
      for r=1:6
            lr=abs(LM(elem,r)) ;
            for c=1:6
                  lc=abs(LM(elem,c)) ;
                  Kaug(lr , lc )=Kaug(lr ,lc)+K(r,c ,elem ) ;
            end
      end
end
Ktt=Kaug (1:3 ,1:3 );
P=[1 0 1];
% zero the matrices
g=zeros(6,6,3) ; G=zeros(6,6,3) ; Gamma=zeros(6,6,3) ;
% Element 1
i =[0,0]  ; j =[0,120] ; [g(:,:,1),G(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=gstiff(P(1),i, j ) ;
% Element 2
i =[0,120]; j =[180,120]; [g(:,:,2),G(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=gstiff(P(2),i ,j ) ;
% Element 3
i =j;      j =[180, 48]; [g(:,:,3),G(:,:,3),Gamma(:,:,3)]=gstiff(P(3),i, j ) ;
% Assemble augmented geometric stiffness matrix
Gaug=zeros(11) ;
for elem=1:3
   for r=1:6
      lr=abs(LM(elem,r)) ;
      for c=1:6
         lc=abs(LM(elem,c)) ;
         Gaug(lr,lc)=Gaug(lr,lc)+G(r,c,elem) ;
      end
   end
end
Gtt=Gaug (1:3,1:3);
I=eye(3);
M=inv(Gtt).*Ktt          % try this first if not workable go to  M=inv(Ktt).*Gtt
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
[V,pcrit]=eig(M,-I)
%Stiffness Function
function [k ,K,Gamma]= stiff(EE, II ,A, i , j )
% Determine the length
L=sqrt ((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2) ;
% Compute the angle alpha
alpha=atan2 (j(2)-i(2),j(1)-i(1)) ;
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[ cos(alpha)  sin(alpha)   0           0          0  0 ;
       -sin(alpha)  cos(alpha)   0           0          0  0 ;
                  0           0   1           0          0  0 ;
                  0           0   0  cos(alpha) sin(alpha)  0 ;
                  0           0   0 -sin(alpha) cos(alpha)  0 ;
                  0           0   0           0          0  1 ] ;
% form element stiffness matrix in local coordinate system
EI=EE*II ; EA=EE*A;
k= [EA/L,          0,          0 , EA/L,          0,         0 ;
      0 , 12*EI/L^3,   6*EI/L^2,     0, -12*EI/L^3,  *EI/L^2 ;
        0,  6*EI/L^2,     4*EI/L,     0,  -6*EI/L^2,   2*EI /L;
   -EA/L,          0,          0, EA/L,          0,         0;
        0, 12*EI/L^3, -6*EI /L^2,     0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2;
        0,  6*EI/L^2,     2*EI/L,     0, -6*EI /L^2,     4*EI/L ] ;
% Element stiffness matrix in global coordinate system
K=Gamma'* k*Gamma;
end
% Geometric Stiffness Function
function [ g,G,Gamma ]= gstiff(P,i,j)
% Determine the l ength
L=sqrt ((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2) ;
% Element  geometric stiffness matrix in local  coordinate  system
g=-P/L*[0     0         0    0      0       0  ;
        0   6/5       L/10    0   -6/5      L/10;
        0  L/10  2*L^2/15    0  -L/10   -L^2/30;
        0     0         0    0      0       0  ;
        0  -6/5     -L/10    0    6/5     -L/10;
        0  L/10   -L^2/30    0  -L/10   2*L^2/15 ];
% Compute the angle alpha
alpha=atan2 (j(2)-i(2),j(1)-i(1)) ;
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[ cos(alpha)  sin(alpha)  0           0           0  0 ;
       -sin(alpha)  cos(alpha)  0           0           0  0 ;
                  0           0  1           0           0  0 ;
                  0           0  0   cos(alpha)   sin(alpha)  0 ;
                  0           0  0  -sin(alpha)   cos(alpha)  0 ;
                  0           0  0           0           0  1 ] ;
%Element  geometric stiffness matrix in global  coordinate  system
G=Gamma'* g*Gamma;
end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

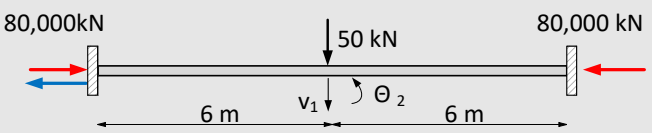
60.1.2.3 उदाहरण 60.3: ढाँचा व्याकुंचन; Mathematica समाधान

Mathematica समाधान

```
(* Initialize constants *)
a1=0 a2=0 a3=0 i1=100 i2=200 i3=50 l1=10 12 l2=15 12 l3=6 12 e1=29000 e2=e1 e3=e1
(* Define elastic stiffness matrices *)
ke[e_,a_,l_,i_]:={
{e a/l   , 0           , 0          , -e a/l , 0           , 0          },
{0       , 12 e i/l^3  , 6 e i/l^2  , 0      , -12 e i/l^3 , 6 e i/l^2  },
{0       , 6 e i/l^2   , 4 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 2 e i/l    },
{-e a/l  , 0           , 0          , e a/l  , 0           , 0          },
{ 0      , -12 e i/l^3 , -6 e i/l^2 , 0      , 12 e i/l^3  , -6 e i/l^2 },
{ 0      , 6e i/l^2    , 2 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 4 e i/l    } }
ke1=ke[e1,a1,l1,i1]; ke2=ke[e2,a2,l2,i2]; ke3=ke[e3,a3,l3,i3]
(* Define geometric stiffness matrices *)
kg[l_,p_]:=p/l{
{0 , 0    , 0        , 0 , 0      , 0        }, {0 , 6/5  , l/10    , 0 , - 6/5  ,
    l/10     },
{0 , l/10 , 2 l^2/15 , 0 , - l/10 , - l^2/30 }, {0 , 0    , 0        , 0 , 0      ,
    0        },
{0 , -6/5 , - l/10   , 0 , 6/5    , - l/10   }, {0 , l/10 , - l^2/30 , 0 , - l/10 ,
    2 l^2/15 } }
kg1=kg[l1,1]
kg3=kg[l3,1]
(* Assemble structure elastic and geometric stiffness matrices *)
ke={
{ ke1[[2,2]]+ke3[[2,2]] , ke1[[2,3]]             , ke3[[2,3]]             },
{ ke1[[3,2]]            , ke1[[3,3]]+ke2[[3,3]] , ke2[[3,6]]             },
{ ke3[[3,2]]            , ke2[[6,3]]             , ke2[[6,6]]+ke3[[3,3]] } }
kg={
{ kg1[[2,2]]+kg3[[2,2]] , kg1[[2,3]] , kg3[[2,3]] },
{ kg1[[3,2]]            , kg1[[3,3]] , 0          },
{ kg3[[3,2]]            , 0          , kg3[[3,3]] } }
(* Determine critical loads in terms of p (note p=1) *)
p=1
keigen=Inverse[kg] . ke; pcrit=N[Eigenvalues[keigen]]; modshap=N[Eigensystems[
    keigen]]
```

60.1.2.4 उदाहरण 60.4: बंकनीय विरूपण पर अक्षीय भार का प्रभाव

इस उदाहरण में हम धरन–स्तंभ की दृढता पर संपीडन अथवा तनन अक्षीय बलों के प्रभाव का मूल्यांकन करना चाहते हैं। यह समस्या §29.2.2 में वैश्लेषिक रूप से हल की गई थी।



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

धरन–स्तंभ के लिए दो अवयवों का उपयोग करने पर केवल मध्यविस्तार का विक्षेप और घूर्णन स्वतंत्रता-कोटियाँ हैं (अक्षीय विरूपण की उपेक्षा की गई है)।

Matlab

```
clear; close all;clc;
%% Initialization for a 2 element structure
% zero the matrices
k=zeros(6,6,2);K=zeros(6,6,2);kg=zeros(6,6,2);Kg=zeros(6,6,2);Gamma=zeros(6,6,2);
% Structural properties m^2, m^4, and Pa
A=1;II=2e-3;EE=2e9;
% Elements' axial loads
Fax=-8e4*[1,1];
%% Call the function stiff to compute the element stiffness matrices and the
    rotation ones
% Element 1
i=[0,0];j=[6,0];
[k(:,:,1),K(:,:,1),kg(:,:,1),Kg(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=stiff_1(EE,II,A,i,j,Fax(1));
% Element 2
i=j;j=[12,0];
[k(:,:,2),K(:,:,2),kg(:,:,2),Kg(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=stiff_1(EE,II,A,i,j,Fax(2));
%% Determine the LM matrix
LM=[
4 5 6 1 2 3;
1 2 3 7 8 9];
%% Assemble augmented stiffness matrix
Kaug=zeros(9);Kgaug=zeros(9);
for elem=1:2
   for r=1:6
      lr=abs(LM(elem,r));
      for c=1:6
         lc=abs(LM(elem,c));
                Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem);
                Kgaug(lr,lc)=Kgaug(lr,lc)+Kg(r,c,elem);
          end
   end
end
%% Extract the structures Stiffness Matrix
Ktt=Kaug(1:3,1:3);Kgtt=Kgaug(1:3,1:3);
%% Find buckling load multiplier
B=inv(Ktt)*Kgtt;lambda=-1*eye(3,1)./eig(B);
%% Assemble the load vector for the unrestrained node
P=[0,-50,0];
%% Solve for the Displacements in meters
Displacements=inv(Ktt+Kgtt)*P'
%% Solve for the internal forces and do not forget to include the fixed end actions
dis_global(:,:,1)=[0,0,0,Displacements(1:3)'];dis_global(:,:,2)=[Displacements(1:3)
    ',0,0,0];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
for elem=1:2
  dis_local=Gamma(:,:,elem)*dis_global(:,:,elem)';
  int_forces=(k(:,:,elem)+kg(:,:,elem))*dis_local
end
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
function [k,K,kg,Kg,Gamma]=stiff_1(EE,II,A,i,j,P)
\red{from above exampes}
```

Mathematica

```
  (* Initialize constants *)
  OpenWrite["mat.out"]; a1=1; a2=1; i1=1 l^3/12;i2=i1; l1=12;l2=12; e1=200000;e2=e1
    ;e3=e1;
  theta1=N[Pi/8];theta2=Pi-theta1; load i1=i i2=i1 l=6 l1=l l2=6 p=-80000 load
    ={-50,0}
  (* Define elastic stiffness matrices *)
  ke[e_,a_,l_,i_]:={
    {e a/l   , 0           , 0          , -e a/l , 0           , 0          },
    {0       , 12 e i/l^3  , 6 e i/l^2  , 0      , -12 e i/l^3 , 6 e i/l^2  },
    {0       , 6 e i/l^2   , 4 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 2 e i/l    },
    {-e a/l  , 0           , 0          , e a/l  , 0           , 0          },
    { 0      , -12 e i/l^3 , -6 e i/l^2 , 0      , 12 e i/l^3  , -6 e i/l^2 },
    { 0      , 6e i/l^2    , 2 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 4 e i/l    } }
  ke1=N[ke[e,a1,l1,i1]]; ke2=N[ke[e,a2,l2,i2]]
  (* Assemble structure elastic stiffness matrices *)
  ke=N[{
    { ke1[[5,5]]+ke2[[2,2]], ke1[[5,6]]+ke2[[2,3]]},
    { ke1[[6,5]]+ke2[[3,2]], ke1[[6,6]]+ke2[[3,3]]} }]
  WriteString["mat.out",MatrixForm[ke1]]; WriteString["mat.out",MatrixForm[ke2]];
  WriteString["mat.out",MatrixForm[ke]]
  (* Define geometric stiffness matrices *)
  kg[p_,l_]:=p/l {
    {0 , 0    , 0        , 0 , 0      , 0        }, {0 , 6/5  ,  l/10    , 0 , -
    6/5  , l/10     },
    {0 , l/10 , 2 l^2/15 , 0 , - l/10 , - l^2/30 }, {0 , 0    , 0        , 0 , 0
       , 0        },
    {0 , -6/5 , - l/10   , 0 ,  6/5   , - l/10   }, {0 , l/10 , - l^2/30 , 0 , - l
    /10 , 2 l^2/15 } }
  kg1=N[kg[p,l1]]; kg2=N[kg[p,l2]]
  (* Assemble structure geometric stiffness matrices *)
  kg=N[{
    { kg1[[5,5]]+kg2[[2,2]], kg1[[5,6]]+kg2[[2,3]]},
    { kg1[[6,5]]+kg2[[3,2]], kg1[[6,6]]+kg2[[3,3]]} }]
  (* Determine critical loads and normalize wrt p  *)
  keigen=Inverse[kg] . ke; pcrit=N[Eigenvalues[keigen] p]
  (* Note that this gives lowest pcrit=1.11  10^6, exact value is 1.095 10^6 *)
  (* Add elastic to geometric structure stiffness matrices *)
  k=ke+kg
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
(* Invert stiffness matrix and solve for displacements *)
km1=Inverse[k] dis=N[km1 . load]
(* Displacements of element 1*)
dis1={0, 0, 0, 0, dis[[1]], dis[[2]]}
k1=ke1+kg1
(* Member end forces for element 1 with axial forces  *)
endfrc1=N[k1 . dis1]
(* Member end forces for element 1 without axial forces  *)
knopm1=Inverse[ke]; disnop=N[knopm1 . load]; disnop1={0, 0, 0, 0, disnop[[1]],
  disnop[[2]]}
(* Displacements of element 1*)
endfrcnop1=N[ke1 . disnop1]
```

संयोजित प्रत्यास्थ और ज्यामितीय दृढता आव्यूहों का व्युत्क्रम लेने पर:

$$\left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.00012123 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=-80{,}000} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.0001125 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=0} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.000104944 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=80{,}000}$$

अवयव 1 के अवयव-अंत बल:

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{lft} \\ V_{lft} \\ M_{lft} \\ P_{rgt} \\ V_{rgt} \\ M_{rgt} \end{array} \right\} = \left[[\mathbf{k}_e^1] + [\mathbf{k}_g^1] \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{lft} \\ v_{lft} \\ \theta_{lft} \\ u_{rgt} \\ v_{rgt} \\ \theta_{rgt} \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 79.8491 \\ 0. \\ -25. \\ 79.8491 \end{array} \right\}}_{P=-80{,}000} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 75. \\ 0. \\ -25. \\ 75. \end{array} \right\}}_{P=0} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 70.8022 \\ 0. \\ -25. \\ 70.8022 \end{array} \right\}}_{P=80{,}000}$$

संपीडन बल विस्थापनों और अंत आघूर्णों को बढ़ाता है, जबकि तनन बल उन्हें घटाकर संरचना को अधिक दृढ बनाता है।

60.2 वृद्धिशील स्पष्ट विश्लेषण

22 अरैखिक विश्लेषण के विभिन्न प्रकारों, चित्र 54.5 (स्पष्टता के लिए यहाँ पुनः दर्शाया गया है), के संदर्भ में अब हम वृद्धिशील विश्लेषण (प्रकार 3) पर केंद्रित होते हैं।

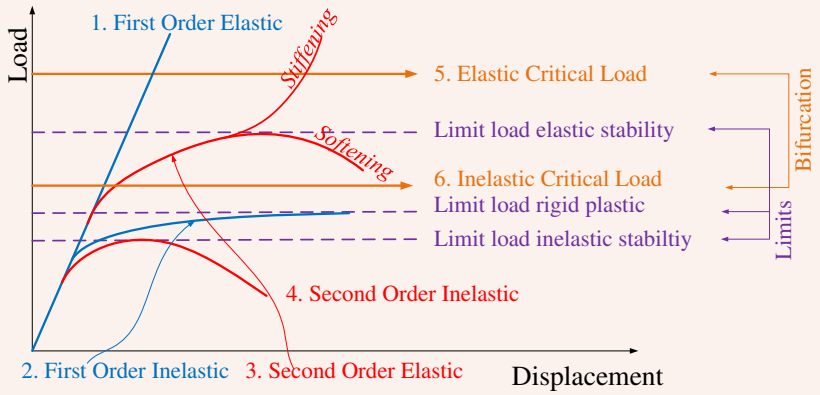
23 निम्न से आरंभ करते हुए

$$\left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g\right] \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{P}}$$

इस अरैखिक समीकरण को हल करने की एक सरल विधि चरण-दर-चरण अथवा वृद्धिशील प्रक्रिया का उपयोग करना है। संगत रैखिकृत वृद्धिशील सूत्रीकरण वृद्धिशील संकारक Δ को लागू करके प्राप्त किया जा सकता है।

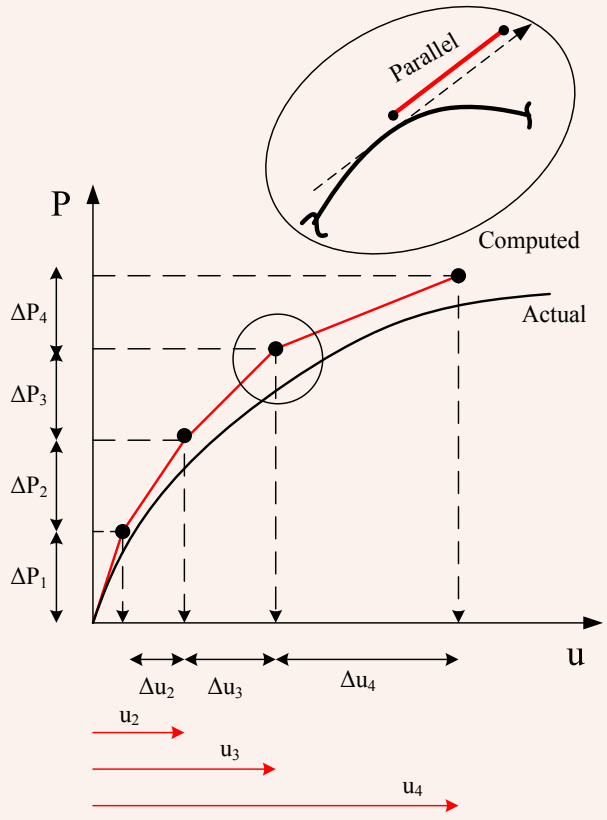
$$\{\Delta \overline{\mathbf{u}}\}_i = \left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g\right]_i^{-1} \{\Delta \overline{\mathbf{P}}\}_i$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 60.1: संरचनात्मक विश्लेषण के स्तर

[24] इस विधि को चित्र 60.2 में दर्शाया गया है (जो चित्र 59.2 में दिए गए संगत चित्र का सरलीकृत रूप है)।



चित्र 60.2: ज्यामितीय अरैखिकता के लिए सुपष्ट वृद्धिशील उपागम

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

25 यह प्रक्रिया अत्यंत सरल है और इसे आसानी से प्रोग्राम किया जा सकता है:

1. वृद्धिशील भार ΔP_i प्रत्येक वृद्धि i पर लागू करें।
2. प्रत्येक वृद्धि के अंत में:
   (a) कुल विस्थापन $u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$ को अद्यतन करें।
   (b) ज्यामिति $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i$ को अद्यतन करें और नई लंबाइयाँ प्राप्त करें।
   (c) रूपांतरण आव्यूह को अद्यतन करें।
   (d) प्रत्यास्थ तथा ज्यामितीय दृढता आव्यूहों को अद्यतन करें।
3. ध्यान दें कि हम प्रत्येक वृद्धि के अंत में संतुलन की जाँच नहीं कर रहे हैं (इस पर आगे और चर्चा होगी); यदि पर्याप्त छोटे चरण लिए जाएँ, तो समाधान बहुत अधिक अपसारित नहीं होना चाहिए।
4. ज्यामिति के अद्यतन में $P-\Delta$ प्रभावों को भी सम्मिलित किया जाना चाहिए।

26 ध्यान रखें कि यह वृद्धिशील विश्लेषण है; प्रत्येक विश्लेषण भार की एक वृद्धि से संबद्ध है। प्रत्येक वृद्धि के अंत में:

$$\begin{aligned}
\text{Displacements} \quad & \Delta \mathbf{u}^i; \quad \mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i-1} + \Delta \mathbf{u}^i \\
\text{Nodal coordinates} \quad & \qquad \mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} + \Delta \mathbf{u}^i \\
\text{Internal forces} \quad & \Delta \mathbf{F}^i; \quad \mathbf{F}^i = \mathbf{F}^{i-1} + \Delta \mathbf{F}^i \\
\text{Total Reactions} \quad & \Delta \mathbf{R}^i; \quad \mathbf{R}^i = \mathbf{R}^{i-1} + \Delta \mathbf{R}^i
\end{aligned}$$

और प्रत्येक वृद्धि के आरंभ में निम्न राशियों की पुनर्गणना आवश्यक है:

- लंबाइयाँ, दिक्-कोज्याएँ और रूपांतरण आव्यूह।
- अद्यतन नोडीय निर्देशांकों तथा रूपांतरण आव्यूह पर आधारित अवयव दृढता आव्यूह।
- प्रत्येक अवयव के लिए अद्यतन कुल अक्षीय बल (अवयव के आंतरिक बलों से) पर आधारित ज्यामितीय दृढता आव्यूह।

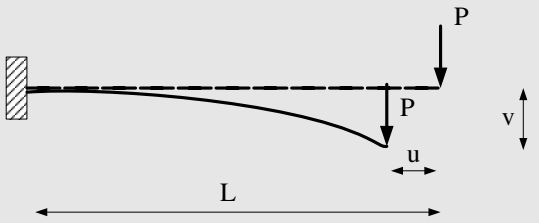
आंतरिक बलों की गणना के लिए $\mathbf{k}$ तथा $\mathbf{k}_g$ का उपयोग करें।

60.2.1 उदाहरण 60.5: ब्रैकट धरन का बृहत् विक्षेप

ब्रैकट धरन के बृहत् विक्षेप का समाधान प्रारंभिक धरन सिद्धांत से प्राप्त नहीं किया जा सकता, क्योंकि उसकी मूल मान्यताएँ अब वैध नहीं रहतीं। विशेष रूप से, प्रारंभिक सिद्धांत वक्रता सूत्र में प्रथम अवकलज के वर्ग की उपेक्षा करता है और धरन के भारित सिरे के विक्षेपित होने पर आधूर्ण-भुजा के छोटा होने का कोई संशोधन नहीं देता। बड़े परिमित भारों के लिए यह धरन की लंबाई से भी अधिक विक्षेप देता है! प्रथम अवकलज का वर्ग तथा आधूर्ण-भुजा के छोटा होने के संशोधन गुणक बृहत्-विक्षेप समस्याओं के समाधान में प्रमुख योगदान बन जाते हैं। यद्यपि वैश्लेषिक समाधान §29.2.3 में दिया गया है, यहाँ हम संख्यात्मक समाधान ज्ञात करते हैं। हम E = 800 kN/mm^2, L = 4,000 mm, I_z = 1e7 mm^4, A=50 mm^2 तथा P= 5,000 kN मानते हैं। दंड को समान लंबाई के 5 सदस्यों में विविक्तीकृत किया जाएगा, -10kN की वृद्धि प्रयुक्त होगी, और x अक्ष मुक्त सिरे से (बाईं ओर) जाता है। हम मानते हैं कि बंकन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

से धरन की लंबाई में परिवर्तन नहीं होगा (अविस्तार्य)। हम विमाहीन भार के सापेक्ष मुक्त सिरे के सामान्यीकृत नोडीय विस्थापनों (u तथा v) को आलेखित करना चाहते हैं।




```
% Load increment
dP=10000;
stepNo=5000000/dP;
% zero the matrices
nodeCoord=zeros(6,2);
k=zeros(6,6,5);K=zeros(6,6,5);kg=zeros(6,6,5);Kg=zeros(6,6,5);Gamma=zeros(6,6,5);
P=zeros(1,stepNo);dis_global=zeros(15,stepNo);deltaDis_global=zeros(5,6);
int_forces=zeros(6,5);
% Structural properties mm^2, mm^4, and kN/mm^2
A=50e-6;II=1e7*1e-12;EE=800e9; % convert to meters
% Determine the LM matrix
LM=[
16 17 18 13 14 15;
13 14 15 10 11 12;
10 11 12  7  8  9;
 7  8  9  4  5  6;
 4  5  6  1  2  3];
% Assemble the load vector for the unrestrained node
deltaP=[0 (-1*dP) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
% Initial elements axial forces
axF=zeros(5,1);
% Initial node coordinates
for node=1:6
  nodeCoord(node,:)=[(node-1)*0.8,0];
end
%% Incremental analysis
for step=1:stepNo
   P(step)=step*dP;
% Call the function stiff_1 to compute the element stiffness matrices and the
    rotation ones.
   for elem=1:5
      i=nodeCoord(elem,:);
      j=nodeCoord(elem+1,:);
      [k(:,:,elem),K(:,:,elem),kg(:,:,elem),Kg(:,:,elem),Gamma(:,:,elem)]=stiff_1(
    EE,II,A,i,j,axF(elem));
   end
% Assemble augmented stiffness matrix
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    Kaug=zeros(18);Kgaug=zeros(18);
%
    for elem=1:5
        for r=1:6
            lr=abs(LM(elem,r));
            for c=1:6
                lc=abs(LM(elem,c));
                Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem);
                Kgaug(lr,lc)=Kgaug(lr,lc)+Kg(r,c,elem);
            end
        end
    end
% Extract the structures Stiffness Matrix
    Ktt=Kaug(1:15,1:15);Kgtt=Kgaug(1:15,1:15);
% Solve for the Displacements in meters
    deltaDis=inv(Ktt+Kgtt)*deltaP';
% Update nodal displacements
    if step==1
        dis_global(:,step)=deltaDis;
    else
        dis_global(:,step)=dis_global(:,step-1)+deltaDis;
    end
% Solve for the internal forces
    deltaDis_global(1,:)=[0,0,0,deltaDis(13:15)'];
    for elem=2:5
        deltaDis_global(elem,:)=[deltaDis((15-(elem-1)*3+1):(15-(elem-2)*3))',
     deltaDis((15-elem*3+1):(15-(elem-1)*3))'];
    end
%
    for elem=1:5
        dis_local=Gamma(:,:,elem)*deltaDis_global(elem,:)';
        deltaInt_forces=(k(:,:,elem)+kg(:,:,elem))*dis_local;
        int_forces(:,elem)=int_forces(:,elem)+deltaInt_forces;
    end
% Update axial forces
    for elem=1:5
        axF(elem)=int_forces(4,elem);
    end
% Update node coordinates
    for node=2:6
        nodeCoord(node,:)=nodeCoord(node,:)+deltaDis((15-3*(node-1)+1):(15-3*(node-1)
     +2))';
    end
end
%
plot(P*4^2/(EE*II),(4+dis_global(1,:))/4);
hold on
plot(P*4^2/(EE*II),(-dis_global(2,:))/4,'r--');
xlabel('Dimensionless Load, PL^2/EI');
```

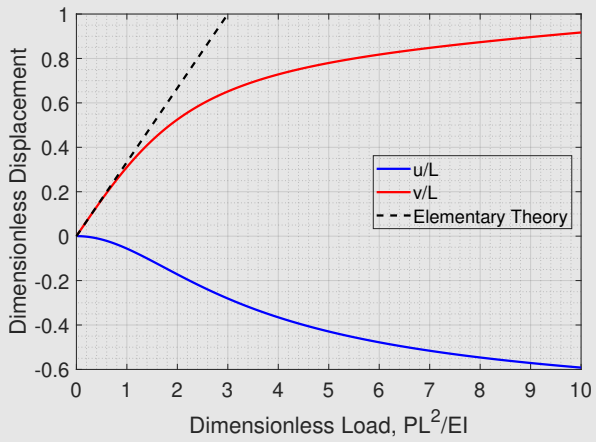
अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
ylabel('Dimensionless Displacement');
legend('u/L','v/L');
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
function [k,K,kg,Kg,Gamma]=stiff_1(EE,II,A,i,j,P)
% Determine the length
L=sqrt((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2);
% Compute the angle theta
alpha=atan2(j(2)-i(2),j(1)-i(1));
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[cos(alpha) sin(alpha) 0 0 0 0;
-sin(alpha) cos(alpha)  0 0 0 0;
0 0 1 0 0 0;
0 0 0 cos(alpha) sin(alpha) 0;
0 0 0 -sin(alpha) cos(alpha) 0;
0 0 0 0 0 1];
%form stiffness matrix
EI=EE*II;EA=EE*A;
k=[EA/L,          0,          0, -EA/L,          0,          0;
0,    12*EI/L^3,  6*EI/L^2,     0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2;
0,     6*EI/L^2,    4*EI/L,     0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L;
-EA/L,          0,          0,  EA/L,          0,          0;
0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,     0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2;
0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,     0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L];
% Stiffness matrix global
K=Gamma'*k*Gamma;
% Form geometric stiffness matrix
kg=(P/(30*L))*[0, 0,   0,      0, 0,    0;
0, 36,  3*L,    0, -36,  3*L;
0, 3*L, 4*L^2,  0, -3*L, -1*L^2;
0, 0,   0,      0, 0,    0;
0, -36, -3*L,   0, 36,   -3*L;
0, 3*L, -1*L^2, 0, -3*L, 4*L^2];
% Geometric stiffness matrix global
Kg=Gamma'*kg*Gamma;
end
```

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



60.3 $P-\Delta$ पर पुनर्विचार

27 हमें निम्न दोनों प्रभावों में अंतर करना चाहिए:

- $P-\Delta$ संरचना में अक्षीय भारों तथा विरूपणों से उत्पन्न द्वितीय-कोटि प्रभाव को निरूपित करता है। यह प्रभाव इसलिए उत्पन्न होता है कि भारों के अधीन संरचना के विक्षेप अतिरिक्त आघूर्ण उत्पन्न करते हैं, जो बदले में अतिरिक्त विरूपण उत्पन्न करते हैं। यह प्रभाव ऊँची अथवा तनु संरचनाओं में महत्त्वपूर्ण हो सकता है, जहाँ विक्षेप अपेक्षाकृत बड़े होते हैं।
- $P-\delta$ संरचना के स्वयं के विस्थापन से उत्पन्न उसकी ज्यामितीय अरैखिकता को निरूपित करता है। यह प्रभाव इस तथ्य से संबद्ध है कि संरचना के विरूपित होने पर उसकी दृढता बदलती है, जिससे आंतरिक बलों तथा प्रतिबलों का वितरण प्रभावित होता है। इस स्थिति में ज्यामितीय दृढता आव्यूह का उपयोग आवश्यक है।

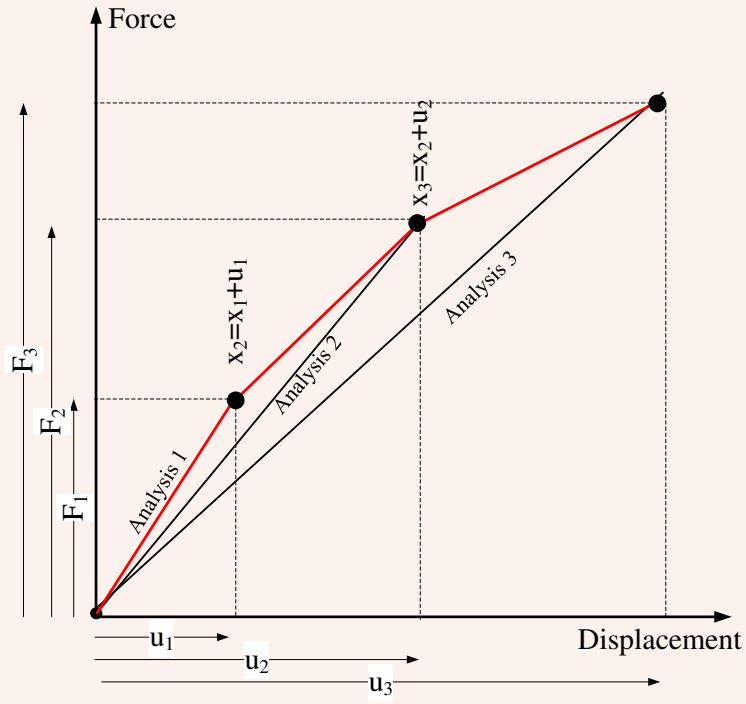
28 यदि किसी स्तंभ को अनेक (परिमित) अवयवों से प्रतिरूपित किया जाए, तो सीमा में $\mathbf{K}_g$ की उपेक्षा करके $P-\Delta$ विश्लेषण किया जा सकता है और उस संगत "व्याकुंचन भार" को प्राप्त किया जा सकता है जिसके लिए अन्यथा $P-\delta$ (और इस प्रकार $\mathbf{K}_g$) विश्लेषण आवश्यक होता, चित्र 60.3।

60.3.1 उदाहरण 60.6: $\mathbf{K}_{geom}$ के बिना व्याकुंचन भार

हम एक सिरे पर आबद्ध तथा दूसरे सिरे पर मुक्त स्तंभ के व्याकुंचन भार P_{cr}^{est} का आकलन 10 क्रमिक छेदक प्रथम-कोटि विश्लेषण करके करना चाहते हैं (अर्थात् $\mathbf{k}_g$ का उपयोग किए बिना, केवल $\mathbf{k}_e$ का उपयोग करके)। प्रत्येक विश्लेषण के अंत में ज्यामिति में परिवर्तन दर्शाने के लिए नोडीय निर्देशांकों को समायोजित किया जाएगा। अतः विश्लेषण i का भार $P=i.\Delta P$ होगा। हमें $\Delta P=P_{cr}^{exact}/20$ लेना चाहिए। प्रत्येक विश्लेषण i के लिए ध्यान दें कि अस्थिरता/व्याकुंचन अचानक उत्पन्न होता है।

```
%% Initialization for a 5 element strcture
% zero the matrices
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 60.3: ज्यामितीय दृढता आव्यूह के बिना व्याकुंचन भार का निर्धारण

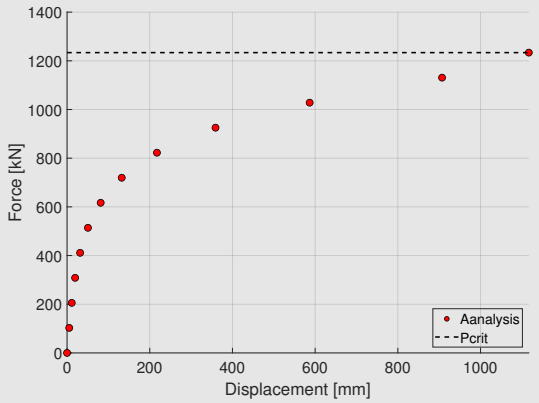
प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
k=zeros(6,6,5);K=zeros(6,6,5);Gamma=zeros(6,6,5);
% Structural properties mm^2, mm^4, and kN/mm^2
EE = 800;LL = 4000;II = 1e7;A=50;a=50;
% Number of iternations
nincr = 12;
%% Determine the buckling load analytically
initialdispl = LL/a;
Pcrit = EE*II*pi^2/(2*LL)^2;
  ID = [16 17 18;
        1  2  3;
        4  5  6;
        7  8  9;
        10 11 12;
        13 14 15];
  % elements going from left to right 1 2 3 are at the free end far right
  LM=[16 17 18  1  2  3;
      1  2  3  4  5  6;
      4  5  6  7  8  9;
      7  8  9 10 11 12;
      10 11 12 13 14 15];
  % Initialize matrices for storage
  u = zeros(6,2);
  %% Begin Iteration Analysis
  y=initialdispl;% itintial displacement at fee end
  theta = atan(y/LL);
  %% Goemetry and coordinates
  % Initialize global coordinates in meters
  coord = [0        0;
  LL/5     LL/5*tan(theta);
  2*LL/5   2*LL/5*tan(theta);
  3*LL/5   3*LL/5*tan(theta);
  4*LL/5   4*LL/5*tan(theta);
  LL       LL*tan(theta)];
  deltaP = Pcrit/nincr ;
  Pt(1)=0;delta(1)=0;
for iter=1:nincr
   for elem=1:5
      i=[coord(elem,1),coord(elem,2)];j=[coord(elem+1,1),coord(elem+1,2)];
      [k(:,:,elem),K(:,:,elem),Gamma(:,:,elem)]=stiff(EE,II,A,i,j);
    end
   Kaug=zeros(18);
    for elem=1:5
       for r=1:6
          lr=abs(LM(elem,r));
          for c=1:6
            lc=abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem); % NO kg here +Kg(r,c,elem);
         end
      end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    end
    Ktt = Kaug(1:15,1:15); Pt(iter+1)=iter*deltaP;
    P=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -Pt(iter+1) 0 0 ];
    Displacements = inv(Ktt)*P';
    delta(iter+1)=Displacements(14,1);
    for inode=2:6 % loop from the second node (first is fixed) to the end
       for dof=1:2 % loop for x and y
           coord(inode, dof)=coord(inode,dof)+Displacements(ID(inode,dof),1);
       end
    end
end
%
xx(1)=0;xx(2)=max(delta);yy(1)=Pcrit;yy(2)=yy(1);
scatter(delta,Pt,60,'o','MarkerFaceColor','r','MarkerEdgeColor','k','LineWidth',1);
hold on
plot(xx,yy,'k--','LineWidth',2);grid
legend('Aanalysis','Pcrit','Location','SouthEast');
xlabel('Displacement [mm]');ylabel('Force [kN]');
xlim([0 inf]);
```



हम देखते हैं कि भार–विस्थापन वक्र अनंतस्पर्शी रूप से P_cr की ओर अग्रसर होता है। यह परिणाम $\mathbf{K}_g$ का सहारा लिए बिना प्राप्त किया गया।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप

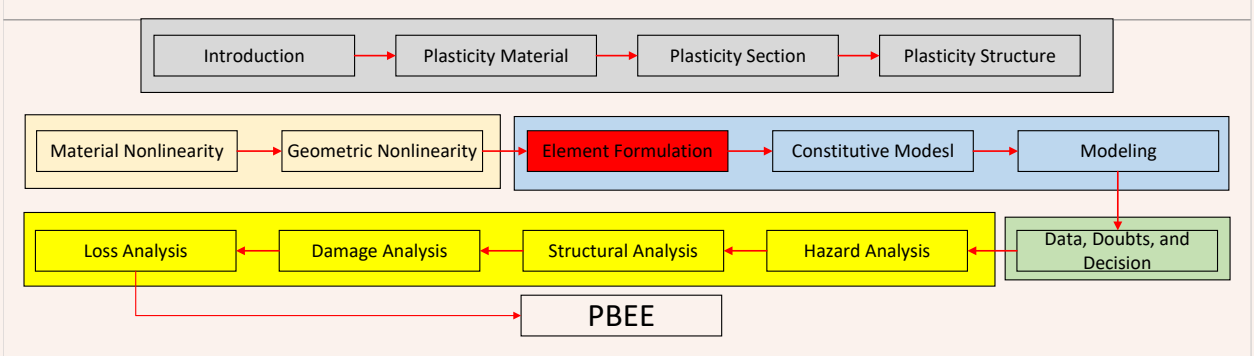
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

61 अरैखिक; अवयव सूत्रीकरण

सारांश

अध्याय 50 में सरलीकृत रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण के संदर्भ में 1D प्रत्यास्थ धरन अवयव की व्युत्पत्ति दी गई थी; इस अध्याय में उस व्युत्पत्ति का सामान्यीकरण सामग्री-अरैखिक विश्लेषण के लिए किया जाएगा। हम सरल ट्रस अवयवों से आरंभ करेंगे और तत्पश्चात धरन–स्तंभ अवयवों पर जाएँगे। दो भिन्न सूत्रीकरण व्युत्पन्न किए जाएँगे: एक पारंपरिक दृढता विधि पर आधारित और दूसरा पहले की कुछ सीमाओं को दूर करने के लिए नम्यता विधि पर आधारित। स्तरित अथवा तंतु परिच्छेदों (§56.3.2 के अनुरूप) पर विचार किया जाएगा, क्योंकि वे अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्रमिक सुघटीकरण को संभव बनाते हैं। अंत में शून्य-लंबाई अवयवों तथा परिच्छेद-अवयवों को सम्मिलित किया जाएगा। प्रत्येक अवयव की व्युत्पत्ति तीन मूलभूत आवश्यकताओं—संगतता, संघटक नियम और संतुलन—से होकर आगे बढेगी तथा अवयव दृढता आव्यूह पर समाप्त होगी। अंततः, प्रतीकों की बहुलता को देखते हुए अध्याय का समापन संकेतन का विस्तृत विवरण देने वाले अनुभाग से होगा।

61.1 परिचय 1982
61.2 ट्रस अवयव 1982
61.2.1 2D ट्रस अवयव का निर्देश-तंत्र 1983
61.2.2 अवस्था निर्धारण 1984
61.3 धरन–स्तंभ अवयव सूत्रीकरण 1985
61.3.1 दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव 1985
61.4 स्तर/तंतु परिच्छेद 1996
61.4.1 नम्यता-विधि 2D धरन–स्तंभ अवयव 1999
61.4.2 दृढता-आधारित *बनाम* नम्यता-आधारित अवयव 2019
61.5 शून्य-लंबाई 2D अवयव सूत्रीकरण . . . 2024
61.5.1 शून्य-लंबाई 2D अवयव में निर्देश-तंत्र 2024
61.5.2 अवयव अवस्था निर्धारण 2025
61.6 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव 2028
61.6.1 दृढता आव्यूह 2028
61.6.2 निर्देश-तंत्र 2029
61.6.3 अवयव अवस्था निर्धारण 2030
61.7 संख्यात्मक समाकलन 2032
61.8 अवयव बल 2032



"An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation", Kang, 2010 के पीएचडी शोधप्रबंध से।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

61.1 परिचय

1 अध्याय 50 में रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण के संदर्भ में 1D अवयवों के दृढता आव्यूह व्युत्पन्न किए गए थे। दुर्भाग्यवश वहाँ प्रयुक्त संकेतन (मुख्यतः अधोलिखित संकेत) इस अध्याय के विषय अरैखिक विश्लेषण तथा तंतु परिच्छेदों के सामान्यीकरण के लिए उपयुक्त नहीं था।

2 अतः हम सबसे सरल अवयव—ट्रस—के दृढता आव्यूहों की पुनः व्युत्पत्ति से आरंभ करेंगे।

61.2 ट्रस अवयव

3 हम एक ट्रस अवयव के सरल विवेचन से आरंभ करते हैं।

दृढता आव्यूह

4 पारंपरिक दृढता विधि के संदर्भ में ट्रस दृढता आव्यूह की व्युत्पत्ति सरल है। यहाँ हम इसे नए संकेतन का क्रमिक परिचय देने के साधन के रूप में पुनः व्युत्पन्न करते हैं, जिससे पाठक को परिचित होना चाहिए।

5 सभी परिमित अवयवों की भाँति दृढता आव्यूह की व्युत्पत्ति तीन आवश्यकताओं पर आधारित है।

1. **संगतता** विकृतियों तथा विस्थापनों की।

   विस्थापन परिच्छेद विस्थापन सदिश $\mathbf{d}_s(x)$ तथा अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\overline{\mathbf{d}}_e$ के बीच सामान्यीकृत संबंध विस्थापन अंतर्वेशन फलनों (आकार फलनों) $\mathbf{N}_d(x)$ द्वारा निम्न प्रकार व्यक्त होता है

$$\mathbf{d}_s(x) = \left\{ \begin{array}{c} u(x) \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -\frac{x}{L}+1 & \frac{x}{L} \end{array} \right]}_{\mathbf{N}_d(x)} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_{x1} \\ \overline{u}_{x2} \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{d}}_e} \tag{61.1}$$

   विरूपण विस्थापनों का: विस्थापनों को लघु मानने पर परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ अवयव नोडीय विस्थापन सदिश से निम्न प्रकार संबंधित होता है

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x(x) \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}_d(x)} \cdot \overline{\mathbf{d}}_e$$

   जहाँ $\mathbf{B}_d(x)$ वह आव्यूह है जो $\mathbf{N}_d(x)$ के अवकलजों द्वारा विस्थापन को विकृति से संबंधित करता है।

2. **संघटक नियम** निम्न प्रकार व्यक्त होता है

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $\boldsymbol{\sigma}_s(x)$ परिच्छेद[1] बल सदिश है और $\mathbf{k}_s(x)$ *परिच्छेद दृढता आव्यूह* है। रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण के लिए $\mathbf{k}_s(x)$ केवल एक अदिश है, $\mathbf{k}_s(x) = \left[\ E(x)\cdot A(x)\ \right]$, जहाँ $E(x)$ तथा $A(x)$ क्रमशः प्रत्यास्थता मापांक और अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल हैं।

3. **संतुलन** आभासी कार्य (विस्थापन) के सिद्धांत द्वारा उसके दुर्बल रूप में। संतुलन में स्थित बल-वितरण मानते हुए, स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव नोडीय बल सदिश $\bar{\mathbf{f}}_e$ तथा परिच्छेद विरूपण सदिश के बीच संबंध आभासी विस्थापन के सिद्धांत से व्युत्पन्न होता है:

$$\underbrace{\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T\cdot\bar{\mathbf{f}}_e}_{\text{External}} = \underbrace{\int_0^{L_e}\delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)^T.\boldsymbol{\sigma}_s(x)\ \mathrm{d}x}_{\text{Internal}}$$

प्रतिस्थापन से प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T\cdot\bar{\mathbf{f}}_e &= \int_0^{L_e}\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T\cdot\mathbf{B}_d(x)^T\cdot\mathbf{k}_s(x)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\ \mathrm{d}x\\ \Rightarrow\bar{\mathbf{f}}_e &= \int_0^{L_e}\mathbf{B}_d(x)^T\cdot\mathbf{k}_s(x)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\ \mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{L_e}\mathbf{B}_d(x)^T\cdot\mathbf{k}_s(x)\cdot\mathbf{B}_d(x)\ \mathrm{d}x}_{\bar{\mathbf{k}}_e}\cdot\bar{\mathbf{d}}_e\end{aligned}$$

अथवा $\bar{\mathbf{f}}_e = \bar{\mathbf{k}}_e\cdot\bar{\mathbf{d}}_e$ अतः स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव दृढता आव्यूह निम्न है

$$\bar{\mathbf{k}}_e = \int_0^{L_e}\mathbf{B}_d(x)^T\cdot\mathbf{k}_s(x)\cdot\mathbf{B}_d(x)\ \mathrm{d}x$$

61.2.1 2D ट्रस अवयव का निर्देश-तंत्र

[6] अवयव नोडीय बल तथा विस्थापन वैश्विक निर्देश-तंत्र के सापेक्ष व्यक्त किए जाते हैं, चित्र 61.1
$\mathbf{F}_e = \lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ N_{X2},\ V_{Y2}\rfloor^T$;
$\boldsymbol{\delta}_e = \lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ u_{X2},\ v_{Y2}\rfloor^T$

[7] अवयव नोडीय बल तथा विस्थापन स्थानीय निर्देश-तंत्र के सापेक्ष भी व्यक्त किए जा सकते हैं,

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \lfloor\overline{N}_{x1},\ \overline{N}_{x2}\rfloor^T;\qquad \bar{\mathbf{d}}_e = \lfloor\overline{u}_{x1},\ \overline{u}_{x2}\rfloor^T$$

[8] वैश्विक निर्देश-तंत्र को स्थानीय निर्देश-तंत्र में रूपांतरित करने वाला घूर्णन आव्यूह $\boldsymbol{\Gamma}_e$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ

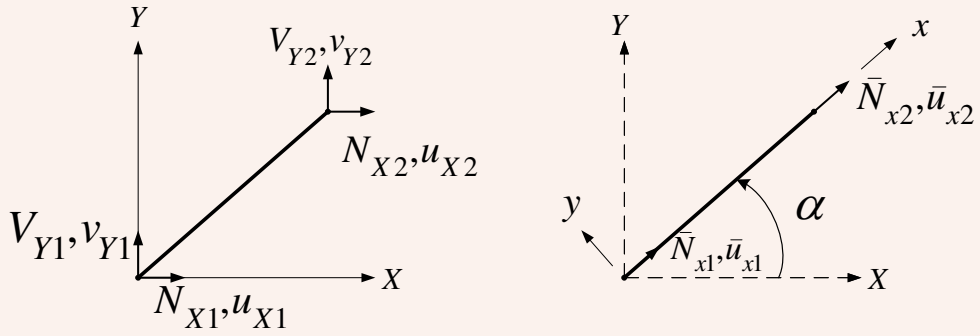
$$\bar{\mathbf{f}}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e\cdot\mathbf{F}_e;\qquad \bar{\mathbf{d}}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e\cdot\boldsymbol{\delta}_e;\qquad \mathbf{K}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^T\cdot\bar{\mathbf{k}}_e\cdot\boldsymbol{\Gamma}_e$$

[1] ट्रस अवयव दृढता आव्यूह के सूत्रीकरण को समझने के लिए परिच्छेद की अवधारणा आवश्यक नहीं है। तथापि इसे आगे आने वाले धरन–स्तंभ सूत्रीकरण के साथ संगति बनाए रखने के लिए प्रस्तुत किया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $\mathbf{K}_e$ वैश्विक निर्देश-तंत्र में अवयव दृढता आव्यूह है और घूर्णन आव्यूह है

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{N}_{x2} \end{array} \overset{\begin{array}{cccc} N_{X1} & V_{Y1} & N_{X2} & V_{Y2} \end{array}}{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}}$$



(a) Global reference in an element (b) Local reference in an element

चित्र 61.1: 2D ट्रस का निर्देश-तंत्र

61.2.2 अवस्था निर्धारण

9 ऊष्मागतिकी में सामग्री की वर्तमान अवस्था को उचित रूप से चयनित *अवस्था चरों* के समुच्चय द्वारा अद्वितीय रूप से निरूपित किया जा सकता है; अर्थात् प्रणाली की भावी अवस्थाओं का पूर्वानुमान लगाने के लिए आवश्यक राशियाँ।

10 संरचनात्मक विश्लेषण के संदर्भ में अवस्था निर्धारण, अवयव नोडीय विस्थापनों के दिए गए समुच्चय के लिए निम्न राशियाँ निर्धारित करने की प्रक्रिया है:

स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह (§59.3.1.1), अरैखिक प्रणाली को हल करने के लिए न्यूटन विधि लागू करने हेतु, जहाँ स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह जैकोबियन (समीकरण 59.2) के अनुरूप होता है।

आंतरिक बल तत्पश्चात अवशिष्ट बल निर्धारित करने के लिए, जो लगभग शून्य होने चाहिए।

ये अवस्था $n+1$ का अवस्था n से पूर्वानुमान लगाने के लिए आवश्यक हैं। इनकी चर्चा §61.3.1.2 तथा §61.3.1.4 में की जाएगी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

61.3 धरन–स्तंभ अवयव सूत्रीकरण

11 तंतु अवयवों द्वारा अरैखिक ढाँचा संरचना का सूत्रीकरण दृढता-आधारित (विस्थापन-आधारित) अथवा नम्यता-आधारित (बल-आधारित) विधि से किया जा सकता है। यहाँ दोनों विधियों में यह माना जाएगा कि विरूपण लघु हैं और भारण इतिहास के दौरान समतल परिच्छेद समतल बने रहते हैं।

12 दृढता-आधारित विधि अवयव की लंबाई के अनुदिश विस्थापन अंतर्वेशन फलन मानती है। यथार्थ अनुक्रिया प्राप्त करने के लिए इस मान्यता के अंतर्गत पर्याप्त संख्या में अवयव आवश्यक होंगे। दूसरी ओर, नम्यता-आधारित विधि में अवयव की लंबाई के अनुदिश बल अंतर्वेशन फलन होंगे और समान परिशुद्धता प्राप्त करने के लिए दृढता-आधारित विधि की अपेक्षा कम अवयव आवश्यक होंगे।

13 तथापि, नम्यता-आधारित विधि (अध्याय 25) में अवयव सूत्रीकरण दृढता-आधारित विधि की अपेक्षा अधिक जटिल है, क्योंकि सामग्री संघटक प्रतिरूपों से ε प्राप्त करने के लिए पुनरावृत्तीय विधि आवश्यक होती है; ये प्रतिरूप सामान्यतः $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ के रूप में दिए जाते हैं, जो दृढता-आधारित विधि के लिए स्वाभाविक है (Lee and Mosalam, 2004)।

14 इसके अतिरिक्त, दृढता-आधारित विधि का अवयव सूत्रीकरण अधिक सीधा है और पारंपरिक परिमित अवयव विधि में व्यापक रूप से प्रयुक्त होता है। यहाँ बर्नूली धरन सिद्धांत के साथ वितरित अरैखिक प्रतिरूप के सूत्रीकरण हेतु दृढता- तथा नम्यता-आधारित दोनों विधियों का उपयोग किया जाएगा।

15 अवयवों को संख्यात्मक समाकलन बिंदुओं पर स्थित अनेक अनुप्रस्थ परिच्छेदों द्वारा निरूपित किया जाएगा—विशेषतः दृढता-आधारित विधि के लिए गाउस–लेजेंद्र चतुर्थांश नियम तथा नम्यता-आधारित विधि के लिए गाउस–लोबातो चतुर्थांश नियम के समाकलन बिंदु। प्रत्येक परिच्छेद में उपयुक्त संख्या में स्तर/तंतु होंगे और प्रत्येक तंतु एकाक्षीय प्रतिबल अवस्था में होगा।

61.3.1 दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव

16 दृढता-आधारित विधि में अक्षीय विस्थापन को रैखिक बहुपद अंतर्वेशन फलन द्वारा तथा अनुप्रस्थ विस्थापनों को घन बहुपद अंतर्वेशन फलनों द्वारा निरूपित किया जाता है। दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव सूत्रीकरण की तीन प्रमुख आवश्यकताएँ हैं:

संगतता

विस्थापन परिच्छेद विस्थापन आकार फलनों द्वारा अवयव नोडीय विस्थापनों से निर्धारित किए जाते हैं। परिच्छेद विस्थापन सदिश $\mathbf{d}_s(x)$ तथा अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\bar{\mathbf{d}}_e$ के बीच सामान्यीकृत संबंध निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\mathbf{d}(x) = \left\{ \begin{array}{c} u(x) \\ v(x) \end{array} \right\} = \mathbf{N}_d(x) \cdot \underbrace{\lfloor\, u_{x1}^{(e)},\ v_{y1}^{(e)},\ \theta_{z1}^{(e)},\ u_{x2}^{(e)},\ v_{y2}^{(e)},\ \theta_{z2}^{(e)} \,\rfloor^T}_{\bar{\mathbf{d}}_e}$$

जहाँ $\mathbf{N}_d(x)$ विस्थापन अंतर्वेशन फलनों का आव्यूह है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$\mathbf{N}_d(x)$ अक्षीय विस्थापनों के लिए रैखिक तथा अनुप्रस्थ विस्थापनों के लिए घन अंतर्वेशन फलनों का आव्यूह है:

$$\mathbf{N}_d(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) & 0 & 0 & \psi_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(x) & \phi_2(x) & 0 & \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{bmatrix}$$

with

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= -\tfrac{x}{L_e} + 1 & \qquad \psi_2(x) &= \tfrac{x}{L_e} \\ \phi_1(x) &= 2\tfrac{x^3}{{L_e}^3} - 3\tfrac{x^2}{{L_e}^2} + 1 & \qquad \phi_2(x) &= \tfrac{x^3}{{L_e}^2} - 2\tfrac{x^2}{L_e} + x \\ \phi_3(x) &= -2\tfrac{x^3}{{L_e}^3} + 3\tfrac{x^2}{{L_e}^2} & \qquad \phi_4(x) &= \tfrac{x^3}{{L_e}^2} - \tfrac{x^2}{L_e} \end{aligned}$$

विरूपण विस्थापनों को लघु और समतल परिच्छेदों को समतल बने रहने की मान्यताओं के अंतर्गत परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ अवयव नोडीय विस्थापन सदिश से निम्न प्रकार संबंधित है

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_s(x) &= \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x(x) \\ \phi_z(x) \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{B}_d(x) \cdot \overline{\mathbf{d}}_e \end{aligned} \tag{61.2}$$

जहाँ $\mathbf{B}_d(x)$ विस्थापन अंतर्वेशन फलनों के अवकलजों से व्युत्पन्न आव्यूह है।

$$\mathbf{B}_d(x) = \begin{bmatrix} \psi_1^{'}(x) & 0 & 0 & \psi_2^{'}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1^{''}(x) & \phi_2^{''}(x) & 0 & \phi_3^{''}(x) & \phi_4^{''}(x) \end{bmatrix}$$

with

$$\begin{aligned} \psi_1^{'}(x) &= -\tfrac{1}{L_e} & \qquad \psi_2^{'}(x) &= \tfrac{1}{L_e} \\ \phi_1^{''}(x) &= \tfrac{12x}{{L_e}^3} - \tfrac{6}{{L_e}^2} & \qquad \phi_2^{''}(x) &= \tfrac{6x}{{L_e}^2} - \tfrac{4}{L_e} \\ \phi_3^{''}(x) &= -\tfrac{12x}{{L_e}^3} + \tfrac{6}{{L_e}^2} & \qquad \phi_4^{''}(x) &= \tfrac{6\,x}{{L_e}^2} - \tfrac{2}{L_e} \end{aligned}$$

संघटक नियम

परिच्छेद संघटक नियम निम्न प्रकार व्यक्त होता है

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x)\ \boldsymbol{\varepsilon}_s(x) \tag{61.3}$$

जहाँ $\boldsymbol{\sigma}_s(x)$ परिच्छेद बल सदिश तथा $\mathbf{k}_s(x)$ परिच्छेद दृढता आव्यूह है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यदि $\mathbf{k}_s(x)$ अनुप्रस्थ परिच्छेद के स्तर/तंतु विविक्तीकरण से व्युत्पन्न नहीं किया गया है, तो रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण के लिए $\mathbf{k}_s(x)$ केवल निम्न के बराबर है

$$\mathbf{k}_s(x) = \begin{bmatrix} E(x)\cdot A(x) & 0 \\ 0 & E(x)\cdot I_z(x) \end{bmatrix} \tag{61.4}$$

जहाँ $E(x)$, $A(x)$ तथा $I_z(x)$ क्रमशः प्रत्यास्थता मापांक, परिच्छेद क्षेत्रफल तथा परिच्छेद क्षेत्रफल का जडत्व आघूर्ण हैं।

संतुलन

संतुलित बल-वितरण मानते हुए, स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव नोडीय बल सदिश $\bar{\mathbf{f}}_e$ तथा परिच्छेद विरूपण सदिश के बीच संबंध आभासी विस्थापन के सिद्धांत से व्युत्पन्न होता है:

$$\underbrace{\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T\cdot\bar{\mathbf{f}}_e}_{\text{External}} = \underbrace{\int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)^T\cdot\boldsymbol{\sigma}_s(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{Internal}} \tag{61.5}$$

यह संतुलन का दुर्बल रूप है। समीकरण 61.2 तथा समीकरण 61.3 को समीकरण 61.5 में प्रतिस्थापित करने पर, और क्योंकि अंतिम संबंध किसी भी स्वेच्छ $\delta\bar{\mathbf{d}}_e$ के लिए सत्य होना चाहिए, प्राप्त होता है

$$\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T\cdot\bar{\mathbf{f}}_e = \int_0^L \delta\bar{\mathbf{d}}_e^T\cdot\mathbf{B}_d(x)^T\cdot\mathbf{k}_s(x)\cdot\varepsilon_s(x)x$$

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \bar{\mathbf{k}}_e\cdot\bar{\mathbf{d}}_e \tag{61.6}$$

$$\bar{\mathbf{k}}_e = \int_0^L \mathbf{B}_d(x)^T\cdot\mathbf{k}_s(x)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\,\mathrm{d}x \tag{61.7}$$

जहाँ $\bar{\mathbf{k}}_e$ स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव दृढता आव्यूह है।

61.3.1.1 बर्नूली धरन सिद्धांत सहित दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ का निर्देश-तंत्र

[17] अवयव नोडीय बल तथा विस्थापन वैश्विक निर्देश-तंत्र के सापेक्ष, चित्र 61.2(a), निम्न प्रकार व्यक्त होते हैं: Element nodal force vector in global reference

$$\mathbf{F}_e = \lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ M_{Z1},\ N_{X2},\ V_{Y2},\ M_{Z2}\rfloor^T$$

Element nodal displacement vector in global reference

$$\boldsymbol{\delta}_e = \lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ \theta_{Z1},\ u_{X2},\ v_{Y2},\ \theta_{Z2}\rfloor^T$$

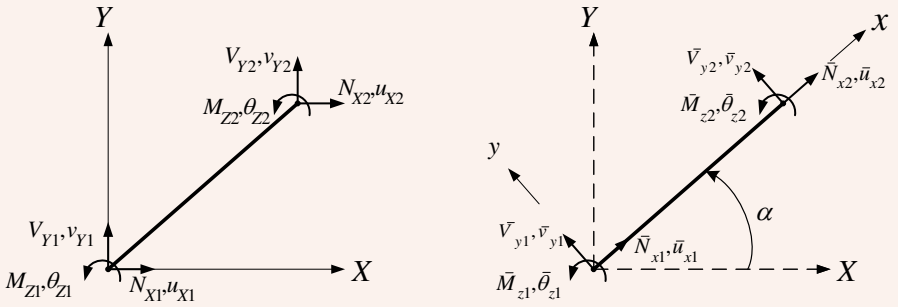
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

18 इसके अतिरिक्त, अवयव के नोडीय बल तथा विस्थापन स्थानीय निर्देश-तंत्र के सापेक्ष भी व्यक्त किए जा सकते हैं, जैसा कि चित्र 61.2(b) में दर्शाया गया है: Element nodal force vector in local reference

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{V}_{y1},\ \overline{M}_{z1},\ \overline{N}_{x2},\ \overline{V}_{y2},\ \overline{M}_{z2} \rfloor^T$$

Element nodal displacement vector in local reference

$$\bar{\mathbf{d}}_e = \lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{v}_{y1},\ \overline{\theta}_{z1},\ \overline{u}_{x2},\ \overline{v}_{y2},\ \overline{\theta}_{z2} \rfloor^T$$



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

चित्र 61.2: दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव के वैश्विक तथा स्थानीय निर्देश-तंत्रों में आंतरिक बल और संगत विस्थापन

19 वैश्विक निर्देश-तंत्र, चित्र 61.2(a), को स्थानीय निर्देश-तंत्र, चित्र 61.2(b), में रूपांतरित करने वाला घूर्णन आव्यूह $\boldsymbol{\Gamma}_e$ है।

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \mathbf{F}_e \\ \bar{\mathbf{d}}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \boldsymbol{\delta}_e \\ \mathbf{K}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e \end{aligned} \tag{61.8}$$

जहाँ $\mathbf{K}_e$ वैश्विक निर्देश-तंत्र में अवयव दृढता आव्यूह है।

20 घूर्णन आव्यूह निम्न प्रकार परिभाषित है।

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_{X1} & V_{Y1} & M_{Z1} & N_{X2} & V_{Y2} & M_{Z2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

61.3.1.2 अवस्था निर्धारण

21 अरैखिक संरचनात्मक विश्लेषण में प्रत्येक चरण का नोडीय बल सदिश संरचना पर लागू वृद्धिशील बाह्य नोडीय बल सदिश के अनुरूप होता है। संरचना का संगत वृद्धिशील नोडीय विस्थापन सदिश इस वृद्धिशील बाह्य बल से निर्धारित किया जाता है और प्रत्येक अवयव के नोडीय विस्थापन सदिश निकाले जाते हैं। इन अवयव नोडीय विस्थापन सदिशों से आंतरिक परिच्छेद बल सदिश निर्धारित किए जाते हैं।

22 अवयव नोडीय विस्थापन सदिशों के अनुरूप आंतरिक नोडीय बल सदिश निर्धारित करने की प्रक्रिया को अवस्था निर्धारण कहा जाता है। चित्र 61.3a के अनुसार यह प्रक्रिया तीन अवस्थाओं से बनी है:

परिच्छेद अवस्था निर्धारण प्रत्येक अवयव नोडीय विस्थापन सदिश से निर्धारित परिच्छेद विरूपण सदिशों द्वारा आंतरिक परिच्छेद बल सदिशों की गणना की जाती है, चित्र 61.3a(c)।

अवयव अवस्था निर्धारण प्रत्येक अवयव के सुपरशरेखीय दृढता आव्यूह तथा आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश उस अवयव के आंतरिक परिच्छेद बल सदिशों से निर्धारित किए जाते हैं; ये परिच्छेद बल स्वयं अवयव के परिच्छेद विरूपण सदिशों से गणित होते हैं, चित्र 61.3a(b)।

संरचना अवस्था निर्धारण प्रत्येक अवयव के सुपरशरेखीय दृढता आव्यूहों तथा आंतरिक अवयव बल सदिशों को समायोजित करके संरचना का संवर्धित सुपरशरेखीय दृढता आव्यूह $\mathbf{K}_S^{tan}$ तथा आंतरिक नोडीय बल सदिश $\mathbf{P}_S^{int}$ ($\mathbf{P}_S^{int} = \mathbf{P}_t^{int} + \mathbf{P}_u^{int}$) बनाया जाता है, चित्र 61.3a(a)। यहाँ अधोलिखित t उन स्थानों को दर्शाता है जहाँ बल ज्ञात हैं और u उन स्थानों को जहाँ विस्थापन ज्ञात अथवा शून्य हैं। t तथा u का वर्णन अनुभाग 59 में है।

23 संरचना अवस्था निर्धारण पूर्ण होने पर आंतरिक नोडीय बल सदिश ($\mathbf{P}_{t,n}^{int}$) की कुल लागू बाह्य नोडीय बल सदिश ($\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$) से तुलना की जाती है। उनका अंतर ($\mathbf{P}_{t,n}^{R}$) अवशिष्ट नोडीय बल सदिश है, जिसे अभिसरण (संतुलन) प्राप्त होने तक पुनरावृत्तीय समाधान प्रक्रिया में संरचना पर पुनः लागू किया जाता है, सारणी 61.1।

तालिका 61.1: बहुस्तरीय अवस्था निर्धारण

स्तर	आंतरिक बल	सुपरशरेखीय दृढता आव्यूह	"विस्थापन"
परिच्छेद	$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x)\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	$\mathbf{k}_s(x) = \begin{bmatrix} E(x)A(x) & 0 \\ 0 & E(x)I_z(x) \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x) \\ \phi_z(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_d(x)\bar{\mathbf{d}}_e$
अवयव स्थानीय	$\mathbf{f}_e^{int} = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{d,e}(x)^T \boldsymbol{\sigma}_{s,e}^{int}(x)\mathrm{d}x$	$\bar{\mathbf{k}}_e = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \mathbf{k}_s(x)\mathbf{B}_d(x)\mathrm{d}x$	$\delta_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^t \cdot \bar{\mathbf{d}}_e$
अवयव वैश्विक	$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \mathbf{f}_{e,n}^{int,k}$	$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \boldsymbol{\Gamma}_e$	$\boldsymbol{\delta}_e$
संरचना	$\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} = \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$	$\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} = \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \mathcal{A}_{b,e}$	$\boldsymbol{\delta}_e$

$\mathcal{A}_{b,e}^T$ बल समायोजन

संकारक है और $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ में चार उप-आव्यूह $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$ तथा $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$ सम्मिलित हैं।

24 दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव के लिए अवस्था निर्धारण प्रक्रिया सीधी है। परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\bar{\mathbf{d}}_e$ से समीकरण 61.3 के अनुसार निर्धारित किए जाते हैं। संगत परिच्छेद सुपरशरेखीय दृढता आव्यूह $\mathbf{k}_s^{tan}(x)$ तथा आंतरिक परिच्छेद बल सदिश $\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$ परिच्छेद

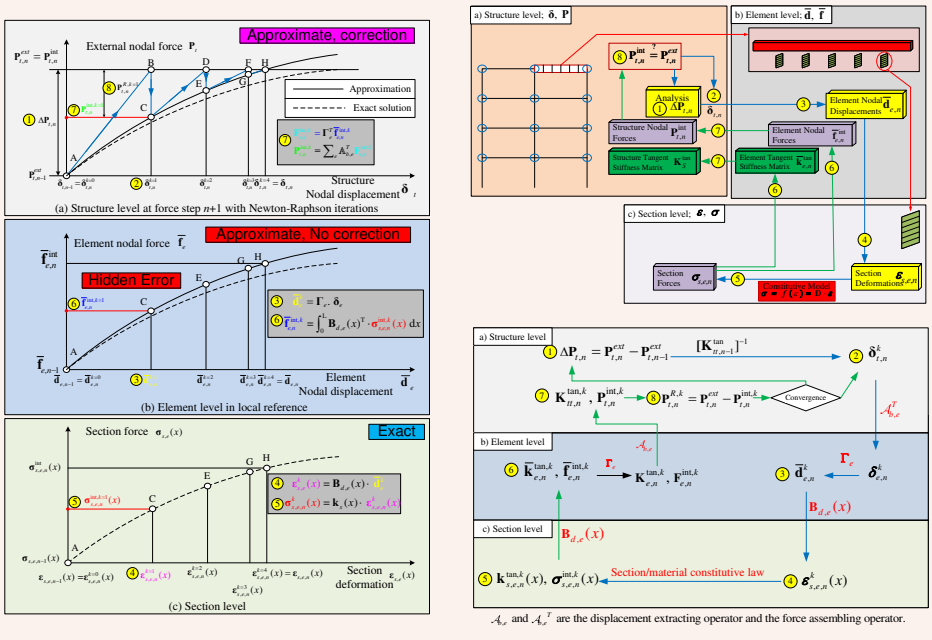
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संघटक नियम से निर्धारित होते हैं। अवयव स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह $\bar{\mathbf{k}}_e^{tan}$ समीकरण 61.7 से प्राप्त होते हैं, जबकि आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश $\bar{\mathbf{f}}_e^{int}$ आभासी विस्थापन के सिद्धांत से निर्धारित होते हैं:

$$\bar{\mathbf{f}}_e^{int} = \int_0^L \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x) \mathrm{d}x \tag{61.9}$$

25 यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि अरैखिक स्थिति में यह विधि त्रुटिपूर्ण अवयव अनुक्रिया देती है। इस समस्या को चित्र 61.3a स्पष्ट करता है, जिसमें मुक्त स्वतंत्रता-अंशों पर एक वृद्धिशील बाह्य बल सदिश $\Delta\mathbf{P}_{t,n}$ के दौरान संरचना, अवयव तथा परिच्छेद अवस्थाओं का विकास दिखाया गया है; इसके लिए अनेक पुनरावृत्तियाँ k आवश्यक हैं (Spacone, Ciampi, and Filippou, 1992)। यहाँ अधोलिखित n अथवा $n-1$ वर्तमान अथवा पूर्व बाह्य बल चरण, उपरिलिखित k k^{th} पुनरावृत्ति और अधोलिखित t ज्ञात बलों वाले स्थान को दर्शाता है।

26 वैशिष्ट्यक स्वतंत्रता-अंशों पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति विधि प्रयुक्त होती है। प्रत्येक न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति में संरचना स्तर का वृद्धिशील नोडीय विस्थापन सदिश निर्धारित किया जाता है और प्रत्येक अवयव के नोडीय विस्थापन सदिश निकाले जाते हैं।



(a) (b)

चित्र 61.3: दृढता-आधारित विधि के लिए अवस्था निर्धारण

27 k^{th} न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति में प्रत्येक अवयव का स्थानीय निर्देश-तंत्र में नोडीय विस्थापन सदिश $\bar{\mathbf{d}}_{e,n}$, संरचना स्तर के स्वतंत्रता-अंशों के नोडीय विस्थापन सदिश $\mathbf{u}_{S,n}^k$ ($\mathbf{u}_{S,n}^k = \mathbf{u}_{t,n}^k + \mathbf{u}_{u,n}^k$) से निर्धारित होता है। यहाँ अधोलिखित u उन स्थानों को दर्शाता है जहाँ विस्थापन ज्ञात अथवा शून्य हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

28 समीकरण 61.3 से प्रत्येक अवयव के परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,n}(x)$ गणित किए जाते हैं। यह अवयव अवस्था निर्धारण का प्रथम सन्निकटन है, क्योंकि $\mathbf{B}_d(x)$ केवल प्रिज़्मीय सदस्य की रैखिक प्रत्यास्थ स्थिति में यथार्थ है।

29 परिच्छेद संघटक नियम स्पष्ट रूप से ज्ञात मानते हुए, परिच्छेद स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,n}(x)$ तथा आंतरिक परिच्छेद बल सदिश $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,n}(x)$ को $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,n}(x)$ से सरलता से गणित किया जाता है। तत्पश्चात समीकरण 61.7 तथा 61.9 द्वारा स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव दृढता आव्यूह $\bar{\mathbf{k}}^{k}_{e,n}$ तथा आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश $\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ निर्धारित किए जाते हैं।

30 क्योंकि $\mathbf{B}_d(x)$ केवल सन्निकट है, स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह तथा आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश के दोनों समाकल सन्निकट परिणाम देते हैं। $\mathbf{B}_d(x)$ का सन्निकटन अधिक दृढ समाधान उत्पन्न करता है, जैसा चित्र 61.3b(a) और (b) में है। “Exact solution” अंकित वक्र केवल परिच्छेद संघटक नियम की मान्यताओं तथा समस्या के शुद्धगतिक सन्निकटनों—जैसे लघु विरूपण और भारण इतिहास में समतल परिच्छेदों का समतल रहना—के भीतर ही यथार्थ है।

31 $\mathbf{B}_d(x)$ के सन्निकटन से उत्पन्न संख्यात्मक त्रुटियों को कम करने के लिए संरचना का सूक्ष्म जाल विविक्तीकरण किया जाता है, विशेषतः सदस्यों के सिरों जैसे अत्यधिक अरैखिक व्यवहार वाले ढाँचा क्षेत्रों में। फिर भी संख्यात्मक अभिसरण समस्याएँ बनी रहती हैं। ठीक इसी कारण नम्यता-आधारित अवयव बेहतर परिणाम देता है।

ध्यान दें कि इस खंड में प्लवमान अवयव (चित्र और/अथवा सारणियाँ) हैं जिन्हें अगले खंड से पहले मुद्रित करना आवश्यक है। परिणामस्वरूप यहाँ रिक्त स्थान अथवा अंतराल दिखाई दे सकते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

61.3.1.3 "प्रच्छन्न" त्रुटि

32 हमारे समाधान में एक "प्रच्छन्न त्रुटि" प्रवेश कर जाती है। यह ध्यान रखते हुए कि न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति विधि वैश्विक निर्देश-तंत्र (संरचना स्तर) में कार्य करती है, चित्र 61.3a, इस त्रुटि को निम्न क्रम से समझा जा सकता है:

- k^{th} पुनरावृत्ति पर: $\bar{\mathbf{d}}_{e,n} \rightarrow \mathbf{d}_{s,n}(x)$ (स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव नोडीय विस्थापनों से परिच्छेद विस्थापन, समीकरण 61.1) (③)।
- प्रत्येक परिच्छेद के लिए: $\mathbf{d}_{s,n}(x) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x)$ (अवयव विस्थापनों से परिच्छेद विरूपण, समीकरण 61.2) (④), क्योंकि $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ केवल रैखिक प्रत्यास्थ स्थिति में यथार्थ है।
- परिच्छेद संघटक नियम को स्पष्ट रूप से ज्ञात मानते हुए, $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) \rightarrow \mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}(x)$ समीकरण 61.4 (परिच्छेद विरूपण से स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह); $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)$ (परिच्छेद विरूपण से आंतरिक परिच्छेद बल सदिश, समीकरण 61.3) (⑤)।
- तत्पश्चात स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव दृढता आव्यूह $\bar{\mathbf{k}}^{k}_{e,n}$ (समीकरण 61.7) तथा आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश $\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ (समीकरण 61.6) निर्धारित किए जाते हैं (⑥)।
- वैश्विक दृढता आव्यूह के समायोजन के दौरान संरचना का स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह तथा नोडीय आंतरिक बलों का सदिश निर्धारित होता है (⑦), और अभिसरण हेतु उसके बाद अवशिष्ट गणित किया जाता है (⑧)।
- क्योंकि $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ केवल सन्निकट है, इसलिए अवयव दृढता आव्यूह $\bar{\mathbf{k}}^{k}_{e,n}$ (समीकरण 61.7) तथा आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश $\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ (समीकरण 61.6) भी सन्निकट हैं।

33 $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ का सन्निकटन अधिक दृढ समाधान देता है। "Exact solution" अंकित वक्र केवल परिच्छेद संघटक नियम की मान्यताओं तथा लघु विरूपण और समतल परिच्छेदों के समतल बने रहने वाले शुद्धगतिक सन्निकटनों के भीतर ही यथार्थ है।

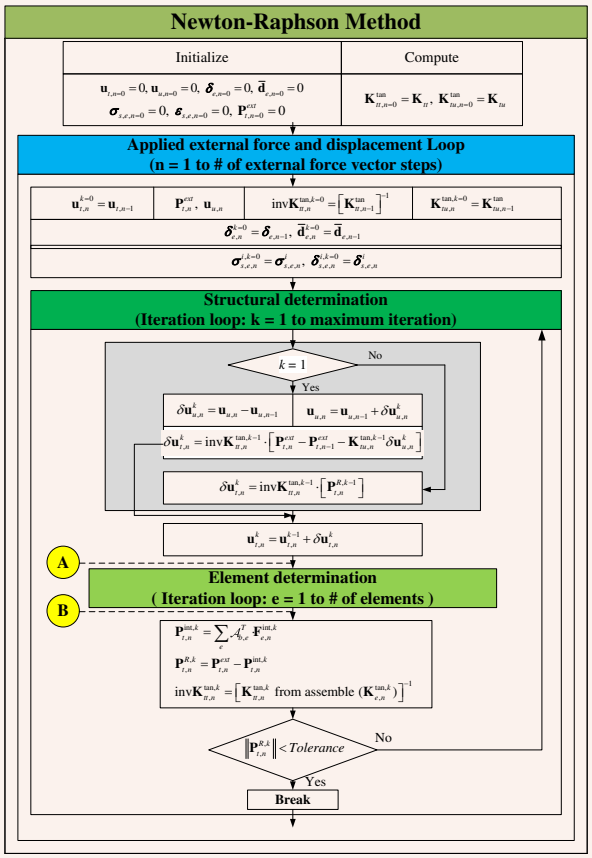
34 इस समस्या के समाधान के लिए या तो (a) संरचना का अधिक सूक्ष्म जाल विविक्तीकरण, विशेषतः सदस्य सिरों जैसे अत्यधिक अरैखिक व्यवहार वाले ढाँचा क्षेत्रों में, किया जा सकता है; अथवा (b) नीचे विवेचित नम्यता-आधारित अवयवों का उपयोग किया जा सकता है।

61.3.1.4 दृढता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण

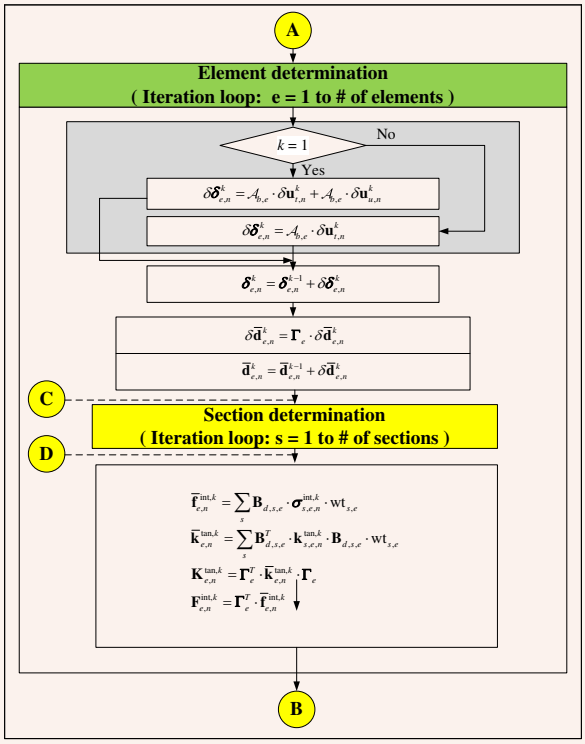
35 चित्र 61.4a, 61.4b तथा 61.4c के संदर्भ में, बल तथा विस्थापन नियंत्रण के अधीन परिच्छेद संघटक नियम सहित दृढता-आधारित अरैखिक विश्लेषण के लिए न्यूटन–रैफसन विधि के एक चरण का परीक्षण किया जाएगा। बल तथा विस्थापन नियंत्रण की चर्चा अनुभाग 59 में है। चित्र 61.4c की तंतु अथवा स्तर परिच्छेद प्रक्रिया अनुभाग 61.4 में वर्णित होगी।

चरण 1: संरचना स्तर पर वृद्धिशील नोडीय विस्थापन $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ तथा कुल नोडीय विस्थापन $\mathbf{u}_{t,n}$ गणित करें। आरंभ में पुनरावृत्ति समीकरण 61.10 तथा $k = 1$ से आरंभ होती है।

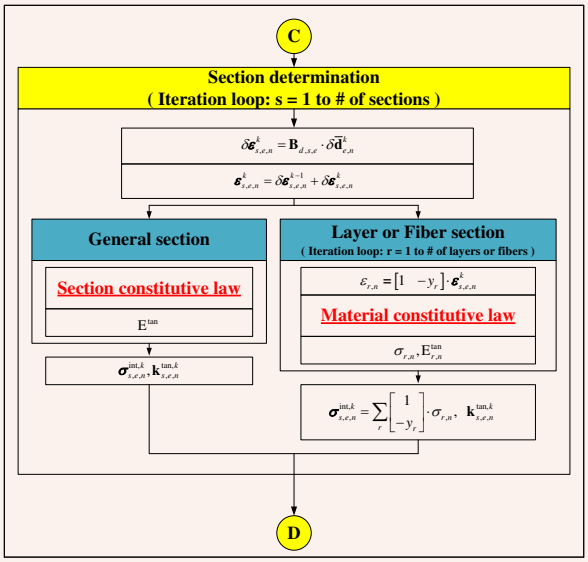
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a)



(b)



(c)

चित्र 61.4: दृढता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण का प्रवाह-चित्र

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यदि $k = 1$,

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}^{k}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\
\mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta \mathbf{u}^{k}_{u,n} \\
\delta \mathbf{u}^{k}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k-1}_{tt,n}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} - \mathbf{K}^{tan,k-1}_{tu,n} \delta \mathbf{u}^{k}_{u,n}] \\
\mathbf{u}^{k}_{t,n} &= \mathbf{u}^{k-1}_{t,n} + \delta \mathbf{u}^{k}_{t,n}
\end{aligned} \tag{61.10}$$

अन्यथा पुनरावृत्ति के लिए प्रयुक्त होता है

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} &= \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n} \\
\delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k}_{tt,n}]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} \\
\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^{k}_{t,n} + \delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n}
\end{aligned} \tag{61.11}$$

जहाँ उपरिलिखित k पुनरावृत्ति गणक, $\mathbf{P}^{R}_{t}$ संरचना स्तर का अवशिष्ट नोडीय बल सदिश, $\Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ अंतिम अभिसरित चरण से कुल वृद्धिशील विस्थापन सदिश और $\delta \mathbf{u}^{k+1}_{n}$ अंतिम वृद्धिशील विस्थापन सदिश है।

समीकरण 61.10 के लिए बल/विस्थापन नियंत्रण तथा संवर्धित दृढता आव्यूह $\mathbf{K}_S$, जिसमें $\mathbf{K}_{tt}$, $\mathbf{K}_{tu}$, $\mathbf{K}_{ut}$ और $\mathbf{K}_{uu}$ हैं, का विस्तृत वर्णन आवश्यक है। यह अनुभाग 44.2 में दिया गया है। यहाँ संवर्धित दृढता आव्यूह दो समूहों में विभाजित है: अधोलिखित 'u' उन स्थानों के लिए जहाँ विस्थापन ज्ञात अथवा शून्य हैं और 't' उन स्थानों के लिए जहाँ बल ज्ञात हैं।

चरण 2: सभी अवयवों पर क्रमशः जाएँ और उनकी अवस्था निर्धारित करें।

चरण 3: अवयव नोडीय विस्थापन सदिश निर्धारित करें।

यदि $k = 1$,

$$\delta \boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^{k}_{t,n} + \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^{k}_{u,n}$$

अन्यथा पुनरावृत्ति के लिए प्रयुक्त होता है

$$\delta \boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^{k}_{t,n}$$

जहाँ $\mathbf{A}_{b,e}$ विस्थापन निष्कर्षण संकारक है।

$$\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta \boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n}$$

जहाँ $\boldsymbol{\delta}^{0}_{e,n}$, $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$ के अनुरूप है।

$$\begin{aligned}
\delta \overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} &= \boldsymbol{\Gamma}_{e} \cdot \delta \boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} \\
\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} &= \overline{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta \overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}
\end{aligned}$$

जहाँ $\overline{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$, $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ के अनुरूप है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चरण 4: अवयव के परिच्छेदों पर क्रमशः जाकर परिच्छेद अवस्था निर्धारण आरंभ करें। परिच्छेदों की कुल संख्या अवयव-दर-अवयव बदल सकती है। अतः किसी अवयव में परिच्छेदों की कुल संख्या nIp_e है। यह गाउस–लेजेंद्र चतुर्थांश नियम के समाकलन बिंदुओं की संख्या पर निर्भर करती है।

चरण 5: परिच्छेद विरूपण सदिश निर्धारित करें। परिच्छेद अवस्था निर्धारण के लिए परिच्छेद को पहले सामान्य परिच्छेद और तंतु परिच्छेद में विभाजित करना आवश्यक है, जैसा अनुभाग 61.4 में वर्णित है। यहाँ केवल सामान्य परिच्छेद पर विचार किया गया है। प्रत्येक परिच्छेद का अवस्था निर्धारण क्रम i में किया जाता है, जहाँ i का अर्थ i^{th} परिच्छेद है।

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} = \mathbf{B}^{i}_{d,e} \cdot \delta\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

जहाँ $\mathbf{B}^{i}_{d,e}$, i^{th} परिच्छेद पर e^{th} अवयव में विस्थापन अंतर्वेशन फलनों से व्युत्पन्न आव्यूह है।

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{i,k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n}$$

जहाँ $\boldsymbol{\varepsilon}^{i,0}_{s,e,n}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{s,e,n-1}$ के अनुरूप है।

चरण 6: परिच्छेद स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह तथा आंतरिक परिच्छेद बल सदिश निर्धारित करें। परिच्छेद संघटक नियम को स्पष्ट रूप से ज्ञात मानने पर $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ तथा $\boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n}$ को $\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n}$ से निर्धारित किया जाता है। किंतु प्रत्यास्थ परिच्छेद में $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ की पुनर्गणना आवश्यक नहीं है, क्योंकि यह आरंभिक परिच्छेद दृढता आव्यूह के समान है $\mathbf{k}^{i}_{s,e}$.

प्रत्यास्थ परिच्छेद के लिए,

$$\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} = \mathbf{k}^{i}_{s,e} \tag{61.12}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n} = \mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} \tag{61.13}$$

जहाँ $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$, k^{th} पुनरावृत्ति पर परिच्छेद स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह है।

चरण 7: आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश तथा अवयव स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह निर्धारित करें। समीकरण 61.9 और 61.7 से $\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ तथा $\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$ निर्धारित होते हैं।

$$\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \sum_{(i,e)} {\mathbf{B}^{i}_{d,e}}^{T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n}\ \mathrm{wt}^{i}_{e}$$

जहाँ wt^{i}_{e}, i^{th} परिच्छेद पर e^{th} अवयव में जैकोबियन से संबद्ध भारांक गुणांक है।

$$\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} = \sum_{(i,e)} {\mathbf{B}^{i}_{d,e}}^{T} \cdot \mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} \cdot \mathbf{B}^{i}_{d,e} \cdot \mathrm{wt}^{i}_{e} \tag{61.14}$$

जहाँ $\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$ स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समीकरण 61.8 से $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ तथा $\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$ निर्धारित होते हैं।

$$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$$

चरण 8: आंतरिक नोडीय बल सदिश तथा संवर्धित स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह निर्धारित करें।

$$\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} = \sum_{(e)} \mathbf{A}_{b,e}{}^T \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} = \sum_{(e)} \mathbf{A}_{b,e}{}^T \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{A}_{b,e}$$

जहाँ $\mathbf{A}_{b,e}{}^T$ बल समायोजन संकारक है और $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ में $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$ तथा $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$ सम्मिलित हैं।

चरण 9: समीकरण 61.11 से संरचना स्तर पर अवशिष्ट नोडीय बल सदिश गणित करें। तत्पश्चात इसी अवशिष्ट नोडीय बल सदिश द्वारा अभिसरण की जाँच करें।

अभिसरण की जाँच:

- यदि $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ निर्दिष्ट सह्यता के भीतर है, तो अगली बल-वृद्धि पर जाएँ।
- यदि $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ निर्दिष्ट सह्यता के भीतर नहीं है, तो k को $k+1$ से अद्यतन करके अगली न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति आरंभ करें। संरचना स्तर पर अभिसरण प्राप्त होने तक समीकरण 61.11 सहित **चरण 1** से **चरण 9** दोहराएँ।

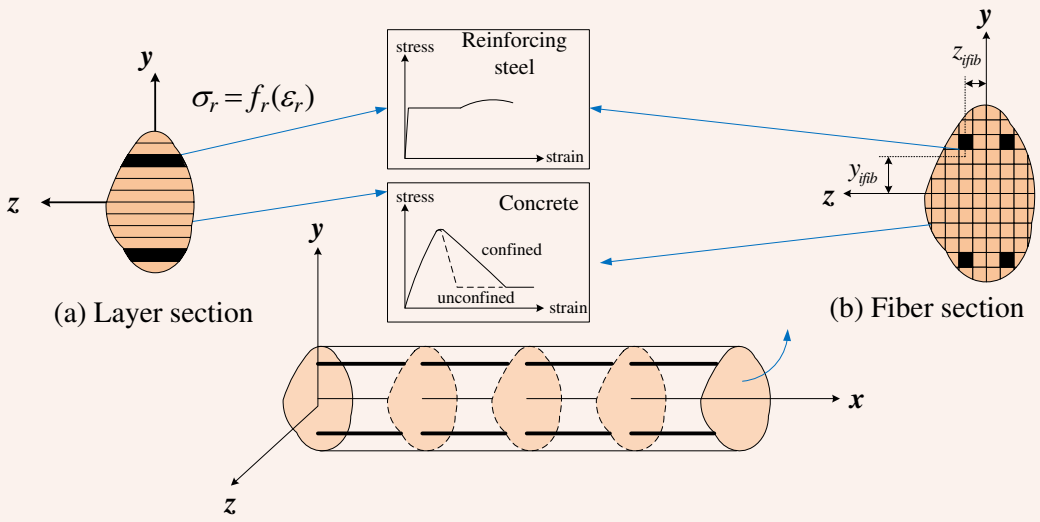
61.4 स्तर/तंतु परिच्छेद

[36] अब तक हमने माना है कि किसी परिच्छेद को आघूर्ण–वक्रता संबंध से निरूपित किया जाता है; अर्थात् आघूर्ण के सुघट्य/पराभव आघूर्ण तक पहुँचते ही पूरा परिच्छेद सुघटित हो जाता है। किंतु यह केवल एक सन्निकटन है, क्योंकि वास्तव में बाहरी तंतुओं से आरंभ होने वाला क्रमिक सुघटीकरण होता है और सुघटित क्षेत्र धीरे-धीरे भीतर की ओर फैलता है, जब तक अंततः पूरा परिच्छेद सुघट्य न हो जाए।

[37] अतः इस्पात अथवा प्रबलित कंक्रीट अवयवों के सुघट्यता-आधारित विश्लेषण के सर्वोत्तम प्रतिरूप स्तर/तंतु परिच्छेदों (§56.3.2) पर आधारित हैं, क्योंकि वे अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्रमिक सुघटीकरण को ग्रहण कर सकते हैं। स्तर/तंतु परिच्छेद में परिच्छेद को अनुदैर्ध्य स्तरों/तंतुओं में विभाजित किया जाता है, जैसा चित्र 61.5 में है।

[38] स्तरों/तंतुओं की ज्यामितीय विशेषताएँ स्थानीय y, z निर्देश-तंत्र में उनकी स्थिति तथा स्तर/तंतु क्षेत्रफल $A_{ir}(x)$ हैं, जहाँ अधोलिखित ir ir^{th} स्तर/तंतु को दर्शाता है। परिच्छेद का संघटक संबंध

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 61.5: तंतु परिच्छेद–नियंत्रण परिच्छेदों का वितरण तथा परिच्छेद का तंतुओं में उपविभाजन

स्पष्ट रूप से निर्दिष्ट नहीं किया जाता; इसे विशिष्ट सामग्री के एकाक्षीय प्रतिबल–विकृति संबंध पर आधारित स्तरों/तंतुओं की अनुक्रियाओं के समाकलन से व्युत्पन्न किया जाता है, चित्र 61.5।

39 परिच्छेद पर अक्षीय बल तथा बंकन आघूर्ण से स्तर/तंतु प्रतिबल निर्धारित नहीं किए जा सकते, क्योंकि एकाक्षीय बंकन की स्थिति में तीन अथवा अधिक अज्ञात प्रतिबलों के लिए केवल दो संतुलन समीकरण होते हैं। एक संभावित समाधान परिच्छेद के भीतर प्रतिबल वितरण मान लेना है; किंतु तब समस्या कलनविधि के स्तर/तंतु अवस्था निर्धारण चरण तक स्थगित हो जाती है, क्योंकि स्तर/तंतु प्रतिबल–विकृति संबंध सामान्यतः विकृति के स्पष्ट फलन के रूप में व्यक्त होते हैं।

40 अतः स्तर/तंतु प्रतिबल तथा दृढताएँ स्तर/तंतु प्रतिबल–विकृति संबंधों से निर्धारित होती हैं। आंतरिक परिच्छेद बल सदिश $\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$ स्तर/तंतु प्रतिबल वितरण से गणित किए जाते हैं और परिच्छेद स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह $\mathbf{k}_s^{tan}(x)$ स्तर/तंतु स्पर्शरेखीय दृढताओं से समायोजित किए जाते हैं।

41 अंततः हमारा उद्देश्य $\mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x)$ की ऐसी व्युत्पत्ति है कि

$$\left\{ \begin{array}{c} N(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\} = \mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x) \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon(x) \\ \phi_z(x) \end{array} \right\}$$

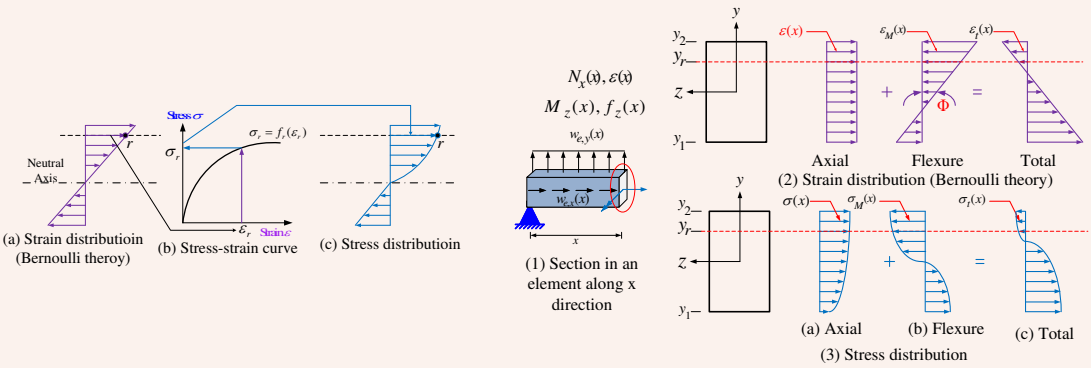
42 अनुप्रस्थ अपरूपण विरूपण की उपेक्षा करते हुए, अर्थात् रैखिक विकृति वितरण (ऑयलर–बर्नूली धरन) मानते हुए, किंतु *अरैखिक प्रतिबल–विकृति व्यवहार* रखते हुए, प्रतिबल वितरण है

$$\sigma_t(x) = \frac{N_x(x)}{A(x)} \pm \frac{M_z(x)}{I_z(x)} y$$

43 इस चरण पर, चित्र 61.6, नोडीय विस्थापन से परिच्छेद विरूपण—अक्षीय विकृति $\varepsilon(x)$ तथा वक्रता $\phi(x)$—और इस प्रकार रैखिक विकृति वितरण निर्धारित किया जा सकता है। किंतु सामग्री अरैखिक होने

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के कारण उदासीन अक्ष की यथार्थ स्थिति अभी ज्ञात नहीं है, और प्रत्येक तंतु ऊँचाई पर $E_r^{tan}(x)$ भिन्न है। यहाँ r तंतु अधोलिखित है।



चित्र 61.6: अरैखिक अनुप्रस्थ परिच्छेद प्रतिबल वितरण

[44] ε तथा Φ ज्ञात हैं और N तथा M निर्धारित करने हैं; पदों के दो समुच्चय होंगे: प्राथमिक और द्वितीयक।

प्राथमिक पद शुद्ध अक्षीय तथा बंकनीय प्रभावों से उत्पन्न होते हैं:

अक्षीय $\sigma(x)$ से उत्पन्न अक्षीय बल सरलता से निम्न से निर्धारित होता है

$$N_x(x) = \int_{-y_1}^{y_2} \sigma(x) dA = \int_{-y_1}^{y_2} \underbrace{E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon(x)}_{\sigma(x)} dA \simeq \sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot \varepsilon(x)$$

बंकनीय अब $\sigma_M(x)$ से उत्पन्न बंकनीय प्रभाव पर विचार करते हैं। हमें पुनः $M(x)$ का व्यंजक वक्रता तथा $E_r^{tan}(x)$ के पदों में चाहिए; स्मरण रहे कि $I = \int y^2 dA$ और $\sigma_M(x)_{@y_r} = E_r^{tan}(x) \cdot \phi_z(x) \cdot y_r$।

$$M_z(x) = \int_{-y_1}^{y_2} \sigma_M(x) \cdot y dA = \int_{-y_1}^{y_2} \underbrace{E_r^{tan}(x) \cdot \underbrace{\phi_z(x) \cdot y}_{\varepsilon} \cdot y}_{\sigma} dA$$

$$= \phi_z(x) \int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x) \cdot y^2 dA$$

$$\simeq \sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot y_r^2 \cdot \phi_z(x)$$

द्वितीयक पद युग्मन से उत्पन्न होते हैं और दृढता आव्यूह में अशून्य विकर्णेतर पद देते हैं। ध्यान दें कि रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण में ये निरस्त हो जाते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

वक्रता से उत्पन्न अक्षीय बल क्योंकि अरैखिक बंकनीय प्रतिबल वितरण से बलों का योग अनिवार्यतः शून्य होने का कोई कारण नहीं है।

$$
\begin{aligned}
dN_x(x) &= -E_r^{tan}(x)\cdot\varepsilon_M(x)dA = -E_r^{tan}(x)\cdot\phi_z(x)\cdot y dA\\
N_x(x) &= -\int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x)\cdot\phi_z(x)\cdot y dA\\
&\simeq -\sum_r E_r^{tan}(x)\cdot A_r(x)\cdot y_r\cdot\phi_z(x)
\end{aligned}
$$

जहाँ विकृति ($\varepsilon_M(x)$) वक्रता ($\phi_z(x)$) से प्राप्त होती है।

अक्षीय विकृति से उत्पन्न आघूर्ण क्योंकि उदासीन अक्ष की मानी गई स्थिति यथार्थ हो और फलतः आघूर्णों का योग शून्य हो, यह आवश्यक नहीं है।

$$dM_z(x) = -E_r^{tan}(x)\cdot\varepsilon(x)\cdot y\cdot dA \tag{61.15}$$

$$M_z(x) = -\int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x)\cdot\varepsilon(x)\cdot y dA \tag{61.16}$$

$$\simeq -\sum_r E_r^{tan}(x)\cdot A_r(x)\cdot y_r\cdot\varepsilon(x) \tag{61.17}$$

[45] इन पदों को आव्यूह में संयोजित करने पर $\mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x)$ का रूप है:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N\\ M\end{Bmatrix}}_{\sigma_S} = \underbrace{\sum_{ir}\begin{matrix}\varepsilon(x)\\ \kappa(x)\end{matrix}\begin{bmatrix} E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x) & -E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir}\\ -E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir} & E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir}^2\end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_s^{tan,n}}\begin{matrix}N_x(x) & M_z(x)\end{matrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon(x)\\ \phi_z(x)\end{Bmatrix} \tag{61.18}$$

61.4.1 नम्यता-विधि 2D धरन–स्तंभ अवयव

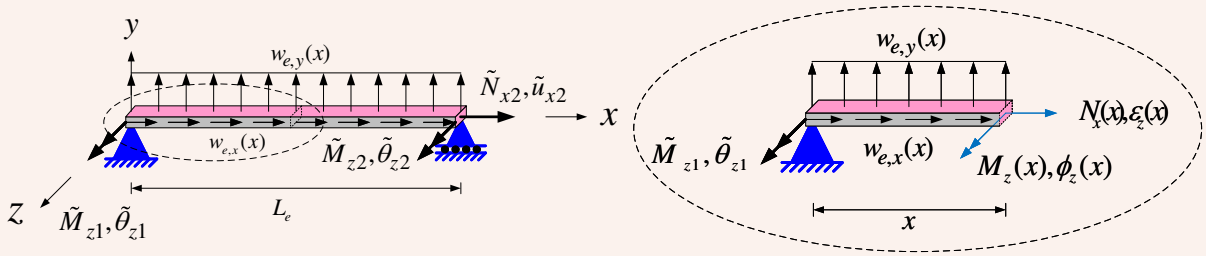
[46] नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव "असम्मत" परिमित अवयव हैं, क्योंकि वे पारंपरिक दृढता आव्यूह के स्थान पर अवयव नम्यता आव्यूह देते हैं और माने हुए विस्थापन क्षेत्र के स्थान पर संतुलन समीकरणों पर आधारित होते हैं। फिर भी इनके कुछ महत्त्वपूर्ण लाभ हैं।

[47] हम दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नम्यता आव्यूह $\tilde{\mathbf{c}}_e$ व्युत्पन्न करते हैं और फिर उसका व्युत्क्रम लेकर दृढ-पिंड विधाओं के बिना संगत अवयव दृढता आव्यूह $\tilde{\mathbf{k}}_e$ प्राप्त करते हैं (§46.4.2)। यह उन स्थितियों में विशेष रूप से उपयोगी है जहाँ दृढता-आधारित सूत्रीकरण सन्निकट और नम्यता-आधारित सूत्रीकरण यथार्थ होता है, जैसे अवयव की लंबाई में बदलता परिच्छेद अथवा सामग्री अरैखिकता वाले अवयव।

[48] हम पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत को पारंपरिक तीन प्रमुख चरणों में प्रयोग करेंगे।

संतुलन हम संतुलन समीकरण के प्रबल रूप से आरंभ करते हैं, चित्र 61.7:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 61.7: दृढ-पिंड विधाओं के बिना 2D ढाँचा अवयव

$$\underbrace{\mathbf{w}_e(x)}_{\text{External}} + \underbrace{\mathbf{L}_f^T \boldsymbol{\sigma}_s(x)}_{\text{Internal}} = \mathbf{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} w_x^{(e)}(x) \\ w_y^{(e)}(x) \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\} = \mathbf{0} \tag{61.19}$$

जहाँ $\mathbf{w}_e(x)$ बाह्य अवयव बल सदिश और $\mathbf{L}_f$ बल अवकल संकारक है।

पहले मानते हैं कि बाह्य अवयव बल सदिश नहीं है, अर्थात् $\mathbf{w}_e(x) = \mathbf{0}$। बल अंतर्वेशन फलनों $\mathbf{N}_f(x)$ का चयन इस आवश्यकता से होता है कि समीकरण 61.19 में व्यक्त संतुलन प्रबल रूप में संतुष्ट हो। अतः ऑयलर-बर्नूली धरन के लिए:

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\} = \mathbf{0}$$

जिससे प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_x(x)}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 M_z(x)}{\mathrm{d}x^2} &= 0 \end{aligned}$$

और अतः

$$\begin{aligned} N_x(x) &= c_3 \\ M_z(x) &= c_1 x + c_2 \end{aligned} \tag{61.20}$$



चित्र 61.8: परिच्छेद बल के लिए चिह्न परिपाटी

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चित्र 61.7 की सीमा-शर्त को परिच्छेद बल की चिह्न परिपाटी, चित्र 61.8, के साथ लागू करने पर,

$$
\begin{aligned}
N_x(L) &= N_{x2} \\
M_z(0) &= -M_{z1} \\
M_z(L) &= M_{z2}
\end{aligned}
$$

प्राप्त होता है:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{M_{z1} + M_{z2}}{L_e} \\
c_2 &= -M_{z1} \\
c_3 &= N_{x2}
\end{aligned}
\tag{61.21}
$$

समीकरण 61.21 को समीकरण 61.20 में प्रतिस्थापित करने पर,

$$
\begin{aligned}
N_x(x) &= N_{x2} \\
M_z(x) &= \left(\frac{x}{L_e} - 1\right) M_{z1} + \frac{x}{L_e} M_{z2}
\end{aligned}
$$

अथवा

$$
\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{L_e} - 1 & \frac{x}{L_e} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_f(x)} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ N_{x2} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}_e}
\tag{61.22}
$$

जहाँ $\tilde{\mathbf{f}}_e$ दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नोडीय बल सदिश है।

अंततः समीकरण 61.22 से बल अंतर्वेशन फलनों का आव्यूह निकाला जाता है।

$$
\mathbf{N}_f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{L_e} - 1 & \frac{x}{L_e} & 0 \end{bmatrix}
$$

संघटक नियम समीकरण 61.5 में दर्शाए गए दृढता-आधारित विधि के पारंपरिक संघटक संबंध का व्युत्क्रम अब निम्न है:

$$
\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \mathbf{c}_s(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x)
\tag{61.23}
$$

जहाँ $\mathbf{c}_s(x)$ परिच्छेद नम्यता आव्यूह है। यदि $\mathbf{c}_s(x)$ अनुभाग 61.4 में विवेचित तंतु परिच्छेद से व्युत्पन्न नहीं है, तो रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण के लिए $\mathbf{c}_s(x)$ सरलतः निम्न है।

$$
\mathbf{c}_s(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E(x) \cdot A(x)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E(x) \cdot I_z(x)} \end{bmatrix}
$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संगतता पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत द्वारा संगतता समीकरण दुर्बल रूप में प्राप्त होता है (दृढता-आधारित विधि के आभासी कार्य के विपरीत)।

$$\underbrace{\delta\tilde{\mathbf{f}}_e{}^T\tilde{\mathbf{d}}_e}_{\text{External}} = \underbrace{\int_0^L \delta\boldsymbol{\sigma}_s(x)^T\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\mathrm{d}x}_{\text{Internal}} \tag{61.24}$$

जहाँ $\tilde{\mathbf{d}}_e$ दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नोडीय विस्थापन सदिश है।

समीकरण 61.22 तथा 61.23 को समीकरण 61.24 में प्रतिस्थापित करने पर, और क्योंकि अंतिम संबंध किसी भी स्वेच्छ $\delta\tilde{\mathbf{f}}_e$ के लिए सत्य होना चाहिए, प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{f}}_e{}^T\tilde{\mathbf{d}}_e &= \int_0^L \delta\tilde{\mathbf{f}}_e{}^T\cdot\mathbf{N}_f(x)^T\cdot\mathbf{c}_s(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}_s(x)\ \mathrm{d}x\\
\tilde{\mathbf{d}}_e &= \int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T\cdot\mathbf{c}_s(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}_s(x)\ \mathrm{d}x\\
&= \underbrace{\int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T\cdot\mathbf{c}_s(x)\cdot\mathbf{N}_f(x)\ \mathrm{d}x}_{\tilde{\mathbf{c}}_e}\cdot\tilde{\mathbf{f}}_e\\
\tilde{\mathbf{d}}_e &= \tilde{\mathbf{c}}_e\cdot\tilde{\mathbf{f}}_e
\end{aligned} \tag{61.25}$$

अतः स्थानीय निर्देश-तंत्र में दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नम्यता आव्यूह है:

$$\tilde{\mathbf{c}}_e = \int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T\cdot\mathbf{c}_s(x)\cdot\mathbf{N}_f(x)\ \mathrm{d}x \tag{61.26}$$

और स्थानीय निर्देश-तंत्र में दृढ-पिंड विधाओं के बिना संगत अवयव दृढता आव्यूह है

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = [\tilde{\mathbf{c}}_e]^{-1}$$

61.4.1.1 बर्नूली धरन सिद्धांत सहित नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव का निर्देश-तंत्र

49 चित्र 61.2 में दृढता-आधारित विधि के निर्देश-तंत्र के विपरीत, यहाँ चित्र 61.9 के अनुसार स्थानीय निर्देश-तंत्र में दृढ-पिंड विधाओं सहित तथा रहित बलों और विस्थापनों पर विचार करना आवश्यक है।

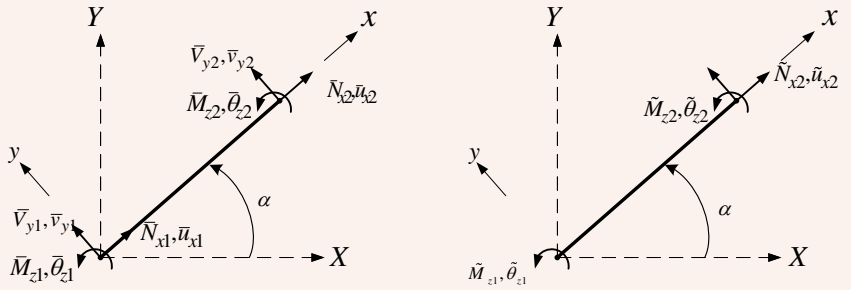
50 स्थानीय निर्देश-तंत्र में दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नोडीय बल सदिश है

$$\tilde{\mathbf{f}}_e = \lfloor \tilde{M}_{z1},\ \tilde{M}_{z2},\ \tilde{N}_{x2}\rfloor^T$$

और स्थानीय निर्देश-तंत्र में दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नोडीय विस्थापन सदिश है

$$\tilde{\mathbf{d}}_e = \lfloor \tilde{\theta}_{z1},\ \tilde{\theta}_{z2},\ \tilde{u}_{x2}\rfloor^T$$

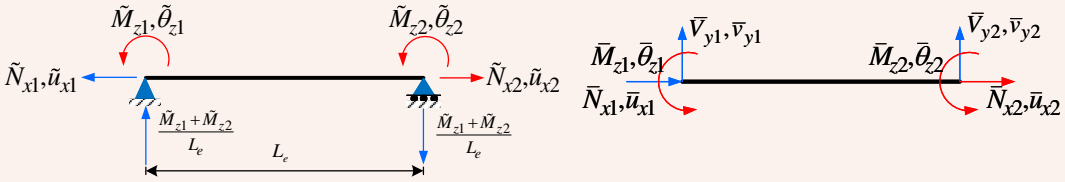
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) Local reference in an element

(b) Local reference in an element without rigid body modes

चित्र 61.9: नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव के लिए दृढ-पिंड विधाओं सहित अथवा रहित स्थानीय निर्देश-तंत्र में आंतरिक बल और संगत विस्थापन



चित्र 61.10: दृढ-पिंड विधाओं सहित तथा रहित राशियों के बीच संबंध

51 दृढ-पिंड विधाओं सहित तथा रहित राशियों के बीच संबंध चित्र 61.10 के संतुलन से प्राप्त होता है।

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{L_e} & \frac{1}{L_e} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ N_{x2} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}_e}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}_e &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}_e \\ \bar{\mathbf{d}}_e &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{d}}_e \\ \mathbf{K}_e &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_e \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e\end{aligned} \tag{61.27}$$

52 अंततः अवयव दृढता आव्यूह समीकरण 46.22 से पुनः प्राप्त किया जा सकता है

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

जहाँ $\mathcal{B}$ स्थैतिकी आव्यूह है (§46.2.1.2)।

61.4.1.2 अवस्था निर्धारण

53 नम्यता-आधारित विधि के लाभों पर केंद्रित Zeris and Mahin, 1988 के अध्ययनों ने अवयव विरूपणों से आंतरिक अवयव बल सदिशों की गणना के लिए स्पष्ट और सुसंगत विधि नहीं दी। कारण यह है कि पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत से व्युत्पन्न नम्यता-आधारित अवयव में अवयव के भीतर विरूपण क्षेत्र को अवयव नोडीय विस्थापन सदिश से जोड़ने वाले आकार फलन नहीं होते; इसके स्थान पर *परिच्छेद बलों को नोडीय बलों से जोड़ने वाले आकार फलन* होते हैं।

54 वैश्विक सूत्रीकरण दृढता (विस्थापन) पर आधारित है, जबकि अवयव सूत्रीकरण नम्यता (बल) पर आधारित है; आंतरिक अवयव बल सदिशों के निर्धारण में इन दोनों का सामंजस्य आवश्यक है।

55 अवयव स्तर पर नम्यता-आधारित अवयव ऐसे *नोडीय विस्थापन दे सकता है जो निकटस्थ अवयवों से प्राप्त विस्थापनों के साथ अनिवार्यतः संगत नहीं होते*, ठीक उसी प्रकार जैसे दृढता-आधारित सूत्रीकरण में अवयव स्तर पर बल संगत नहीं थे।

56 हमें *नोडीय विस्थापन संगतता सुनिश्चित करनी* है, उसी प्रकार जैसे दृढता-आधारित सूत्रीकरण में नोडीय संतुलन सुनिश्चित किया गया था। यह पुनरावृत्तीय रूप से किया जा सकता है।

57 ध्यान दें कि दृढता-आधारित विधि में नोडीय बलों में असांतत्य था।

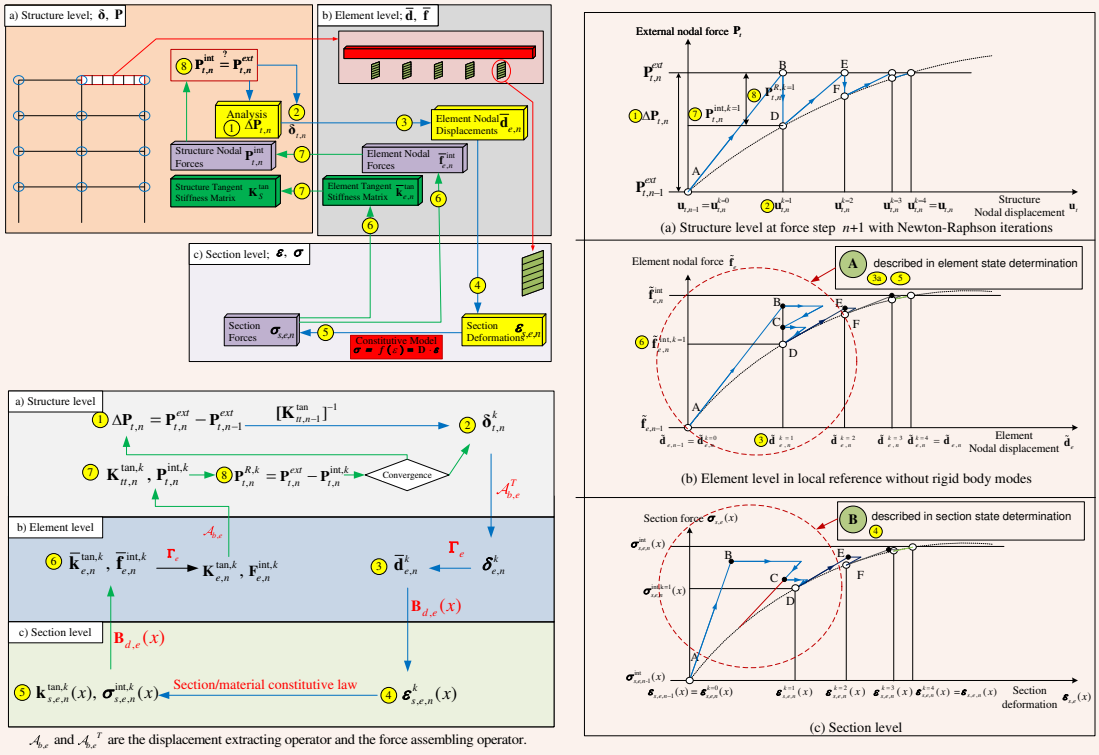
58 मिश्रित दृढता-आधारित तथा नम्यता-आधारित विधियों के लिए दो कलनविधियाँ हैं: (a) अवयव अवस्था निर्धारित करने हेतु अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति सहित (Spacone, Ciampi, and Filippou, 1992); और (b) अवयव अवस्था निर्धारित करने हेतु अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति के बिना (Carol and Murcia, 1989)।

61.4.1.2.1 अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति के बिना

59 अरैखिक संरचनात्मक विश्लेषण में, दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ के अवस्था निर्धारण की भाँति, अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति के बिना मिश्रित दृढता- तथा नम्यता-आधारित विधि की अवस्था निर्धारण प्रक्रिया परिच्छेद, अवयव और संरचना के लिए तीन चरणों से बनी है, जैसा चित्र 61.11 में है।

60 संरचना अवस्था निर्धारण पूर्ण होने पर k^{th} पुनरावृत्ति का आंतरिक नोडीय बल सदिश $\mathbf{P}_{t,n}^{int,k}$ कुल लागू बाह्य नोडीय बल सदिश $\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$ से तुलना किया जाता है। यदि कोई अंतर हो, तो वह अवशिष्ट नोडीय बल सदिश $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ देता है, जिसे पुनरावृत्तीय समाधान में संरचना पर तब तक पुनः लागू किया जाता है जब

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 61.11: अवयव पुनरावृत्ति के बिना नम्यता-आधारित विधि का अवस्था निर्धारण

तक कुल लागू बाह्य बल सदिश और आंतरिक नोडीय बल सदिश का अंतर निर्दिष्ट सहनशीलता के भीतर न आ जाए।

61 दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ की भाँति, अवयव पुनरावृत्ति के बिना नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव की अवस्था निर्धारण प्रक्रिया सीधी है। दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n}$, k^{th} पुनरावृत्ति पर, समीकरण 61.27 से और दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नोडीय बल सदिश $\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}$ समीकरण 61.25 से निर्धारित होता है।

$$
\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} \\
\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} \\
\\
\delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} &= \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} \\
\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} &= \tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}
\end{aligned}
\tag{61.28}
$$

62 k^{th} पुनरावृत्ति के परिच्छेद बल सदिश $\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x)$ अवयव नोडीय बल सदिश $\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}$ से निर्धारित होते

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

हैं; तत्पश्चात k^{th} पुनरावृत्ति के परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x)$ परिच्छेद बल सदिश $\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x)$ से समीकरण 61.29 के अनुसार निर्धारित होते हैं।

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x) &= \mathbf{N}_{f,e}\cdot\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}\\
\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n}(x)+\delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x)\\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) &= \tilde{\mathbf{c}}^{tan,k-1}_{s,e,n}(x)\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x)\\
\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n}(x)+\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x)
\end{aligned} \tag{61.29}$$

63 परिच्छेद संघटक नियम स्पष्ट रूप से ज्ञात मानते हुए, परिच्छेद स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूह $\tilde{\mathbf{c}}^{k}_{s,e,n}(x)$ तथा आंतरिक परिच्छेद बल सदिश $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)$ को $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x)$ से सरलता से गणित किया जाता है।

64 इस उपागम में पहले परिच्छेद स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूह $\tilde{\mathbf{c}}^{k}_{s,e,n}(x)$ द्वारा अवशिष्ट परिच्छेद बल तथा विरूपण सदिश निर्धारित किए जाते हैं।

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x)-\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)\\
\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n}(x) &= \tilde{\mathbf{c}}^{k}_{s,e,n}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}(x)
\end{aligned}$$

65 अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश प्राप्त करने के लिए अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिशों को आभासी बल के सिद्धांत द्वारा अवयव की लंबाई में समाकलित किया जाता है।

$$\tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n}=\int_{0}^{L}\mathbf{N}_{f,e}(x)^{T}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n}(x)$$

66 दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नम्यता आव्यूह $\tilde{\mathbf{c}}^{k}_{e,n}$ समीकरण 61.26 से निर्धारित होता है; तत्पश्चात अवशिष्ट अवयव नोडीय बल सदिश अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश से निर्धारित किया जाता है।

$$\tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n}=[\tilde{\mathbf{c}}^{k}_{e,n}]^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} \tag{61.30}$$

67 दृढ-पिंड विधाओं के बिना आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश समीकरण 61.28 तथा 61.30 से निर्धारित होता है।

$$\tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}=\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}-\tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n}$$

68 इसके बाद आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश समीकरण 61.27 से प्राप्त होता है।

$$\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}=[\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e}]^{T}\cdot\tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$$

69 अवयव अवस्था निर्धारण के लिए अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति के बिना नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव की प्रक्रिया सीधी है, जबकि अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति वाला नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव सूत्रीकरण अधिक जटिल है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

70 दृढता-आधारित अवयव के माने हुए विस्थापन अंतर्वेशन फलनों के विपरीत, यह अवयव सूत्रीकरण बिना किसी मान्यता के बल अंतर्वेशन फलनों का उपयोग करता है।

71 बल अंतर्वेशन फलनों की यथार्थ प्रकृति के कारण अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति के बिना नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव सूत्रीकरण में कोई अंतर्निहित त्रुटि नहीं होती। इसके अतिरिक्त, यदि अवयव का अनुदैर्ध्य अक्ष के साथ परिच्छेद सुसंगत है, तो अवयव के आकार पर *कोई सीमा नहीं* है (Carol and Murcia, 1989)।

61.4.1.2.2 अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति पाश सहित

72 अरैखिक संरचनात्मक विश्लेषण में दृढता-आधारित 2D धरन–स्तंभ के अवस्था निर्धारण की भाँति, अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति पाश सहित मिश्रित दृढता- तथा नम्यता-आधारित विधि की अवस्था निर्धारण प्रक्रिया परिच्छेद, अवयव और संरचना के लिए तीन चरणों से बनी है, जैसा चित्र 61.12 में है। चित्र 61.12(b) का उपरिलिखित j अवयव अवस्था निर्धारण में अवयव-स्तरीय पुनरावृत्ति को दर्शाता है। आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश $\tilde{\mathbf{f}}_e^{int,k}$, जो अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\tilde{\mathbf{d}}_e^k$ के अनुरूप है, k^{th} न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति में निर्धारित करने के लिए यह पाश आवश्यक है।

73 इस विधि में संरचना स्तर की पुनरावृत्ति प्रक्रिया के लिए न्यूटन–रैफसन विधि प्रयुक्त होती है। संरचना-स्तरीय पुनरावृत्ति, आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश $\tilde{\mathbf{f}}_e^{int}$ को दिए गए अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\tilde{\mathbf{d}}_e$ के लिए निर्धारित करने वाली अवयव-स्तरीय रणनीति को प्रभावित नहीं करती।

74 नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव में पहला चरण अवयव नोडीय बल सदिश $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j}$ को वर्तमान अवयव नोडीय विस्थापन सदिश से, पिछली पुनरावृत्ति के अंत के अवयव स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह $\tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j-1}$ का उपयोग करके, निर्धारित करना है। तत्पश्चात बल अंतर्वेशन फलन $\mathbf{N}_{f,e}(x)$ अवयव की लंबाई में परिच्छेद बल सदिश $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j}(x)$ देते हैं।

75 पहली समस्या दिए गए परिच्छेद बल सदिशों से परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j}(x)$ निर्धारित करना है, क्योंकि अरैखिक परिच्छेद बल–विरूपण संबंध सामान्यतः परिच्छेद विरूपण सदिश के स्पष्ट फलन के रूप में व्यक्त होता है। दूसरी समस्या यह है कि परिच्छेद स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह $\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan}(x)$ में परिवर्तन नया अवयव स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह उत्पन्न करता है, जो बदले में दिए गए अवयव नोडीय विस्थापन सदिश के लिए अवयव नोडीय बल सदिश बदल देता है।

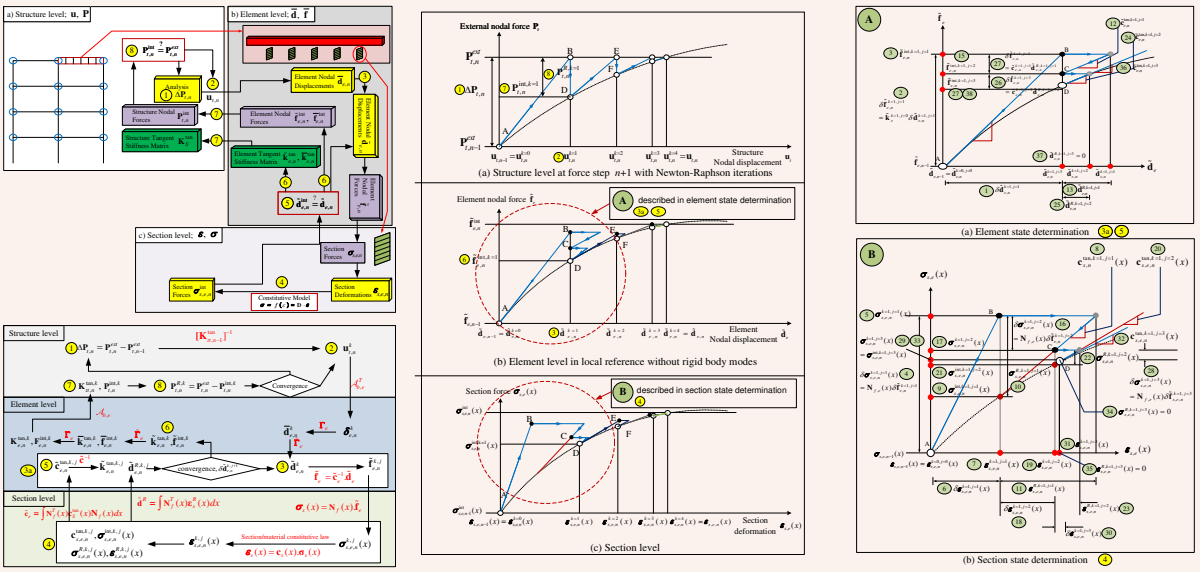
76 इन समस्याओं का समाधान एक विशेष अरैखिक विधि से किया जाता है। इसमें प्रत्येक पुनरावृत्ति पर अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ निर्धारित होता है। संरचना स्तर की विस्थापन संगतता के लिए इस सदिश का संशोधन आवश्यक है। यह अवयव स्तर पर वर्तमान अवयव स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह पर आधारित संशोधक अवयव नोडीय बल सदिश लगाकर किया जाता है।

77 संगत परिच्छेद बल सदिश बल अंतर्वेशन फलनों से निर्धारित किए जाते हैं, जिससे अवयव की लंबाई में संतुलन सदैव संतुष्ट रहता है। इस संतुलन को बनाए रखने के लिए परिच्छेद अवस्था निर्धारण के दौरान ये परिच्छेद बल सदिश बदल नहीं सकते।

78 अंततः वर्तमान अवस्था के निकट परिच्छेद बल–विरूपण संबंध का रैखिक सन्निकटन अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k,j}(x)$ देता है। इन्हें अवयव की लंबाई में समाकलित करके नया अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश प्राप्त किया जाता है और अभिसरण तक पूरी प्रक्रिया दोहराई जाती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

79 इस प्रक्रिया में अवयव नोडीय विस्थापन सदिश की संगतता तथा अवयव की लंबाई में संतुलन सदैव संतुष्ट रहते हैं।



चित्र 61.12: नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव का अवस्था निर्धारण (Taucer, Spacone, and Filippou, 1991a)

80 एक न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति k के लिए अवयव तथा परिच्छेद अवस्था निर्धारण की अरैखिक समाधान प्रक्रिया चित्र 61.13a और 61.13b में दर्शाई गई है। पाश j में अभिसरण तीन पुनरावृत्तियों में प्राप्त होता है।

81 अवयव स्तर के न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति पाश का उद्देश्य k^{th} न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति पर वर्तमान अवयव नोडीय विस्थापन सदिश के लिए आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश निर्धारित करना है।

$$\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} = \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1} + \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$$

82 अवयव स्तर की पुनरावृत्तीय प्रक्रिया को उपरिलिखित j से दर्शाया गया है, जिसे k^{th} न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति के भीतर प्रस्तुत किया गया है।

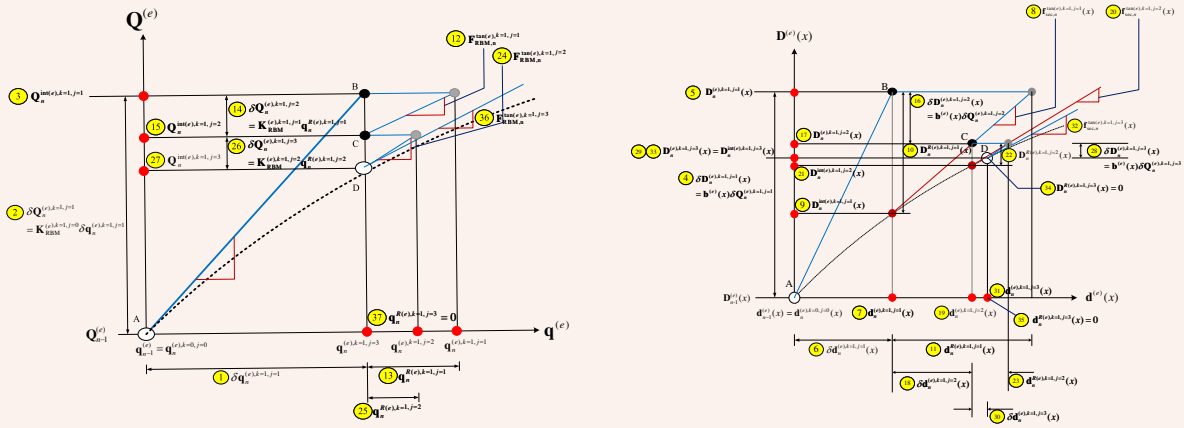
83 प्रथम पुनरावृत्ति $j = 1$ के अनुरूप है। अवयव की आरंभिक अवस्था, जिसे बिंदु **A** और $j = 0$, $k = 0$ द्वारा चित्र 61.13a में निरूपित किया गया है, संरचना स्तर पर अंतिम अभिसरण के अंत की अवस्था है। आरंभिक अवयव स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह है:

$$\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k=1,j=0} = \tilde{\mathbf{c}}_{e,n-1}^{tan}$$

और दिया गया वृद्धिशील अवयव नोडीय विस्थापन सदिश है

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1,j=1} = \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) अवयव स्तर (b) परिच्छेद स्तर

चित्र 61.13: अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति पाश सहित नम्यता-आधारित 2D धरन–स्तंभ अवयव का अवस्था निर्धारण

अतः संगत वृद्धिशील अवयव नोडीय बल सदिश है

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=1} = \left[\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k=1,j=0}\right]^{-1} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1,j=1}$$

84 अब वृद्धिशील परिच्छेद बल सदिशों को बल अंतर्वेशन फलनों से निर्धारित किया जा सकता है

$$\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=1}$$

संरचना स्तर पर अंतिम अभिसरण के अंत के परिच्छेद सुपरशरेखीय नम्यता आव्यूहों के साथ

$$\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=0}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n-1}^{tan}(x)$$

परिच्छेद बल–विरूपण संबंध का रैखिकीकरण वृद्धिशील परिच्छेद विरूपण सदिश देता है।

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=0}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$$

85 परिच्छेद विरूपण सदिशों को बिंदु **B** के अनुरूप अवस्था तक अद्यतन किया जाता है, जैसा चित्र 61.13b में है।

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=0}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$$

सरलता के लिए परिच्छेद बल–विरूपण संबंध को सुपष्ट रूप से ज्ञात मानने पर परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$ आंतरिक परिच्छेद बल सदिश $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k=1,j=1}(x)$ के अनुरूप होंगे और नया परिच्छेद

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूह $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x)$, चित्र 61.13b में, परिभाषित किया जा सकता है। इस उपागम में पहले अवशिष्ट परिच्छेद बल सदिश निर्धारित किए जाते हैं

$$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) = \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) - \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k=1,j=1}(x)$$

और फिर उन्हें अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$ में रूपांतरित किया जाता है

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$$

86 अतः अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिश, परिच्छेद बल-विरूपण संबंध के रैखिकीकरण में हुई विरूपण त्रुटि के रैखिक सन्निकटन हैं (चित्र 61.13b)। यद्यपि इनकी गणना में कोई भी उपयुक्त परिच्छेद नम्यता आव्यूह प्रयुक्त किया जा सकता है, परिच्छेद स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूह सर्वाधिक तीव्र अभिसरण देते हैं।

87 अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश प्राप्त करने के लिए अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिशों को आभासी बल के सिद्धांत द्वारा अवयव की लंबाई में समाकलित किया जाता है।

$$\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1} = \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) \mathrm{d}x$$

88 इस चरण पर संगत पाश की प्रथम पुनरावृत्ति $j = 1$ पूर्ण होती है। $j = 1$ की अंतिम अवयव और परिच्छेद अवस्थाएँ बिंदु **B** के अनुरूप हैं, जैसा चित्र 61.13a तथा चित्र 61.13b में है। प्रथम पुनरावृत्ति में अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$ तथा अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}$ निर्धारित होते हैं, किंतु संगत अवयव नोडीय विस्थापन सदिश अद्यतन नहीं होता। इसके स्थान पर ये पाश j के शेष चरणों का आरंभिक बिंदु बनते हैं। अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}$ की उपस्थिति संगतता का उल्लंघन करती है, क्योंकि समान नोड साझा करने वाले अवयवों के नोडीय विस्थापन सदिश अब भिन्न होंगे।

89 अंतर-अवयव संगतता पुनः स्थापित करने के लिए संशोधक बल सदिश $\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}$ अवयव के सिरों पर समीकरण 61.31 के अनुसार लगाना आवश्यक है।

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} &= -\left[\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=1}\right]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=1} &= \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x) \cdot \mathbf{N}_{f,e}(x) \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{61.31}$$

अतः द्वितीय पुनरावृत्ति $j = 2$ में अवयव नोडीय बल सदिश को निम्न प्रकार अद्यतन किया जाता है

$$\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} = \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=1} + \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और परिच्छेद बल तथा विरूपण सदिश निम्न प्रकार अद्यतन होते हैं

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \mathbf{N}_{f,e}(x)\cdot\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}\\
\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)+\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x)\\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)+\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x)\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x)\\
\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)+\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x)
\end{aligned}$$

90 द्वितीय पुनरावृत्ति $j=2$ के अंत में अवयव तथा उसके परिच्छेदों की अवस्था बिंदु $\mathbf{C}$ के अनुरूप है, जैसा चित्र 61.13a तथा 61.13b में है। सभी परिच्छेदों के लिए नए स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूह $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=2}(x)$ तथा नए अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=2}(x)$ गणित किए जाते हैं।

91 तत्पश्चात अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिशों को समाकलित करके अवशिष्ट अवयव नोडीय विरूपण सदिश $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=2}$ प्राप्त किया जाता है और नया अवयव स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूह $\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=2}$, परिच्छेद नम्यता आव्यूहों $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=2}(x)$ के समाकलन से समीकरण 61.31 के अनुसार निर्धारित होता है। इससे पाश j की द्वितीय पुनरावृत्ति पूर्ण होती है।

92 तृतीय और उसके बाद की पुनरावृत्तियाँ ठीक इसी योजना का अनुसरण करती हैं। चयनित अभिसरण निकष संतुष्ट होने पर अभिसरण प्राप्त होता है। पाश j समाप्त होने पर दिए गए अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1}$ के लिए आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश स्थापित हो जाता है, जैसा बिंदु $\mathbf{D}$ से चित्र 61.12, 61.13a तथा 61.13b में दर्शाया गया है। अब न्यूटन-रैफसन प्रक्रिया चरण $k+1$ पर बढ़ सकती है।

93 जब वृद्धिशील अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k,j=1}=\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$ को पिछली न्यूटन-रैफसन पुनरावृत्ति के अंत के अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1}$ में जोड़ा जाता है, तब ध्यान देना चाहिए कि अवयव नोडीय विस्थापन सदिश $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$ केवल प्रथम पुनरावृत्ति $j=1$ में बदलता है, जो पाश j के भीतर है।

94 अवयव की लंबाई में संतुलन सदैव कठोरता से संतुष्ट होता है, क्योंकि परिच्छेद बल सदिश बल अंतर्वेशन फलनों द्वारा अवयव नोडीय बल सदिश से व्युत्पन्न होते हैं:

$$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k}(x)=\mathbf{N}_{f,e}(x)\cdot\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k}\quad\text{and}\quad\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k}(x)=\mathbf{N}_{f,e}(x)\cdot\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k}$$

95 संगतता केवल अवयव सिरों पर ही नहीं, बल्कि अवयव की पूरी लंबाई में भी संतुष्ट होती है।

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j} &= -\left[\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k,j-1}\right]^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j-1}\\
\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j}(x) &= \mathbf{N}_{f,e}(x)\cdot\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j}\\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j-1}(x)+\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k,j-1}(x)\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j}(x)
\end{aligned}$$

समीकरण 61.32 का दूसरा पद परिच्छेद विरूपण सदिशों तथा अवयव नोडीय विस्थापन सदिश के बीच संबंध व्यक्त करता है। अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j-1}(x)$ इस संगतता शर्त को कठोरता से संतुष्ट नहीं करते। अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j-1}(x)$ को समाकलित करके $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j-1}$ प्राप्त

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करने से यह आवश्यकता संतुष्ट की जा सकती है। किंतु यह संगणकीय दृष्टि से अपेक्षाकृत अक्षम है, अतः अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिश $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j-1}(x)$ की गणना में छोटी संगतता त्रुटि की उपेक्षा की जाती है।

96 यद्यपि पाश j की प्रत्येक पुनरावृत्ति में अवयव की लंबाई में संतुलन तथा संगतता संतुष्ट रहते हैं, परिच्छेद बल–विरूपण संबंध और अवयव बल–विरूपण संबंध निर्दिष्ट सह्यता के भीतर तभी संतुष्ट होते हैं जब चित्र 61.13a तथा 61.13b के बिंदु पर अभिसरण प्राप्त हो।

61.4.1.3 नम्यता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण

97 अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफ्सन पुनरावृत्ति-पाश वाली विधि के लिए चित्र 61.15a से चित्र 61.15c तथा अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति-विहीन विधि के लिए चित्र 61.14a से चित्र 61.14c के संदर्भ में, बल और विस्थापन नियंत्रण के अधीन परिच्छेद संघटक नियम सहित नम्यता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण के लिए संरचना स्तर पर न्यूटन–रैफ्सन विधि के एक चरण की जाँच करेंगे। बल और विस्थापन नियंत्रण की चर्चा अनुभाग 59 में की गई है। चित्र 61.4c की स्तर/तंतु परिच्छेद प्रक्रिया का वर्णन अनुभाग 61.4 में किया जाएगा।

61.4.1.3.1 अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति के बिना

98 चित्र 61.14 के संदर्भ में।

चरण 1 वृद्धिशील नोडीय बल सदिश $\Delta\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$ गणित करें।

$$\Delta\mathbf{P}_{t,n}^{ext} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n-1}^{ext}$$

चरण 2 संरचना स्तर पर वृद्धिशील नोडीय विस्थापन सदिश $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ तथा कुल नोडीय विस्थापन सदिश $\mathbf{u}_{t,n}$ गणित करें। आरंभ में पुनरावृत्ति समीकरण 61.32 तथा $k=1$ से आरंभ होती है।

यदि $k=1$,

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{u}_{u,n}^{k} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\
\mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta\mathbf{u}_{u,n}^{k} \\
\delta\mathbf{u}_{t,n}^{k} &= [\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k-1}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n-1}^{ext} - \mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k-1}\delta\mathbf{u}_{u,n}^{k}] \\
\mathbf{u}_{t,n}^{k} &= \mathbf{u}_{t,n}^{k-1} + \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k}
\end{aligned} \tag{61.32}$$

यदि $k \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{t,n}^{R,k} &= \mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n}^{int,k} \\
\delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} &= [\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}]^{-1} \cdot \mathbf{P}_{t,n}^{R,k} \\
\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} = \mathbf{u}_{t,n}^{k} + \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1}
\end{aligned} \tag{61.33}$$

जहाँ उपरिलिखित k पुनरावृत्ति गणक, $\mathbf{P}_{t}^{R}$ संरचना स्तर का अवशिष्ट नोडीय बल सदिश, $\Delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1}$ अंतिम अभिसरित चरण से कुल वृद्धिशील विस्थापन सदिश और $\delta\mathbf{u}_{n}^{k+1}$ अंतिम वृद्धिशील विस्थापन सदिश है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चरण 3 सभी अवयवों पर क्रमशः जाएँ और उनकी अवस्था निर्धारित करें।

- वैश्विक निर्देश-तंत्र में अवयव नोडीय विस्थापन सदिश निर्धारित करें।

  यदि $k = 1$,

$$\delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^{k}_{t,n} + \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^{k}_{u,n}$$

  यदि $k \neq 1$,

$$\delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^{k}_{t,n}$$

  जहाँ $\mathcal{A}_{b,e}$ विस्थापन निष्कर्षण संकारक है।

$$\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n}$$

  और $\boldsymbol{\delta}^{0}_{e,n}$, $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$ के अनुरूप है।
- स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव नोडीय विस्थापन सदिश निर्धारित करें।

$$\delta\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \boldsymbol{\Gamma}_{e} \cdot \delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n}$$
$$\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \overline{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

  और $\overline{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$, $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ के अनुरूप है।
- स्थानीय निर्देश-तंत्र में दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नोडीय विस्थापन सदिश निर्धारित करें।

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e} \cdot \delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n}$$
$$\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

  और $\overline{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ तथा $\tilde{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ क्रमशः $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ और $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ के अनुरूप हैं।

चरण 4 दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नोडीय बल सदिश निर्धारित करें

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$

और $\tilde{\mathbf{f}}^{k=0}_{e,n}$ तथा $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k=0}_{e,n}$ क्रमशः $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n-1}$ और $\tilde{\mathbf{k}}^{tan}_{e,n-1}$ के अनुरूप हैं।

चरण 5 अवयव के परिच्छेदों पर क्रमशः जाकर परिच्छेद अवस्था निर्धारण आरंभ करें। परिच्छेदों की कुल संख्या अवयव-दर-अवयव बदल सकती है। अतः किसी अवयव में परिच्छेदों की कुल संख्या nIp_e है और यह गाउस–लोबातो चतुर्थांश नियम के समाकलन बिंदुओं की संख्या पर निर्भर करती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- परिच्छेद बल सदिश निर्धारित करें।

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} = \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}$$

जहाँ $\mathbf{N}_{f,s,e}$, s^{th} परिच्छेद पर e^{th} अवयव के बल अंतर्वेशन फलनों से व्युत्पन्न आव्यूह है और $\boldsymbol{\sigma}^{k=0}_{s,e,n}$, $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n-1}$ के अनुरूप है।

चरण 6 परिच्छेद विरूपण सदिश निर्धारित करें। पुनः एक सामान्य परिच्छेद माना जाता है। प्रत्येक परिच्छेद का अवस्था निर्धारण पाश s में किया जाता है।

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k-1}_{s,e,n} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}$$

और $\mathbf{c}^{tan,k=0}_{s,e,n}$ तथा $\boldsymbol{\varepsilon}^{k=0}_{s,e,n}$ क्रमशः $\tilde{\mathbf{c}}^{tan}_{s,e,n-1}$ और $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n-1}$ के अनुरूप हैं।

चरण 7 परिच्छेद स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूह तथा आंतरिक परिच्छेद बल सदिश निर्धारित करें। परिच्छेद संघटक नियम को स्पष्ट रूप से ज्ञात मानने पर $\mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n}$ तथा $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ दोनों $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}$ से निर्धारित होते हैं। प्रत्यास्थ परिच्छेद में $\mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n}$ की पुनर्गणना आवश्यक नहीं है, क्योंकि यह आरंभिक परिच्छेद नम्यता आव्यूह $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e}$ के समान है।

- अवशिष्ट परिच्छेद बल सदिश निर्धारित करें।

$$\boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} - \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$$

चरण 8 अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिश निर्धारित करें।

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}$$

चरण 9 अद्यतन अवयव नम्यता आव्यूह तथा अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश निर्धारित करें।

पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत द्वारा अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिशों तथा परिच्छेद स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूहों को अवयव की लंबाई में समाकलित करके अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश तथा अवयव स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूह प्राप्त किए जाते हैं।

$$\tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} = \sum_{s} \mathbf{N}^{T}_{f,s,e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n} \cdot \mathrm{wt}_{s,e}$$
$$\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k}_{e,n} = \sum_{s} \mathbf{N}^{T}_{f,s,e} \cdot \mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n} \cdot \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \mathrm{wt}_{s,e}$$
$$\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} = [\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k}_{e,n}]^{-1}$$

जहाँ $\mathrm{wt}_{s,e}$, s^{th} परिच्छेद पर e^{th} अवयव के जैकोबियन से संबद्ध भारांक गुणांक है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चरण 10 आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश तथा अवयव स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह निर्धारित करें।

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{R,k} &= \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k} \\
\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k} - \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{R,k} \\
\bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} \\
\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} \\
\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \\
\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e
\end{aligned}$$

चरण 11 आंतरिक नोडीय बल सदिश तथा संवर्धित स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह निर्धारित करें।

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k} \\
\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \; \mathcal{A}_{b,e}
\end{aligned}$$

जहाँ $\mathcal{A}_{b,e}^T$ बल समायोजन संकारक है।

चरण 12 समीकरण 61.35 से संरचना स्तर पर अवशिष्ट नोडीय बल सदिश गणित करें। तत्पश्चात अवशिष्ट नोडीय बल सदिश द्वारा अभिसरण की जाँच करें।

अभिसरण की जाँच

- यदि $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ निर्दिष्ट सहयता के भीतर है, तो अगली बल-वृद्धि पर जाएँ।
- यदि $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ निर्दिष्ट सहयता के भीतर नहीं है, तो k को $k+1$ से अद्यतन करके अगली न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति आरंभ करें। संरचना स्तर पर अभिसरण तक समीकरण 61.33 सहित **चरण 2** से **चरण 12** दोहराएँ।

61.4.1.3.2 अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति पाश सहित

[99] चित्र 61.15 के संदर्भ में।

चरण 1 वृद्धिशील नोडीय बल सदिश $\Delta\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$ गणित करें।

$$\Delta\mathbf{P}_{t,n}^{ext} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n-1}^{ext}$$

चरण 2: संरचना स्तर पर वृद्धिशील नोडीय विस्थापन $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ तथा कुल नोडीय विस्थापन $\mathbf{u}_{t,n}$ गणित करें। आरंभ में पुनरावृत्ति समीकरण 61.34 तथा $k=1$ से आरंभ होती है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यदि $k = 1$,

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{u}^{k}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\
\mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta\mathbf{u}^{k}_{u,n} \\
\delta\mathbf{u}^{k}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k-1}_{tt,n}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} - \mathbf{K}^{tan,k-1}_{tu,n}\delta\mathbf{u}^{k}_{u,n}] \\
\mathbf{u}^{k}_{t,n} &= \mathbf{u}^{k-1}_{t,n} + \delta\mathbf{u}^{k}_{t,n}
\end{aligned} \tag{61.34}$$

यदि $k \neq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} &= \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n} \\
\delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k}_{tt,n}]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} \\
\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^{k}_{t,n} + \delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}
\end{aligned} \tag{61.35}$$

जहाँ उपरिलिखित k पुनरावृत्ति गणक, $\mathbf{P}^{R}_{t}$ संरचना स्तर का अवशिष्ट नोडीय बल सदिश, $\Delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ अंतिम अभिसरित चरण से कुल वृद्धिशील विस्थापन सदिश और $\delta\mathbf{u}^{k+1}_{n}$ अंतिम वृद्धिशील विस्थापन सदिश है।

समीकरण 61.34 के लिए बल/विस्थापन नियंत्रण तथा संवर्धित दृढता आव्यूह $\mathbf{K}_S$ का $\mathbf{K}_{tt}$, $\mathbf{K}_{tu}$, $\mathbf{K}_{ut}$ और $\mathbf{K}_{uu}$ सहित विस्तृत वर्णन आवश्यक है। यह अनुभाग 59 में दिया गया है। यहाँ संवर्धित दृढता आव्यूह दो समूहों में विभाजित है: अधोलिखित 'u' उन स्थानों के लिए जहाँ विस्थापन ज्ञात अथवा शून्य हैं और 't' उन स्थानों के लिए जहाँ बल ज्ञात हैं।

चरण 3: सभी अवयवों पर क्रमशः जाएँ और उनकी अवस्था निर्धारित करें।

- वैश्विक निर्देश-तंत्र में अवयव नोडीय विस्थापन सदिश निर्धारित करें यदि $k = 1$ यदि $k = 1$,

  $$\delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^{k}_{t,n} + \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^{k}_{u,n}$$

  यदि $k \neq 1$

  $$\delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^{k}_{t,n}$$

  जहाँ $\mathbf{A}_{b,e}$ विस्थापन निष्कर्षण संकारक है।

  $$\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n}$$

  और $\boldsymbol{\delta}^{0}_{e,n}$, $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$ के अनुरूप है।
- स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव नोडीय विस्थापन सदिश निर्धारित करें

  $$\begin{aligned}
  \delta\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} &= \boldsymbol{\Gamma}_{e} \cdot \delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} \\
  \overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} &= \overline{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}
  \end{aligned}$$

  जहाँ $\overline{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$, $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ के अनुरूप है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- स्थानीय निर्देश-तंत्र में दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नोडीय विस्थापन सदिश निर्धारित करें

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e} \cdot \delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n}$$
$$\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

जहाँ $\overline{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ तथा $\tilde{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ क्रमशः $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ और $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ के अनुरूप हैं।

चरण 3a: अवयव अवस्था निर्धारण आरंभ करें। संरचना के सभी अवयवों पर क्रमशः जाएँ। प्रत्येक अवयव का अवस्था निर्धारण पाश j में किया जाता है।

- दृढ-पिंड विधाओं के बिना अवयव नोडीय बल सदिश निर्धारित करें

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} = \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k,j}_{e,n}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{k,j-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n}$$

जहाँ $\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k,j=1}_{e,n}$, $\tilde{\mathbf{f}}^{k,j=0}_{e,n}$ तथा $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j=0}_{e,n}$ क्रमशः $\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e}$, $\tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n}$ और $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n}$ के अनुरूप हैं।

चरण 4 अवयव के परिच्छेदों पर क्रमशः जाकर परिच्छेद अवस्था निर्धारण आरंभ करें। परिच्छेदों की कुल संख्या अवयव-दर-अवयव बदल सकती है। अतः किसी अवयव में परिच्छेदों की कुल संख्या nIp_e है और यह गाउस–लोबातो चतुर्थांश नियम के समाकलन बिंदुओं की संख्या पर निर्भर करती है।

- परिच्छेद बल सदिश निर्धारित करें।

  परिच्छेद अवस्था निर्धारण के लिए पहले सामान्य परिच्छेद तथा स्तर/तंतु परिच्छेद में भेद करना आवश्यक है, जैसा अनुभाग 61.4 में वर्णित है। यहाँ केवल सामान्य परिच्छेद पर विचार किया गया है। प्रत्येक परिच्छेद का अवस्था निर्धारण पाश s में किया जाता है, जहाँ अधोलिखित चिह्न s^{th} परिच्छेद के अनुरूप है।

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n} = \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k,j-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}$$

  जहाँ $\mathbf{N}_{f,s,e}$, s^{th} परिच्छेद पर e^{th} अवयव के बल अंतर्वेशन फलनों से व्युत्पन्न आव्यूह है और $\boldsymbol{\sigma}^{k,j=0}_{s,e,n}$, $\boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n}$ के अनुरूप है।
- परिच्छेद विरूपण सदिश निर्धारित करें।

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n} + \mathbf{c}^{tan,k,j-1}_{s,e,n} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{k,j-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}$$

  और $\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j=0}_{s,e,n}$ तथा $\mathbf{c}^{tan,k,j=0}_{s,e,n}$ क्रमशः $\boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n}$ और $\mathbf{c}^{tan,k-1}_{s,e,n}$ के अनुरूप हैं तथा $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j=0}_{s,e,n} = 0$।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- परिच्छेद स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूह तथा आंतरिक परिच्छेद बल सदिश निर्धारित करें। परिच्छेद संघटक नियम को स्पष्ट रूप से ज्ञात मानने पर $\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j}$ तथा $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k,j}$ दोनों $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j}$ से निर्धारित होते हैं। प्रत्यास्थ परिच्छेद में $\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j}$ की पुनर्गणना आवश्यक नहीं है, क्योंकि यह आरंभिक परिच्छेद नम्यता आव्यूह $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e}$ के समान है।
- अवशिष्ट परिच्छेद बल तथा विरूपण सदिश निर्धारित करें।

$$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k,j} = \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j} - \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k,j}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j} = \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k,j}$$

चरण 5 अद्यतन अवयव नम्यता आव्यूह तथा अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश निर्धारित करें।

पूरक आभासी कार्य के सिद्धांत द्वारा अवशिष्ट परिच्छेद विरूपण सदिशों तथा परिच्छेद स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूहों को अवयव की लंबाई में समाकलित करके अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश तथा अवयव स्पर्शरेखीय नम्यता आव्यूह प्राप्त किए जाते हैं।

$$\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j} = \sum_s \mathbf{N}_{f,s,e}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j} \cdot \mathrm{wt}_{s,e}$$
$$\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k,j} = \sum_s \mathbf{N}_{f,s,e}^T \cdot \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j} \cdot \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \mathrm{wt}_{s,e}$$
$$\tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j} = [\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k,j}]^{-1}$$

जहाँ $\mathrm{wt}_{s,e}$, s^{th} परिच्छेद पर e^{th} अवयव के जैकोबियन से संबद्ध भारांक गुणांक है।

अवयव स्तर पर अभिसरण अवशिष्ट अवयव नोडीय विस्थापन सदिश द्वारा संतुष्ट होना चाहिए।

- यदि $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ निर्दिष्ट सह्यता के भीतर है, तो **चरण 6** पर जाएँ।
- यदि $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ निर्दिष्ट सह्यता के भीतर नहीं है, तो j तथा $\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k,j+1}$ को क्रमशः $j+1$ और $-\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ से अद्यतन करके अगली न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति आरंभ करें। अवयव स्तर पर अभिसरण तक **चरण 3a** से **चरण 5** दोहराएँ।

चरण 6 आंतरिक अवयव नोडीय बल सदिश तथा अवयव स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह निर्धारित करें।

$$\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} = \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k,j}$$
$$\bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} = \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k} &= \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j} \\
\tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j} \\
\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \\
\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e
\end{aligned}$$

चरण 7 आंतरिक नोडीय बल सदिश तथा संवर्धित स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह निर्धारित करें।

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k} \\
\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathcal{A}_{b,e}
\end{aligned}$$

जहाँ $\mathcal{A}_{b,e}^T$ बल समायोजन संकारक है और $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ में $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$ तथा $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$ सम्मिलित हैं।

चरण 8 समीकरण 61.35 से संरचना स्तर पर अवशिष्ट नोडीय बल सदिश गणित करें। तत्पश्चात अवशिष्ट नोडीय बल सदिश द्वारा अभिसरण की जाँच करें।

- यदि $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ निर्दिष्ट सहयता के भीतर है, तो अगली बल-वृद्धि पर जाएँ।
- यदि $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ निर्दिष्ट सहयता के भीतर नहीं है, तो k को $k+1$ से अद्यतन करके अगली न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति आरंभ करें। संरचना स्तर पर अभिसरण तक समीकरण 61.35 सहित **चरण 2** से **चरण 8** दोहराएँ।

61.4.2 दृढता-आधारित *बनाम* नम्यता-आधारित अवयव

100 सारणी 61.2 तथा चित्र 61.16 दृढता- और नम्यता-आधारित अवयवों के बीच अंतर स्पष्ट करते हैं।

ध्यान दें कि इस खंड में प्लवमान अवयव (चित्र और/अथवा सारणियाँ) हैं जिन्हें अगले खंड से पहले मुद्रित करना आवश्यक है। परिणामस्वरूप यहाँ रिक्त स्थान अथवा अंतराल दिखाई दे सकते हैं।

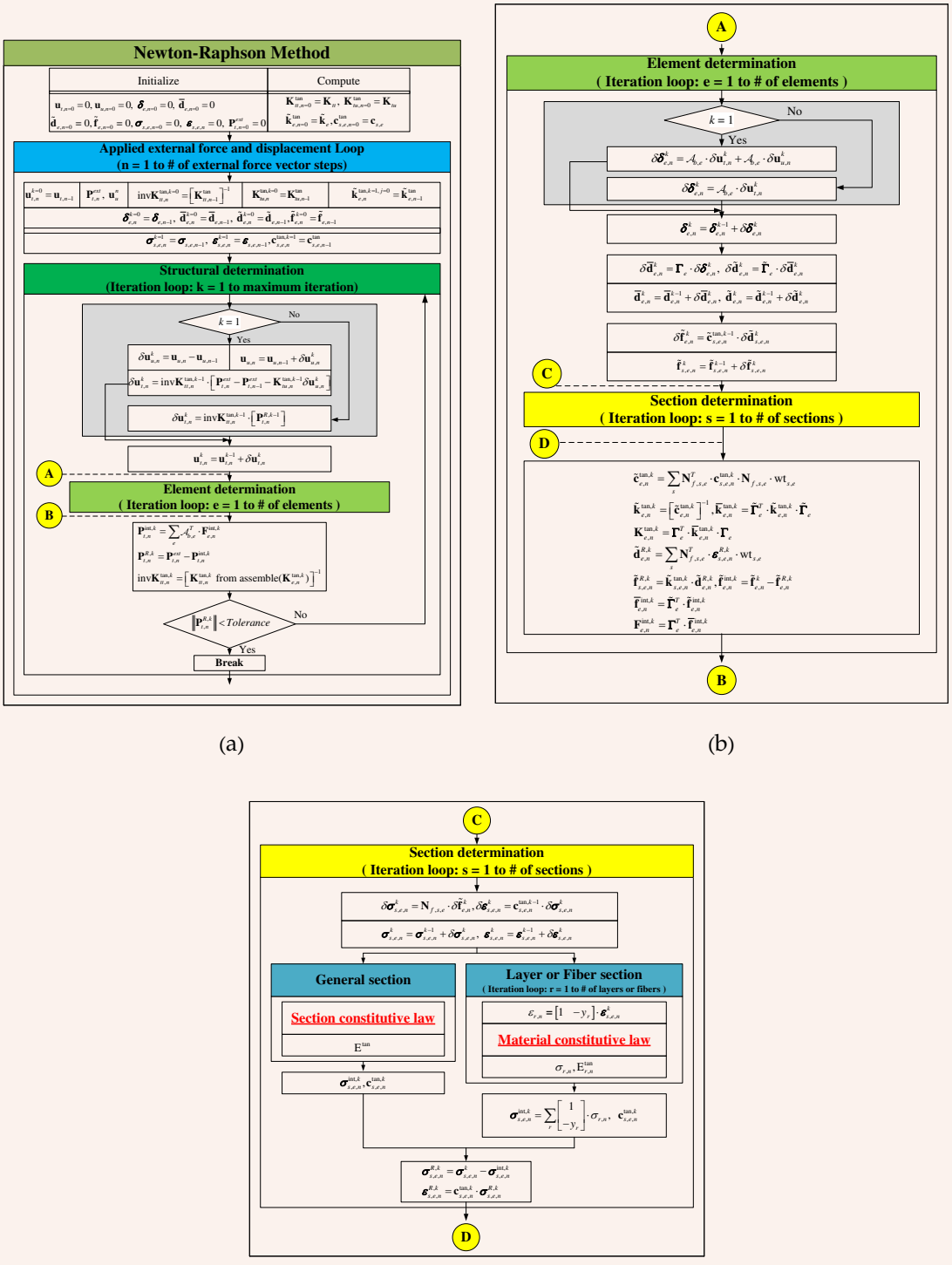
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 61.2: नम्यता- तथा दृढता-आधारित अवयवों की तुलना

	नम्यता	**दृढता**
सिद्धांत	पूरक आभासी कार्य	आभासी कार्य
अनिर्धार्यता	स्थैतिक	शुद्धगतिक
प्रबल रूप	शुद्धगतिक	संतुलन
दुर्बल रूप	संतुलन	शुद्धगतिक
अंतर्वेशन फलन	बल क्षेत्र (यथार्थ)	विस्थापन क्षेत्र (मान्यता)
संघटक नियम	$\mathbf{D}(x) = \mathbf{k}(x)\mathbf{d}(x)$	$\mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{D}(x)$
प्राथमिक अज्ञात	अवयव सिरा बल	अवयव सिरा विस्थापन
विविक्तीकरण	$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{Q}$	$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{q}}$
आव्यूह	$\mathbf{F} = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{f}(x)\mathbf{b}(x)\mathrm{d}x$	$\mathbf{k}_{(ele)} = \int_0^L \mathbf{B}(x)^T \mathbf{k}(x)\mathbf{B}(x)\mathrm{d}x$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

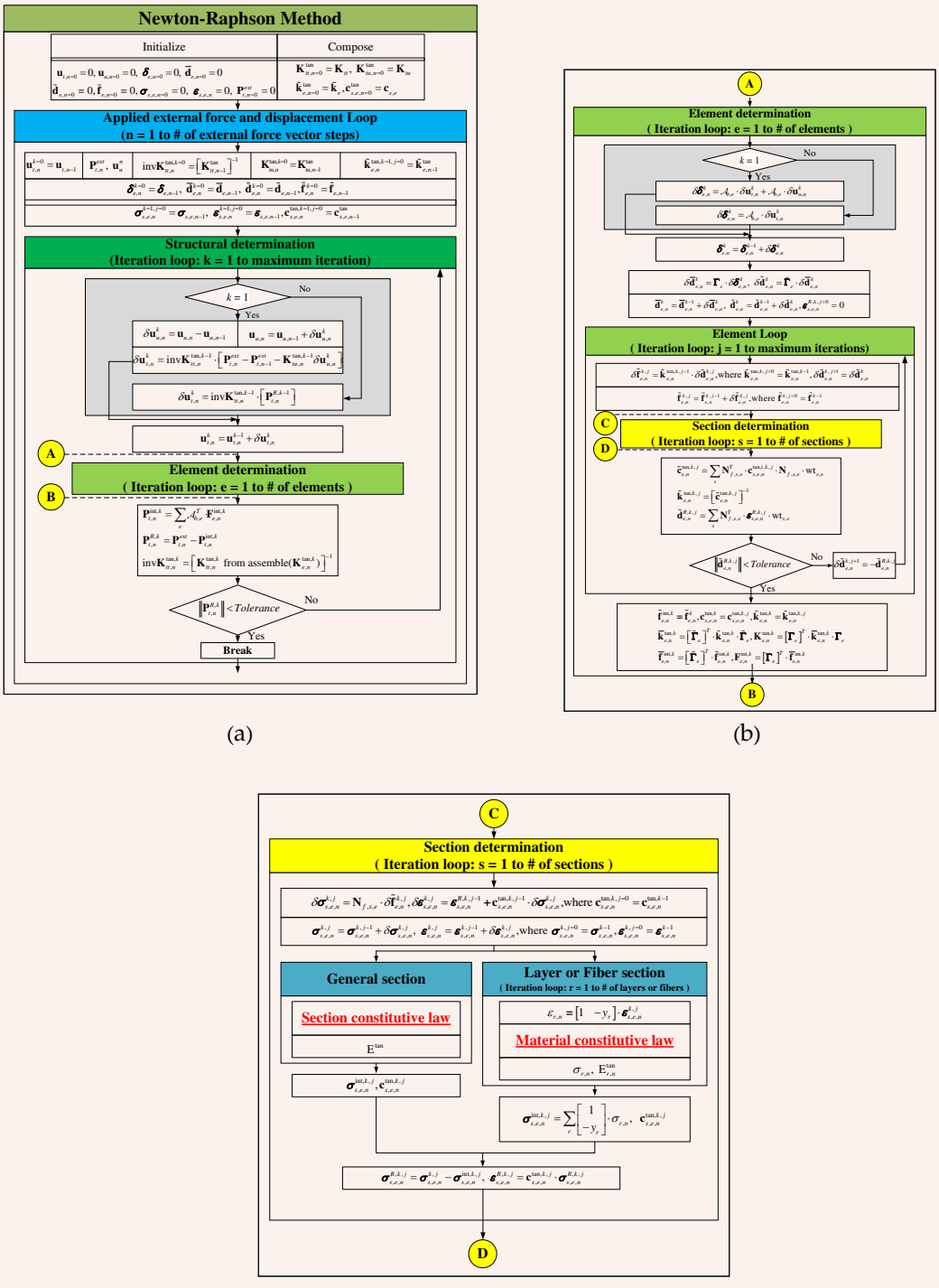


(a) (b)

(c)

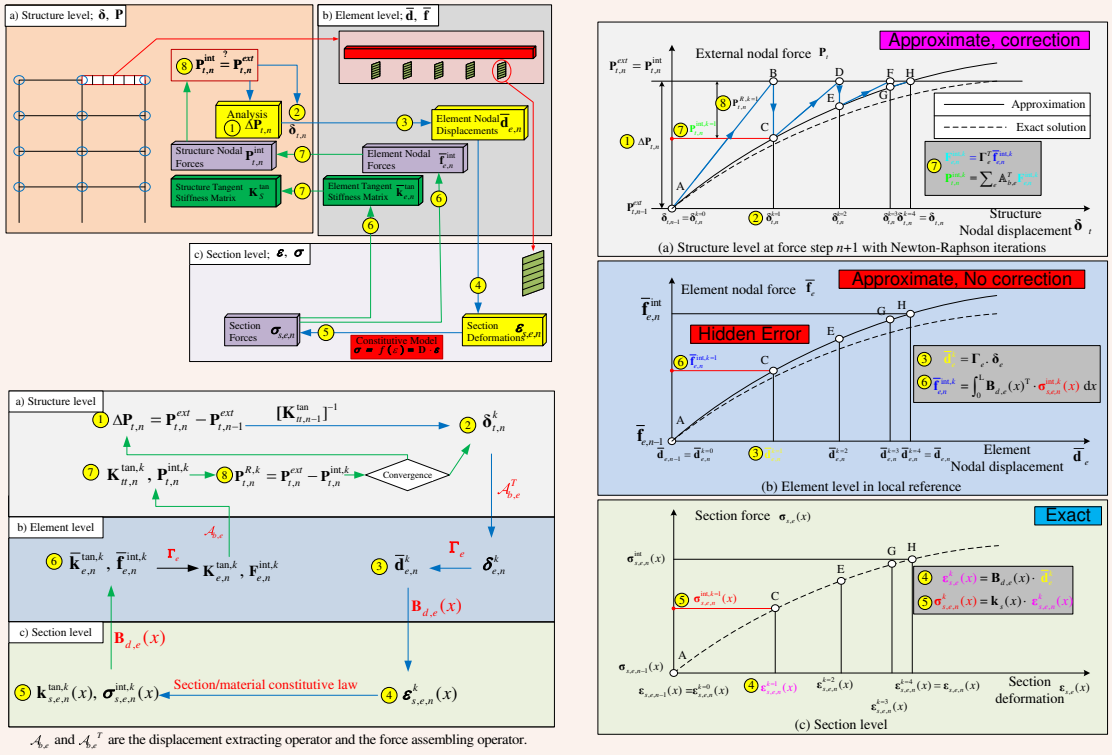
चित्र 61.14: अवयव स्तर पर पुनरावृत्ति के बिना नम्यता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण का प्रवाह-चित्र

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 61.15: अवयव स्तर पर न्यूटन–रैफसन पुनरावृत्ति सहित नम्यता-आधारित विधि द्वारा अरैखिक विश्लेषण का प्रवाह-चित्र

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 61.16: दृढता-आधारित *बनाम* नम्यता-आधारित सूत्रीकरण की तुलना

अप्रकाशित प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

61.5 शून्य-लंबाई 2D अवयव सूत्रीकरण

101 संरचनात्मक अवयवों के जोड़ों अथवा संकेंद्रित बल वाले अवयवों में सुघट्य कब्जे या अरैखिकताएँ हो सकती हैं। ऐसे मामलों में, अंतिम आसंधियों अथवा संकेंद्रित बल वाले आसंधियों के लिए अनेक संकेंद्रित-सुघट्यता संघटक प्रतिरूपों की आवश्यकता होती है (§62.3)।

102 सामान्यतः, अतिरिक्त घूर्णन अथवा छड-फिसलन जैसे अपरूपण-विफलता को निरूपित करने के लिए धरन या धरन–स्तंभ अवयवों के सिरों पर शून्य-लंबाई अवयव प्रयुक्त किया जाता है, चित्र 61.17a।

103 इस अवयव का सूत्रीकरण चित्र 61.17 पर आधारित है। इसमें परिच्छेद-बलों के युग्मित प्रभाव की उपेक्षा की जाती है।

संघटक नियम परिच्छेद का संघटक नियम इस प्रकार व्यक्त होता है:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x \\ V_y \\ M_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{D}} = \underbrace{\begin{bmatrix} EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & EIz^{tan} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_{sec}^{tan}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{x2} - u_{x1} \\ v_{y2} - v_{y1} \\ \theta_{z2} - \theta_{z1} \end{Bmatrix}}_{.\mathbf{d}} \tag{61.36}$$

जहाँ EA^{tan}, GA^{tan} और EIz^{tan} क्रमशः अक्षीय बल, अपरूपण और आघूर्ण से संबद्ध स्पर्श-रेखीय दृढताएँ हैं।

संतुलन अवयवी आसंधि-बल और विस्थापन सदिश के बीच संबंध है:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \bar{\mathbf{k}}_e^{tan} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_{x1} \\ \overline{v}_{y1} \\ \overline{\theta}_{z1} \\ \overline{u}_{x2} \\ \overline{v}_{y2} \\ \overline{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{d}}_e}$$

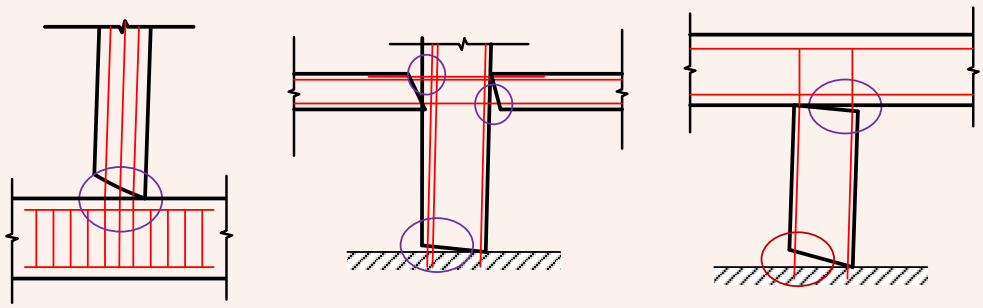
जहाँ $\bar{\mathbf{k}}_e^{tan}$ स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव का दृढता आव्यूह है।

$$\bar{\mathbf{k}}_e^{tan} = \begin{bmatrix} EA^{tan} & 0 & 0 & -EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan} & 0 & 0 & -GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & EI_z^{tan} & 0 & 0 & -EI_z^{tan} \\ -EA^{tan} & 0 & 0 & EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & -GA^{tan} & 0 & 0 & GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & -EI_z^{tan} & 0 & 0 & EI_z^{tan} \end{bmatrix} \tag{61.37}$$

61.5.1 शून्य-लंबाई 2D अवयव में निर्देश-तंत्र

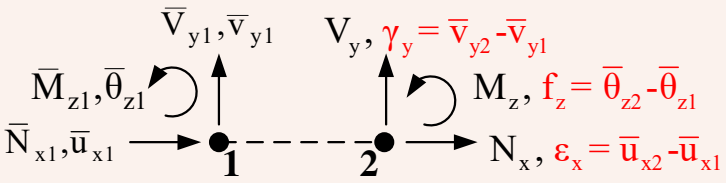
104 शून्य-लंबाई 2D अवयव का निर्देश-तंत्र अनुभाग 61.3.1.1 के समान है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

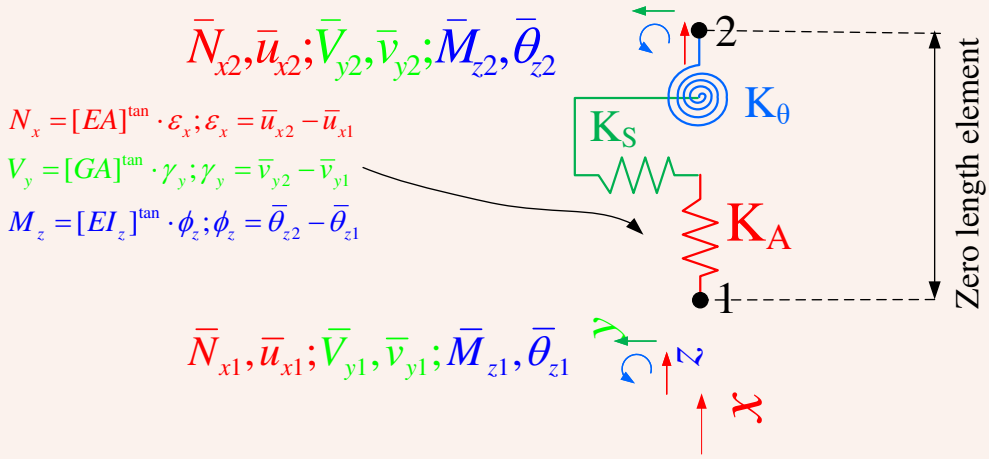


(1) Wall (2) Frame (3) Bridge

(a) अनुप्रयोग



(b) संयोजकता



(c) संतुलन

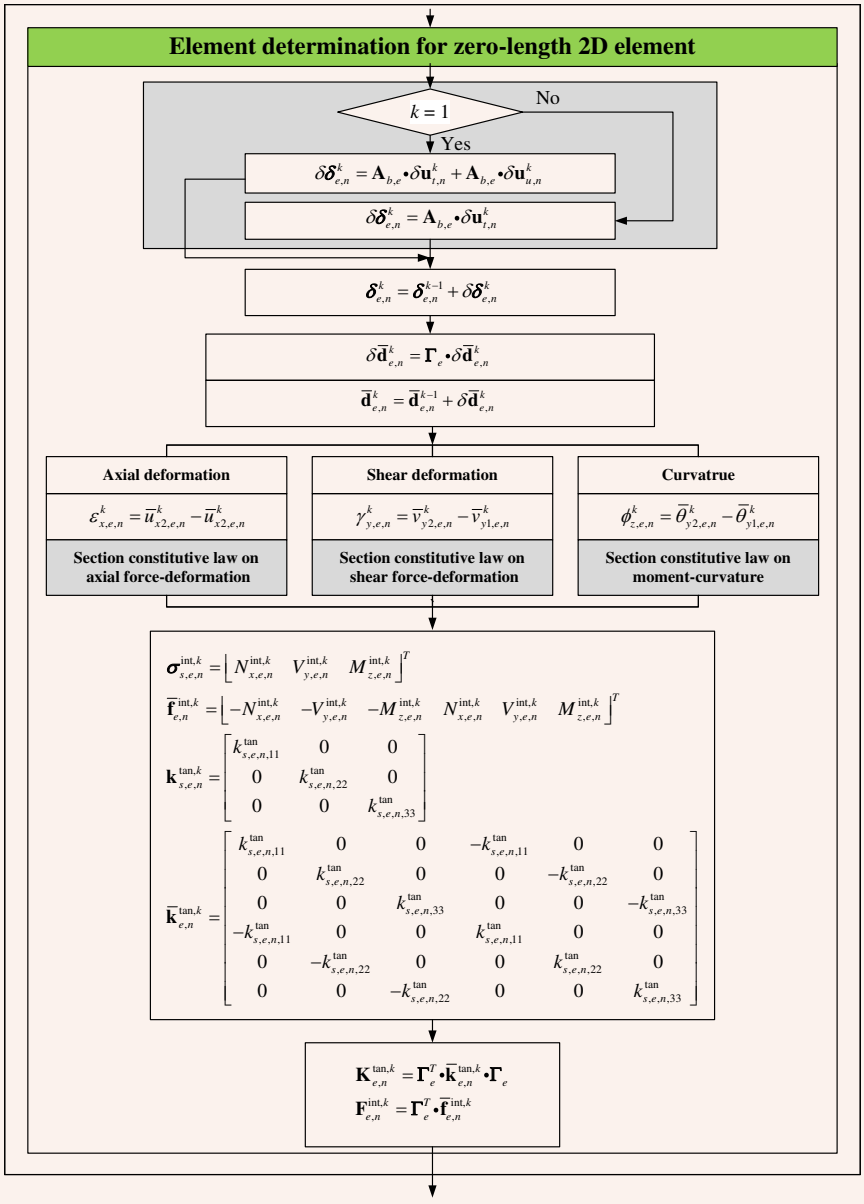
चित्र 61.17: शून्य-लंबाई 2D अवयव

61.5.2 2D अवयव तथा प्रत्येक आसंधि पर 3 स्वतंत्रता-कोटियों सहित अवयव अवस्था निर्धारण

105 चित्र 61.18 के संदर्भ में, अरैखिक विश्लेषण हेतु शून्य-लंबाई 2D अवयव के एक चरण की जाँच करेंगे।

चरण 1: परिच्छेद विरूपण सदिश, अक्षीय विरूपण, अपरूपण विरूपण और वक्रता निर्धारित करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 61.18: अवयव अवस्था निर्धारण हेतु शून्य-लंबाई 2D अवयव का प्रवाह-चार्ट

प्रत्येक विरूपण के लिए $\bar{\mathbf{d}}^k_{e,n}$ से संबद्ध घटक निकालें।

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n} = \lfloor \varepsilon^k_{x,n},\ \gamma^k_{y,n},\ \kappa^k_{z,n} \rfloor^T$$
$$\varepsilon^k_{x,n} = \bar{u}^k_{x2,n} - \bar{u}^k_{x2,n}$$
$$\gamma^k_{y,n} = \bar{v}^k_{y2,n} - \bar{v}^k_{y2,n}$$
$$\kappa^k_{z,n} = \bar{\theta}^k_{z2,n} - \bar{\theta}^k_{z2,n}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दूसरा, तीसरा और चौथा समीकरण क्रमशः परिच्छेद के अक्षीय विरूपण, अपरूपण विरूपण और वक्रता के अनुरूप हैं।

चरण 2: परिच्छेद संघटक नियमों में अक्षीय बल–विरूपण, अपरूपण बल–विरूपण और आघूर्ण–वक्रता से संबद्ध परिच्छेद की स्पर्शरेखीय दृढता निर्धारित करें। इसके लिए एकाक्षीय प्रतिबल–विकृति संबंध से संबद्ध पदार्थ के संघटक नियम के फलन के रूप में अनेक चरों द्वारा संशोधित परिच्छेद संघटक नियमों का प्रयोग किया जा सकता है (अध्याय 62)। तत्पश्चात आंतरिक परिच्छेद-बल सदिश निर्धारित करें। यदि परिच्छेद संघटक नियम स्पष्टतः ज्ञात हो, तो $\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan,k}$ और $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k}$ को $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k}$ से निर्धारित किया जाता है। किंतु प्रत्यास्थ परिच्छेद में $\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan,k}$ की पुनर्गणना आवश्यक नहीं है, क्योंकि वह प्रारंभिक परिच्छेद दृढता आव्यूह $\mathbf{k}_{s,e}$ के समान होता है।

प्रत्यास्थ परिच्छेद के लिए,

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan} &= \mathbf{k}_{s,e}\\ \underbrace{\begin{Bmatrix} N_x^k \\ V_y^k \\ M_z^k \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k}} &= \mathbf{k}_{s,e,n}^{tan} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,n}^k \\ \gamma_{y,n}^k \\ \kappa_{z,n}^k \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k}}\end{aligned}$$

जहाँ $\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan,k}$ k^{th} पुनरावृत्ति पर परिच्छेद का स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह है।

चरण 3: समीकरण 61.37 से आंतरिक अवयवी आसंधि-बल सदिश और अवयव का स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह निर्धारित करें।

$$\bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} = \lfloor N_x^k, V_y^k, M_z^k, -N_x^k, -V_y^k, -M_z^k \rfloor^T$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{e}^{tan,k} = \begin{bmatrix} EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & -EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 \\ 0 & GA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & -GA_{e,n}^{tan,k} & 0 \\ 0 & 0 & EI_{z,e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & -EI_{z,e,n}^{tan,k} \\ -EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 \\ 0 & -GA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & GA_{e,n}^{tan,k} & 0 \\ 0 & 0 & -EI_{z,e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & EI_{z,e,n}^{tan,k} \end{bmatrix}$$

जहाँ $\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव का स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह है।

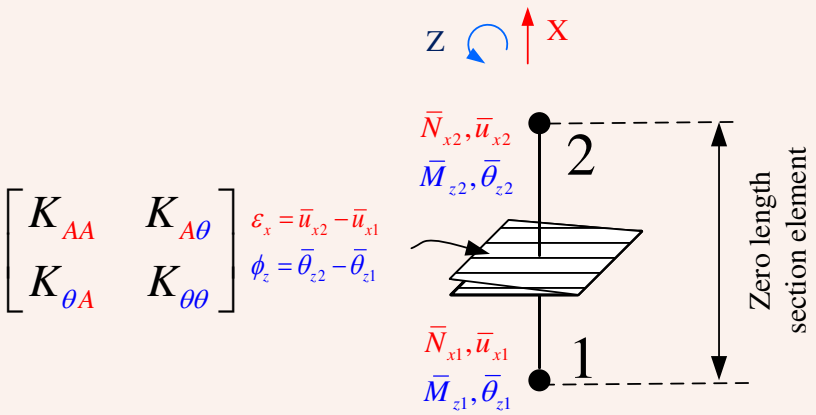
अब $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ और $\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$ निर्धारित किए जाते हैं।

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}\\ \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

61.6 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव

106 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव, शून्य-लंबाई अवयव के अनुरूप है; किंतु इसमें स्तर/तंतु प्रयुक्त होते हैं। यह अवयव हमें *परिच्छेद के घूर्णन-केंद्र में संभावित स्थानांतरण का प्रतिरूपण* करने में सक्षम बनाता है (उदाहरणार्थ, छड-फिसलन में)। इस अवयव का सूत्रीकरण युग्मित अक्षीय बल और आघूर्ण पर आधारित है, चित्र 61.19।



चित्र 61.19: शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव; संतुलन

61.6.1 दृढता आव्यूह

संघटक नियम परिच्छेद का संघटक नियम इस प्रकार व्यक्त होता है:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x \\ M_z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{k}^{tan}_{s,11} & \mathrm{k}^{tan}_{s,12} \\ \mathrm{k}^{tan}_{s,21} & \mathrm{k}^{tan}_{s,22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{tan}_s} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{u}_{x2} - \bar{u}_{x1} \\ \bar{\theta}_{z2} - \bar{\theta}_{z1} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_s}$$

जहाँ $\mathbf{k}^{tan}_s$ स्तर/तंतु अवस्था निर्धारण से प्राप्त परिच्छेद का स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह है।

संतुलन शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव बर्नूली धरन सिद्धांत पर आधारित है। बिंदु A और B के बीच संतुलन समीकरणों पर विचार करने पर,

$$\begin{aligned} \bar{N}_{x1} &= k^{tan}_{s,11} \cdot (\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2}) + k^{tan}_{s,12} \cdot (\bar{\theta}_{z1} - \bar{\theta}_{z2}) \\ \bar{M}_{z1} &= k^{tan}_{s,21} \cdot (\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2}) + k^{tan}_{s,22} \cdot (\bar{\theta}_{z1} - \bar{\theta}_{z2}) \end{aligned}$$

इसी प्रकार बिंदु B और बिंदु C के बीच,

$$\begin{aligned} \bar{N}_{x2} &= k^{tan}_{s,11} \cdot (\bar{u}_{x2} - \bar{u}_{x1}) + k^{tan}_{s,12} \cdot (\bar{\theta}_{z2} - \bar{\theta}_{z1}) \\ \bar{M}_{z2} &= k^{tan}_{s,21} \cdot (\bar{u}_{x2} - \bar{u}_{x1}) + k^{tan}_{s,22} \cdot (\bar{\theta}_{z2} - \bar{\theta}_{z1}) \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[107] समीकरणों के इन दोनों समुच्चयों को आव्यूह रूप में पुनर्लिखने पर अवयवी आसंधि-बल और विस्थापन सदिश के बीच संबंध निम्न प्रकार प्राप्त होता है:

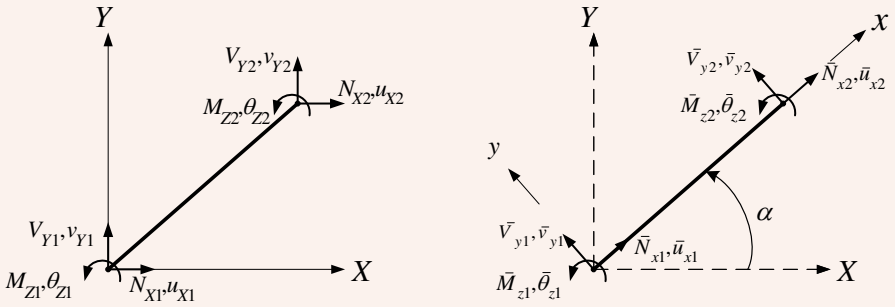
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ 0 \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ 0 \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \overline{\mathbf{k}}_e^{tan} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_{x1} \\ 0 \\ \overline{\theta}_{z1} \\ \overline{u}_{x2} \\ 0 \\ \overline{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{d}}_e}$$

जहाँ $\overline{\mathbf{k}}_e^{tan}$ स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव का दृढता आव्यूह है।

$$\overline{\mathbf{k}}_e^{tan} = \begin{bmatrix} \mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,12}^{tan} & -\mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,12}^{tan} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,22}^{tan} & -\mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,22}^{tan} \\ -\mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,12}^{tan} & \mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,12}^{tan} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,22}^{tan} & \mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,22}^{tan} \end{bmatrix}$$

61.6.2 निर्देश-तंत्र

[107] शून्य-लंबाई 2D अवयव का निर्देश-तंत्र 2D दृढता अवयव के समान है, चित्र 61.20।



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

चित्र 61.20: शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव का निर्देश-तंत्र

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_{X1} & V_{Y1} & M_{Z1} & N_{X2} & V_{Y2} & M_{Z2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

61.6.3 अवयव अवस्था निर्धारण

[108] शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव का अवस्था निर्धारण, चित्र 61.21, निम्न प्रकार है:

चरण 1: परिच्छेद विरूपण सदिश, अक्षीय विरूपण और वक्रता निर्धारित करें। प्रत्येक विरूपण के लिए $\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n}$ से संबद्ध घटक निकालें।

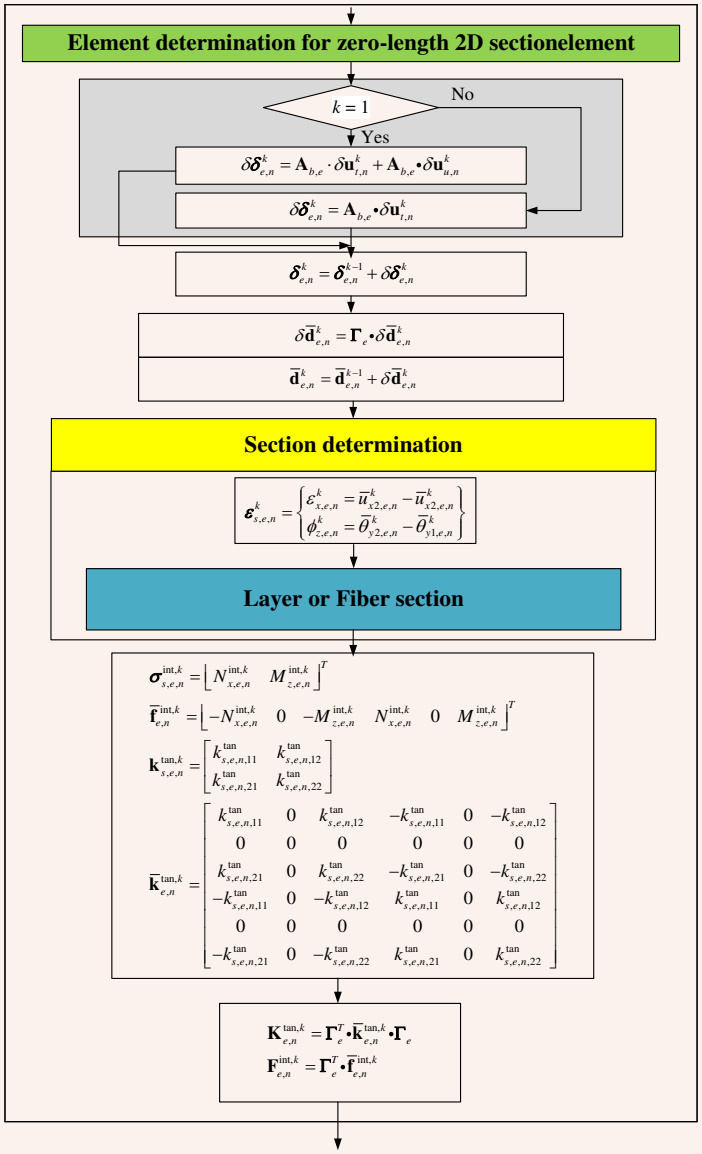
$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \lfloor \overline{u}^k_{x1,e,n} \;\; 0 \;\; \overline{\theta}^k_{z1,e,n} \;\; \overline{u}^k_{x2,e,n} \;\; 0 \;\; \overline{\theta}^k_{z2,e,n} \rfloor^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n} &= \lfloor \varepsilon^k_{x,e,n}, \;\; \phi^k_{z,e,n} \rfloor^T \\ \varepsilon^k_{x,e,n} &= \overline{u}^k_{x2,e,n} - \overline{u}^k_{x2,e,n} \\ \phi^k_{z,e,n} &= \overline{\theta}^k_{z2,e,n} - \overline{\theta}^k_{z2,e,n} \end{aligned}$$

चरण 2: स्तर/तंतु अवस्था निर्धारण का प्रयोग करते हुए अक्षीय बल–विरूपण और आघूर्ण–वक्रता से संबद्ध परिच्छेद की स्पर्शरेखीय दृढता निर्धारित करें। तत्पश्चात आंतरिक परिच्छेद-बल सदिश निर्धारित करें। यदि पदार्थ का संघटक नियम स्पष्टतः ज्ञात हो, तो $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ और $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ को $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}$ से निर्धारित किया जाता है। किंतु प्रत्यास्थ पदार्थ वाले परिच्छेद में $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ की पुनर्गणना आवश्यक नहीं है, क्योंकि वह प्रारंभिक परिच्छेद दृढता आव्यूह $\mathbf{k}_{s,e}$ के समान होता है। प्रत्यास्थ पदार्थ वाले परिच्छेद के लिए,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} &= \mathbf{k}_{s,e} \\ \underbrace{\left\{\begin{array}{c} N^{int,k}_{x,e,n} \\ M^{int,k}_{z,e,n} \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}} &= \mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \varepsilon^k_{x,e,n} \\ \phi^k_{z,e,n} \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}} \end{aligned}$$

जहाँ $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ k^{th} पुनरावृत्ति पर परिच्छेद का स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 61.21: शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव का प्रवाह-चार्ट

चरण 3: आंतरिक अवयवी आसंधि-बल सदिश और अवयव का स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह निर्धारित करें।

$$\bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} = \lfloor N_{x,e,n}^{int,k}, 0, M_{z,e,n}^{int,k}, -N_{x,e,n}^{int,k}, 0, -M_{z,e,n}^{int,k} \rfloor^T$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} = \begin{bmatrix} \mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,12}^{tan,k} & -\mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,e,n,12}^{tan,k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} & -\mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} \\ -\mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,12e,n,}^{tan,k} & \mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,12}^{tan,k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} & \mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} \end{bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ स्थानीय निर्देश-तंत्र में अवयव का स्पर्शरेखीय दृढता आव्यूह है।

109 अब $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ और $\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$ निर्धारित किए जाते हैं।

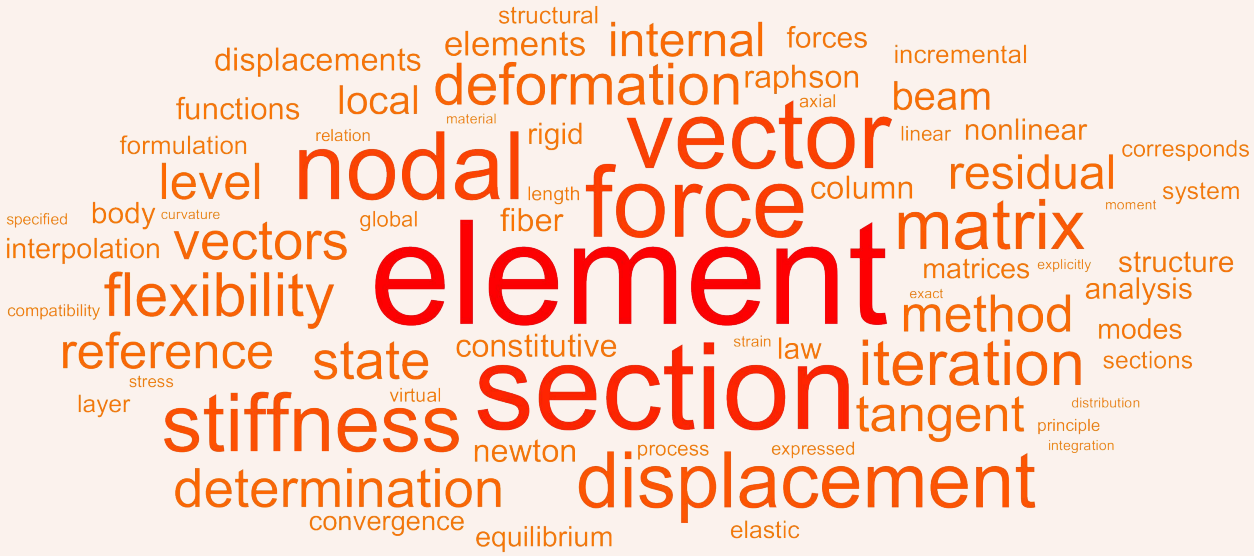
$$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$$

61.7 संख्यात्मक समाकलन

110 समाकलन बिंदु: सामान्यतः दृढता-आधारित सूत्रीकरण के लिए 3 (गाउस) और नम्यता-आधारित सूत्रीकरण के लिए 5 (गाउस–लोबाटो) बिंदु प्रयुक्त होते हैं (§51.3)।

61.8 अवयव बल

111 अवयवी आसंधि-बलों को §51.4 के अनुसार निर्धारित किया जाता है।



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62 वितरित एवं संकेंद्रित सुघट्यता के संघटक प्रतिरूप

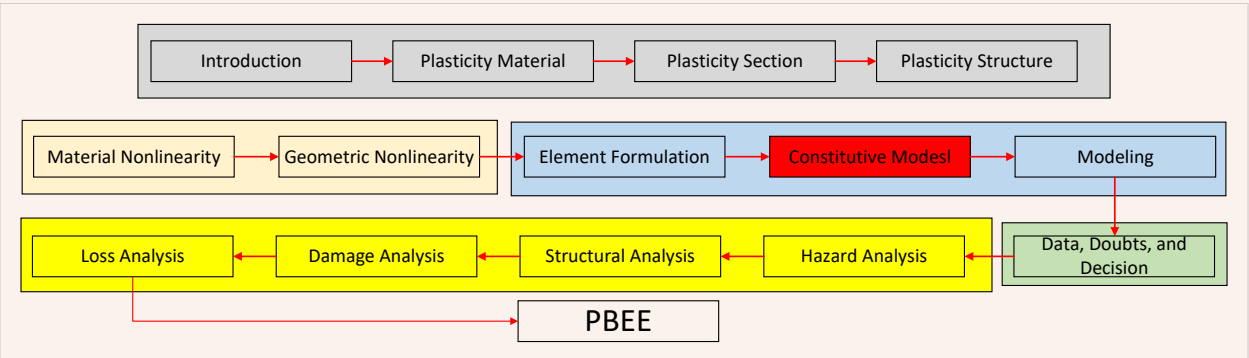
सारांश

यह अध्याय निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (अध्याय 72) के लिए महत्त्वपूर्ण उन्नत अरैखिक विश्लेषण प्रतिरूपों के विकास और अनुप्रयोग का विवेचन करता है। इन प्रतिरूपों का उद्देश्य क्षति के आरंभ से पूर्ण पतन तक संरचनाओं के व्यवहार का अनुकरण करना तथा क्षति मापों से सहसंबद्ध अभियांत्रिक माँग प्राचल प्रदान करना है। गतिक अनुक्रियाओं के यथार्थ निरूपण के लिए सामर्थ्य और दृढता के ह्रास तथा $P-\Delta$ प्रभावों का समुचित प्रतिरूपण अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

अध्याय में वितरित और संकेंद्रित, दोनों सुघट्यता उपागमों का विस्तृत अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। वितरित सुघट्यता के लिए अरैखिक प्रतिबल–विकृति संबंध विकसित करने हेतु तंतु अथवा स्तरित अवयवों की जाँच की जाती है, जबकि संकेंद्रित सुघट्यता का अभिलक्षण अरैखिक आघूर्ण–वक्रता संबंधों द्वारा किया जाता है। चर्चा इस्पात और कंक्रीट के संघटक प्रतिरूपों तक विस्तृत है तथा चक्रीय भारण, दृढता ह्रास, तनन-दृढीकरण और कंक्रीट के गुणों पर परिरोध के प्रभाव जैसे प्रमुख पहलुओं को रेखांकित करती है। संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप और मेनेगोट्टो–पिंटो इस्पात प्रतिरूप सहित उल्लेखनीय पदार्थ प्रतिरूपों का जटिल अरैखिक अनुक्रियाओं को ग्रहण करने की उनकी क्षमता के संदर्भ में विश्लेषण किया गया है।

यद्यपि अनुमानी और परिघटनात्मक प्रतिरूप प्रमुख हैं, अध्याय उनकी सीमाओं को स्वीकार करता है और विषमदैशिक क्षति प्रतिरूपों सहित विशिष्ट परिस्थितियों के लिए परिष्कृत उपागम प्रस्तुत करता है। यह व्यापक संरचना भूकंपीय घटनाओं जैसी चरम दशाओं में संरचनात्मक निष्पादन के पूर्वानुमान और मूल्यांकन हेतु आवश्यक सैद्धांतिक तथा व्यावहारिक उपकरण प्रदान करती है और आधुनिक संरचनात्मक अभियांत्रिकी अनुप्रयोगों के लिए विश्वसनीय तथा यथार्थवादी अनुकरण सुनिश्चित करती है।

62.1 परिचय 2034
62.1.1 रैखिक ताप-प्रत्यास्थता 2034
62.1.2 अनुमानी प्रतिरूप 2035
62.2 वितरित सुघट्यता 2037
62.2.1 इस्पात प्रतिरूप 2037
62.2.2 कंक्रीट प्रतिरूप 2047
62.2.3 प्रभावी क्षति और दृढता पुनर्प्राप्ति सहित विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप 2058
62.2.4 बंध–फिसलन 2072
62.2.5 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव . . 2074
62.3 संकेंद्रित सुघट्यता 2077
62.3.1 सुघट्य लंबाई 2077
62.3.2 अपरूपण विफलता मॉडल (सीमा-अवस्था सामग्री) 2087
62.3.3 ऊर्जा अपव्यय को सम्मिलित करने वाले Ibarra शैथिल्य मॉडल 2091
62.3.4 Ghannoum का मॉडल 2112



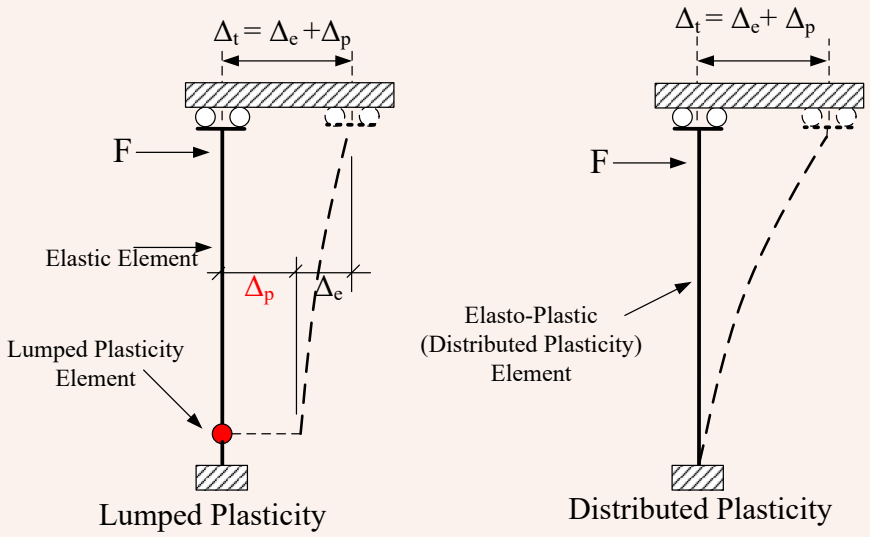
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.1 परिचय

1 संघटक प्रतिरूप परिमित अवयव (पदार्थ) अरैखिक विश्लेषण के केंद्र में हैं। ठोसों के परिमित अवयव विश्लेषण में ये $\mathbf{K}^{(e)}$ के मूल्यांकन पर निर्भर हैं (समीकरण 50.12)। किंतु धरन–स्तंभ अवयवों के अरैखिक विश्लेषण में हमें $\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ (समीकरण 61.14), अथवा अधिक विशिष्ट रूप से E^{tan} (समीकरण 61.18), की आवश्यकता होती है।

2 इस्पात के "पारंपरिक" (1D) सुघट्यता-आधारित प्रतिरूपों का विवेचन प्रथम सुघट्यता अध्याय में किया गया था। अन्य सभी प्रतिरूप "अनुमानी" आधार पर निर्मित हैं, क्योंकि वे हमारी प्राथमिक रुचि की अरैखिक चक्रीय अनुक्रिया को सर्वोत्तम रूप से ग्रहण करते हैं। दो भाग हैं, चित्र 62.1:

- मुख्य बल तंतु/सतरित अवयवों (अर्थात् वितरित सुघट्यता) पर है, जहाँ अरैखिक प्रतिबल–विकृति संबंध अपेक्षित है[1]।
- संकेंद्रित सुघट्यता का अभिलक्षण अरैखिक आघूर्ण–वक्रता संबंधों द्वारा किया जाता है।



चित्र 62.1: संकेंद्रित और वितरित सुघट्यता प्रतिरूप

62.1.1 रैखिक ताप-प्रत्यास्थता

3 सिद्धांततः प्रक्रिया इस प्रकार होनी चाहिए। *सातत्य यांत्रिकी* से, उत्तल ऊष्मागतिक विभव के लिए विकृति प्रदिश के घटकों का एक धन-निश्चित द्विघाती फलन चुना जाता है।

$$\Psi = \frac{1}{2\rho}\mathbf{a}{:}\boldsymbol{\varepsilon}{:}\boldsymbol{\varepsilon}$$

[1] शून्य-लंबाई अवयवों का अभिलक्षण भी अरैखिक प्रतिबल–विकृति संबंधों द्वारा किया जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और परिभाषा से $\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{a}{:}\boldsymbol{\varepsilon}$, जो हुक का नियम है।

4 समदैशिकता और रैखिकता के लिए विभव Ψ का विकृति प्रदिश का द्विघाती अपरिवर्तक होना आवश्यक है; अर्थात् प्रथम अपरिवर्तक के वर्ग $\varepsilon_I^2 = [\text{tr }(\boldsymbol{\varepsilon})]^2$ और द्वितीय अपरिवर्तक $\varepsilon_{II}^2 = \frac{1}{2}\text{tr }(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$ का रैखिक संयोजन,

$$\Psi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\varepsilon_I^2 + 4\mu\varepsilon_{II}\right) - (3\lambda+2\mu)\alpha\theta\varepsilon_I\right] - \frac{C_\varepsilon}{2T_0}\theta^2$$

जहाँ λ और μ लामे प्राचल हैं।

5 अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = &\quad \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda\text{tr }(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda+2\mu)\alpha\theta\mathbf{I}\\ \sigma_{ij} = &\quad \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda+2\mu)\alpha\theta\delta_{ij}\end{aligned}$$

6 अंततः हमारा उद्देश्य उत्क्रम चक्रीय भारण (भूकंप) के अधीन इस्पात और प्रबलित-कंक्रीट संरचनाओं की जटिल अरैखिक अनुक्रिया को ग्रहण करना है।

7 ऊष्मागतिक आधार वाले अत्यल्प प्रतिरूप ही यह कर सकते हैं (क्षति यांत्रिकी पर आधारित प्रतिरूपों को छोड़कर)।

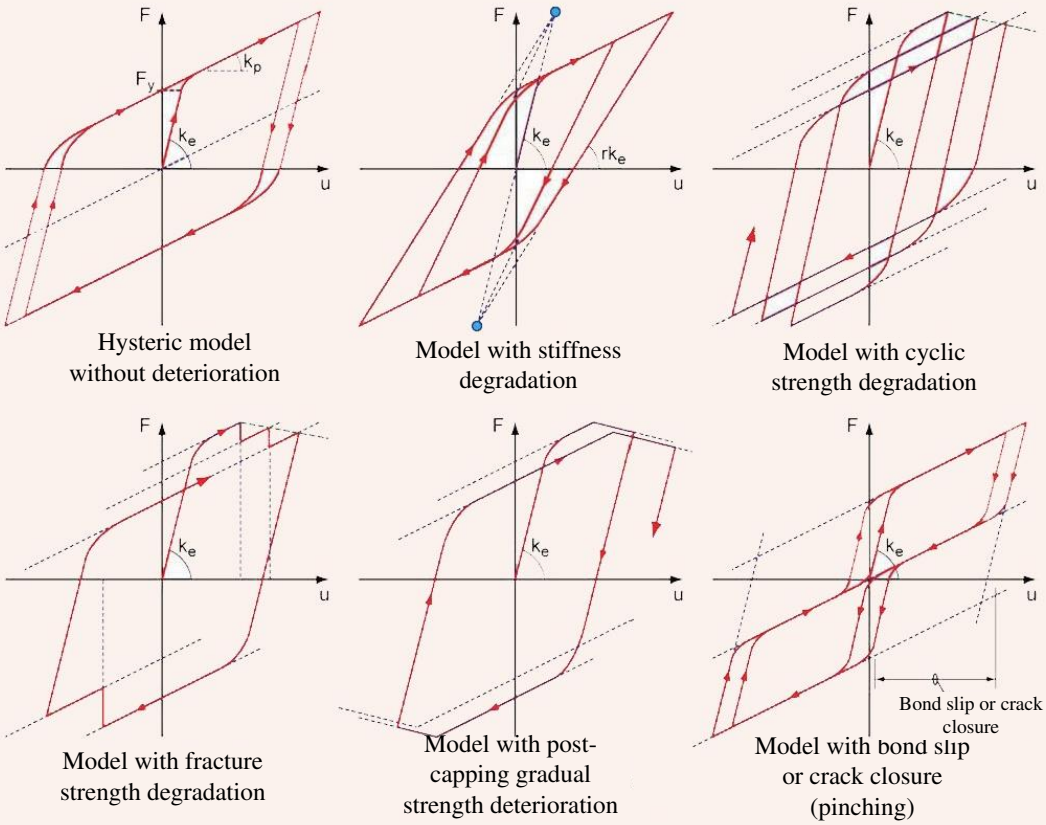
8 अतः हम *अनुमानी प्रतिरूपों* पर निर्भर करेंगे।

62.1.2 अनुमानी प्रतिरूप

9 अनुमानी प्रतिरूप प्रयोगशाला प्रेक्षणों पर आधारित होते हैं, जिनसे आनुभविक संबंध प्राप्त होते हैं।

10 आगे प्रस्तुत सभी प्रतिरूप (चित्र 62.2) इसी श्रेणी में आते हैं और इसलिए *परिघटनात्मक* प्रतिरूप हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.2: शैथिल्य प्रतिरूप

11 हमारा उद्देश्य निम्न प्रभावों को ग्रहण करना है:

ह्रास कंक्रीट का,

सामर्थ्य कंक्रीट और इस्पात, दोनों का,

- तनन,
- तनन और संपीडन,

दृढता जो क्षति के साथ घटती है,

दरार बंद होना भार उत्क्रमण के परिणामस्वरूप।

12 इस्पात और कंक्रीट प्रतिरूपों का पृथक-पृथक विवेचन किया जाएगा (जैसा §55.2 में किया गया था)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.2 वितरित सुघट्यता

62.2.1 इस्पात प्रतिरूप

"An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation", Kang, 2010 के पीएचडी शोधप्रबंध से।

62.2.1.1 परिचय

13 यादृच्छिक चक्रीय उद्दीपन के लिए इस्पात प्रतिरूप केवल सामान्य कठिनाइयाँ प्रस्तुत करते हैं। अधिकांश प्रतिरूप अनुमानी और विश्लेषणात्मक रूप से परिभाषित हैं; परिवर्ती प्राचलों वाले प्रतिरूप सर्वाधिक सफल होते हैं।

14 इस समूह में तीन भिन्न सूत्रीकरण हैं:

स्पष्ट बीजीय प्रतिबल समीकरण: $\sigma = f(\varepsilon)$।

अस्पष्ट बीजीय प्रतिबल समीकरण: $f(\sigma, \varepsilon) = 0$।

अवकल समीकरण (प्रथम कोटि): $\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = E^p = f(\sigma)$

15 एक सामान्यतः प्रयुक्त स्पष्ट प्रतिरूप है:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = b\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{(1-b)\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^R\right] 1/R}$$

जहाँ σ_0, ε_0, b और R क्रमशः पराभव प्रतिबल, पराभव विकृति, विकृति-दृढीकरण प्राचल और बाउशिंगर प्रभाव (चित्र 55.5b) को निरूपित करने वाला गुणांक हैं। यह गुणांक अप्रत्यास्थ परिसर में विचरण ε_{max} के परिमाण पर निर्भर करता है।

62.2.1.2 समदैशिक दृढीकरण सहित द्विरैखिक प्रतिरूप

16 यद्यपि पूर्ववर्ती प्रतिरूप सुघट्यता सिद्धांत पर आधारित है, उसका कार्यान्वयन समस्याप्रद हो सकता है। वैकल्पिक रूप से, (Filippou, Popov, and Bertero, 1983) के आधार पर और (Mazzoni et al., 2006) में कार्यान्वित रूप में, परिघटनात्मक दृष्टि से समान प्रतिरूप व्युत्पन्न किया जा सकता है।

62.2.1.2.1 प्रतिबल–विकृति संबंध

17 E^{tan} को H से समीकरण 55.12 और चित्र 62.3a के अनुसार निर्धारित करने के स्थान पर,

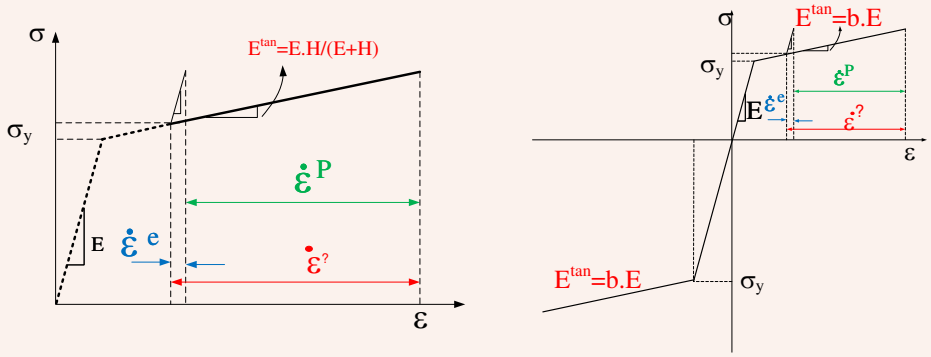
$$E^{tan} = \frac{E.H}{E+H}$$

यह सरलीकृत प्रतिरूप विकृति-दृढीकरण गुणांक b द्वारा इसकी गणना करता है, जो पराभवोत्तर सुपरशरेखीय

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मापांक E^{tan} और प्रारंभिक प्रत्यास्थ मापांक E का अनुपात है; इसमें केवल समदैशिक दृढीकरण पर विचार किया जाता है, चित्र 62.3b।

$$E^{tan} = b \cdot E$$



(a) सुघट्यता प्रतिरूप (b) द्विरैखिक & मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप

चित्र 62.3: सुपर्शरेखीय मापांक की तुलना; सुघट्यता बनाम मेनेगोट्टो–पिंटो

[18] समदैशिक दृढीकरण में प्रत्यास्थ प्रांत के विकास को सम्मिलित करने हेतु प्रतिबल स्थानांतरण σ_Δ निम्न प्रकार निर्धारित किया जाता है:

- यदि वृद्धिशील विकृति $\Delta\varepsilon$ धन मान से ऋण मान में परिवर्तित होती है:

$$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_2 \cdot \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$$
$$\sigma_\Delta = \Delta^N \cdot \sigma_y \cdot (1 - b) \tag{62.1}$$

- यदि वृद्धिशील विकृति $\Delta\varepsilon$ ऋण मान से धन मान में परिवर्तित होती है:

$$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_4 \cdot \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$$
$$\sigma_\Delta = \Delta^P \cdot \sigma_y \cdot (1 - b) \tag{62.2}$$

जहाँ,

- a_1 और a_3 समदैशिक दृढीकरण प्राचल हैं। वे सुघट्य विकृति $a_2 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$ के बाद पराभव-सामर्थ्य के एक अंश द्वारा संपीडन पराभव परिवेष्टन की वृद्धि तथा सुघट्य विकृति $a_4 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$ के बाद पराभव-सामर्थ्य के एक अंश द्वारा तनन पराभव परिवेष्टन की वृद्धि दर्शाते हैं।

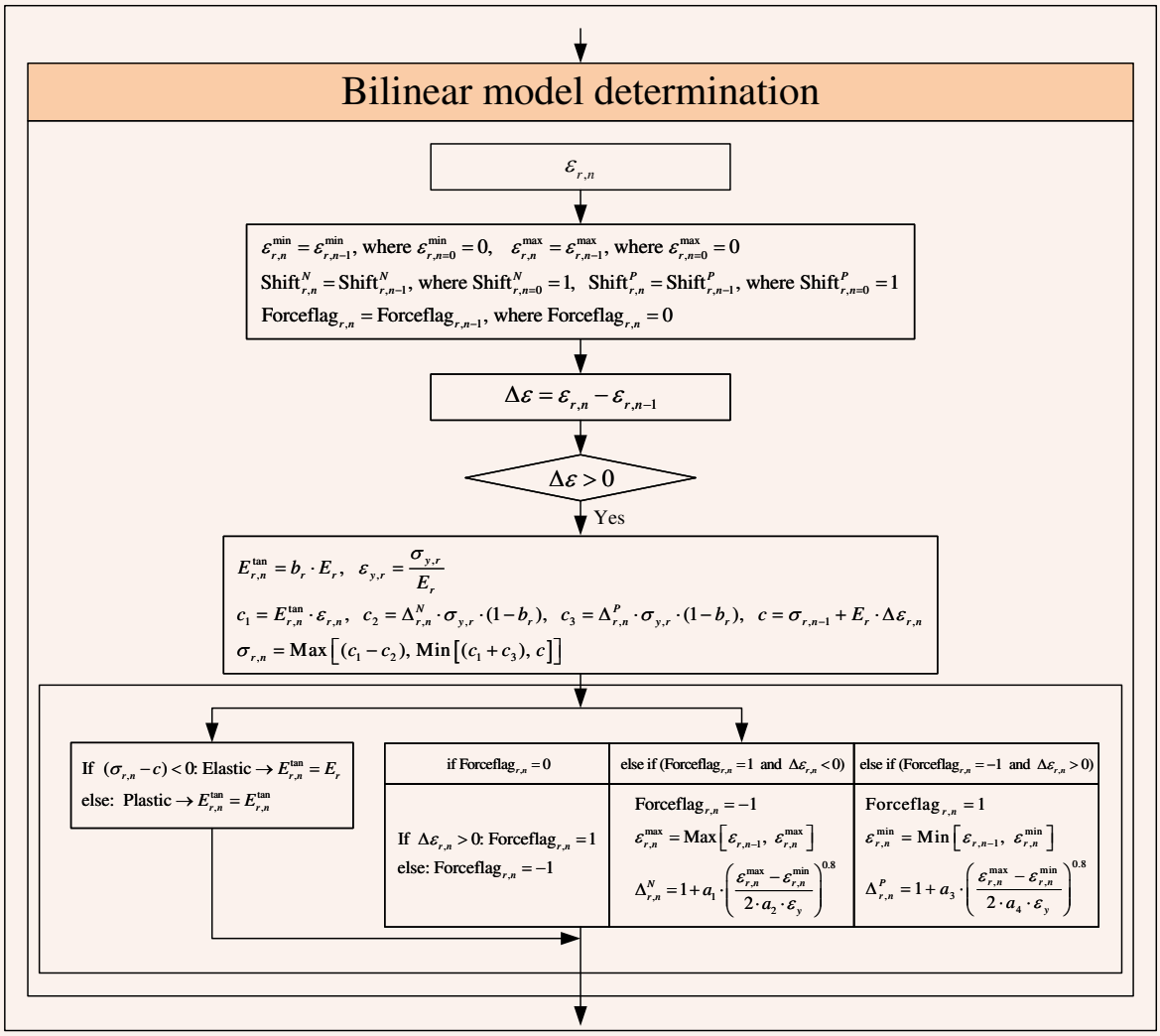
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- a_2 और a_4, a_1 और a_3 के सापेक्ष समदैशिक दृढीकरण प्राचल हैं; ε_{max} और ε_{min} क्रमशः अधिकतम और न्यूनतम विकृति-उत्क्रमण बिंदुओं की विकृतियाँ हैं। इस प्रतिरूप की सीमा यह है कि a_1, a_2, a_3 और a_4 को प्रायोगिक परिणामों पर प्रतिरूप के वक्र-अनुरूपण द्वारा निर्धारित करना पडता है। उनके पूर्वनिर्धारित मान $a_1 = 0$, $a_2 = 55$, $a_3 = 0$ और $a_4 = 55$ हैं (Mazzoni et al., 2006)।

62.2.1.2.2 द्विरैखिक प्रतिरूप का निर्धारण

चित्र 62.4 एकाक्षीय प्रतिबल

19 σ और सुपरशरेखीय मापांक E^{tan} को एकाक्षीय विकृति ε से प्राप्त करने की प्रक्रिया दर्शाता है।

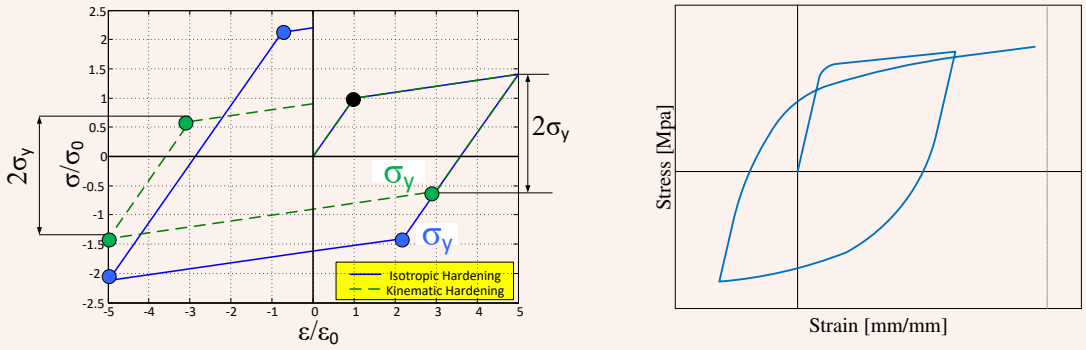


चित्र 62.4: द्विरैखिक प्रतिरूप का निर्धारण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.2.1.3 मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप

20 यह प्रतिरूप मूलतः पूर्ववर्ती प्रतिरूप का विस्तार है। इसमें सुचारु वक्र प्रस्तुत किया गया है, जो प्रायोगिक आँकड़ों के व्यवहार को अधिक अच्छी तरह ग्रहण करता है। इसके अतिरिक्त, असांतत्य अरैखिक विश्लेषण में अभिसरण संबंधी समस्याएँ उत्पन्न कर सकते हैं। अतः Menegotto and Pinto, 1973 ने इसे सुचारु वक्र प्रदान करने हेतु परिष्कृत किया और Filippou, Popov, and Bertero, 1983 ने समदैशिक विकृति-दृढीकरण को सम्मिलित करने हेतु संशोधित किया, चित्र 62.5b।



(a) सुघट्यता प्रतिरूप

(b) मेनेगोट्टो–पिंटो इस्पात प्रतिरूप

चित्र 62.5: उत्क्रम चक्रीय भार प्रतिरूपों की तुलना: सुघट्यता *बनाम* मेनेगोट्टो–पिंटो

21 यह प्रतिरूप संगणकीय रूप से दक्ष है और प्रबलन इस्पात छड़ों पर किए गए चक्रीय परीक्षणों के प्रायोगिक परिणामों से बहुत अच्छा सामंजस्य रखता है (Taucer, Spacone, and Filippou, 1991b)।

22 द्विरैखिक प्रतिरूप की भाँति, समीकरण 55.12 और चित्र 62.3a से E^{tan} निर्धारित करने के स्थान पर, यह प्रतिरूप भी विकृति-दृढीकरण गुणांक b द्वारा इसकी गणना करता है, जो पराभवोत्तर स्पर्शरेखीय मापांक E^{tan} और प्रारंभिक प्रत्यास्थ मापांक E का अनुपात है; इसमें केवल समदैशिक दृढीकरण पर विचार किया जाता है, चित्र 62.3b।

$$E^{tan} = b \cdot E$$

23 अब इसकी व्युत्पत्ति क्रमशः प्रस्तुत की जाती है:

1. आरंभ आनुभविक प्रतिबल–विकृति संबंध से होता है:

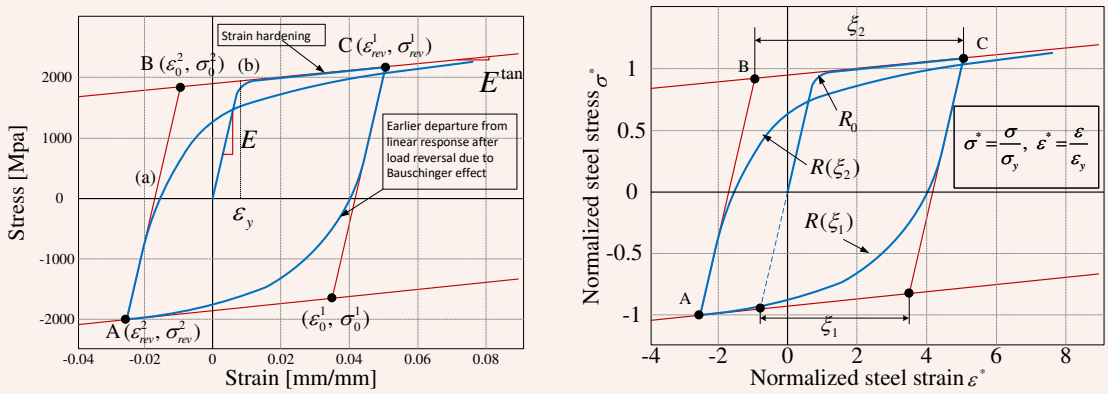
$$\sigma^* = b \cdot \varepsilon^* + \frac{(1-b)\cdot\varepsilon^*}{(1+\varepsilon^{*R})^{1/R}} \tag{62.3}$$

जहाँ,

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{rev}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{rev}}; \quad \sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_{rev}}{\sigma_0 - \sigma_{rev}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. σ_0 और ε_0 उस बिंदु के प्रतिबल और विकृति हैं जहाँ विचाराधीन शाखा की दो अनंतस्पर्शी रेखाएँ मिलती हैं (B); σ_{rev} और ε_{rev} उस बिंदु के प्रतिबल और विकृति हैं जहाँ अंतिम विकृति उत्क्रमण हुआ था (A), चित्र 62.6।



चित्र 62.6: मेनेगोट्टो–पिंटो (Menegotto and Pinto, 1973) इस्पात प्रतिरूप

3. स्पर्शरेखीय मापांक E^{tan} अवकलन से प्राप्त होता है:

$$E^{tan} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\sigma_0 - \sigma_{rev}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{rev}} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}\varepsilon^*}; \quad \frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}\varepsilon^*} = b + \left[\frac{1-b}{(1+\varepsilon^{*R})^{1/R}}\right] \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon^{*R}}{1+\varepsilon^{*R}}\right]$$

4. ढाल E वाली सीधी अनंतस्पर्शी रेखा (a) से ढाल E^{tan} वाली दूसरी अनंतस्पर्शी रेखा (b) तक वक्र संक्रमण होता है।
5. σ_{rev} और ε_{rev} विकृति-उत्क्रमण बिंदु (बिंदु A) के प्रतिबल और विकृति हैं; यही ढाल E वाली अनंतस्पर्शी रेखा (a) का मूलबिंदु भी है।
6. σ_0 और ε_0 दोनों अनंतस्पर्शी रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु (बिंदु B) के प्रतिबल और विकृति हैं।
7. b, ढाल E^{tan} और E के बीच विकृति-दृढीकरण अनुपात है; R वह प्राचल है जो दोनों अनंतस्पर्शी रेखाओं के बीच संक्रमण वक्र की वक्रता को प्रभावित करता है और बाउशिंगर प्रभाव का अच्छा निरूपण संभव बनाता है।
8. प्रत्येक विकृति उत्क्रमण के बाद σ_0, ε_0, σ_{rev} और ε_{rev} अद्यतन किए जाते हैं।
9. वर्तमान विकृति बढ रही है या घट रही है, इसके अनुसार R वर्तमान अनंतस्पर्शी-प्रतिच्छेदन बिंदु (बिंदु B) और पूर्ववर्ती अधिकतम अथवा न्यूनतम विकृति-उत्क्रमण बिंदु (बिंदु C) के बीच विकृति के निरपेक्ष अंतर पर निर्भर करता है।
10. $R(\xi)$ के लिए दो अभिव्यक्तियाँ दी गई हैं:
    - मेनेगोट्टो–पिंटो का मूल प्रतिरूप $R(\xi) = R_0 - \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$,
    - OpenSees में दी गई अभिव्यक्ति: $R(\xi) = R_0 \left(1 - \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}\right)$।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ R_0 प्रथम भारण के दौरान प्राचल R का मान है और cR_1 तथा cR_2 प्रयोग द्वारा निर्धारित प्राचल हैं, जिन्हें R_0 के साथ परिभाषित किया जाना है। ξ को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\xi = \left| \frac{\varepsilon^m - \varepsilon_0}{\varepsilon_y} \right|$$

जहाँ वर्तमान विकृति के क्रमशः बढ़ने या घटने के अनुसार ε^m पूर्ववर्ती अधिकतम अथवा न्यूनतम विकृति-उत्क्रमण बिंदु की विकृति है। ε_0 दोनों अनंतस्पर्शी रेखाओं के वर्तमान प्रतिच्छेदन बिंदु की विकृति है।

11. ε^m और ε_0, दोनों एक ही अनंतस्पर्शी रेखा पर स्थित हैं तथा ε_y प्रारंभिक पराभव विकृति है।
12. अभी तक प्रतिरूप उत्क्रम चक्रीय भार में समदैशिक दृढ़ीकरण को सम्मिलित नहीं करता। फिलिप्पू ने रैखिक पराभव अनंतस्पर्शी रेखा में σ_0 और ε_0 के स्थानांतरण का प्रस्ताव निम्न प्रकार किया:

    - यदि वृद्धिशील विकृति $\Delta\varepsilon$ धन मान से ऋण मान में परिवर्तित होती है:

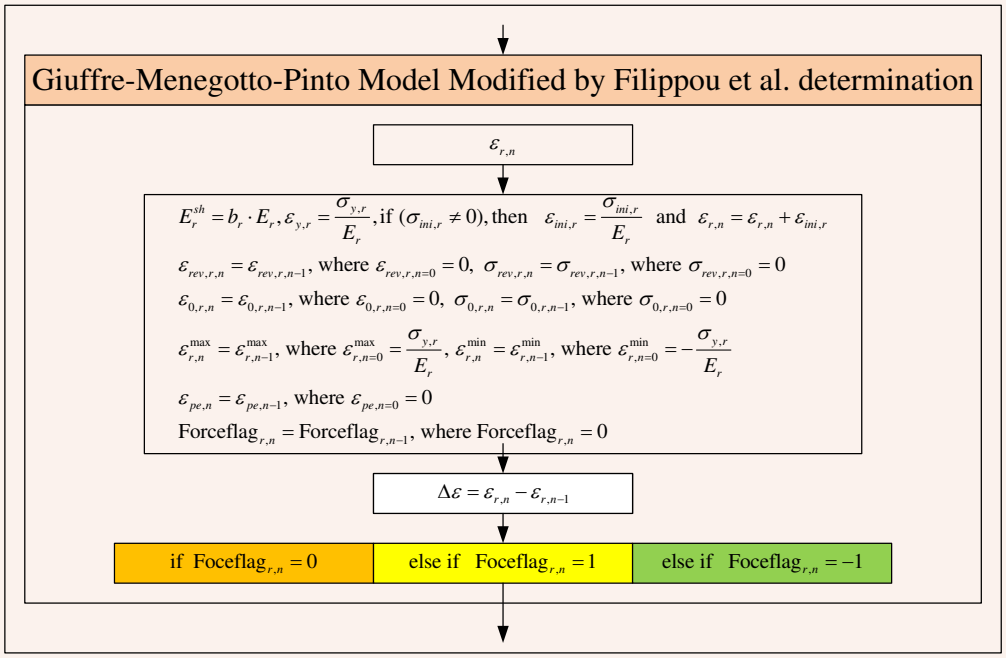
$$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_2 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$$
$$\varepsilon_0 = \frac{-\sigma_y \cdot \Delta^N + E^{tan} \cdot \varepsilon_y \cdot \Delta^N - \sigma_{rev} + E \cdot \varepsilon_{rev}}{E - E^{tan}}$$
$$\sigma_0 = -\sigma_y \cdot \Delta^N + E^{tan} \cdot (\varepsilon_o + \varepsilon_y \cdot \Delta^N)$$

    - यदि वृद्धिशील विकृति $\Delta\varepsilon$ ऋण मान से धन मान में परिवर्तित होती है,

$$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_4 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$$
$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_y \cdot \Delta^P - E^{tan} \cdot \varepsilon_y \cdot \Delta^P - \sigma_{rev} + E \cdot \varepsilon_{rev}}{E - E^{tan}}$$
$$\sigma_0 = \sigma_y \cdot \Delta^P + E^{tan} \cdot (\varepsilon_o - \varepsilon_y \cdot \Delta^P)$$

    जहाँ a_1 और a_3 समदैशिक दृढ़ीकरण प्राचल हैं। वे सुघट्य विकृति $a_2 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$ के बाद पराभव-सामर्थ्य के एक अंश द्वारा संपीडन पराभव परिवेष्टन की वृद्धि तथा सुघट्य विकृति $a_4 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$ के बाद पराभव-सामर्थ्य के एक अंश द्वारा तनन पराभव परिवेष्टन की वृद्धि दर्शाते हैं। a_2 और a_4, a_1 और a_3 के सापेक्ष समदैशिक दृढ़ीकरण प्राचल हैं; ε_{max} और ε_{min} अधिकतम और न्यूनतम विकृति-उत्क्रमण बिंदुओं की विकृतियाँ हैं।
13. समस्या यह है कि a_1, a_2, a_3 और a_4 को प्रायोगिक परिणामों पर प्रतिरूप के वक्र-अनुरूपण द्वारा निर्धारित करना आवश्यक है। पूर्वनिर्धारित मान $a_1 = 0$, $a_2 = 55$, $a_3 = 0$ और $a_4 = 55$ हैं। पूर्ववर्ती प्रतिरूप के साथ समानता पर ध्यान दें; चित्र 62.7,62.8, 62.9 और 62.10।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.7: फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित ज्यूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (1)

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

if $\text{Foceflag}_{r,n} = 0$

if $\Delta\varepsilon = 0$	else if $\Delta\varepsilon < 0$	else if $\Delta\varepsilon > 0$
$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$	$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$	$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$
$\sigma_{rev,r,n} = 0$	$\sigma_{rev,r,n} = 0$	$\sigma_{rev,r,n} = 0$
$\varepsilon_{0,r,n} = 0$	$\varepsilon_{0,r,n} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{0,r,n} = -\sigma_{y,r} / E_r$
$\sigma_{0,r,n} = 0$	$\sigma_{0,r,n} = \sigma_{y,r}$	$\sigma_{0,r,n} = -\sigma_{y,r}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$
$\text{Forceflag}_{r,n} = 0$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{ini,r}$	$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$	$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$
$E_{r,n}^{\tan} = E_r$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
	$c_1 = 1 + \lvert\dot{\varepsilon}\rvert^R$	$c_1 = 1 + \lvert\dot{\varepsilon}\rvert^R$
	$c_2 = c_1^{1/R}$	$c_2 = c_1^{1/R}$
	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$
	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$
	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$

चित्र 62.8: फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित ज्यूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (2)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

else if $\text{Foceflag}_{r,n} = 1$

if $\Delta\varepsilon < 0$	else if $\Delta\varepsilon > 0$
$\varepsilon_{rev,r,n}$, $\sigma_{rev,r,n}$	$\varepsilon_{rev,r,n}$, $\sigma_{rev,r,n}$, $\varepsilon_{0,r,n}$, $\sigma_{0,r,n}$
$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{r,n}^{\max} - \varepsilon_{r,n}^{\min}}{2 \cdot a_2 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\varepsilon_{0,r,n} = \frac{-\sigma_{y,r} \cdot \Delta^N + E_r^{sh} \cdot \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^N - \sigma_{rev,r,n} + E_r \cdot \varepsilon_{rev,r,n}}{E_r - E_r^{sh}}$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\sigma_{0,r,n} = -\sigma_{y,r} \cdot \Delta^N + E_r^{sh} \cdot (\varepsilon_{0,r,n} + \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^N)$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$
$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$
$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$
$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$
$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	
$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$	
$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	

चित्र 62.9: फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित ज्यूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (3)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

else if $\text{Foceflag}_{r,n} = -1$

if $\Delta\varepsilon > 0$	else if $\Delta\varepsilon < 0$
$\varepsilon_{rev,r,n},\ \sigma_{rev,r,n}$	$\varepsilon_{rev,r,n},\ \sigma_{rev,r,n},\ \varepsilon_{0,r,n},\ \sigma_{0,r,n}$
$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{r,n}^{\max} - \varepsilon_{r,n}^{\min}}{2 \cdot a_4 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\varepsilon_{0,r,n} = \frac{\sigma_{y,r} \cdot \Delta^P - E_r^{sh} \cdot \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^P - \sigma_{rev,r,n} + E_r \cdot \varepsilon_{rev,r,n}}{E_r - E_r^{sh}}$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\sigma_{0,r,n} = \sigma_{y,r} \cdot \Delta^P + E_r^{sh} \cdot (\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^P)$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$
$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$
$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$
$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$
$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	
$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$	
$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	

चित्र 62.10: फिलिप्पू एवं सहलेखकों द्वारा संशोधित जूयूफ्रे–मेनेगोट्टो–पिंटो प्रतिरूप का निर्धारण (4)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.2.2 कंक्रीट प्रतिरूप

"An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation", Kang, 2010 के पीएचडी शोधप्रबंध से।

62.2.2.1 परिरोध का प्रभाव

24 कंक्रीट के संघटक प्रतिरूपों पर आगे बढ़ने से पूर्व प्रतिबल–विकृति वक्र पर परिरोध की भूमिका पर ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है।

25 Richart, Brandtzæg, and Brown, 1928 ने आरंभिक और सर्वाधिक व्यापक अध्ययनों में से एक किया, जिसमें तेल-दाबित हुक कोष्ठिका के भीतर कंक्रीट क्रोडों का परीक्षण किया गया, चित्र 62.11। उन्होंने पाया कि परिरोधी दाब वास्तव में सामर्थ्य बढ़ाता है[2]।

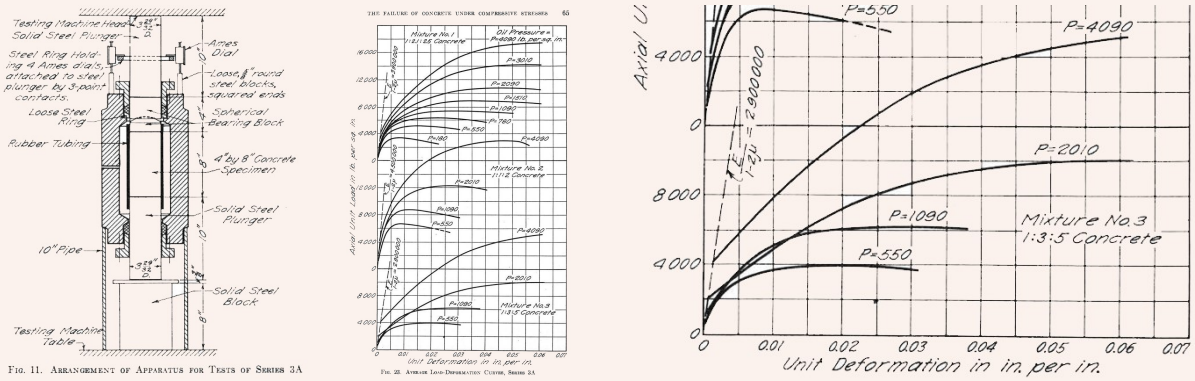


Fig. 11. Arrangement of Apparatus for Tests of Series 3A

चित्र 62.11: कंक्रीट सामर्थ्य पर परिरोध का प्रभाव (Richart, Brandtzæg, and Brown, 1928)

26 तब से कंक्रीट सामर्थ्य पर परिरोध के प्रभाव के लिए अनेक प्रतिरूप प्रस्तावित किए गए हैं। इनमें विशेष रूप से Mander, Priestley, and Park, 1988 उल्लेखनीय हैं, जिन्होंने परिरोध के प्रभाव पर सर्वाधिक प्रामाणिक सार-अध्ययन प्रकाशित किया।

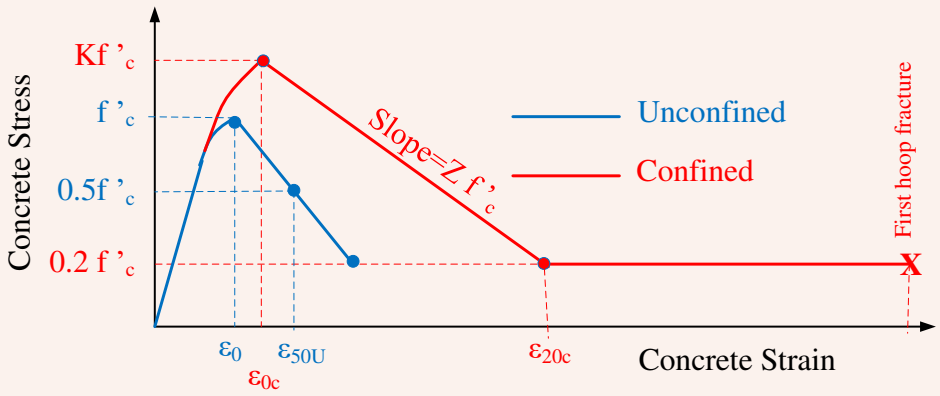
27 ये परिणाम हमारे अध्ययन के लिए अत्यंत प्रासंगिक हैं, क्योंकि यहाँ परिरोध बंधनों/रकाबों द्वारा प्रदान किया जाएगा। अतः परिरोधित और अपरिरोधित कंक्रीट के लिए भिन्न सामर्थ्य निर्दिष्ट करने होंगे।

28 (Mander, Priestley, and Park, 1988) का प्रतिरूप, चित्र 62.12, निम्न मान परिभाषित करता है:

ε_0 अधिकतम अपरिरोधित प्रतिबल पर कंक्रीट विकृति
ε_{0c} $K\varepsilon_0$
ε_{20c} अधिकतम प्रतिबल के 20% पर कंक्रीट विकृति
ε_{50U} $\frac{3+0.002f_c'}{f_c'-1000}$
K $1+\rho_s\frac{f_y}{f_c'}$

[2]सर्पण विफलता विधा मानकर मोहर वृत्त की रचना से इसे सरलता से सत्यापित किया जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

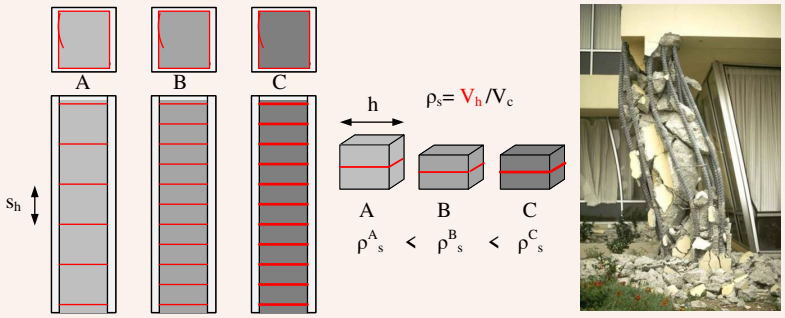


चित्र 62.12: परिरोधित *बनाम* अपरिरोधित कंक्रीट संपीडन सामर्थ्य (Mander, Priestley, and Park, 1988)

।

$Z_c f_c' \ \frac{\Delta f_c}{\Delta \varepsilon_c}$

[29] सामर्थ्य पर परिरोध का प्रभाव चित्र 62.13 में दर्शाया गया है।



चित्र 62.13: कंक्रीट परिरोध प्रदान करने में रकाबों की भूमिका

62.2.2.2 संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप

62.2.2.2.1 प्रतिबल–विकृति संबंध

[30] यह कंक्रीट प्रतिरूप किसी स्वेच्छ चक्रीय विकृति इतिहास के अधीन कंक्रीट का प्रतिबल–विकृति संबंध वर्णित करता है। विशेषतः कार्यान्वित प्रतिरूप चार महत्त्वपूर्ण कारकों को सम्मिलित करता है:

1. संपीडन में एकदिष्ट परिवेष्टन वक्र पर कंक्रीट परिरोध का प्रभाव, चित्र 62.12 (Mander, Priestley, and Park, 1988) (Richart, Brandtzæg, and Brown, 1928),

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. संपीडन विकृति के बढ़ते मानों के साथ भारमोचन और पुनर्भारण, दोनों वक्रों की दृढ़ता का क्रमिक ह्रास,
3. तनन-दृढ़ीकरण का प्रभाव,
4. संपीडन में चक्रीय भारण के अधीन शैथिल्य अनुक्रिया।

31 संपीडन में कंक्रीट का एकदिष्ट परिवेष्टन वक्र Kent and Park, 1971 के मूल प्रतिरूप का अनुसरण करता है, जिसका विस्तार Scott, Park, and Priestley, 1982 ने किया। यद्यपि इसके बाद अधिक यथार्थ और पूर्ण प्रतिरूप प्रकाशित हुए हैं, तथाकथित संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप सरलता और यथार्थता के बीच अच्छा संतुलन प्रदान करता है।

32 तनन-दृढ़ीकरण दरारों के बीच स्थित कंक्रीट की तनन प्रतिबल का प्रतिरोध करने और सदस्य की आनमनी दृढ़ता में योगदान देने की क्षमता है। दरारों की विविक्त प्रकृति के कारण उनके बीच का कंक्रीट प्रबलन से आबद्ध रहता है और इस प्रकार सदस्य की दृढ़ता में योगदान देता है। किंतु भार का परिमाण बढ़ने पर कम अंतरालों पर अतिरिक्त दरारें बनती हैं, जिससे कंक्रीट में विकसित हो सकने वाला तनन प्रतिबल घटता है। इसलिए दरारोत्तर अवस्था में भार बढ़ने के साथ तनन-दृढ़ीकरण क्रमशः घटता है।

33 पूर्ववर्ती शोधकर्ताओं ने कंक्रीट के प्रतिबल–विकृति संबंध को इस प्रकार संशोधित करके तनन-दृढ़ीकरण सम्मिलित किया है कि तनन सामर्थ्य (दरार बनने) पर पहुँचने के बाद तनन विकृति बढ़ने पर तनन प्रतिबल क्रमशः शून्य हो जाए। तनन सामर्थ्य की इस क्रमिक कमी का सन्निकटन प्रायः रैखिक, बहुरैखिक अथवा चरघातांकी रूप में किया जाता है। यहाँ रैखिक ह्रास-दर वाला समान उपागम अपनाया गया है।

34 किंतु परिणाम दर्शाते हैं कि सदस्य के सभी तंतुओं पर तनन-दृढ़ीकरण लागू करने से चरम सामर्थ्य का उल्लेखनीय अतिआकलन हो सकता है। वस्तुतः तनन-दृढ़ीकरण एक स्थानीय परिघटना है, जो प्रबलन के निकटवर्ती कंक्रीट को प्रभावित करती है। विश्लेषणात्मक अध्ययनों में केवल प्रबलन के चारों ओर प्रभावी क्षेत्र के भीतर के कंक्रीट तंतुओं को तनन-मृदुकरण निर्दिष्ट किया जाता है। स्पष्टतः प्रभावी क्षेत्र का आकार सदस्य के तनन-दृढ़ीकरण व्यवहार पर महत्त्वपूर्ण प्रभाव डालता है।

35 संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप 1971, जो चित्र 62.14 में दर्शाया गया है, उस में संपीडन के अंतर्गत कंक्रीट का एकदिष्ट प्रतिबल–विकृति संबंध आनुभविक रूप से तीन क्षेत्रों द्वारा परिभाषित है। संपीडन को धन मानने की परिपाटी अपनाने पर ये क्षेत्र हैं:

- क्षेत्र OA: $\varepsilon_c \le \varepsilon_0$

$$\sigma_c = K \cdot f_c \cdot \left[2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$

- क्षेत्र AB: $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \le \varepsilon_{20}$

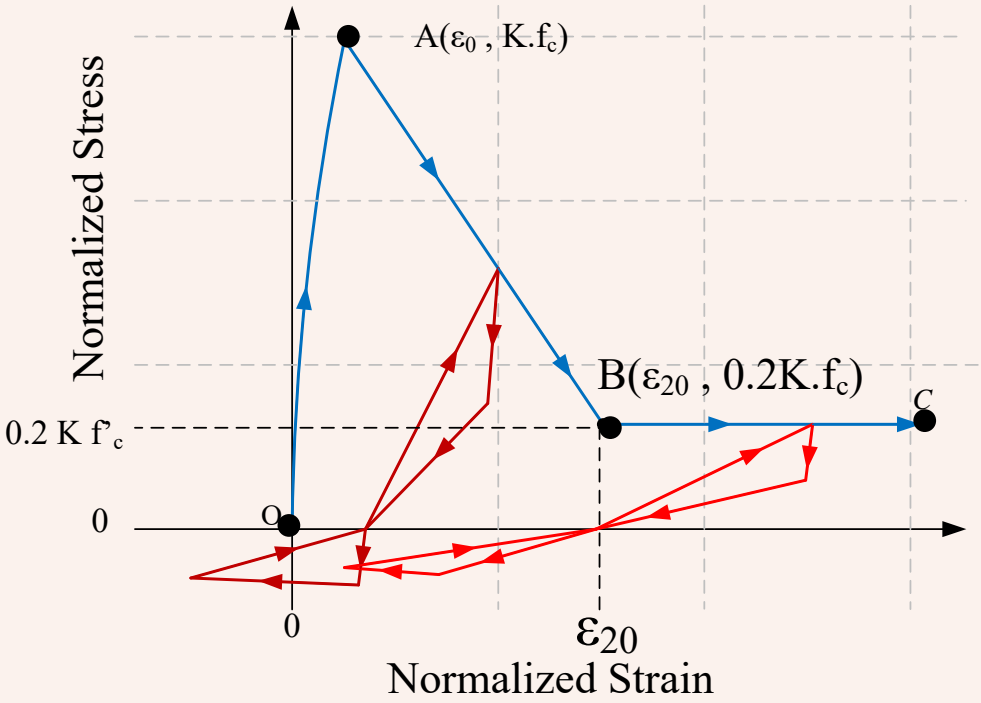
$$\sigma_c = K \cdot f_c \cdot [1 - Z(\varepsilon_c - \varepsilon_0)]$$

- क्षेत्र BC: $\varepsilon_c > \varepsilon_{20}$

$$\sigma_c = 0.2 \cdot K \cdot f_c$$

36 संगत स्पर्शरेखीय मापांक निम्न समीकरणों से दिए जाते हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.14: संपीडन में कंक्रीट पदार्थ प्रतिरूप
(Yassin, 1994)

- क्षेत्र OA: $\varepsilon_c \leq \varepsilon_0$

$$E^{tan} = \frac{2 \cdot K \cdot f_c}{\varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\right)$$

- क्षेत्र AB: $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20}$

$$E^{tan} = -Z \cdot K \cdot f_c$$

- क्षेत्र BC: $\varepsilon_c > \varepsilon_{20}$

$$E^{tan} = 0$$

जहाँ,

$$\varepsilon_0 = 0.002 \cdot K$$

$$K = 1 + \frac{\rho_s \cdot f_{ys}}{f_c}$$

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3+0.29 \cdot f_c}{145 \cdot f_c - 1000} + 0.75 \cdot \rho_s \cdot \sqrt{\frac{h}{s_h}} - 0.002 \cdot K}$$

जहाँ,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ε_0 अधिकतम प्रतिबल के अनुरूप कंक्रीट विकृति
ε_{20} अधिकतम प्रतिबल के 20 प्रतिशत पर कंक्रीट विकृति
K परिरोध के कारण सामर्थ्य-वृद्धि को सम्मिलित करने वाला गुणक
Z विकृति-मृदुकरण ढाल
f_c MPa में कंक्रीट बेलन का संपीडन सामर्थ्य (1 MPa = 145 psi)
f_{ys} MPa में रकाबों का पराभव सामर्थ्य
ρ_s घेरा प्रबलन के आयतन और कंक्रीट क्रोड के आयतन का अनुपात रकाबों के बाहरी भाग तक मापा गया
h रकाबों के बाहरी भाग तक मापी गई कंक्रीट क्रोड की चौड़ाई
s_h रकाबों अथवा घेरा-समुच्चयों का केंद्र-से-केंद्र अंतराल।

37 चक्रीय भारमोचन और पुनर्भारण व्यवहार को सीधी रेखाओं के समुच्चय द्वारा निरूपित किया जाता है। चित्र 62.14 दर्शाता है कि शैथिल्य व्यवहार तनन और संपीडन, दोनों प्रतिबलों के अधीन होता है।

38 यद्यपि संपीडन और तनन के शैथिल्य पाश सतत हैं, स्पष्टता के लिए उनकी चर्चा पृथक-पृथक की जाएगी।

39 सारणी 62.1 परिरोधित और अपरिरोधित कंक्रीट के प्रमुख प्रत्यास्थ तथा सामर्थ्य गुणों का सार प्रस्तुत करती है। f_c psi में f_t के लिए है। केंट एवं पार्क अवशिष्ट प्रतिबल/विकृति के विकल्प के रूप में $f_{c,res}^{conf} = 0.9 f_c$ लिया जा सकता है और क्रमिक अवरोह सुनिश्चित करने हेतु ε_{res}^{conf} को एक “बड़ा” मान दिया जाता है। यह संयोजन स्थिर विश्लेषण सुनिश्चित करता है (Ghannoum, 2010)।

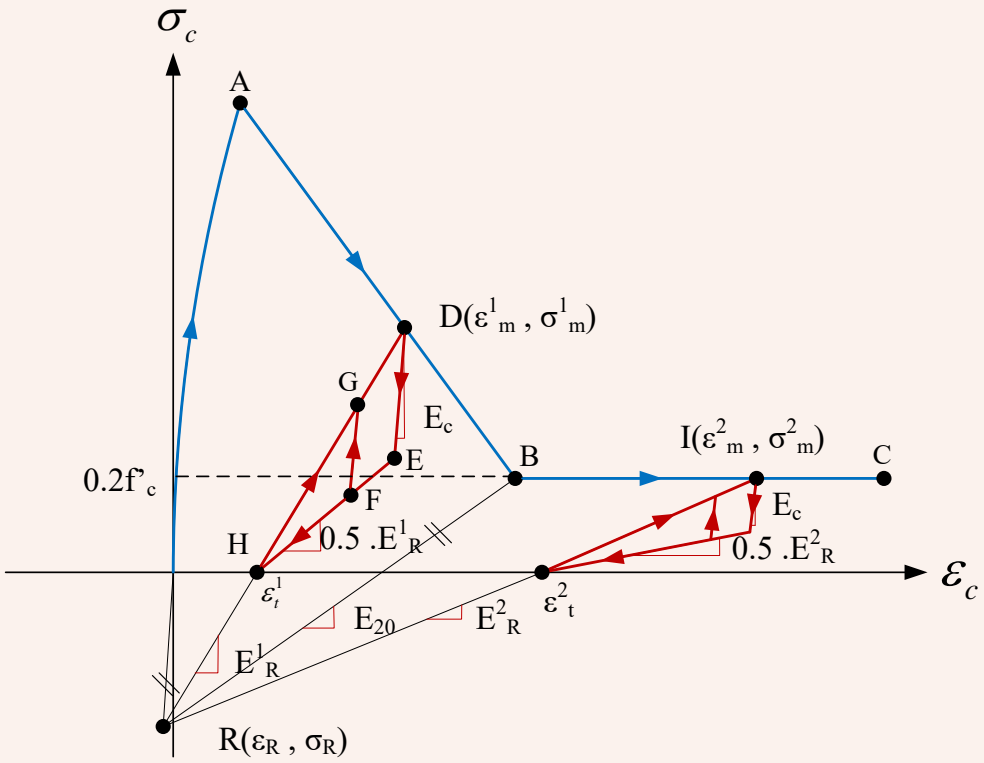
तालिका 62.1: परिरोधित *बनाम* अपरिरोधित कंक्रीट के प्रत्यास्थ और सामर्थ्य गुण

	ε_0	f_c	f_t	E_0	E_t	$f_{c,20}$	ε_{20}
अपरिरोधित	0.003	परीक्षण	$7.5\sqrt{f_c^{unc}}$	$2\frac{f_c^{unc}}{\varepsilon_0^{unc}}$	$\frac{E_0^{unc}}{5}$	$f_c^{unc}/3$	$3\varepsilon_0^{unc}$
परिरोधित	$0.002K$	Kf_c^{unc}	$7.5\sqrt{f_c^{unc}}$	$2\frac{f_c^{conf}}{\varepsilon_0^{conf}}$	$\frac{E_0^{conf}}{5}$	$0.2 f_c^{conf}$	$\varepsilon_0^{conf} + \frac{Kf_c^{unc} - f_{c,20}^{confined}}{ZKf_c^{unc}}$

संपीडन

40 प्रतिरूप के संपीडन पक्ष में अधिकतम विकृति के बढ़ते मानों के साथ भारमोचन और पुनर्भारण, दोनों रेखाओं की दृढ़ता का क्रमिक *ह्रास* होता है, जैसा चित्र 62.14 में दर्शाया गया है। दृढ़ता का ह्रास ऐसा है कि सभी पुनर्भारण रेखाओं के प्रक्षेप चित्र 62.15 के एक सामान्य बिंदु R पर प्रतिच्छेद करते हैं। बिंदु R को मूलबिंदु पर एकदिष्ट परिवेष्टन वक्र की स्पर्शरेखा और बिंदु B से भारमोचन रेखा के प्रक्षेप के प्रतिच्छेदन द्वारा निर्धारित किया जाता है; बिंदु B कंक्रीट सामर्थ्य $0.2 \cdot f_c$ के अनुरूप है (चित्र 62.15)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.15: संपीडन में चक्रीय भारण के अधीन कंक्रीट पदार्थ प्रतिरूप (Yassin, 1994)

41 प्रतिच्छेदन बिंदु पर विकृति और प्रतिबल निम्न अभिव्यक्तियों से दिए जाते हैं:

$$\varepsilon_R = \frac{0.2 \cdot K \cdot f_c - E_{20} \cdot \varepsilon_{20}}{E_c - E_{20}} \qquad (62.4)$$
$$\sigma_R = E_c \cdot \varepsilon_R$$

जहाँ E_c मूलबिंदु पर एकदिष्ट परिवेष्टन वक्र का स्पर्शरेखीय मापांक है और E_{20}, $0.2 \cdot f_c$ सामर्थ्य वाले एकदिष्ट परिवेष्टन वक्र के बिंदु B पर भारमोचन मापांक है। E_{20} का परिमाण प्रयोग द्वारा निर्धारित करना आवश्यक है।

42 संपीडन एकदिष्ट परिवेष्टन के किसी बिंदु (चित्र 62.15 में बिंदु D) से भारमोचन के बाद और शून्य-प्रतिबल अक्ष (चित्र 62.15 में बिंदु H) तक पहुँचने से पूर्व प्रतिरूप की अनुक्रिया दो छोटे परिवेष्टनों का अनुसरण करती है, जिन्हें निम्न समीकरण परिभाषित करते हैं:

- अधिकतम परिवेष्टन (रेखा HD)

$$\sigma_{max} = \sigma_m + E_R \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_m) \qquad (62.5)$$

- न्यूनतम परिवेष्टन (रेखा HE)

$$\sigma_{min} = 0.5 \cdot E_R \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_t) \qquad (62.6)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ,

$$E_R = \frac{\sigma_m - \sigma_R}{\varepsilon_m - \varepsilon_R}$$
$$\varepsilon_t = \varepsilon_m - \frac{\sigma_m}{E_R} \tag{62.7}$$

σ_m और ε_m क्रमशः संपीडन एकदिष्ट परिवेष्टन पर भारमोचन बिंदु के प्रतिबल और विकृति हैं। अतः दोनों छोटे परिवेष्टनों की स्थितियाँ भारमोचन बिंदु की स्थिति पर निर्भर करती हैं।

43 छोटे परिवेष्टनों के भीतर आंशिक भारण और भारमोचन चक्रों के लिए प्रतिरूप मापांक E_c वाली सीधी रेखा का अनुसरण करता है।

44 संख्यात्मक कार्यान्वयन में ढाल E_c वाले रैखिक प्रत्यास्थ व्यवहार के आधार पर परीक्षण प्रतिबल और स्पर्शरेखीय मापांक माने जाते हैं:

$$\sigma_{c,n}^{tr} = \sigma_{c,n-1} + E_c \cdot \Delta\varepsilon_{c,n} \tag{62.8}$$

जहाँ $\sigma_{c,n}^{tr}$ अद्यतन परीक्षण प्रतिबल, $\sigma_{c,n-1}$ पूर्ववर्ती प्रतिबल अवस्था और $\Delta\varepsilon_{c,n}$ विकृति-वृद्धि है। प्रतिरूप का वास्तविक प्रतिबल और मापांक निर्धारित करने हेतु निम्न नियम प्रयुक्त होते हैं:

$$\begin{aligned}
&\text{if} \quad \sigma_{min} \le \sigma_{c,n}^{tr} \le \sigma_{max} \quad \text{then} \quad \sigma_{c,n} = \sigma_{c,n}^{tr} \quad \text{and} \quad E^{tan} = E_c \\
&\text{if} \quad \sigma_{c,n}^{tr} < \sigma_{min} \quad \text{then} \quad \sigma_{c,n} = \sigma_{min} \quad \text{and} \quad E^{tan} = 0.5 \cdot E_r \\
&\text{if} \quad \sigma_{c,n}^{tr} > \sigma_{max} \quad \text{then} \quad \sigma_{c,n} = \sigma_{max} \quad \text{and} \quad E^{tan} = E_r
\end{aligned} \tag{62.9}$$

45 समीकरण 62.4 से 62.9 के अनुसार संपीडन में प्रतिरूप के शैथिल्य व्यवहार को नियंत्रित करने वाले नियम चित्र 62.15 के एक नमूना इतिहास द्वारा दर्शाए गए हैं।

46 यदि बिंदु D से बिंदु E तक भारमोचन होता है, तो पुनर्भारण उसी पथ से वापस D तक होगा। यदि भारमोचन बिंदु F तक पहुँचता है, तो पुनर्भारण पर शैथिल्य पाश DEFGD प्राप्त होगा। यदि बिंदु H तक पूर्ण भारमोचन होता है, तो पुनर्भारण से शैथिल्य पाश DEHD प्राप्त होगा। यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि पुनर्भारण रेखा सदैव प्रारंभिक भारमोचन बिंदु पर संपीडन एकदिष्ट परिवेष्टन से पुनः जुड़ेगी। जब भारमोचन बिंदु H से आगे जारी रहता है और प्रतिरूप तनन में पुनर्भारण आरंभ करता है, तब शैथिल्य व्यवहार को भिन्न नियम नियंत्रित करते हैं। किंतु संपीडन में पुनर्भारण होने पर प्रतिरूप भारमोचन पूर्ण होने के शून्य-प्रतिबल अक्ष स्थित बिंदु (बिंदु H) पर संपीडन क्षेत्र में पुनः प्रवेश करेगा; संपीडन क्षेत्र में लौटने के बाद तनन क्षेत्र की घटनाएँ प्रतिरूप के व्यवहार को प्रभावित नहीं करेंगी।

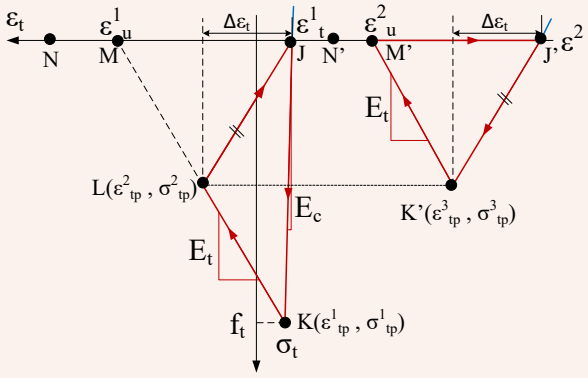
तनन

चित्र 62.16 में दर्शाया गया प्रतिरूप का तनन व्यवहार प्रारंभिक दरार बनने के बाद अधिकतम तनन विकृति के बढ़ते मानों के लिए तनन-दृढ़ीकरण तथा भारमोचन और पुनर्भारण दृढ़ता के ह्रास को सम्मिलित करता है। कंक्रीट का अधिकतम तनन सामर्थ्य (विदारण मापांक) निम्न माना जाता है:

$$f_t = 0.6228\sqrt{f_c} \tag{62.10}$$

जहाँ f_t और f_c MPa में व्यक्त किए गए हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.16: तनन में चक्रीय भारण के अधीन कंक्रीट पदार्थ प्रतिरूप
(Yassin, 1994)

47 चित्र 62.16 दो क्रमिक तनन शैथिल्य पाश दर्शाता है, जो उस नमूना चक्रीय इतिहास का भाग हैं जिसमें संपीडन प्रतिबल भी सम्मिलित हैं। प्रतिरूप मानता है कि तनन प्रतिबल विकृति अक्ष पर कहीं भी उत्पन्न हो सकता है—या तो प्रारंभिक तनन भारण के परिणामस्वरूप अथवा संपीडन अवस्था से भारमोचन के परिणामस्वरूप। दूसरे मामले में संपीडन विकृति के अंतर्गत तनन प्रतिबल उत्पन्न होता है। तनन प्रतिबल–विकृति संबंध तीन निर्देशांकों वाले बिंदुओं $(\varepsilon_t, 0)$, $(\varepsilon_{tp}, \sigma_{tp})$ और $(\varepsilon_u, 0)$ द्वारा परिभाषित है, जिन्हें चित्र 62.16 में क्रमशः बिंदु J, K और M दर्शाते हैं। ε_t उस बिंदु की विकृति है जहाँ संपीडन प्रतिबल क्षेत्र से भारमोचन रेखा विकृति अक्ष को काटती है। ε_t समीकरण 62.7 से दिया जाता है और अधिकतम संपीडन विकृति के साथ बदलता है। ε_{tp} और σ_{tp} तनन प्रतिबल–विकृति संबंध के शिखर पर विकृति और प्रतिबल हैं तथा निम्न अभिव्यक्तियों से दिए जाते हैं:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tp} &= \varepsilon_t + \Delta\varepsilon_t \\ \sigma_{tp} &= f_t \cdot \left(1 + \frac{E_t}{E_c}\right) - E_t \cdot \Delta\varepsilon_t \end{aligned} \tag{62.11}$$

जहाँ $\Delta\varepsilon_t$, तनन विकृति और ε_t के बीच पूर्ववर्ती अधिकतम अंतर है, जैसा चित्र 62.16 में है।

48 प्रारंभिक दरार बनने से पूर्व $\Delta\varepsilon_t$, f_t/E_c के बराबर है। E_t तनन-दृढीकरण मापांक है, जो संख्यात्मक और भौतिक प्राचलों पर निर्भर करता है। ε_u उस बिंदु की विकृति है जहाँ तनन प्रतिबल शून्य हो जाता है और निम्न अभिव्यक्ति से दिया जाता है:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_t + f_t \cdot \left(\frac{1}{E_t} + \frac{1}{E_c}\right) \tag{62.12}$$

49 इन तीन नियंत्रण बिंदुओं के आधार पर तनन प्रतिबल–विकृति संबंध और सुपरशरेखीय मापांक निम्न समीकरणों से परिभाषित हैं (तनन धन है):

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- क्षेत्र JK: $\varepsilon_t < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{tp}$

$$\sigma_c = E^{tan} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_t), \quad E^{tan} = \frac{\sigma_{tp}}{\varepsilon_{tp} - \varepsilon_t} \tag{62.13}$$

- क्षेत्र KM: $\varepsilon_{tp} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_u$

$$\sigma_c = \sigma_{tp} + E^{tan} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}), \quad E^{tan} = -E_t \tag{62.14}$$

- क्षेत्र MN: $\varepsilon_c > \varepsilon_u$

$$\sigma_c = 0, \quad E^{tan} = 0 \tag{62.15}$$

यदि $\varepsilon_{tp} \geq \varepsilon_u$ हो, तो σ_{tp}, σ_c और E^{tan} सभी को शून्य माना जाता है। मापांक E_t, समीकरण 62.14 की ढाल को नियंत्रित करके तनन-दृढीकरण की मात्रा नियंत्रित करता है। ढाल जितनी अधिक होगी, तनन-दृढीकरण का प्रभाव उतना कम होगा। तनन भारमोचन और पुनर्भारण समीकरण 62.13 द्वारा नियंत्रित होते हैं; यह समीकरण विकृति-अंतर $\Delta\varepsilon_t$ के बढते मानों के लिए दृढता ह्रास भी सम्मिलित करता है। $\Delta\varepsilon_t$ का मान तब बदलता है जब $\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}$ बदलता है।

[50] समीकरण 62.10 से 62.15 द्वारा अभिलक्षित प्रतिरूप के तनन व्यवहार को चित्र 62.16 के उदाहरण भार-पथों द्वारा बेहतर समझा जा सकता है। संपीडन से भारमोचन करते हुए प्रतिरूप बिंदु J पर विकृति अक्ष को काटता है। फिर बिंदु K पर प्रारंभिक दरार बनने तक तनन में भारित होता है। बिंदु K के आगे विकृति-उत्क्रमण बिंदु L तक मृदुकरण होता है। भारमोचन पथ बिंदु L से बिंदु J तक सीधी रेखा का अनुसरण करता है, जहाँ प्रतिरूप संपीडन में पुनर्भारित होता है। दूसरी बार प्रतिरूप बिंदु J' पर तनन में प्रवेश करता है। पुनर्भारण पथ J'K' पूर्ववर्ती भारमोचन पथ LJ की ठीक प्रतिकृति है, जिसे विकृति अक्ष पर JJ' दूरी से स्थानांतरित किया गया है। बिंदु K' पर प्रतिरूप पुनः मृदुकरण शाखा से जुडता है, जो बिंदु M' पर तनन प्रतिबल के शून्य होने तक चलती है। विकृति-उत्क्रमण बिंदु N' से होकर प्रतिबल शून्य रहता है, जब तक प्रतिरूप बिंदु J' पर संपीडन में पुनर्भारित नहीं होता। इसके बाद प्रतिरूप की तनन प्रतिबल क्षमता शून्य हो जाती है।

[51] पूर्ववर्ती प्रतिबल–विकृति इतिहास के लिए आवश्यक स्मृति की दृष्टि से वर्तमान कंक्रीट प्रतिरूप अपेक्षाकृत मितव्ययी है। स्मृति के रूप में प्रयुक्त प्राचल निम्न हैं:

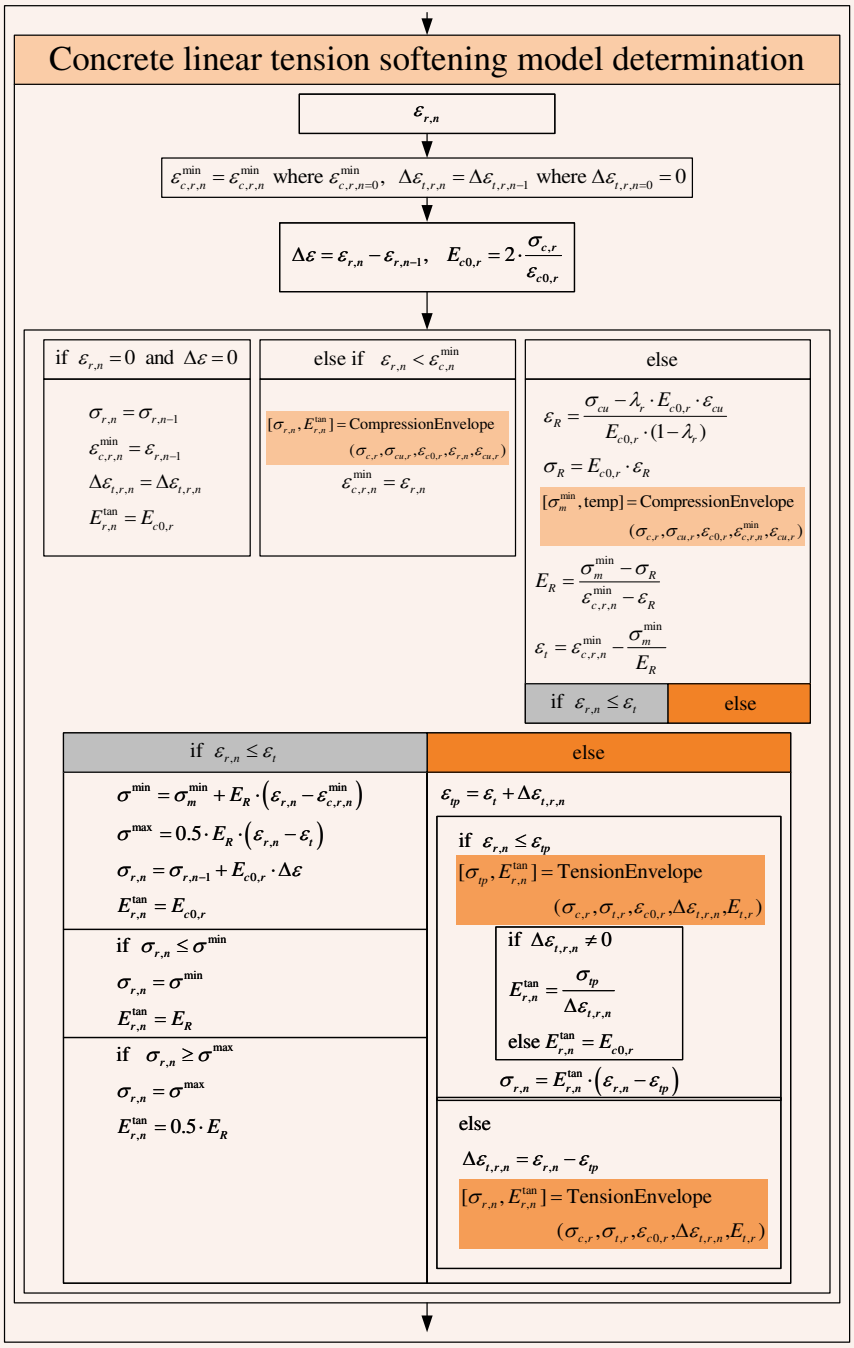
1. अंतिम प्रतिरूप अवस्था के अनुरूप बिंदु पर प्रतिबल और विकृति,
2. संपीडन एकदिष्ट परिवेष्टन पर अंतिम भारमोचन बिंदु की विकृति, ε_m,
3. पूर्ववर्ती अधिकतम तनन विकृति और $\Delta\varepsilon_t$ अंतर ε_t के साथ।

[52] वर्तमान प्रतिरूप में विचारित कंक्रीट क्षति अधिकतम विकृति के बढते मानों के लिए भारमोचन और पुनर्भारण दृढता ह्रास के रूप में है। किंतु वास्तविक कंक्रीट क्षति में चक्रीय भारण के अधीन एकदिष्ट परिवेष्टनों की कमी भी सम्मिलित होती है।

62.2.2.2.2 संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप का निर्धारण

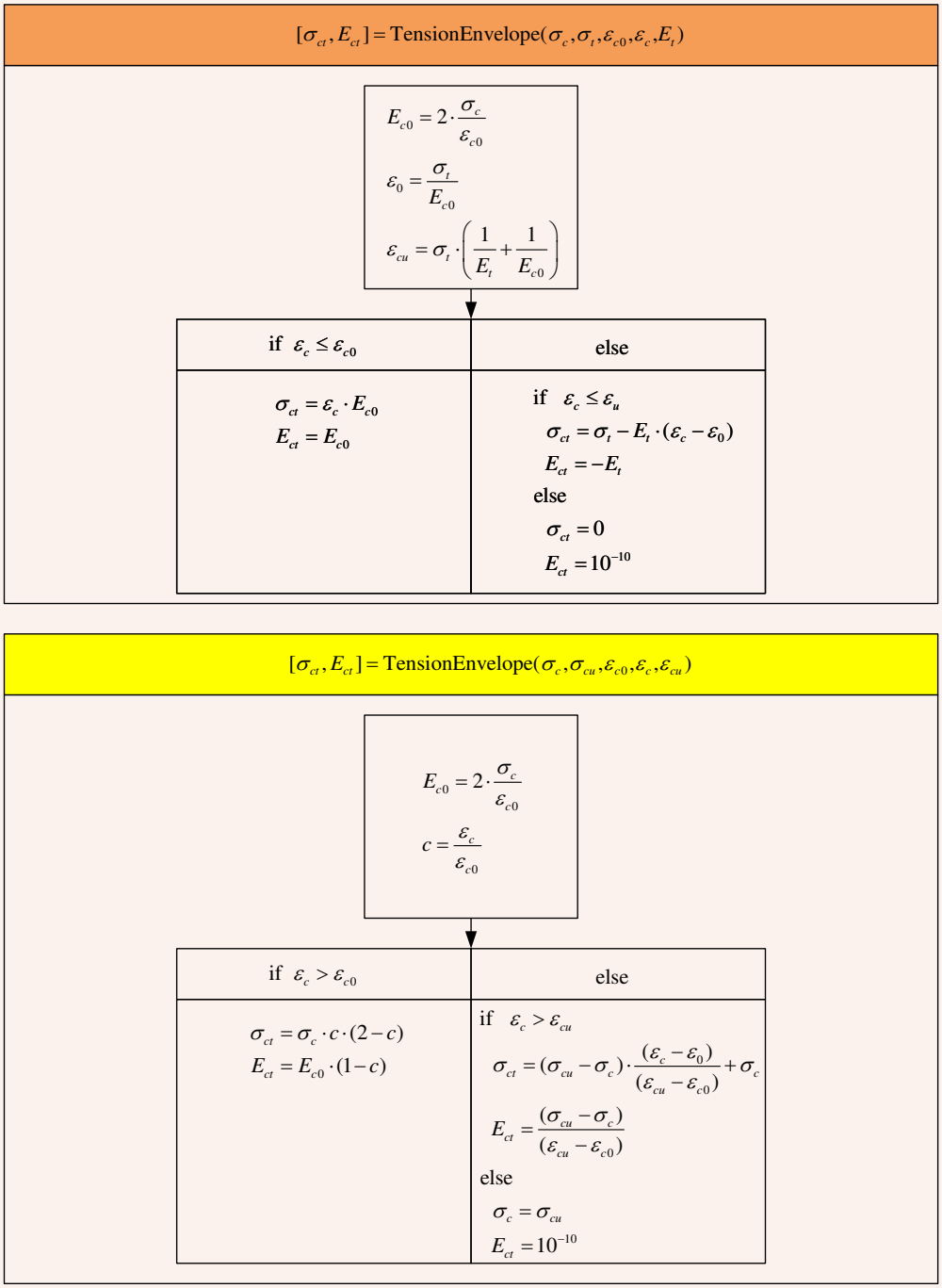
चित्र 62.17 और 62.18 एकाक्षीय प्रतिबल σ और सपर्शरेखीय मापांक E^{tan} को एकाक्षीय विकृति ε से प्राप्त करने की प्रक्रिया दर्शाते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.17: संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप का निर्धारण (1)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.18: संशोधित केंट एवं पार्क प्रतिरूप का निर्धारण (2)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.2.3 प्रभावी क्षति और दृढता पुनर्प्राप्ति सहित विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप

"An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation", Kang, 2010 के पीएचडी शोधप्रबंध से तथा ENS/Cachan के प्रो. रागेनो और श्री लेबोन की उदार सहायता से।

[53] यद्यपि संशोधित केंट–पार्क प्रतिरूप अनेक अनुप्रयोगों में सफलतापूर्वक प्रयुक्त हुआ है, वह एक अनुमानी आनुभविक प्रतिरूप ही है, जिसका यथार्थ निष्पादन सीमित पुनरावृत्तियों वाले वास्तविक-समय संकर अनुकरण में सुनिश्चित नहीं हो सकता। इस संभावित सीमा को दूर करने हेतु कंक्रीट का अधिक *कठोर और ऊष्मागतिक रूप से शुद्ध संघटक प्रतिरूप* कार्यान्वित किया गया है।

62.2.3.1 संघटक प्रतिरूप

ऊष्मागतिक विभव

[54] गिब्स विभव (जिसकी चर्चा §62.1.1 में हो चुकी है) $\rho \cdot \phi^*$ विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप के लिए लादवेज़ संरचना (Ladeveze, 1983) पर आधारित है। प्रतिबल प्रदिश को विचलनी और द्रवस्थैतिक घटकों में विभाजित करने से अपरूपण और द्रवस्थैतिक भागों पर पृथक रूप से विचार किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, एकपक्षीय प्रभाव का प्रतिरूपण करने के लिए प्रत्येक घटक को पुनः दो भागों—धन और ऋण—में विभाजित किया जाता है, चित्र 62.19। क्षति प्रदिश $\mathbf{D}$ के माध्यम से केवल धन भाग को प्रभावित करती है।

$$\rho \cdot \phi^* = \frac{1+\nu}{2 \cdot E}\left[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\right) + \mathrm{Tr}\left(\langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-\langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-\right)\right] + \frac{1-2\nu}{6\cdot E}\left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_+^2}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_-^2\right] \tag{62.16}$$

जहाँ ρ, ν और E क्रमशः घनत्व, प्वासों अनुपात और यंग मापांक हैं। प्रदिश $\mathbf{H}$ इस प्रकार परिभाषित है:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{1}-\mathbf{D})^{\frac{1}{2}}$$

जहाँ $(\cdot)^D$, $(\cdot)$ का विचलनी भाग है,

$$(\cdot)^D = (\cdot) - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\cdot)\cdot\mathbf{1}$$

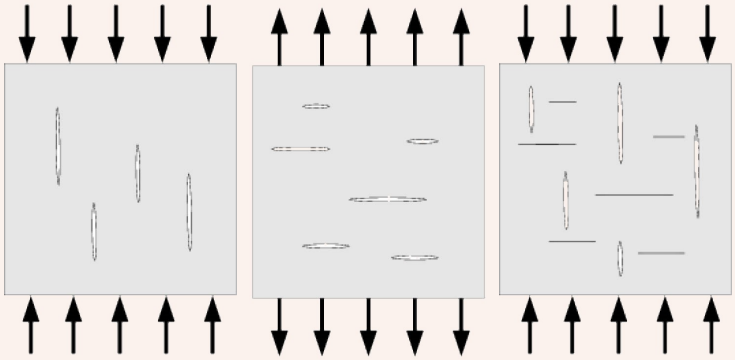
$\langle\cdot\rangle_{+,-}$, $(\cdot)$ का धन अथवा ऋण भाग है, और D_H, $\mathbf{D}$ का द्रवस्थैतिक भाग है,

$$D_H = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\mathbf{D}$$

लादवेज़ संरचना (Ladeveze, 1983) में $\boldsymbol{\sigma}_+^D$, $\boldsymbol{\sigma}^D$ का एक असामान्य धन भाग है। यदि $\boldsymbol{\lambda}_I$, $\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D$ के अभिलक्षणिक मान और $\mathbf{T}^I$ संगत अभिलक्षणिक सदिश हों, तो $\boldsymbol{\sigma}_+^D$ है:

$$\boldsymbol{\sigma}_+^D = \sum_I \langle\boldsymbol{\lambda}_I\rangle_+ \left(\mathbf{H}^{-1}\cdot\mathbf{T}^I\right)\left(\mathbf{H}^{-1}\cdot\mathbf{T}^I\right)^T$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.19: संपीडन, तनन तथा तनन एवं संपीडन द्वारा उत्पन्न दरारें

संघटक नियम

55 संघटक नियम समीकरण 62.16 का प्रयोग करके गिब्स विभव से व्युत्पन्न किया जाता है:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \rho \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\left[\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\right)^D + \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-^D\right] + \frac{1-2\nu}{3\cdot E}\left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_-\right]\cdot\mathbf{I} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\cdot \mathrm{Tr}\,(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\mathbf{I}\end{aligned}$$

जहाँ $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ प्रभावी प्रतिबल है, जो प्रतिबल–विकृति नियम को प्रभावी प्रतिबल के रूप में पुनर्लिखने से प्राप्त होता है:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\right)^D + \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-^D\right] + \left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_-\right]\cdot\mathbf{I}$$

क्षति विकास नियम

56 क्षति विकास नियम में चक्रीय भारण सम्मिलित होना चाहिए। अतः क्षति निकष f को प्रभावी क्षति d_ε (Ragueneau et al., 2006) पर इस प्रकार निर्भर होना चाहिए:

$$\begin{aligned} f &= \hat{\varepsilon} - \kappa\,(d_\varepsilon) \\ d_\varepsilon &= \frac{\mathbf{D} : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+}{\max\,(\boldsymbol{\varepsilon}_I)}\end{aligned}$$

जहाँ $\hat{\varepsilon}$ मजार्स विकृति (Mazars, 1986) है, जो इस प्रकार परिभाषित है:

$$\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+}$$

और κ दृढीकरण फलन है:

$$\kappa\,(d_\varepsilon) = a\cdot\tan\left[\frac{d_\varepsilon}{aA} + \arctan\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right]$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ A और a दो क्षति गुणांक हैं तथा κ_0 प्रारंभिक प्रत्यास्थता देहली है।

57 अतः यदि क्षति निकष ऋण हो, तो पदार्थ रैखिक प्रत्यास्थ परिसर में है; और यदि वह धन हो, तो क्षति धन विकृति के साथ बढती है:

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda}\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+$$

जहाँ क्षति लाग्रांज गुणक $\dot{\lambda}$ को कून–टकर शर्त ($f = 0$ और $f' = 0$) से निर्धारित किया जाता है।

62.2.3.2 एकाक्षीय बहु-तंतु सूत्रीकरण

58 यूलर–बर्नूली धरन सिद्धांत पर आधारित बहु-तंतु सूत्रीकरण एकाक्षीय भारण के तुल्य है। अतः प्रतिबल प्रदिश और विकृति प्रदिश निम्न रूप में घट जाते हैं:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

और,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

59 क्षति प्रदिश विकर्णीय हो जाता है और संघटक नियम को इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है (Desmorat et al., 2008):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\left(D_1, D_2\right) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E} \tag{62.17}$$

जहाँ $\mathbf{B}$ एक विकर्णीय प्रदिश है जो क्षति चर और भारण पर निर्भर करता है; D_1 और D_2 क्रमशः तनन और संपीडन क्षति से संबद्ध हैं।

60 समीकरण 62.17 को आव्यूह रूप में पुनर्लिखने पर,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

अतः,

$$\boldsymbol{\sigma}^D = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1\sigma}{3} \end{pmatrix} \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-D_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = \sigma \qquad D_H = D_1 + 2D_2$$

$$\varepsilon_e = \frac{1+\nu}{E}\left(\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}_+^D\boldsymbol{H}\right)^D + \boldsymbol{\sigma}_-^D\right) + \frac{1-2\nu}{3E}\left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\rangle_-\right]\boldsymbol{Id}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

61 तनन ($\sigma > 0$) के लिए माना जाता है कि केवल D_1 बढता है।

$$\varepsilon_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{E}\boldsymbol{B^t} = \frac{\sigma}{E}\begin{pmatrix} B_1^t & 0 \\ 0 & B_2^t \end{pmatrix}$$

$$B_1^t = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{4}{1-D_1} + \frac{2}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}\frac{1}{1-(D_1+2D_2)}$$
$$B_2^t = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{-2}{1-D_1} - \frac{1}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}\frac{1}{1-(D_1+2D_2)}$$

62 संपीडन ($\sigma < 0$) के लिए माना जाता है कि केवल D_2 बढता है।

$$\varepsilon_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{E}\boldsymbol{B^c} = \frac{\sigma}{E}\begin{pmatrix} B_1^c & 0 \\ 0 & B_2^c \end{pmatrix}$$

$$B_1^c = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{4}{1-D_1} + \frac{2}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$
$$B_2^c = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{-2}{1-D_1} - \frac{1}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$

62.2.3.3 विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण

62.2.3.3.1 तनन भारण: $\varepsilon_{11} > 0$

संघटक समीकरण

63 यदि $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ और $\eta_t = 1$ हों, तो:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{E}{B_{11}^t}\varepsilon \\ \sigma &= \frac{E}{\frac{1+\nu}{9}\cdot\left(\frac{4}{1-D_1}+2\right) + \frac{1-2\nu}{3\left(1-\frac{D_1+2D_2}{3}\right)}}\cdot\varepsilon \\ D_1 &= a\cdot A\left(\texttt{atan}\left(\frac{\varepsilon_{11}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right) \end{aligned} \tag{62.18}$$

जहाँ $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+} = \varepsilon_{11} \geq 0$,

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

64 D_2 अचर है और स्पर्शरेखीय मापांक समीकरण 62.18 से निर्धारित होता है:

$$\dot{\sigma} = E^{tan} \cdot \dot{\varepsilon} \tag{62.19}$$

65 किंतु यदि $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 < 0$ हो, तो स्पर्शरेखीय मापांक छेदक मापांक के बराबर होता है।

$$E^{tan} = \frac{E}{B^t_{11}}$$

सुसंगत स्पर्शरेखीय दृढता मापांक का संख्यात्मक कार्यान्वयन

66 यदि $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ और $\eta_t = 1$ हों, तो स्पर्शरेखीय मापांक समीकरण 62.18 और 62.19 से निर्धारित होता है:

$$\begin{aligned}
E^{tan}_n &= \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} \\
B^t_{11,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{4}{1 - D_{1,n}} + 2 \right) + \frac{1 - 2\nu}{3 \cdot \left(1 - \frac{(D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})}{3} \right)} \\
D_{1,n} &= a \cdot A \left(\texttt{atan} \left(\frac{\varepsilon_{11,n}}{a} \right) - \texttt{atan} \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right)
\end{aligned}$$

जहाँ n वर्तमान उद्दीपन चरण है।

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} \left(\frac{E}{B^t_{11,n}} \cdot \varepsilon_n \right) = \frac{E}{B^t_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \frac{1}{(B^t_{11,n})^2} \cdot \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial \varepsilon_n}$$

जहाँ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial D_{1,n}} \cdot \frac{\partial D_{1,n}}{\partial \varepsilon_n} \\
C_1 = \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial D_{1,n}} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \frac{4}{(1 - D_{1,n})^2} + \frac{1 - 2\nu}{9 \left(1 - \frac{D_{1,n} + 2D_{2,n-1}}{3} \right)} \\
C_2 = \frac{\partial D_{1,n}}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} \left(a \cdot A \left(\texttt{atan} \left(\frac{\varepsilon_n}{a} \right) - \texttt{atan} \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right) \right) = \frac{A}{1 + \left(\frac{\varepsilon_n}{a} \right)^2}
\end{aligned}$$

67 अंततः स्पर्शरेखीय मापांक प्राप्त होता है:

$$E^{tan}_n = \frac{E}{B^t_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{1}{(B^t_{11,n})^2} \cdot C_1 \cdot C_2$$

62.2.3.3.2 संपीडन भारण: $\varepsilon_{11} < 0$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संघटक समीकरण

[68] यदि $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ और $\eta_t = 1$ हों, तो:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{E}{\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{2}{1-D_2} + 4\right) + \frac{1-2\nu}{3}} \cdot \varepsilon \\ D_2 &= \frac{a \cdot A}{2} \left(\mathtt{atan}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \varepsilon_{22}}{a}\right) - \mathtt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right) \right) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{B^c_{22}}{B^c_{11}} \cdot \varepsilon_{11} \end{aligned} \tag{62.20}$$

जहाँ $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} = \sqrt{2 \cdot \varepsilon_{22}^2} \geq 0,$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} = \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

[69] D_1 अचर है और स्पर्शरेखीय मापांक समीकरण 62.20 से निर्धारित होता है:

$$\dot{\sigma} = E^{tan} \cdot \dot{\varepsilon} \tag{62.21}$$

[70] किंतु यदि $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 < 0$ हो, तो स्पर्शरेखीय मापांक छेदक मापांक के बराबर होता है।

$$E^{tan} = \frac{E}{B^c_{11}}$$

सुसंगत स्पर्शरेखीय दृढता मापांक का संख्यात्मक कार्यान्वयन

[71] यदि $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ और $\eta_t = 1$ हों, तो स्पर्शरेखीय मापांक समीकरण 62.20 और 62.21 से निर्धारित होता है:

$$\begin{aligned} E^{tan}_n &= \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} \\ B^c_{11,n-1} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n-1}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B^c_{22,n-1} &= -\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n-1}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B^c_{11,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B^c_{22,n} &= -\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ n वर्तमान उद्दीपन चरण है।

$$\tilde{\nu}_{n-1} = -\frac{B^c_{22,n-1}}{B^c_{11,n-1}}, \quad \varepsilon^{tr}_{22,n} = -\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \varepsilon_{11,n}$$
$$\tilde{\nu}_{n} = -\frac{B^c_{22,n}}{B^c_{11,n}}, \quad \varepsilon_{22,n} = -\tilde{\nu}_{n} \cdot \varepsilon_{11,n}$$

जहाँ $\varepsilon^{tr}_{22,n}$, ε_{22} की परीक्षण विकृति है।

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n}\left(\frac{E}{B^c_{11,n}} \cdot \varepsilon_n\right) = \frac{E}{B^c_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \frac{1}{(B^c_{11,n})^2} \cdot \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial \varepsilon_n}$$

जहाँ,

$$\frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial D_{2,n}} \cdot \frac{\partial D_{2,n}}{\partial \varepsilon_n}$$
$$C_1 = \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial D_{2,n}} = \frac{2(1+\nu)}{9(1-D_{2,n})^2}$$
$$C_2 = \frac{\partial D_{2,n}}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n}\left(a \cdot A\left(\texttt{atan}\left(\frac{-\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \varepsilon_{11,n}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right)\right)$$
$$= -\tilde{\nu}_{n-1}\frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{-\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \varepsilon_{11,n}}{a}\right)^2}$$

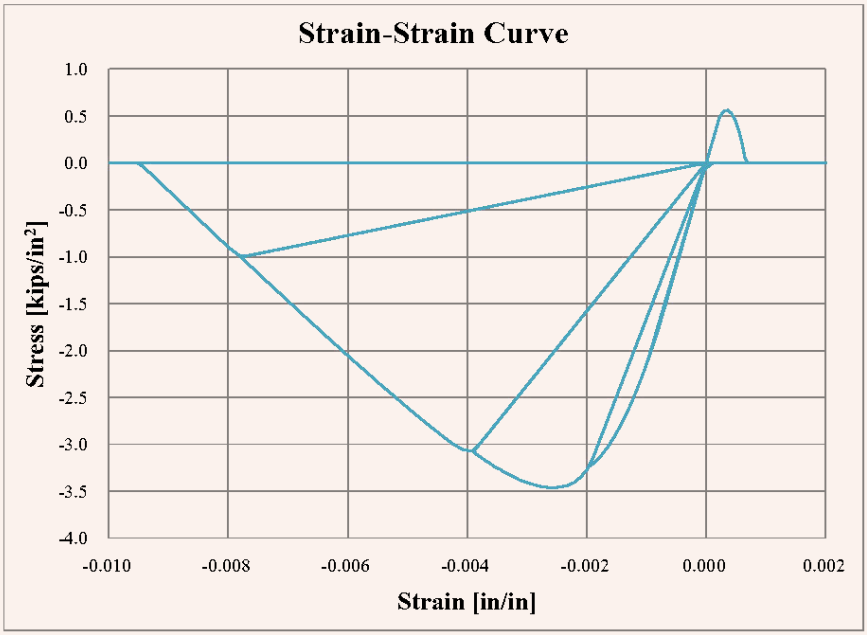
अंततः स्पर्शरेखीय मापांक प्राप्त होता है:

$$E^{tan}_n = \frac{E}{B^c_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{1}{(B^c_{11,n})^2} \cdot C_1 \cdot C_2$$

[72] चित्र 62.20 स्थायी विकृति-विहीन विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप में विकृति और प्रतिबल के बीच संबंध दर्शाता है।

[73] चित्र 62.21 से 62.23 एकाक्षीय प्रतिबल σ और स्पर्शरेखीय मापांक E^{tan} को एकाक्षीय विकृति ε से प्राप्त करने की प्रक्रिया दर्शाते हैं।

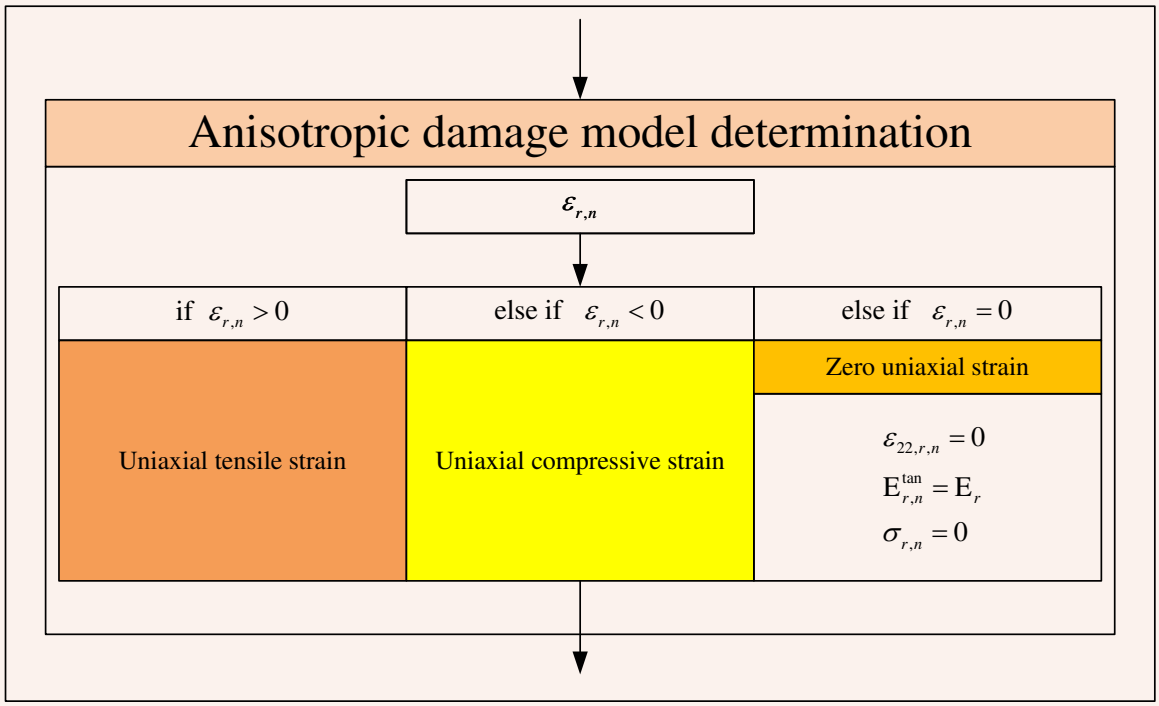
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.20: स्थायी विकृति-विहीन विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का विकृति–प्रतिबल वक्र

प्रारूप

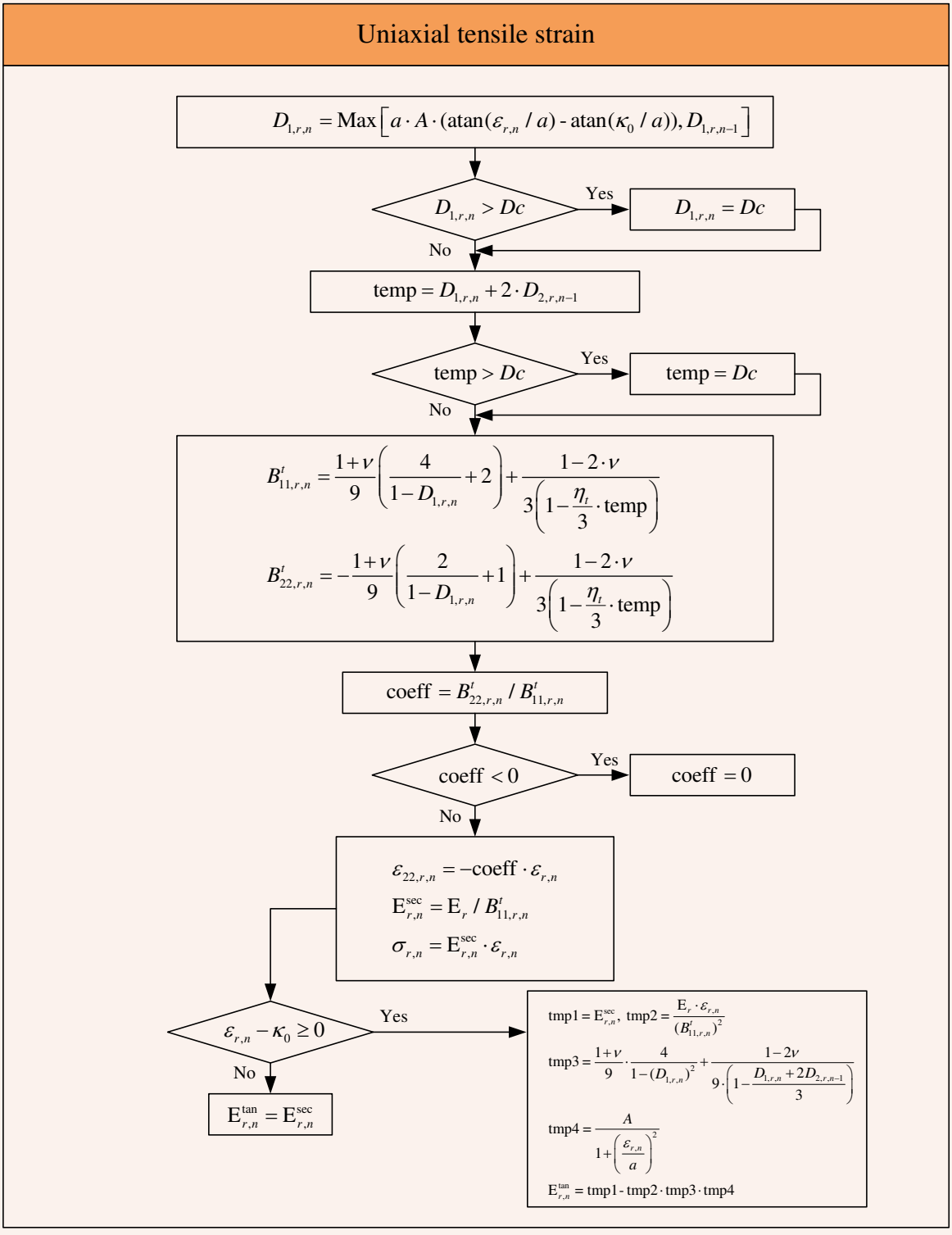
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.21: विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण (1)

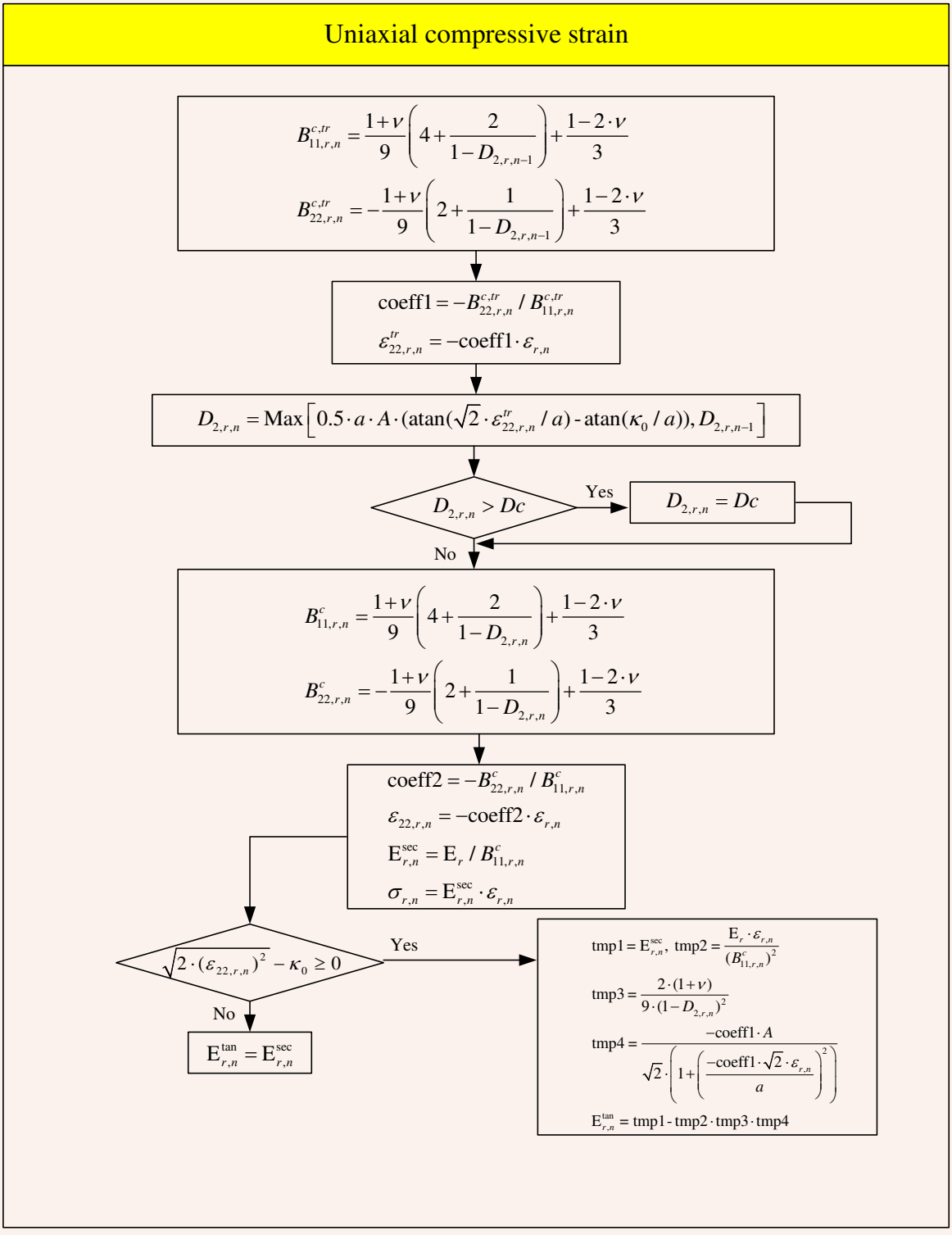
प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.22: विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण (2)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.23: विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का निर्धारण (3)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.2.3.4 प्रभावी क्षति, दृढता पुनर्प्राप्ति और स्थायी विकृतियों ε_{an} सहित विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप

पूर्ववर्ती विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप में स्थायी विरूपण सम्मिलित नहीं थे। प्रतिरूप का निम्न विस्तार इस सीमा का समाधान करता है। यह प्रतिरूप विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप ψ_e^* पर आधारित है, जिसे पूर्व में ψ^* से निरूपित किया गया था।

$$\rho\psi^* = \rho\psi_e^* + \rho\psi_{an}^*$$

प्रतिरूप के क्षतिग्रस्त भाग के लिए संपीडन में प्रत्यास्थ प्रतिपुष्टि को सम्मिलित करने हेतु दृढीकरण फलन संशोधित किया जाता है:

$$\kappa\left(d_\varepsilon\right) = \frac{d_\varepsilon}{A} + \kappa_0$$

जहाँ A और κ_0 पदार्थ पर निर्भर दो प्राचल हैं। क्षति निकष कुल विकृतियों के स्थान पर प्रत्यास्थ विकृतियों पर निर्भर करेगा:

$$f = \hat{\varepsilon_{el}} - \kappa\left(d_\varepsilon\right)$$

प्रतिरूप का अप्रत्यास्थ भाग है:

$$\rho\psi_{an}^* = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{an}$$

यह कुल विकृति को प्रत्यास्थ और स्थायी घटकों में विभाजित करने के अनुरूप है।

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial\rho\psi^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\rho\psi_e^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial\rho\psi_{an}^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{an}$$

स्थायी विकृतियों का विकास निम्न समीकरणों से व्युत्पन्न होता है:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{an} = g_D\left(d_\varepsilon\right)\ \dot{\boldsymbol{D}}^D + g_H\left(d_\varepsilon\right)\ \dot{d}_\varepsilon\ \boldsymbol{Id}$$

जहाँ $g_D\left(d_\varepsilon\right)$ और $g_H\left(d_\varepsilon\right)$ सक्रिय क्षति पर निर्भर दो फलन हैं, जो तनन/संपीडन की विषमता को निरूपित करते हैं। यहाँ दो सतत द्विरैखिक फलन प्रस्तावित हैं:

$$\begin{array}{rrcrrcl} \text{if } d_\varepsilon < 1 & g_D\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_D}{K_D} d_\varepsilon & \text{else} & g_D\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_D}{K_D} + k_D\left(d_\varepsilon - 1\right) \\ & g_H\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_H}{K_H} d_\varepsilon & & g_H\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_H}{K_H} + k_H\left(d_\varepsilon - 1\right) \end{array}$$

62.2.3.4.1 एकाक्षीय संख्यात्मक योजना

74 भारण अवस्था प्रत्यास्थ विकृति के चिह्न से परिभाषित होती है। अतः काल-चरण n पर भारण अवस्था निर्धारित करने हेतु विकृति-वृद्धि $\Delta\varepsilon$ की तुलना काल-चरण $n-1$ की प्रत्यास्थ विकृति से की जाती है:

75 यदि $\varepsilon_{n-1}^e < 0$ और $\Delta\varepsilon < -\varepsilon_{n-1}^e$ हों, तो भारण अवस्था संपीडन में रहती है; अन्यथा तनन में परिवर्तित हो जाती है।

76 यदि $\varepsilon_{n-1}^e > 0$ और $\Delta\varepsilon < -\varepsilon_{n-1}^e$ हों, तो भारण अवस्था तनन में रहती है; अन्यथा संपीडन में परिवर्तित हो जाती है।

तनन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- प्रत्यास्थ पूर्वानुमान: $\varepsilon^{e}_{1,n} = \varepsilon^{e}_{1,n-1} + \Delta\varepsilon_1$
- क्षति निकष परीक्षण: f
  - यदि $f < 0$ हो, तो प्रत्यास्थ व्यवहार:

$$
\begin{aligned}
D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\
D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\
\varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} \\
\varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1}
\end{aligned}
$$

  - अन्यथा, क्षतिकारक व्यवहार:

$$
\begin{aligned}
D_{1,n} &= A\left(\varepsilon^{e}_{1,n} - \kappa_0\right) \\
D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\
\varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} + \left(\frac{2k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n} \\
\varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} + \left(\frac{-k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n}
\end{aligned}
$$

- σ और $\varepsilon^{e}_{2,n}$ की गणना:

$$
\begin{aligned}
B_{1,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{4}{1 - D_{1,n}} + 2\right) + \frac{1 - 2\nu}{3 \cdot \left(1 - \frac{(D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})}{3}\right)} \\
B_{2,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{2}{1 - D_{1,n}} + 1\right) + \frac{1 - 2\nu}{3 \cdot \left[1 - \frac{\eta_t}{3} \cdot (D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})\right]} \\
\sigma_n &= \frac{E}{B_{1,n}} \varepsilon^{e}_{n} \\
\varepsilon^{e}_{2,n} &= \frac{B_{2,n}}{B_{1,n}} \varepsilon^{e}_{1,n}
\end{aligned}
$$

संपीडन

- प्रत्यास्थ पूर्वानुमान: $\varepsilon^{e}_{1,n} = \varepsilon^{e}_{1,n-1} + \Delta\varepsilon_1$
- क्षति निकष परीक्षण: f

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- यदि $f < 0$ हो, तो प्रत्यास्थ व्यवहार:

$$\begin{aligned} D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\ D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} \end{aligned}$$

- अन्यथा, क्षतिकारक व्यवहार:
स्थायी विकृति के विकास का आकलन करना आवश्यक है:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{an}_{1,n} &= \gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right) * d_{\varepsilon 2,n} \\ \dot{\varepsilon}^{an}_{1,n} &= 2\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right) * \left(D_{2,n} - D_{2,n-1}\right) \end{aligned}$$

क्षति विकास अब इस प्रकार होता है:

$$D_{2,n} = \frac{A\left(-\sqrt{2}\tilde{nu}_{n-1}\left(\varepsilon - \varepsilon^{an}_{1,n-1} - \dot{\varepsilon}^{an}_{1,n}\right) - \kappa_0\right)}{2}$$

$$D_{2,n} = \frac{A\left(-\sqrt{2}\tilde{nu}_{n-1}\left(\varepsilon - \varepsilon^{an}_{1,n-1} + 2\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right) D_{2,n-1} - \kappa_0\right)\right)}{2\left(\sqrt{2}A\tilde{nu}_{n-1}\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right)\right)}$$

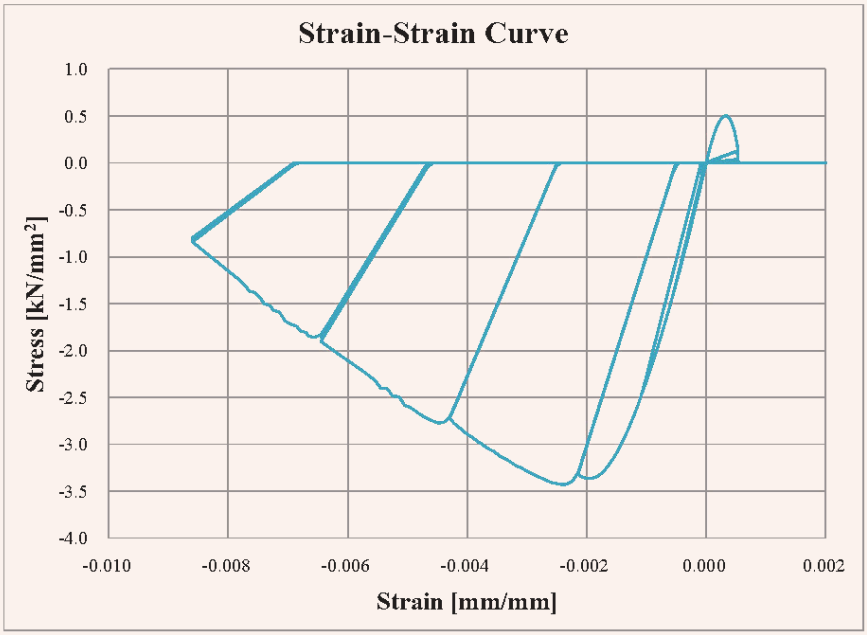
$$\begin{aligned} {\varepsilon^{e}_{2,n}}^{trial} &= \frac{B_{2,n-1}}{B_{1,n-1}}\varepsilon^{e}_{1,n} \\ D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\ \varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} + \left(\frac{-2k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n} \\ \varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} + \left(\frac{k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n} \end{aligned}$$

- σ और $\varepsilon^{e}_{2,n}$ की गणना:

$$\begin{aligned} B_{1,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(4 + \frac{2}{1 - D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B_{2,n} &= -\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(2 + \frac{1}{1 - D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ \sigma_n &= \frac{E}{B_{1,n}}\varepsilon^{e}_{n} \\ \varepsilon^{e}_{2,n} &= \frac{B_{2,n}}{B_{1,n}}\varepsilon^{e}_{1,n} \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चित्र 62.24 स्थायी विकृति सहित विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप में विकृति और प्रतिबल के बीच संबंध दर्शाता है।



चित्र 62.24: स्थायी विकृति सहित विषमदैशिक क्षति प्रतिरूप का विकृति–प्रतिबल वक्र

62.2.4 बंध–फिसलन

77 जब प्रबलन की अपर्याप्त विकास-लंबाई प्रदान की जाती है, तो प्रबलन छड़ और कंक्रीट के बीच बंध–फिसलन होती है। इसे चित्र 62.25 में दर्शाया गया है।

78 यदि नींव अथवा धरन–स्तंभ जोड़ के भीतर विकास-लंबाई में छड़ों के अनुदिश एकसमान बंध प्रतिबल u_b माना जाए, तो स्तंभ के निकट अनुदैर्ध्य प्रबलन छड़ और लंगरण के कारण फिसलन सरलता से निर्धारित की जा सकती है।

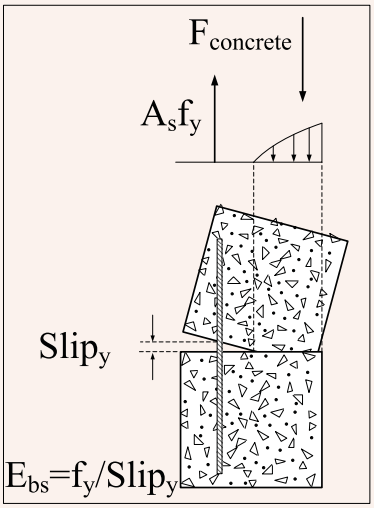
79 संतुलन से,

$$u_b(\pi d_b)l_d = \frac{\pi d_b^2}{4} f_s$$

जहाँ d_b छड़ का व्यास और l_d वह विकास-लंबाई है जिस पर फिसलन होती है। l_d के लिए हल करने पर,

$$l_d = \frac{d_b f_s}{4u_b}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.25: फिसलन प्रतिरूप

80 यह मानते हुए कि अधिकतम विकृति स्तंभ के सिरे पर होती है और विकास-लंबाई के अनुदिश विकृति का परिवर्तन रैखिक है, विकृति वक्र का समाकल पादिका–स्तंभ अथवा धरन–स्तंभ अंतराफलक पर कुल छड-फिसलन देता है:

$$S = \frac{\varepsilon_s l_d}{2} = \frac{f_s l_d}{2E_s}$$

प्रतिस्थापन करने पर,

$$S = \frac{\varepsilon_s d_b f_s}{8u_b}$$

81 यह मानते हुए कि फिसलन होने पर अनुप्रस्थ परिच्छेद अपने उदासीन अक्ष के परितः घूमता है ($\phi_y = \varepsilon_y/(d-c)$), स्तंभ आधार से L दूरी पर किसी बिंदु पर छड-फिसलन से संबद्ध विस्थापन होगा:

$$\Delta_{slip} = \frac{\phi_y d_b f_y L}{8u_b}$$

82 वास्तविक इस्पात प्रतिबल के रूप में बंध प्रतिबल का एक सरलीकृत प्रतिरूप इस्पात पराभव से पूर्व अचर बंध प्रतिबल $u_e = 12\sqrt{f_c'}$ तथा पराभव के बाद अन्य अचर बंध प्रतिबल $u_p = 6\sqrt{f_c'}$ मानता है:

$$u_e = 12\sqrt{f_c'} \qquad \text{prior to steel yielding}$$
$$u_p = 6\sqrt{f_c'} \qquad \text{past steel yielding}$$

83 इस धारणा के आधार पर लंगरण के किनारे की कुल छड-फिसलन S अंतःस्थापित लंबाई पर इस्पात विकृतियों के समाकलन से प्राप्त होती है।

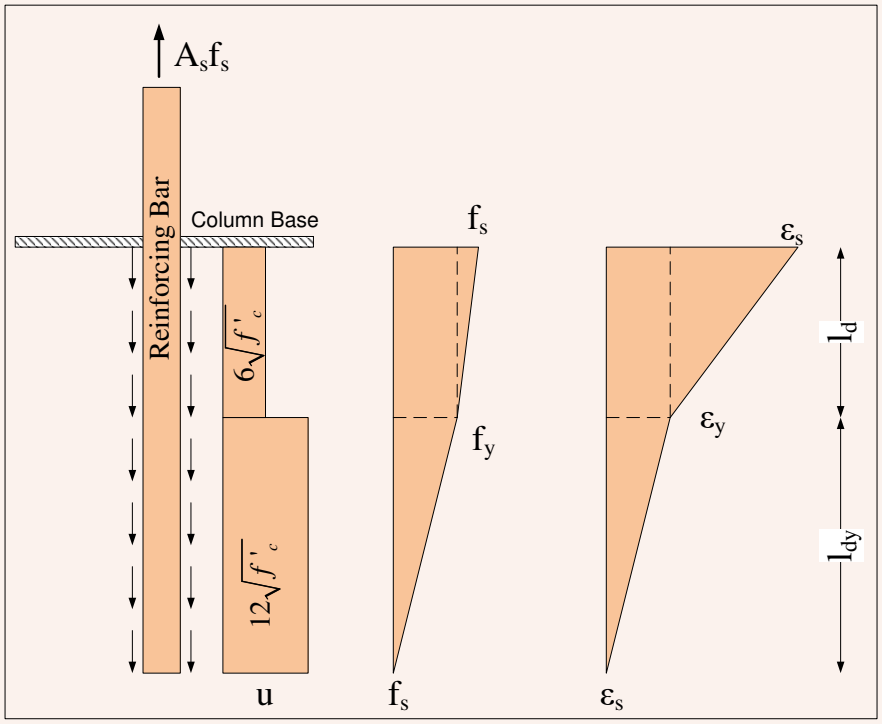
84 इस प्रतिरूप का प्रयोग स्तंभ आधार पर छड-फिसलन और छड-प्रतिबल के बीच एकदिष्ट संबंध प्राप्त करने हेतु किया गया।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

85 पर्याप्त लंगरण मानने पर:

$$S_1 = \frac{\varepsilon_s f_s}{8u_e} d_b;\ \varepsilon_s \le \varepsilon_y;\ S_2 = \frac{\varepsilon_y f_y}{8u_e} d_b + \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_y)(f_s - f_y)}{8u_p} d_b;\ \varepsilon_s > \varepsilon_y$$

जहाँ d_b छड का व्यास, u_e प्रत्यास्थ बंध प्रतिबल $= 12\sqrt{f'_c}$ (psi), और u_p सुघट्य बंध प्रतिबल $= 6\sqrt{f'_c}$ है। चित्र 62.27



चित्र 62.26: सरलीकृत बंध प्रतिरूप

62.2.5 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव

यह अनुभाग घन्नूम के प्रतिरूप का अनुकूलन है

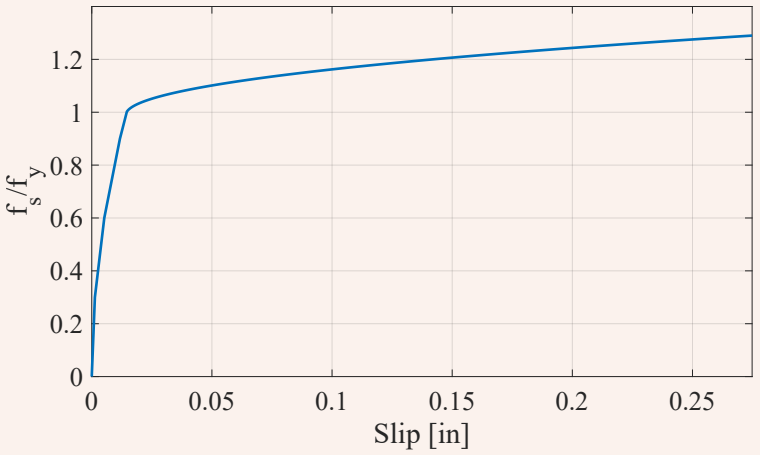
86 यदि कंक्रीट और प्रबलन छड के बीच बंध–फिसलन को ग्रहण करना हो, तो शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव का प्रयोग केवल तंतु अवयवों के साथ किया जाना चाहिए।

87 बंध प्रतिबल बनाम बंध–फिसलन की शिखरोत्तर अनुक्रिया अरैखिक है। इसे रैखिक करना और फिर u_p के लिए हल करना आवश्यक है; यह मान अरैखिक दृढीकरण खंड के लिए उपयुक्त पूर्वोक्त $6\sqrt{f'_c}$ से भिन्न होगा।

88 उद्देश्य है कि रैखिकीकृत खंड अरैखिक खंड को $1.25 f_y$ पर काटे; अतः

$$\varepsilon_u = \varepsilon_y + 0.25\frac{f_y}{E_s/h} = \frac{f_y}{E_s} + 0.25h\frac{f_y}{E_s} = 0.26h\varepsilon_y$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.27: बंध–फिसलन वक्र

जहाँ h दृढीकरण प्राचल है, जिसे 100 रखा गया है। निम्न में प्रतिस्थापन करने पर,

$$S_2 = \frac{\varepsilon_y f_y}{8u_e} d_b + \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_y)(f_s - f_y)}{8u_p} d_b;$$

प्राप्त होता है:

$$S_u = S_y + \frac{6.75\varepsilon_y f_y}{8u_p} d_b$$

[89] युक्तिसंगत रूप से माना जा सकता है कि

$$S_u = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_y} S_y = 26 S_y$$

प्रतिस्थापन करने पर प्राप्त होता है:

$$u_p = 3.24\sqrt{f_c'}$$

u_p का प्रयोग तथाकथित सीमा-अवस्था अवयवों में बंध–फिसलन जनित विफलता के आकलन हेतु किया जा सकता है।

[90] धरन–स्तंभ में प्रयुक्त इस्पात प्रतिरूप चाहे कोई भी हो, इस अवयव के लिए द्विरैखिक प्रतिरूप की अनुशंसा की जाती है। $h = 100$ सहित द्विरैखिक प्रतिरूप का प्रयोग ऐसे छड-फिसलन वक्र के तुल्य होगा जिसमें दूसरा खंड यथार्थ वक्र को $f_s = 1.25 f_y$ पर $u_p = 3.24\sqrt{f_c'}$ के साथ काटता है।

[91] इस्पात के द्विरैखिक प्रतिरूप में बंध–फिसलन को दर्शाने हेतु यंग मापांक को E_s के स्थान पर E_{bs} रखकर समायोजित करना चाहिए:

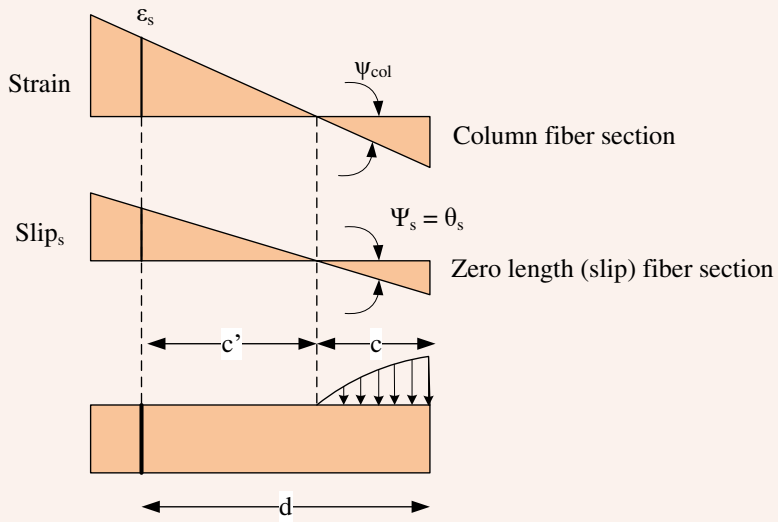
$$E_{bs} = \frac{f_y}{S_y}$$

[92] ध्यान दें कि इस धारणा में शून्य-लंबाई अवयव की इकाई लंबाई अंतर्निहित है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

93 अंततः, शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव के छड-फिसलन इस्पात और ढाँचा अवयव के अनुदैर्ध्य इस्पात के बीच समान पदार्थ-दृढता अनुपात बनाए रखने हेतु छड-फिसलन कंक्रीट पदार्थ की विकृतियों को E_s/E_{bs} से गुणा किया जाता है।

94 शून्य-लंबाई परिच्छेद अवयव के कंक्रीट गुण ऐसे रखे जाते हैं कि धरन–स्तंभ अवयव और शून्य-लंबाई तंतु परिच्छेद में उदासीन अक्ष का स्थान समान हो, चित्र 62.28। अतः,



चित्र 62.28: उदासीन अक्ष का स्थान

$$\left.\begin{aligned} \theta_s &= \frac{S_s}{c'} \\ \Psi_{col} &= \frac{\varepsilon_s}{c'} \end{aligned}\right\} \theta_s = \Psi_{col}\frac{S_s}{\varepsilon_s} \tag{62.22}$$

95 इसलिए शून्य-लंबाई परिच्छेद में सभी तंतु विकृतियों (इस्पात और कंक्रीट के अनुरूप) को $\frac{S_s}{\varepsilon_s}$ से मापित करना आवश्यक है।

96 पदार्थ निवेश आँकड़ों को निम्न प्रकार बदलकर इसे सरलता से प्राप्त किया जा सकता है:

- सभी प्रतिबल मान अपरिवर्तित रहते हैं,
- विकृतियों को $\frac{S_y}{\varepsilon_y}$ से मापित किया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.3 संकेंद्रित सुघट्यता

97 संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप पदार्थ के व्यवहार का सन्निकटन यह मानकर करता है कि सुघट्य विरूपण विशिष्ट क्षेत्रों में होता है, जिन्हें सुघट्य कब्जे अथवा सुघट्य क्षेत्र कहा जाता है[3]। ये सुघट्य क्षेत्र संरचना के विशिष्ट स्थानों पर संकेंद्रित होते हैं, सामान्यतः संयोजनों अथवा आलंबों के सिरों पर।

98 प्रतिरूप मानता है कि पदार्थ इन सुघट्य क्षेत्रों के भीतर सुघट्य घूर्णन से गुजरता है, जबकि संरचना का शेष भाग प्रत्यास्थ रहता है।

99 पराभव-रेखा सिद्धांतों (अध्याय 57) के साथ उल्लेखनीय समानता देखी जा सकती है। किंतु निम्न और उच्च सीमा प्रमेय अधिक व्यापक सिद्धांत हैं, जो संपूर्ण सुघट्य विश्लेषण को समाहित करते हैं; संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप एक बड़ी संरचना के भीतर विशिष्ट सन्निकटन तकनीक है। निम्न और उच्च सीमा प्रमेय सुघट्य विश्लेषण की महत्त्वपूर्ण सैद्धांतिक नींव प्रदान करते हैं, जबकि संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप सरलीकृत विश्लेषण और अभिकल्प हेतु व्यावहारिक अभियांत्रिक उपकरण देता है।

100 संकेंद्रित सुघट्यता में अरैखिक अनुक्रिया निम्न द्वारा नियंत्रित होती है:

1. आसंधि के समीप लंबाई L_p का अरैखिक खंड,
2. जोड़ पर स्थापित अरैखिक कमानियाँ।

इन दोनों पर पृथक-पृथक विचार किया जाएगा।

101 पहले यह ध्यान देना आवश्यक है कि L_p की व्युत्पत्ति सरल कार्य नहीं है। L_p की व्यापक और सुबोध व्युत्पत्ति के लिए पूर्व चर्चित अवधारणाओं—जैसे वक्रता और विक्षेप के बीच संबंध (§22.3.4)—का पुनरावलोकन आवश्यक है। इसके अतिरिक्त प्रबलित-कंक्रीट धरनों के प्रभावी जड़त्व आघूर्ण पर विचार करना पड़ता है, जो संभवतः इस ग्रंथ में न दिया गया हो, परंतु सामान्यतः प्रबलित कंक्रीट की मूल पाठ्यपुस्तकों में मिलता है। वक्रता–विक्षेप अवधारणा का पुनरावलोकन और प्रबलित-कंक्रीट धरनों के प्रभावी जड़त्व आघूर्ण का समावेश L_p की समुचित और सुबोध व्युत्पत्ति प्रदान करता है।

62.3.1 सुघट्य लंबाई

102 सुघट्य कब्जे की लंबाई सुघट्य विस्थापन को अत्यधिक प्रभावित करती है (§62.3.1.4.1); अतः इसे यथासंभव विश्वसनीय रूप से निर्धारित करना आवश्यक है।

103 सुघट्य लंबाई निर्धारण का क्रम निम्न होगा:

1. सुघट्य कब्जों के स्थान। अनेक संदर्भ व्याख्या हेतु ब्रैकट धरन लेते हैं; यहाँ अधिक यथार्थ रूप से दर्शाया जाएगा कि सुघट्य लंबाइयाँ कहाँ स्थित हैं और सरलतम संभव मुक्त-पिंड आरेख की संरचना में उन पर कैसे विचार किया जाता है।
2. वक्रता और विरूपण के बीच सैद्धांतिक संबंध।

[3]धातुओं में दरार के अग्रभाग के सुघट्य क्षेत्र अथवा कंक्रीट में दरार के चारों ओर विभंग प्रक्रिया क्षेत्र के साथ सादृश्य पर ध्यान दें।

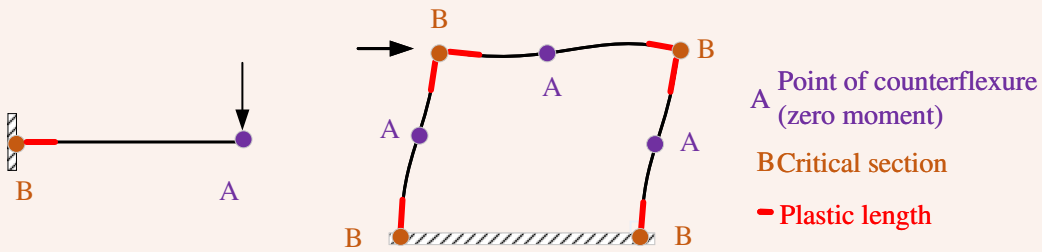
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. दरारित प्रबलित-कंक्रीट अवयवों का जडत्व आघूर्ण और संगत वक्रता।
4. सुघट्य लंबाइयों का निर्धारण।

इस व्यवस्थित क्रम का अनुसरण करके सुघट्य लंबाइयाँ विश्वसनीय रूप से निर्धारित की जा सकती हैं; ये संरचना के सुघट्य विस्थापन को अत्यधिक प्रभावित करती हैं (§62.3.1.4.1)।

62.3.1.1 सुघट्य कब्जों के संभावित स्थान

104 सुघट्य लंबाई L_p निर्धारित करने और संभावित सुघट्य कब्जों की पहचान हेतु दो बिंदुओं के बीच *प्रतिनिधि लंबाई* का मुक्त-पिंड आरेख बनाया जाता है: A, निकटवर्ती प्रति-वक्रता बिंदु (शून्य आघूर्ण अथवा मुक्त सिरा), और B, क्रांतिक परिच्छेद। आरेख चित्र 62.29 में दर्शाया गया है।



चित्र 62.29: सुघट्य क्षेत्रों की पहचान

62.3.1.2 वक्रता से विरूपण ($\Delta(\phi)$)

105 संरचना की तन्यता का पूर्वानुमान करने हेतु चरम आघूर्ण पहुँचने पर हुए विरूपण को निर्धारित करना आवश्यक है। इसके लिए चरम दशा में सदस्य के घूर्णन और विक्षेप को समझना पडता है। संरचना के भीतर वास्तविक वक्रता वितरण का विश्लेषण करके ये मान प्राप्त किए जा सकते हैं।

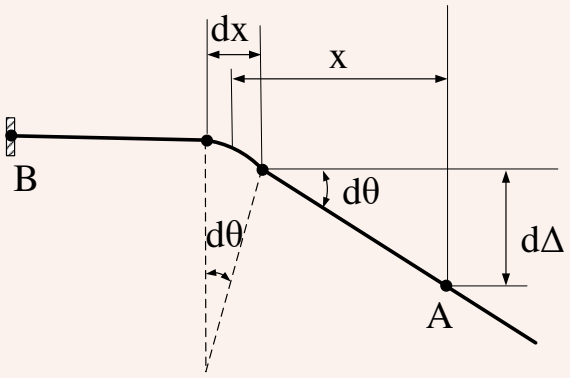
106 सदस्य की लंबाई के अनुदिश वक्रताओं का समाकलन करके उसके घूर्णन और विक्षेप निर्धारित किए जा सकते हैं। वक्रता (§22.3, समीकरण 22.7) को *किन्हीं दो बिंदुओं के बीच घूर्णन की दर* के रूप में परिभाषित किया जाता है:

$$\phi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

विभिन्न स्थानों की वक्रताओं पर विचार करके और उनका समाकलन करके सदस्य के घूर्णन और विक्षेप का परिमाण निर्धारित किया जा सकता है, जिससे चरम दशाओं में उसके व्यवहार की उपयोगी जानकारी मिलती है।

$$\theta(x) = \int_A^B \phi(x)dx$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.30: अवयव के आनमनी विरूपण का विक्षेप

जहाँ dx सदस्य की लंबाई का एक अवयव है। चित्र 62.30।

[107] चित्र 62.30 घूर्णन $d\theta$ के कारण लंबाई dx के अवयव पर केवल विरूपित ब्रैकट दर्शाता है। घूर्णन $d\theta$ है:

$$d\theta = \phi dx$$

जहाँ ϕ अवयव की वक्रता है। बिंदु A का अनुप्रस्थ विक्षेप $d\Delta$, आबद्ध सिरे B पर सदस्य-अक्ष की *स्पर्शरेखा से*, अवयव के सिरों के बीच घूर्णन $d\theta$ के कारण है:

$$d\Delta = x d\theta = x\phi dx$$

अतः इन बिंदुओं के बीच सदस्य की संपूर्ण लंबाई पर वक्रता के कारण बिंदु B पर सदस्य-अक्ष की स्पर्शरेखा से बिंदु A का अनुप्रस्थ विक्षेप होगा:

$$\Delta_{AB} = \int_A^B x\phi dx$$

[108] ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि ये समीकरण वक्रता–क्षेत्रफल प्रमेयों का सरल सामान्यीकरण निरूपित करते हैं। वे प्रत्यास्थ और सुघट्य, दोनों वक्रताओं पर लागू होते हैं और अवधारणा के व्यापक अनुप्रयोग की अनुमति देते हैं। इन समीकरणों से प्रत्यास्थ और सुघट्य, दोनों परिसरों में संरचना के व्यवहार का विश्लेषण किया जा सकता है। .

[109] किंतु यह उल्लेखनीय है कि यह उपागम *तनन-दृढीकरण* के प्रभाव की उपेक्षा करता है। तनन-दृढीकरण दरारों के बीच कंक्रीट द्वारा तनन वहन करने के कारण सदस्य की दृढता में वृद्धि को दर्शाता है। पूर्वोक्त समीकरणों में यह परिघटना सम्मिलित नहीं है। तनन-दृढीकरण संरचना के समग्र व्यवहार और अनुक्रिया पर उल्लेखनीय प्रभाव डाल सकता है; अतः उन्नत विश्लेषण और अभिकल्प में इस पर विचार करना महत्त्वपूर्ण है।

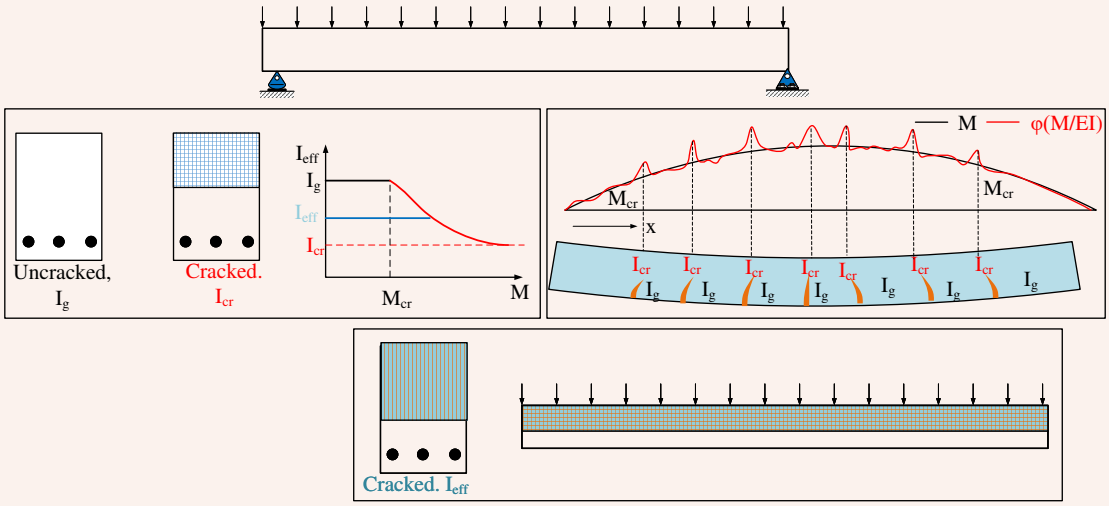
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.3.1.3 प्रबलित कंक्रीट का प्रभावी जड़त्व आघूर्ण और वक्रता

110 संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप को समझने हेतु प्रबलित-कंक्रीट धरन की वक्रता और प्रभावी जड़त्व आघूर्ण की संगत परिभाषा का गहन ज्ञान आवश्यक है।

111 चित्र 62.31 में दर्शाई गई एकसमान भारित, सरल आलंबित प्रबलित-कंक्रीट धरन के लिए एक महत्त्वपूर्ण प्रश्न उठता है: विक्षेप की गणना हेतु वास्तविक जड़त्व आघूर्ण I क्या है? इस संदर्भ में हमारा उद्देश्य वक्रता-वितरण निर्धारित करने से जुड़ी जटिलता को रेखांकित करना है।

112 प्रबलित-कंक्रीट धरन में वक्रता-वितरण निर्धारित करने में कंक्रीट और प्रबलन इस्पात का व्यवहार, दरार बनने का प्रभाव, तथा तनन और संपीडन क्षेत्रों की अंतःक्रिया जैसे अनेक कारक सम्मिलित होते हैं। ये कारक वक्रता-वितरण की गणना को जटिल बनाते हैं; संरचना के व्यवहार के यथार्थ विश्लेषण हेतु इस जटिलता की व्यापक समझ आवश्यक है।



चित्र 62.31: प्रबलित कंक्रीट में प्रभावी जड़त्व आघूर्ण

113 भारण से पूर्व धरन का अचर जड़त्व आघूर्ण सकल मान (अदरारित परिच्छेद पर आधारित) I_g होता है। भार क्रमशः लागू होने पर (परवलयिक) आघूर्ण आरेख $wL^2/8$ के शिखर मान तक बढ़ता है।

114 धरन के किसी स्थान पर आघूर्ण स्थानीय दरार-आघूर्ण तक पहुँचता और फिर उसे पार करता है (आघूर्ण बढ़ने पर उदासीन अक्ष ऊपर जाता है)। अंततः धरन में अनेक दरारें होंगी। उन स्थानों पर जड़त्व आघूर्ण I_{cr} तथा बीच के भागों में I_g होगा।

115 जड़त्व आघूर्ण का परिवर्तन सुचारु परवलयिक आघूर्ण आरेख $M(x)$ को अनियमित वक्रता-वितरण ($\phi(x) = M(x)/EI(x)$) में बदल देता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

116 विक्षेप के लिए एक "तुल्य" जडत्व आघूर्ण आवश्यक है। Branson et al., 1963 के मूल प्रस्ताव के आधार पर ACI निम्न भारित औसत अभिव्यक्ति की अनुशंसा करता है[4]: $I \to I_{\text{eff}}$

$$I_{\text{eff}} = \left(\frac{M_{\text{cr}}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{\text{cr}}}{M_a}\right)^3\right] I_{\text{cr}} \qquad \textbf{(ACI 9.5.2.3)}$$

जहाँ,

$$I_{\text{eff}} \le I_g$$
$$M_{\text{cr}} = f_r' \frac{I_g}{y_b}$$
$$f_r' = 7.5\sqrt{f_c'}$$

और M_a उस अवस्था का अधिकतम (सेवा) आघूर्ण है जिसमें विक्षेप की गणना की जाती है।

117 विक्षेप का मूल्यांकन एक अरैखिक समस्या है, क्योंकि $w \nearrow M \nearrow \frac{M_{\text{cr}}}{M_a} \searrow I_{\text{eff}} \searrow$ और सतत धरन के लिए,

$$\Delta = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI} \begin{cases} w \nearrow & \Delta \nearrow \\ I \searrow & \Delta \nearrow \end{cases}$$

किंतु प्रायः इस अरैखिकता की उपेक्षा कर दी जाती है।

62.3.1.4 सुघट्य कब्जा लंबाइयों के रूप में विरूपण

62.3.1.4.1 प्रबलित कंक्रीट

118 जैसा पहले उल्लेख किया गया, भारण के अधीन प्रबलित-कंक्रीट अवयवों में अनेक दरारें विकसित होती हैं। दरारित परिच्छेद की घटी हुई दृढता को सम्मिलित करने हेतु प्रभावी जडत्व आघूर्ण प्रस्तुत करना आवश्यक होता है।

119 जब प्रबलित-कंक्रीट संरचना गुरुत्व अथवा पार्श्व बलों के अतिभार के कारण अप्रत्यास्थ आनमनी विरूपण अनुभव करती है, तो ये विरूपण सामान्यतः परिमित कब्जा लंबाई में संकेंद्रित होते हैं। अर्थात् सुघट्य विरूपण और आघूर्णों का संबद्ध पुनर्वितरण इसी कब्जा क्षेत्र में स्थानीयकृत रहता है।

120 संरचनात्मक विश्लेषण में सुघट्य कब्जे का समावेश *आघूर्ण पुनर्वितरण* की अनुमति देकर महत्त्वपूर्ण लाभ प्रदान करता है। यह पुनर्वितरण संरचना के सामर्थ्य को प्रत्यास्थ सिद्धांत के पूर्वानुमान से बहुत आगे बढा सकता है।

121 अतः L_p पर आधारित विरूपण-अभिव्यक्तियाँ निर्धारित करनी हैं।

122 घूर्णन और विक्षेप में प्रत्यास्थ योगदान सरलता से गणित किया जा सकता है। दूसरी ओर सुघट्य कब्जा दरारों की उपस्थिति, दरारों के बीच कंक्रीट द्वारा वहन किए गए तनन के कारण सदस्य की दृढता में वृद्धि, तथा प्रबलन की बंध–फिसलन से उत्पन्न अतिरिक्त विरूपण को सम्मिलित करता है।

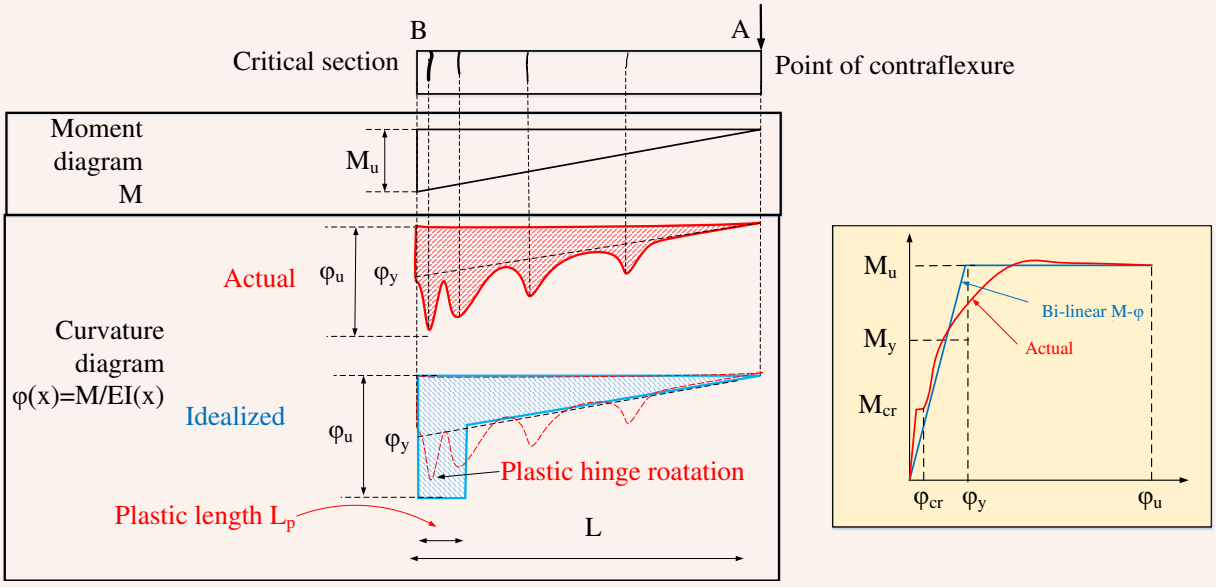
[4]इस समीकरण का इस ग्रंथ में उपयोग नहीं होगा। इसका समावेश केवल प्रबलित कंक्रीट विषय के साथ संबंध स्थापित करने हेतु है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

123 व्यवहार में वास्तविक वक्रता वक्र का यथार्थ निर्धारण लगभग असंभव होने के कारण उसका द्विरैखिक (प्रत्यास्थ–सुघट्य अथवा प्रत्यास्थ–दृढीकरण) प्रतिरूप द्वारा सन्निकटन सामान्य है। यह आदर्शीकरण वक्रता-वितरण को दो विशिष्ट क्षेत्रों द्वारा निरूपित करके विश्लेषण सरल बनाता है।

124 चित्र 62.32 के अनुसार द्विरैखिक सन्निकटन बिंदु A (नति-परिवर्तन बिंदु) और B द्वारा परिभाषित है, जहाँ चरम वक्रता (अथवा कोणीय परिच्छेद) प्राप्त हुई है। प्रतिरूप बिंदु A तक वक्रता में रैखिक वृद्धि और उसके बाद बिंदु B तक अचर वक्रता मानता है।

125 सदस्य के अनुदिश वक्रता-वितरण चित्र में दर्शाया गया है। ध्यान दें कि जडत्व आघूर्ण का परिवर्तन (चित्र 62.31) वक्रता में उतार-चढाव उत्पन्न करेगा। वक्रता का प्रत्येक शिखर सदस्य की संगत दरार के अनुरूप है।



चित्र 62.32: सुघट्य लंबाइयों का स्थान (Park and Paulay, 1991)

126 आघूर्ण आरेख (M) रैखिक है, किंतु वक्रता आरेख ($\phi = \frac{M}{EI}$) रैखिक नहीं है। यह अरैखिकता परिवर्ती जडत्व आघूर्ण से उत्पन्न होती है, जिसे संरचना की दरारें प्रभावित कर सकती हैं। दरारों से संबद्ध जडत्व आघूर्ण में कमी के कारण वक्रता आरेख दरार स्थानों पर बढी हुई वक्रता दर्शाता है।

127 विश्लेषण में ϕ_y और ϕ_u के अनुरूप दो विशिष्ट बिंदु पहचाने जाएँगे। इन दोनों बिंदुओं के बीच ($\phi_y < \phi < \phi_u$) अप्रत्यास्थ घूर्णन का स्थानीयकृत क्षेत्र होगा, जो सुघट्य कब्जे का निर्माण करता है। यह अप्रत्यास्थ घूर्णन संरचना में सुघट्य विरूपण के विकास में योगदान देता है।

128 विश्लेषण सरल बनाने हेतु एक *तुल्य सुघट्य कब्जा* परिभाषित किया जाता है, जिसके अनुदिश सुघट्य वक्रता अचर मानी जाती है। यह सरलीकरण विश्लेषण की जटिलता घटाते हुए सुघट्य विरूपण के आवश्यक व्यवहार को ग्रहण करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

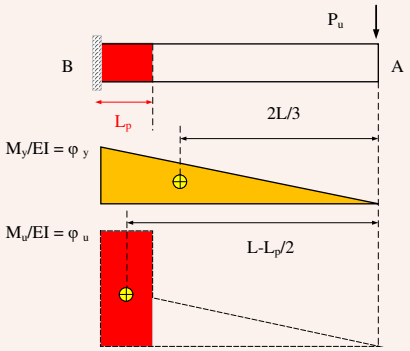
129 घूर्णन θ इस प्रकार दिया जाता है:

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx = \begin{cases} \theta_e &= \displaystyle\int_A^B \frac{M}{EI} dx & \text{Elastic rotation} \\ \theta_p &= (\phi_u - \phi_y) L_p & \text{Inelastic rotation} \end{cases} \tag{62.23}$$

130 यदि A पर बाह्य भार बिंदु भार हो, तो θ_{AB} प्रथम आघूर्ण–वक्रता प्रमेय से दिया जाता है[5]।

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx = \underbrace{\phi_y \frac{L}{2}}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(\phi_u - \phi_y) L_p}_{\text{Plastic}}$$

131 A और B के बीच विस्थापन, चित्र 62.33, द्वितीय आघूर्ण–वक्रता प्रमेय से दिया जाता है[6]।



चित्र 62.33: संकेंद्रित सुघट्यता धारणा सहित प्रबलित-कंक्रीट ब्रैकट धरन का अग्र-विस्थापन

$$\begin{aligned} \Delta_{AB}^u &= \int_A^B x \phi_{AB} dx \\ &= \underbrace{\left(\frac{\phi_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(\phi_u - \phi_y) L_p \left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}} \end{aligned} \tag{62.24}$$

[5]किसी भारित आनमनी सदस्य के किन्हीं दो परिच्छेदों के बीच ढाल का अंतर उन दोनों बिंदुओं के बीच M/EI आरेख के क्षेत्रफल के बराबर होता है (समीकरण 22.16)।

[6]भारित आनमनी सदस्य पर बिंदु 2 का, बिंदु 1 पर विक्षेप वक्र की स्पर्शरेखा से स्पर्शरेखीय विचलन (t_{21}), 1 और 2 के बीच वक्रता आरेख के क्षेत्रफल के बिंदु 2 के परितः आघूर्ण के बराबर होता है (समीकरण 22.3.4.3)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ x, dx की A से दूरी है। ध्यान दें कि प्रत्यास्थ घटक में पद प्रतिस्थापित करने पर परिचित $PL^3/3EI$ पुनः प्राप्त होगा[7]। अथवा,

$$\Delta^u_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{M_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(M_u - M_y)L_p\left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right] \tag{62.25}$$

132 सुघट्य लंबाई निर्धारित करने हेतु ब्रैकट धरनों पर परीक्षण आवश्यक हैं[8]। इन परीक्षणों में बल–विस्थापन और आघूर्ण–वक्रता संबंध मापे जाते हैं। परीक्षण परिणामों से द्विरैखिक प्रत्यास्थ पूर्णतः-सुघट्य प्रतिरूप व्युत्पन्न किया जा सकता है। इस प्रक्रिया को *अंशांकन* कहते हैं।

133 प्रक्रिया में परीक्षण परिणामों के आधार पर तुल्य द्विरैखिक वक्र बनाया जाता है। मूल वक्र (बल–विस्थापन अथवा आघूर्ण–वक्रता) के नीचे का क्षेत्रफल गणित किया जाता है और वक्र की प्रारंभिक ढाल वाली रेखा मूलबिंदु से खींची जाती है। फिर ऐसी क्षैतिज रेखा खींची जाती है कि दोनों रेखाओं के नीचे का क्षेत्रफल मूल वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के बराबर हो। दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु पराभव विस्थापन/वक्रता दर्शाता है, जबकि अप्रत्यास्थ परिसर का अधिकतम मान चरम मान माना जाता है।

134 समीकरण 62.24 का प्रयोग करके परीक्षण से प्राप्त पराभव विस्थापन/वक्रता और चरम वि-स्थापन/वक्रता के आधार पर सुघट्य लंबाई L_p के लिए हल किया जा सकता है।

135 L_p का समस्या-विशिष्ट अंशांकन उपलब्ध न होने पर आनुभविक समीकरणों पर निर्भर होना आवश्यक है। ये समीकरण संरचना के अभिलक्षणों और विशिष्ट भारण दशाओं के आधार पर सुघट्य लंबाई का आकलन देते हैं।

अपरिरोधित कंक्रीट ऐसा एक समीकरण (Baker, 1956) का सामान्यतः प्रयुक्त प्रतिरूप है, जिसे बाद में Institution of Civil Engineers ने अपनाया (Bate et al., 1962):

$$L_p = k_1 k_2 k_3 \left(\frac{Z}{d}\right)^{0.25} c$$

जहाँ,

$$k_1 = \begin{cases} 0.7 & \text{for mild steel} \\ 0.9 & \text{for cold worked steel} \end{cases}$$

$$k2 = 1 + 0.5\frac{P}{P_u}$$

$$k_3 = 0.9 - \frac{0.3}{23.5}(f'_c - 11.7)$$

[7] ϕ_y को ϕ से बदलें; तब $\Delta^{el} = \left(\frac{\phi_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(\frac{ML}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(\frac{PL^2}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{PL^3}{3EI}$।

[8] स्मरण रहे कि यह सरलीकृत संरचना क्रांतिक परिच्छेद और प्रति-वक्रता बिंदु के बीच अवयव-खंड का केवल प्रतिनिधित्व करती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$f'c$ = 0.85 x कंक्रीट घन सामर्थ्य माना गया है, जहाँ f'_c MPa में है
z क्रांतिक परिच्छेद से प्रति-वक्रता बिंदु तक दूरी
P सदस्य पर अक्षीय भार
P_u आघूर्ण अनुपस्थित होने पर अक्षीय भार के अधीन सदस्य की चरम क्षमता।

परिरोधित (Baker and Amarakone, 1964) पर आधारित:

$$L_p = 0.8 k_1 k_3 \frac{z}{d} c$$

जहाँ c पतन पर उदासीन अक्ष की गहराई है।

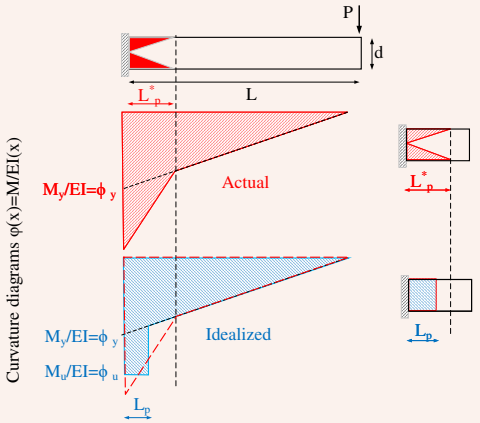
62.3.1.4.2 इस्पात

136 इस्पात के लिए, $M_y = SF_y$ और $M_u = ZF_u$ स्मरण रखते हुए, समीकरण 62.25 को इस प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है:

$$\Delta^u_{AB} = \frac{F_y}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{S}{2}L\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(Z-S)(L_p)\left(L-\frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right] \tag{62.26}$$

137 अभी सुघट्य लंबाई L_p निर्धारित करनी है। इसके लिए माना जाता है कि सुघट्यता के प्रसार का रैखिक सन्निकटन किया जा सकता है, जैसा चित्र 62.34 में दर्शाया गया है। पूर्णतः सुघटीकृत परिच्छेद की तुल्य लंबाई ज्ञात करने हेतु सुघट्यता प्रसार दर्शाने वाले दोनों त्रिभुजीय क्षेत्रों के नीचे के क्षेत्रफल पर विचार किया जाता है। समान क्षेत्रफल वाली तुल्य लंबाई से प्रभावी सुघट्य लंबाई स्थापित की जा सकती है।

138 यह उपागम तुल्य लंबाई वाले संकेंद्रित सुघट्य क्षेत्र पर विचार करके विश्लेषण सरल बनाता है। यद्यपि यह सन्निकटन है, विशिष्ट संरचना के लिए विस्तृत विश्लेषणात्मक हल अथवा आनुभविक आँकड़े न होने पर सुघट्य लंबाई के आकलन की व्यावहारिक और संभव विधि देता है।



चित्र 62.34: संकेंद्रित सुघट्यता धारणा सहित इस्पात ब्रैकट धरन का अग्र-विस्थापन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

139 समरूप त्रिभुजों से,

$$L_p^* = L\left(\frac{M_p - M_y}{M_p}\right) = L\left(1 - \frac{M_y}{M_p}\right)$$

किंतु,

$$\frac{M_y}{M_p} = \frac{S}{Z}$$

अतः,

$$L_p^* = L\left(1 - \frac{S}{Z}\right)$$

140 सुघटीकरण का परिवर्तन रैखिक माना गया है। सरलीकरण हेतु पूर्ववर्ती क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल वाली तुल्य सुघट्य लंबाई L_p निर्धारित की जाती है:

$$2\left(\frac{1}{2}\frac{d}{2}L_p^*\right) = L_p d \Rightarrow L_p = \frac{L_p^*}{2} = \frac{S - Z}{2S}L$$

141 सुघट्य कब्जे की वास्तविक लंबाई L_p और L_p^* के बीच होनी चाहिए।

142 विस्थापन के लिए समीकरण 62.26 पर पुनः विचार करते हैं।

62.3.1.5 उदाहरण 62.1: इस्पात स्तंभ में सुघट्य कब्जा

यदि 12 ft (144 in) लंबा ब्रैकट स्तंभ लिया जाए, जिसका परिच्छेद W14×90 तथा परिच्छेद गुण $S = 143$ in^3, $Z = 157$ in^3, $F_y 36$ ksi, $E = 29,000$ ksi और $I = 999$ in^4 हैं, तो अभिलाक्षणिक लंबाई होगी:

$$\begin{aligned} L_p &= \frac{S - Z}{2S}L \\ &= \frac{157 - 143}{2 \times 143}(144) = 0.049 \times 12 \times 7.0 \quad \text{inch} \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विस्थापन समीकरण 62.26 से प्राप्त होता है:

$$\Delta^u_{AB} = \frac{F_y}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{S}{2}L\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(Z-S)(L_p)\left(L-\frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right]$$

$$= \frac{36}{29,000\times 999}\left[\underbrace{\left(\frac{143}{2}(144)\right)\left(\frac{2\times 144}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(157-143)(7)\left(2\times 144-\frac{7}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right]$$

$$= \underbrace{1.23"}_{\text{Elastic}} + \underbrace{0.017"}_{\text{Plastic}}$$

हम्म, यह सही नहीं दिखता; समीकरणों की तीन बार जाँच करें! अंततः विस्थापन तन्यता होगी:

$$\mu = \frac{\Delta^{(el)} + \Delta^{(pl)}}{\Delta^{(el)}} = \frac{1.23 + 0.017}{1.23} = 1.014$$

62.3.2 अपरूपण विफलता मॉडल (सीमा-अवस्था सामग्री)

एम.एस. शोधप्रबंध “Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code”, Segura, 2011 द्वारा, से।

62.3.2.1 परिचय

143 संकेंद्रित सुघट्यता मॉडल में केवल आनमनी सामर्थ्य ह्रास सम्मिलित है और अपरूपण तथा अक्षीय स्प्रिंगों को दृढ रैखिक प्रत्यास्थ सामग्री-गुण दिए गए हैं। अतः मॉडल अपरूपण और अक्षीय विफलता-विधाओं को निरूपित नहीं करता, यद्यपि अपरूपण अथवा अक्षीय सामर्थ्य-हानि के अधीन संरचनात्मक अनुक्रिया की गंभीरता के कारण उनके प्रभाव अत्यंत महत्त्वपूर्ण हैं। वास्तव में, स्तंभ की अपरूपण विफलता सबसे गंभीर विफलता-विधा है; परिच्छेदीय अपरूपण प्रतिरोध घटने से यह शीघ्र ही अक्षीय भार-वहन क्षमता की हानि उत्पन्न करती है।

144 संरचनात्मक विफलता के आरंभ का पूर्वानुमान करने में सक्षम संगणकीय साधन निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (अध्याय 72) (PBEE) के अभियंताओं के लिए अत्यंत महत्त्वपूर्ण है। यह विशेषतः तब सत्य है जब अपरूपण और अक्षीय विफलता के कारण पुरानी प्रबलित-कंक्रीट संरचनाओं की पतन-संवेदनशीलता पर विचार किया जाए। ये संरचनाएँ पतन के प्रति विशेष रूप से संवेदनशील हैं, क्योंकि उनका अल्प अनुप्रस्थ प्रबलन अनुप्रस्थ भारण के अधीन तन्य व्यवहार को प्रोत्साहित नहीं करता। यह समस्या वर्तमान भूकंपीय अभिकल्प प्रावधानों से पूर्व अभिकल्पित पुरानी (1970 के दशक से पहले की) प्रबलित-कंक्रीट संरचनाओं में पाई जाती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

145 ऐसी संरचना के व्यवहार का पूर्वानुमान करने के लिए Elwood and Moehle, 2002 ने विफलता के आरंभ और उसके बाद पतन तक ले जाने वाले सामर्थ्य ह्रास को निरूपित करने हेतु एक अनुभवजन्य मॉडल विकसित किया। अपरूपण और अक्षीय—दोनों विफलताओं के सीमा-अवस्था मॉडल उस स्तंभ-अंतरतलीय अपवाह पर आधारित सुझाए गए हैं, जिस पर विचाराधीन विफलता-विधा के लिए विफलता अपेक्षित होती है।

146 प्रबलित-कंक्रीट स्तंभों की अपरूपण विफलता का अनुकरण करने हेतु अपरूपण सीमा-अवस्था मॉडल को Mercury (Saouma, Kang, and Haussmann, 2012) में एक के रूप में कार्यान्वित करने के लिए चुना गया है। यह मॉडल वितरित और संकेंद्रित—दोनों सुघट्यता मॉडलों पर लागू होता है, यद्यपि संकेंद्रित सुघट्यता मॉडल के पूरक घटक के रूप में यह निस्संदेह सर्वाधिक उपयोगी है।

62.3.2.2 अपरूपण सीमा-अवस्था मॉडल

147 संरचना की सामर्थ्य-हानि के अन्वेषण हेतु सामर्थ्य-ह्रास मॉडलों के अतिरिक्त एक और साधन उपलब्ध कराने के लिए अपरूपण सीमा-अवस्था सामग्री मॉडल अपनाया गया है। यह ध्यान रखना महत्त्वपूर्ण है कि मॉडल स्वभावतः अनुभवजन्य है और इसलिए उसके अनुप्रयोग सीमित हैं। यह उन अल्प अनुप्रस्थ प्रबलन अनुपात वाले स्तंभों ($\rho'' \leq 0.002$) पर लागू होता है जिनमें आनमनी पराभव के बाद अपरूपण विफलता अपेक्षित है।

148 अपरूपण अनुक्रिया का संघटक मॉडल परिभाषित करने के लिए एक अपरूपण शून्य-लंबाई अवयव प्रयुक्त होता है। अपरूपण सीमा-अवस्था मॉडल सम्मिलित करने के लिए चित्र 62.35 को विकसित करने पर संकेंद्रित सुघट्यता मॉडल में स्तंभ के शीर्ष (नोड 3) पर एक अतिरिक्त शून्य-लंबाई अवयव होगा: घूर्णी स्प्रिंग को Mercury का *Hysteresis* मॉडल, अक्षीय स्प्रिंग को दृढ रैखिक प्रत्यास्थ मॉडल और अपरूपण स्प्रिंग को सीमा-अवस्था मॉडल दिया जाएगा, चित्र 62.35।

149 सीमा-अवस्था अपरूपण मॉडल बल–विरूपण वक्र को तीन रेखाओं के रूप में परिभाषित करता है, चित्र 62.36: आरंभिक प्रत्यास्थ शाखा (0-1), ह्रासमान (मृदुकरण) सामर्थ्य शाखा (1-2) और अवशिष्ट सामर्थ्य शाखा (2-3)।

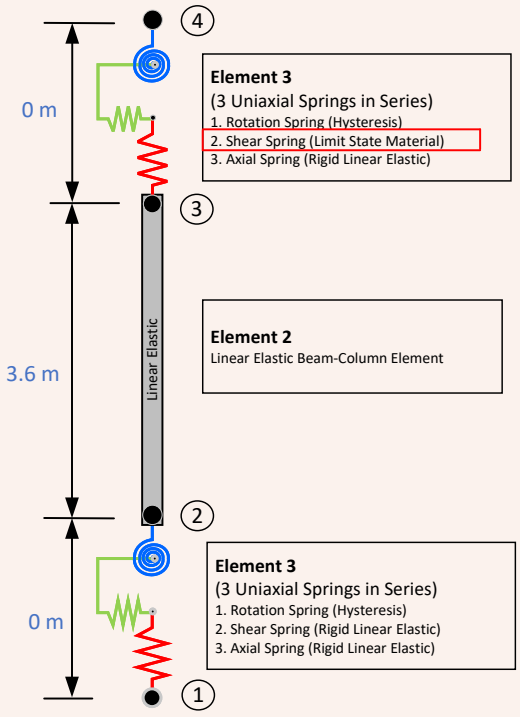
150 एक अपरूपण-विफलता (अपवाह क्षमता) पृष्ठ (चित्र 62.37) उस समीकरण से परिभाषित है, जिसे Elwood and Moehle, 2002 ने सुझाया परिभाषित होता है। यह विफलता पृष्ठ उस पार्श्व अपवाह ($\frac{\Delta}{L}$) को परिभाषित करता है जिस पर *आनमनी पराभव हो जाने के बाद* स्तंभ की अपरूपण विफलता अपेक्षित है। यह अनुप्रस्थ प्रबलन अनुपात (ρ''), अपरूपण सामर्थ्य (v), कंक्रीट संपीडन सामर्थ्य (f_c), अक्षीय भार (P) और सकल परिच्छेदीय क्षेत्रफल (A_g) का फलन है। मॉडल अनुभवजन्य होने के कारण विफलता पृष्ठ S.I. और अंग्रेज़ी इकाइयों के लिए अलग-अलग परिभाषित है।

$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{3}{100} + 4\rho'' - \frac{1}{40}\frac{v}{f_c'} - \frac{1}{40}\frac{P}{A_g f_c'} \geq \frac{1}{100} \qquad \text{S.I. Units}$$

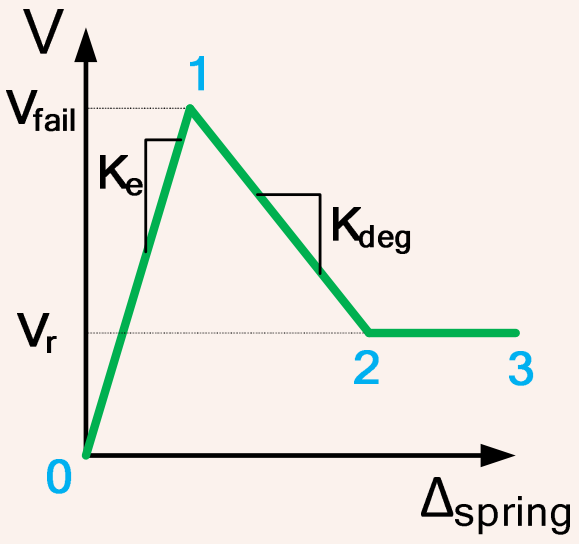
$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{3}{100} + 4\rho'' - \frac{1}{500}\frac{v}{f_c'} - \frac{1}{40}\frac{P}{A_g f_c'} \geq \frac{1}{100} \qquad \text{English Units Units}$$

जहाँ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

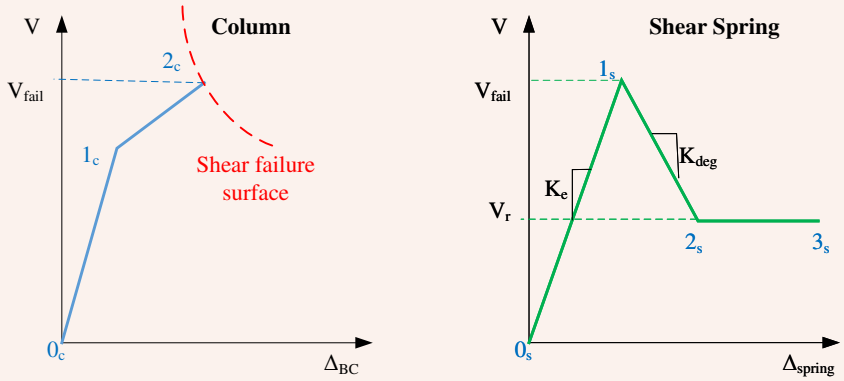


चित्र 62.35: अपरूपण विफलता सहित संकेंद्रित सुघट्यता मॉडल



चित्र 62.36: सीमा-अवस्था अपरूपण विफलता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.37: अपरूपण स्प्रिंग की अनुक्रिया

Δ_s अपरूपण विफलता पर स्तंभ का अंतरतलीय विस्थापन
L स्तंभ की ऊँचाई
ρ'' अनुप्रस्थ प्रबलन अनुपात
A_g स्तंभ का अनुप्रस्थ परिच्छेदीय क्षेत्रफल mm^2 या in^2
ν अपरूपण क्षमता $(V/A_g$ [MPa या psi]
f'_c कंक्रीट संपीडन सामर्थ्य MPa या psi
P = स्तंभ का अक्षीय भार

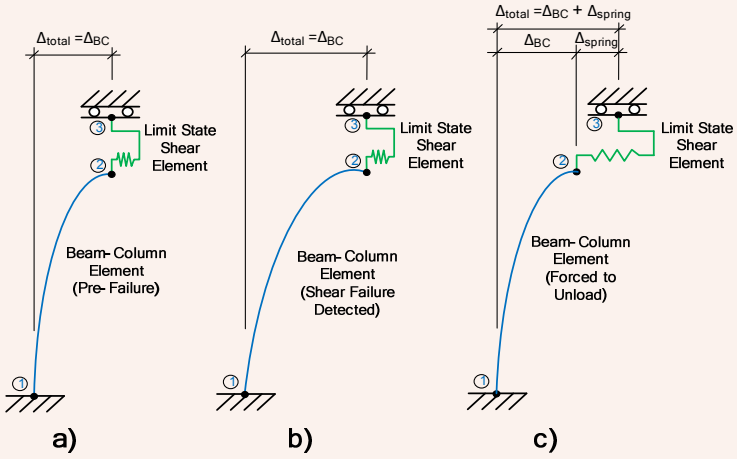
151 मॉडल स्तंभ के शीर्ष (चित्र 62.35, नोड 4) पर अपरूपण बल–विरूपण अनुक्रिया की तुलना अपवाह-क्षमता पृष्ठ से करके कार्य करता है।

152 चित्र 62.37 स्तंभ और अपरूपण स्प्रिंग की अनुक्रियाओं को अलग-अलग दर्शाता है। स्तंभ का पार्श्व विरूपण (Δ_{BC}) नोड 4 का विस्थापन है और स्प्रिंग विरूपण (Δ_{spring}) नोड 3 से नोड 4 तक का क्षैतिज विस्थापन है। जब तक स्तंभ अपरूपण-विफलता पृष्ठ (चित्र 62.37, बिंदु 2_c) तक नहीं पहुँचता, अपरूपण स्प्रिंग की अनुक्रिया रैखिक प्रत्यास्थ ($0_s - 1_s$) रहती है। विफलता पृष्ठ पर पहुँचने के बाद अपरूपण स्प्रिंग की दृढता ह्रासित ($1_s - 2_s$) होती है, उस शिखर-बिंदु (V_{fail}) से जहाँ विफलता पृष्ठ ने अपरूपण विफलता का पूर्वानुमान किया था।

153 चित्र 62.38 स्तंभ अनुक्रिया (Δ_{BC}), स्प्रिंग अनुक्रिया (Δ_{spring}) और कुल अनुक्रिया (Δ_{total}) का विवरण देता है: a) विफलता पृष्ठ तक पहुँचने से पहले, b) उस चरण के दौरान जब विफलता पृष्ठ प्राप्त होता है, और c) अपरूपण दृढता ह्रासित होने पर।

154 नीला धरन–स्तंभ अवयव, अवयव 1, अवयव 2 तथा अवयव 3 के अक्षीय और घूर्णी स्प्रिंगों से बना है (चित्र 62.35)। यदि अपरूपण स्प्रिंग की आरंभिक दृढता बहुत अधिक रखी जाए, तो विफलता-पूर्व कुल अनुक्रिया स्तंभ की आनमनी अनुक्रिया के बराबर होती है ($\Delta_{total} = \Delta_{BC}$)। जिस समय-चरण में अपरूपण-विफलता पृष्ठ द्वारा विफलता पहचानी जाती है, अपरूपण स्प्रिंग की दृढता ऋणात्मक हो जाती है। चूँकि अब मॉडल में अपरूपण विरूपण नगण्य नहीं रहते, कुल अनुक्रिया स्तंभ की आनमनी अनुक्रिया और एकाक्षीय अपरूपण स्प्रिंग अनुक्रिया का संयोजन बन जाती है। विफलता पृष्ठ प्राप्त होने और अपरूपण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.38: सीमा-अवस्था स्तंभ अनुक्रिया

स्प्रिंग की दृढता ऋणात्मक हो जाने पर, ह्रासमान अपरूपण दृढता के कारण पार्श्व विरूपण बढते हैं और स्तंभ अवयव को भारमोचन करने दिया जाता है। फलतः स्प्रिंग विरूपण बढने के साथ स्तंभ का आनमनी विरूपण घटता है।

155 विफलता-पूर्व अनुक्रिया तथा अपरूपण स्प्रिंग दृढता ह्रास आरंभ होने की अनुक्रिया का अवस्था-निर्धारण स्तंभ अवयव और अपरूपण स्प्रिंग अवयव की संयुक्त दृढता का उपयोग करता है।

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_{BC}} + \frac{1}{K_{spring}}$$

यदि स्प्रिंग आरंभ में अत्यंत दृढ हो, तो कुल दृढता K_{BC} के बराबर होती है।

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_{BC}} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{K_{BC}}$$
$$K_t = K_{BC}$$

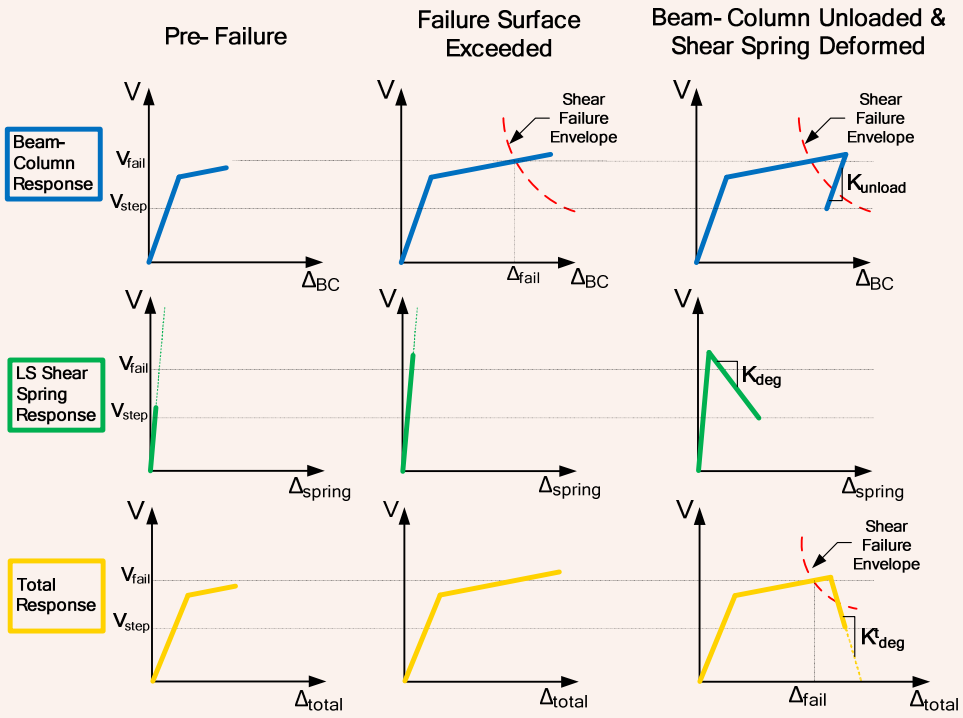
156 विफलता आरंभ होने पर अपरूपण स्प्रिंग की दृढता ह्रासित (K_{deg}) होती है और स्तंभ भारमोचन करना आरंभ करता है ($K_{BC} = K_{unload}$)। तब कुल ह्रासित दृढता इन दोनों का संयोजन बनती है (चित्र 62.39)।

62.3.3 ऊर्जा अपव्यय को सम्मिलित करने वाले Ibarra शैथिल्य मॉडल

157 Ibarra Ibarra–Krawinkler मॉडल (IKM) एक व्यापक रूप से प्रयुक्त शैथिल्य मॉडल है, जिसका उपयोग चक्रीय भारण—विशेषतः भूकंपों के दौरान—के अधीन संरचनाओं के व्यवहार का अनुकरण करने के लिए किया जाता है।

158 IKM सामर्थ्य ह्रास, संकुचन और दृढता अवनति जैसे अनेक अप्रत्यास्थ व्यवहारों को निरूपित करने की क्षमता के लिए उल्लेखनीय है; ये व्यवहार भूकंपीय घटनाओं के दौरान वास्तविक संरचनाओं में प्रायः देखे जाते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.39: सीमा-अवस्था की पृथक अनुक्रियाएँ

159 आगे इस व्यापक रूप से प्रयुक्त मॉडल का विस्तृत विवेचन प्रस्तुत है।

एम.एस. शोधप्रबंध “Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code”, Segura, 2011 द्वारा, से।

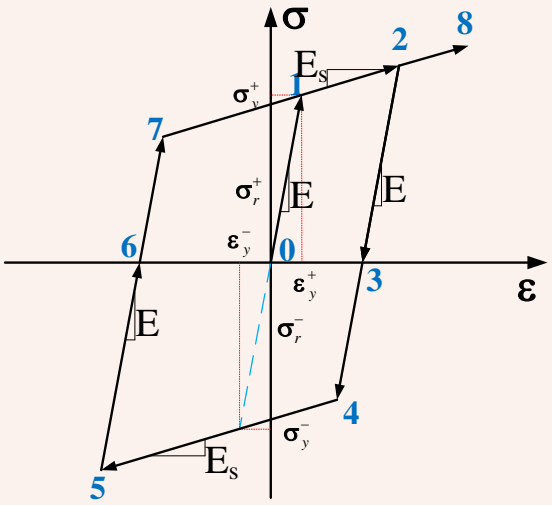
160 शैथिल्य संघटक मॉडल वह है जो सामग्री की विशिष्ट चक्रीय अनुक्रियाओं को निरूपित करता है। कुछ आदर्शीकृत शैथिल्य अनुक्रियाएँ हैं: प्रत्यास्थ भारण, विकृति दृढीकरण, प्रत्यास्थ भारमोचन और प्रत्यास्थ पुनर्भारण। उदाहरणार्थ, विकृति-दृढीकरण संघटक मॉडल एक ही भारण चक्र की अवधि में इन प्रत्येक आदर्शीकृत अनुक्रियाओं को निरूपित करता है।

161 चित्र 62.40 में विकृति-दृढीकरण सामग्री का एक शैथिल्य चक्र दिखाया गया है। बिंदु 0 और 1 के बीच प्रत्यास्थ भारण, उसके बाद 1-2 तक विकृति दृढीकरण और फिर विकृति-व्युत्क्रमण पर प्रत्यास्थ भारमोचन (2-3) दिखाया गया है। प्रत्यास्थ पुनर्भारण (3-4) के बाद विकृति-दृढीकरण पुनर्भारण (4-5), प्रत्यास्थ भारमोचन (5-6), प्रत्यास्थ पुनर्भारण (6-7) और विकृति-दृढीकरण पुनर्भारण (7-8) होता है।

162 सुघट्यता में Bauschinger प्रभाव, §55.3.1, तथा §55.5.2.3 के उदाहरण से इसकी समानता पर ध्यान दें।

163 किंतु यह आदर्शीकृत अनुक्रिया-प्रतिरूप अधिकांश सामग्रियों, विशेषतः प्रबलित कंक्रीट, के विशिष्ट

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.40: प्रतिनिधि शैथिल्य चक्र

शैथिल्य व्यवहार को निरूपित नहीं करता। उदाहरणार्थ, एक अथवा अनेक शैथिल्य चक्रों के दौरान प्रत्यास्थ भारमोचन और प्रत्यास्थ पुनर्भारण का आदर्शीकरण यथार्थ धारणा नहीं है।

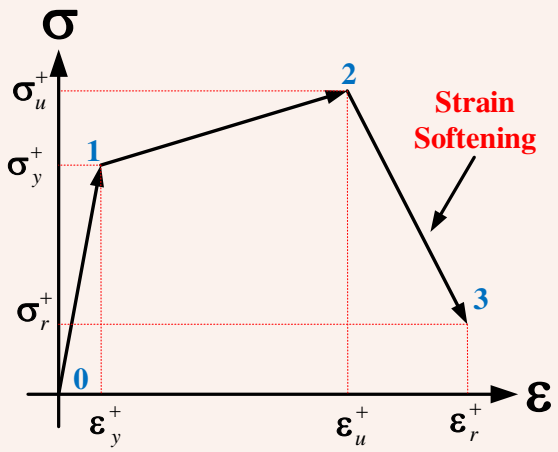
164 संख्यात्मक अनुकरण का एक महत्त्वपूर्ण पक्ष उस व्यवहारिक अनुक्रिया को निरूपित करना है जो संरचना के पतन के समीप पहुँचने पर उत्पन्न होती है। यद्यपि अधिकांश संरचनाओं में पराभव-पश्चात कुछ दृढीकरण (अर्थात् विकृति दृढीकरण) होता है, शिखर-सामर्थ्य बिंदु के बाद सामान्यतः सामर्थ्य ह्रास होता है जो पतन-बिंदु तक ले जाता है। अत्यधिक अप्रत्यास्थ एकदिष्ट भारण से उत्पन्न इस प्रकार की सामर्थ्य-हानि चित्र 62.41 में शिखर बिंदु (बिंदु 2) से विफलता बिंदु (बिंदु 3) तक विकृति-मृदुकरण शाखा के रूप में दिखाई गई है। प्रभावी शैथिल्य संघटक मॉडल को इस व्यवहार को निरूपित करने में सक्षम होना चाहिए।

165 अनुसंधान दर्शाता है कि सामग्री चाहे कोई भी हो, व्युत्क्रम चक्रीय भारण इतिहास के दौरान सामर्थ्य-क्षमता का ह्रास होता है। इससे ऐसे संगणकीय मॉडल का महत्त्व स्पष्ट होता है जो इस शैथिल्य सामर्थ्य ह्रास को निरूपित कर सके। इस प्रकार की सामर्थ्य-हानि के कारण संघटक मॉडल के सामर्थ्य-सूचक बिंदु (जैसे शिखर-सामर्थ्य बिंदु और पराभव बिंदु) चक्रीय भारण इतिहास के दौरान मूलबिंदु की ओर स्थानांतरित होते हैं और अंततः विफलता उत्पन्न होती है। चित्र 62.42 इस प्रक्रिया का विवरण देता है और बिंदु X पर ह्रासित सामर्थ्य गुणों को X’ और X” से दर्शाता है। ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि पराभव बिंदु (3 और 6), शिखर-सामर्थ्य बिंदु (3 और 8) तथा अवशिष्ट-सामर्थ्य बिंदु (4 और 9) मूलबिंदु की ओर स्थानांतरित होते हैं; फलतः विफलता बिंदु मूल अवशिष्ट विकृति से कम विकृति पर घटित होता है।

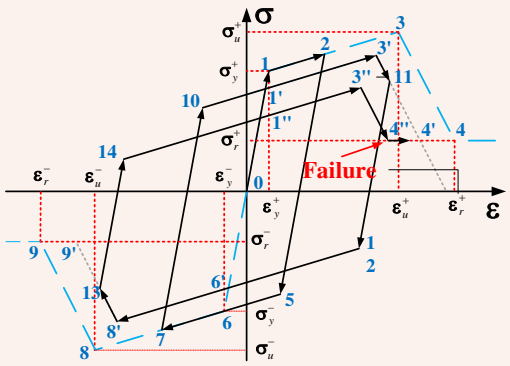
166 शैथिल्य सामर्थ्य-हानि को निरूपित करने के लिए अनेक मॉडल विकसित किए गए हैं। सामान्यतः उन्हें दो समूहों में बाँटा जा सकता है: खंडशः रैखिक मॉडल और सतत परिवर्तित दृढता वाले चिकने मॉडल।

167 द्विरैखिक तथा संशोधित Kent और Park मॉडल खंडशः रैखिक मॉडल हैं जो शैथिल्य व्यवहार की कुछ विशेषताओं को निरूपित कर सकते हैं। किंतु द्विरैखिक मॉडल शिखर-पश्चात व्यवहार को निरूपित नहीं

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.41: विकृति-मृदुकरण के कारण सामर्थ्य-हानि



चित्र 62.42: व्युत्क्रम चक्रीय सामर्थ्य ह्रास

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करता और व्युत्क्रम चक्रीय भारण के अधीन सामर्थ्य अवनति का लेखा नहीं रखता। संशोधित Kent और Park मॉडल शिखर-पश्चात व्यवहार को *निरूपित करता* है, पर वह भी सामर्थ्य अवनति का लेखा नहीं रखता।

168 Clough, 1966 और Takeda, Sozen, and Nielsen, 1970 द्वारा प्रस्तावित खंडशः रैखिक मॉडल पिछले चक्रों में भारण की दिशा में अनुभव किए गए अधिकतम विरूपण के आधार पर क्रमशः पुनर्भारण दृढता और भारमोचन दृढता का लेखा रखते हैं। Wen–Buoc मॉडल (Wen, 1976) दृढता अवनति को निरूपित करने वाला चिकना मॉडल है। Wang et al., 2001 ने दृढता और सामर्थ्य ह्रास को सम्मिलित करने वाला चिकना मॉडल प्रस्तावित किया; किंतु उसमें शिखर-पश्चात मृदुकरण शाखा नहीं है। प्रत्येक मॉडल संरचनात्मक परीक्षण में स्पष्ट होने वाली कुछ विशेषताओं को प्रभावी ढंग से निरूपित करता है और अंततः इन्हीं विशेषताओं का संयोजन Mercury में कार्यान्वित शैथिल्य मॉडलों की नींव रखता है। ये क्षमताएँ उपलब्ध कराने के लिए Ibarra, 2004 के अनुसंधान पर आधारित दो संघटक मॉडल संगणकीय साधनों के रूप में कार्यान्वित किए गए हैं, ताकि भारण चक्रों की अवधि में अपव्ययित शैथिल्य ऊर्जा के फलन के रूप में संरचनात्मक अनुक्रिया का पूर्वानुमान किया जा सके।

169 Ibarra ने तीन शैथिल्य मॉडल प्रस्तुत किए हैं। पहला संशोधित द्विरैखिक मॉडल है, जो *Bilinear* मॉडल के समान शैथिल्य नियमों का अनुसरण करता है। अन्य दो Clough मॉडल के संशोधन हैं और शिखर-उन्मुख मॉडल कहलाते हैं; दोनों में अंतर केवल तथाकथित संकुचन मॉडल में संकुचन प्रभाव सम्मिलित करने का है।

170 शिखर-उन्मुख और संकुचन—दोनों मॉडल समान आधार-वक्र, चित्र 62.43, का अनुसरण करते हैं और उसी से सामर्थ्य ह्रासित किया जाता है। आधार-वक्र पराभव बिंदु तक आरंभिक प्रत्यास्थ शाखा (0-1), शिखर (चरम) सामर्थ्य बिंदु तक विकृति-दृढीकरण शाखा (1-2), चरम विरूपण क्षमता तक मृदुकरण शाखा (2-3) और विरूपण-क्षमता बिंदु के आगे अवशिष्ट सामर्थ्य शाखा (3-4) का अनुसरण करता है।

171 आधार-वक्र एकदिष्ट भारण के अधीन भारण पथ को निरूपित करता है, जब कोई शैथिल्य सामर्थ्य-हानि नहीं होती (§62.3.4.1)। उदाहरणार्थ आगे के चित्र संघटक मॉडलों को प्रतिबल–विकृति के रूप में व्यक्त करते हैं; किंतु विवरण बल–विस्थापन और आघूर्ण–वक्रता संबंधों पर भी लागू होता है। अधोलिखित r, y और u क्रमशः अवशिष्ट, पराभव और चरम क्षमताओं के अनुरूप हैं। अधोलिखित s विकृति-दृढीकरण शाखा और अधोलिखित c कैप-पश्चात (मृदुकरण) शाखा के अनुरूप है।

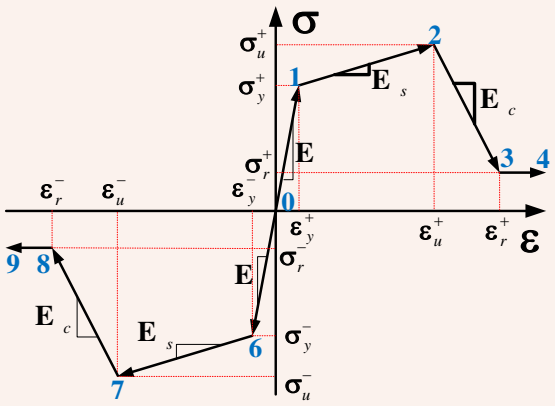
172 धनात्मक और ऋणात्मक—दोनों भारण पथों के लिए प्रतिबल–विकृति संबंध चार क्षेत्रों में विभाजित है: प्रत्यास्थ शाखा, विकृति-दृढीकरण शाखा, विकृति-मृदुकरण शाखा और अवशिष्ट सामर्थ्य शाखा। स्पर्शरेखीय मापांक के निर्धारण सहित एकदिष्ट आधार-वक्र का सारांश तालिका 62.2 में प्रस्तुत है।

173 ध्यान दें कि चित्र 62.43 में दिखाए आधार-वक्र के अपरूपण और आनमन के समकक्ष चित्र 62.44 में हैं।

62.3.3.1 शैथिल्य मॉडल

174 Mercury में कार्यान्वयन के लिए अपनाए गए शिखर-उन्मुख और संकुचन मॉडलों का मूल चक्र-पथ चित्र 62.45 में दिखाया गया है। मॉडलों की समानताएँ काले तीरों से और अंतर नीले (शिखर-उन्मुख) तथा लाल (संकुचन) तीरों से चिह्नित हैं। मॉडल एकदिष्ट आधार-वक्र से सीमाबद्ध हैं। प्रथम चक्र में प्रत्यास्थ भारण के बाद विकृति दृढीकरण होता है। विकृति-व्युत्क्रमण पर प्रत्यास्थ भारमोचन (2 से

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

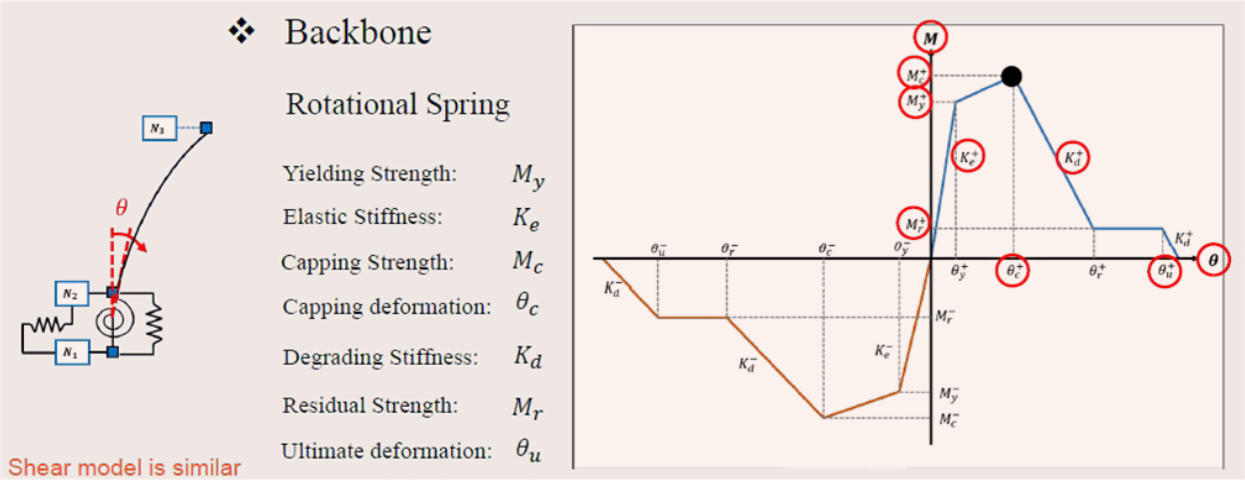


चित्र 62.43: शैथिल्य मॉडल का आधार-वक्र

तालिका 62.2: सुपरशरेखीय मापांक

Path	Description	Loading in Positive Direction		Loading in Negative Direction	
		$E_{\tan}$	Strain (ε)	$E_{\tan}$	Strain (ε)
$0-1\&0-6$	Elastic Loading	$E^{+}-\frac{\sigma_y^{+}}{\varepsilon_y^{+}}$	$0 \le \varepsilon < \varepsilon_y^{+}$	$E^{-}-\frac{\sigma_y^{-}}{s_y^{-}}$	$\varepsilon_y^{+} < \varepsilon < 0$
$1-2\&6-7$	Strain Hardening	$E_s^{+}-\frac{\left(\sigma_u^{+}-\sigma_y^{+}\right)}{\left(\varepsilon_u^{+}-\varepsilon_y^{+}\right)}$	$\varepsilon_y^{+} \le \varepsilon < \varepsilon_u^{+}$	$E_s^{-}-\frac{\left(\sigma_u^{-}-\sigma_y^{-}\right)}{\left(s_u^{-}-\varepsilon_y^{-}\right)}$	$\varepsilon_u^{-} < \varepsilon \le \varepsilon_y^{-}$
$2-3\&7-8$	Strain Softening	$E_c^{+}-\frac{(\sigma_r^{+}-\sigma_u^{+})}{(\varepsilon_r^{+}-s_u^{+})}$	$\varepsilon_u^{+} \le \varepsilon < \varepsilon_r^{+}$	$E_c^{-}-\frac{(\sigma_r^{-}-\sigma_u^{-})}{(s_r^{-}-\varepsilon_u^{-})}$	$\varepsilon_r^{-} < \varepsilon \le \varepsilon_y^{-}$
$3-4\&8-9$	Residual Strength	0	$\varepsilon \ge \varepsilon_r^{+}$	0	$\varepsilon \le \varepsilon_r^{-}$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.44: आनमन के लिए आधार-वक्र (Ghannoum, 2020)

3) होता है। दोनों मॉडल लक्ष्य पुनर्भारण के अधीन कार्य करते हैं, जिसमें पुनर्भारण पथ पिछले सभी चक्रों की अधिकतम विरूपण अवस्था की ओर अभिमुख होता है। चूँकि ऋणात्मक प्रतिबल दिशा में अभी विरूपण नहीं हुआ है, प्रथम चक्र का लक्ष्य भारण ऋणात्मक पराभव बिंदु (3-5) की ओर अभिमुख होता है। शिखर-उन्मुख मॉडल में पुनर्भारण पथ सीधे इस अधिकतम विरूपण अवस्था (3-5) को लक्ष्य करता है। संकुचन मॉडल में पहले संकुचन "विराम-बिंदु" (4) को लक्ष्य किया जाता है। विराम-बिंदु उस अवस्था को दर्शाता है जहाँ परिच्छेदीय दरारें बंद हो जाती हैं और कुछ घर्षण प्रतिरोध पुनःस्थापित हो जाता है। विराम-बिंदु के आगे पुनर्भारण पथ लक्ष्य अवस्था (4-5) की ओर जाता है।

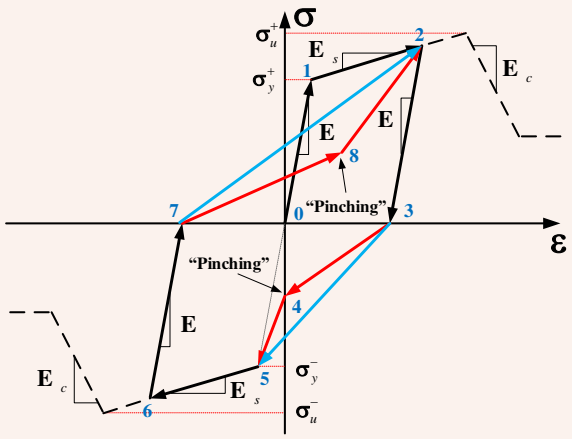
175 लक्ष्य अवस्था के आगे भारण जारी रखने पर विकृति दृढीकरण (5-6) होता है और विकृति-व्युत्क्रमण से प्रत्यास्थ भारमोचन (6-7) होता है। तब धनात्मक दिशा में लक्ष्य पुनर्भारण पिछले चक्रों के अधिकतम विरूपण बिंदु (2) की ओर अभिमुख होता है। शिखर-उन्मुख मॉडल में पुनर्भारण पथ सीधे अधिकतम विरूपण अवस्था (7-2) को लक्ष्य करता है। संकुचन मॉडल में पुनर्भारण पहले विराम-बिंदु (7-8) और फिर लक्ष्य अवस्था (8-2) की ओर जाता है। विराम-बिंदु का निर्धारण §62.3.3.1.2 में विवेचित है।

62.3.3.1.1 शिखर-उन्मुख मॉडल

176 शिखर-उन्मुख मॉडल के मूल चक्रीय भारण-पथ नियम चित्र 62.46 में दिखाए गए हैं। "शिखर-उन्मुख" पद पिछले भारण चक्रों के अधिकतम विरूपण बिंदु 2 और 6 (चित्र 62.45) को संदर्भित करता है। शिखर-उन्मुख मॉडल में पुनर्भारण सीधे इसी बिंदु की ओर होता है। चित्र 62.46 के अनुसार 0-1 तक प्रत्यास्थ भारण और फिर 1-11 तक विकृति-दृढीकरण शाखा के अनुदिश भारण होता है।

177 विकृति-व्युत्क्रमण से 11 और 5 के बीच प्रत्यास्थ भारमोचन होता है। चक्रीय भारण एक ऐसी लक्ष्य अवस्था की ओर निर्देशित होता है जो पिछले सभी चक्रों में अनुभव किए अधिकतम विरूपण पर प्रतिबल–विकृति अवस्था (शिखर-उन्मुख अधिकतम विरूपण बिंदु) का प्रतिनिधित्व करती है। आरंभ में लक्ष्य अवस्था पराभव बिंदु है। धनात्मक भारण दिशा (बिंदु 1) में पराभव हो चुका होने के कारण, विकृति-व्युत्क्रमण पर लक्ष्य अवस्था उस बिंदु के रूप में संचित होती है जहाँ व्युत्क्रमण हुआ (बिंदु 11), *यदि उस बिंदु का विरूपण पिछले सभी भारण चक्रों से अधिक हो*। ऋणात्मक भारण दिशा के प्रथम भ्रमण में पुनर्भारण पराभव बिंदु (बिंदु 6) को लक्ष्य करता है। 5 और 6 के बीच ह्रासित पुनर्भारण होता है, जो

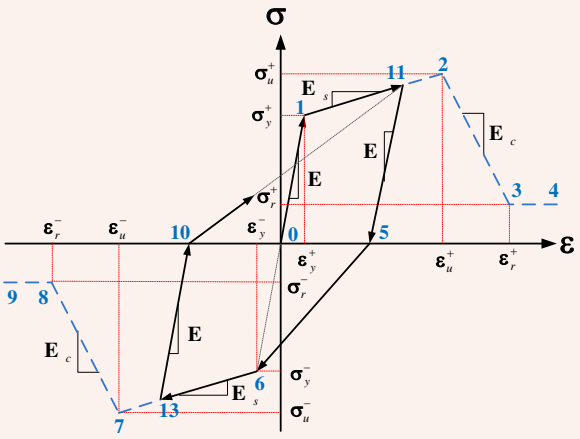
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.45: शिखर-उन्मुख और संकुचन मॉडल

शिखर-उन्मुख मॉडल में अंतर्निहित दृढता ह्रास को दर्शाता है। विकृति-दृढीकरण शाखा (6-13) के अनुदिश भारण के बाद विकृति-व्युत्क्रमण और प्रत्यास्थ भारमोचन (13-10) होता है।

178 ऋणात्मक भारण दिशा की लक्ष्य अवस्था 13 पर संचित होती है। अगला चक्र इसी लक्ष्य अवस्था की ओर भारित होता है। अतः धनात्मक शाखा पर पुनर्भारण बिंदु 11 को लक्ष्य करता है। अधोलिखित t लक्ष्य अवस्था के अनुरूप है। लक्ष्य भारण मापांक (E_t) को सपर्शरेखीय मापांक ($E_{\tan}$) नहीं समझना चाहिए; यद्यपि लक्ष्य अवस्था की ओर सीधे भारण होने पर दोनों समान होते हैं।

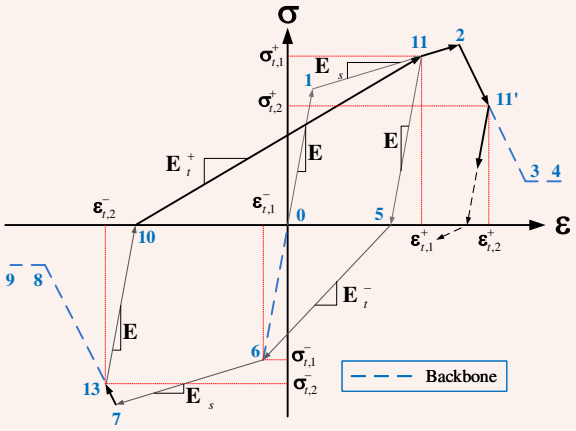


चित्र 62.46: शिखर-उन्मुख मॉडल का मूल चक्र

179 चित्र 62.47 के अनुसार, जब धनात्मक शाखा (बिंदु 11') पर विकृति-व्युत्क्रमण होता है, तो यदि व्युत्क्रमण पर विरूपण पिछली अधिकतम विरूपण अवस्था से अधिक हो, धनात्मक लक्ष्य अवस्था

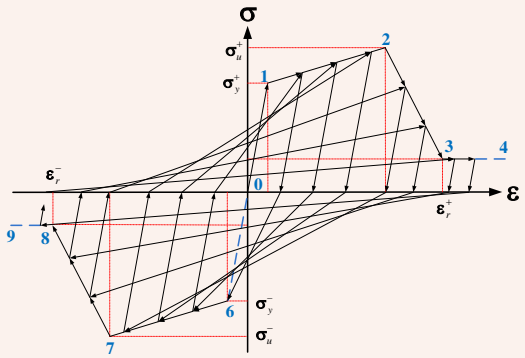
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अद्यतन की जाती है। प्रत्यास्थ भारमोचन (11'-5') होता है और ऋणात्मक लक्ष्य बिंदु (13) की ओर ह्रासित पुनर्भारण होता है।



चित्र 62.47: भार-व्युत्क्रमण और लक्ष्य अवस्था का अद्यतन

180 परिमाण में बढ़ते चक्रीय भारण इतिहास के दौरान शिखर-उन्मुख मॉडल चित्र 62.48 के अनुसार एकदिष्ट आधार-वक्र का अनुसरण करते हुए अवशिष्ट प्रतिबल शाखा की ओर जाता है।



चित्र 62.48: शिखर-उन्मुख मॉडल का अनुसरण करता बढ़ता चक्रीय भारण इतिहास

62.3.3.1.2 संकुचन मॉडल

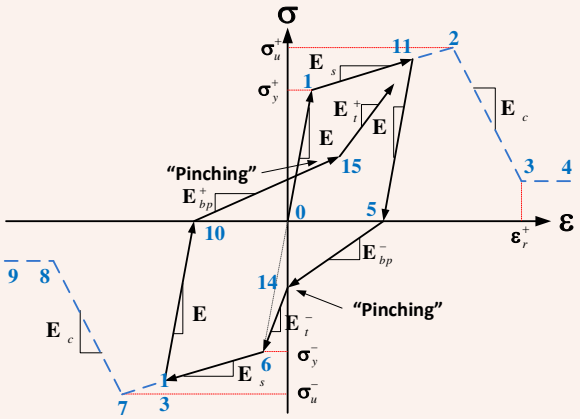
181 संकुचन मॉडल प्रबलित कंक्रीट में अंतर्निहित पुनर्भारण व्यवहार का लेखा रखता है। संरचनात्मक परीक्षण से स्पष्ट है कि अप्रत्यास्थ भारण के दौरान परिच्छेदीय दरारें उत्पन्न होने पर, दरारें खुली रहने के कारण भारण दिशा में कम घर्षण प्रतिरोध मिलता है। भारण जारी रहने और दरारें बंद होने पर कुछ घर्षण प्रतिरोध पुनःस्थापित होता है। घटे घर्षण प्रतिरोध के कारण एक *संकुचित सामर्थ्य* पुनर्भारण शाखा उत्पन्न होती है।

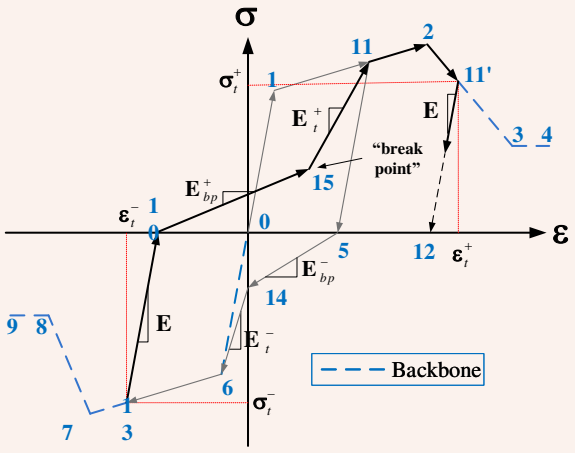
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

182 संकुचन मॉडल शिखर-उन्मुख मॉडल के समान एकदिष्ट आधार-वक्र और वही "शिखर-उन्मुख" पुनर्भारण अपनाता है, जो पिछले चक्रों के अधिकतम विरूपण बिंदु को लक्ष्य करता है। किंतु पुनर्भारण सीधे अधिकतम विरूपण अवस्था को लक्ष्य नहीं करता। इसके स्थान पर, परिच्छेदीय दरारें बंद होने पर स्पर्शरेखीय मापांक तथाकथित संकुचन "विराम-बिंदु" (ऋणात्मक और धनात्मक भारण दिशाओं में क्रमशः बिंदु 14 और 15) को लक्ष्य करता है। विराम-बिंदु वह बिंदु है जहाँ परिच्छेदीय दरारें बंद होती हैं और कुछ घर्षण प्रतिरोध पुनःस्थापित होता है। विराम-बिंदु के आगे स्पर्शरेखीय मापांक लक्ष्य अवस्था की ओर अभिमुख होता है। शिखर-उन्मुख मॉडल की तरह प्रत्यास्थ (0-1) और विकृति-दृढीकरण (1-11) भारण के बाद विकृति-व्युत्क्रमण और प्रत्यास्थ भारमोचन (11-5) होता है।

183 धनात्मक लक्ष्य अवस्था बिंदु 11 पर संचित होती है। ह्रासित पुनर्भारण पहले ऋणात्मक विराम-बिंदु (14) को लक्ष्य करता है, जहाँ मूल दृढता (मापांक) का कुछ भाग पुनःस्थापित होता है; इसके बाद पुनर्भारण लक्ष्य बिंदु (6), अर्थात् प्रथम भ्रमण के पराभव बिंदु, की ओर जाता है।

184 भारण विकृति-दृढीकरण शाखा (6-13) के अनुदिश चलता है और विकृति-व्युत्क्रमण होने पर ऋणात्मक लक्ष्य अवस्था अद्यतन (13) होती है तथा 13 और 10 के बीच प्रत्यास्थ भारमोचन होता है। धनात्मक दिशा में पुनर्भारण पहले धनात्मक विराम-बिंदु (10-15) को लक्ष्य करता है और फिर लक्ष्य तक दृढीकृत पुनर्भारण (15-11) होता है।


σ
ε
"Pinching"
"Pinching"
E
E
E



चित्र 62.50: विराम-बिंदु का निर्धारण

186 सुपष्टता के लिए पहले धनात्मक भारण शाखा (बिंदु 15) पर विराम-बिंदु मानों का निर्धारण समझाया गया है। धनात्मक विराम-बिंदु विकृति और विराम-बिंदु संदर्भ प्रतिबल निम्न प्रकार निर्धारित होते हैं:

$$\varepsilon_{bp}^{+} = (1 - \kappa_d)\varepsilon_5^{+}$$
$$\sigma_{ref,bp}^{+} = \kappa_f \sigma_t^{+}$$

187 धनात्मक विराम-बिंदु तक सुपर्शरेखीय मापांक (E_{bp}^{+}) निम्न प्रकार निर्धारित होता है:

$$E_{bp}^{+} = \frac{\sigma_{ref,bp}^{+}}{(\varepsilon_t^{+} - \varepsilon_{10})}$$

और इसका उपयोग विराम-बिंदु प्रतिबल (σ_{bp}^{+}) की गणना में होता है:

$$\sigma_{bp}^{+} = E_{bp}^{+}(\varepsilon_{bp}^{+} - \varepsilon_{10})$$

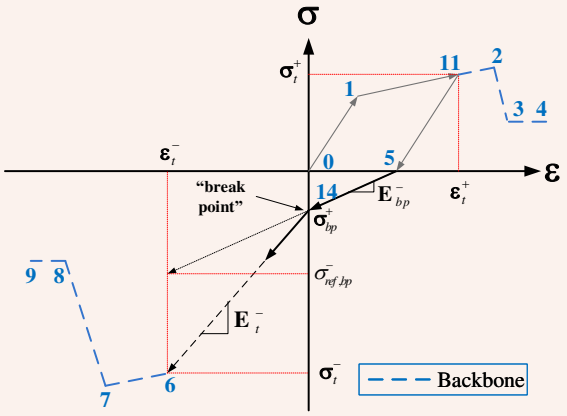
188 इसके बाद विराम-बिंदु की प्रतिबल–विकृति अवस्था से लक्ष्य अवस्था तक का सुपर्शरेखीय मापांक निर्धारित किया जाता है।

$$E_t^{+} = \frac{(\sigma_t^{+} - \sigma_{bp}^{+})}{(\varepsilon_t^{+} - \varepsilon_{bp}^{+})}$$

189 ऋणात्मक विराम-बिंदु अवस्था-मानों का निर्धारण इसी प्रक्रिया का अनुसरण करता है; किंतु पुनः ध्यान देना चाहिए कि विराम-बिंदु मान लक्ष्य अवस्था के फलन हैं और पिछले चक्रों में अनुभव किए गए अधिकतम दिशात्मक विरूपण पर निर्भर हैं। चूँकि अप्रत्यास्थ भारण पहले धनात्मक प्रतिबल शाखा (बिंदु

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

11) पर पहुँचा था, ऋणात्मक शाखा पर अभी अप्रत्यास्थ विरूपण नहीं हुआ है। अतः ऋणात्मक दिशा में पराभव विरूपण पार होने तक लक्ष्य अवस्था ऋणात्मक पराभव अवस्था (बिंदु 6) रहती है। इस दशा में प्रथम विराम-बिंदु ऋणात्मक भारण दिशा के लिए निर्धारित होता है और इसलिए शून्य विकृति के अनुरूप ऊर्ध्वाधर अक्ष पर पड़ता है।



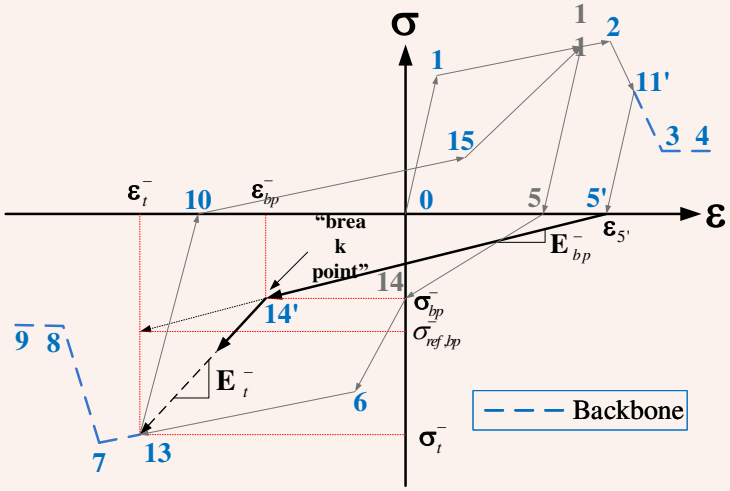
चित्र 62.51: प्रथम विराम-बिंदु का निर्धारण

190 इस जानकारी से प्रथम विराम-बिंदु के प्रतिबल–विकृति मान नीचे परिकलित किए गए हैं।

$$\varepsilon_{bp}^- = 0$$
$$\sigma_{ref,bp}^- = \kappa_f \sigma_t^-$$
$$E_{bp}^- = \frac{\sigma_{ref,bp}^-}{(\varepsilon_t^- \varepsilon_5)}$$
$$\sigma_{bp}^- = -E_{bp}^- \varepsilon_5$$

191 अगले चक्र, चित्र 62.52, में जब धनात्मक प्रतिबल शाखा (11'-5') पर भारमोचन होता है और ऋणात्मक शाखा (5'-14') पर पुनर्भारण आरंभ होता है, तब विराम-बिंदु मान धनात्मक विराम-बिंदु के निर्धारण हेतु वर्णित प्रक्रिया का अनुसरण करते हुए ऋणात्मक लक्ष्य अवस्था (बिंदु 13) के फलन के रूप में निर्धारित होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.52: विराम-बिंदु का अद्यतन

$$\varepsilon_{bp}^- = (1 - \kappa_d)\, \varepsilon_{10}^-$$
$$\sigma_{ref,bp}^- = \kappa_f \sigma_t^-$$
$$E_{bp}^- = \frac{\sigma_{rf,,bp}^-}{\left(\varepsilon_t^- - \varepsilon_5\right)}$$
$$\sigma_{bp}^- = E_{bp}^- \left(\varepsilon_{bp}^- - \varepsilon_{5'}\right)$$
$$E_t^- = \frac{\left(\sigma_t^- - \sigma_{bp}^-\right)}{\left(\varepsilon_t^- - \varepsilon_{bp}^-\right)}$$

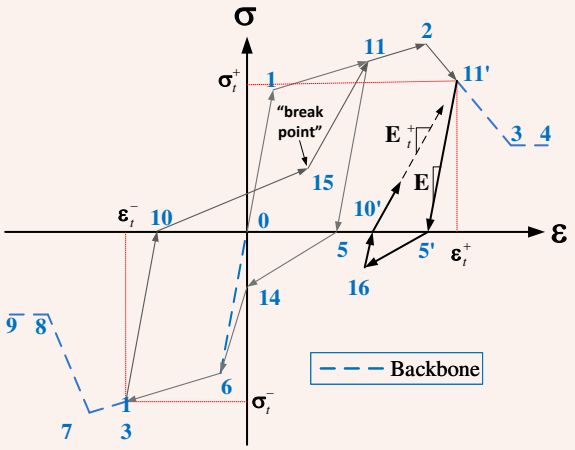
192 जब पुनर्भारण पथ पर विकृति-व्युत्क्रमण होता है, चित्र 62.53, और प्रत्यास्थ भारमोचन (16-10') विराम-बिंदु (15) के आगे पुनर्भारण तक ले जाता है, तब पुनर्भारण सीधे लक्ष्य अवस्था (11') की ओर होता है।

193 परिमाण में बढ़ते चक्रीय भारण इतिहास के दौरान संकुचन मॉडल चित्र 62.54 में दिखाए "संकुचित सामर्थ्य" पथ के माध्यम से एकदिष्ट आधार-वक्र का अनुसरण करते हुए अवशिष्ट प्रतिबल की ओर जाता है।

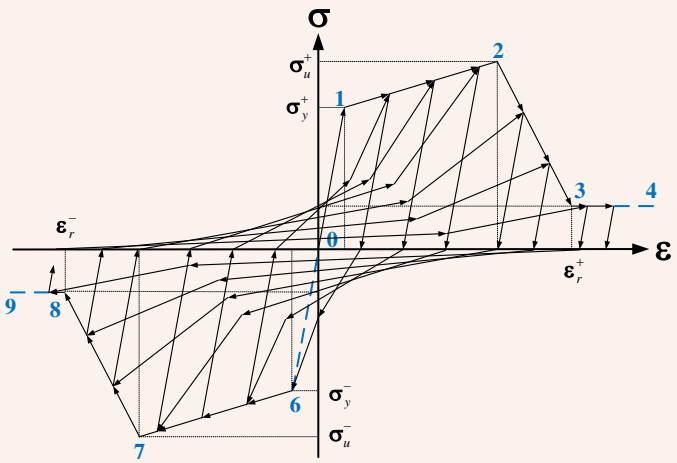
62.3.3.2 सामर्थ्य-ह्रास विधाएँ

194 ऊपर प्रस्तुत शैथिल्य मॉडल पराभव-पश्चात व्यवहार के अनुकरण के लिए प्रभावी हैं। किंतु प्रयोगशाला परिणाम दर्शाते हैं कि व्युत्क्रम चक्रीय भारों के अधीन संरचना सामर्थ्य-हानि अनुभव करती है और पुनर्भारण सामान्यतः पूर्णतः एकदिष्ट आधार-वक्र तक नहीं पहुँचता।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.53: विराम-बिंदु के आगे पुनर्भारण



चित्र 62.54: संकुचन मॉडल का अनुसरण करता बढता चक्रीय भारण इतिहास

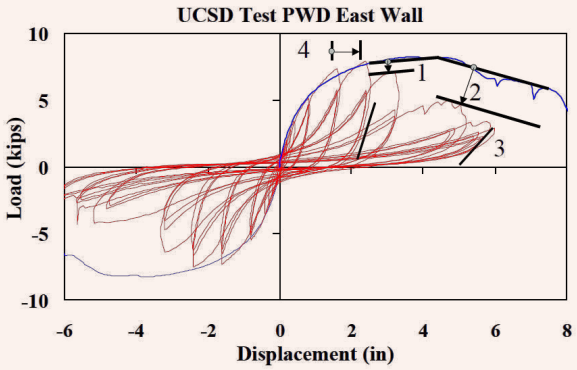
प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

195 इस व्यवहार का लेखा रखने के लिए Ibarra, 2004 ने चार सामर्थ्य-ह्रास विधाएँ प्रस्तावित की हैं। यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि इस अनुभाग में प्रस्तुत सामर्थ्य-ह्रास विधाएँ स्वतंत्र मॉडल के रूप में नहीं, बल्कि शैथिल्य संघटक मॉडल के साथ प्रयुक्त होने के लिए हैं। अतः ये चारों ह्रास विधाएँ Mercury में कार्यान्वित शिखर-उन्मुख और संकुचन मॉडलों में सम्मिलित हैं। सामर्थ्य-ह्रास विधाएँ निम्न कारणों से संरचनात्मक क्षमता की हानि का लेखा रखती हैं:

1. पराभव सामर्थ्य (मूल सामर्थ्य) ह्रास
2. शिखर सामर्थ्य (कैप-पश्चात) ह्रास
3. भारमोचन दृढता (मापांक) ह्रास
4. पुनर्भारण दृढता (मापांक) ह्रास

196 चित्र 62.55 University of California, San Diego में किए गए परीक्षणों के परिणाम प्रस्तुत करता है (Ibarra, 2004)। नीली रेखा एकदिष्ट भारण परीक्षण के परिणाम प्रस्तुत करती है और एकदिष्ट आधार-वक्र को परिभाषित करती है। व्युत्क्रम चक्रीय परीक्षण के परिणाम लाल रंग में आलेखित हैं और चारों ह्रास विधाओं के प्रभाव बताने के लिए संकेतक दिए गए हैं। संरचना के चक्रीय भ्रमण सहने पर ह्रास विधा 1 घटता पराभव बिंदु दिखाती है। विधा 2 मृदुकरण शाखा का स्थानांतरण दिखाती है, जो शिखर सामर्थ्य को सीधे प्रभावित करता है। विधा 3 भारमोचन दृढता (मापांक) की अवनति और विधा 4 विकृति का स्थानांतरण दिखाती है।



चित्र 62.55: UCSD संरचनात्मक प्रयोगशाला के परिणाम (Ibarra, 2004)

197 चारों ह्रास विधाओं को शैथिल्य अपव्यय प्राचल β, जिसे Rahnama और Krawinkler (Rahnama & Krawinkler, 1993) ने प्रस्तुत किया, का उपयोग करके उपयोगकर्ता-परिभाषित शैथिल्य ऊर्जा क्षमता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(E_{hys}) को ह्रासित करने हेतु कार्यान्वित किया गया है। शैथिल्य क्षमता को पराभव तक पहुँचने के लिए आवश्यक ऊर्जा के गुणक के रूप में परिभाषित किया जाता है।

$$\beta_i = \left(\frac{E_i}{E_{hys} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$

$$E_{hys} = \gamma \sigma_y \varepsilon_y$$

जहाँ

E_i भारण भ्रमण i में अपव्ययित शैथिल्य ऊर्जा
$\sum E_j$ पिछले सभी भारण भ्रमणों में अपव्ययित शैथिल्य ऊर्जा
c ह्रास-दर प्राचल
γ शैथिल्य ऊर्जा-क्षमता गुणक

198 भारण भ्रमण क्षैतिज अक्ष पर पहुँचने पर आरंभ होता है और क्षैतिज अक्ष को पुनः पार करने पर समाप्त होता है। अतः धनात्मक और ऋणात्मक प्रतिबल शाखाओं पर अलग-अलग भारण भ्रमण होते हैं और उनका उपयोग विपरीत शाखा के सामर्थ्य प्राचलों को अद्यतन करने में होता है। अपव्यय प्राचल आरंभ में छोटा मान ($\beta_i \ll 1$) होता है, और भारण इतिहास में ऊर्जा अपव्यय के साथ बढ़ता है। कुल अपव्ययित ऊर्जा के संदर्भ क्षमता के समीप पहुँचने पर अपव्यय प्राचल अनंत की ओर जाता है, जो संरचनात्मक पतन दर्शाता है। संगणकीय प्रयोजनों के लिए भारण इतिहास की अवधि में β के मान $0 \leq \beta_i \leq 1$ के परास में होने चाहिए। शून्य से कम और एक से अधिक मान संकेत करते हैं कि संदर्भ शैथिल्य ऊर्जा क्षमता समाप्त हो चुकी है और संरचनात्मक क्षमता ह्रास से संरचनात्मक भार- वहन क्षमता की हानि होगी। Rahnama और Krawinkler अवनति-दर प्राचल के लिए $1 \leq c \leq 2$ का परास सुझाते हैं।

199 कम-से-कम एक दिशा में पराभव प्राप्त होते ही ह्रास विधाएँ संरचनात्मक क्षमता को ह्रासित करना आरंभ करती हैं। भारमोचन दृढता विधा को छोड़कर प्रत्येक विधा का अद्यतन मॉडल के क्षैतिज अक्ष को पार करने पर होता है, जो धनात्मक से ऋणात्मक प्रतिबल अथवा इसके विपरीत परिवर्तन के अनुरूप है। भारण के क्षैतिज अक्ष पार करके किसी दिशा में आगे बढ़ने पर प्रत्येक प्रतिबल अवस्था (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) के लिए अद्यतन स्वतंत्र रूप से होते हैं। उदाहरणार्थ, धनात्मक शाखा पर भारमोचन और ऋणात्मक शाखा पर भारण आरंभ होने पर ऋणात्मक पक्ष की मूल सामर्थ्य क्षमता, कैप-पश्चात क्षमता और पुनर्भारण दृढता (मापांक) अद्यतन होते हैं। दूसरी ओर, भारमोचन दृढता (मापांक) का अद्यतन विकृति-व्युत्क्रमण पर होता है।

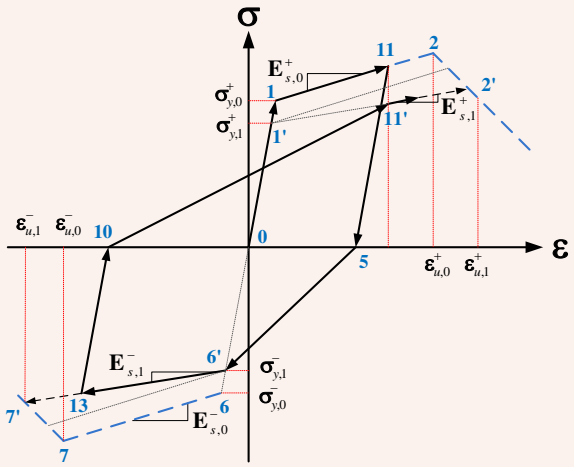
200 ह्रास विधाओं के लिए प्रस्तुत चित्र संकुचन मॉडल को प्रमुखता देते हैं, यद्यपि विराम-बिंदुओं को हटाकर और सीधे लक्ष्य बिंदुओं तक पुनर्भारण करके यही अवधारणा शिखर-उन्मुख मॉडल तक विस्तारित होती है।

62.3.3.2.1 मूल सामर्थ्य-ह्रास विधा

201 मूल सामर्थ्य-ह्रास विधा विकृति-दृढीकरण शाखा की ओर पुनर्भारण के दौरान सामर्थ्य में कमी का लेखा रखती है और भौतिक रूप से विधा 1, चित्र 62.55, का प्रतिनिधित्व करती है। यह विकृति-दृढीकरण शाखा, चित्र 62.56, को मूलबिंदु की ओर स्थानांतरित करती है; इसके लिए पराभव प्रतिबल (1 से 1') और दृढीकरण मापांक ($E_{s,o}^{\mp}$ से $E_{s,1}^{\mp}$) को अपव्यय प्राचल β_s द्वारा घटाया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

202 क्षैतिज अक्ष पार होने (बिंदु 5 अथवा 10) पर केवल भारण की दिशा के पराभव प्रतिबल और दृढीकरण मापांक अद्यतन होते हैं। पुनः, इस अनुभाग के चित्र संकुचन मॉडल में ह्रास विधाओं का समावेश विस्तार से दिखाते हैं, यद्यपि शिखर-उन्मुख मॉडल में भी उनका समान कार्यान्वयन है। केवल अतिरिक्त पुनर्भारण शाखा का अंतर है, जो संकुचन विराम-बिंदुओं को लक्ष्य करती है। ह्रासित मान निम्न प्रकार निर्धारित



चित्र 62.56: मूल सामर्थ्य-ह्रास विधा

होते हैं:

$$\sigma^{+/-}_{y,i} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) \sigma^{+/-}_{y,i-1}$$
$$E^{+/-}_{s,i} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) E^{+/-}_{s,i-1}$$

जहाँ

$\beta_{s,i}$ समय-चरण i के लिए मूल सामर्थ्य अपव्यय प्राचल
$\sigma^{+/-}_{y,i-1}$ समय-चरण i-1 के लिए दिशात्मक पराभव प्रतिबल
$\sigma^{+/-}_{y,i}$ समय-चरण i के लिए दिशात्मक पराभव प्रतिबल
$E^{+/-}_{s,i-1}$ समय-चरण i-1 के लिए दिशात्मक विकृति-दृढीकरण मापांक
$E^{+/-}_{s,i}$ समय-चरण i के लिए दिशात्मक विकृति-दृढीकरण मापांक

$$\sigma^{+/-}_{y,i} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) \sigma^{+/-}_{y,i-1}$$
$$E^{+/-}_{s,i} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) E^{+/-}_{s,i-1}$$

203 जैसा पहले कहा गया, जिस चरण में भारण क्षैतिज अक्ष पार करके किसी दिशा में आरंभ होता है, धनात्मक और ऋणात्मक मानों का स्वतंत्र अद्यतन किया जाता है। मूल सामर्थ्य अपव्यय प्राचल ($\beta_{s,i}$)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मूल सामर्थ्य से संबंधित शैथिल्य क्षमता का उपयोग करता है, जिसका निर्धारण शैथिल्य क्षमता गुणक γ_s से होता है।

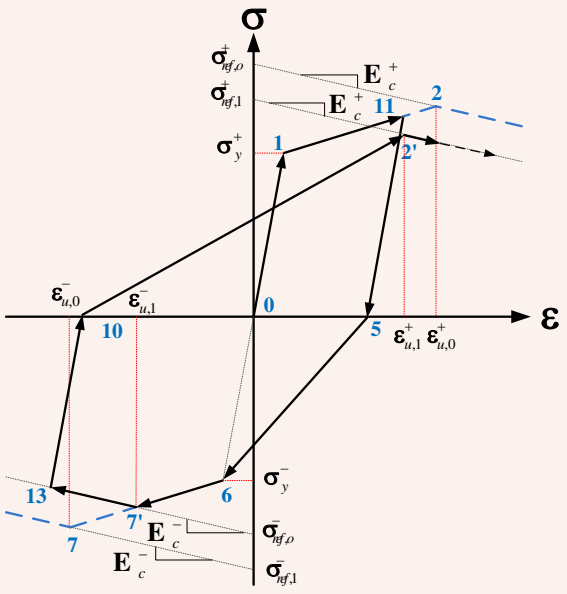
$$E_{hys,s} = \gamma_s \sigma_y \varepsilon_y$$

$$\beta_{s,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,s} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$

204 $0 \leq \beta_{s,i} \leq 1$ की अपेक्षा के कारण पराभव प्रतिबल और दृढीकरण ढाल के मान कभी शून्य से नीचे ह्रासित नहीं होंगे। पराभव प्रतिबल और दृढीकरण मापांक के ह्रास से शिखर प्रतिबल (2 से 2') और लक्ष्य प्रतिबल (11 से 11') दोनों घटते हैं और भारण पथ अधिक तीव्रता से अवशिष्ट शाखा की ओर चक्रित होता है।

62.3.3.2.2 कैप-पश्चात सामर्थ्य-ह्रास विधा

205 कैप-पश्चात ह्रास विधा कैप-पश्चात (मृदुकरण) शाखा की ओर पुनर्भारण के दौरान सामर्थ्य में कमी का लेखा रखती है और भौतिक रूप से विधा 2, चित्र 62.55, का प्रतिनिधित्व करती है। यह ह्रास विधा शिखर-सामर्थ्य बिंदु (2 से 2') को स्थानांतरित करके मृदुकरण शाखा को मूलबिंदु की ओर ले जाती है। इसके लिए उस संदर्भ प्रतिबल मान को ह्रासित किया जाता है जो मृदुकरण मापांक द्वारा ऊर्ध्वाधर अक्ष (अर्थात् शून्य विकृति बिंदु) तक पीछे बहिर्वेशित शिखर प्रतिबल का प्रतिनिधित्व करता है। क्षैतिज अक्ष पार होने पर केवल भारण दिशा के लिए अद्यतन किए जाते हैं। चित्र 62.57 लेखकों द्वारा लिखे Mercury परिमित-अवयव कोड (Saouma, Kang, and Haussmann, 2012) के लिए इस सामर्थ्य-ह्रास विधा को दिखाता है। ह्रासित संदर्भ प्रतिबल कैप सामर्थ्य-ह्रास विधा के अनुरूप अपव्यय प्राचल $\beta_{c,i}$ से



चित्र 62.57: कैप-पश्चात सामर्थ्य-ह्रास विधा

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

निर्धारित होता है।

$$\beta_{c,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,c} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$
$$\sigma_{ref,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{c,i}\right) \sigma_{ref,i-1}^{+1-}$$
$$E_{hys,c} = \gamma_c \sigma_y \varepsilon_y$$

जहाँ

γ_c कैप सामर्थ्य ह्रास से संबंधित शैथिल्य ऊर्जा गुणक
$\beta_{c,i}$ समय-चरण i के लिए कैप सामर्थ्य अपव्यय प्राचल
$\sigma_{ref,i-1}^{+/-}$ समय-चरण i-1 के लिए दिशात्मक संदर्भ प्रतिबल
$\sigma_{ref,i}^{+/-}$ समय-चरण i के लिए दिशात्मक संदर्भ प्रतिबल

206 ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि मृदुकरण मापांक स्थिर रखा जाता है और केवल संदर्भ प्रतिबल बदलकर शिखर प्रतिबल ह्रासित किया जाता है। संदर्भ प्रतिबल ह्रासित होने के बाद शिखर प्रतिबल, लक्ष्य प्रतिबल–विकृति अवस्था और अवशिष्ट विकृति को अद्यतन करना आवश्यक है। समय के साथ घटे मान आगामी भारण को अवशिष्ट शाखा की ओर लक्षित करेंगे।

62.3.3.2.3 भारमोचन दृढता-ह्रास विधा

207 भारमोचन दृढता-ह्रास विधा ह्रास विधा 3, चित्र 62.55, का लेखा रखती है। अन्य ह्रास विधाओं की तुलना में यह विशिष्ट है। प्रथम, यह धनात्मक और ऋणात्मक प्रतिबल शाखाओं के लिए स्वतंत्र रूप से अद्यतन नहीं होती। इसके स्थान पर दोनों दिशाएँ अद्यतन होती हैं, जिसका अर्थ है कि भारमोचन दृढता ह्रास अन्य विधाओं से अधिक तीव्र हो सकता है।

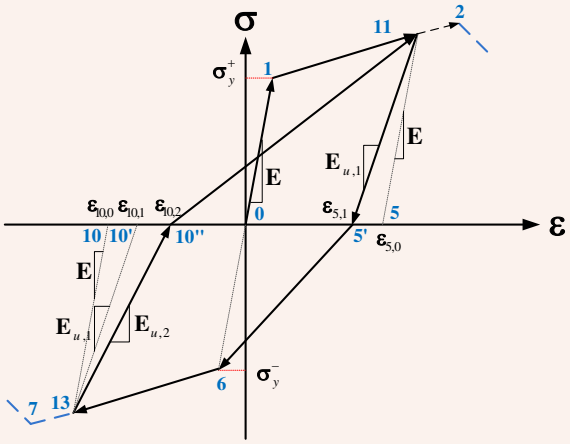
208 साथ ही, भारण के क्षैतिज अक्ष पार करने पर ह्रास नहीं होता। विकृति-व्युत्क्रमण होने पर, अर्थात् जिस समय-चरण में पहली बार भारमोचन होता है, भारमोचन दृढता अद्यतन होती है, चित्र 62.58। यह विधा संबद्ध अपव्यय प्राचल $\beta_{k,i}$ का उपयोग करके भारमोचन मापांक को ह्रासित करती है।

$$E_{hys,k} = \gamma_k \sigma_y \varepsilon_y$$
$$\beta_{k,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,k} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$
$$E_{u,i} = \left(1 - \beta_{k,i}\right) E_{u,i-1}$$

जहाँ

γ_k भारमोचन दृढता ह्रास से संबंधित शैथिल्य ऊर्जा गुणक
$\beta_{k,i}$ समय-चरण i के लिए भारमोचन दृढता अपव्यय प्राचल
$E_{u,i-1}$ समय-चरण i-1 के लिए भारमोचन मापांक
$E_{u,i}$ समय-चरण i के लिए भारमोचन मापांक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.58: भारमोचन दृढता-ह्रास विधा

209 एक पूर्ण चक्र में भारमोचन मापांक आरंभिक प्रत्यास्थता के बराबर मान से दो बार ह्रासित होता है। इससे बिंदु 5 और 10 के विकृति मान मूलबिंदु की ओर स्थानांतरित (5-5' और 10-10'-10") होते हैं और भारमोचन त्वरित होता है। चूँकि यह विधा अन्य विधाओं की तुलना में दुगुनी बार अद्यतन हो सकती है, यदि दोनों दिशाओं में तुलनीय ऊर्जा अपव्यय अपेक्षित हो तो इससे संबंधित उपयुक्त γ मान अन्य विधाओं के मान से दुगुना तक होना चाहिए (Ibarra, 2004)। पर्याप्त γ मान न चुनने पर शैथिल्य क्षमता समयपूर्व समाप्त होगी और अन्य विधाओं की शैथिल्य क्षमता समाप्त होने से बहुत पहले $\beta_{k,i}$ का मान अनंत की ओर जाकर शून्य से नीचे गिर जाएगा।

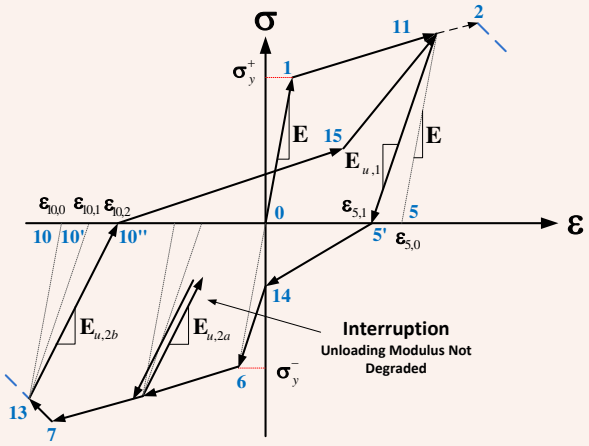
210 भारमोचन दृढता-ह्रास विधा की एक अन्य विशिष्ट विशेषता यह है कि अद्यतन केवल तभी होते हैं जब एक शाखा (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) पर भारमोचन पूर्ण हो चुका हो और विपरीत शाखा पर पुनर्भारण आरंभ हो गया हो, चित्र 62.59। भारमोचन पूर्ण न होने और उसी ओर पुनर्भारण आरंभ होने पर इसे व्यवधान माना जाता है और अद्यतन मान ($E_{u,2a}$, चित्र 3.19) उपेक्षित कर दिया जाता है। अगला विकृति-व्युत्क्रमण होने पर उपेक्षित ह्रासित मान को नई अपव्ययित ऊर्जा पर आधारित नए मान $E_{u,2b}$, जो चित्र 62.59 में दर्शाया गया है, से बदल दिया जाता है।

211 पूर्ण भारमोचन हो जाने पर वर्तमान ह्रासित मान संचित होता है और अगले विकृति-व्युत्क्रमण पर पुनः ह्रासित होता है। भारमोचन दृढता के ह्रास के साथ शैथिल्य ऊर्जा अपव्यय बढता है, जिससे अन्य विधाओं का तीव्र ह्रास होता है।

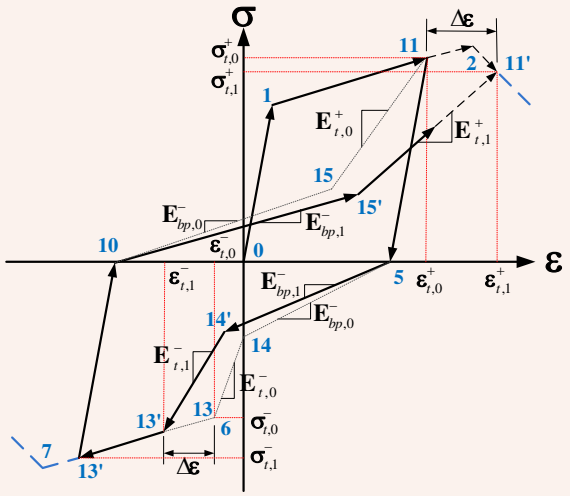
62.3.3.2.4 त्वरित पुनर्भारण दृढता-ह्रास विधा

212 त्वरित पुनर्भारण दृढता-ह्रास विधा विधा 4, चित्र 62.55, का लेखा रखती है। यह विधा दिशात्मक लक्ष्य विकृति मान का निरपेक्ष मान बढाती है। इससे लक्ष्य बिंदु (11-11') और विराम-बिंदु (15-15' तथा 14-14') मूलबिंदु से दूर स्थानांतरित होते हैं और पुनर्भारण मापांक घटता है। क्षैतिज अक्ष पार होने पर केवल भारण दिशा के लिए अद्यतन होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 62.59: भारमोचन व्यवधान



चित्र 62.60: त्वरित पुनर्भारण दृढता-ह्रास विधा

प्रतिरूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

213 त्वरित पुनर्भारण अपव्यय प्राचल $\beta_{a,i}$ से मान समायोजित करके लक्ष्य विकृति को स्थानांतरित किया जाता है।

$$E_{hys,a} = \gamma_a \sigma_y \varepsilon_y$$
$$\beta_{a,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,a} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$
$$\varepsilon_{t,i}^{+/-} = \left(1 + \beta_{a,i}\right) \varepsilon_{t,j-1}^{+/-}$$

जहाँ

γ_a त्वरित पुनर्भारण दृढता ह्रास से संबंधित शैथिल्य ऊर्जा गुणक
$\beta_{a,i}$ समय-चरण i के लिए त्वरित पुनर्भारण अपव्यय प्राचल
$\varepsilon_{t,i-1}^{+/-}$ समय-चरण i-1 के लिए दिशात्मक लक्ष्य विकृति
$\varepsilon_{t,i}^{+/-}$ समय-चरण i के लिए दिशात्मक लक्ष्य विकृति

214 लक्ष्य विकृति के स्थानांतरण से पुनर्भारण त्वरित होता है और शैथिल्य ऊर्जा अपव्यय बढने पर भारण पथ अधिक तीव्रता से अवशिष्ट शाखा को लक्ष्य करता है।

62.3.3.3 सारांश

215 क्रमशः §62.3.3.1.1 और 62.3.3.1.2 में विवेचित शिखर-उन्मुख तथा संकुचन शैथिल्य संघटक मॉडल, दोनों को Mercury में कार्यान्वयन के लिए चुना गया है। दोनों मॉडल समान एकदिष्ट आधार-वक्र का अनुसरण करते हैं, जिसमें प्रत्यास्थ भारण शाखा, विकृति-दृढीकरण शाखा, कैप-पश्चात शाखा और अवशिष्ट सामर्थ्य शाखा सम्मिलित हैं। प्रत्येक मॉडल पिछले भारण चक्रों में अनुभव किए अधिकतम विरूपण बिंदु की ओर शिखर-उन्मुख पुनर्भारण का अनुसरण करता है। केवल यह अंतर है कि संकुचन मॉडल में दूसरी पुनर्भारण शाखा होती है, जो अधिकतम विरूपण अवस्था को लक्ष्य करने से पहले संकुचन विराम-बिंदु को लक्ष्य करती है। शैथिल्य सामर्थ्य-हानि का लेखा रखने के लिए अनुभाग 62.3.3.2.1-62.3.3.2.4 में प्रस्तुत सामर्थ्य और दृढता-ह्रास विधाओं को दोनों कार्यान्वित शिखर-उन्मुख तथा संकुचन मॉडलों में सम्मिलित करने के लिए चुना गया है।

62.3.4 Ghannoum का मॉडल

216 कंक्रीट सदस्यों के शैथिल्य चक्रीय व्यवहार के परिमाणीकरण पर अधिकांश पूर्व कार्य सीमित परीक्षण आँकड़ों तथा चक्रण के दौरान पार्श्व भार–विरूपण संबंधों के वक्ररेखीय आकार को सरल मात्रकों से निरूपित करने की कठिनाइयों से बाधित रहा है।

62.3.4.1 आधार-वक्र

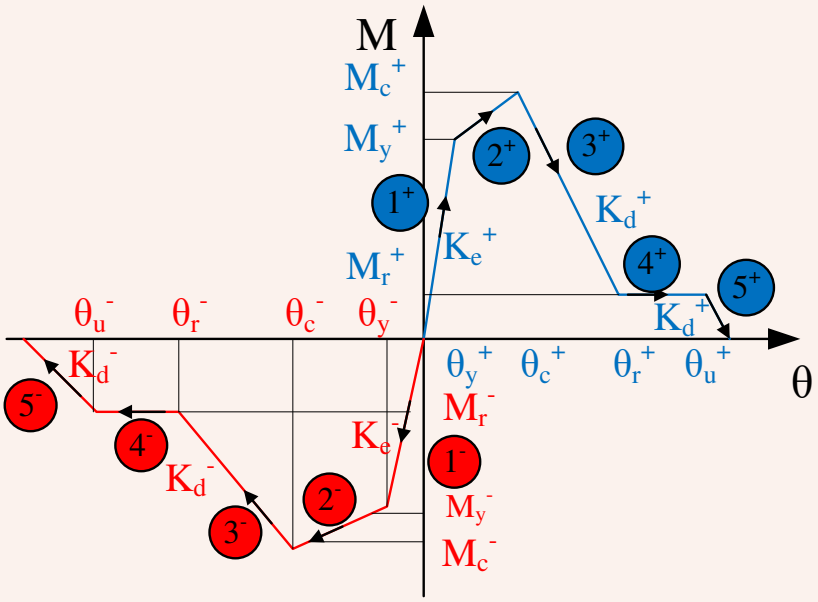
217 मॉडल की आधार-वक्र आवरण अनुक्रिया सममित और असममित व्यवहारों के लिए परिभाषित की जा सकती है, चित्र 62.61। प्रत्येक भारण दिशा की प्रथम चार शाखाएँ क्रमशः प्रत्यास्थ, दृढीकरण,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ह्रासमान और अवशिष्ट व्यवहार-परासों का प्रतिनिधित्व करती हैं। दो अवशिष्ट शाखाओं, भार पथ 4^{+} अथवा 4^{-}, में संख्यात्मक अभिसरण समस्याएँ घटाने के लिए अल्प ऋणात्मक ढाल दी गई है। दूसरी ह्रासमान शाखाएँ, भार पथ 5^{+} अथवा 5^{-}, सामर्थ्य को क्रमशः शून्य तक लाने के लिए प्रस्तुत की गई हैं और उन्हें अपनी संबंधित भारण दिशा की पहली ह्रासमान शाखा (भार पथ 3^{+} अथवा 3^{-}) के समान ढाल दी गई है।

218 यह ह्रासमान ढाल सरलता के लिए चुनी गई, क्योंकि अवशिष्ट-सामर्थ्य परास में प्रायोगिक आँकड़े विरल हैं। आधार-वक्रों को परिभाषित करने के लिए कुल चौदह उपयोगकर्ता-निविष्ट प्राचल (प्रत्येक भारण दिशा के लिए सात) आवश्यक हैं। ये प्राचल हैं: प्रत्यास्थ दृढता (K_e), पराभव आघूर्ण (M_y), कैप आघूर्ण (M_c), कैप घूर्णन (θ_c), ह्रासमान शाखा की दृढता (K_d), अवशिष्ट आघूर्ण (M_r) और चरम घूर्णन (θ_u)।

219 प्रायोगिक स्तंभ आँकड़ा-समुच्चय में पुशओवर व्यवहार वाले स्तंभ परीक्षण हैं अथवा पूर्णतः व्युत्क्रम चक्रीय व्यवहार वाले, इसके अनुसार आधार-वक्र प्राचलों का अंशांकन एकदिष्ट अनुक्रिया अथवा चक्रीय व्यवहार के आवरण को निरूपित करने के लिए किया जा सकता है।



चित्र 62.61: आधार-वक्र (Ghorbani et al., 2022)

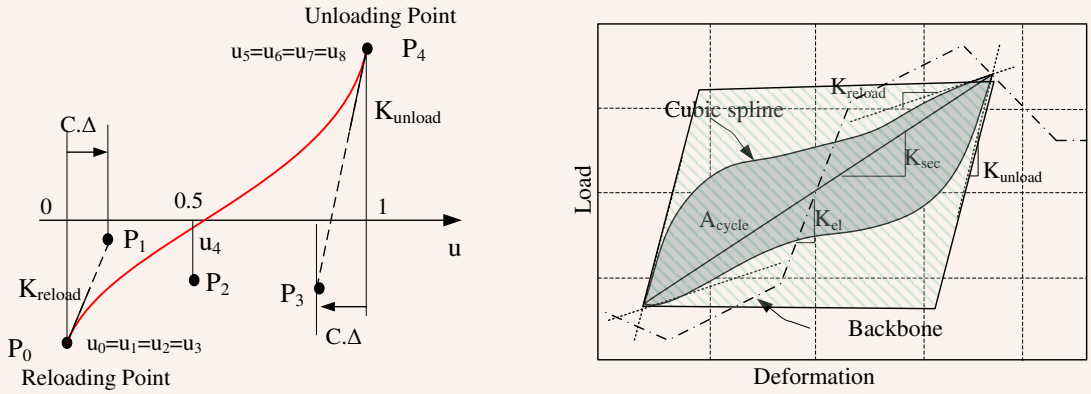
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

62.3.4.2 चक्रीय व्यवहार

220 यहाँ ऊर्जा अपव्यय, सामर्थ्य और दृढता संबंधों जैसे वैश्विक प्राचलों से कंक्रीट स्तंभों के पार्श्व बल–विरूपण व्यवहार को परिभाषित करने पर बल है (Suselo, 2021)। स्तंभ की ज्यामितीय और विवरणात्मक विशेषताओं तथा अन्य प्रासंगिक सीमा-प्रतिबंधों के संदर्भ में प्रमुख चक्रीय व्यवहारिक पक्षों के संबंध लगभग 700 स्तंभ परीक्षणों वाले पृथक रूप से विकसित आँकड़ा-संग्रह (§63.3.2.3) से परिभाषित किए गए हैं।

221 मॉडल का एक प्रमुख उद्देश्य ऐसा गणितीय व्यंजक प्रस्तुत करना था जो पूरे भारमोचन-से-पुनर्भारण भार पथ में इन विशेषताओं को पुनरुत्पादित कर सके, फिर भी अपेक्षाकृत कम ऐसे प्राचलों से परिभाषित हो जिन्हें परीक्षण आँकड़ों से वस्तुनिष्ठ रूप से निकाला जा सके और भौतिक व्यवहारों से सहजता से जोड़ा जा सके। यह संगणकीय मॉडल में पाँच नियंत्रण बिंदुओं वाले तृतीय-घात B-स्प्लाइन वक्र से प्राप्त किया गया।

222 शैथिल्य वक्रों के अंशांकन के लिए केवल तीन भौतिक रूप से सार्थक प्राचल आवश्यक हैं, चित्र 62.62।



चित्र 62.62: घनीय स्प्लाइन-आधारित शैथिल्य मॉडल (Suselo, 2021)

223 पाँच नियंत्रण बिंदुओं वाले तृतीय-घात B-स्प्लाइन वक्र को नौ गाँठों की आवश्यकता होती है। B-स्प्लाइन वक्र के अंत-बिंदुओं पर भारमोचन ढाल और पुनर्भारण ढाल निर्धारित करने से प्रथम $p+1=4$ तथा अंतिम $p+1=4$ गाँठें समान होनी चाहिए, चित्र 62.62। प्रथम और अंतिम नियंत्रण बिंदु क्रमशः उस बिंदु का प्रतिनिधित्व करते हैं जहाँ भारमोचन आरंभ होता है (भारमोचन बिंदु), तथा भारण की पुनर्भारण दिशा में लक्ष्य बिंदु (पुनर्भारण बिंदु)। इन बिंदुओं का निर्धारण शैथिल्य नियमों पर आधारित है। नियंत्रण बिंदु P_1 और P_3 अंत-बिंदु ढालों तथा एक आकार गुणक से निम्न प्रकार संबंधित हैं:

$$P_1 = P_0 + K_{unload}(C.\Delta)$$
$$P_3 = P + 4 - K_{reload}(C.\Delta)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ Δ निम्न प्रकार परिभाषित है:

$$\Delta = \frac{u_8 - u_0}{4}$$

और C वह आकार गुणक है जो वक्र का आकार नियंत्रित करता है तथा 0 और 1 के बीच बदलता है। अनेक विकल्पों के मूल्यांकन के बाद स्थिर $C = 0.1$ गुणक अपनाया गया, क्योंकि उससे कंक्रीट स्तंभों के चक्रीय व्यवहार का प्रतिनिधि स्पलाइन-वक्र आकार प्राप्त हुआ।

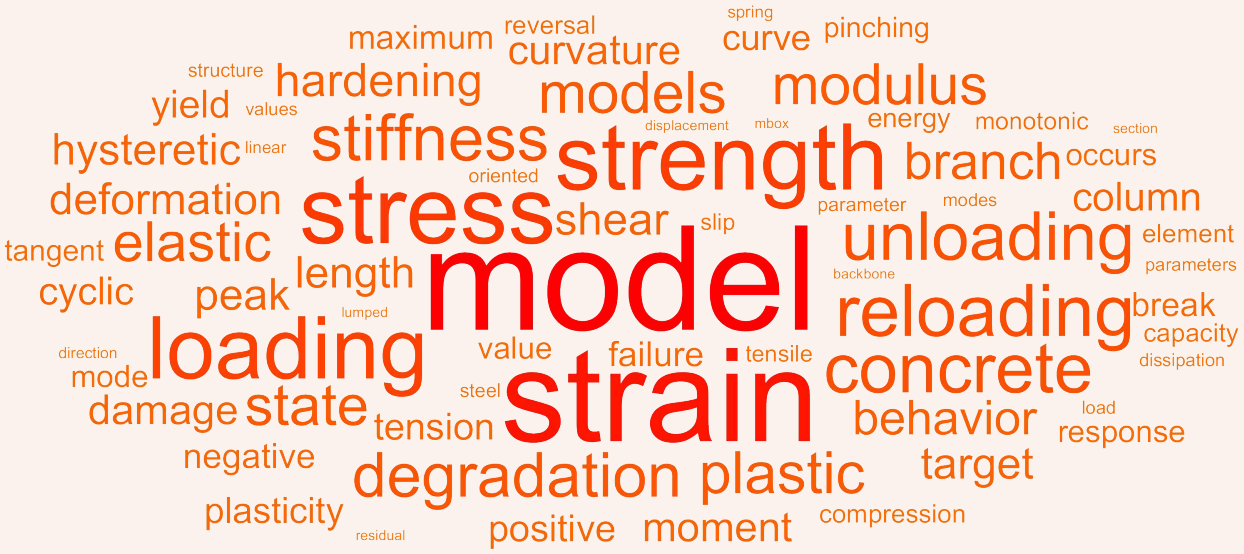
224 नियंत्रण बिंदु P_2 ऊर्जा अनुपात (ER) से निम्न प्रकार संबंधित है:

$$P_2 = (C.\Delta)(K_{reload} - K_{reload}) - \frac{1}{2}\frac{ER}{\Delta} + \frac{1}{2}(P_0 + P_4)$$

225 ER को चित्र 62.62b में शैथिल्य वक्र के भीतर की ऊर्जा (धूसर टूटी रेखा से रेखांकित क्षेत्र) और उन्हीं बिंदुओं पर आरंभ तथा समाप्त होने वाले समान भारमोचन दृढता के प्रत्यास्थ–सुघट्य चक्र-वक्र के भीतर की ऊर्जा (हरा ठोस रेखांकित क्षेत्र) के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। अंत-बिंदु ढालों के साथ यह प्राचल चक्रीय भारण के दौरान मॉडल द्वारा प्रदर्शित संकुचन अथवा वैकल्पिक रूप से ऊर्जा अपव्यय का स्तर निर्धारित करता है।

226 ER का मान घटाने से इस मॉडल में संकुचन व्यवहार का स्तर बढता है।

227 अतः इस मॉडल से किसी स्प्रिंग का चक्रीय व्यवहार परिभाषित करने के लिए कुल पाँच प्राचल आवश्यक हैं: भारमोचन बिंदु, भारमोचन ढाल, पुनर्भारण बिंदु, पुनर्भारण ढाल और ऊर्जा अनुपात।



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

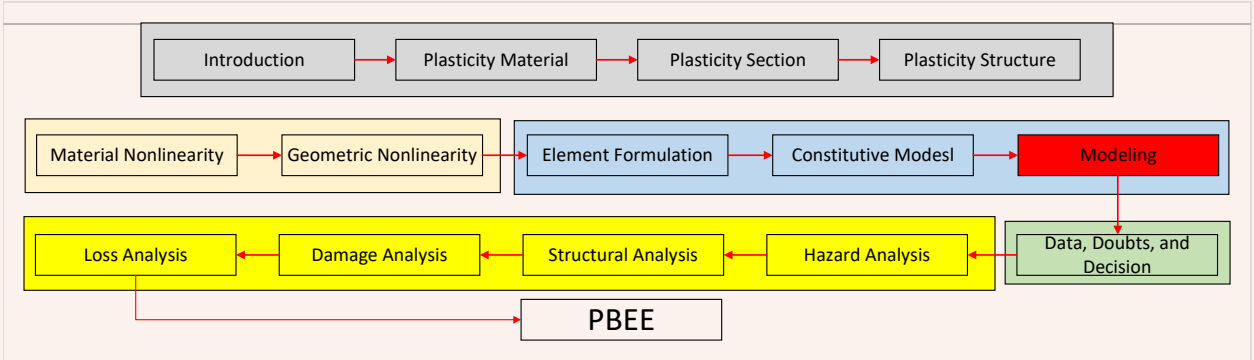
63 परिमित अवयव प्रतिरूपण का विज्ञान और कला

सारांश

परिमित अवयव विश्लेषण में एक प्रमुख कारक की प्रायः उपेक्षा की जाती है: प्रतिरूपण। जैसा कि यह अध्याय इंगित करता है, यह कला और विज्ञान दोनों है, और इसके अनुप्रयोग से परिणाम प्रभावित हो सकते हैं।

यह अध्याय पाठक को किसी भी परिमित अवयव अध्ययन से पहले की मूलभूत अनुशंसाएँ प्रदान करता है। अधिक विशिष्ट रूप से, समस्या को समझने, स्पष्ट रूप से व्यक्त करने और तत्पश्चात गणितीय रूप में परिभाषित करने; अनेक स्रोतों से आवश्यक आँकड़े एकत्र कर उनका संश्लेषण करने; तथा गणितीय (परिमित अवयव) प्रतिरूप को परिभाषित करने की प्रक्रिया पर विचार किया गया है। विशेषतः, इसमें प्रतिरूपण का विवेचन किया जाएगा, जो इस संदर्भ में उपर्युक्त सभी विषयों को संबोधित करने का विज्ञान और कला है।

63.1 परिचय 2116
63.1.1 परिमित अवयव जाल/विश्लेषण का सत्यापन 2120
63.1.2 प्रतिरूप सत्यापन और मान्यकरण की अवधारणाएँ 2120
63.2 जाल निर्माण 2121
63.2.1 स्थूल अवयव 2122
63.2.2 अनुप्रस्थ काट 2127
63.2.3 “चुनें और जोड़ें” 2128
63.2.4 समापन टिप्पणियाँ 2128
63.3 ह्रास प्राचलों का निर्धारण 2129
63.3.1 अंशांकन 2130
63.3.2 प्रतिरूपण प्राचलों का आँकड़ा-संग्रह 2130



63.1 परिचय

1 सफल विश्लेषण के लिए किसी संरचना का समुचित प्रतिरूपण अत्यंत महत्त्वपूर्ण है। अरैखिक विश्लेषण के संदर्भ में इसका महत्त्व और बढ़ जाता है।

2 सहज अनुमान के विपरीत, 1D अवयवों से किसी संरचना का प्रतिरूपण (जैसा कि अध्याय 61 में विवेचित है) उतना सरल नहीं है जितना आरंभ में प्रतीत हो सकता है। यह अध्याय इन जटिलताओं को संबोधित करता है।

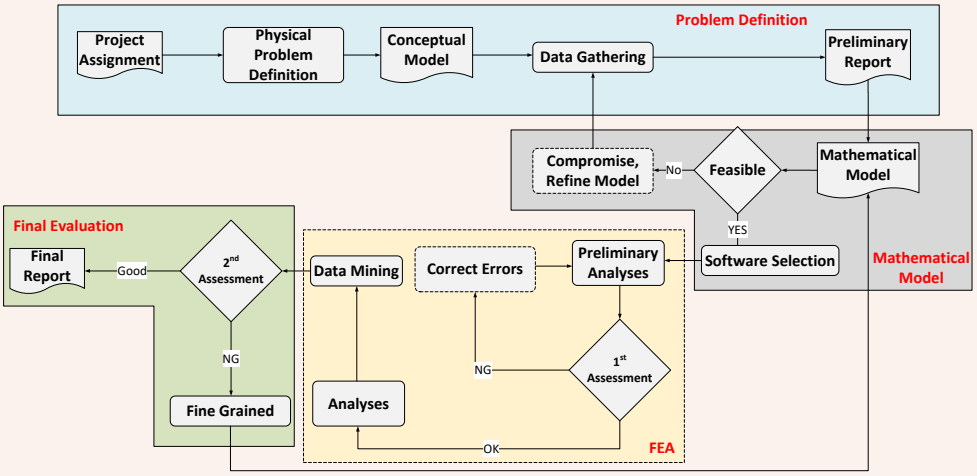
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ढाँचागत संरचनाओं का अरैखिक परिमित अवयव विश्लेषण अंततः निम्नलिखित के बीच संतुलन है:

- आवश्यकताएँ और अभिकलनीय समय की सीमाएँ,
- समस्या तथा अरैखिक विश्लेषण के सिद्धांतों की समुचित समझ,
- उपलब्ध अभिकलनीय साधन तथा संस्थान के भीतर उपलब्ध विशेषज्ञता,
- परिणामों की अपेक्षित गुणवत्ता।

विश्लेषण प्रक्रिया

विश्लेषण की सावधानीपूर्वक योजना, क्रियान्वयन और मूल्यांकन किया जाना चाहिए। सर्वाधिक कठोर पद्धति में इसके निम्नलिखित चरण होते हैं (चित्र 63.1):



चित्र 63.1: परिमित अवयव प्रक्रिया (Bathe, 1996 से प्रेरित)

प्रारंभिक विश्लेषण: सामान्यतः रैखिक प्रत्यास्थ यह चरण सामग्री गुणों, परिसीमा प्रतिबंधों और भारों की परिभाषा की जाँच करता है।

प्रारंभिक मूल्यांकन: परिणामों की "यथार्थता-जाँच" करें। क्या वे युक्तिसंगत सीमाओं के भीतर हैं, अथवा प्रारंभिक प्रतिवेदन में प्रत्याशित परिणामों से अत्यधिक भिन्न हैं? आँकड़ा प्रविष्टियों की प्रत्यक्ष त्रुटियों, मिश्रित मात्रकों अथवा अप्रत्याशित परिणामों की जाँच करें। क्या विस्थापन भारों और परिसीमा प्रतिबंधों के अनुरूप हैं? क्या भार-पथ यथार्थपरक है? परिष्करण की आवश्यकता वाले जाल क्षेत्रों तथा भिन्न वृद्धियों अथवा समाकलन योजनाओं की आवश्यकता पहचानें। क्या अभिसरण मानदंड अत्यधिक कठोर हैं?

त्रुटियों का सुधार: उन समस्याओं को दूर करें जिनके कारण प्रारंभिक परिणाम अस्वीकार्य हुए।

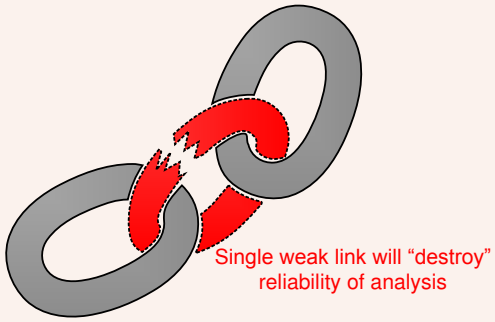
विश्लेषण: सरलतम प्रतिरूप से आरंभ कर क्रमशः अधिक जटिल प्रतिरूपों तक संरचना का वृद्धिशील विश्लेषण करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आँकड़ा खनन: निर्गत से प्रासंगिक परिणाम निकालें। कुछ सॉफ़्टवेयर विशिष्ट आँकड़ा-निर्यात की सुविधा देते हैं, जबकि अन्य नहीं। परिणामों को आलेखीय पश्च-संसाधकों अथवा ASCII निर्गत संचिकाओं से प्राप्त कर संगृहित करना पड़ सकता है। सभी प्राप्त आँकड़ों को एक Excel शीट में समेकित करना तथा आवश्यकता के अनुसार MATLAB या Python जैसे साधनों से उनका आलेखन करना सर्वोत्तम है।

5 प्रायः बड़े स्तर की विफलताएँ उन छोटे, उपेक्षित विवरणों से उत्पन्न होती हैं जिन्हें पश्चदृष्टि में प्रतिरूप में सम्मिलित किया जा सकता था और किया जाना चाहिए था। इसी बीच अन्य अप्रासंगिक विवरणों के प्रतिरूपण में पर्याप्त प्रयास व्यय हो सकता है। आवश्यक और अनावश्यक के बीच भेद करने के लिए सावधानीपूर्वक विचार अपेक्षित है।

6 अतः संपूर्ण प्रक्रिया में विवरणों पर समान रूप से ध्यान दिया जाना चाहिए (चित्र 63.2)। प्रतिरूपण के किसी विशिष्ट पक्ष के महत्त्व को कम आँकने से विफलता हो सकती है। उदाहरणार्थ, बंध-विफलता की प्रायः उपेक्षा की जाती है, किंतु स्तंभों के आधार पर भूकंपीय भारों के अधीन यह अत्यंत महत्त्वपूर्ण होती है।



चित्र 63.2: समान रूप से वितरित प्रतिरूप जटिलता

अरैखिक विश्लेषण की आवश्यकताएँ

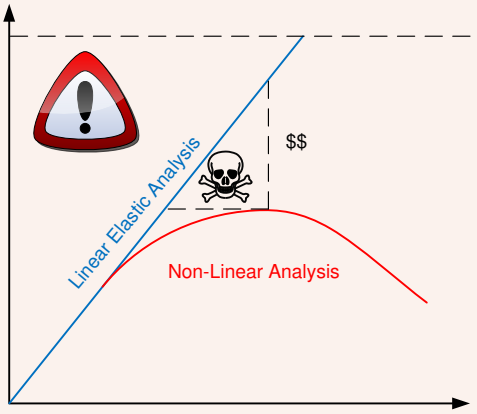
7 जहाँ अरैखिक विश्लेषण आवश्यक हो वहाँ केवल रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण पर निर्भर रहना महँगा और संकटपूर्ण दोनों हो सकता है। ऐसी निर्भरता प्रायः अत्यधिक रूढ़िवादी, स्वेच्छिक (और घटते हुए) “अभियांत्रिक विवेक” पर आधारित होती है।

8 विफलता-भार की यथार्थ पहचान न होने से “अतिक्रमण” हो सकता है, जिसके परिणामस्वरूप भंगुर अतिअभिकल्पन होता है। रैखिक विश्लेषण में विस्थापनों को कम आँकने की प्रवृत्ति भी होती है, जो गंभीर संकट उत्पन्न कर सकती है (चित्र 63.3)।

9 जटिल समस्याओं के लिए कभी-कभी जटिल विश्लेषण आवश्यक हो सकते हैं।

10 रैखिक प्रत्यास्थ समाधानों के विपरीत, अरैखिक विश्लेषण अनेक स्वीकार्य समाधान दे सकता है। भिन्न सॉफ़्टवेयर, प्रतिरूप और विश्लेषक भिन्न परिणाम दे सकते हैं; इसका अर्थ यह आवश्यक नहीं कि सभी “गलत” हैं (यद्यपि कुछ हो सकते हैं), किंतु उनकी समुचित व्याख्या आवश्यक है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 63.3: अरैखिक विश्लेषण की तुलना में रैखिक विश्लेषण की सीमाएँ

11 सावधान रहें—अरैखिक विश्लेषण सुदृढ अभियांत्रिक विवेक का विकल्प नहीं है। इसे अंतिम उपाय के रूप में, सामान्य बुद्धि, रैखिक विश्लेषण और सरलीकृत विधियों की संभावनाएँ समाप्त हो जाने के बाद ही प्रयुक्त किया जाना चाहिए।

12 आदर्शतः अरैखिक विश्लेषण का उपयोग विश्लेषण से पूर्व स्थापित किसी सुदृढ धारणा को मान्य करने अथवा परिमाणित करने के लिए किया जाना चाहिए।

13 अरैखिक विश्लेषण के संचालन में आँकड़ा-तैयारी और परिणामों की व्याख्या में अत्यधिक सावधानी अपेक्षित है।

14 परिणामों का सर्वप्रथम गुणात्मक परीक्षण किया जाना चाहिए; परिशुद्धता का अतिविश्लेषण अथवा "तीसरे दशमलव" जैसे नगण्य विवरणों पर ध्यान केंद्रित करने से बचना चाहिए।

परिभाषा 63.1: परिमित अवयव अध्ययनों की भूमिका

परिमित अवयव विश्लेषण केवल समुचित और सुदृढ अभियांत्रिक विवेक से प्रत्याशित अनुक्रिया की पुष्टि अथवा परिमाणन का साधन है।

विशेषज्ञ का चयन

15 यदि अरैखिक विश्लेषण किया जाना हो, तो ऐसा विश्लेषण कर सकने वाले "विशेषज्ञों" के चयन में अत्यधिक सावधानी अपेक्षित है। परामर्शदाता संस्थाओं के अधिकांश अभियंता रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण और संहिता-नियंत्रित अभिकल्पन के अभ्यस्त होते हैं।

16 दूसरी ओर, अकादमिक जगत में कुछ ही शोधकर्ता जटिल संरचना के अरैखिक विश्लेषण के संचालन में दक्ष होते हैं; किंतु वे प्रायः प्रतिरूप के परिधीय पक्षों को सरल बनाकर किसी संकीर्ण पक्ष पर केंद्रित हो जाते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

17 यह ध्यान रखा जाना चाहिए कि असाधारण समस्याओं की जाँच के लिए अत्यंत सुयोग्य विश्लेषकों द्वारा असाधारण तकनीकों की आवश्यकता होगी।

63.1.1 परिमित अवयव जाल/विश्लेषण का सत्यापन

परिमित अवयव जाल तैयार हो जाने के बाद उसकी प्रतिनिधित्व-क्षमता का सत्यापन वांछनीय है। इसका आकलन परिमित अवयव और प्रायोगिक मोडल प्रतिरूपों की तुलना से किया जा सकता है। पहले का निर्धारण मोडल विश्लेषण और परिमित अवयव प्रतिरूप की प्रथम प्राकृतिक आवृत्ति के निर्धारण से होता है। दूसरे को उत्केंद्रित द्रव्यमान वाले कंपित्र द्वारा संरचना में प्रणोदित कंपन उत्पन्न करके प्राप्त किया जा सकता है।

18 अरैखिक विश्लेषण के जाल का सत्यापन "पुशओवर" विश्लेषण द्वारा किया जा सकता है, ताकि यह पहचाना जा सके कि वह प्रत्याशित विफलता-विधा को पुनरुत्पादित कर सकता है या नहीं (उदाहरणार्थ, क्या प्रत्याशित विफलता की अनुमति देने के लिए जोड-अवयव समुचित रूप से परिभाषित हैं?)। अंततः, ज्ञात प्रायोगिक अनुक्रिया वाले प्रतिनिधि संरचनात्मक घटक के आधार पर अरैखिक प्रतिरूप का स्वतंत्र रूप से मान्यकरण किया जाना चाहिए (अंशांकन के लिए नीचे §63.3.1 देखें)।

63.1.2 प्रतिरूप सत्यापन और मान्यकरण की अवधारणाएँ

19 प्रायः अरैखिक परिमित अवयव कोडों को केवल प्रायोगिक रूप से प्रेक्षित आँकडों (सामान्यतः विस्थापनों) को पकड लेने पर "मान्य" मान लिया जाता है। कई बार इसके साथ अत्यंत रंगीन चित्र और साथ-साथ प्रस्तुत तुलनाएँ होती हैं। यह ध्यान रखा जाना चाहिए कि अरैखिक प्रतिरूपों में इतने चर होते हैं कि उनमें से अनेक को "समायोजित" करके ऐसा प्रतिरूप प्राप्त किया जा सकता है जो स्वीकार्य प्रतीत हो। ऐसे प्रतिरूप की सूक्ष्म जाँच आवश्यक है, जिससे सुनिश्चित हो कि सभी धारणाएँ सुदृढ और युक्तिसंगत हैं तथा अपनाए गए सामग्री-गुण यथार्थपरक हैं। दूसरे शब्दों में, केवल सतही चित्रात्मक तुलना पर्याप्त नहीं है।

20 सामान्यतः कहा जाता है कि परिमित अवयव कोड का मान्यकरण अथवा सत्यापन किया जाना चाहिए। यहाँ कुछ परिभाषाएँ उपयुक्त हैं (Thacker et al., 2004) (Stewart, 2009)।

सत्यापन यह निर्धारित करने की प्रक्रिया कि प्रतिरूप का कार्यान्वयन विकासकर्ता द्वारा दिए गए प्रतिरूप के वैचारिक वर्णन और उसके समाधान को यथार्थ रूप से निरूपित करता है। इसमें संख्यात्मक समाधानों की विश्लेषणात्मक अथवा अत्यंत परिशुद्ध मानक समाधानों से तुलना करके प्रतिरूप की त्रुटियों की पहचान और उनका निराकरण किया जाता है। संक्षेप में, सत्यापन प्रतिरूप से संबद्ध गणित से संबंधित है।

मान्यकरण यह निर्धारित करने की प्रक्रिया कि इच्छित उपयोगों के परिप्रेक्ष्य से प्रतिरूप वास्तविक संसार का कितना यथार्थ निरूपण है। इसमें संख्यात्मक समाधानों की प्रायोगिक आँकडों से तुलना करके प्रतिरूप की यथार्थता का परिमाणन किया जाता है। संक्षेप में, मान्यकरण प्रतिरूप से संबद्ध भौतिकी से संबंधित है।

अंशांकन प्रायोगिक आँकडों के साथ सहमति सुधारने के उद्देश्य से अभिकलनीय प्रतिरूप के संख्यात्मक अथवा भौतिक प्रतिरूपण प्राचलों को समायोजित करने की प्रक्रिया।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

कोड सत्यापन यह निर्धारित करने की प्रक्रिया कि कंप्यूटर कोड सही है और इच्छित रूप से कार्य कर रहा है।

कंप्यूटर प्रतिरूप गणितीय प्रतिरूप का संख्यात्मक कार्यान्वयन, जो सामान्यतः संख्यात्मक विविक्तीकरण, समाधान कलन-विधियों और अभिसरण मानदंडों के रूप में होता है।

वैचारिक प्रतिरूप धारणाओं, कलन-विधियों, संबंधों और आँकड़ों का वह समुच्चय जो अभिरुचि के यथार्थ का वर्णन करता है और जिससे गणितीय प्रतिरूप तथा मान्यकरण प्रयोग निर्मित किए जा सकते हैं।

विश्वास किसी संख्यात्मक आकलन के निर्दिष्ट परास में होने की प्रायिकता।

त्रुटि प्रतिरूपण और अनुकरण के किसी चरण अथवा क्रिया में ऐसी पहचानी जा सकने वाली कमी जो ज्ञान के अभाव के कारण न हो।

निष्ठा अनुकरण और प्रायोगिक परिणामों के बीच का अंतर।

अघटनीय chap:trustregion प्रतिरूपित की जा रही भौतिक प्रणाली से संबद्ध अंतर्निहित परिवर्तनशीलता।

गणितीय प्रतिरूप वैचारिक प्रतिरूप का वर्णन करने के लिए आवश्यक गणितीय समीकरण, परिसीमा मान, प्रारंभिक प्रतिबंध और प्रतिरूपण आँकड़े।

प्रतिरूप किसी विशिष्ट भौतिक परिदृश्य का वैचारिक/गणितीय/संख्यात्मक वर्णन, जिसमें ज्यामितीय, सामग्री, प्रारंभिक और परिसीमा आँकड़े सम्मिलित हों।

प्रतिरूप संशोधन प्रायोगिक परिणामों के साथ सहमति सुधारने के लिए प्रतिरूप की मूल धारणाओं, संरचना, प्राचल-आकलनों, परिसीमा मानों अथवा प्रारंभिक प्रतिबंधों को बदलने की प्रक्रिया।

पूर्वानुमान उन प्रतिबंधों के अधीन किसी भौतिक प्रणाली की अवस्था का पूर्वकथन करने के लिए प्रतिरूप का उपयोग, जिनके लिए प्रतिरूप का मान्यकरण नहीं हुआ है।

घटनीय chap:trustregion ज्ञान के अभाव से उत्पन्न संभावित कमी, जैसे अपूर्ण सूचना, भौतिक प्रक्रिया की अपर्याप्त समझ, विफलता-विधाओं का अस्पष्ट अथवा अविशिष्ट वर्णन आदि।

63.2 जाल निर्माण

21 (अरैखिक) अवयव सूत्रीकरण और अरैखिक संघटक प्रतिरूपों का विवेचन कर लेने के बाद अब हम दोनों को संयोजित कर यह विचार करने के लिए तैयार हैं कि ढाँचों का वास्तविक प्रतिरूपण कैसे किया जाता है, अर्थात् *जाल निर्माण*। यह मुख्यतः विज्ञान है, जिसमें कला का थोड़ा अंश भी है।

22 जाल किसी अनुकरण की यथार्थता, अभिसरण और गति को प्रभावित करता है।

23 इस प्रकार प्रतिरूपण आगामी परिमित अवयव विश्लेषण के लिए एक *गणितीय प्रतिरूप*, अर्थात् जाल, सामग्री-गुण और भार, तैयार करता है। आरंभ में ही यह स्पष्ट करना महत्त्वपूर्ण है कि किसी संरचना के प्रतिरूपण की कोई एकमात्र और “समुचित” विधि नहीं होती, क्योंकि प्रतिरूपण विज्ञान और कला दोनों है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

24 आरंभ करने से पहले हमें स्वयं से कुछ महत्त्वपूर्ण प्रश्न पूछने चाहिए:

- 2D अथवा 3D?
- स्तरित अनुप्रस्थ काट अथवा काट-बल?
- सीमा अवस्था?
- अवमंदन: Rayleigh और/अथवा शैथिल्य?
- कठोर एकल विश्लेषण अथवा सन्निकट बहुल विश्लेषण (Monte-Carlo)?
- संकेंद्रित अथवा वितरित सुघट्यता?
- बंध–फिसलन?
- पुशओवर अथवा क्षणिक विश्लेषण?
- कितनी अरैखिकता अपेक्षित है—शिखर तक अथवा शिखरोत्तर?

25 यह सदैव निम्नलिखित के बीच एक *समझौता* है:

- अपेक्षाएँ और समय/लागत की सीमाएँ।
- समस्या तथा अरैखिक विश्लेषण की हमारी समझ।
- उपलब्ध सॉफ़्टवेयर/विशेषज्ञ।
- परिणामों की अपेक्षित गुणवत्ता।

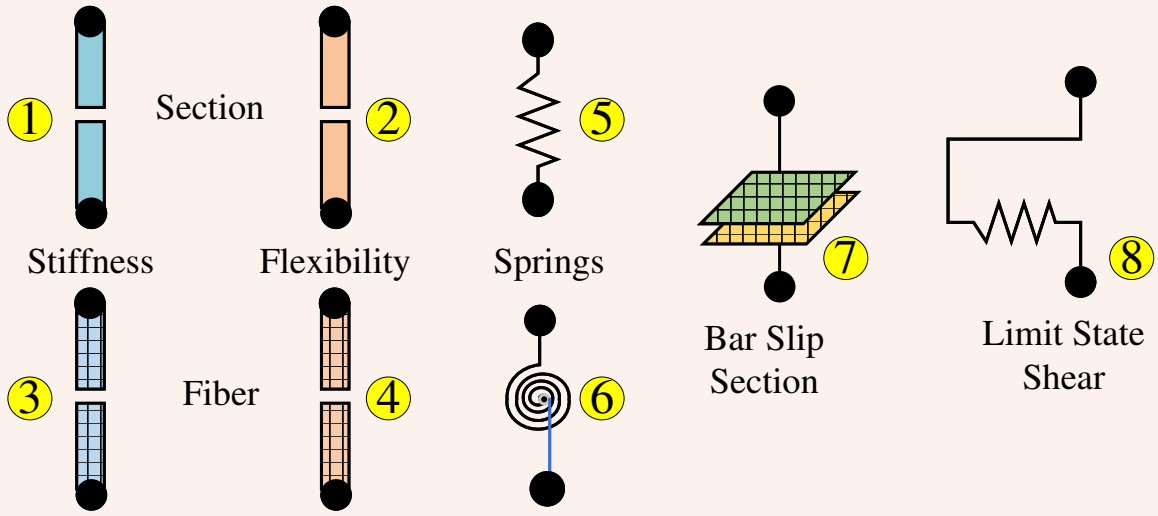
63.2.1 स्थूल अवयव

26 संतति-आधारित परिमित अवयवों के विपरीत, अरैखिक विश्लेषण में केवल किसी संयोजन अथवा धरन–स्तंभ का प्रतिरूपण करने के लिए भी अवयवों को युग्मों (अथवा त्रिकों) में उपयोग करना पड़ता है। इन पृथक अवयवों (जिनका सूत्रीकरण अध्याय 61 में किया गया है) के संयोजन को यहाँ “स्थूल अवयव” कहा जाएगा[1]।

27 हमारे पास उपलब्ध मूल अवयव चित्र 63.4 में दर्शाए गए हैं। ये वे “परमाणु” हैं जिन्हें संयोजित कर संरचनात्मक घटकरूपी “अणु” बनाए जा सकते हैं।

[1]शास्त्रीय परिमित अवयव में स्थूल अवयव अनेक अवयवों का एक में संयोजन होता है और शेष जाल से जुड़ने के लिए आंतरिक स्वतंत्रता-कोटियों को घटाकर कुछ ही कर दिया जाता है। यहाँ स्वतंत्रता-कोटियों का संघनन नहीं होगा और फलतः किसी नोड पर अनेक (आंतरिक) स्वतंत्रता-कोटियाँ हो सकती हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

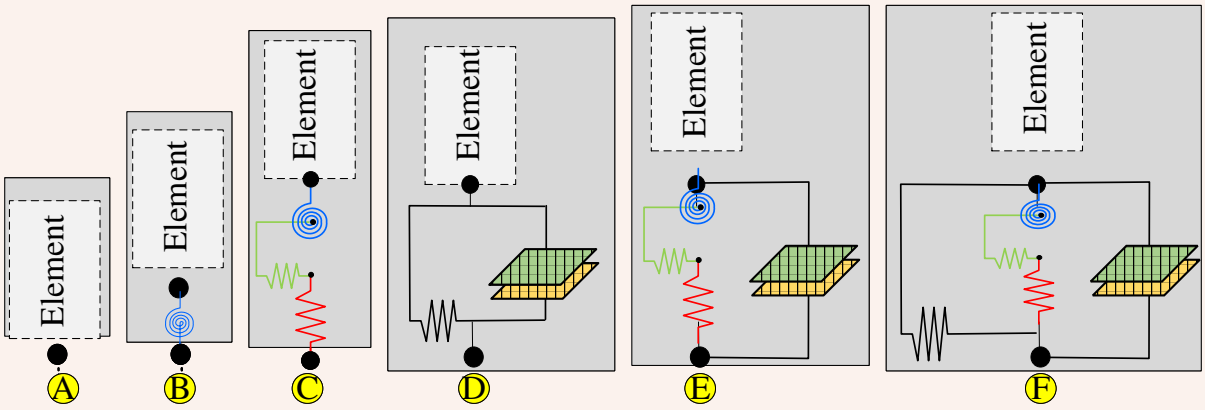


चित्र 63.4: ढाँचों के अरैखिक विश्लेषण के लिए परिमित अवयव

[28] यह ध्यान रखा जाना चाहिए कि जीवन-सुरक्षा की प्रमुख चिंता स्तंभ हैं।

[29] स्तंभों के सिरा-संयोजन सर्वोपरि महत्त्व रखते हैं। इन्हें चित्र 63.5 में दर्शाया गया है। ये सरलतम (अर्थात् कुछ भी नहीं) से लेकर सर्वाधिक जटिल (कमानी और सीमा-अवस्था उप-अवयव) तक होते हैं।

[30] संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप में बहुअक्षीय शून्य-लंबाई अवयव सामग्री प्रतिरूपों को समाहित करता है और स्वतंत्रता-कोटियों के युग्मन की अनुमति देता है; इसके लिए केवल स्तंभ की सामग्री और ज्यामितीय गुणों का निवेश आवश्यक है।



चित्र 63.5: स्तंभ सिरा-संयोजन

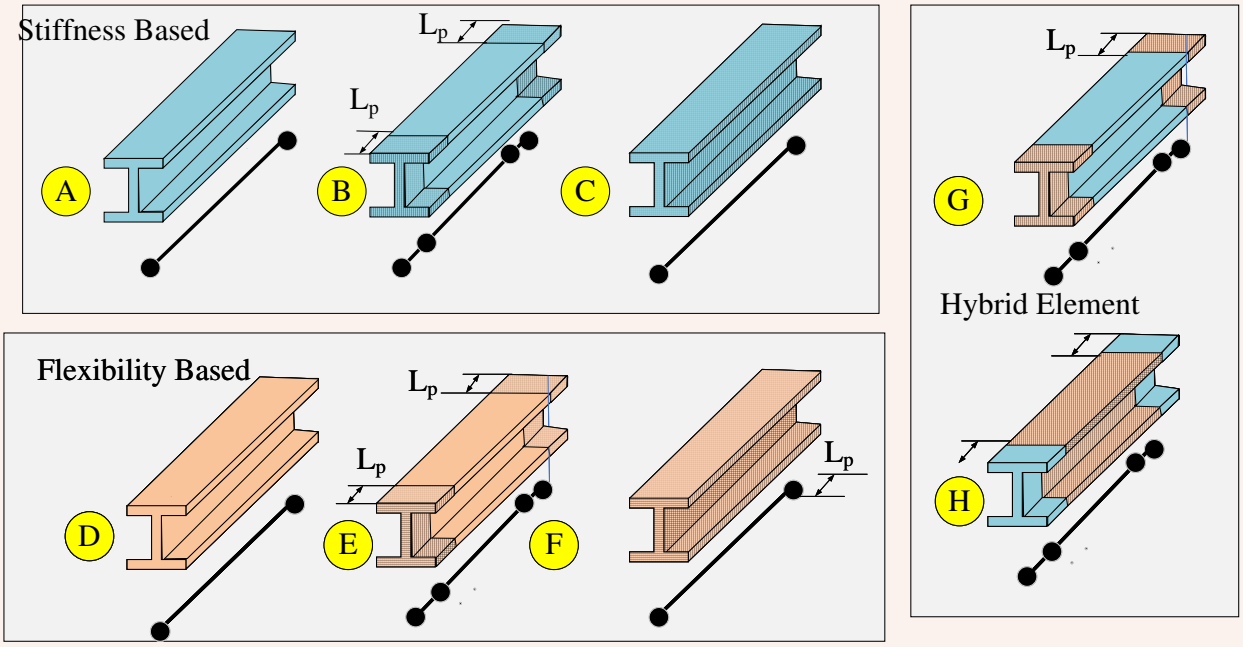
तालिका 63.1 में चित्र का और विस्तार किया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 63.1: स्तंभ संयोजन

	A	B	C	D	E	F
सरल कब्जा	✓	✓	✓	✓	✓	✓
घूर्णी कमानी		✓	✓		✓	✓
घूर्णी & स्थानांतरी कमानियाँ			✓		✓	✓
सीमा-अवस्था अपरूपण				✓		✓
बंध–फिसलन					✓	✓

31 इसी प्रकार धरन–स्तंभ किसी एक अवयव प्रकार जितने सरल हो सकते हैं, अथवा अवयवों के समुच्चय से बने हो सकते हैं (सामान्यतः सुघट्य क्षति के स्थानीयकरण, अर्थात् सुघट्य कब्जे, को निरूपित करने के लिए)।



चित्र 63.6: धरन अथवा स्तंभ अवयव

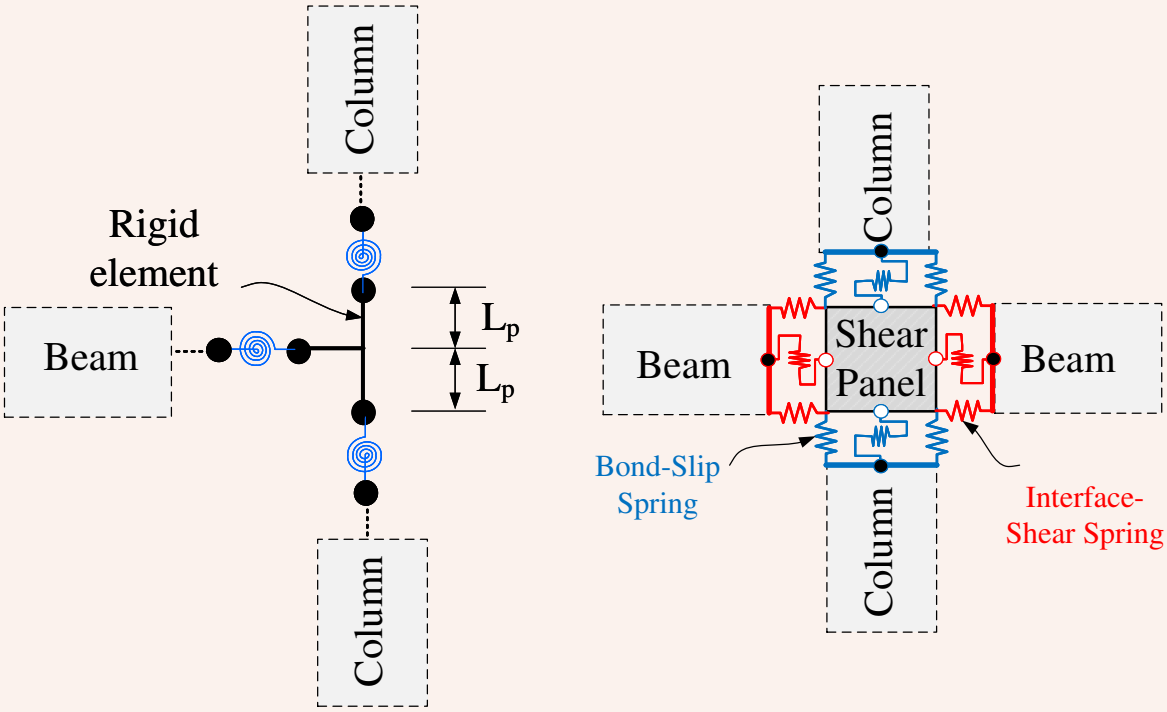
32 संयोजनों (चित्र 63.1) और अवयवों (चित्र 63.6) के संभावित युग्मन तालिका 63.2 में दर्शाए गए हैं।

तालिका 63.2: संयोजन–अवयव संगतता

धरन–स्तंभ	A	B	C	D	E	F	G	H
संयोजन	1	3|1	3	2	4|2	4	[2|4],[1|3]	[1|3],[2|4]

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

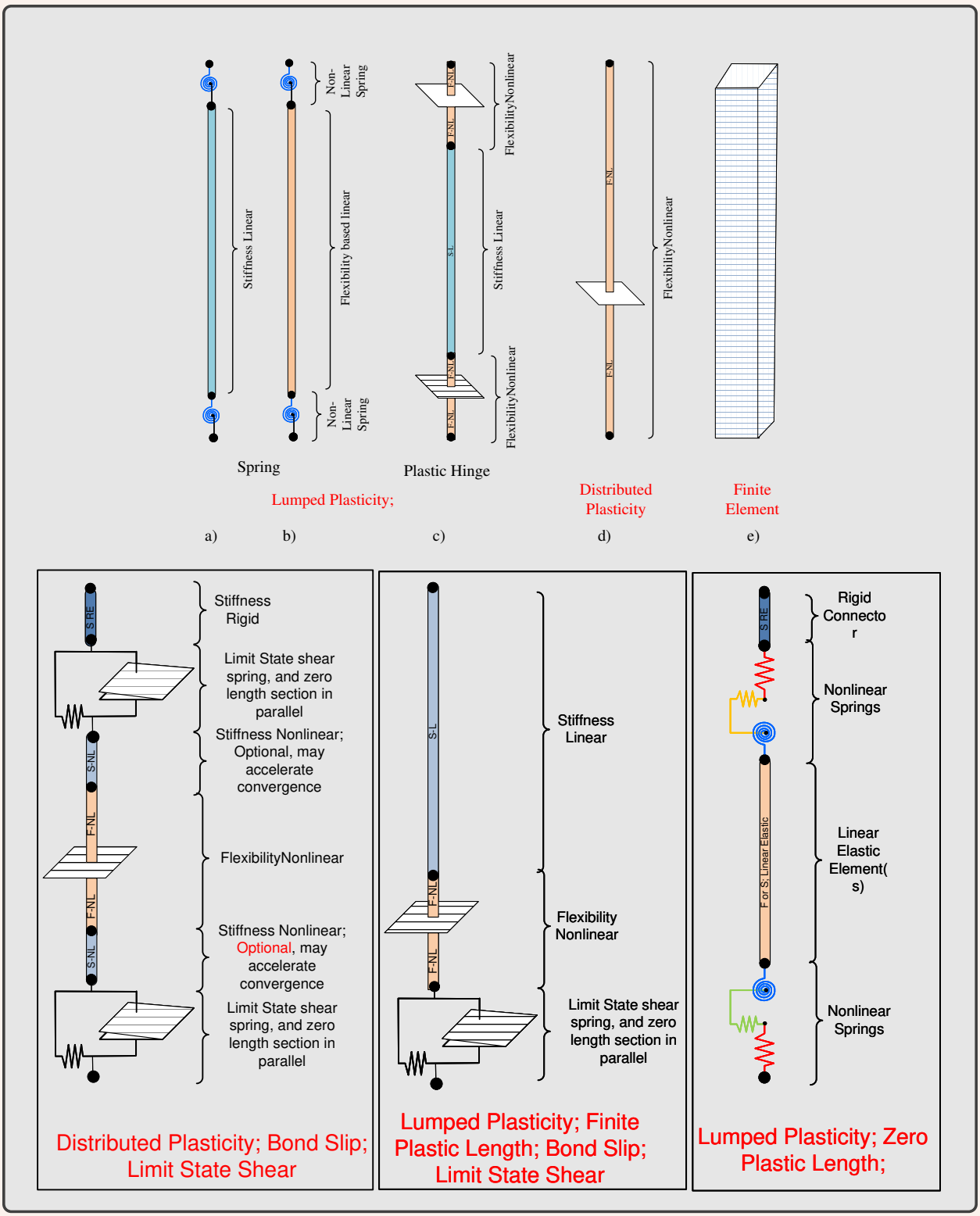
[33] संयोजनों में शून्य-लंबाई अवयवों को परस्पर नहीं जोड़ा जा सकता। इसके अतिरिक्त, अवयवों का प्रत्यक्ष संयोजन स्वतंत्र जोड़-अपरूपण और घूर्णी विरूपण को रोकता है (अर्थात् यह एक दृढ संयोजन है)। संभावित विन्यास चित्र 63.7 में दर्शाए गए हैं।



चित्र 63.7: स्तंभ–धरन संयोजन

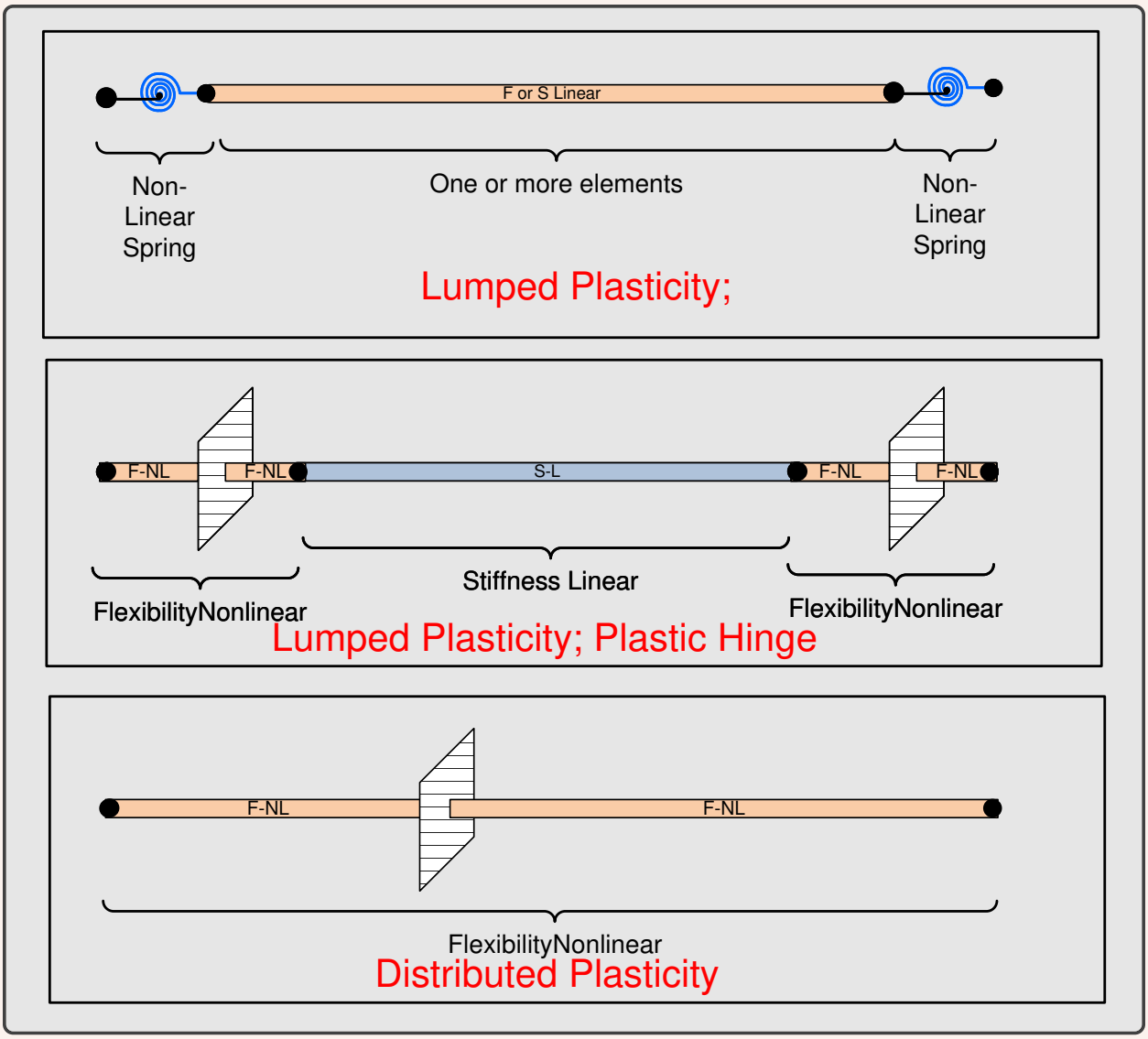
63.2.1.1 उदाहरण 63.1: स्तंभ प्रतिरूपण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

63.2.1.2 उदाहरण 63.2: धरन प्रतिरूपण



63.2.2 अनुप्रस्थ काट

34 वितरित सुघट्यता में अनुप्रस्थ काट का प्रतिरूपण विशेष महत्त्व रखता है। 2D विश्लेषण में हम स्तरों और 3D में तंतुओं का उल्लेख करते हैं।

35 यह स्पष्ट होना चाहिए कि 2D में स्तर की z स्थिति अप्रासंगिक है (और उसे निर्दिष्ट करने की आवश्यकता नहीं), चित्र 63.8।

36 हमें निम्नलिखित के बीच भेद करना चाहिए:

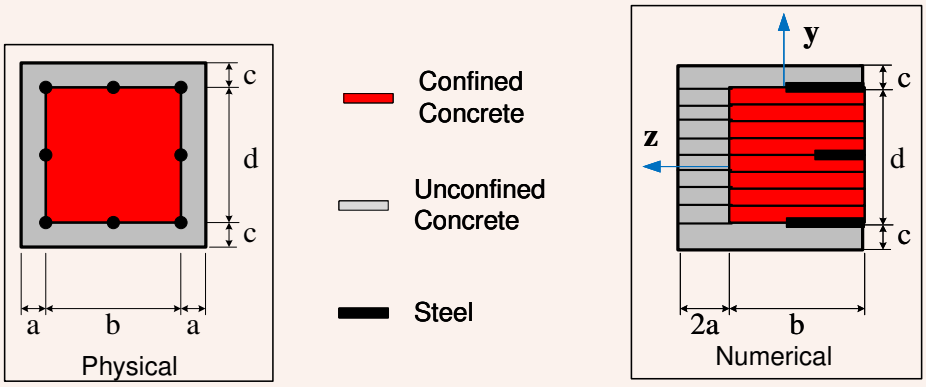
- अपरिरुद्ध कंक्रीट,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- परिरुद्ध कंक्रीट,
- प्रबलन।

क्योंकि इनमें से प्रत्येक के प्रतिबल–विकृति अभिलक्षण भिन्न होंगे, चित्र 62.12।

37 ध्यान दें कि समान y ऊँचाई पर अनेक स्तर हो सकते हैं।



चित्र 63.8: अनुप्रस्थ काट का स्तरों में प्रतिरूपण

63.2.3 “चुनें और जोड़ें”

38 संतति-आधारित परिमित अवयव में अधिकतम दो प्रकार के अवयव साथ होते हैं: संतति और जोड़।

39 ढाँचों के विश्लेषण में स्थिति कहीं अधिक जटिल होती है, क्योंकि इच्छित प्रतिरूप प्राप्त करने के लिए भिन्न प्रकार के अवयवों को एक “स्थूल अवयव” में मिलाया जा सकता है।

40 पूर्ववर्ती अवयव-संग्रहों और संयोजनों का उपयोग करके किसी ढाँचे के अनेक विन्यास बनाए जा सकते हैं।

41 सभी प्रतिरूपों को तालिका 63.3 से परिभाषित किया जा सकता है।

तालिका 63.3: प्रतिरूपण के “चुनें और जोड़ें” विकल्प

परिसीमा प्रतिबंध	स्तंभ, चित्र 63.5		संयोजन	धरन
चित्र 63.7	निचला	ऊपरी	चित्र 63.7	चित्र 63.6

63.2.4 समापन टिप्पणियाँ

42 कुछ टिप्पणियाँ:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. संकेंद्रित सुघट्यता में घूर्णी कमानी अरैखिक अथवा प्रत्यास्थ-पूर्णतः सुघट्य (EPP) हो सकती है।
2. यदि वितरित सुघट्यता प्रतिरूप में अत्यधिक अरैखिक विरूपण की प्रत्याशा हो, तो प्रत्येक सिरे पर अरैखिक दृढता-आधारित अवयव जोड़े जाने चाहिए।

[43] नम्यता-आधारित अवयव का उपयोग लगभग सदैव सतरित अवयवों के साथ किया जाता है (इसे काट-बलों, N_x और M_z, के पदों में भी परिभाषित किया जा सकता है)।

3. सामान्यतः धरनों के लिए बंध–फिसलन सम्मिलित नहीं की जाती।
4. यदि बंध–फिसलन का प्रतिरूपण करना हो, तो शून्य-लंबाई अवयव के समानांतर शून्य-लंबाई काट-अवयव रखा जा सकता है।
5. अल्प अरैखिकता की दशा में एक नम्यता अवयव पर्याप्त होना चाहिए; किंतु कम-से-कम 3–4 दृढता-आधारित अवयव आवश्यक होंगे।
6. दृढता-आधारित अवयव के लिए तीन (Gauss) समाकलन बिंदुओं का उपयोग करें; किंतु नम्यता अवयवों के लिए पाँच समाकलन बिंदुओं (Gauss–Lobatto, जिसमें प्रत्येक सिरे पर समाकलन बिंदु होता है) का उपयोग किया जाना चाहिए।
7. दृढता- अथवा नम्यता-आधारित अवयव के बीच चयन स्पष्ट नहीं है।

63.3 ह्रास प्राचलों का निर्धारण

[43] वितरित सुघट्यता (तंतु काट) के निवेश प्राचल सामान्यतः प्रतिबल–विकृति वक्र से संबद्ध होते हैं। सामान्यतः प्राचलों का अनुमान कंक्रीट के संपीडन सामर्थ्य और प्रत्यास्थता गुणांक से लगाया जा सकता है।

[44] संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप को अक्षीय–आनमनी अन्योन्यक्रिया प्रभावों, कंक्रीट विदरण व्यवहार, तनाव-दृढीकरण और सुघट्यता-विस्तार के अन्य प्रभावों का स्पष्ट अनुकरण करने में सक्षम होना चाहिए। इन प्रभावों को अधिकांशतः अद्वितीय $P-\Delta$ अथवा $M-\theta$ संबंधों द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जो किसी विशिष्ट स्तंभ अभिकल्पन का “हस्ताक्षर” बनाते हैं और इस प्रकार अवयव के “ह्रास प्राचलों” को व्यक्त करते हैं।

[45] प्रत्येक धरन–स्तंभ विन्यास के लिए ये वक्र अद्वितीय होते हैं, अतः इनके हस्ताक्षर की पहचान आवश्यक है। दो संभावनाएँ हैं, तालिका 63.4:

1. अंशांकन,
2. आँकड़ा-संग्रह।

[46] भूकंप के दौरान भवनों की स्थिरता की दृष्टि से स्तंभ सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण अवयव होते हैं, इसलिए सामान्यतः धरनों का अंशांकन नहीं किया जाता।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 63.4: ह्रास का परिमाणन

विधि	संख्यात्मक प्राचल	आलेख
अंशांकन	नहीं	हाँ
आँकड़ा-संग्रह	हाँ	नहीं

63.3.1 अंशांकन

47 अंशांकन में निम्नलिखित सम्मिलित हैं:

1. साहित्य में विश्लेषित धरन–स्तंभ के अनुरूप (विमाओं, प्रबलन और कंक्रीट गुणों की दृष्टि से) तथा प्रकाशित प्रयोगशाला-परीक्षण परिणामों वाला धरन–स्तंभ खोजें। ध्यान दें कि इन आँकड़ों में संगत दृढता मान सम्मिलित नहीं होते (वे आँकड़ा-संग्रहों में पृथक रूप से दिए जाते हैं, §63.3.2)।
2. अनेक संख्यात्मक अनुकरण करें और निवेश प्राचलों को तब तक "समायोजित" करें जब तक पूर्वानुमानित वक्र प्रायोगिक वक्र के पर्याप्त निकट न आ जाए।

48 इस प्रकार प्रतिरूप प्राचलों को मूलतः इस प्रकार "समायोजित" किया जाता है कि पूर्वानुमानित अनुक्रिया प्रायोगिक रूप से निर्धारित अनुक्रिया के यथासंभव निकट हो।

49 स्पष्टतः ऐसा "हस्तचालित" निर्धारण समय-साध्य हो सकता है और लगभग इष्टतम प्राचल भी नहीं दे सकता। नीचे वर्णित प्राचल-पहचान पद्धति द्वारा इस प्रक्रिया को स्वचालित और उन्नत किया जा सकता है।

63.3.1.1 प्राचल पहचान

50 इस विधि का विस्तृत वर्णन अध्याय 65 में किया गया है, क्योंकि यह इस पुस्तक में विवेचित अन्य विषयों पर भी लागू होती है।

63.3.2 प्रतिरूपण प्राचलों का आँकड़ा-संग्रह

63.3.2.1 Peer/Berry

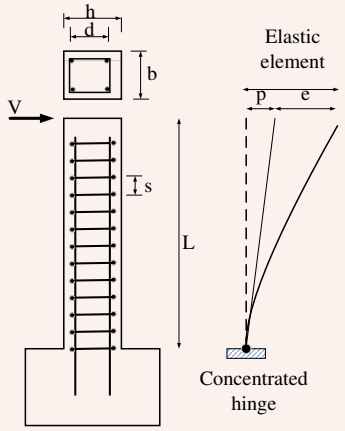
51 अंशांकन का एक विकल्प ऐसे आँकड़ा-संग्रहों की पहचान करना है जिनमें स्तंभ विनिर्देश और संगत ह्रास प्राचल सूचीबद्ध हों। सर्वाधिक व्यापक रूप से प्रयुक्त संग्रहों में (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) सम्मिलित है।

52 ढाँचागत भवनों के लिए व्यापक रूप से प्रयुक्त एक आँकड़ा-संग्रह Berry, Parrish, and Eberhard, 2004 ने विकसित किया। इसमें कई सौ RC धरन–स्तंभों के स्थिर चक्रीय और एकदिश परीक्षणों के प्रकाशित परिणाम हैं। प्रत्येक परीक्षण के लिए संग्रह में स्तंभ की ज्यामिति, प्रबलन और सामग्री-गुण, बल–विस्थापन इतिहास, नियंत्रक विफलता-विधा तथा अन्य प्रासंगिक सूचना दी गई है।

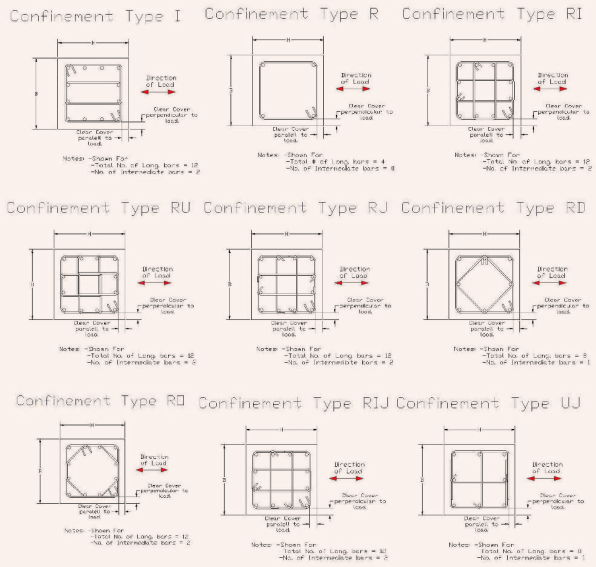
53 सभी आँकड़े चित्र 63.9 में दर्शाए गए समतुल्य प्रास विन्यास के रूप में दिए गए हैं। द्विवक्रता में

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परीक्षित स्तंभों के लिए Berry, Parrish, and Eberhard, 2004 ने सामान्यतः स्तंभ की मध्य-ऊँचाई पर स्थिर नति-बिंदु मानकर समतुल्य स्तंभ में रूपांतरण किया है।



चित्र 63.9: RC धरन–स्तंभ का आदर्शीकृत प्रास प्रतिरूप (Haselton et al., 2016)



चित्र 63.10: परिरोध के प्रकार (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004)

54 आँकड़ा-संग्रह को वेब के माध्यम से सरलता से देखा जा सकता है, चित्र 63.11।

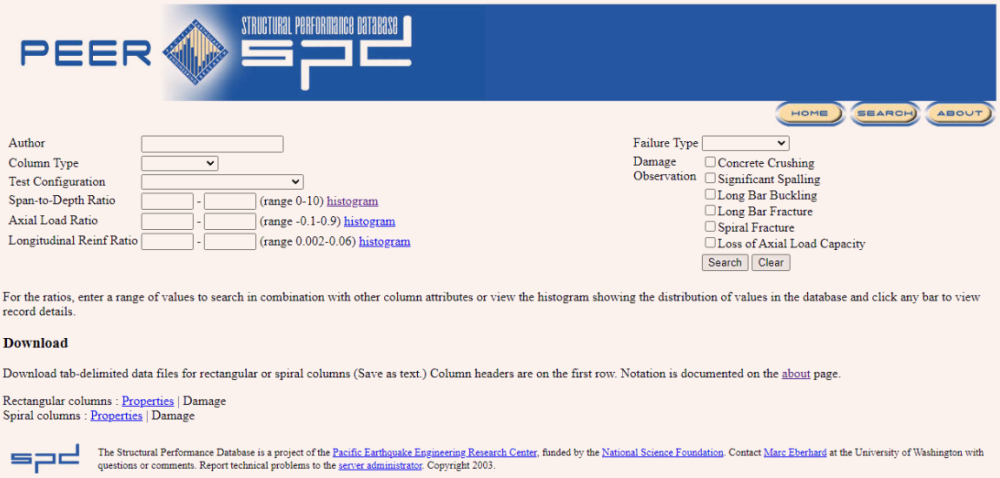
63.3.2.1.1 स्तंभ गुण

55 (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) से ली गई तालिकाएँ इस तथा इसी प्रकार के आँकड़ा-संग्रहों में सामान्यतः उपलब्ध आँकड़ों के समुच्चय को दर्शाती हैं (तालिका 63.5–63.7)।

63.3.2.1.2 आनमनी क्षमताओं का सारांश

56 परिकलित आनमनी क्षमताओं का सारांश तालिका 63.11 में दिया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 63.11: PEER संरचनात्मक निष्पादन आँकड़ा-संग्रह का आलेखीय उपयोक्ता अंतरापृष्ठ (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004)

तालिका 63.5: सामग्री-गुण

सामग्री	संकेतन	गुण का वर्णन	स्तंभ प्रकार
कंक्रीट	f'_c	कंक्रीट का अभिलाक्षणिक संपीडन सामर्थ्य (MPa)	R, S
अनुदैर्ध्य प्रबलन	f_{yl}	अनुदैर्ध्य प्रबलन का पराभव प्रतिबल (MPa)	S
	f_{su} long.	अनुदैर्ध्य प्रबलन का चरम इस्पात सामर्थ्य (MPa)	S
	f_{yl} Corner	अनुदैर्ध्य कोने की छड़ों का पराभव प्रतिबल (MPa)	R
	f_{yl} Inerm.	अनुदैर्ध्य मध्यवर्ती छड़ों का पराभव प्रतिबल (MPa)	R
	f_{su} Corner	अनुदैर्ध्य कोने की छड़ों का चरम इस्पात सामर्थ्य (MPa)	R
	f_{su} Interm.	अनुदैर्ध्य मध्यवर्ती छड़ों का चरम इस्पात सामर्थ्य (MPa)	R
अनुप्रस्थ प्रबलन	f_{yt}	अनुप्रस्थ प्रबलन का पराभव प्रतिबल (MPa)	R, S
	f_{su} trans.	अनुप्रस्थ प्रबलन का चरम इस्पात सामर्थ्य (MPa)	R, S

तालिका 63.6: अनुप्रस्थ काट का वर्गीकरण

संकेतन	अनुप्रस्थ काट की आकृति	कोड
O	अष्टकोणीय	2
C	वृत्ताकार	0
S	वर्गाकार	3

63.3.2.1.3 उदाहरण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 63.7: विफलता-विधा कोड

विफलता	कोड
आनमन	1
अपरूपण	2
आनमन–अपरूपण	3

तालिका 63.8: स्तंभ ज्यामिति

	संकेतन	वर्णन	स्तंभ प्रकार
स्तंभ की समग्र विमाएँ	H or D	स्तंभ की गहराई (mm)	R, S
	B	स्तंभ की चौड़ाई (mm)	R
	कूषेत्रफल (A_g)	स्तंभ का अनुप्रस्थ काट कूषेत्रफल (mm^2)	R, S
	L	समतुल्य प्रास की लंबाई (mm)	R, S
अनुदैर्ध्य प्रबलन	कुल छड़ें #	अनुदैर्ध्य प्रबलन छड़ों की संख्या	R, S
	छड व्यास	अनुदैर्ध्य प्रबलन छड़ों का व्यास (mm)	S
	कोने की छड का व्यास	अनुदैर्ध्य कोने की छड़ों का व्यास (mm)	R
	मध्यवर्ती छड का व्यास	अनुदैर्ध्य मध्यवर्ती छड़ों का व्यास (mm)	R
	Lsplice	अनुदैर्ध्य प्रबलन अतिव्यापन की लंबाई	R, S
	प्रबलन अनुपात	अनुदैर्ध्य प्रबलन अनुपात (परिकलित)	R, S
अनुप्रस्थ प्रबलन	छड व्यास	अनुप्रस्थ प्रबलन का व्यास (mm)	R, S
	अंतराल	अनुप्रस्थ प्रबलन का अंतराल (mm)	R, S
	आयतनी अनुप्रस्थ	आयतनी अनुप्रस्थ प्रबलन अनुपात (प्रतिवेदित)	R, S
	Nv	अनुप्रस्थ काट में अनुप्रस्थ अपरूपण छड़ों की संख्या	R, S
	स्पष्ट आवरण (आयताकार)	स्तंभ की बाहरी सतह से अनुप्रस्थ प्रबलन के बाहरी किनारे तक की दूरी (mm)	R
	स्पष्ट आवरण (सर्पिल)	स्तंभ की बाहरी सतह से अनुप्रस्थ प्रबलन के केंद्र तक की दूरी (mm)	S

[57] PEER आँकड़ा-संग्रह के उपयोग का एक उदाहरण Haselton et al., 2008 ने दिया, जिन्होंने निम्नलिखित मानदंडों को संतुष्ट करने वाले धरन–स्तंभ खोजे:

$$\rho_{sb}(\text{area confinement ratio}) > 0.006 (\text{ACI 318-05 Eq. 21-4 requires } \rho_{sh} > 0.0075)$$

$$\frac{P}{A_g} f_c' < 0.30$$

$$f_c' < 40 \text{ MPa}$$

इसके परिणामस्वरूप मानदंडों को संतुष्ट करने वाले 30 प्रायोगिक परीक्षण प्राप्त हुए, जिन्हें तालिका 63.12 में दर्शाया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 63.9: परिरोध विवरण

संकेतन	वर्णन	परिरोध कोड
I	अंतर्ग्रथित बंधनियाँ	1
R	आयताकार बंधनियाँ (परिमाप के चारों ओर)	2
RI	आयताकार और अंतर्ग्रथित बंधनियाँ	4
RU	आयताकार बंधनियाँ और U-छड़ें	8
RJ	J-कुंडों सहित आयताकार बंधनियाँ	6
RD	आयताकार और विकर्ण बंधनियाँ	3
RO	आयताकार और अष्टकोणीय बंधनियाँ	7
RIJ	J-कुंडों सहित आयताकार और अंतर्ग्रथित बंधनियाँ	5
UJ	J-कुंडों सहित U-छड़ें	9

तालिका 63.10: परिरोध विवरण

वर्णन	परिरोध कोड
प्रास	C
द्विवक्रता	DC
द्विसिरा	DE
नम्य आधार	CFB
हथौड़ा-शीर्ष	HH

63.3.2.2 Stanford/Lignos

[58] Lignos and Krawinkler, 2013 ने संरचनात्मक घटकों के प्रतिरूपण के लिए तीन आँकड़ा-संग्रह विकसित किए:

W-काट इस्पात धरन: इस्पात W-काट आँकड़ा-संग्रह में 316 नमूने हैं। इनमें से अधिकांश W43×13 से W36×300 तक के चौड़े फ्लैंज वाले धरन (W अथवा H) हैं। संकलित इस्पात उपसमुच्चयों की प्रमुख ह्रास-विधा स्थानीय और पार्श्व मरोड़ी व्याकुंचन है, क्योंकि ध्यान Northridge-पश्च धरन–स्तंभ संयोजनों के चक्रीय व्यवहार पर है, जो आधुनिक इस्पात निर्माण में व्यापक रूप से प्रयुक्त होते हैं। चौवन नमूनों में ऐसे धरन हैं जो संयोजनों पर समयपूर्व (अतन्य) भंग के कारण विफल होते हैं। संयोजनों पर भंगुर भंग से विफल नमूने निम्नलिखित विवेचन में सम्मिलित नहीं हैं, क्योंकि ध्यान तन्य रूप से ह्रासित होने वाले धरन–स्तंभ संयोजनों पर है।

नलिकाकार खोखले वर्गाकार इस्पात स्तंभ HSS स्तंभों के लिए 120 प्रायोगिक आँकड़ा-बिंदु विकसित किए गए (44 एकदिश और 76 चक्रीय परीक्षण)। इन स्तंभों पर संयुक्त अक्षीय भार और एकदिश अथवा चक्रीय आनमनी आघूर्ण लगाए गए। संकलित नमूनों में लागू N और अक्षीय पराभव भार N_y (N/N_y का अनुपात 0 से 0.60 तक है। आँकड़ा-समुच्चय में स्तंभ की गहराई D और मोटाई t

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 63.11: आयताकार प्रबलित स्तंभों के परीक्षणों का सारांश (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004)

परीक्षण #	संदर्भ	स्तंभ नाम	पद-टिप्पणियाँ	M_{max} (kN-m)	$\frac{M_{max}}{M_{ACI}}$	V_{max} (kN)	Δ_y (mm)	विफलता-विधा
1	Gill et al. (1979)	No. 1		838	1.22	657	7.12	1
2	Gill et al. (1979)	No. 2		953	1.05	764	7.13	1
3	Gill et al. (1979)	No. 3		817	1.20	642	4.85	1
4	Gill et al. (1979)	No. 4		903	1.44	697	4.09	1
5	Ghee et al. (1981)	No. 3	छड अंतराल 120mm-75mm-120mm	337	1.24	192	9.61	1
6	Ghee et al. (1981)	No. 4	छड अंतराल 120mm-75mm-120mm	298	1.14	169	12.19	1
7	Soesian. et al. (1986)	No. 1		354	1.17	200	10.36	1
8	Soesian. et al. (1986)	No. 2		481	1.18	279	9.16	1
9	Soesian. et al. (1986)	No. 3		474	1.17	277	8.77	1
10	Soesian. et al. (1986)	No. 4		457	1.19	265	9.59	1
11	Zahn et al. (1986)	No. 7		398	1.35	213	11.88	1
12	Zahn et al. (1986)	No. 8		554	1.44	269	10.27	1
13	Watson and Park (1989)	No. 5		535	1.42	292	8.09	1
14	Watson and Park (1989)	No. 6		528	1.41	295	6.19	1
15	Watson and Park (1989)	No. 7		525	1.75	293	4.02	1
16	Watson and Park (1989)	No. 8		523	1.81	295	4.16	1
17	Watson and Park (1989)	No. 9		602	2.08	310	4.76	1
18	Tanaka and Park (1990)	No. 1	अनुप्रस्थ प्रबलन वलय वेल्डित थे	290	1.14	167	13.81	1
19	Tanaka and Park (1990)	No. 2		291	1.14	168	13.04	1
20	Tanaka and Park (1990)	No. 3		302	1.18	175	11.37	1
21	Tanaka and Park (1990)	No. 4		292	1.15	170	12.35	1
22	Tanaka and Park (1990)	No. 5		704	1.15	386	13.55	1
23	Tanaka and Park (1990)	No. 6		717	1.17	409	11.96	1
24	Tanaka and Park (1990)	No. 7		1070	1.34	588	9.68	1
25	Tanaka and Park (1990)	No. 8		1090	1.36	619	8.39	1
26	Park and Paulay (1990)	No. 9		727	1.21	393	10.71	1
27	Arakawa et al. (1982)	No. 102	नम्य अवलंब	60	1.15	153	3.78	1
28	Nagasaka (1982)	HPRC10-63	आलेख से मापित आवरण	27	1.02	87	2.74	3
29	Nagasaka (1982)	HPRC19-32	आलेख से मापित आवरण	34	1.08	111	1.94	3
30	Ohno and Nishioka (1984)	L1	आलेख से मापित आवरण	201	1.30	119	9.49	1
31	Ohno and Nishioka (1984)	L2	आलेख से मापित आवरण	186	1.20	111	9.05	1
32	Ohno and Nishioka (1984)	L3	आलेख से मापित आवरण	172	1.11	104	9.79	1
33	Ohue et al. (1985)	2D16RS	आलेख से मापित आवरण, विदारण-बंध विफलता	41	1.08	98	4.55	3
34	Ohue et al. (1985)	4D13RS	आलेख से मापित आवरण, विदारण-	44	1.01	108	4.59	3

का अनुपात (D/t) 18 से 100 तक है। संकलित HSS स्तंभों का पराभव प्रतिबल f_y 276 से 500 MPa तक है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 63.12: 30 प्रायोगिक परीक्षणों के अंशांकन अध्ययन के परिणाम (Haselton et al., 2008)

	स्तंभ के भौतिक गुण						अंशांकित आँकड़े					Fardis से तुलना		
परीक्षण संख्या (Eberhard आँकड़ा-संग्रह)	$P/A_g f'_c$	P/P_b	ρ_{sh}	s (mm)	f'_c (Mpa)	θ_y	EI_{eff}/EI_g	α_c	$\theta_{cap,pl}$ (rad)	शीर्ष पर-क्षिप्त हो तो 1*	λ	c	Fardis $\theta^{pl}_{u,mono}$ (rad)	Fardis से परिकलित $\theta^{pl}_{cap,pl}$ θ^{pl}_u (rad)	$\theta_{cap,pl}$ Fardis / अंशांकित
1	0.26	0.65	0.0071	80	23.1	0.008	0.25	0.47	0.01	–	0.028	0	136	1.0	0.032	0.010	0.36
6	0.21	0.55	0.0087	90	25.0	0.009	0.31	0.83	0.04	–	0.036	0	64	1.0	0.045	0.023	0.63
11	0.22	0.58	0.0067	117	28.3	0.010	0.34	0.75	0.07	–	0.078	0	74	1.0	0.046	0.024	0.31
18	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.010	0.30	0.65	0.02	–	0.083	0	114	1.0	0.050	0.028	0.33
19	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.33	0.77	0.02	–	0.069	0	89	1.0	0.050	0.028	0.40
20	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.34	1.92	0.02	–	0.065	0	41	1.0	0.050	0.028	0.42
21	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.32	1.14	0.01	–	0.073	0	159	1.0	0.050	0.028	0.38
22	0.10	0.30	0.0075	110	32.0	0.010	0.18	0.35	0.03	–	0.038	0	132	1.0	0.075	0.053	1.41
23	0.10	0.30	0.0075	110	32.0	0.010	0.19	0.40	0.03	–	0.070	0	145	1.0	0.075	0.053	0.76
24	0.30	0.89	0.0091	90	32.1	0.010	0.28	0.79	0.04	–	0.050	0	105	1.0	0.057	0.035	0.69
25	0.30	0.89	0.0091	90	32.1	0.011	0.27	0.73	0.01	–	0.046	0	127	1.0	0.057	0.035	0.75
26	0.10	0.26	0.0106	80	26.9	0.008	0.27	0.61	0.04	–	0.055	0	200	1.0	0.079	0.057	1.03
88	0.10	0.27	0.0061	76	29.1	0.010	0.34	0.55	0.05	–	0.016	0	123	1.0	0.060	0.038	2.37
90	0.10	0.27	0.0061	76	29.2	0.010	0.30	0.54	0.06	–	0.022	0	127	1.0	0.060	0.038	1.73
92	0.20	0.56	0.0061	76	29.4	0.014	0.30	0.64	0.02	–	0.019	0	82	1.0	0.052	0.030	1.58
94	0.26	0.72	0.0061	76	33.3	0.012	0.36	0.61	0.06	–	0.026	0	44	1.0	0.047	0.025	0.98
96	0.28	0.76	0.0061	76	31.0	0.010	0.43	0.67	0.01	–	0.028	0	45	1.0	0.045	0.023	0.83
मा-ध्यिका:	0.20	0.55	0.0078	76	29.2	0.011	0.27	0.50	0.04	-0.08	0.070	0.00	109	1.0	0.064	0.042	0.75
माध्य:	0.17	0.48	0.0079	76	30.0	0.013	0.25	0.59	0.05	-0.09	0.063	0.13	106	1.0	0.065	0.043	0.80
C.O.V.:	0.45	0.45	0.21	0.24	0.16	0.32	0.32	0.59	0.76	0.37	0.46	2.59	0.39	0.00	0.27	0.41	0.57

*यदि आँकड़ों में शीर्ष (अर्थात् विकृति-मृदुकरण प्रवणता) परिक्षित न हो, तो सुघट्य घूर्णन निम्न सीमा है।

प्रारूप समीक्षा

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

RC धरन: इस आँकड़ा-समुच्चय में केवल वे उपसमुच्चय सम्मिलित किए गए जिनके धरन आनमन में विफल होते हैं। आँकड़ा-संग्रह में प्रास, द्विवक्रता, हथौड़ा-शीर्ष और स्थिर-सिरा नमूने सम्मिलित थे।

59 तीनों संरचनात्मक घटक आँकड़ा-संग्रहों में निम्नलिखित सूचना है:

मेटाडेटा: विन्यास ज्यामिति, मापित सामग्री-गुण, पट्टिका विवरण (संयुक्त नमूनों की दशा में), प्रबलन विन्यास और विवरण (RC के लिए) आदि।

प्रतिवेदन अंश जिनमें उपसमुच्चय और/अथवा घटक परीक्षणों का सारांश हो।

प्रतिवेदित परिणाम (अर्थात् परीक्षण प्रलेखन में दिए गए माप और प्रेक्षण), जिनमें समग्र भार–विस्थापन शैथिल्य आरेखों के अंकीकृत इतिहास सम्मिलित हों।

व्युत्पन्न आँकड़े अंकीकृत रूप में (अर्थात् विश्लेषणात्मक प्रतिरूपों के अंशांकन हेतु मेटाडेटा और प्रतिवेदित आँकड़ों से व्युत्पन्न सूचना), जिनमें व्युत्पन्न आघूर्ण–घूर्णन शैथिल्य आरेखों तथा इस्पात धरन–स्तंभ उपसमुच्चयों के पैनल-क्षेत्र अपरूपण V_{pz} बनाम अपरूपण विकृति γ के अंकीकृत इतिहास सम्मिलित हैं। ये आँकड़े या तो प्रयोग करने वाले व्यक्तिगत अन्वेषकों से सीधे प्राप्त किए गए (यदि सूचना अंकीय रूप में उपलब्ध थी), अथवा प्रायोगिक प्रतिवेदनों से उपर्युक्त शैथिल्य आरेखों का सीधे अंकीकरण करके प्राप्त किए गए। तीनों संरचनात्मक घटक आँकड़ा-संग्रहों के संकेतनों का वर्णन करने वाले विस्तृत प्रलेखन सहित संपूर्ण आँकड़ा-समुच्चय NEES केंद्रीय भंडार से डाउनलोड किया जा सकता है।

60 प्रत्येक आँकड़ा-समुच्चय के लिए ह्रास-अंशांकन प्रतिरूप का उपयोग किया गया और ह्रास प्राचलों के संचयी वितरण फलनों को आलेखित किया गया (लघुगणकीय प्रसामान्य वितरण का उपयोग करके)।

63.3.2.3 UTSA/Ghannoum

61 धरन–स्तंभ के लिए नए संकेंद्रित सुघट्यता प्रतिरूप (§62.3.4) के विकास के अंतर्गत Suselo, 2021, Chapter 3 ने अपने प्रतिरूप के मान्यकरण के लिए UTSA प्रबलित कंक्रीट स्तंभ प्रायोगिक आँकड़ा-संग्रह विकसित किया।

62 इस आँकड़ा-संग्रह की एक रोचक (संभवतः अद्वितीय) विशेषता उसका परिशोधन है। इसके दो भाग हैं: (a) प्राथमिक आँकड़े (अर्थात् संकलित कच्चे "यथावत्" आँकड़े); और (b) परिकलित तथा निष्कर्षित द्वितीयक आँकड़े, जिनमें प्राथमिक आँकड़ों से व्युत्पन्न गुण होते हैं—या तो दो अथवा अधिक प्राचलों से परिकलित (जैसे अक्षीय भार अनुपात), अथवा भार–विस्थापन आँकड़ों से निष्कर्षित।

63.3.2.4 संतति परिमित अवयव/Dolati

63 कंक्रीट स्तंभों के अधिकांश प्रयोग, जिनसे आँकड़ा-संग्रह प्रतिरूप व्युत्पन्न होते हैं, पूर्णतः उत्क्रमित चक्रीय भारण अनुक्रमों से किए गए; भिन्न भारण अनुक्रमों के अधीन परीक्षित स्तंभों का अंश बहुत छोटा है। पूर्ववर्ती UTSA स्तंभ आँकड़ा-संग्रह (संभवतः अब तक का सबसे बड़ा) में 689 स्तंभ परीक्षण हैं, जिनमें केवल आठ ने पूर्णतः उत्क्रमित चक्रीय अनुक्रमों से भिन्न भारण अनुक्रमों का अन्वेषण किया। अतः वर्तमान उपलब्ध प्रतिरूप स्तंभ-गुणों और परिसीमा प्रतिबंधों के प्रभाव पकड़ते हैं, किंतु स्तंभ क्षमताओं पर परिवर्ती भारण इतिहासों का प्रभाव नहीं पकड़ते।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

64 कंक्रीट स्तंभों के सामर्थ्य और विरूपण क्षमताओं पर भारण इतिहासों के प्रभाव से संबंधित प्रायोगिक आँकड़ों की रिक्तियाँ भरने के लिए Dolati, Matamoros, and Ghannoum, 2023 ने संतति परिमित अवयव विश्लेषण किए।

65 परिवर्ती पार्श्व भारण अनुक्रमों के अधीन सात स्तंभों के प्रायोगिक परीक्षणों के अनुसार अरैखिक संतति परिमित अवयव प्रतिरूप अंशांकित किए गए। चयनित स्तंभों में पार्श्व सामर्थ्य ह्रास की आनमन–अपरूपण विधाएँ उत्पन्न हुईं। स्तंभों का चयन अपरूपण प्रतिबलों, अनुप्रस्थ काटों, अक्षीय भारों, अनुप्रस्थ प्रबलन अंतरालों और अनुपातों तथा अनुदैर्ध्य प्रबलन अनुपातों के परास को समाहित करने के लिए किया गया। सभी परीक्षित स्तंभ पार्श्व भारण से संचयी क्षति के बाद अक्षीय पतन तक पहुँचे। तत्पश्चात अंशांकित स्तंभ प्रतिरूपों को अनेक भारण अनुक्रमों के अधीन रखा गया, जिनमें एकदिश पुशओवर और चक्रों की परिवर्ती संख्या वाले पूर्णतः उत्क्रमित चक्रीय भारण अनुक्रम सम्मिलित थे। क्षति-प्रगति, सामर्थ्य और विरूपण क्षमताओं पर पार्श्व भारण अनुक्रमों के प्रभावों का विवेचन किया गया है।

63.3.2.5 ACI-437-A

66 ACI-437 (विद्यमान कंक्रीट संरचनाओं का सामर्थ्य मूल्यांकन) ने हाल ही में प्रयोगशाला और क्षेत्र-परीक्षण दोनों के आँकड़ों की सूचना संकलित करने वाला एक और आँकड़ा-संग्रह बनाने के लिए एक उपसमिति (ACI 437-A) गठित की है।

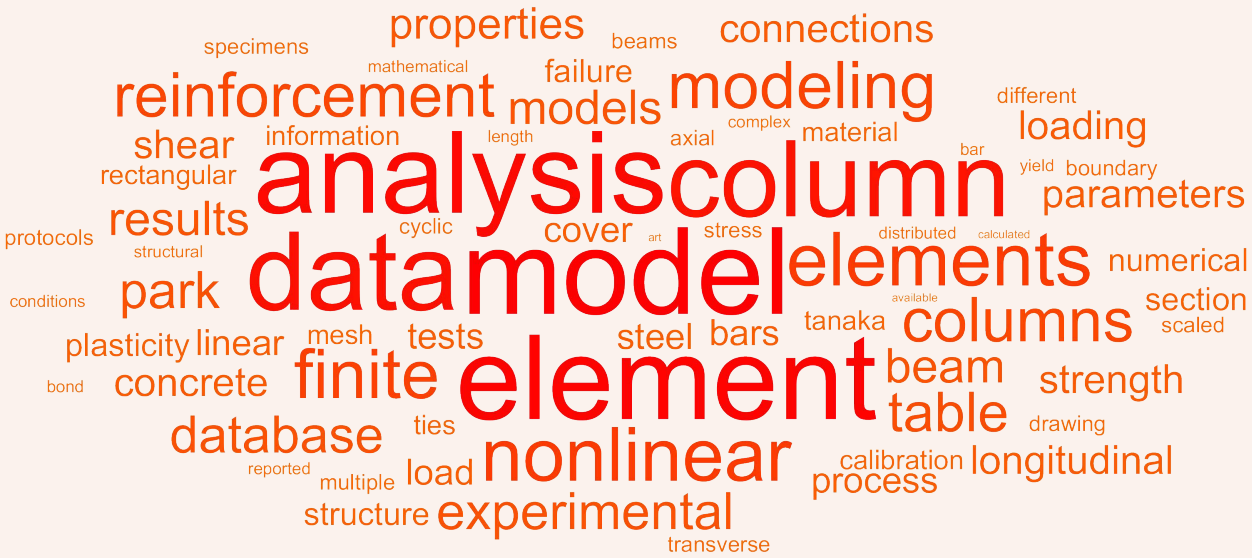
67 संकलित की जाने वाली सूचना में निम्नलिखित सम्मिलित हैं:

- संरचना प्रकार: RC, PC, PT,
- अवयव वर्णन: आयु, प्रकार, विस्तार, गहराई, अनुप्रस्थ काट, प्रबलन, संपीडन सामर्थ्य, अपेक्षित/परिकलित क्षमता,
- परीक्षण का कारण: आनमन, अपरूपण, छेदन अपरूपण, अन्य पृष्ठभूमि सूचना,
- परीक्षण अनुक्रम: एकदिश अथवा CLT, क्षेत्र अथवा प्रयोगशाला,
- भारण और ज्यामिति: वितरित भार, बिंदु भार, बहु-विस्तार आदि,
- TLM: परिकलन विधि, DL/LL अनुपात, लागू TLM,
- संहिता: ACI 318 अथवा 562, प्रकाशन वर्ष, भार परिमाण,
- मरम्मत की गई अथवा नई संरचना।

68 समिति की संरचना (उद्योग और अकादमिक जगत) तथा एक बड़े राष्ट्रीय संगठन (ACI) के भीतर उसकी स्थिति को देखते हुए, इसके शीघ्र ही एक मानक संदर्भ बनने की संभावना है।

प्रति प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अंतराल: अग्र-विश्लेषण से प्राचल अभिनिर्धारण तक

अगले दो अध्याय अनिश्चितता की उपस्थिति में संरचनात्मक विश्लेषण के लिए परस्पर पूरक साधन विकसित करते हैं। अध्याय 64 (*आँकड़े और संदेह*) यह स्थापित करता है कि निवेशों की पूर्व अनिश्चितता को कैसे निरूपित, प्रसारित और विश्लेषित किया जाए। अध्याय 65 (*निर्णय*) इस समस्या को प्रतिलोम रूप में प्रस्तुत करता है: उपलब्ध मापनों के आधार पर कौन-से प्राचल मान आँकड़ों द्वारा समर्थित हैं और अभिकलनीय प्रतिरूपों का अंशांकन कैसे किया जाना चाहिए?

अध्याय 64: अग्र-विश्लेषण

आँकड़े और संदेह
|
+– आँकड़ों की गुणवत्ता
|
+– अनिश्चितता परिमाणन
| (निरूपण, प्रसारण)
|
+– संवेदनशीलता विश्लेषण
| (Morris, Sobol, टोर्नेडो)
|
+– बायेसियन अनुमान
   (पूर्व, पश्च, MCMC)

अध्याय 65: प्रतिलोम विश्लेषण

निर्णय
|
+– प्रतिलोम समस्या
|
+– अनुप्रयोग और निर्णय संरचना
|
+– आँकड़ों की सुदृढता
| (RANSAC पूर्व-संसाधन)
|
+– Levenberg–Marquardt
| (बिंदु आकलन)
|
+– बायेसियन अभिनिर्धारण
| (प्राचलों का पश्च वितरण)
|
+– MATLAB कार्यान्वयन
|
+– संकर कार्यप्रवाह

पूरकता: C-10-A अग्र-विश्लेषण के साधन प्रदान करता है: पूर्व अनिश्चितता का निरूपण, प्रतिरूपों में उसका प्रसारण और प्रभावशाली प्राचलों की पहचान। C-10-B प्राचल अभिनिर्धारण समस्या पर प्रतिलोम विधियाँ लागू करता है: संवेदनशीलता विश्लेषण द्वारा प्रत्याशियों की छँटाई, आँकड़ों से प्राचलों का अंशांकन और पश्च अनिश्चितता का परिमाणन। दोनों अध्याय मिलकर चक्र पूर्ण करते हैं: पूर्व अनिश्चितता → प्रसारण → संवेदनशीलता छँटाई → प्राचल अंशांकन → निर्णय-सहायक पूर्वानुमान।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

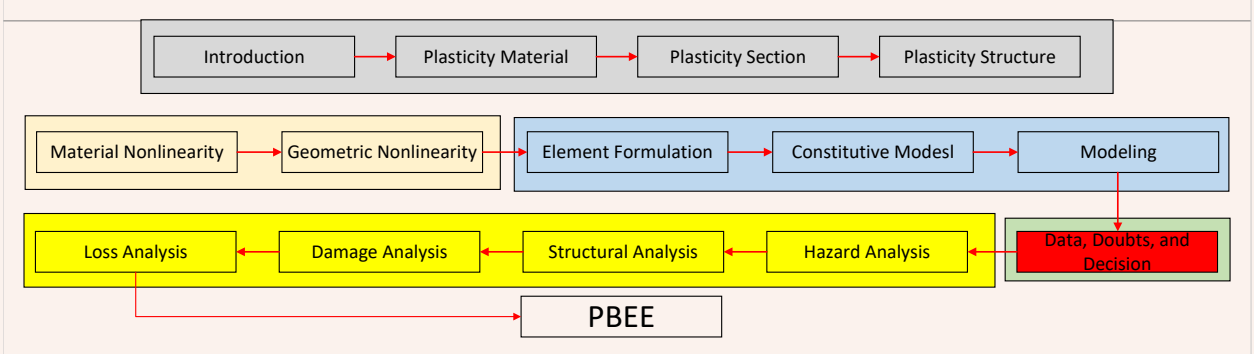
64 आँकड़े और संदेह: अनिश्चितताएँ और संवेदनशीलता विश्लेषण

सारांश

यह अध्याय अपूर्ण आँकड़ों से प्रतिरक्षणीय संरचनात्मक पूर्वानुमानों तक पहुँचने के लिए आवश्यक अग्र-विश्लेषण साधन विकसित करता है। पहले यादृच्छिक परिवर्तनशीलता, ज्ञानात्मक अनिश्चितता, मापन त्रुटि और प्रतिरूप-रूप विसंगति के बीच भेद किया गया है; तत्पश्चात यह दर्शाया गया है कि अनिश्चितता को अभिकलनीय प्रतिरूपों में किस प्रकार निरूपित, सहसंबद्ध और प्रसारित किया जाता है। Monte Carlo अनुकरण, Latin hypercube प्रतिचयन, रैखिकीकृत और बिंदु-आकलन सन्निकटन तथा बहुपदीय अव्यवस्था प्रसार को उनकी धारणाओं और सीमाओं सहित प्रस्तुत किया गया है।

दूसरे भाग में संवेदनशीलता विश्लेषण का विवेचन है। स्थानीय एक-समय-में-एक मापों, Morris छँटाई विधि, प्रसरण-आधारित Sobol सूचकांकों और टोर्नेडो आरेखों से यह निर्धारित किया जाता है कि कौन-से अनिश्चित निवेश अनुक्रिया को नियंत्रित करते हैं तथा किन्हें स्थिर अथवा निम्न प्राथमिकता का बनाया जा सकता है। अध्याय के अंत में यह दर्शाया गया है कि प्रभावशाली प्राचल पहचान के प्रत्याशी किस प्रकार बनते हैं। तत्पश्चात अध्याय 65 उस व्युत्क्रम समस्या का सूत्रीकरण और समाधान करता है।

64.1 परिचय 2143
64.2 आँकड़ों की गुणवत्ता और संदेह के स्रोत . 2143
64.3 अनिश्चितता परिमाणन और विश्लेषण . . 2144
64.3.1 निवेश अनिश्चितता का अभिलक्षणन 2144
64.3.2 निर्भरता और सहसंबद्ध प्रतिचयन 2145
64.3.3 अनिश्चितता प्रसारण 2148
64.3.4 निर्गम अनिश्चितता की व्याख्या 2157
64.4 संवेदनशीलता विश्लेषण 2158
64.4.1 Morris विधि 2158
64.4.2 Sobol प्रसरण-आधारित संवेदनशीलता सूचकांक 2163
64.4.3 प्रसारण और संवेदनशीलता विधियों की तुलना 2165
64.4.4 महत्त्वपूर्ण यादृच्छिक चरों का निर्धारण 2165
64.4.5 Tornado आरेख 2170
64.5 संवेदनशीलता विश्लेषण से प्राचल अभिनिर्धारण तक 2171



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

64.1 परिचय

1 संरचनात्मक विश्लेषण विरले ही यथार्थ निवेशों से आरंभ होता है। सामग्री-गुण किसी सदस्य के भीतर और संपूर्ण संरचना में परिवर्तित होते हैं; भार और पर्यावरणीय क्रियाएँ यादृच्छिक होती हैं; मापन अपूर्ण और रवयुक्त होते हैं; परिसीमा प्रतिबंध आदर्शीकृत होते हैं; और प्रत्येक अभिकलनीय प्रतिरूप कुछ भौतिक विवरणों की उपेक्षा करता है। अतः केंद्रीय प्रश्न यह नहीं है कि अनिश्चितता विद्यमान है या नहीं, बल्कि यह है कि निर्णय के समर्थन हेतु उसे पर्याप्त अनुशासन से निरूपित किया गया है या नहीं।

2 तीन कार्यों को पृथक रखना आवश्यक है। प्रथम, उपलब्ध आँकड़ों की प्रासंगिकता, संगतता, अभिनति, लुप्त प्रेक्षणों और बाह्य मानों की दृष्टि से जाँच होनी चाहिए। द्वितीय, शेष अनिश्चितता को प्रतिरूप में निरूपित और प्रसारित किया जाना चाहिए, जिससे संभाव्य अनुक्रियाओं का फैलाव ज्ञात हो। तृतीय, संवेदनशीलता विश्लेषण को यह पहचानना चाहिए कि उस फैलाव के लिए कौन-से निवेश उत्तरदायी हैं। इन कार्यों को पृथक रखने से आँकड़ों की बड़ी मात्रा को विश्वसनीय सूचना समझ लेने की भूल नहीं होती।

3 यह अध्याय अग्र समस्या पर विचार करता है:

$$\mathbf{X} \longmapsto Y = g(\mathbf{X}),$$

जहाँ अनिश्चित निवेश सदिश $\mathbf{X}$ को संरचनात्मक प्रतिरूप के माध्यम से एक अथवा अधिक अभिरुचि राशियों Y में मानचित्रित किया जाता है। अध्याय 65 पूरक व्युत्क्रम समस्या पर विचार करता है: Y के मापन दिए होने पर $\mathbf{X}$ अथवा प्राचल सदिश $\boldsymbol{\theta}$ के अज्ञात घटकों का निर्धारण करें।

64.2 आँकड़ों की गुणवत्ता और संदेह के स्रोत

4 प्रायिकता वितरण निर्दिष्ट करने से पहले विश्लेषक को अनिश्चितता और दोषपूर्ण आँकड़ों के बीच भेद करना चाहिए। पुनरावृत्त प्रेक्षणों में यादृच्छिक मापन त्रुटि, क्रमबद्ध अभिनति, संवेदक अपवाह, प्रतिलेखन त्रुटियाँ, असंगत मात्रक, सीमित मान अथवा लुप्त अंतराल हो सकते हैं। इन प्रभावों के लिए भिन्न उपचार आवश्यक हैं। यादृच्छिक त्रुटि को संभाव्यता अथवा मापन सहप्रसरण आव्यूह में सम्मिलित किया जा सकता है; अभिनति के लिए सुधार अथवा स्पष्ट अभिनति प्राचल आवश्यक है; किसी पृथक दूषित प्रेक्षण के लिए दृढ आकलन उचित हो सकता है; और आरोपण नियम को अभिलिखित किए बिना लुप्त आँकड़ों को मौन रूप से प्रतिस्थापित नहीं किया जाना चाहिए।

5 *प्राचल अनिश्चितता* और *प्रतिरूप विसंगति* के बीच भेद भी उतना ही महत्त्वपूर्ण है। प्राचल अनिश्चितता अपनाए गए प्रतिरूप में विद्यमान राशियों, जैसे प्रत्यास्थता गुणांक अथवा ह्रास समय नियतांक, के अपूर्ण ज्ञान को दर्शाती है। प्रतिरूप विसंगति भौतिक प्रणाली और अपनाए गए प्रतिरूप द्वारा उत्पन्न की जा सकने वाली सर्वोत्तम अनुक्रिया के बीच का अंतर है, भले ही उसके प्राचल इष्टतम रूप से चुने गए हों। क्रमबद्ध प्रतिरूप विसंगति की क्षतिपूर्ति हेतु प्राचलों को बाध्य करने से अत्युत्तम सन्निकटन मिल सकता है, किंतु प्राचल मान भौतिक रूप से भ्रामक हो सकते हैं।

6 अतः प्रतिरक्षणीय विश्लेषण में प्रत्येक प्रेक्षण का उद्गम और मात्रक, मापन यथार्थता और पुनरावृत्त्यता, स्थानिक और कालिक प्रतिचयन, आँकड़ा बहिष्करण, रिक्तियाँ भरने के लिए प्रयुक्त

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

धारणाएँ तथा वह परास अभिलिखित किया जाता है जिसमें अंशांकित प्रतिरूप का बाद में उपयोग होगा। ये अभिलेख अनौपचारिक पूर्व-संसाधन चरण न रहकर अनिश्चितता प्रतिरूप का भाग बन जाते हैं।

64.3 अनिश्चितता परिमाणन और विश्लेषण

[7] विभिन्न विषयों में पारिभाषिक शब्दावली भिन्न होती है। इस पुस्तक में *अनिश्चितता परिमाणन* (UQ) संपूर्ण अग्र-विश्लेषण प्रक्रिया को दर्शाता है: अनिश्चितता स्रोतों की पहचान, अनिश्चित निवेशों और उनकी निर्भरता का अभिलक्षणन, प्रतिरूप में उनका प्रसारण, परिणामी निर्गत अनिश्चितता का सारांश तथा महत्त्वपूर्ण निवेशों का निर्धारण। *अनिश्चितता विश्लेषण* (UA) उन प्रसारित परिणामों की निर्णयोन्मुख व्याख्या को दर्शाता है। यह कठोर पृथक्करण के स्थान पर बल का अंतर है: UQ अनिश्चितता सूचना उत्पन्न और व्यवस्थित करता है, जबकि UA स्पष्ट करता है कि अभियांत्रिक निर्णय के लिए उस सूचना का क्या अर्थ है।

तालिका 64.1: अनिश्चितता परिमाणन और अनिश्चितता विश्लेषण के लिए इस पुस्तक में अपनाई गई शब्दावली

पक्ष	अनिश्चितता परिमाणन (UQ)	अनिश्चितता विश्लेषण (UA)
परिधि	निवेश अभिलक्षणन से प्रसारण, संवेदनशीलता और प्रतिवेदन तक की संपूर्ण कार्यप्रणाली	प्रतिरूप निर्गतों में अनिश्चितता की व्याख्या और प्रतिवेदन
निवेश	सीमांत प्रतिरूप, निर्भरता, अंतराल, साक्ष्य और प्रतिरूप-रूप धारणाएँ	UQ अध्ययन द्वारा स्थापित निवेश और प्रसारण प्रतिरूप का उपयोग
निर्गत	वितरण, आघूर्ण, परिमात्रक, अतिक्रमण और विफलता प्रायिकताएँ तथा संवेदनशीलता माप	निर्णय-प्रासंगिक सारांश, अंतराल, पुच्छ प्रायिकताएँ और तुलनाएँ
भूमिका	अनिश्चितता सूचना उत्पन्न और व्यवस्थित करता है	स्पष्ट करता है कि अभियांत्रिक निर्णय के लिए प्रसारित अनिश्चितता का क्या अर्थ है

64.3.1 निवेश अनिश्चितता का अभिलक्षणन

[8] प्रसारण अध्ययन उतना ही प्रतिरक्षणीय होता है जितना उसका निवेश प्रतिरूप। विश्लेषक को प्रत्येक अनिश्चितता के स्रोत की पहचान करनी चाहिए, यह निर्णय करना चाहिए कि प्रायिकतामूलक वर्णन न्यायसंगत है या नहीं, विश्वसनीय परास अथवा वितरण निर्दिष्ट करने चाहिए तथा चरों के बीच किसी भी निर्भरता का प्रलेखन करना चाहिए। उपलब्ध सूचना की सीमा तक मापन अनिश्चितता और प्रतिरूप-रूप विसंगति को भौतिक परिवर्तनशीलता से पृथक रखा जाना चाहिए।

64.3.1.1 अनिश्चितताओं के प्रकार

यादृच्छिक अनिश्चितता: वह अंतर्निहित परिवर्तनशीलता जो पूर्ण ज्ञान होने पर भी बनी रहती है, जैसे घटना-दर-घटना भूगति परिवर्तनशीलता अथवा सामग्री-गुणों में वास्तविक स्थानिक परिवर्तन-

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

शीलता। इसका निरूपण सामान्यतः प्रायिकतामूलक रूप में किया जाता है और किसी विशिष्ट साकारता के बारे में अधिक सूचना एकत्र करने से यह समाप्त नहीं होती।

ज्ञानात्मक अनिश्चितता: प्रणाली, उसके प्राचलों अथवा उसके पर्यावरण के बारे में अपूर्ण ज्ञान। इसे प्रायः अतिरिक्त परीक्षण, उन्नत मापन अथवा बेहतर भौतिक प्रतिरूपों द्वारा घटाया जा सकता है।

मापन अनिश्चितता: प्रतिरूप के अभिलक्षणन अथवा अंशांकन के लिए प्रयुक्त प्रेक्षणों में यादृच्छिक त्रुटि, सीमित विभेदन, अंशांकन त्रुटि और अभिनति। मापन अनिश्चितता सामान्यतः ज्ञानात्मक होती है, यद्यपि पुनरावृत्त मापन रव का प्रतिरूपण प्रायः प्रायिकतामूलक किया जाता है।

प्रतिरूप-रूप अनिश्चितता: आदर्शीकरण, उपेक्षित क्रियाविधियों, संघटक धारणाओं, विविक्तीकरण अथवा संख्यात्मक सन्निकटनों से उत्पन्न विसंगति। इसे स्वतः प्राचल अनिश्चितता में समाहित नहीं किया जाना चाहिए।

मिश्रित अनिश्चितता: व्यावहारिक समस्याओं में सामान्यतः पूर्ववर्ती अनेक स्रोत एक साथ होते हैं। उदाहरणार्थ, भूगति परिवर्तनशीलता यादृच्छिक है, स्थल अभिलक्षणन की अनिश्चितता ज्ञानात्मक है, अभिलिखित त्वरणों में मापन त्रुटि है और संरचनात्मक प्रतिरूप में प्रतिरूप-रूप विसंगति है।

64.3.1.2 गणितीय निरूपण

प्रायिकता वितरण: तब उपयुक्त जब आँकड़े अथवा प्रतिरक्षणीय पूर्व-ज्ञान किसी प्रायिकता प्रतिरूप का समर्थन करते हों। सीमांत वितरण पृथक चरों का वर्णन करते हैं; चर सहसंबद्ध हों तो संयुक्त वितरण अथवा निर्भरता प्रतिरूप आवश्यक है। सामान्य वितरणों का सारांश परिशिष्ट M में है।

अंतराल और अस्पष्ट समुच्चय: तब उपयोगी जब सीमाएँ विश्वसनीय हों किंतु आवृत्तियाँ अथवा प्रायिकताएँ नहीं। अंतराल केवल यह बताता है कि $X \in [X_{\min}, X_{\max}]$। अस्पष्ट वर्णन श्रेणीकृत सदस्यता जोड़ते हैं और भाषायी अथवा विशेषज्ञ सूचना के लिए उपयोगी हो सकते हैं, किंतु अतिरिक्त धारणाओं के बिना उनकी व्याख्या प्रायिकता के रूप में नहीं की जानी चाहिए।

आघूर्ण और परिमात्रक: माध्य, प्रसरण, सहप्रसरण, वैषम्य और चयनित परिमात्रक किसी वितरण का सारांश देते हैं। रैखिकीकृत प्रसारण के लिए आघूर्ण सुविधाजनक हैं, जबकि सीमा-अवस्था निर्णयों के लिए परिमात्रक और अतिक्रमण प्रायिकताएँ प्रायः अधिक सूचनाप्रद होती हैं। सांख्यिकीय आघूर्णों की समीक्षा §M.4.1 में की गई है।

64.3.2 निर्भरता और सहसंबद्ध प्रतिचयन

[9] सीमांत वितरण संयुक्त अनिश्चितता प्रतिरूप को परिभाषित नहीं करते। जब अनिश्चित राशियों के भौतिक कारण, स्थानिक प्रवृत्तियाँ, पर्यावरणीय उद्भासन अथवा मापन प्रक्रियाएँ समान हों, तो उनकी निर्भरता स्पष्ट रूप से निरूपित की जानी चाहिए। निर्भरता की उपेक्षा संरचनात्मक अनुक्रिया के प्रसरण और पुच्छ प्रायिकताओं को बढ़ा अथवा दबा सकती है।

64.3.2.1 सहप्रसरण और सहसंबंध

[10] दो यादृच्छिक चरों X और Y के लिए,

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big], \qquad \rho_{XY} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{64.1}$$

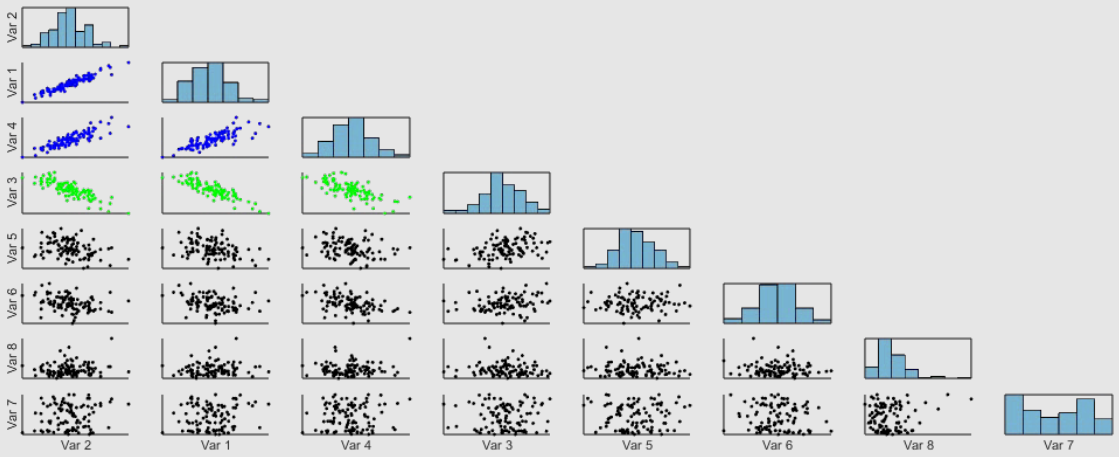
Vidyarthi Samuccaya
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सहसंबंध गुणांक विमाहीन होता है और -1 तथा $+1$ के बीच रहता है। शून्य मान का अर्थ रैखिक सहसंबंध का अभाव है, आवश्यक रूप से स्वतंत्रता नहीं। सहसंबंध कार्य-कारण संबंध भी स्थापित नहीं करता और बाह्य मान सामान्य Pearson गुणांक को अत्यधिक विकृत कर सकते हैं।

64.3.2.1.0.1 उदाहरण 64.1: सहसंबंध आव्यूह

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

नीचे दिया गया आव्यूह आलेख आठ चरों के सीमांत आयतचित्रों और युग्मवार प्रकीर्ण आलेखों को संयोजित करता है। नमूने उत्पन्न करते समय निर्भरता जानबूझकर प्रविष्ट की गई थी; केवल भिन्न सीमांत वितरणों का उपयोग सहसंबंध उत्पन्न नहीं करता। औपचारिक सहसंबंध आव्यूह स्वीकार करने से पहले ऐसा आलेख रैखिक प्रवृत्तियों, अरैखिक निर्भरता, समूहों और पृथक प्रेक्षणों की पहचान में उपयोगी है।



ρ के संख्यात्मक मान की व्याख्या अनुप्रयोग के संदर्भ में की जानी चाहिए। “दुर्बल” अथवा “प्रबल” जैसे वर्णक केवल आनुमानिक हैं और निर्भरता द्वारा अभिरुचि राशि पर पड़ने वाले प्रभाव के अभियांत्रिक आकलन का स्थान नहीं लेने चाहिए।

तालिका 64.2: Pearson सहसंबंध गुणांक के परिमाण के निदर्शी गुणात्मक वर्णक

परिमाण	संभावित वर्णनात्मक पद
$0.0 \le \lvert\rho\rvert < 0.1$	नगण्य अथवा अत्यंत दुर्बल
$0.1 \le \lvert\rho\rvert < 0.3$	दुर्बल
$0.3 \le \lvert\rho\rvert < 0.5$	मध्यम
$0.5 \le \lvert\rho\rvert < 0.7$	प्रबल
$0.7 \le \lvert\rho\rvert < 0.9$	अत्यंत प्रबल
$0.9 \le \lvert\rho\rvert \le 1.0$	अत्यधिक प्रबल से पूर्ण रैखिक साहचर्य

[11] तालिका 64.2 में सामान्यतः प्रयुक्त एक वर्णनात्मक परिपाटी दी गई है। सीमाएँ सार्वभौमिक नहीं हैं और न सांख्यिकीय सार्थकता, न अभियांत्रिक महत्त्व व्यक्त करती हैं; दोनों नमूना आकार, आँकड़ा गुणवत्ता और किए जा रहे निर्णय पर निर्भर हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

64.3.2.2 स्थानिक सहप्रसरण

12 स्थानिक रूप से परिवर्ती गुण को यादृच्छिक क्षेत्र $X(\mathbf{s})$ के रूप में निरूपित किया जाता है। उसका सहप्रसरण फलन है:

$$C_X(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \operatorname{Cov}[X(\mathbf{s}), X(\mathbf{s}')]\,. \tag{64.2}$$

समांगी समदैशिक क्षेत्र के लिए सहप्रसरण केवल पृथक्करण दूरी $h = \|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|$ पर निर्भर करता है। एक सामान्य निदर्शी प्रतिरूप है:

$$C_X(h) = \sigma_X^2 \exp\!\left(-\frac{h}{\ell_c}\right), \tag{64.3}$$

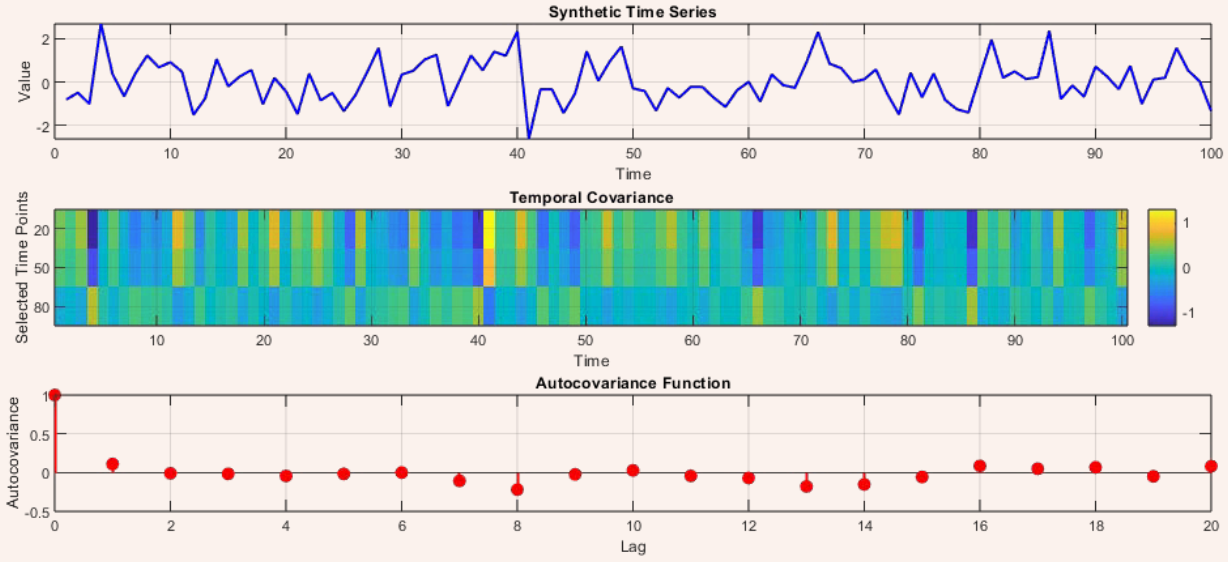
जहाँ ℓ_c सहसंबंध लंबाई है। छोटा ℓ_c तीव्र स्थानिक परिवर्तन उत्पन्न करता है; बड़ा ℓ_c साथ-साथ परिवर्तित होने वाले विस्तृत क्षेत्र उत्पन्न करता है। भिन्न दिशाओं में भिन्न सहसंबंध लंबाइयों की अनुमति देकर विषमदैशिकता प्रविष्ट की जा सकती है। परिमित अवयवों को सामग्री-गुण निर्दिष्ट करते समय स्थानिक सहप्रसरण आवश्यक है: स्वतंत्र अवयव-दर-अवयव प्रतिचयन सामान्यतः अवास्तविक रूप से खुरदरे क्षेत्र उत्पन्न करता है।

64.3.2.3 कालिक सहप्रसरण

13 किसी प्रसंभाव्य प्रक्रिया X_t के लिए,

$$C_X(t, s) = \mathbb{E}\big[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)\big]\,. \tag{64.4}$$

यदि प्रक्रिया दुर्बलतः स्थिर है, तो $C_X(t,s) = C_X(\tau)$ केवल विलंब $\tau = |t - s|$ पर निर्भर करता है। उदाहरणार्थ, स्थिर प्रथम-कोटि स्वप्रतिगामी प्रक्रिया $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, जिसके लिए $|\phi| < 1$, का स्वसहप्रसरण विलंब के साथ ज्यामितीय रूप से क्षीण होता है। श्वेत रव वह सीमांत दशा है जिसमें प्रत्येक अशून्य विलंब के लिए सैद्धांतिक स्वसहप्रसरण शून्य होता है; फिर भी सीमित नमूने शून्य के आसपास छोटे यादृच्छिक आकलन दर्शाते हैं।



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[14] चित्र अनुकरणित स्थिर अनुक्रम, अनुभवजन्य सहप्रसरण प्रदर्शन और आकलित स्वसहप्रसरण फलन दर्शाता है। प्रेक्षणों के किसी एक युग्म से प्राप्त अनुभवजन्य गुणनफल स्वयं सहप्रसरण आकलन नहीं है; सहप्रसरण के लिए स्थिरता की धारणा के अधीन पुनरावृत्त साकारताओं अथवा समय-मूलों पर प्रत्याशा या औसत आवश्यक है।

64.3.2.4 सहसंबद्ध नमूने उत्पन्न करना

[15] जब निवेशों में सार्थक निर्भरता हो तो स्वतंत्र प्रतिचयन अनुपयुक्त है। सहसंबंध आव्यूह $\mathbf{R}$ वाले संयुक्त Gaussian चरों के लिए Cholesky गुणक $\mathbf{L}$ परिकलित किया जा सकता है, जिससे $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$; फिर $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ उत्पन्न कर निम्नलिखित रखा जाता है:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}_\sigma \mathbf{L} \mathbf{z}, \tag{64.5}$$

जहाँ $\mathbf{D}_\sigma$ में सीमांत मानक विचलन होते हैं।

[16] अ-Gaussian सीमांतों के लिए प्रायः Gaussian-copula निर्माण प्रयुक्त होता है: सहसंबद्ध मानक प्रसामान्य चर $\mathbf{z}_c = \mathbf{L}\mathbf{z}$ उत्पन्न करें, उन्हें एकसमान चरों $u_i = \Phi(z_{c,i})$ में रूपांतरित करें और अंततः $x_i = F_i^{-1}(u_i)$ रखें। निर्दिष्ट सहसंबंध गुप्त Gaussian समष्टि में यथार्थ होता है; भौतिक समष्टि में परिणामी Pearson सहसंबंध भिन्न हो सकते हैं और अंशांकन की आवश्यकता पड़ सकती है। अधिक सामान्य निर्भरता को अन्य copula अथवा सीधे आकलित संयुक्त वितरणों द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

64.3.3 अनिश्चितता प्रसारण

[17] अनिश्चितता प्रसारण यह मूल्यांकित करता है कि संयुक्त निवेश प्रतिरूप संरचनात्मक प्रणाली की अनुक्रिया को किस प्रकार प्रभावित करता है। आवश्यक विधि प्रतिरूप लागत, अरैखिकता, विमीयता, पुच्छ व्यवहार के महत्त्व तथा इस बात पर निर्भर है कि उद्देश्य संपूर्ण निर्गत वितरण है अथवा केवल चयनित आघूर्ण और परिमात्रक।

64.3.3.1 Monte Carlo अनुकरण (MCS)

[18] Monte Carlo अनुकरण अनिश्चितता प्रसारण की प्रत्यक्ष संख्यात्मक प्रक्रिया है:

1. किसी भी निर्दिष्ट निर्भरता सहित $X_1, X_2, \dots, X_n$ के संयुक्त निवेश प्रतिरूप का प्रतिचयन करें;
2. प्रत्येक साकारता के लिए $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ का मूल्यांकन करें;
3. परिणामी नमूने से आवश्यक निर्गत वितरण, आघूर्ण, परिमात्रक, अतिक्रमण प्रायिकताएँ अथवा विफलता प्रायिकताएँ आकलित करें।

[19] यह विधि अवधारणात्मक रूप से सरल और अनंतस्पर्शी रूप से सामान्य है, किंतु इसका सांख्यिकीय अभिसरण मंद होता है और प्रत्येक प्रतिरूप मूल्यांकन महँगा होने पर अभिकलनीय लागत निषेधात्मक हो सकती है। अतः प्रतिचयन त्रुटि का आकलन किया जाना चाहिए, न कि किसी एक संचालन से उसका अनुमान लगाया जाना चाहिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

64.3.3.2 Latin Hypercube प्रतिचयन (LHS)

20 LHS प्रत्येक सीमांत वितरण का स्तरीकरण करके आवरण सुधारता है (Olsson and Sandberg, 2002)। अनेक चिकने प्रतिरूपों के लिए यह समान आकार के सरल यादृच्छिक नमूने की तुलना में प्रतिचयन प्रसरण घटाता है, यद्यपि लाभ अनुक्रिया फलन और निवेशों के बीच निर्भरता के निरूपण पर निर्भर करता है।

LHS एक स्तरीकृत प्रतिचयन तकनीक है। यह प्रत्येक निवेश के CDF को N समान-प्रायिकता स्तरों में विभाजित करता है, प्रत्येक सीमांत स्तर से एक मान चुनता है और मानों को N निवेश सदिशों में संयोजित करता है। प्रत्येक एकविमीय प्रक्षेप में स्तरीकरण यथार्थ होता है; संपूर्ण बहुविमीय समष्टि का आवरण सीमांत नमूनों के युग्मन अथवा क्रमचय पर निर्भर करता है।

21 LHS प्रायः साधारण यादृच्छिक प्रतिचयन की तुलना में कम प्रतिरूप मूल्यांकनों से उपयोगी आकलन देता है, किंतु स्वयं यथार्थता की गारंटी नहीं देता; नमूना आकार बढ़ाकर अथवा अभिकल्प को पुनरावृत्त करके अभिसरण की जाँच अभी भी आवश्यक है।

1. निवेश वितरणों को विभाजित करें: प्रत्येक निवेश चर X के संचयी वितरण फलन (CDF) को N समान-प्रायिकता अंतरालों में विभाजित करें:

$$X_1, X_2, \ldots, X_N, \quad \text{where } P(X_i) = \frac{1}{N}.$$

2. स्तरीकृत प्रतिचयन: प्रत्येक प्रायिकता स्तर से एक मान चुनें।
3. निवेश नमूनों को संयोजित करें: अनेक निवेश चरों $X_1, X_2, \ldots, X_n$ के लिए नमूनों का यादृच्छिक क्रमचय करके N अद्वितीय निवेश संयोजन बनाएँ।
4. प्रतिरूप अनुकरण चलाएँ। प्रत्येक निवेश सदिश के लिए मूल्यांकन करें:

$$Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

5. निर्गत अनिश्चितता का परिमाणन करें: निर्गतों का उपयोग सांख्यिकीय मापों की गणना के लिए करें (§M.4.1)।

22 तालिका 64.3 में Monte Carlo और Latin Hypercube प्रतिचयन की तुलना की गई है।

23 चित्र 64.1 द्विविमीय आँकड़ों के लिए शास्त्रीय Monte Carlo प्रतिचयन (MCS) और Latin Hypercube प्रतिचयन (LHS) के बीच अंतर दर्शाता है।

1. बाएँ आलेख (MCS) में नमूने यादृच्छिक रूप से वितरित हैं, जिससे कुछ क्षेत्रों में स्पष्ट समूहण और अन्य में रिक्तियाँ उत्पन्न होती हैं। यह असमान फैलाव MCS की अंतर्निहित यादृच्छिकता दर्शाता है, जो नमूना समष्टि में एकसमान आवरण लागू नहीं करता।
2. दाएँ आलेख (LHS) में प्रत्येक सीमांत स्तर ठीक एक बार निरूपित है। प्रदर्शित क्रमचय अधिक संतुलित द्विविमीय प्रक्षेप भी देता है, यद्यपि बहुविमीय एकरूपता की यह मात्रा प्रत्येक LHS अभिकल्प द्वारा सुनिश्चित नहीं होती।

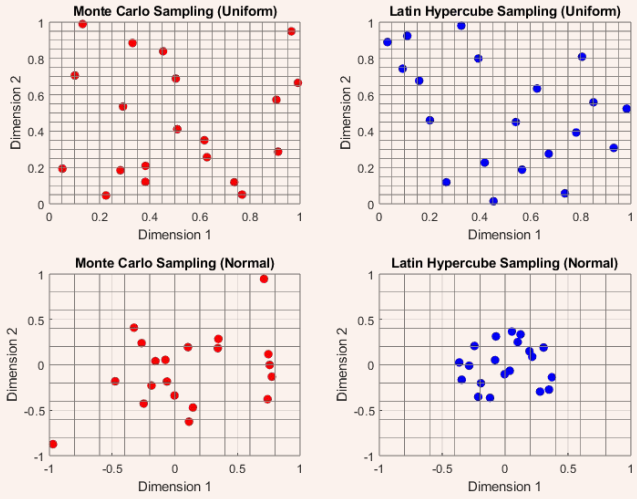
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

तालिका 64.3: MCS और LHS की तुलना

पक्ष	**Monte Carlo प्रतिचयन**	**Latin Hypercube प्रतिचयन (LHS)**
सीमांत आवरण	नमूने समूहित होकर रिक्तियाँ छोड़ सकते हैं।	प्रत्येक सीमांत प्रायिकता स्तर में ठीक एक बिंदु होता है।
दक्षता	सरल अभिसरण सिद्धांत वाली आधारभूत विधि।	चिकनी अनुक्रियाओं के लिए प्रायः प्रसरण घटाती है, किंतु लाभ समस्या पर निर्भर है।
निर्भरता	निर्दिष्ट संयुक्त प्रतिरूप से सीधे आहरण।	निवेश सहसंबद्ध होने पर निर्भरता-संरक्षक निर्माण अथवा पुनःक्रमण आवश्यक।
सत्यापन	N बढ़ाएँ अथवा स्वतंत्र संचालनों को दोहराएँ।	N बढ़ाएँ, अभिकल्प दोहराएँ और क्रमचय अथवा इष्टतमीकृत अभिकल्प के प्रति संवेदनशीलता जाँचें।

3. ऊपरी आलेख एकसमान वितरणों और निचले आलेख प्रसामान्य वितरण ($\mu = 0$, $\sigma = 0.3$) के अनुरूप हैं।

[24] यह तुलना LHS का प्रमुख लाभ दर्शाती है: सीमित नमूने से नियंत्रित सीमांत आवरण। यथार्थता अभी भी नमूना आकार, निर्भरता प्रतिरूपण, अनुक्रिया फलन और चयनित क्रमचय पर निर्भर है।



चित्र 64.1: MCS और LHS की तुलना

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

25 *Latin Hypercube* प्रतिचयन *(LHS)* पद प्रत्येक स्तर को एक बार उपयोग करने के Latin-वर्ग विचार को बहुविमीय निवेश प्रांत के hypercube निरूपण के साथ संयोजित करता है।

Latin वर्ग: एक संयोजी सरणी जिसमें प्रत्येक प्रतीक हर पंक्ति और हर स्तंभ में ठीक एक बार आता है। उदाहरणार्थ, 3×3 Latin वर्ग में:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

प्रत्येक पंक्ति और स्तंभ में A, B और C ठीक एक बार आते हैं, जिससे वर्ग में स्तरीकृत वितरण सुनिश्चित होता है।

प्रत्येक नमूने का प्रत्येक विमा में स्तरीकरण सुनिश्चित करके इस अवधारणा को उच्च-विमीय प्रतिचयन के लिए अनुकूलित किया गया।

Hypercube: अंतराल, वर्ग और घन का n विमाओं तक विस्तार; यह n निवेश चरों की प्रसामान्यीकृत नमूना समष्टि को निरूपित करता है।

64.3.3.2.0.1 उदाहरण 64.2: Latin Hypercube: दो चरों वाला हल किया गया उदाहरण

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

एक सरल द्विचर समस्या पर विचार करें: संरचनात्मक विस्थापन Y का प्रतिरूपण Young गुणांक E और लागू भार P के फलन के रूप में। हम मानते हैं:

$$E \sim \mathcal{N}\left(200\ \text{GPa}, (10\ \text{GPa})^2\right), \tag{64.6}$$
$$P \sim \mathcal{U}(10\ \text{kN}, 20\ \text{kN}), \tag{64.7}$$

और हम LHS से $N = 4$ अद्वितीय निवेश संयोजन उत्पन्न करना चाहते हैं।

चरण 1: निवेश वितरणों का विभाजन E (प्रसामान्य वितरण) के CDF को हम $N = 4$ समान-प्रायिकता अंतरालों में विभाजित करते हैं:

$$\text{Intervals}: \left[0, \frac{1}{4}\right), \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

इन अंतरालों के संगत परिमात्रक हैं:

$$\Phi^{-1}(0.125) \approx -1.150 \implies E_1 \approx 188.5\ \text{GPa}, \tag{64.8}$$
$$\Phi^{-1}(0.375) \approx -0.319 \implies E_2 \approx 196.8\ \text{GPa}, \tag{64.9}$$
$$\Phi^{-1}(0.625) \approx +0.319 \implies E_3 \approx 203.2\ \text{GPa}, \tag{64.10}$$
$$\Phi^{-1}(0.875) \approx +1.150 \implies E_4 \approx 211.5\ \text{GPa}. \tag{64.11}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

P (एकसमान वितरण) के लिए अंतराल और संगत नमूने सरल हैं:

$$P_1 = 10 + 0.125 \times 10 = 11.25 \text{ kN}, \tag{64.12}$$
$$P_2 = 10 + 0.375 \times 10 = 13.75 \text{ kN}, \tag{64.13}$$
$$P_3 = 10 + 0.625 \times 10 = 16.25 \text{ kN}, \tag{64.14}$$
$$P_4 = 10 + 0.875 \times 10 = 18.75 \text{ kN}. \tag{64.15}$$

चरण 2–3: स्तरीकृत प्रतिचयन और क्रमचय प्रत्येक अंतराल से एक नमूना लिया जाता है, फिर अद्वितीय संयोजन बनाने के लिए नमूनों का चरों में यादृच्छिक क्रमचय किया जाता है। सूचकांकों के यादृच्छिक क्रमचय से मिलता है:

नमूना	E (GPa)	P (kN)	टिप्पणियाँ
1	188.5	13.75	अंतराल 1 और 2 से
2	196.8	18.75	अंतराल 2 और 4 से
3	203.2	11.25	अंतराल 3 और 1 से
4	211.5	16.25	अंतराल 4 और 3 से

यह क्रमचय सुनिश्चित करता है कि प्रत्येक सीमांत अंतराल का प्रतिचयन ठीक एक बार हो। यह संपूर्ण बहुविमीय समष्टि में एकसमान अंतराल सुनिश्चित नहीं करता, अतः वैकल्पिक क्रमचय अथवा इष्टतमीकृत LHS अभिकल्प बेहतर प्रक्षेप गुण दे सकते हैं।

चरण 4: प्रतिरूप अनुकरण चलाएँ प्रत्येक संयोजन के लिए प्रतिरूप का मूल्यांकन किया जाता है। मान लें कि विस्थापन प्रतिरूप है:

$$Y = \frac{P L^3}{48 E I}$$

जहाँ $L = 2$ m और $I = 1 \times 10^{-5}$ m^4 स्थिर हैं। निर्गत हैं:

नमूना	E (GPa)	P (kN)	Y (mm)
1	188.5	13.75	1.216
2	196.8	18.75	1.588
3	203.2	11.25	0.923
4	211.5	16.25	1.281

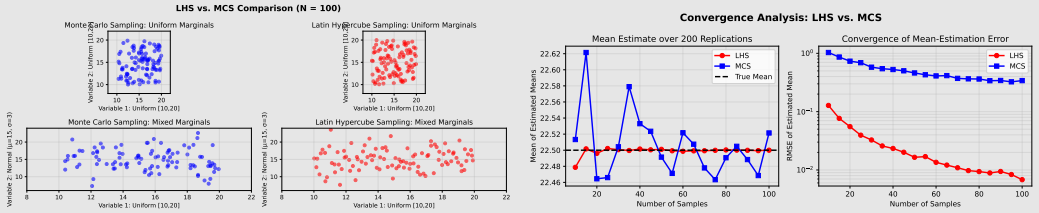
चरण 5: निर्गत अनिश्चितता का परिमाणन $N = 4$ निर्गतों से:

$$\bar{Y} = \frac{1}{4}(1.216 + 1.588 + 0.923 + 1.281) \approx 1.252 \text{ mm}, \tag{64.16}$$
$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(Y_i - \bar{Y})^2} \approx 0.236 \text{ mm}. \tag{64.17}$$

केवल $N = 4$ नमूनों के साथ यह आकलन सन्निकट है; बड़े नमूना आकार बेहतर सांख्यिकीय अभिसरण देते हैं।

प्रतिकृति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



MATLAB®कोड §I.5.7 में दिया गया है; §64.3.3.2 भी देखें।

64.3.3.3 प्रत्यक्ष प्रतिचयन के सन्निकट और प्रतिपूरक विकल्प

26 Monte Carlo अनुकरण में अनेक प्रतिरूप मूल्यांकन आवश्यक हो सकते हैं। निम्नलिखित दो सन्निकटन यादृच्छिक प्रतिचयन को मूल्यांकनों के छोटे निर्दिष्ट समुच्चय से प्रतिस्थापित करके लागत घटाते हैं। उनकी मितव्ययिता अधिक कठोर धारणाओं से मिलती है, अतः उनकी यथार्थता की जाँच समस्या की अरैखिकता, निर्भरता और विमीयता के सापेक्ष की जानी चाहिए।

64.3.3.3.1 बिंदु आकलन विधि (PEM)

27 *बिंदु आकलन विधि* पद अनेक संबद्ध सन्निकटनों को समाहित करता है। यहाँ प्रयुक्त सरल रूप द्विस्तरीय कोना-बिंदु अभिकल्प है: प्रत्येक निवेश को $\mu_i - k\sigma_i$ और $\mu_i + k\sigma_i$ मान दिए जाते हैं और सभी परिणामी कोनों पर प्रतिरूप का मूल्यांकन किया जाता है। इसे अधिक मितव्ययी आघूर्ण-मिलान बिंदु-आकलन योजनाओं से भ्रमित नहीं करना चाहिए, जिनमें केवल सीमित संख्या में भारित बिंदु प्रयुक्त होते हैं।

PEM निम्न प्रकार कार्य करती है:

1. प्रत्येक निवेश चर X_i का माध्य μ_i और मानक विचलन σ_i पहचानें।
2. प्रत्येक निवेश के लिए दो मान परिभाषित करें: $\mu_i - k\sigma_i$ और $\mu_i + k\sigma_i$।
3. निवेश मानों के सभी 2^n संयोजनों पर प्रतिरूप का मूल्यांकन करें, जहाँ n निवेश चरों की संख्या है।
4. प्रतिरूप मूल्यांकनों के आधार पर निर्गत माध्य, प्रसरण और अन्य सांख्यिकीय आघूर्ण परिकलित करें।

28 कोना अभिकल्प निर्दिष्ट द्विस्तरीय परास में अनुक्रिया दर्शा सकता है, किंतु सामान्यतः मूल निवेशों का प्रायिकता वितरण अथवा उच्च-कोटि निर्गत आघूर्ण पुनरुत्पादित नहीं करता। k का चयनित मान और बिंदु भार बताए जाने चाहिए। इसकी लागत भी निवेशों की संख्या के साथ चरघातांकी रूप से बढ़ती है।

64.3.3.3.1.1 उदाहरण 64.3: बिंदु आकलन विधि का उदाहरण

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

किसी प्रणाली में दो निवेश चर हैं:

- $X_1 \sim N(10, 2^2)$: माध्य = 10, मानक विचलन = 2।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- $X_2 \sim N(20, 3^2)$: माध्य = 20, मानक विचलन = 3।

प्रणाली निर्गत है:

$$Y = X_1^2 + 3X_2$$

लक्ष्य: Y के माध्य और प्रसरण का आकलन करने के लिए बिंदु आकलन विधि (PEM) का उपयोग करें।

चरण:

1. प्रत्येक निवेश चर के लिए दो मान परिभाषित करें:

$$X_1 = \mu_{X_1} \pm \sigma_{X_1}, \quad X_2 = \mu_{X_2} \pm \sigma_{X_2}.$$

2. फलन $Y = X_1^2 + 3X_2$ का X_1 और X_2 के सभी संयोजनों पर मूल्यांकन करें:

$$Y = f(X_1, X_2), \quad \text{for } (X_1, X_2) \in \{(8, 17), (8, 23), (12, 17), (12, 23)\}.$$

3. चारों कोनों पर समान भारों के साथ सन्निकट आघूर्ण परिकलित करें:

$$\widehat{\mu}_Y = 164, \qquad \widehat{\mathrm{Var}}(Y) = 1681.$$

तुलना के लिए, निर्दिष्ट स्वतंत्र प्रसामान्य निवेशों के अधीन यथार्थ आघूर्ण $\mu_Y = 164$ और $\mathrm{Var}(Y) = 1713$ हैं। इस द्विघात उदाहरण में सहमति निकट है, किंतु सामान्य अरैखिक अनुक्रिया के लिए इसकी गारंटी नहीं है।

64.3.3.3.2 एक समय में एक (Taylor श्रेणी–परिमित अंतर आकलन TSFD)

[29] यह सरलीकृत उपागम निवेश माध्यों के सदिश के परितः प्रथम-कोटि Taylor प्रसार से आरंभ होता है और केवल रैखिक पदों को बनाए रखता है (Benjamin and Cornell, 1970)। अतः यह तब सर्वाधिक विश्वसनीय होता है जब अनुक्रिया स्थानीय रूप से चिकनी हो और अभिरुचि-परास में केवल अल्प अरैखिक हो।

$$\mu_F \approx F(\boldsymbol{\mu})$$

जहाँ $\boldsymbol{\mu}$ निवेश माध्यों का सदिश है। यह समानता प्रथम-कोटि सन्निकटन है; अरैखिक अनुक्रिया के लिए $\mathbb{E}[F(\mathbf{X})]$ का $F(\mathbb{E}[\mathbf{X}])$ के बराबर होना आवश्यक नहीं है। स्वतंत्र यादृच्छिक चरों के लिए संगत प्रथम-कोटि प्रसरण सन्निकटन है

$$\begin{aligned} Var(F) = \sigma_F^2 &= \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2 \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} &\approx \frac{F_i^+ - F_i^-}{2\sigma_i} \\ F_i^+ &= F(\mu_1, \cdots, \mu_i + \sigma_i, \cdots, \mu_n) \\ F_i^- &= F(\mu_1, \cdots, \mu_i - \sigma_i, \cdots, \mu_n) \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ σ_i चरों के मानक विचलन हैं। अतः,

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_i \left(\frac{F_i^+ - F_i^-}{2} \right)^2}$$

[30] प्रक्रिया (Bryant, Brokaw, and Mlakar, 1993) को निम्न प्रकार संक्षेपित किया जा सकता है:

1. सभी चरों को उनके माध्यों पर रखकर आरंभिक विश्लेषण करें। प्राप्त अनुक्रिया निर्गम माध्य का प्रथम-कोटि सन्निकटन है।
2. $2n$ विश्लेषण करें, जिनमें चर i को छोड़कर सभी चरों को उनके माध्य मानों के बराबर रखा जाता है; वही चर पहले $\mu_i + \sigma_i$ और फिर $\mu_i - \sigma_i$ मान ग्रहण करता है। अतः इस विधि के लिए $2n + 1$ विश्लेषण आवश्यक हैं।
3. प्रत्येक चर x_i के लिए चिह्नित प्रथम-कोटि योगदान $c_i = (F_i^+ - F_i^-)/2$ परिकलित करें। इसका परिमाण उस चर के प्रति संवेदनशीलता का स्थानीय संकेत देता है।
4. स्वतंत्र चरों के लिए योगदानों का वर्ग करें, उन्हें जोड़ें और वर्गमूल लें: $\sigma_F \approx \sqrt{\sum_i c_i^2}$। सहसंबद्ध चरों के लिए संगत सहप्रसरण क्रॉस-पद भी सम्मिलित किए जाने चाहिए।
5. परिणामों को अवरोही क्रम में व्यवस्थित करके तथाकथित “Tornado आरेख” बनाएँ।

[31] चूँकि TSFD स्थानीय है, इसलिए विक्षोभ मापक्रम और अपनाए गए प्रायिकता प्रतिरूप का उल्लेख किया जाना चाहिए। $\pm\sigma_i$ अध्ययन तभी सार्थक है जब σ_i अनिश्चितता का प्रतिरक्षणीय माप हो और उस अंतराल में अनुक्रिया पर्याप्त रूप से चिकनी बनी रहे।

64.3.3.3.2.1 उदाहरण 64.4: Taylor श्रेणी परिमित अंतर विधि का उदाहरण

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

पूर्ववर्ती PEM उदाहरण के समान स्वतंत्र प्रसामान्य निवेश और अनुक्रिया लें:

$$X_1 \sim N(10, 2^2), \qquad X_2 \sim N(20, 3^2), \qquad Y = X_1^2 + 3X_2.$$

माध्य बिंदु पर,

$$\widehat{\mu}_Y = F(10, 20) = 160.$$

दो परिमित-अंतर योगदान हैं

$$c_1 = \frac{F(12, 20) - F(8, 20)}{2} = \frac{204 - 124}{2} = 40,$$
$$c_2 = \frac{F(10, 23) - F(10, 17)}{2} = \frac{169 - 151}{2} = 9.$$

अतः,

$$\widehat{\sigma}_Y = \sqrt{40^2 + 9^2} = 41, \qquad \widehat{\mathrm{Var}}(Y) = 1681.$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यथार्थ आघूर्ण $\mu_Y = 164$ और $\mathrm{Var}(Y) = 1713$ हैं। प्रथम-कोटि विधि द्विघात पद से उत्पन्न माध्य-संशोधन को ग्रहण नहीं करती और प्रसरण को किंचित कम आँकती है; यह तुलना इसकी मितव्ययिता और स्थानीय-रैखिक सीमा दोनों को दर्शाती है।

64.3.3.3.3 बहुपदीय अराजकता प्रसार (PCE)

[32] बहुपदीय अराजकता प्रसार (PCE) अनिश्चितता परिमाणन में प्रयुक्त ऐसी विधि है जो यादृच्छिक चरों अथवा प्रसंभाव्य फलनों को लंबकोणीय बहुपदों की श्रेणी के रूप में निरूपित करती है।

[33] PCE की प्रमुख संकल्पनाएँ:

वर्णक्रमीय निरूपण वर्णक्रमीय निरूपण का अर्थ किसी फलन को आधार फलनों की श्रेणी के रूप में व्यक्त करना है, उसी प्रकार जैसे Fourier श्रेणी ज्या और कोज्या फलनों द्वारा संकेतों को निरूपित करती है। PCE में आधार फलन *लंबकोणीय* बहुपद होते हैं, जिन्हें निवेश यादृच्छिक चर के प्रायिकता वितरण के अनुकूल बनाया जाता है।

लंबकोणीय बहुपद लंबकोणीय बहुपद PCE के आधार फलन बनाते हैं। ये बहुपद दिए गए भार फलन के सापेक्ष लंबकोणीय होते हैं, जो यादृच्छिक चर के प्रायिकता वितरण के अनुरूप होता है। उदाहरण हैं:

- *Legendre* बहुपद: एकसमान वितरण वाले यादृच्छिक चरों के लिए प्रयुक्त।
- *Hermite* बहुपद: प्रसामान्य (Gaussian) वितरण वाले यादृच्छिक चरों के लिए प्रयुक्त।
- *Laguerre* बहुपद: चरघातांकी वितरण वाले यादृच्छिक चरों के लिए प्रयुक्त।

यादृच्छिक चर और अनुक्रिया फलन *यादृच्छिक* चर वह निवेश है जो किसी विशिष्ट प्रायिकता वितरण (जैसे एकसमान अथवा प्रसामान्य) का अनुसरण करता है। *अनुक्रिया फलन* यादृच्छिक चर पर निर्भर निकाय का नियतात्मक निर्गम है। उदाहरणतः, यदि x यादृच्छिक चर है तो अनुक्रिया फलन $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$ हो सकता है।

PCE गुणांक PCE के गुणांक अनुक्रिया फलन के सन्निकटन में प्रत्येक बहुपदीय पद के योगदान को परिमाणित करते हैं। इन गुणांकों को न्यूनतम-वर्ग समंजन जैसी तकनीकों द्वारा परिकलित किया जाता है, ताकि वास्तविक फलन और उसके बहुपदीय सन्निकटन के बीच त्रुटि न्यूनतम हो।

64.3.3.3.3.1 उदाहरण 64.5: बहुपदीय अराजकता प्रसार

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

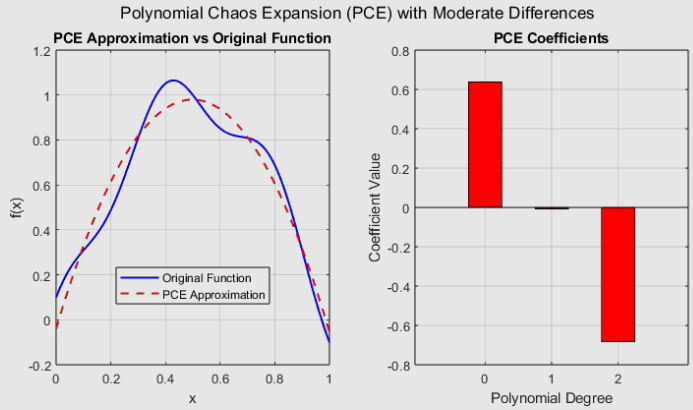
अनुक्रिया फलन $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$ लें, जहाँ x, $[0, 1]$ पर एकसमान रूप से वितरित है। हम विस्थापित Legendre बहुपदों का उपयोग करके f का सन्निकटन करते हैं; समतुल्यतः, साधारण Legendre बहुपदों का मान $2x - 1$ पर लेते हैं, ताकि आधार $[0, 1]$ पर एकसमान घनत्व के सापेक्ष लंबकोणीय हो।

1. यादृच्छिक चर उत्पन्न करें: $[0, 1]$ पर x के एकसमान रूप से वितरित यादृच्छिक प्रतिदर्शों का समुच्चय।
2. आधार फलन निर्मित करें: निर्दिष्ट घात तक $[0, 1]$ पर विस्थापित Legendre बहुपदों, अथवा समतुल्यतः $2x - 1$ पर मूल्यांकित साधारण Legendre बहुपदों का उपयोग करें।
3. PCE गुणांक परिकलित करें: न्यूनतम-वर्ग विधि द्वारा प्रसार के गुणांकों का समंजन करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. फलन का सन्निकटन करें: $f(x)$ के सन्निकटन के लिए आधार फलनों को उनके संगत गुणांकों के साथ संयोजित करें।

PCE के परिणामों को निम्न प्रकार दृश्यीकृत किया जा सकता है:



तुलना आलेख: मूल फलन $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$ और उसके PCE सन्निकटन की तुलना करने वाला आलेख। मूल फलन सतत नीली रेखा से और PCE सन्निकटन लाल खंडित रेखा से दर्शाया गया है। सन्निकटन युक्तिसंगत रूप से यथार्थ है, किंतु मूल फलन की जटिलता और प्रसार में प्रयुक्त सीमित बहुपदीय घात के कारण थोड़ा विचलित होता है। यह PCE में अभिकलनीय सरलता और सन्निकटन यथार्थता के बीच संतुलन को रेखांकित करता है।

गुणांक आलेख: प्रत्येक बहुपदीय घात के लिए PCE गुणांकों को प्रदर्शित करने वाला दंड आलेख। दंडों की ऊँचाई श्रेणी प्रसार के प्रत्येक पद का सापेक्ष महत्त्व दर्शाती है। इस विशिष्ट अनुक्रिया और बहुपदीय घात के लिए निम्न-कोटि गुणांक प्रधान हैं। यह प्रतिरूप सार्वत्रिक नहीं है: तीव्र प्रवणता, असांतत्य अथवा दोलन के लिए उल्लेखनीय उच्च-कोटि पद आवश्यक हो सकते हैं।

64.3.4 निरूगम अनिश्चितता की व्याख्या

34 अनुक्रिया वितरण के प्रसारण के पश्चात अनिश्चितता विश्लेषण उसे उन राशियों में रूपांतरित करता है जिनका अभियांत्रिकी प्रश्न से प्रत्यक्ष संबंध है। निरूगम अनिश्चितता केवल आघूर्णों तक सीमित नहीं है। निरूणय के अनुसार उपयोगी सारांशों में प्रायिकता घनत्व और संचयी वितरण फलन, माध्य और प्रसरण, पूर्वानुमान अथवा विश्वसनीयता अंतराल, परिमात्रक, अधिक्रमण प्रायिकताएँ और विफलता प्रायिकताएँ सम्मिलित हैं। सेवा-स्तर तुलना के लिए माध्य अनुक्रिया पर्याप्त हो सकती है, जबकि सीमा अवस्था के आकलन में सामान्यतः वितरण के प्रासंगिक पुच्छ पर ध्यान देना आवश्यक है।

35 प्रतिवेदित माप उसकी व्याख्या के अनुरूप होना चाहिए। विश्वास अंतराल आकलित समष्टि राशि की अनिश्चितता वरिणत करता है; पूर्वानुमान अंतराल अपनाए गए प्रतिरूप के अधीन भावी प्रेक्षण का परास बताता है; और Bayesian विश्वसनीयता अंतराल प्रतिरूप, आँकड़ों तथा पूर्व मान्यताओं पर सशर्त अनिश्चित राशि की पश्च प्रायिकता दर्शाता है। ये अंतराल भिन्न प्रश्नों के उत्तर देते हैं और परस्पर विनिमेय रूप से प्रयुक्त नहीं किए जाने चाहिए।

36 प्रतिरक्षणीय UA उन मान्यताओं को भी प्रतिवेदित करता है जो परिणाम को नियंत्रित करती हैं: अपनाए गए सीमांत वितरण और निर्भरता प्रतिरूप, मापन त्रुटि तथा प्रतिरूप-विसंगति का उपचार, संख्यात्मक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा प्रतिचयन अभिसरण, और वैकल्पिक संभाव्य मान्यताओं के प्रति निष्कर्ष की संवेदनशीलता। जहाँ निर्णय अल्प विफलता प्रायिकता पर निर्भर हो, वहाँ विश्लेषक को यह प्रदर्शित करना चाहिए कि प्रतिचयन अथवा सन्निकटन विधि केवल वैश्विक आघूर्णों पर निर्भर रहने के स्थान पर प्रासंगिक पुच्छ को पर्याप्त परिशुद्धता से हल करती है।

37 प्रसारण स्थापित करता है कि अनुक्रिया में *कितना* परिवर्तन हो सकता है; संवेदनशीलता विश्लेषण स्थापित करता है कि क्यों। अतः अगला अनुभाग निर्गम परिवर्तनीयता को अनिश्चित निवेशों में विभाजित करता है और उन निवेशों की पहचान करता है जिनके लिए उन्नत अभिलक्षणन, अनुवर्ती विश्लेषणों में स्पष्ट प्रतिधारण अथवा अंततः प्राचल अभिनिर्धारण अपेक्षित है।

64.4 संवेदनशीलता विश्लेषण

38 अनिश्चितता प्रसारण पूछता है कि निर्गम कितने विस्तृत परास में बदल सकता है। संवेदनशीलता विश्लेषण पूछता है कि वह क्यों बदलता है। यह भेद अनिवार्य है: दो प्रतिरूपों का निर्गम प्रसरण समान हो सकता है, किंतु उनके नियंत्रक प्राचल अत्यंत भिन्न हो सकते हैं।

39 संवेदनशीलता विधियों को चार समूहों में व्यवस्थित किया जा सकता है:

- **स्थानीय अवकलज अथवा एक-समय-में-एक विधियाँ**, जो चयनित आधाररेखा बिंदु के निकट अनुक्रिया का वर्णन करती हैं;
- **वैश्विक छँटाई विधियाँ**, जैसे Morris, जो संपूर्ण प्रक्षेत्र में नगण्य और प्रभावशाली निवेशों की दक्षतापूर्वक पहचान करती हैं;
- **वैश्विक प्रसरण-आधारित विधियाँ**, जैसे Sobol सूचकांक, जो निर्गम प्रसरण को मुख्य प्रभावों और अन्योन्यक्रियाओं में बाँटती हैं;
- **आलेखीय सारांश**, जैसे tornado आरेख, जो निर्दिष्ट एक-समय-में-एक विक्षोभों से उत्पन्न परास प्रदर्शित करते हैं।

40 कोई एक विधि सार्वत्रिक रूप से सर्वोत्तम नहीं है। जब प्रतिरूप में अनेक निवेश हों और प्रत्येक मूल्यांकन महँगा हो तब छँटाई उपयुक्त है। प्रसरण-आधारित सूचकांक अधिक पूर्ण अपघटन प्रदान करते हैं, किंतु उनके लिए उल्लेखनीय रूप से अधिक मूल्यांकन आवश्यक हैं। स्थानीय अवकलज अल्पव्ययी हैं, परंतु आधाररेखा बिंदु से दूर अरैखिक व्यवहार और अन्योन्यक्रियाओं को छोड़ सकते हैं।

64.4.1 Morris विधि

41 Morris विधि अनेक अनिश्चित निवेशों और महँगे मूल्यांकनों वाले प्रतिरूपों के लिए वैश्विक छँटाई तकनीक है (Morris, 1991)। यह एक-समय-में-एक विक्षोभों को ग्राह्य निवेश समष्टि में वितरित करती है, जिससे स्थानीय परिमित अंतरों की अधिकांश मितव्ययिता बनी रहती है और एकल आधाररेखा से दूर संवेदनशीलता में परिवर्तन भी ज्ञात होते हैं। इसके प्रमुख निर्गम प्रभावशाली चरों का क्रम निर्धारण करते और संभावित अरैखिकता अथवा अन्योन्यक्रियाओं को चिह्नित करते हैं; वे पूर्ण प्रसरण अपघटन नहीं बनाते।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मूल Morris विधि

42 जैसा पहले वर्णित है, Taylor श्रेणी–परिमित अंतर (TSFD) आकलन उपागम एक समय में एक यादृच्छिक चर (RV) को (सामान्यतः $\pm\sigma$ से) विक्षुब्ध करता है। एक-समय-में-एक (OAT) विधि कहलाने वाला यह उपागम विस्तारित *Morris विधि* का आधार है।

43 प्राथमिक-प्रभाव अभिकल्प प्रत्येक प्रक्षेपपथ पर एक समय में एक RV को बदलता है, किंतु प्रभावों का संग्रह वैश्विक है क्योंकि प्रक्षेपपथ निवेश समष्टि के भिन्न स्थानों से आरंभ होते हैं। Morris सूचकांक पृथक अन्योन्यक्रिया पदों को अलग नहीं करते; इसके स्थान पर प्राथमिक प्रभावों का बड़ा फैलाव अरैखिकता, अन्य RV के साथ अन्योन्यक्रिया अथवा दोनों को इंगित करता है। प्रत्येक RV के प्रभाव को **प्राथमिक प्रभावों (EE)** द्वारा संक्षेपित किया जाता है।

44 Morris विधि में प्रत्येक RV के लिए EE परिकलित किए जाते हैं और वे संवेदनशीलता के संकेतक का कार्य करते हैं। बड़ा EE मान दर्शाता है कि संगत RV का प्रतिरूप निर्गम पर उल्लेखनीय प्रभाव है। Morris विधि के प्रथम चरण में RV की विविक्त अधिसमष्टि में आरंभिक बिंदुओं का यादृच्छिक चयन किया जाता है। ये बिंदु चित्र 64.2 में भरे हुए काले वृत्तों से दर्शाए गए हैं।

45 प्रायः किसी आरंभिक बिंदु के लिए k RV के समुच्चय को परिमात्रक अधिसमष्टि में निरूपित किया जाता है, जहाँ:

$$F_i(X_i^j) = \frac{2j-1}{2m}, \tag{64.18}$$

जिसमें X_i^j, i^{th} RV का j^{th} विविक्त मान है; F_i उसका संचयी वितरण फलन (CDF), $i = [1:k]$, $j = [1:m]$, और m, CDF में विविक्त स्तरों की संख्या है।

46 दूसरे चरण में अन्य सभी RV को स्थिर रखते हुए एक RV को छोटे वृद्धिक Δ से विक्षुब्ध किया जाता है।

47 तीसरे चरण में वही विक्षोभ Δ किसी अन्य RV पर लगाया जाता है और प्रक्रिया तब तक दोहराई जाती है जब तक सभी k RV एक बार विक्षुब्ध न हो जाएँ। ये चरण चित्र 64.2 में भरे हुए लाल वृत्तों से दर्शाए गए हैं। RV के विक्षोभ का क्रम तथा विक्षोभ की दिशा ($+\Delta$ अथवा $-\Delta$) यादृच्छिक रूप से चुनी जाती है।

48 k RV वाले निकाय के लिए एक प्रक्षेपपथ में $k+1$ प्रतिरूप मूल्यांकन आवश्यक होते हैं (चित्र 64.2 में लाल तीरों से दर्शित)। यदि r प्रक्षेपपथ प्रयुक्त हों तो मूल्यांकनों की कुल संख्या $r \times (k+1)$ हो जाती है। किसी प्रक्षेपपथ में प्रत्येक RV के EE निम्न समीकरण से परिकलित किए जाते हैं:

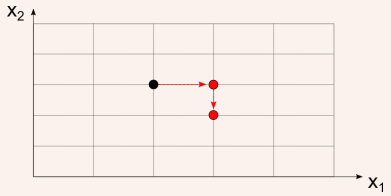
$$EE_i = \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta, x_{i+1}, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, x_k)}{\Delta}, \tag{64.19}$$

जहाँ EE_i, i^{th} RV का प्राथमिक प्रभाव है और $f(x_i)$, RV मान x_i के संगत प्रतिरूप निर्गम है।

49 Morris (Morris, 1991) ने EE पर आधारित दो संवेदनशीलता माप प्रस्तावित किए:

- EE का **माध्य** (μ_i), जो निर्गम पर i^{th} RV के समग्र प्रभाव को इंगित करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 64.2: $k = 2$ के लिए एक प्रक्षेपपथ का उदाहरण।

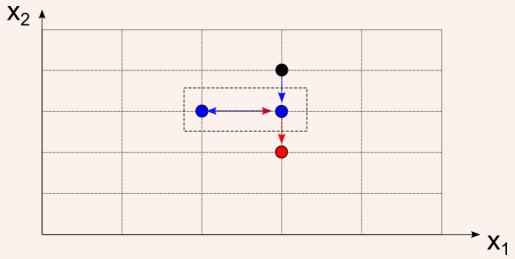
- EE का **मानक विचलन** (σ_i), जो अरैखिकता अथवा अन्य RV के साथ अन्योन्यक्रियाओं में i^{th} RV के योगदान को दर्शाता है।

50 जब EE के मान धनात्मक और ऋणात्मक दोनों हों तब संभावित निरसन प्रभावों से बचने के लिए प्रायः μ_i के स्थान पर EE के निरपेक्ष मानों का माध्य (μ_i^*) प्रयुक्त होता है। यह संशोधन सुनिश्चित करता है कि EE में विपरीत चिह्न होने पर भी संवेदनशीलता माप सुदृढ़ बने रहें।

उन्नत Morris विधि

51 यादृच्छिक रूप से उत्पन्न Morris प्रक्षेपपथ, विशेषतः स्थूल जालक पर, अतिव्यापित अथवा गुच्छित हो सकते हैं। पुनरावृत्त अथवा निकट-अंतरित मूल्यांकन अन्वेषित निवेश समष्टि की विविधता घटाते हैं और नियत अभिकलनीय बजट के लिए आकलित सूचकांकों को कम स्थिर बना सकते हैं।

52 चित्र 64.2 ने एकल प्रक्षेपपथ प्रस्तुत किया था। चित्र 64.3 अतिरिक्त अभिरुचिकर परिघटना दर्शाता है: स्वतंत्र रूप से उत्पन्न प्रक्षेपपथ संपाती अथवा गुच्छित हो सकते हैं, जिससे अन्वेषित निवेश समष्टि की विविधता घटती है।



चित्र 64.3: भिन्न Morris प्रक्षेपपथों के अतिव्यापित अथवा निकट गुच्छित बिंदु।

53 अतः समष्टि-भरण प्रक्षेपपथ और त्रिज्य बिंदु रूपांतर प्रस्तावित किए गए हैं (Sohier, Farges, and Piet-Lahanier, 2014)। उनका उद्देश्य परिहार्य अतिव्यापन घटाना और व्यापित सुधारना है; वे यह प्रत्याभूत नहीं कर सकते कि अनुक्रिया की प्रत्येक अरैखिक विशेषता का प्रतिचयन हो।

54 **RV का परिमात्रक समष्टि में प्रतिचित्रण।** उन्नत उपागम में:

- सभी k RV को प्रसामान्यीकृत परिमात्रक समष्टि $[0, 1]$ में रूपांतरित किया जाता है, जहाँ प्रत्येक विमा RV के संचयी वितरण फलन (CDF) $F_i(X_i^j)$ के अनुरूप है।

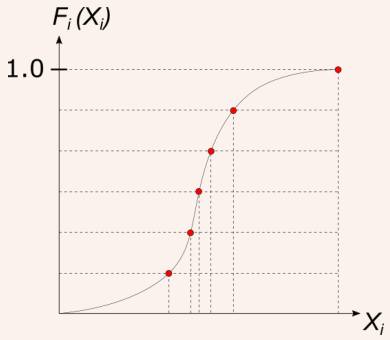
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- j^{th} परिमात्रक मान, i^{th} RV का है:

$$F_i(X_i^j) = \frac{2j-1}{2m},$$

जहाँ m विविक्त स्तरों की संख्या है। यह प्रतिचित्रण चरों के मूल वितरणों से निरपेक्ष उनके परासों में एकसमान निरूपण सुनिश्चित करता है।

यह प्रतिचित्रण प्रक्रिया चित्र 64.4 में दर्शाई गई है।



चित्र 64.4: यादृच्छिक चर और उसका संचयी वितरण फलन (CDF)।

[55] उन्नत प्रतिचयन रणनीति में सम्मिलित हैं:

- *Latin अतिघन प्रतिचयन (LHS):* निवेश समष्टि की व्यापित सुधारने और समान अथवा अतिव्यापित आरंभिक बिंदु चुने जाने की संभावना घटाने के लिए आरंभिक बिंदु LHS द्वारा चुने जाते हैं।
- *नियत चरण आकार (Δ):* परिमात्रक समष्टि में नियत चरण आकार ($\Delta = 0.5$) प्रक्षेपपथों में संगत विक्षोभ सुनिश्चित करता है। विक्षोभ यादृच्छिक रूप से नहीं, अपितु **नियत क्रम** में लगाए जाते हैं, जिससे अतिव्यापन की रोकथाम और बढ़ती है।

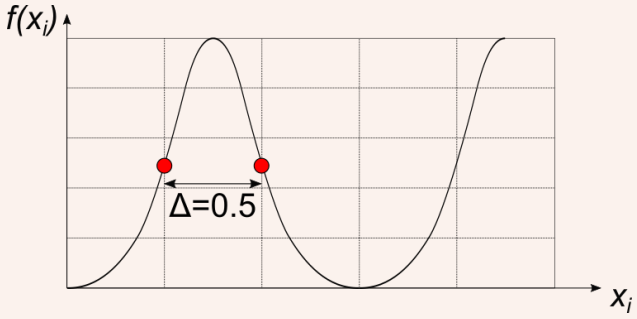
[56] **एकांतर चरण आकार।** Sohier, Piet-Lahanier, and Farges, 2015 ने आवर्ती अथवा दोलनी अनुक्रियाओं के प्रभावी उपचार के लिए एकांतर चरण आकार ($\Delta = 0.5$ और $\Delta = 0.375$) प्रस्तुत किए। चित्र 64.5 एक ऐसा उदाहरण दर्शाता है जिसमें नियत चरण आकार आवर्ती प्रतिरूप अनुक्रिया की परिवर्तनीयता को ग्रहण करने में विफल रहता है।

[57] **त्रिरज्य-बिंदु अभिकल्प।** एक और परिष्कार प्रत्येक प्रक्षेपपथ को उभयनिष्ठ केंद्र से किए गए विक्षोभों द्वारा प्रतिस्थापित करता है:

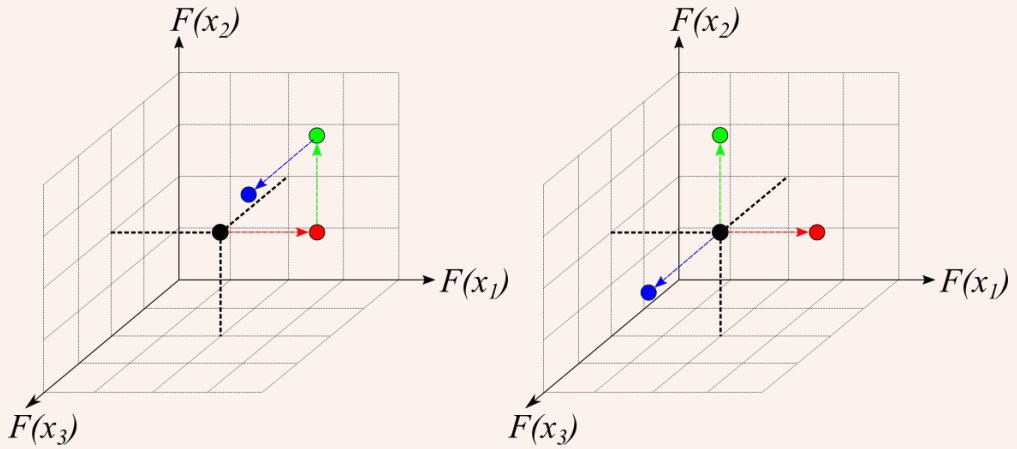
- चरों को क्रमिक रूप से विक्षुब्ध करके प्रक्षेपपथ बनाने के स्थान पर उन्नत विधि परिमात्रक समष्टि में एक केंद्रीय बिंदु का उपयोग करती है।
- प्रत्येक चर को इस केंद्र से स्वतंत्र रूप से विक्षुब्ध किया जाता है, जिससे अतिरेक दूर होता और प्रतिचयन दक्षता सुधरती है।

चित्र 64.6 पारंपरिक प्रक्षेपपथ-आधारित उपागम (a) की त्रिरज्य-बिंदु उपागम (b) से तुलना करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 64.5: यादृच्छिक चर x_i की आवर्ती अनुक्रिया। नियत चरण आकार आवर्ती परिवर्तनों का पता लगाने में विफल हो सकते हैं।



(a) प्रक्षेपपथ (b) त्रिज्य बिंदु

चित्र 64.6: परिमात्रक अधिसमष्टि में $k = 3$ RV के लिए प्रक्षेपपथ (a) और त्रिज्य-बिंदु (b) विधियों की तुलना।

[58] सारांशतः, उन्नत Morris विधि में निम्न प्रमुख सुधार सम्मिलित हैं:

- परिमात्रक समष्टि में प्रतिचित्रण: चरों का एकसमान निरूपण सुनिश्चित करता है।
- LHS आरंभीकरण: सीमांत व्यापित सुधारता है और अतिव्यापन घटा सकता है।
- नियत अथवा एकांतर चरण आकार: एकल चरण द्वारा चयनित अनुक्रिया विशेषताओं के छूटने का जोखिम घटाते हैं।
- त्रिज्य-बिंदु प्रतिचयन: प्रक्षेपपथ चरणों की क्रमिक निर्भरता से बचता है और अतिरेक मूल्यांकन घटा सकता है।

ये परिष्कार समष्टि-व्यापित सुधार सकते और अतिरेक मूल्यांकन घटा सकते हैं। इनके लाभ का आकलन विचाराधीन अनुक्रिया के लिए किया जाना चाहिए, विशेषतः जब आवर्तिता, असांतत्य अथवा प्रबल अन्योन्यक्रियाएँ संभाव्य हों।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

64.4.1.1 उदाहरण 64.6: Morris विधि

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

पूर्ववर्ती उदाहरणों वाला वही निकाय लें:

$$Y = X_1^2 + 3X_2$$

जहाँ निवेश हैं:

- $X_1 \sim N(10, 2^2)$: माध्य = 10, मानक विचलन = 2।
- $X_2 \sim N(20, 3^2)$: माध्य = 20, मानक विचलन = 3।

लक्ष्य Morris विधि द्वारा निर्गम Y पर X_1 और X_2 के प्राथमिक प्रभावों की पहचान करना है।

Morris विधि के चरण

1. निवेश परासों को $[0, 1]$ में प्रसामान्यीकृत करें।
2. आधाररेखा बिंदु $\mathbf{X}_{\text{baseline}}$ उत्पन्न करें।
3. अन्य को स्थिर रखते हुए एक समय में एक निवेश चर को चरण आकार Δ से विक्षुब्ध करें।
4. प्रत्येक चर के प्राथमिक प्रभाव इस प्रकार परिकलित करें:

$$EE = \frac{f(\mathbf{X}_{+i}) - f(\mathbf{X})}{\Delta},$$

   जहाँ $\mathbf{X}_{+i}$ विक्षुब्ध निवेश है।
5. अनेक प्रक्षेपपथों के लिए दोहराएँ और परिणामों को समुचित करें (EE का माध्य और मानक विचलन)।

64.4.2 Sobol प्रसरण-आधारित संवेदनशीलता सूचकांक

[59] Sobol सूचकांक किसी प्रतिरूप के निर्गम प्रसरण का वैश्विक अपघटन प्रदान करते हैं

$$Y = g(X_1, \dots, X_k), \tag{64.20}$$

जिसमें निवेश परस्पर स्वतंत्र हैं। मानक वर्ग-समाकलनीयता प्रतिबंधों के अधीन अनुक्रिया को फलनीय प्रसरण-विश्लेषण अपघटन के रूप में लिखा जा सकता है

$$g(\mathbf{X}) = g_0 + \sum_i g_i(X_i) + \sum_{i<j} g_{ij}(X_i, X_j) + \cdots + g_{1\cdots k}(X_1, \dots, X_k), \tag{64.21}$$

और प्रसरण लंबकोणीय योगदानों में अपघटित होता है,

$$V(Y) = \sum_i V_i + \sum_{i<j} V_{ij} + \cdots + V_{1\cdots k}. \tag{64.22}$$

यह अपघटन Sobol', 2001 द्वारा प्रस्तुत वैश्विक संवेदनशीलता सूचकांकों का आधार है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

64.4.2.1 प्रथम-कोटि सूचकांक

[60] निवेश X_i का प्रथम-कोटि योगदान है

$$V_i = \mathrm{Var}_{X_i}(\mathbb{E}[Y \mid X_i]), \tag{64.23}$$

और उसका प्रसामान्यीकृत Sobol सूचकांक है

$$S_i = \frac{V_i}{V(Y)}. \tag{64.24}$$

अतः S_i, केवल X_i को बदलने से व्याख्यायित निर्गम प्रसरण का अंश है, जिसका माध्य अन्य सभी निवेशों के वितरणों पर लिया गया है। यदि $S_i = 0.60$, तो X_i का मुख्य प्रभाव निर्गम प्रसरण के 60% के लिए उत्तरदायी है।

64.4.2.2 अन्योन्यक्रिया और कुल-प्रभाव सूचकांक

[61] द्वितीय-कोटि सूचकांक $S_{ij} = V_{ij}/V(Y)$, X_i और X_j की उस अन्योन्यक्रिया से उत्पन्न प्रसरण को मापता है जो किसी भी मुख्य प्रभाव को पहले से निर्दिष्ट नहीं है। उच्च-कोटि सूचकांक इसी प्रकार परिभाषित होते हैं। स्वतंत्र निवेशों के लिए,

$$\sum_i S_i + \sum_{i<j} S_{ij} + \cdots + S_{1\cdots k} = 1. \tag{64.25}$$

फलतः $1 - \sum_i S_i$ सभी अन्योन्यक्रियाओं का संयुक्त योगदान है।

[62] कुल-प्रभाव सूचकांक X_i को सम्मिलित करने वाले प्रत्येक प्रसरण पद को समुच्चित करता है:

$$S_{T_i} = 1 - \frac{\mathrm{Var}_{\mathbf{X}_{\sim i}}(\mathbb{E}[Y \mid \mathbf{X}_{\sim i}])}{V(Y)} \tag{64.26}$$

$$= \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{X}_{\sim i}}\left(\mathrm{Var}_{X_i}[Y \mid \mathbf{X}_{\sim i}]\right)}{V(Y)}, \tag{64.27}$$

जहाँ $\mathbf{X}_{\sim i}$, X_i को छोड़कर सभी निवेशों को दर्शाता है। अंतर $S_{T_i} - S_i$, अन्योन्यक्रियाओं में X_i की सहभागिता की मात्रा को मापता है।

64.4.2.3 व्याख्या

- बड़ा S_i प्रबल प्रत्यक्ष प्रभाव इंगित करता है।
- छोटे S_i के साथ बड़ा S_{T_i} इंगित करता है कि चर मुख्यतः अन्योन्यक्रियाओं के माध्यम से महत्त्वपूर्ण है।
- यदि S_{T_i} शून्य के निकट हो, तो सामान्यतः X_i को उसके निर्दिष्ट वितरण में कहीं भी नियत करने से निर्गम प्रसरण पर अल्प प्रभाव पड़ता है।
- यदि प्रथम-कोटि सूचकांकों का योग एक के निकट हो, तो प्रतिरूप अन्वेषित प्रक्षेत्र में लगभग योज्य है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

64.4.2.4 परिकलन और लागत

63 Sobol सूचकांकों का आकलन सामान्यतः युग्मित प्रतिचयन आव्यूहों और “चयन–स्थिर” मूल्यांकनों से किया जाता है। प्रायः प्रयुक्त अभिकल्प में k निवेशों के सभी प्रथम-कोटि और कुल-प्रभाव सूचकांकों के आकलन हेतु लगभग $N(k+2)$ प्रतिरूप मूल्यांकन आवश्यक होते हैं; सभी द्वितीय-कोटि सूचकांकों का आकलन सामान्यतः लागत को लगभग $N(2k+2)$ तक बढ़ा देता है (Saltelli, 2002)। चूँकि सूचकांक स्वयं Monte Carlo आकलन हैं, इसलिए अभिसरण की जाँच और संभव होने पर विश्वास अंतरालों का प्रतिवेदन किया जाना चाहिए।

64 जब प्रत्येक अरैखिक परिमित अवयव विश्लेषण महँगा हो, तब विधि निषेधात्मक हो सकती है। ऐसी दशा में पहले प्रतिपूरक प्रतिरूप, बहुपदीय अराजकता प्रसार अथवा अपचयित-कोटि प्रतिरूप का समंजन किया जा सकता है और उसकी पूर्वानुमान यथार्थता सत्यापित होने के पश्चात प्रतिपूरक पर Sobol सूचकांकों का मूल्यांकन किया जा सकता है।

64.4.2.5 Morris छँटाई से संबंध

65 Morris और Sobol विधियाँ संबंधित किंतु भिन्न प्रश्नों के उत्तर देती हैं। Morris मुख्यतः छँटाई विधि है: $r(k+1)$ मूल्यांकनों से यह μ_i^* द्वारा निवेशों का क्रम निर्धारित करती और σ_i द्वारा संभावित अरैखिकता अथवा अन्योन्यक्रियाएँ इंगित करती है। Sobol विश्लेषण मात्रात्मक प्रसरण अपघटन है: यह प्रत्यक्ष और कुल योगदानों को पृथक करता है, किंतु सामान्यतः बहुत अधिक मूल्यांकन चाहता है। अतः व्यावहारिक क्रम में पहले Morris द्वारा नगण्य निवेशों को हटाकर फिर अपचयित समुच्चय पर Sobol विश्लेषण लागू किया जाता है।

66 समीकरण 64.22 का चिरसम्मत अपघटन स्वतंत्र निवेश मानता है। सहसंबद्ध निवेशों के साथ मुख्य और अन्योन्यक्रिया प्रभाव अब चिरसम्मत ANOVA अपघटन द्वारा अद्वितीय रूप से पृथक नहीं होते। तब सशर्त अथवा समूहीकृत सूचकांकों, या Shapley प्रभाव जैसे आवंटन मापों पर विचार किया जाना चाहिए; न्यूनतम रूप से निर्भरता प्रतिरूप स्पष्टतः बताया जाना चाहिए।

64.4.3 प्रसारण और संवेदनशीलता विधियों की तुलना

67 सारणी 64.4 अनिश्चितता-प्रसारण विधियों को संवेदनशीलता विधियों से पृथक करती है। LHS जैसे प्रतिचयन अभिकल्प किसी भी कार्य में सहायक हो सकते हैं, किंतु वे स्वयं संवेदनशीलता माप नहीं हैं।

64.4.4 महत्त्वपूर्ण यादृच्छिक चरों का निर्धारण

68 मानक Morris छँटाई की व्याख्या सामान्यतः μ_i^* और σ_i द्वारा की जाती है। अगले उदाहरण में प्रयुक्त संशोधित त्रिज्य-बिंदु प्रक्रिया एक अतिरिक्त देहली नियम प्रस्तुत करती है (Gakuhari, 2021)। चूँकि यह नियम उसी प्रक्रिया के लिए विशिष्ट है, इसलिए इसे सार्वत्रिक Morris विधि के अंश के रूप में प्रस्तुत नहीं किया जाना चाहिए।

69 मानें कि M_i^*, RV i के लिए प्रेक्षित अधिकतम निरपेक्ष प्राथमिक प्रभाव है। प्रत्येक अद्यतन पर:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 64.4: अनिश्चितता-प्रसारण और संवेदनशीलता विधियों की तुलना

विधि	प्रमुख भूमिका	प्ररूपी लागत	अन्योन्यक्रियाएँ	मुख्य सीमा
साधारण Monte Carlo	निर्गम अनिश्चितता	N मूल्यांकन	अंतर्निहित रूप से ग्रहण	महँगे प्रतिरूपों के लिए मंद सांख्यिकीय अभिसरण
LHS	UQ अथवा SA के लिए प्रतिचयन अभिकल्प	N मूल्यांकन	मूल्यांकित प्रतिरूप द्वारा ग्रहण	दक्षता लाभ अनुक्रिया और निर्भरता उपचार पर निर्भर
प्रथम-कोटि TSFD/OAT	स्थानीय प्रसारण और क्रम निर्धारण	$2k+1$ मूल्यांकन	हल नहीं	केवल आधाररेखा के निकट वैध; प्रबल अरैखिकता के लिए दुर्बल
द्वि-स्तरीय कोना अभिकल्प	सन्निकट निर्गम आघूर्ण	2^k मूल्यांकन	प्रतिचयित कोनों पर सम्मिलित	चरघातांकी वृद्धि और स्थूल द्वि-स्तरीय निरूपण
Morris	वैश्विक छँटाई	$r(k+1)$ मूल्यांकन	σ_i द्वारा अरैखिकता के साथ संयुक्त रूप से इंगित	पृथक अन्योन्यक्रिया योगदान आवंटित नहीं करता
Sobol	वैश्विक प्रसरण अपघटन	प्रथम और कुल सूचकांकों के लिए लगभग $N(k+2)$	प्रथम, उच्चतर और कुल प्रभावों द्वारा परिमाणित	उच्च अभिकलनीय लागत; चिरसम्मत रूप स्वतंत्र निवेश मानता है

1. M_i^* मानों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करें और संलग्न अंतराल $d_j = M^*_{(j+1)} - M^*_{(j)}$ परिभाषित करें।
2. मानें कि $d_{\max}^{(q)} = \max_j d_j$, अद्यतन q के पश्चात का मान है। आरंभीकरण तब तक जारी रखें जब तक तीन क्रमिक मान निम्न को संतुष्ट न करें

$$\min\left(d_{\max}^{(q-2)}, d_{\max}^{(q-1)}, d_{\max}^{(q)}\right) \geq \frac{1}{2}\max\left(d_{\max}^{(q-2)}, d_{\max}^{(q-1)}, d_{\max}^{(q)}\right). \tag{64.28}$$

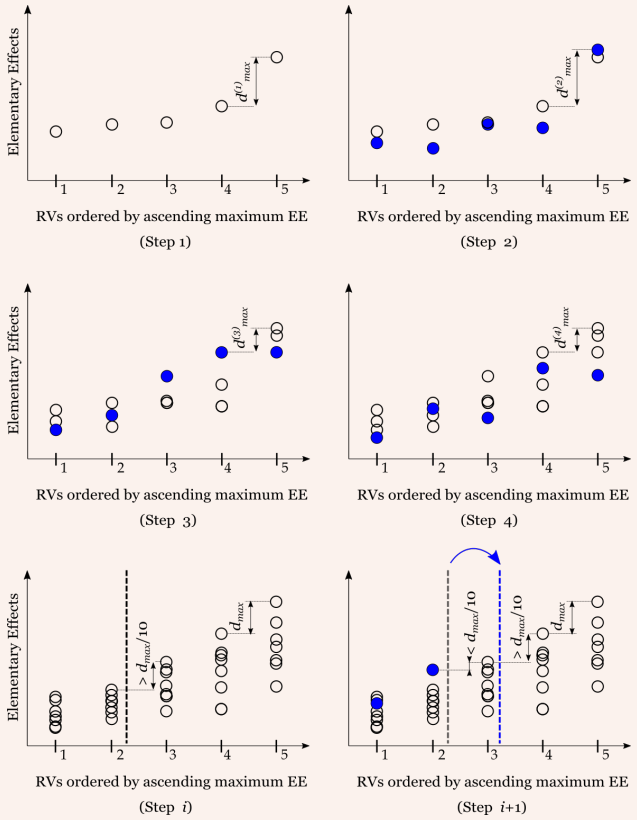
3. आरंभीकरण के पश्चात क्रमित मानों को निम्न-संवेदनशीलता सिरे से क्रमवीक्षित करें और देहली को प्रथम संलग्न अंतराल पर रखें जो $d_j \geq d_{\max}/10$ संतुष्ट करता हो। देहली से ऊपर के चर अनंतिम रूप से महत्त्वपूर्ण वर्गीकृत किए जाते हैं।
4. देहली से नीचे के चरों के प्राथमिक प्रभावों का पुनः परिकलन करें। यदि वर्गीकरण बदलता है तो नए सम्मिलित चर को पुनर्स्थापित करके पूर्ववर्ती अद्यतन दोहराएँ।

64.4.4.1 उदाहरण 64.7: Morris विधि; महत्त्वपूर्ण चरों की पहचान

Gakuhari, 2021 से

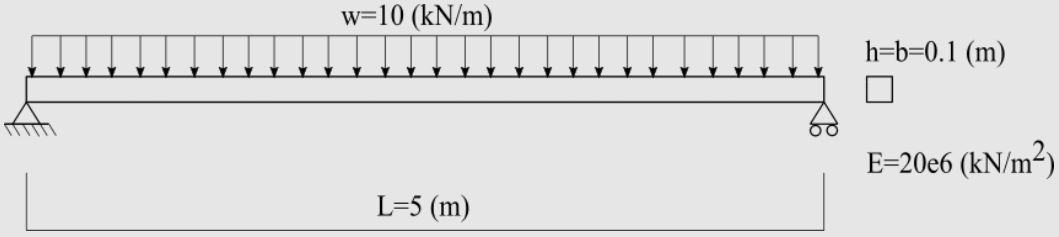
संशोधित त्रिज्य-बिंदु प्रक्रिया को एकसमान रूप से वितरित भार के अधीन सरल आलंबित धरन द्वारा दर्शाया गया है। अभिरुचि की राशि मध्य-विस्तृति पर अधिकतम ऊर्ध्वाधर विस्थापन है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 64.7: संशोधित त्रिज्य-बिंदु छँटाई प्रक्रिया में आरंभीकरण और आरंभीकरणोत्तर अवस्था

एकसमान भार w, धरन लंबाई L और परिच्छेद ऊँचाई h को क्रमशः RV1, RV2 और RV3 माना गया है। प्रत्येक को 10% विचरण गुणांक वाला प्रसामान्य वितरण निर्दिष्ट किया गया है और निरपेक्ष प्राथमिक प्रभावों के क्रमवर्धी अधिकतम M_i^* का मूल्यांकन किया गया है।



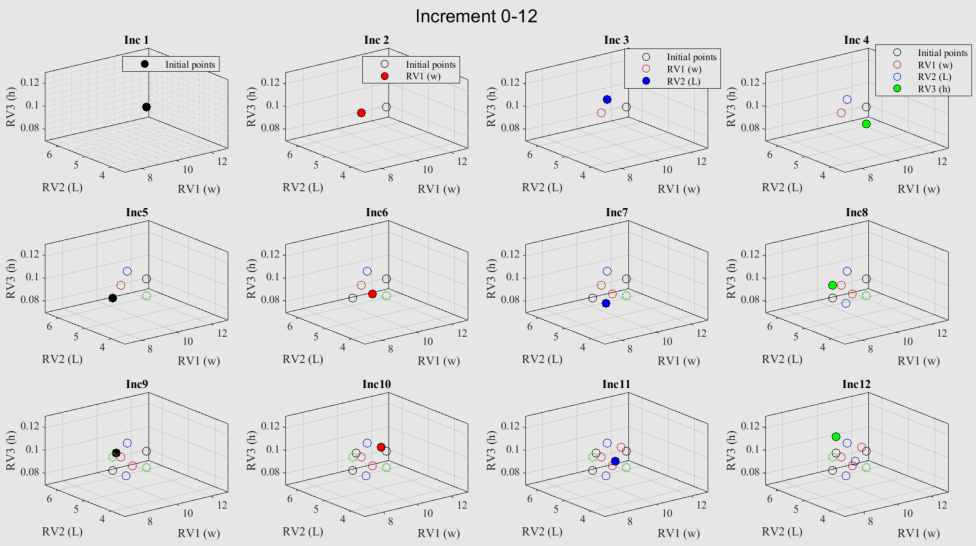
चूँकि इस विश्लेषण का निर्गम धरन के केंद्र पर ऊर्ध्वाधर विरूपण है, इसलिए प्रत्येक RV के प्रभाव का अग्रिम मूल्यांकन निम्न समीकरणों से किया जा सकता है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{bh^3}{12} \\
\delta &= \frac{5wL^4}{384EI} \\
&= \frac{5wL^4}{32Ebh^3}
\end{aligned}
\tag{64.29}
$$

विश्लेषणात्मक घातांक क्रम का पूर्वानुमान करते हैं: L (RV2) प्रधान होना चाहिए क्योंकि $\delta \propto L^4$, उसके पश्चात h (RV3), जिसके लिए $\delta \propto h^{-3}$। भार w (RV1) रैखिक रूप से प्रविष्ट होता है।

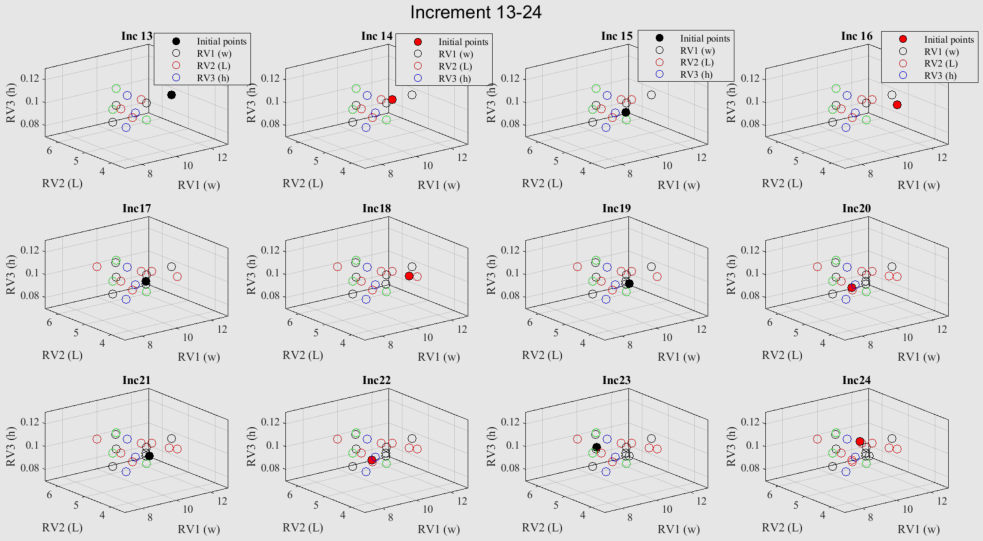
नीचे के फलक परिमात्रक समष्टि $[0,1]$ में क्रमिक प्राथमिक-प्रभाव मूल्यांकनों पर चयनित बिंदु दर्शाते हैं। प्रत्येक आरंभीकरण पंक्ति एक केंद्र और तीन त्रिज्य बिंदु जोड़ती है, जिससे प्रत्येक RV के लिए एक प्राथमिक प्रभाव प्राप्त होता है। ऐसे तीन अद्यतन $d^{(1)}_{\max}$, $d^{(2)}_{\max}$ और $d^{(3)}_{\max}$ प्रदान करते हैं। चूँकि समीकरण 64.28 की स्थिरता शर्त संतुष्ट होती है, आरंभीकरण वृद्धिक 12 पर समाप्त होता है और RV2 तथा RV3 अनंतिम रूप से महत्त्वपूर्ण वर्गीकृत किए जाते हैं।



आरंभीकरण

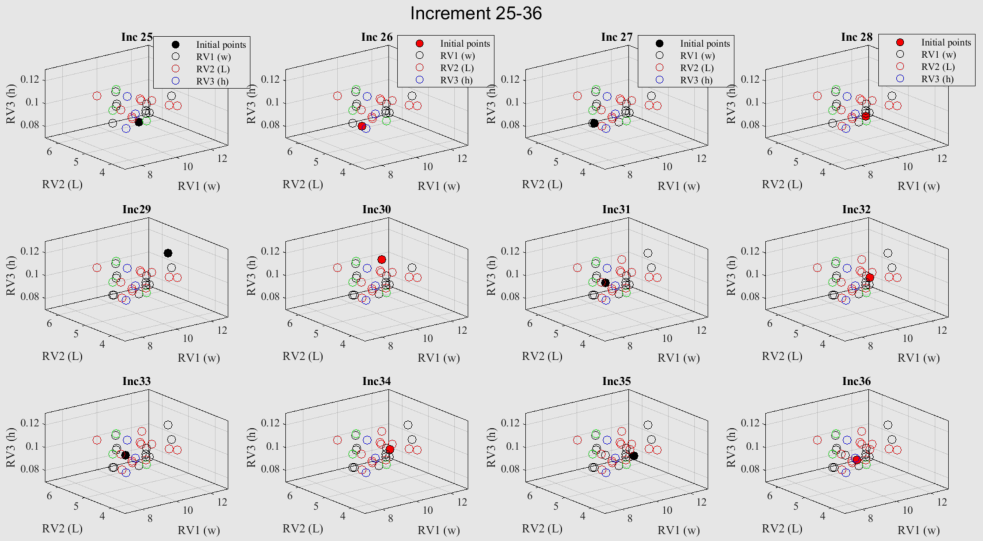
प्रति प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



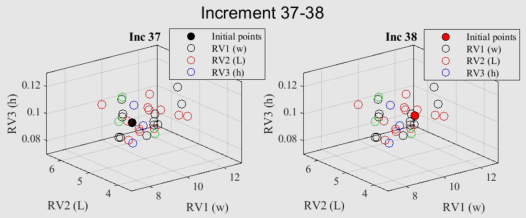
आरंभीकरणोत्तर (RV2 और RV3 नियत हैं)

अपनी परिमात्रक समष्टि में चयनित RV (Inc=0-24)



आरंभीकरणोत्तर (RV2 और RV3 नियत हैं)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



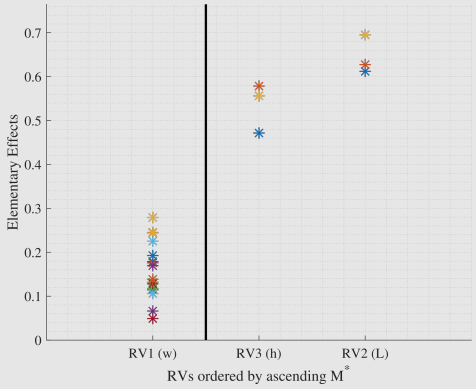
आरंभीकरणोत्तर (RV2 और RV3 नियत हैं)

अपनी परिमात्रक समष्टि में चयनित RV (Inc=25-38)

आरंभीकरण के पश्चात RV2 और RV3 महत्त्वपूर्ण समुच्चय में बने रहते हैं; अनुवर्ती आरंभीकरणोत्तर मूल्यांकन RV1 पर केंद्रित होते हैं ताकि यह निर्धारित किया जा सके कि उसका वर्गीकरण बदलता है या नहीं।

निर्धारित बजट $(n_{\mathrm{RV}}+1)\times 10 = 40$ प्राथमिक-प्रभाव मूल्यांकन है (Sohier, Farges, and Piet-Lahanier, 2014)। चूँकि अंतिम दो अनुसूचित मूल्यांकन RV2 और RV3 के संगत हैं, जिन्हें पहले ही बनाए रखा गया है, उनसे कोई अतिरिक्त वर्गीकरण सूचना प्राप्त नहीं होती और दर्शाई गई प्रक्रिया वृद्धिक 38 पर रुकती है।

प्राप्त क्रम समीकरण 64.29 से सहमत है: विस्थापन पर धरन लंबाई का प्रभाव सर्वाधिक है, उसके पश्चात परिच्छेद ऊँचाई का; जबकि तुलनीय सापेक्ष परासों में एकसमान वितरित भार का घातांक-आधारित प्रभाव सबसे कम है।



सरल-धरन परीक्षण के परिणाम।

64.4.5 Tornado आरेख

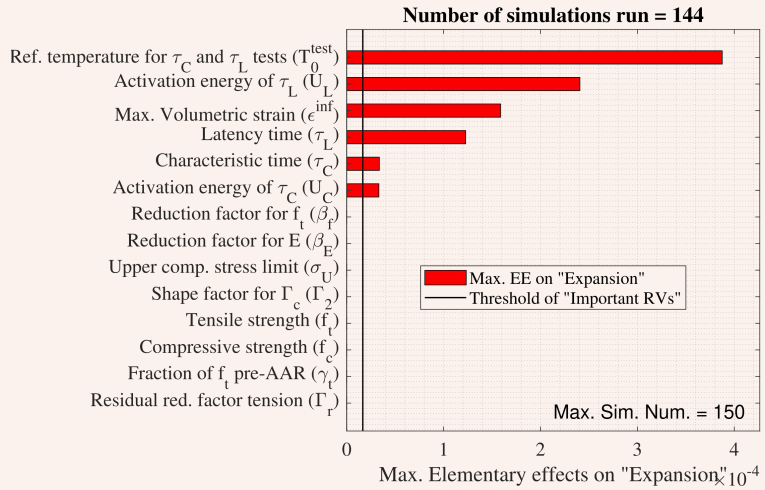
70 Tornado आरेख निर्दिष्ट एक-समय-में-एक अध्ययन का आलेखीय सारांश है। प्रत्येक निवेश के लिए प्रतिरूप का मूल्यांकन चयनित निम्न और उच्च मानों पर किया जाता है, जबकि अन्य सभी निवेश आधाररेखा पर रहते हैं। प्राप्त निर्गम अंतराल क्षैतिज दंड के रूप में आलेखित किया जाता है और दंडों को लंबाई के अनुसार क्रमित किया जाता है।

71 Tornado आरेखों को समझाना सरल है और वे प्रारंभिक छँटाई में उपयोगी हैं, किंतु वे चयनित आधाररेखा और परासों के लिए स्थानीय होते हैं। वे स्वयं अन्योन्यक्रियाएँ प्रकट नहीं करते और आधाररेखा अथवा विक्षोभ अंतराल बदलने पर उनका क्रम बदल सकता है। Morris परिणाम अधिक स्वाभाविक रूप से μ^{*}–σ आलेख में प्रदर्शित होते हैं, जबकि Sobol परिणाम प्रथम-कोटि और कुल-प्रभाव सूचकांकों के रूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

में; दंड आलेख किसी का भी सारांश दे सकता है, पर उसे अंतर्निहित माप के अनुसार नामित किया जाना चाहिए।

72 चित्र 64.8 एक ऐसी दशा दर्शाता है जिसमें अपनाए गए विक्षोभ नियम के अधीन केवल प्रथम छह चरों का सारभूत प्रभाव है। ऐसा परिणाम प्रतिलोम विश्लेषण आरंभ होने से पूर्व प्राचल समुच्चय के अपचयन का समर्थन कर सकता है।



चित्र 64.8: संवेदनशीलता-क्रम निर्धारण का उदाहरण (Gakuhari, 2021)

64.5 संवेदनशीलता विश्लेषण से प्राचल अभिनिर्धारण तक

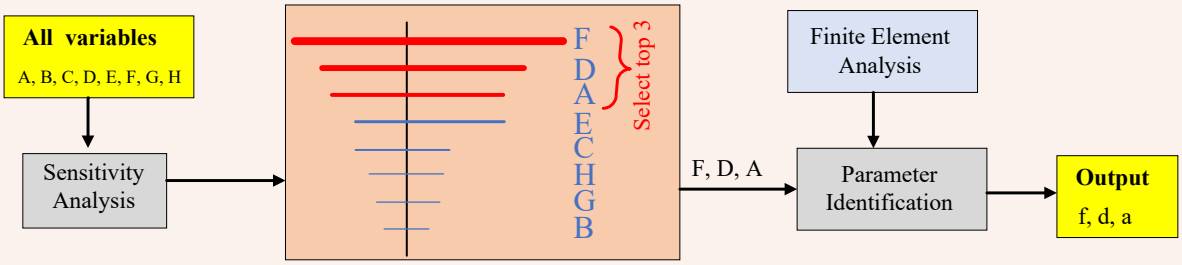
73 संवेदनशीलता विश्लेषण पहचानता है कि कौन-से प्राचल पूर्वानुमानों को बदल सकते हैं; प्राचल अभिनिर्धारण पूछता है कि उन प्राचलों के कौन-से मान मापनों द्वारा समर्थित हैं। यह भेद महत्त्वपूर्ण है। नगण्य कुल संवेदनशीलता वाला प्राचल सामान्यतः चयनित अनुक्रिया से अभिनिर्धारित नहीं किया जा सकता, चाहे इष्टकारी कितना ही परिष्कृत क्यों न हो। इसके विपरीत, अत्यधिक संवेदनशील प्राचल का अभिनिर्धारण भी कठिन हो सकता है यदि उसका प्रभाव किसी अन्य प्राचल के प्रभाव से लगभग अभेद्य हो, चित्र 64.9।

74 अतः व्यावहारिक क्रम है:

1. अभिरुचि की राशियाँ और संभाव्य प्राचल परास परिभाषित करें;
2. प्राचलों की छँटाई करके सारभूत प्रभाव वाले प्राचल बनाए रखें;
3. परीक्षण करें कि बनाए रखे गए प्राचलों के अनुक्रिया हस्ताक्षर विभेदनीय हैं या नहीं;
4. केवल प्रतिरक्षणीय उपसमुच्चय अभिनिर्धारित करें और शेष को नियत, समूहीकृत अथवा नियमितीकृत करें।

75 अध्याय 65 प्रतिलोम समस्या को विस्तार से विकसित करता है। इसमें भारित अरैखिक न्यूनतम

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 64.9: संवेदनशीलता विश्लेषण प्रत्याशी प्राचलों की पहचान करता है; प्राचल अभिनिर्धारण प्रेक्षणों द्वारा समर्थित मान निर्धारित करता है

तालिका 64.5: संवेदनशीलता विश्लेषण और प्राचल अभिनिर्धारण की भिन्न किंतु पूरक भूमिकाएँ

पक्ष	संवेदनशीलता विश्लेषण	प्राचल अभिनिर्धारण
प्रश्न	कौन-से निवेश चयनित निर्गमों को सारभूत रूप से बदल सकते हैं?	कौन-से प्राचल मान प्रेक्षणों द्वारा समर्थित हैं?
प्रयुक्त सूचना	संभाव्य परास अथवा वितरण और अग्र प्रतिरूप	मापन, अवशेष प्रतिरूप और अग्र प्रतिरूप
प्रमुख परिणाम	क्रम निर्धारण, छँटाई अथवा प्रसरण आवंटन	अंशांकित प्राचल मान और उनकी अनिश्चितता अथवा निदान
विफलता चेतावनी	असंवेदनशील प्राचल को चयनित अनुक्रिया से ज्ञात नहीं किया जा सकता	प्रभावों के मिश्रित होने पर संवेदनशील प्राचल भी अनभिनिर्धारणीय रह सकता है

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

वर्ग सूत्रबद्ध किए गए हैं, अभिनिर्धारणीयता और प्रतिरूप-विसंगति का परीक्षण किया गया है तथा Levenberg–Marquardt, RANSAC और Bayesian उपागमों की तुलना की गई है। अतः वर्तमान अध्याय वहाँ समाप्त होता है जहाँ निर्णय समस्या आरंभ होती है: अपचयित, भौतिक रूप से सार्थक प्राचल समुच्चय और शेष अनिश्चितता के स्पष्ट वर्णन के साथ।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

65 निर्णय: प्राचल अभिनिर्धारण विधियाँ

सारांश

अध्याय 64 ने स्थापित किया कि अनिश्चित निवेशों का अभिलक्षणन और अभिकलनीय प्रतिरूपों में प्रसारण कैसे किया जाता है तथा संवेदनशीलता विश्लेषण द्वारा उनके प्रभाव का क्रम कैसे निर्धारित होता है। यह अध्याय प्रतिलोम समस्या पर केंद्रित है: प्रेक्षणों द्वारा समर्थित प्राचल मानों का निर्धारण और उनमें रखे जाने योग्य विश्वास का परिमाणन।

अध्याय भारित अरैखिक न्यूनतम वर्ग सूत्रबद्ध करता है और अभिनिर्धारणीयता, मापक्रमण, परिसीमाएँ, नियमितीकरण, प्रतिरूप-विसंगति, अंशांकन तथा वैधीकरण समझाता है। इसके पश्चात Levenberg–Marquardt इष्टतमीकरण, स्थूल अपवादियों से संदूषित आँकड़ों के लिए RANSAC तथा पश्च प्राचल अनिश्चितता के लिए Bayesian अनुमान की तुलना की जाती है। संपूर्ण MATLAB–परिमित अवयव विश्लेषण प्रोग्राम मार्गदर्शिका सिद्धांत को सुपरेडशीट-चालित परिमित अवयव कार्य-प्रवाह में रूपांतरित करती है। अंतिम अनुभाग भाग A और B को एकीकृत करता है और प्रदर्शन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) की ओर ले जाने वाले अनुवर्ती अध्यायों से सेतु बनाता है।

65.1 प्रतिलोम समस्या के रूप में प्राचल अभिनिर्धारण 2174
65.2 अनुप्रयोग और निर्णय संरचना 2175
65.2.1 संवेदनशीलता विश्लेषण से प्राचल अभिनिर्धारण तक . . . 2176
65.2.2 निर्णय संरचना: कौन-सी विधि कब? 2176
65.3 आँकड़ा गुणवत्ता और सुदृढ़ता 2177
65.3.1 आँकड़ा संदूषण के स्रोत 2177
65.3.2 सुदृढ़ सहमति आकलन: RANSAC 2177
65.4 Levenberg–Marquardt कलनविधि 2181
65.4.1 प्रतिरूपण उपागम और प्रतिरूप चयन 2181
65.4.2 भारित अरैखिक न्यूनतम वर्ग . . 2182
65.4.3 Levenberg–Marquardt अद्यतन चरण और कलनविधीय अंतर्बोध 2182
65.4.4 उदाहरण 65.1: अरैखिक अतिपरवलयी प्रतिरूप का समंजन . . 2183
65.4.5 मापक्रमण, परिसीमाएँ और नियमितीकरण 2185
65.4.6 अभिनिर्धारणीयता 2186
65.4.7 प्रतिरूप-विसंगति 2187
65.5 बायेसियन प्राचल अभिनिर्धारण . . . 2187
65.5.1 बायेसियन प्राचल अभिनिर्धारण: निरूपण 2188
65.5.2 MAP आकलन और बिंदु आकलन 2189
65.5.3 प्राचलों के लिए पश्च-प्रतिचयन और MCMC 2189
65.5.4 उदाहरण 65.2: द्विघाती आधार और मेट्रोपोलिस–हेस्टिंग्स प्रतिचयन सहित बायेसियन समाश्रयण 2190
65.5.5 हल किया हुआ उदाहरण: ह्रास-प्राचलों के लिए बायेसियन अनुमान 2191
65.5.6 बायेसियन अभिनिर्धारण का प्रयोग कब करें 2191
65.6 व्यवहार में लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट कलनविधि 2192
65.6.1 न्यूनतम-वर्ग व्यवहार 2193
65.7 संकर कार्यप्रवाह और सर्वोत्तम व्यवहार 2202
65.7.1 अंशांकन और वैधीकरण 2202
65.7.2 संरचनात्मक अनुप्रयोग 2202
65.7.3 कार्यप्रवाह निर्णय ढाँचा 2202
65.8 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी की ओर सेतु 2203

65.1 प्रतिलोम समस्या के रूप में प्राचल अभिनिर्धारण

1 प्राचल अभिनिर्धारण अनेक प्रमुख अनुप्रयोगों के लिए अत्यंत महत्त्वपूर्ण है: (i) प्रतिरूप अंशांकन—परिमित अवयव प्रतिरूपों को प्रयोगशाला अथवा क्षेत्र परीक्षण से प्राप्त प्रायोगिक परिणामों

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के अनुरूप बनाना; (ii) *संरचनात्मक स्वास्थ्य अनुश्रवण*—संवेदक आँकड़ों से मेल कराने और समय के साथ परिवर्तनों का अनुगमन करने हेतु परिमित अवयव प्रतिरूपों का इष्टतमीकरण; और (iii) *माँग प्रतिरूप निर्धारण*—प्रदर्शन-आधारित अभिकल्प के लिए भूकंपीय माँग प्रतिरूप स्थापित करना (देखें §68.5)।

प्राचल अभिनिर्धारण कार्यप्रवाह

2 प्राचल अभिनिर्धारण प्रक्रिया चित्र 65.1 में दर्शाए गए पुनरावृत्तीय, आँकड़ा-चालित कार्यप्रवाह का अनुसरण करती है। प्रमुख चरण हैं:

1. **आरंभिक विन्यास:** प्रयोगशाला अथवा क्षेत्र परिणाम (मापन) प्राप्त करें और पूर्व ज्ञान, अभिकल्प मानकों अथवा साहित्य के आधार पर प्राचल मानों का आरंभिक समुच्चय $\mathbf{x}_0$ स्थापित करें।
2. **प्रतिरूप मूल्यांकन:** प्रतिरूप पूर्वानुमान प्राप्त करने हेतु वर्तमान प्राचल मानों का उपयोग करके परिमित अवयव (FE) विश्लेषण निष्पादित करें।
3. **त्रुटि आकलन:** अवशेषों (त्रुटियों) का परिकलन करके प्रतिरूप पूर्वानुमानों की प्रयोगशाला/क्षेत्र मापनों से तुलना करें। अवशेष मानक परिमाणित करता है कि वर्तमान प्राचल आँकड़ों से कितनी अच्छी तरह समंजित हैं।
4. **अभिसरण जाँच:** यदि अवशेष स्वीकार्य रूप से छोटे हैं (प्रतिरूप आँकड़ों से मेल खाता है), तो रुकें—प्राचल अभिनिर्धारित हो गए हैं। अन्यथा चरण 5 पर जाएँ।
5. **प्राचल अद्यतन:** ऐसे उन्नत प्राचल मान $\mathbf{x}_{new}$ परिकलित करने हेतु इष्टतमीकरण कलनविधि का उपयोग करें जिनसे अवशेष घटने चाहिए।
6. **पुनरावृत्ति:** अद्यतन प्राचलों के साथ चरण 2 पर लौटें और अभिसरण तक दोहराएँ।

3 यह प्रतिपुष्टि पाश प्राचल अभिनिर्धारण का सार है: प्रतिरूप को ऐसे फलन $f(\mathbf{x})$ के रूप में माना जाता है जो प्राचलों को पूर्वानुमानों में प्रतिचित्रित करता है, और प्रेक्षणों से सर्वोत्तम मेल खाने वाले प्राचल मान ज्ञात करने हेतु इष्टतमीकरण का उपयोग किया जाता है।

4 गणितीय रूप से, मानें कि $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ में मापन और $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ में संगत प्रतिरूप पूर्वानुमान हैं। अवशेष सदिश है

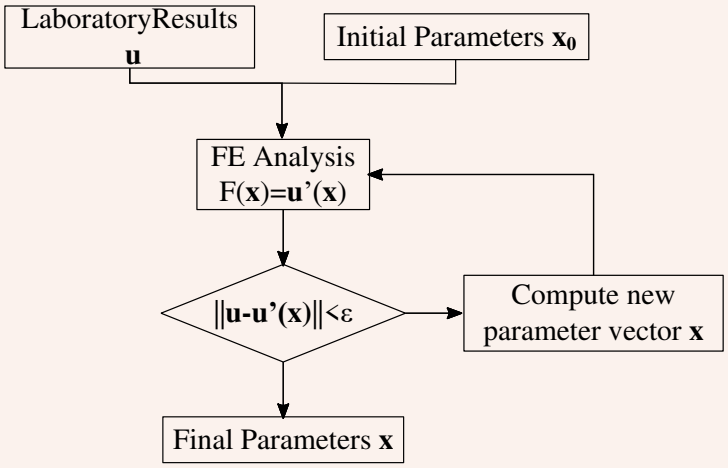
$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{y}. \tag{65.1}$$

5 प्रतिलोम समस्या तब कठिन होती है जब प्रतिरूप अरैखिक हो, आँकड़े विरल अथवा सहसंबद्ध हों, अनेक प्राचल संयोजन समान अनुक्रियाएँ उत्पन्न करें, अथवा प्रेक्षणों में अपवादी या क्रमबद्ध विसंगति हो।

65.2 अनुप्रयोग और निर्णय संरचना

6 ऊपर सूचीबद्ध तीन अनुप्रयोग प्रक्षेत्र—प्रतिरूप अंशांकन, संरचनात्मक स्वास्थ्य अनुश्रवण और भूकंपीय माँग निर्धारण—एक उभयनिष्ठ संरचना साझा करते हैं: प्रेक्षणों से पूर्वानुमानों को प्रभावित करने वाले अज्ञात प्राचलों की सूचना मिलनी चाहिए। किस प्राचल-आकलन विधि का उपयोग किया जाए,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 65.1: निकाय अभिनिर्धारण उपागम का सिद्धांत: प्रतिरूप–आँकड़ा विसंगति न्यूनतम करने हेतु प्राचलों का पुनरावृत्तीय परिष्कार।

इसका चयन आँकड़ा गुणवत्ता, प्रतिरूप अरैखिकता, अभिकलनीय बजट और अनिश्चितता के परिणामों पर निर्भर करता है।

65.2.1 संवेदनशीलता विश्लेषण से प्राचल अभिनिर्धारण तक

7 संवेदनशीलता विश्लेषण अभिनिर्धारण की पूर्वापेक्षा है, उसका विकल्प नहीं। अध्याय 64 उन प्राचलों की पहचान करता है जो चयनित अनुक्रियाओं को प्रभावित कर सकते हैं। प्रतिलोम विश्लेषण उसी अपचयित समुच्चय से आरंभ होना चाहिए। नगण्य कुल संवेदनशीलता वाले प्राचल नियत किए जाते हैं; लगभग अभेद्य प्रभावों वाले प्राचलों को समूहीकृत, नियमितीकृत अथवा अतिरिक्त मापनों से सूचित किया जाता है। यह अपचयन अभिकलनीय दक्षता और व्याख्येयता दोनों सुधारता है।

65.2.2 निर्णय संरचना: कौन-सी विधि कब?

8 वर्तमान अध्याय तीन उपागम समझाता है:

Levenberg-Marquardt (अनुभाग 65.4): अधिकांश समस्याओं के लिए पूर्वनिर्धारित चयन। जब आँकड़े मुख्यतः Gaussian हों तब तीव्र, स्थिर और अभिकलनीय रूप से दक्ष। बिंदु आकलन और सन्निकट प्राचल अनिश्चितता प्रदान करता है।

RANSAC (अनुभाग 65.3.2): स्थूल अपवादियों का संदेह अथवा पुष्टि होने पर अनुशंसित। न्यूनतम वर्ग से पुनः समंजन के पूर्व अंतःस्थ आँकड़ों के सहमति समुच्चय की पहचान करता है। ऐसे संदूषण के प्रति सुदृढ जो L-M को भ्रमित कर सकता है।

Bayesian अनुमान (§ 65.5): जब निर्णय-निर्माण के लिए पूर्ण पश्च अनिश्चितता आवश्यक हो तब अनिवार्य। अभिकलनीय रूप से अधिक महँगा, किंतु विश्वसनीयता अंतराल, पश्च सहसंबंध और पूर्व मान्यताओं के प्रति संवेदनशीलता प्रदान करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9 व्यावहारिक कार्यप्रवाह इन्हें संयोजित कर सकता है: आँकडों को शुद्ध करने के लिए RANSAC, आरंभिक अंशांकन और वैधीकरण के लिए L-M, तथा यदि पराचल अनिश्चितता अनुवर्ती निरूणयों को सारभूत रूप से प्रभावित करे तो Bayesian अनुमान का उपयोग करें।

65.3 आँकडा गुणवत्ता और सुदृढता

65.3.1 आँकडा संदूषण के स्रोत

10 प्रयोगशालाओं और क्षेत्र स्थलों के वास्तविक मापनों में त्रुटि तथा संदूषण के विविध स्रोत होते हैं:

- **मापन रव:** संवेदकों और उपकरणों में अंतर्निहित यादृच्छिक, लगभग Gaussian त्रुटियाँ।
- **क्रमबद्ध अभिनति:** उपकरण अंशांकन अथवा पर्यावरणीय प्रभावों के कारण मापनों में संगत विचलन या अपवाह।
- **संवेदक अपक्रिया:** अनुश्रवण उपकरण की अस्थायी अथवा स्थायी विफलता, जिससे अनियमित या जमी हुई रीडिंग प्राप्त होती हैं।
- **स्थूल अपवादी:** आँकडा-प्रविष्ट त्रुटियों, क्षणिक व्यतिकरण अथवा उपकरण दोषों से उत्पन्न पृथक बिंदु।
- **प्रतिरूप असंगति:** अप्रतिरूपित भौतिकी अथवा परिसीमा प्रतिबंधों के कारण प्रतिरूप पूर्वानुमानों और प्रेक्षणों के बीच क्रमबद्ध विसंगति।

11 Gaussian मापन रव का उपचार न्यूनतम वर्ग द्वारा स्वाभाविक रूप से होता है (अनुभाग 65.4)। स्थूल अपवादियों और क्रमबद्ध संदूषण के लिए पूर्व-संसाधन अथवा सुदृढ विधियाँ आवश्यक हैं।

65.3.2 सुदृढ सहमति आकलन: RANSAC

12 यादृच्छिक प्रतिदर्श सहमति (RANSAC) स्थूल अपवादियों से संदूषित आँकडों से प्रतिरूप का आकलन करता है (Fischler and Bolles, 1981)। इसे बाह्य सहमति-अन्वेषण पाश के रूप में समझना सर्वोत्तम है। प्रत्याशी पराचलों को न्यूनतम अथवा छोटे यादृच्छिक उपसमुच्चयों से समंजित किया जाता है; सभी प्रेक्षणों को अवशेष देहली द्वारा वर्गीकृत किया जाता है; सबसे प्रबल सहमति समुच्चय बनाए रखा जाता है; और सभी स्वीकृत अंतःस्थों का उपयोग करके अंतिम पराचलों का पुनः समंजन किया जाता है।

65.3.2.1 कलनविधि

1. प्रतिरूप आकलन के लिए पर्याप्त बडे यादृच्छिक उपसमुच्चय का चयन करें।
2. उस उपसमुच्चय से प्रत्याशी पराचल सदिश समंजित करें।
3. संपूर्ण आँकडा समुच्चय के लिए अवशेष परिकलित करें और घोषित देहली द्वारा प्रेक्षणों को वर्गीकृत करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. अंतःस्थ संख्या और, उपयुक्त होने पर, सहमति समुच्चय के भीतर समंजन गुणवत्ता द्वारा प्रत्याशी को प्राप्तांक दें।
5. निर्धारित अथवा अनुकूलतः अद्यतन परीक्षण संख्या तक दोहराएँ।
6. सर्वोत्तम सहमति समुच्चय के सभी अंतःस्थों का उपयोग करके प्रतिरूप का पुनः समंजन करें।
7. बहिष्कृत प्रेक्षणों की समीक्षा करें और स्वतंत्र आँकड़ों पर अंतिम समंजन का परीक्षण करें।

[13] यदि अंतःस्थ अंश लगभग w, न्यूनतम प्रतिदर्श आकार s, और कम-से-कम एक सर्व-अंतःस्थ उपसमुच्चय खींचने की वांछित प्रायिकता p हो, तो परिचित नियोजन सन्निकटन है

$$N \geq \frac{\log(1-p)}{\log(1-w^s)}. \tag{65.2}$$

चूँकि w आरंभ में अज्ञात होता है और प्रतिचयन मान्यताएँ अपूर्ण हो सकती हैं, इसलिए बेहतर सहमति समुच्चय मिलने पर परीक्षण संख्या को संरक्षणात्मक रूप से अद्यतन किया जाना चाहिए।

[14] अंतःस्थ देहली को मापन अनिश्चितता अथवा सुदृढ मापक्रम आकलन से संबद्ध होना चाहिए, केवल स्वीकृत बिंदुओं की संख्या अधिकतम करने के लिए चयनित नहीं। RANSAC स्थूल संदूषण का उपचार करता है; यह साधारण मापन रव के प्रायिकता प्रतिरूप का प्रतिस्थापन नहीं है।

सरल रैखिक प्रतिगमन उदाहरण

[15] सरल रैखिक प्रतिगमन पर लागू RANSAC का उदाहरण चित्र 65.2 में दर्शाया गया है। कलनविधि पुनरावृत्तीय रूप से यादृच्छिक उपसमुच्चय चुनती, प्रत्येक से रेखा समंजित करती और उपयोगकर्ता-परिभाषित देहली में आने वाले आँकड़ा बिंदुओं की संख्या गिनती है। सर्वाधिक अंतःस्थ ग्रहण करने वाली रेखा सर्वोत्तम प्रतिरूप चुनी जाती है।

कंक्रीट ह्रास पर अनुप्रयोग

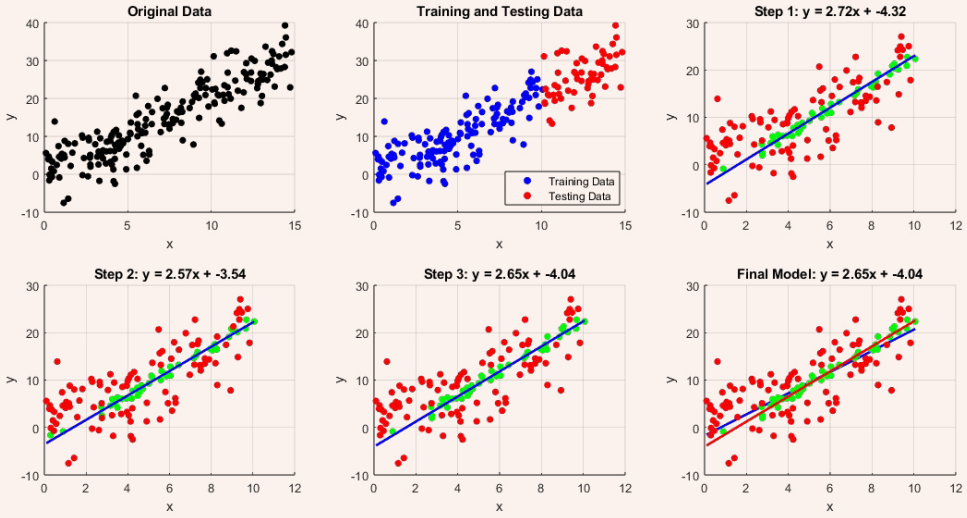
[16] अधिक व्यावहारिक और विस्तृत उदाहरण चित्र 65.3 में है, जो किसी स्थल से प्राप्त कंक्रीट क्रोडों में प्रथम-सिद्धांत ह्रास प्रतिरूपों के अभिनिर्धारण पर RANSAC का अनुप्रयोग दर्शाता है। उद्देश्य क्षार–गिट्टी अभिक्रिया (AAR) के कारण कंक्रीट क्षरण को नियंत्रित करने वाले विश्लेषणात्मक फलन के प्राचलों का आकलन करना है।

[17] Seminoe बाँध से प्राप्त क्षेत्र क्रोडों में प्रत्यास्थता मापांक (E), तनन सामर्थ्य (f_t) और संपीडन सामर्थ्य (f_c') को भिन्न गहराइयों तथा आयुओं पर मापा गया। लक्ष्य मापन रव और प्रायोगिक अपवादियों को छानते हुए इन ह्रास आँकड़ों से प्रथम-सिद्धांत प्रतिरूप समंजित करना था।

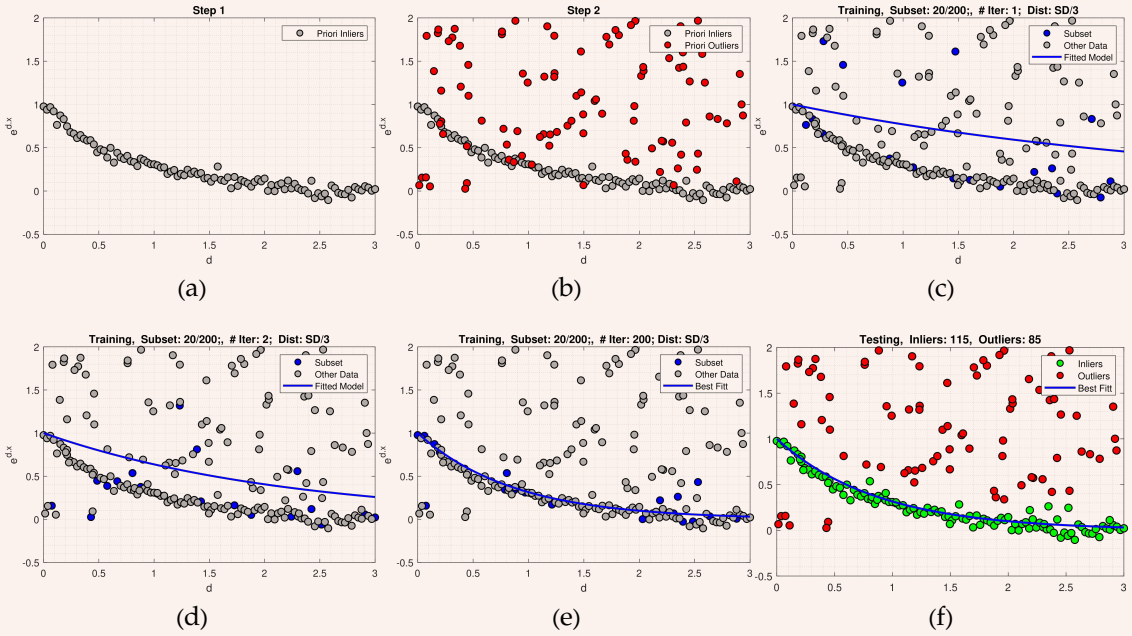
[18] अभिरुचि की राशि (QoI)—ह्रासित कंक्रीट गुणधर्म—निम्न है:

$$\frac{\mathrm{QoI}}{\mathrm{QoI}_0}(d,t) = 1 - f(d)\cdot D(t) \tag{65.3}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 65.2: RANSAC के साथ रैखिक प्रतिगमन का निदर्शी उदाहरण



चित्र 65.3: कंक्रीट ह्रास पर लागू RANSAC: प्रकरण अध्ययन (Gakuhari, 2021)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ QoI_0 आरंभिक (अक्षत) कंक्रीट गुणधर्म मान, $D(t)$ समय t के फलन के रूप में प्रसामान्यीकृत क्षति, और $f(d)$ बाँध में गहराई-निर्भर क्षति परिवर्तन को समायोजित करने वाला संशोधन गुणक है।

19 गहराई गुणक को इस प्रकार प्रतिरूपित किया गया है:

$$f(d) = A \cdot d + B \tag{65.4}$$

जिसमें प्राचल A और B गहराई-निर्भर क्षति प्रगति निरूपित करते हैं।

20 समय-निर्भर क्षति के लिए AAR बलगतिकी पर आधारित दो प्रतिस्पर्धी प्रथम-सिद्धांत प्रतिरूपों पर विचार किया गया:

$$D(t)|_{\text{Model 1}} = (1-\beta)\frac{(1-e^{-t/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L-t)/\tau_C}} \tag{65.5}$$

अथवा:

$$D(t)|_{\text{Model 2}} = (1-\beta)\frac{\int_0^t \frac{(1-e^{-s/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L-s)/\tau_C}}ds}{\int_0^{t_{\text{end}}} \frac{(1-e^{-s/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L-s)/\tau_C}}ds} \tag{65.6}$$

जहाँ τ_C अभिलाक्षणिक समय, τ_L विलंब काल और β दीर्घकालीन अनंतस्पर्शी क्षति निरूपित करता है।

21 **RANSAC प्रक्रिया:**

22 बाँधों के क्षेत्र मापन अनेक वर्षों और अनेक क्रोडन स्थानों में विस्तृत होने के कारण आँकड़ों में मापन त्रुटियाँ अनिवार्यतः होती हैं और अपवादी भी हो सकते हैं। सिद्धांततः अधिकांश बिंदु प्रथम-सिद्धांत AAR प्रतिरूप से समंजित होने चाहिए, यदि अपवादियों को पहचानकर हटाया जा सके। RANSAC निर्दिष्ट प्रतिरूप और देहली के अधीन सहमति समुच्चय प्रस्तावित करता है; बहिष्कृत बिंदुओं को अमान्य मानने से पूर्व अभियांत्रिकी समीक्षा अभी भी आवश्यक है।

सहमति-अन्वेषण चरण:
- **आरंभीकरण:** उपयोगकर्ता पुनरावृत्तियों की संख्या N, प्रति पुनरावृत्त प्रतिदर्श आकार n और त्रुटि सह्यता देहली (ETT) निर्दिष्ट करता है।
- क्षेत्र आँकड़े (गहराई, आयु, कंक्रीट गुणधर्म) लोड किए जाते हैं।
- N पुनरावृत्तियों में पाश चलाएँ: प्रत्येक पुनरावृत्त में यादृच्छिक रूप से n आँकड़ा बिंदु चुनें।
- AAR ह्रास प्रतिरूप को n-बिंदु उपसमुच्चय से समंजित करें।
- प्राप्तांक: उन कुल आँकड़ा बिंदुओं की संख्या गिनें जिनके अवशेष परिमाण त्रुटि-सह्यता देहली (ETT) से कम हैं।
- N पुनरावृत्तियों के पश्चात उच्चतम प्राप्तांक (सर्वाधिक अंतःस्थ) वाला प्रतिरूप बनाए रखें।

वर्गीकरण और पुनः समंजन चरण:
- सहमति अन्वेषण में प्राप्त उच्चतम प्राप्तांक वाला प्रतिरूप चुनें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- इस सर्वोत्तम प्रतिरूप द्वारा सभी आँकड़ा बिंदुओं को अंतःस्थ अथवा अपवादी के रूप में वर्गीकृत करें।
- सभी अभिनिर्धारित अंतःस्थों का उपयोग करके प्राचलों का पुनः समंजन करें और बहिष्कृत प्रेक्षणों को स्थायी रूप से त्यागने से पूर्व उनका परीक्षण करें।

23 **महत्त्वपूर्ण अंतर्दृष्टि:** इस कंक्रीट-ह्रास अनुप्रयोग में भौतिकी-आधारित प्रतिरूप अंतःस्थ निकष को प्रतिरक्षणीय अभियांत्रिकी व्याख्या देता है: बिंदु का निर्णय मनमाने लचीले वक्र के स्थान पर अपेक्षित ह्रास क्रियाविधि के सापेक्ष होता है। RANSAC को आनुभविक और आँकड़ा-चालित प्रतिरूपों पर भी लागू किया जा सकता है, किंतु अत्यधिक लचीला प्रतिरूप संदूषण को उजागर करने के स्थान पर उसे अवशोषित कर सकता है, और बहिर्वेशन विशेष रूप से संकटपूर्ण रहता है।

24 सर्वोत्तम अंतःस्थ समुच्चय अभिनिर्धारित होने के पश्चात प्राचलों $(A,\ B,\ \tau_C,\ \tau_L,\ \beta)$ को केवल अंतःस्थ आँकड़ों पर पारंपरिक न्यूनतम वर्ग प्रतिगमन द्वारा परिष्कृत किया जाता है, जिससे बहिष्कृत स्थूल संदूषण से कम प्रभावित आकलन प्राप्त होते हैं।

25 जीर्ण होती अवसंरचना के संरचनात्मक स्वास्थ्य अनुश्रवण में RANSAC विशेष रूप से मूल्यवान है, क्योंकि वास्तविक संवेदक आँकड़ों और प्रायोगिक मापनों में प्रायः मिथ्या रीडिंग, संवेदक विफलताएँ और क्षणिक त्रुटियाँ होती हैं। अभियांत्रिकी समीक्षा के लिए पुनरुत्पाद्य सहमति समुच्चय प्रस्तावित करके RANSAC स्थूलतः दूषित रीडिंग का प्रभाव घटा सकता है; यह सिद्ध नहीं करता कि प्रत्येक बहिष्कृत प्रेक्षण त्रुटिपूर्ण है।

65.4 Levenberg–Marquardt कलनविधि

26 व्यवहार में Levenberg–Marquardt (L-M) कलनविधि प्राचल अभिनिर्धारण की प्रमुख कार्यविधि है। यह Gauss–Newton इष्टतमीकरण और प्रवणता अवरोह के तत्त्वों को संयोजित करती है, जिससे अभिकलनीय दक्षता बनाए रखते हुए अरैखिकताओं के विस्तृत परास में सुदृढता प्राप्त होती है। इसका अनुकूली अवमंदन प्राचल समाधान के निकट तीव्र अभिसरण और कठिन भूभाग में सावधान चरणों के बीच स्वतः समायोजन करता है—इसी संतुलन ने इसे संरचनात्मक अभियांत्रिकी, जलविज्ञान, पदार्थ विज्ञान और अनेक अन्य क्षेत्रों की अरैखिक न्यूनतम-वर्ग समस्याओं के लिए पूर्वनिर्धारित चयन बनाया है।

27 विश्वास-क्षेत्र विधियों और अभिसरण विश्लेषण के संपूर्ण कलनविधीय सिद्धांत के लिए परिशिष्ट Q देखें। यह अनुभाग व्यावहारिक सूत्रीकरण विकसित करता है: भारित उद्देश्य कैसे विन्यस्त करें, मापक्रमण और परिसीमाओं का उपचार कैसे करें, अभिनिर्धारणीयता का निदान कैसे करें और स्थानीय सहप्रसरण सन्निकटन से प्राचल अनिश्चितता कैसे निकालें। हल किया हुआ अतिपरवलय-समंजन उदाहरण कलनविधि की क्रिया दर्शाता है।

65.4.1 प्रतिरूपण उपागम और प्रतिरूप चयन

28 प्राचल अभिनिर्धारण प्रतिरूप वर्ग के चयन से आरंभ होता है:

भौतिकी-आधारित प्रतिरूप: यांत्रिकी, ऊष्मागतिकी, अभिगमन अथवा बलगतिकी से व्युत्पन्न। इनके

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्राचलों का सामान्यतः भौतिक अर्थ होता है, जो बहिर्वेशन और अभियांत्रिकी व्याख्या का समर्थन करता है, किंतु प्रतिरूप-विसंगति रह सकती है।

आँकड़ा-चालित प्रतिरूप: सीमित भौतिक संरचना के साथ प्रेक्षणों से फलनीय संबंध का अनुमान करते हैं। वे जटिल प्रवृत्तियों को दक्षतापूर्वक समंजित कर सकते हैं, किंतु बहिर्वेशन के प्रति दुर्बल होते और अधिक आँकड़े माँग सकते हैं।

संकर प्रतिरूप: भौतिकी-आधारित क्रोड को आनुभविक संशोधन, प्रतिपूरक अथवा विसंगति पद से संयोजित करते हैं। दोनों घटकों की भूमिकाएँ अभिनिर्धारणीय होने पर वे भौतिक प्रतिबंध बनाए रखते हुए पूर्वानुमान सुधार सकते हैं।

29 दिए गए अनुप्रयोग के लिए प्रतिरूप वर्ग का चयन यह सीमित करता है कि उपलब्ध आँकड़ों से कौन-से प्राचल आकलनीय हैं। आँकड़ों की तुलना में अत्यधिक स्वतंत्रता कोटियों वाला प्रतिरूप दुर्बल अभिनिर्धारणीयता से ग्रस्त होगा; अत्यल्प स्वतंत्रता कोटियों वाला प्रतिरूप महत्त्वपूर्ण भौतिकी की उपेक्षा करके अभिनति (प्रतिरूप-विसंगति) उत्पन्न कर सकता है।

65.4.2 भारित अरैखिक न्यूनतम वर्ग

30 साधारण अरैखिक न्यूनतम वर्ग निम्न को न्यूनतम करता है

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^{T}\mathbf{r}. \tag{65.7}$$

जब मापनों की इकाइयाँ, प्रसरण अथवा सहसंबंध भिन्न हों, तब प्रतिरक्षणीय उद्देश्य भारित न्यूनतम वर्ग है,

$$\Phi_{W}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^{T}\mathbf{W}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}^{-1}, \tag{65.8}$$

जहाँ $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}$ मापन-त्रुटि सहप्रसरण आव्यूह है। मानक विचलन s_i वाले स्वतंत्र प्रेक्षणों के लिए यह प्रसामान्यीकृत अवशेष r_i/s_i को न्यूनतम करने के समतुल्य है। मनमाने संख्यात्मक भारण से बचना चाहिए, क्योंकि वह समंजन के अभियांत्रिकी अर्थ को मौन रूप से बदल देता है।

65.4.3 Levenberg–Marquardt अद्यतन चरण और कलनविधीय अंतर्बोध

31 Jacobian $\mathbf{J} = \partial\mathbf{r}/\partial\boldsymbol{\theta}$ के साथ Levenberg–Marquardt चरण निम्न को हल करता है

$$\left(\mathbf{J}^{T}\mathbf{W}\mathbf{J} + \lambda\mathbf{D}\right)\Delta\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{J}^{T}\mathbf{W}\mathbf{r}, \tag{65.9}$$

जहाँ λ अवमंदन नियंत्रित करता है और $\mathbf{D}$ मापक्रमण प्रदान करता है।

32 **कलनविधीय अंतर्बोध:** अवमंदन प्राचल λ प्रभावी विश्वास क्षेत्र को नियंत्रित करता है, किंतु स्वयं विश्वास-क्षेत्र त्रिज्या नहीं है। λ का बड़ा मान प्रबलतः अवमंदित, लघु चरण उत्पन्न करता है, जो गुणात्मक रूप से छोटे विश्वास क्षेत्र के अनुरूप है; जब $\mathbf{D}$ विकरण और धनात्मक हो, तब मापक्रमण के पश्चात दिशा प्रवणता-सदृश हो जाती है। λ घटने पर चरण Gauss–Newton चरण के समीप पहुँचता है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और सुव्यवहारी न्यूनतम के निकट तीव्रता से अभिसरित हो सकता है। द्विघात अभिसरण केवल अतिरिक्त अनुकूल प्रतिबंधों में संभव है और सामान्यतः मान नहीं लेना चाहिए। कलनविधि स्थानीय रहती है और भिन्न आरंभिक बिंदुओं से भिन्न समाधानों पर अभिसरित हो सकती है।

65.4.4 उदाहरण 65.1: अरैखिक अतिपरवलयी प्रतिरूप का समंजन

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

यह उदाहरण जानबूझकर इतना छोटा रखा गया है कि इसे हाथ से अथवा MATLAB®की कुछ पंक्तियों से पुनरुत्पादित किया जा सके, फिर भी यह अपने एक अज्ञात प्राचल में वास्तव में अरैखिक है। प्रतिरूप लें

$$g(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{a}{b + x}, \qquad \boldsymbol{\theta} = [a, b]^T, \qquad a > 0, \quad b > 0. \tag{65.10}$$

अपने गुणांकों में रैखिक बहुपद के विपरीत यह प्रतिरूप b में अरैखिक है; अतः पुनरावृत्तियों के साथ इसका Jacobian बदलता है।

संश्लिष्ट आँकड़े और अवशेष परिपाटी

लेखापरीक्षणीयता के लिए प्रेक्षण यथार्थतः निम्न से उत्पन्न किए गए हैं

$$\boldsymbol{\theta}_\star = [6, 2]^T$$

पाँच स्थानों $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ पर। अतः,

x_i	0	1	2	3	4
$y_i = 6/(2 + x_i)$	3.000000	2.000000	1.500000	1.200000	1.000000

इस शिक्षणात्मक उदाहरण में कोई मापन रव नहीं जोड़ा गया है, इसलिए यथार्थ अंकगणित में न्यूनतम उद्देश्य यथार्थतः शून्य है। वास्तविक रवयुक्त आँकड़ों में न्यूनतम-वर्ग आकलन सामान्यतः अंतर्निहित रव-रहित अनुक्रिया उत्पन्न करने वाले प्राचलों से यथार्थतः संपाती नहीं होगा।

पूरे उदाहरण में परिभाषित करें

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{y}, \qquad \Phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{r}, \tag{65.11}$$

जिससे

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\theta}}.$$

प्रत्येक प्रेक्षण के लिए,

$$\frac{\partial g_i}{\partial a} = \frac{1}{b + x_i}, \qquad \frac{\partial g_i}{\partial b} = -\frac{a}{(b + x_i)^2}.$$

आरंभिक बिंदु और अवमंदन नियम

निम्न से आरंभ करें

$$\boldsymbol{\theta}_0 = [4, 1]^T, \qquad \lambda_1 = 10^{-2},$$

प्रारूप प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और Marquardt मापक्रमण का उपयोग करें

$$\mathbf{D}_k = \operatorname{diag}\left(\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k\right).$$

प्रत्येक परीक्षण पर हल करें

$$\left(\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k + \lambda_k \mathbf{D}_k\right) \Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\mathbf{J}_k^T \mathbf{r}_k. \tag{65.12}$$

यदि परीक्षण बिंदु Φ को घटाता है, तो उसे स्वीकार करके $\lambda_{k+1} = \lambda_k/10$ रखें; अन्यथा उसे अस्वीकार करें, वर्तमान प्राचल बनाए रखें और परीक्षण चरण के पुनः परिकलन से पूर्व $\lambda_k \leftarrow 10\lambda_k$ रखें। दस-गुणक का यह सरल नियम केवल उदाहरण को पारदर्शी बनाने के लिए प्रयुक्त है। उत्पादन कार्यान्वयन सामान्यतः अवमंदन को अधिक सुचारु रूप से अद्यतन करने हेतु वास्तविक और पूर्वानुमानित अपचयन के अनुपात का उपयोग करते हैं।

संपूर्ण प्रथम पुनरावृत्ति

$\boldsymbol{\theta}_0 = [4, 1]^T$ पर,

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 4.000000 & 2.000000 & 1.333333 & 1.000000 & 0.800000 \end{bmatrix}^T,$$

और अतः

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 1.000000 & 0 & -0.166667 & -0.200000 & -0.200000 \end{bmatrix}^T, \qquad \Phi_0 = 0.553888889.$$

Jacobian है

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1.000000 & -4.000000 \\ 0.500000 & -1.000000 \\ 0.333333 & -0.444444 \\ 0.250000 & -0.250000 \\ 0.200000 & -0.160000 \end{bmatrix}.$$

आवश्यक गुणनफल हैं

$$\mathbf{J}_0^T \mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1.46361111 & -4.74264815 \\ -4.74264815 & 17.28563086 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}_0^T \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 0.85444444 \\ -3.84392593 \end{bmatrix}.$$

चूँकि $\mathbf{D}_0 = \operatorname{diag}(1.46361111, 17.28563086)$ और $\lambda_1 = 0.01$, प्रथम रैखिक निकाय है

$$\begin{bmatrix} 1.47824722 & -4.74264815 \\ -4.74264815 & 17.45848717 \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} -0.85444444 \\ 3.84392593 \end{bmatrix}.$$

हल करने पर मिलता है

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} 0.99934608 \\ 0.49165043 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 4.99934608 \\ 1.49165043 \end{bmatrix}.$$

स्वीकृत परीक्षण बिंदु पर,

$$\Phi_1 = 0.071941238 < \Phi_0,$$

अतः चरण स्वीकार किया जाता है और अगला अवमंदन मान $\lambda_2 = 10^{-3}$ है।

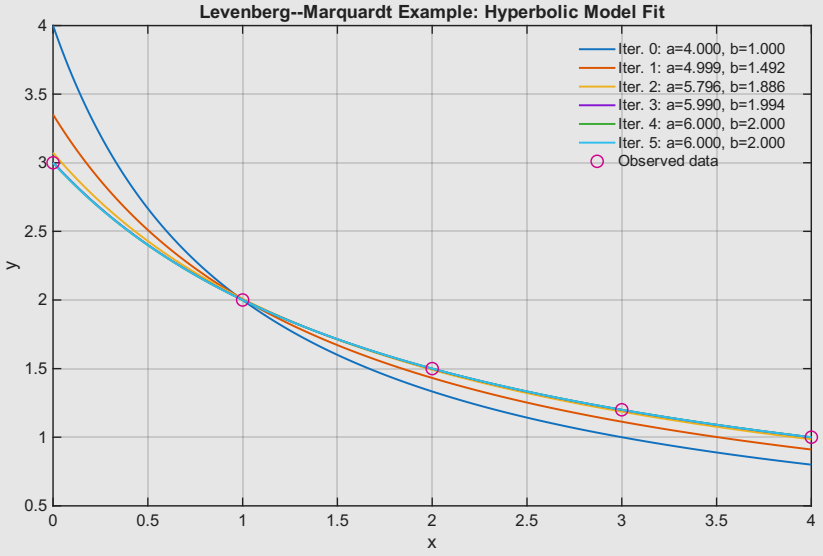
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अनुवर्ती पुनरावृत्तियाँ

प्रत्येक स्वीकृत बिंदु पर अवशेष और Jacobian का पुनः मूल्यांकन निम्न अनुक्रम देता है। सभी परिकलन द्विगुण परिशुद्धता में किए गए; प्रतिवेदित मान केवल प्रदर्शन के लिए पूर्णांकित हैं।

स्वीकृत पुनरावृत्ति	λ_k	a_k	b_k	$\Phi_k = \frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k$
0	–	4.000000	1.000000	5.538889×10^{-1}
1	10^{-2}	4.999346	1.491650	7.194124×10^{-2}
2	10^{-3}	5.795603	1.885772	2.971964×10^{-3}
3	10^{-4}	5.990433	1.994207	8.259246×10^{-6}
4	10^{-5}	5.999974	1.999984	6.810857×10^{-11}
5	10^{-6}	6.000000	2.000000	2.295319×10^{-20}

Jacobian b के साथ बदलता है, जिससे पुष्टि होती है कि यह वास्तव में अरैखिक न्यूनतम-वर्ग समस्या है। स्वीकृत पुनरावृत्त यथार्थ समाधान $\boldsymbol{\theta}_\star = [6, 2]^T$ की ओर और उद्देश्य मशीन परिशुद्धता तक शून्य की ओर बढ़ते हैं। अस्वीकृत परीक्षण प्राचल सदिश को अपरिवर्तित रखता और नया चरण परिकलित होने से पूर्व λ बढ़ाता।



पुनरावृत्ति सारणी को पुनरुत्पादित करने वाली MATLAB®लिपि परिशिष्ट I.5.1 में दी गई है। यह उपर्युक्त व्युत्पत्ति के समान अवशेष परिपाटी, मापक्रमण आव्यूह और अवमंदन नियम का उपयोग करती है।

यह स्वीकृत-पुनरावृत्ति गणक को परीक्षण गणक से पृथक रखती है। फलतः अस्वीकृत परीक्षण पुनरावृत्ति सारणी को अनुचित रूप से आगे बढ़ाए बिना λ बढ़ाता और चरण का पुनः परिकलन करता है।

65.4.5 मापक्रमण, परिसीमाएँ और नियमितीकरण

[33] अत्यंत भिन्न संख्यात्मक मापक्रमों पर मापे गए प्राचलों को पहले विमाहीन किया जाना अथवा प्रतिनिधि परिमाण निर्दिष्ट किए जाने चाहिए। परिसीमाएँ भौतिक रूप से असंभव मान रोक सकती हैं, किंतु बार-बार परिसीमा तक पहुँचाया गया प्राचल सफल अभिनिर्धारण के स्थान पर अपर्याप्त आँकड़े, दुर्बल मापक्रमण अथवा प्रतिरूप-विसंगति इंगित कर सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[34] अल्पनिर्धारित अथवा दुर्बलतः अभिनिर्धारित समस्याओं के लिए नियमितीकृत उद्देश्य प्रयुक्त हो सकता है:

$$\Phi_R(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{W}\mathbf{r} + \frac{\alpha}{2}\,\|\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0)\|_2^2\,. \tag{65.13}$$

द्वितीय पद पूर्व अथवा संदर्भ मानों से विचलन को दंडित करता है। नियमितीकरण अनेक समाधानों में से एक चुनता है; यह सूचना उत्पन्न नहीं करता और इसकी प्रबलता α प्रतिवेदित की जानी चाहिए।

65.4.6 अभिनिर्धारणीयता

[35] *संरचनात्मक अभिनिर्धारणीयता* यह पूछती है कि क्या यथार्थ, रव-मुक्त प्रेक्षण सैद्धांतिक रूप से प्राचलों को अद्वितीय रूप से निर्धारित कर सकते हैं। *व्यावहारिक अभिनिर्धारणीयता* यह पूछती है कि क्या उपलब्ध रवयुक्त और सीमित प्रेक्षण उन्हें स्वीकार्य परिशुद्धता के साथ निर्धारित करते हैं।

[36] किसी प्रत्याशी हल के निकट, व्यावहारिक अभिनिर्धारणीयता का निदान भारित जैकोबियन $\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{J}$ से किया जाता है:

- **कोटि-न्यूनता:** प्राचलों की संख्या से कम कोटि का अर्थ है कि कम-से-कम एक प्राचल-संयोजन स्थानीय रूप से अनभिनिर्धारणीय है।
- **लघु एकल मान:** अत्यंत लघु एकल मान दुर्बल रूप से सूचित दिशाओं को दर्शाते हैं; संगत प्राचल अपर्याप्त रूप से निर्धारित होते हैं।
- **बड़ी प्रतिबंध संख्या:** $\kappa = \sigma_{\max}/\sigma_{\min} > 10^6$ गंभीर कुप्रतिबंधन और दुर्बल अभिनिर्धारणीयता को दर्शाती है।
- **समरेख जैकोबियन स्तंभ:** लगभग समरेख स्तंभ उन प्राचलों को दर्शाते हैं जिनके प्रभावों को आँकड़ों से अलग-अलग नहीं पहचाना जा सकता।
- **प्रबल प्राचल सहसंबंध:** आकलित सहसंबंध > 0.95 प्रतिपूरक प्राचल-संयोजनों को दर्शाते हैं; आँकड़ों को अनुकूलित करने के लिए एक को बदलने पर दूसरे को भी बदलना पड़ता है।

[37] अतः लघु अवशेष मानक आवश्यक है, पर पर्याप्त नहीं। कोई प्रतिरूप प्रेक्षणों को लगभग यथार्थतः अनुकूलित कर सकता है, जबकि अलग-अलग प्राचल अनन्य न रहें। उपचारों में स्वतंत्र प्रतिक्रिया-प्रकार जोड़ना, संवेदक-स्थानों अथवा भारण-पथों को बदलना, असंवेदनशील प्राचलों को नियत करना, सहसंबद्ध प्राचलों को समूहीकृत करना, नियमितीकरण अथवा सूचनाप्रद पूर्व-वितरणों का प्रयोग करना, तथा अनेक आरंभिक बिंदुओं से विश्लेषण दोहराना सम्मिलित है।

[38] प्रयोगशाला और प्रायोगिक आँकड़ों के लिए यह प्रक्रिया दृढ सर्वसम्मति आकलन (RANSAC, Section 65.3.2) द्वारा अत्यधिक सुगम बनाई जा सकती है, जो L-M प्राचल-आकलन से पहले स्थूल अपवादियों को हटा देता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

65.4.6.1 स्थानीय अनिश्चितता सन्निकटन

39 यदि अवशेष प्रतिरूप उपयुक्त हो, हल आंतरिक हो और रैखिकीकरण पर्याप्त हो, तो स्थानीय सहप्रसरण सन्निकटन है

$$\operatorname{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \approx c \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} \right)^{-1}, \tag{65.14}$$

40 जब $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}$ ज्ञात निरपेक्ष परिशुद्धता आव्यूह (मापन प्रसरण) हो, तब $c = 1$ और सहप्रसरण का उचित मापक्रमण होता है। जब $\mathbf{W}$ में केवल सापेक्ष भार (जैसे, नाममात्र मानों के व्युत्क्रम) हों, तब c का आकलन सामान्यतः भारित अवशेष प्रसरण के रूप में किया जाता है:

$$c \approx \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{W} \mathbf{r}}{m - n_p}, \tag{65.15}$$

जहाँ m प्रेक्षणों की संख्या और n_p प्राचलों की संख्या है। इससे सुनिश्चित होता है कि प्राचल-अनिश्चितता आँकड़ा-अनुकूलन की गुणवत्ता और मापन-परिशुद्धता दोनों को प्रतिबिंबित करती है। सक्रिय प्रतिबंधों, स्पष्ट अरैखिकता, दुर्बल अभिनिर्धारणीयता, बहुविध उद्देश्य फलनों अथवा प्रतिरूप-विसंगति के लिए यह सन्निकटन अविश्वसनीय है। उन स्थितियों में प्रोफाइल संभाव्यता, बूटस्ट्रैप विश्लेषण अथवा बायेसियन पश्च-वितरण अधिक सूचनाप्रद होते हैं।

65.4.7 प्रतिरूप-विसंगति

41 एक उपयोगी संकल्पनात्मक प्रेक्षण[1] है

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{65.16}$$

जहाँ $\boldsymbol{\varepsilon}$ मापन-त्रुटि और $\boldsymbol{\delta}$ क्रमबद्ध प्रतिरूप-विसंगति है। यदि $\boldsymbol{\delta}$ की उपेक्षा की जाए, तो अनुकूलक अनुपस्थित क्रियाविधियों की प्रतिपूर्ति के लिए भौतिक अर्थ वाले प्राचलों को विकृत कर सकता है। बायेसियन अंशांकन विसंगति को स्पष्ट रूप से निरूपित कर सकता है (Kennedy and O'Hagan, 2001); नियतात्मक अंशांकन में कम-से-कम भार, समय, स्थान अथवा प्रतिक्रिया-प्रकार पर क्रमबद्ध निर्भरता के लिए अवशेष प्रतिरूपों की जाँच करनी चाहिए।

65.5 बायेसियन प्राचल अभिनिर्धारण

42 बायेसियन अनुमान प्रेक्षणात्मक आँकड़ों से पूर्व ज्ञान को अद्यतन करने का एक सामान्य ढाँचा प्रदान करता है। प्राचल अभिनिर्धारण में अज्ञात प्रतिरूप-प्राचलों को यादृच्छिक चर माना जाता है, और पूर्व

[1] Equation (65.16) औपचारिक रूप से Eq. (47.2) के अनुरूप है, जिसे ऑयलर–लाग्रांज समीकरण की परिवर्तनात्मक व्युत्पत्ति में प्रस्तुत किया गया था: दोनों एक योगात्मक विक्षोभ से संवर्धित संदर्भ राशि को व्यक्त करते हैं। यह सादृश्य केवल संरचनात्मक है। Eq. (47.2) में δu किसी ग्राह्य परिवर्तन को निरूपित करता है, जबकि Eq. (65.16) में $\boldsymbol{\delta}$ क्रमबद्ध प्रतिरूप-विसंगति और $\boldsymbol{\varepsilon}$ मापन-त्रुटि को निरूपित करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सूचना का संभाव्यता फलन के साथ संयोजन एक ऐसा पश्च-वितरण उत्पन्न करता है जो सूचना के दोनों स्रोतों द्वारा समर्थित प्राचल-मानों का निरूपण करता है।

43 लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट विधि (Section 65.4) और RANSAC (Section 65.3) मूलतः अनुकूलन उपागम हैं: वे बिंदु आकलन उत्पन्न करते हैं, जिन्हें स्थानीय रैखिकीकृत अनिश्चितता अथवा सर्वसम्मति-सूचना पूरक बनाती है। इसके विपरीत, बायेसियन अभिनिर्धारण पूर्ण पश्च-वितरण उत्पन्न करता है। यह असममित अथवा बहुविध अनिश्चितता, प्राचल-सहसंबंध, पूर्व मान्यताओं के प्रभाव और अनुवर्ती पूर्वानुमानों तथा निर्णयों में प्राचल-अनिश्चितता के प्रसार को निरूपित कर सकता है।

44 बायेसियन अनुमान तब सर्वाधिक मूल्यवान है जब पश्च-अनिश्चितता सुरक्षा-सीमांतों, सेवा-आयु पूर्वानुमानों, विश्वसनीयता आकलनों अथवा जोखिम-सूचित निर्णयों को तात्त्विक रूप से प्रभावित करती हो। यह तब भी स्वाभाविक है जब पिछले परीक्षणों, साहित्य, भौतिक प्रतिबंधों अथवा विशेषज्ञ निर्णय की सूचना अभिनिर्धारण को प्रभावित करनी चाहिए, और नए आँकड़े उपलब्ध होने पर क्रमिक अद्यतन अपेक्षित हो।

65.5.1 बायेसियन प्राचल अभिनिर्धारण: निरूपण

45 बेज प्रमेय अज्ञात प्राचलों के पूर्व ज्ञान को प्रेक्षणों में निहित सूचना के साथ संयोजित करता है:

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})}. \tag{65.17}$$

यहाँ $p(\boldsymbol{\theta})$ पूर्व-वितरण, $p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})$ संभाव्यता, $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ पश्च-वितरण है, और

$$p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) \, d\boldsymbol{\theta} \tag{65.18}$$

साक्ष्य अथवा सीमांत संभाव्यता है। साक्ष्य पश्च-वितरण को प्रसामान्यीकृत करता है। मेट्रोपोलिस–हेस्टिंग्स प्रतिचयन में इसकी स्पष्टतः आवश्यकता नहीं होती, क्योंकि यह स्वीकृति अनुपात से निरस्त हो जाता है।

46 सहप्रसरण आव्यूह $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ वाली योगात्मक गाउसीय मापन-त्रुटि मानते हुए, संभाव्यता है

$$p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \left|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\right|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}))^{T} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}))\right], \tag{65.19}$$

जहाँ m प्रेक्षणों की संख्या है। प्रतिरूप-विसंगति को अलग से निरूपित किया जा सकता है, उदाहरणार्थ Eq. (65.16) में प्रस्तुत योगात्मक पद द्वारा। यदि विसंगति को छोड़ दिया जाए, तो पश्च-अनिश्चितता कल्पित प्रतिरूप पर सशर्त होती है और इसकी व्याख्या प्रतिरूप-रूप त्रुटि को स्वतः समाहित करने के रूप में नहीं करनी चाहिए।

47 प्राचल पूर्व-वितरण धनात्मकता, ग्राह्य परिसीमाओं, साहित्य अथवा आँकड़ा-आधार के मानों, सहचर-परीक्षण परिणामों या अन्य प्रतिरक्षणीय सूचना को कूटबद्ध कर सकते हैं। जब पूर्व सूचना दुर्बल हो,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तब भौतिक रूप से विश्वसनीय परासों पर दुर्बल सूचनाप्रद पूर्व-वितरण मनमाने रूप से विसरित पूर्व-वितरणों से बेहतर होते हैं। पूर्व-पूर्वानुमानी अनुकरण—पूर्व-वितरण से प्राचलों का प्रतिचयन, प्रतिरूप का चालन और निहित प्रतिक्रियाओं का परीक्षण—आँकड़ों के प्रयोग से पहले एक महत्त्वपूर्ण निदान है।

65.5.2 MAP आकलन और बिंदु आकलन

48 यदि एकल प्राचल सदिश अपेक्षित हो, तो *अधिकतम पश्च-संभाव्यता* (MAP) आकलन पश्च-वितरण का बहुलक है:

$$\boldsymbol{\theta}^{*}_{\mathrm{MAP}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}). \tag{65.20}$$

49 गाउसीय संभाव्यता के लिए MAP आकलन समतुल्य रूप से ऋणात्मक लघुगणकीय पूर्व-वितरण से संवर्धित भारित न्यूनतम-वर्ग पद को न्यूनतम करके प्राप्त होता है:

$$\boldsymbol{\theta}^{*}_{\mathrm{MAP}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})^{T} \mathbf{W} \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) - \log p(\boldsymbol{\theta}) \right]. \tag{65.21}$$

यह गणनात्मक रूप से भारित न्यूनतम-वर्ग (Section 65.4.2) के समान है, जिसमें लघुगणकीय पूर्व-वितरण नियमितीकरण पद का कार्य करता है। ग्राह्य क्षेत्र पर एकसमान पूर्व-वितरण होने पर MAP आकलन अधिकतम-संभाव्यता आकलन के समान होता है। अन्य बिंदु-सारांशों में पश्च-माध्य और पश्च-माध्यिका सम्मिलित हैं; इनमें से कोई भी अकेले पूर्ण पश्च-वितरण के आकार अथवा निर्भरता-संरचना को व्यक्त नहीं करता।

65.5.3 प्राचलों के लिए पश्च-प्रतिचयन और MCMC

50 बिंदु आकलन के स्थान पर पूर्ण पश्च-वितरण प्राप्त करने के लिए मार्कोव शृंखला मोंटे कार्लो (MCMC) विधियाँ पश्च प्रसामान्यीकरण स्थिरांक के मूल्यांकन की आवश्यकता के बिना $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ से प्रतिदर्श उत्पन्न करती हैं। मेट्रोपोलिस–हेस्टिंग्स कलनविधि में एक परीक्षण सदिश $\boldsymbol{\theta}'$ प्रस्ताव घनत्व $q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})$ से लिया जाता है और निम्न संभाव्यता के साथ स्वीकार किया जाता है

$$\alpha = \min\left[1, \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}')p(\boldsymbol{\theta}')q(\boldsymbol{\theta}^{(s)} \mid \boldsymbol{\theta}')}{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})p(\boldsymbol{\theta}^{(s)})q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})}\right]. \tag{65.22}$$

सममित यादृच्छिक-चाल प्रस्ताव के लिए दोनों प्रस्ताव घनत्व निरस्त हो जाते हैं, अतः

$$\alpha = \min\left[1, \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}')p(\boldsymbol{\theta}')}{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})p(\boldsymbol{\theta}^{(s)})}\right]. \tag{65.23}$$

स्वीकृत और पुनरावृत्त अवस्थाएँ एक मार्कोव शृंखला बनाती हैं, जिसका स्थिर वितरण सामान्य नियमितता प्रतिबंधों के अधीन पश्च-वितरण होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[51] आरंभिक बिंदु से प्रबल रूप से प्रभावित प्रारंभिक प्रतिदर्श सामान्यतः बर्न-इन के रूप में त्याग दिए जाते हैं। क्रमिक प्रतिदर्श सहसंबद्ध होते हैं, अतः संगृहित निष्कर्षों की संख्या स्वतंत्र निष्कर्षों की संख्या नहीं होती। निदान में अनुरेख आलेख, स्वसहसंबंध फलन, प्रभावी प्रतिदर्श आकार और विसरित बिंदुओं से आरंभ की गई अनेक शृंखलाएँ सम्मिलित होनी चाहिए। बहु-शृंखला विश्लेषणों में एक के निकट $\widehat{R}$ मान इस बात का प्रमाण—पर सिद्धि नहीं—देते हैं कि शृंखलाएँ एक सामान्य स्थिर वितरण पर पहुँच गई हैं। अपेक्षित शृंखला-लंबाई समस्या-निर्भर है और इसे किसी सार्वभौमिक पुनरावृत्ति संख्या के स्थान पर मिश्रण तथा प्रभावी प्रतिदर्श आकार से निर्धारित किया जाना चाहिए।

65.5.4 उदाहरण 65.2: द्विघाती आधार और मेट्रोपोलिस–हेस्टिंग्स प्रतिचयन सहित बायेसियन समाश्रयण

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

समाश्रयण प्रतिरूप पर विचार कीजिए

$$y_i = \theta_1 x_{1i}^2 + \theta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{65.24}$$

जहाँ θ_1 और θ_2 अज्ञात हैं। प्रतिक्रिया x_1 में द्विघाती आधार का प्रयोग करती है, किंतु प्रतिरूप अज्ञात प्राचलों में रैखिक है। यह सरल संरचना साभिप्राय है: गाउसीय पूर्व-वितरण और ज्ञात σ के साथ यथार्थ पश्च-वितरण विश्लेषणात्मक रूप से उपलब्ध होता है और अतः MCMC कार्यान्वयन की लेखापरीक्षा में प्रयुक्त किया जा सकता है।

संश्लिष्ट प्रेक्षण निम्न के साथ उत्पन्न किए जाते हैं

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{true}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^{T}, \qquad \sigma = 1, \qquad n = 50, \tag{65.25}$$

और स्वतंत्र गाउसीय पूर्व-वितरण निर्दिष्ट किए जाते हैं:

$$\theta_j \sim \mathcal{N}(0, 10^2), \qquad j = 1, 2. \tag{65.26}$$

सममित गाउसीय यादृच्छिक-चाल प्रस्ताव प्रयुक्त होता है, अतः स्वीकृति संभाव्यता Eq. (65.23) द्वारा दी जाती है। लिपि 10,000 अवस्थाएँ उत्पन्न करती है, प्रथम 2,000 को बर्न-इन के रूप में त्यागती है, और पश्च-माध्य, मानक विचलन, 95% विश्वसनीयता-अंतराल, प्राचल-सहसंबंध, अनुरेख आलेख, स्वसहसंबंध फलन तथा पश्च-पूर्वानुमानी प्रतिक्रिया-पट्ट की गणना करती है। यह MCMC आकलनों की तुलना यथार्थ गाउसीय पश्च-वितरण और साधारण न्यूनतम-वर्ग आकलन से भी करती है।

संक्षिप्त कार्यान्वयन शैक्षणिक स्पष्टता के लिए एक शृंखला का प्रयोग करता है। उत्पादन विश्लेषण में अनेक विसरित शृंखलाओं का प्रयोग होना चाहिए और $\widehat{R}$ तथा प्रभावी प्रतिदर्श आकार की सूचना दी जानी चाहिए। रव का मानक विचलन ज्ञात माना गया है; अधिक पूर्ण विश्लेषण में इसे पूर्व-वितरण दिया जा सकता है और समाश्रयण प्राचलों के साथ संयुक्त रूप से इसका अनुमान किया जा सकता है।

संगत MATLAB®कूट § I.5.8 में दिया गया है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

65.5.5 हल किया हुआ उदाहरण: ह्रास-प्राचलों के लिए बायेसियन अनुमान

52 Section 65.3.2 में प्रस्तुत समय-निर्भर ह्रास-प्रतिरूप पर विचार कीजिए:

$$\frac{\mathrm{QoI}}{\mathrm{QoI}_0}(d,t) = 1 - f(d)\cdot D(t),$$

जहाँ $D(t)$ प्राचलों τ_C (अभिलाक्षणिक समय), τ_L (विलंबता अवधि) और β (अनंतस्पर्शी क्षति) वाले प्रथम-सिद्धांत AAR बलगतिकी प्रतिरूप का अनुसरण करता है।

53 बायेसियन विश्लेषण प्रत्येक प्राचल को प्रतिरक्षणीय पूर्व-वितरण निर्दिष्ट करता है:

- $\tau_C > 0$: अभिलाक्षणिक समय मापक्रम, उदाहरणार्थ साहित्यिक मानों पर केंद्रित लघुगणक-प्रसामान्य पूर्व-वितरण।
- $\tau_L > 0$: विलंबता अवधि, जिसका पूर्व-वितरण तापमान और क्षार-अंश से सूचित हो सकता है।
- $\beta \in (0,1)$: भिन्नात्मक दीर्घकालीन क्षति, जिसे उदाहरणार्थ एकसमान अथवा बीटा पूर्व-वितरण द्वारा निरूपित किया जाता है।

54 संभाव्यता अनेक गहराइयों और आयुओं पर प्रत्यास्थता मापांक तथा सामर्थ्य जैसी राशियों के क्षेत्र-मापनों को उनके मापन-त्रुटि आकलनों के साथ संयोजित करती है। तत्पश्चात MCMC प्रतिचयन पश्च-निष्कर्ष उत्पन्न करता है, जिससे निम्न संभव होते हैं:

- प्रत्येक प्राचल के लिए सीमांत पश्च-घनत्व;
- परिमात्रकों अथवा उच्चतम-पश्च-घनत्व क्षेत्रों पर आधारित 95% विश्वसनीयता-अंतराल;
- पश्च प्राचल-सहसंबंध और मिश्रकारी प्रभाव की पहचान;
- अनिश्चितता-पट्टों सहित पश्च-पूर्वानुमानी ह्रास-वक्र।

55 यदि पश्च-वितरण दो प्राचलों, जैसे τ_C और τ_L, के बीच प्रबल सहसंबंध प्रकट करता है, तो उपलब्ध आँकड़े उनके प्रभावों को अलग न कर पाएँ। तब अतिरिक्त प्रतिक्रिया-प्रकार, भिन्न समयों अथवा स्थानों पर मापन या अधिक सूचनाप्रद पूर्व-वितरण की आवश्यकता हो सकती है। पश्च-पूर्वानुमानी जाँचें प्रेक्षित प्रतिक्रियाओं की तुलना पश्च-निष्कर्षों के अधीन उत्पन्न प्रतिकृत प्रतिक्रियाओं से करती हैं और क्रमबद्ध प्रतिरूप-अपर्याप्तता प्रकट करने में सहायक होती हैं।

65.5.6 बायेसियन अभिनिर्धारण का प्रयोग कब करें

56 बायेसियन प्राचल अभिनिर्धारण विशेषतः तब मूल्यवान है जब:

- **पूर्व सूचना पर्याप्त हो:** ऐतिहासिक परीक्षणों, सैद्धांतिक प्रतिबंधों अथवा विशेषज्ञ ज्ञान को अंशांकन प्रभावित करना चाहिए।
- **पूर्ण पश्च-अनिश्चितता निर्णायक हो:** निर्णय केवल बिंदु आकलनों पर नहीं, पुच्छ संभाव्यताओं अथवा विश्वसनीयता-अंतरालों पर निर्भर हों।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **प्राचल-सहसंबंध का परिमाणन आवश्यक हो:** विश्लेषण को प्रकट करना चाहिए कि प्राचल स्वतंत्र रूप से अभिनिर्धारित हैं अथवा मापन-समुच्चय द्वारा मिश्रित हैं।
- **क्रमिक अद्यतन अपेक्षित हो:** समय के साथ नए प्रेक्षण आते हों और एक विश्लेषण का पश्च-वितरण अगले के लिए पूर्व-वितरण बनता हो।
- **प्रतिरूप-विसंगति महत्त्वपूर्ण हो:** सभी असंगतियों को प्राचलों पर आरोपित करने से बचने के लिए क्रमबद्ध प्रतिरूप-त्रुटि का स्पष्ट उपचार अपेक्षित हो।

[57] बायेसियन विधियाँ लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट अनुकूलन से गणनात्मक रूप से अधिक श्रमसाध्य हैं और सावधान प्रतिचयन-निदान अपेक्षित करती हैं। बदले में वे विश्वसनीयता-अंतराल, संयुक्त प्राचल-निर्भरता, पश्च-पूर्वानुमानी अनिश्चितता और पूर्व सूचना का पारदर्शी निरूपण प्रदान करती हैं—ये राशियाँ उच्च-परिणाम वाले संरचनात्मक निर्णयों में आवश्यक हो सकती हैं।

65.6 व्यवहार में लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट कलनविधि

[58] विश्वास-क्षेत्र विधियों के पूर्ण कलनविधीय सिद्धांत और लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट अभिसरण विश्लेषण के लिए Appendix Q देखें। यह अनुभाग परिमित अवयव विश्लेषण से युग्मित लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट कलनविधि के व्यावहारिक MATLAB कार्यान्वयन पर केंद्रित है।

MATLAB®कूट [59] MATLAB®कूट Fig. Q.2 में वर्णित है और इसका अनुसरण अपेक्षाकृत सरल है।

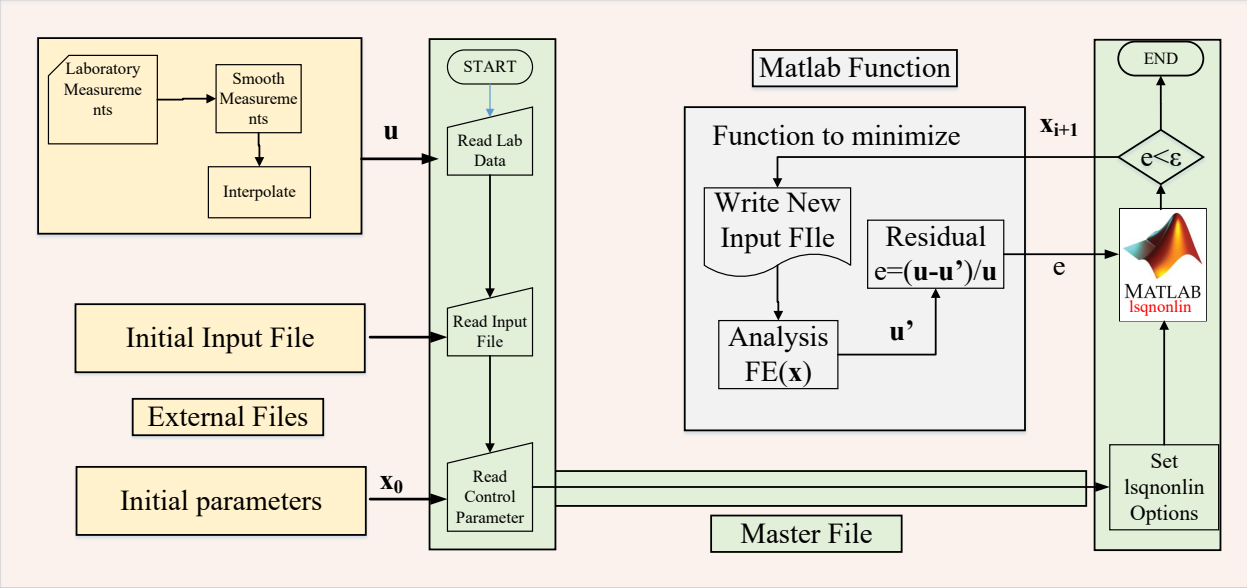
[60] ध्यान दें कि इस स्थिति में विश्लेषण क्षार-समुच्चय अभिक्रिया (AAR) से प्रभावित बाँध पर केंद्रित है। उद्देश्य AAR प्रतिरूप के प्राचलों को इस प्रकार निर्धारित करना है कि परिमित अवयव विश्लेषण से प्राप्त शिखर-विस्थापन क्षेत्र-मापनों से निकटता से मेल खाएँ।

1. क्षेत्र-मापन पढ़े और समायोजित किए जाते हैं।
2. नियंत्रण निवेशिका फ़ाइल पढ़कर तीन भागों में विभाजित की जाती है: एक केंद्रीय भाग जिसमें कूट द्वारा संशोधित की जाने वाली पंक्तियाँ (AAR गुणों से संबद्ध) होती हैं, और दो समीपवर्ती भाग जो अपरिवर्तित रहते हैं। संगत विभाजक पंक्ति-संख्याएँ न्यूनतमीकरण फलन द्वारा बाद में प्रयोग के लिए अभिलिखित की जाती हैं।
3. उपयोगकर्ता-परिभाषित चर बाहरी Excel फ़ाइल से पढ़े जाते हैं।
4. अनुकूलन प्राचल निर्धारित किए जाते हैं।
5. तत्पश्चात `lsqnonlin` फलन, §Q.3, आहूत किया जाता है।

फलन की परिभाषा [61] कलनविधि का एक निर्णायक भाग न्यूनतम किए जाने वाले फलन की परिभाषा है।

1. $\mathbf{x}$ के रूप में एक नई निवेशिका फ़ाइल लिखें; प्रथम पुनरावृत्ति में पूर्वनिर्धारित मान $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ प्रयोग करें। नियंत्रण फ़ाइल का पूर्व विभाजन इसे सुगम बनाता है।
2. परिमित अवयव विश्लेषण करें (इस स्थिति में Merlin का प्रयोग करते हुए)।
3. निर्गम फ़ाइल से परिकलित विस्थापन $\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$ निकालें।
4. अवशेष $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_{\text{fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$ की गणना करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 65.4: प्राचल अभिनिर्धारण प्रक्रिया का प्रवाह-आरेख

5. अवशेषों के मानक e की गणना करें।
6. नया अवशेष सदिश अनुकूलक को लौटाएँ।

62 कार्यक्रम की समाप्ति `lsqnonlin` द्वारा अवशेष सदिश और पहले चयनित विकल्पों (§ Q.3) के आधार पर नियंत्रित होती है। चूँकि उद्देश्य फलन को प्राचल सदिश के अतिरिक्त आँकड़ों की आवश्यकता होती है, इसलिए इस कार्यान्वयन में अतिरिक्त राशियाँ (जैसे $\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$) `global` चरों के रूप में प्रेषित की जाती हैं।

63 अरैखिक न्यूनतम-वर्ग अनुकूलन का MATLAB®कूट § I.6.1 में दिया गया है।

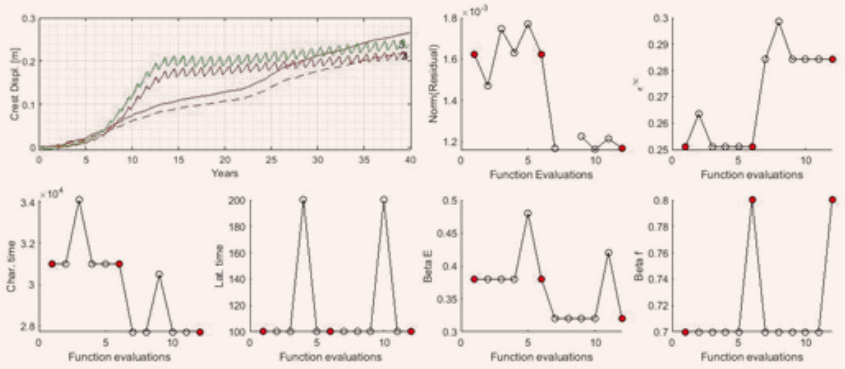
वास्तविक-समय दृश्यीकरण 64 क्योंकि जटिल समस्याओं का अरैखिक परिमित अवयव अनुकरण गणनात्मक रूप से महँगा होता है और प्राचल अभिनिर्धारण में ऐसे अनेक विश्लेषण अपेक्षित होते हैं, अतः समग्र प्रक्रिया गणना-प्रधान है।

65 अतः एक आलेखीय उपयोगकर्ता अंतरापृष्ठ प्रयुक्त होता है, Figure Q.3। प्रथम चतुर्थांश में मध्यवर्ती विस्थापनों ($\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$) का मापित विस्थापनों ($\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$) से तुलनात्मक आलेख है। अन्य तीन चतुर्थांशों में अभिनिर्धारित किए जाने वाले चयनित चरों (ε^{∞}, τ_l, और τ_c) के पुनरावृत्ति-संख्या के सापेक्ष आलेख हैं।

65.6.1 न्यूनतम-वर्ग व्यवहार

66 पारंपरिक परिमित अवयव अंशांकन के लिए अनुशंसित क्रम है: अवशेषों को प्रसामान्यीकृत अथवा भारित करें; प्राचलों की छँटाई करें; जैकोबियन कोटि जाँचें; भौतिक रूप से प्रतिरक्षणीय परिसीमाएँ और आरंभिक बिंदु चुनें; अनेक आरंभों से चलाएँ; अवशेष-संरचना जाँचें; और स्वतंत्र रूप से वैधीकृत करें। Chapter Q

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 65.5: एकल अवशेष फलन और पाँच चरों के लिए आलेखीय उपयोगकर्ता अंतरापृष्ठ। अधिक व्यापक उदाहरण के लिए Fig. 65.7 देखें।

संख्यात्मक कलनविधियाँ विकसित करता है और Appendix I.4 में संगत MATLAB®कूट है, जिसका पूर्ण वर्णन आगे दिया गया है।

65.6.1.1 MATLAB प्राचल अभिनिर्धारण कार्यक्रम: विवरण

[67] पूर्ववर्ती अनुभाग गणितीय ढाँचा प्रदान करते हैं। यह अनुभाग आँकड़ा-चालित कार्यान्वयन का प्रलेखन करता है, जो MATLAB के `lsqnonlin` अनुकूलक को बाहरी परिमित अवयव हलकर्ता से युग्मित करता है। यद्यपि यह संस्करण ATENA (परिमित अवयव विश्लेषण कार्यक्रम, FEAP) के साथ कार्यान्वित है, कार्यक्रम की मॉड्यूलर संरचना कूट को किसी अन्य परिमित अवयव विश्लेषण पैकेज के लिए अनुकूलित करना सरल बनाती है। यह कार्यान्वयन मूल निवेशिका फ़ाइलों को बदले बिना चयनित सामग्री-प्राचल अद्यतन करता है, हलकर्ता आरंभ करता है, अनुश्रवित प्रतिक्रियाएँ पढ़ता है, अवशेषों का मूल्यांकन करता है और अभिनिर्धारण इतिहास अभिलिखित करता है।

कार्यक्रम का अवलोकन [68] समस्या-विशिष्ट समस्त सूचना एकल विस्तृत-पत्रक `Log.xlsx` से पढ़ी जाती है। क्षेत्र अथवा प्रयोगशाला मापन और अज्ञात प्राचलों पर निर्भर प्रतिक्रिया वाला FEAP प्रतिरूप दिए जाने पर कार्यक्रम निम्न क्रम निष्पादित करता है:

1. `Input` पत्रक से फ़ाइल-नाम, प्राचल-नाम, अनुश्रवक-नाम, समुच्चयन व्यंजक, लक्ष्य-मान और हलकर्ता विकल्प पढ़ना;
2. FEAP निवेशिका फ़ाइल से आरंभिक प्राचल सदिश $\mathbf{x}_0$ और अनुशंसित परास पढ़ना;
3. निवेशिका फ़ाइल की अस्थायी कार्यशील प्रति बनाना;
4. `PI #n` नामक नया पंक्ति-वार अभिलेख पत्रक बनाना;
5. संपूर्ण MATLAB–FEAP शृंखला सत्यापित करने के लिए $\mathbf{x}_0$ पर शुष्क चालन करना;
6. `lsqnonlin` आरंभ करना; प्रत्येक फलन-मूल्यांकन पर अस्थायी निवेश अद्यतन करना, FEAP चलाना, निर्गम का पदच्छेदन करना, पूर्वानुमानों का समुच्चयन करना और अवशेष सदिश लौटाना;
7. पूर्वानुमान-से-लक्ष्य अनुपात, लघुगणकीय मापक्रम पर अवशेष परिमाण और प्राचल-विकास दर्शाने वाला डैशबोर्ड अद्यतन करना;

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

8. प्रत्येक पहचानी गई अनुकूलक पुनरावृत्ति को उसके समय-चिह्न, व्यतीत समय, प्राचल-मान, पूर्वानुमान-से-लक्ष्य अनुपात और अवशेषों सहित अभिलिखित करना;
9. अभिनिर्धारित प्राचल, अवशेष मानक, निर्गमन ध्वज और पुनरावृत्ति सांख्यिकी प्रस्तुत करना।

[69] यह कार्यान्वयन समस्या-स्वतंत्र रहने के लिए अभिप्रेत है। प्राचलों, पूर्वानुमानों, समुच्चयन व्यंजकों और लक्ष्य-मापनों की संख्या MATLAB स्रोत में परिवर्तन के बिना बदल सकती है। मात्रक-रूपांतरण विस्तृत-पत्रक व्यंजकों में स्पष्ट रूप से लिखे जाते हैं; कूट में कोई छिपा विकृति-से-सूक्ष्मविकृति गुणक लागू नहीं किया जाता।

फ़ोल्डर संरचना

```
FEAP/
|-- Main.m                <- entry point: ParIdentification()
|-- ParIdentification.m     <- main function and nested minfunc
|-- Log.xlsx              <- control spreadsheet and PI logs
|-- input.dat             <- original FEAP input (never modified)
|-- input_temp.dat          <- working copy (overwritten)
|-- output.dat            <- FEAP output (overwritten)
|
`-- functions/
    |-- createTempInputFile.m
    |-- extractEvaluateValues.m
    |-- initPISheet.m
    |-- logIterationToSheet.m
    |-- readInputSheet.m
    |-- readModelPredValues.m
    |-- runAnalysis.m
    |-- runLSQnonlin.m
    |-- updateEvaluateValues.m
    |-- updatePlots.m
    |
    `-- private/
        |-- buildFieldAggFunctions.m
        |-- findKey.m
        |-- isMissingLike.m
        |-- normalizeText.m
        |-- readNumericVectorByKey.m
        |-- readScalarByKey.m
        |-- readTextVectorByKey.m
        `-- toText.m
```

[70] पूर्व सहायक `xlsColLetter.m` वर्तमान पंक्ति-वार PI अभिलेखक के लिए आवश्यक नहीं है। सहायक `buildFieldAggFunctions.m` किसी मापक्रम गुणक को जोड़े बिना विस्तृत-पत्रक व्यंजकों को ठीक लिखे गए रूप में संकलित करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

नियंत्रण विस्तृत-पत्रक: Log.xlsx [71] `Input` पत्रक, Fig. 65.6, कुंजीशब्द-आधारित अभिन्यास का प्रयोग करता है। स्तंभ A में वर्णनात्मक नाम-पट्ट, स्तंभ B में MATLAB द्वारा पढ़ी जाने वाली कुंजी और स्तंभ C से आगे एक अथवा अधिक मान होते हैं।

	A	B	C	D	E	F
1	**Analysis Options**					
2	Executable file name	exeName	"AtenaStudio.exe"			
3	Input file name	inpFile	PH_optim-vc2			
4	Output file name	outFile	monitors.csv			
5	Model parameters	modelPar	BE_xx	BE_yy	BW_xx	BW_yy
6	Model predictions	modelPred	SAB_74m_X	SAB_74m_Y	SAB_86m_X	SAB_86m_Y
7	aggregated field expressions	fieldAggExp	SAB_74m_X * 1000	SAB_74m_Y * 1000	SAB_86m_X * 1000	SAB_86m_Y * 1000
8	aggregated field measurement values	fieldAggValues	2.7	1.8	3.4	2
9						
10	modelPar	AE_xx	AE_yy	AW_xx	AW_yy	...
11	modelPred	SAC_76m_X	SAC_76m_Y	SAC_86m_X	SAC_86m_Y	...
12	fieldAggExp	SAC_76m_X * 1000	SAC_76m_Y * 1000	SAC_86m_X * 1000	SAC_86m_Y * 1000	...
13	fieldAggValues	3	2	4	1.6	...
14						
15	**Solver options**					
16	Algorithm	Algorithm	levenberg-marquardt			
17	Tolerance function	TolFun	1.00E-08			
18	Step Tolerance	StepTol	1.00E-08			
19	Max iterations	MaxIter	100,000			
20	Max function evaluations	MaxFunEval	100,000			
21	Display	display	iter			
22	Finite Difference Step Size	FiniteDifferenceStepSize	0.01			
23	Finite Difference Type	FiniteDifferenceType	central			

Input | PI #1 | PI #2 | PI #3 | PI #4 | PI #5 | PI #6 | PI #7 | PI #8 | PI #9 | PI #10

चित्र 65.6: लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट अरैखिक न्यूनतम-वर्ग अनुकूलन की निवेश आँकड़ा फ़ाइल

कूट नियत पंक्ति-संख्या के स्थान पर कुंजी द्वारा खोज करता है।

तालिका 65.1: `Log.xlsx` में प्रतिनिधि विन्यास प्रविष्टियाँ

विन्यास	कुंजी	प्रतिनिधि मान
निष्पाद्य फ़ाइल	`exeName`	`D:\FEAP\AtenaConsole.exe`
निर्वेशिका फ़ाइल	`inpFile`	`PH_optim-vc2`
निर्गम फ़ाइल	`outFile`	`monitors.csv`
प्रतिरूप प्राचल	`modelPar`	`BE_xx, BE_yy, BW_xx, BW_yy, ...`
प्रतिरूप पूर्वानुमान	`modelPred`	`SAB_74m_X, SAB_74m_Y, ...`
समुच्चयन व्यंजक	`fieldAggExp`	`SAB_74m_X*1000, ...`
लक्ष्य मापन	`fieldAggValues`	2.7, 1.8, 3.4, 2, ...
कलनविधि	`Algorithm`	`levenberg-marquardt`
फलन सहिष्णुता	`TolFun`	1e-8
सापेक्ष चरण सहिष्णुता	`StepTol`	1e-8
अधिकतम पुनरावृत्तियाँ	`MaxIter`	100000
अधिकतम मूल्यांकन	`MaxFunEval`	100000
परिमित-अंतर चरण	`FiniteDiffStepSize`	0.01
परिमित-अंतर प्रकार	`FiniteDiffType`	`central`
प्रदर्शन	`display`	`iter`

[72] प्रत्येक विस्तृत-पत्रक कुंजी के बड़े-छोटे अक्षर और वर्तनी ठीक उस संस्करण से मिलने चाहिए जिसकी अपेक्षा `readInputSheet.m` करता है। आंतरिक रूप से पाठक इन नामों को प्रसामान्यीकृत कर सकता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

है—उदाहरणार्थ, `StepTol` को `S.tolX` के रूप में संग्रहित किया जा सकता है—किंतु विस्तृत-पत्रक में स्वयं कार्यान्वित कुंजी ही प्रयुक्त होनी चाहिए।

मात्रक और समुच्चयन व्यंजक [73] FEAP अनुश्रवक मान उनके मूल मात्रकों में पढ़े जाते हैं। यदि FEAP विकृति निर्गत करता है जबकि लक्ष्य सूक्ष्मविकृति में हों, तो रूपांतरण विस्तृत-पत्रक व्यंजक में होना चाहिए, उदाहरणार्थ

```
fieldAggExp    = 1e6*(M02+M08+M12)/3
fieldAggValues = 136  237  228  132
```

इससे मात्रक-परिपाटी प्रत्यक्ष रहती है और एक ही गुणक को दो बार लागू होने से रोका जाता है।

PI अभिलेख पत्रक [74] प्रत्येक चालन अगला उपलब्ध पत्रक, `PI #1`, `PI #2`, इत्यादि बनाता है। पंक्ति-वार शीर्षलेख है

```
Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> |
    <Pred/Target...> | <Residual...>
```

पंक्ति 2 पुनरावृत्ति 0 है और इसमें शून्य व्यतीत समय के साथ $\mathbf{x}_0$ होता है। बाद की प्रत्येक पहचानी गई पुनरावृत्ति प्राचल सदिश, पूर्वानुमान-से-लक्ष्य अनुपात और अवशेष जोड़ती है। यह प्रारूप सीधे क्रमबद्ध किया जा सकता है और आलेखन अथवा स्वतंत्र पश्च-संसाधन के लिए उपयुक्त है।

FEAP निवेशिका और निर्गम फ़ाइलें [75] अभिनिर्धारित किए जाने वाले प्राचल `EVALUATE` कथनों में स्थित होते हैं। वर्तमान मान आरंभिक अनुमान देता है और वैकल्पिक टिप्पणी अनुशंसित परास देती है:

```
EVALUATE "EcD1 = /*# EcD1 */ 62000"
        // Recommended range 10000 - 50000
```

मूल फ़ाइल कभी अधिलेखित नहीं की जाती; सभी अद्यतन अस्थायी प्रति में लिखे जाते हैं।

[76] निर्गम पदच्छेदक अनुरोधित अनुश्रवक खंडों को क्रमवीक्षित करता है और प्रत्येक अनुश्रवक का अंतिम वैध प्रतिक्रिया-मान निकालता है। पूर्वानुमान-नाम `modelPred` में सूचीबद्ध प्रत्ययों से संरेखित किए जाते हैं। अनुपस्थित, अपरिमित अथवा अमेल मानों को अनुकूलक को मौन रूप से भेजने के स्थान पर शुष्क चालन रोक देना चाहिए।

अनुकूलन कार्यप्रवाह और उद्देश्य [77] $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ को समुच्चयित FEAP पूर्वानुमानों का सदिश और $\mathbf{y}$ को लक्ष्य सदिश मानें। कार्यक्रम

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) - \mathbf{y} \tag{65.27}$$

को `lsqnonlin` को लौटाता है, जो $\mathbf{r}^T\mathbf{r}$ को न्यूनतम करता है। यदि लक्ष्यों के मात्रक अथवा अनिश्चितता-स्तर पर्याप्त भिन्न हों, तो उन्हें §65.4.2 में वर्णित प्रकार से प्रसामान्यीकृत अथवा भारित करना चाहिए; अन्यथा संख्यात्मक रूप से सबसे बड़े अवशेष अनुकूलन पर हावी होते हैं।

कार्यान्वयन में भारित और सहसंबद्ध अवशेष [78] अनुकूलक को बदले बिना उद्देश्य को सांख्यिकीय रूप से भारित न्यूनतम-वर्ग में बदला जा सकता है। दिए गए मानक विचलनों s_i वाले स्वतंत्र मापनों के लिए प्रसामान्यीकृत अवशेष लौटाएँ:

```
res = (predicted - target) ./ sigmaMeasurement;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तब `lsqnonlin` $\sum_i r_i^2/s_i^2$ को न्यूनतम करता है। कच्चे अभियांत्रिकी अवशेष अभिलेख में फिर भी रखे जाने चाहिए, ताकि प्रसामान्यीकरण अमेल के परिमाण अथवा मात्रकों को न छिपाए।

79 सहप्रसरण आव्यूह $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ वाली सहसंबद्ध मापन-त्रुटियों के लिए निम्न चोलेस्की गुणक $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ की गणना करें और पूर्व-शोधित अवशेष लौटाएँ:

```
rawRes = predicted(:) - target(:);
L      = chol(SigmaMeasurement,'lower');
res    = L \ rawRes;
```

परिणामी वर्गित मानक $\mathbf{r}^T\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}\mathbf{r}$ है। सहप्रसरण आव्यूह धनात्मक निश्चित होना चाहिए और कच्चे अवशेष सदिश के अनुरूप मात्रकों में व्यक्त होना चाहिए।

शुष्क चालन 80 अनुकूलन से पहले `minfunc` का $\mathbf{x}_0$ पर एक बार मूल्यांकन किया जाता है। इससे फ़ाइल अद्यतन, हलकर्ता निष्पादन, निर्गम पदच्छेदन, समुच्चयन और अवशेष-मूल्यांकन सत्यापित होते हैं। परिणाम फलन-मूल्यांकन 0 पर पुनरावृत्ति 0 के रूप में पुनः आलेखित होता है और इसे अनुकूलक पुनरावृत्ति नहीं गिना जाता।

पुनरावृत्तियाँ और फलन-मूल्यांकन 81 परिमित-अंतर जैकोबियन के साथ एक अनुकूलक पुनरावृत्ति को अग्र अंतर के लिए लगभग $n_{\mathrm{par}}+1$ फलन-मूल्यांकन और केंद्रीय अंतर के लिए लगभग $2n_{\mathrm{par}}+1$ फलन-मूल्यांकन अपेक्षित हो सकते हैं; अस्वीकृत परीक्षण चरण अथवा अन्य आंतरिक मूल्यांकन इनके अतिरिक्त हैं। अतः केवल नियत फलन-गणना प्रतिरूप से वास्तविक पुनरावृत्तियों का अनुमान एक सन्निकटन है। जब यथार्थ पुनरावृत्ति घटनाएँ अपेक्षित हों, तब अनुकूलक निर्गम फलन बेहतर है।

मापक्रमण, सहिष्णुताएँ और परिसीमाएँ 82 प्रतिनिधि प्राचल-परिमाण `TypicalX` द्वारा दिए जाते हैं; परिमित अनुशंसित परास उपलब्ध होने पर कूट मध्य-परास मानों का प्रयोग करता है। विस्तृत-पत्रक चरण-सहिष्णुता विमाहीन है और आंतरिक रूप से निरपेक्ष मापक्रम में बदली जा सकती है। अत्यंत लघु सहिष्णुताएँ अधिक यथार्थ हल की गारंटी नहीं देतीं और अनावश्यक परिमित अवयव चालन करा सकती हैं।

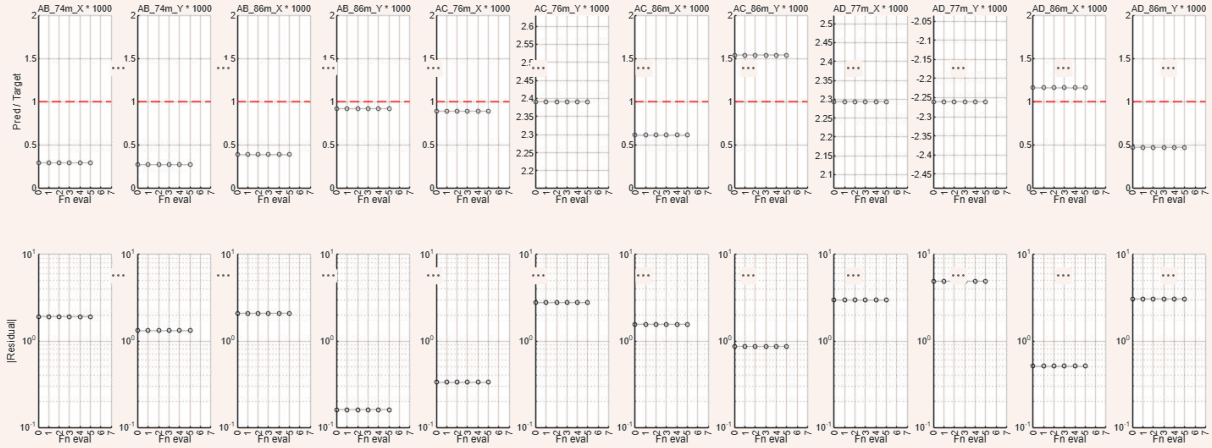
83 अनुशंसित परास $\mathbf{x}_0$ की जाँच, अविश्वसनीय मानों की ओर अपवाह का पता लगाने और परिसीमाएँ प्रवर्तित करने वाली कलनविधियों के विन्यास में उपयोगी हैं। विश्लेषक को सत्यापित करना चाहिए कि चयनित `lsqnonlin` कलनविधि और MATLAB संस्करण समस्या की विमाओं के लिए अभिप्रेत प्रतिबंध प्रवर्तित करते हैं। एक अल्पनिर्धारित अनुकूलन संख्यात्मक रूप से अभिसरित होकर भी अनन्य न रह सकता है।

डैशबोर्ड और निदान 84 डैशबोर्ड फलन-मूल्यांकनों को स्वीकृत पुनरावृत्तियों से अलग करता है और निम्न प्रदर्शित करता है:

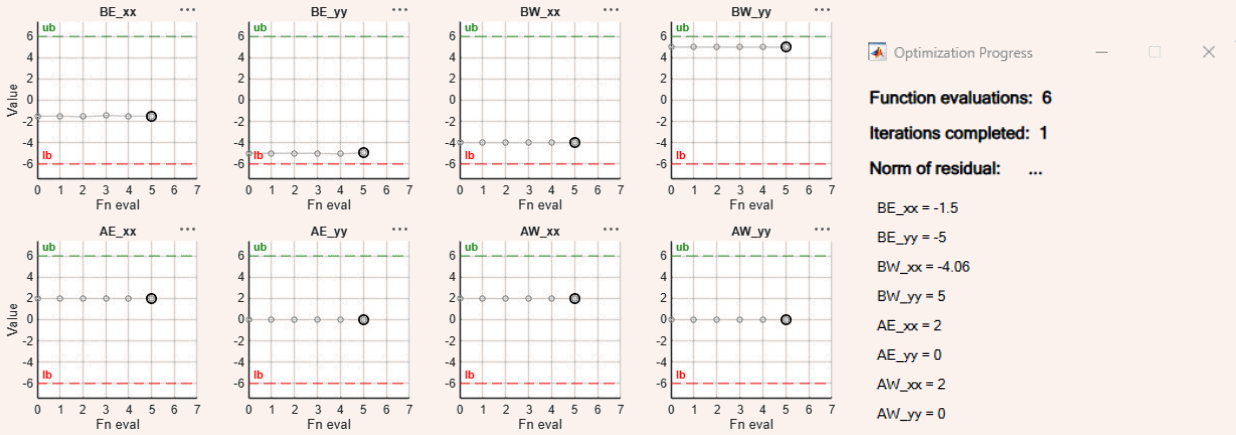
- रैखिक मापक्रम पर पूर्वानुमान-से-लक्ष्य अनुपात;
- लघुगणकीय मापक्रम पर निरपेक्ष अवशेष;
- प्रत्येक प्राचल का विकास;
- पुनरावृत्ति 0 के लिए विशिष्ट चिह्नक और स्वीकृत पुनरावृत्तियों के लिए पृथक चिह्नक।

85 अभिसरण का निर्णय केवल अवशेष मानक से नहीं करना चाहिए। अंतिम समीक्षा में निर्गमन ध्वज,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) बारह पूर्वानुमानित लक्ष्य और संबद्ध अवशेष



(b) आठ चर

(c) तात्कालिक स्थिति अद्यतन

चित्र 65.7: लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट अरैखिक न्यूनतम-वर्ग अनुकूलन का डैशबोर्ड: 12 पूर्वानुमानित लक्ष्य और 8 चर।

परिसीमाओं के सापेक्ष प्राचल-स्थान, अवशेष प्रतिरूप, प्राचल-सहसंबंध अथवा जैकोबियन एकल मान, आरंभिक अनुमान के प्रति संवेदनशीलता और उन प्रेक्षणों के विरुद्ध वैधीकरण सम्मिलित होना चाहिए जो अंशांकन में प्रयुक्त नहीं हुए।

अनुशंसित चालन-पश्च अभिनिर्धारणीयता निदान [86] निर्गम के रूप में अनुरोधित होने पर `lsqnonlin` अंतिम बिंदु पर अवशेष जैकोबियन लौटाता है। निम्न राशियाँ अनुकूलित प्राचलों के साथ संग्रहित की जानी चाहिए:

- भारित अथवा प्रसामान्यीकृत जैकोबियन की संख्यात्मक कोटि और एकल मान;
- उसकी प्रतिबंध संख्या तथा निकट-कोटि-न्यूनता घोषित करने में प्रयुक्त सीमांत;

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- जब स्थानीय रैखिक मान्यताएँ प्रतिरक्षणीय हों, तब सन्निकट प्राचल सहप्रसरण अथवा सहसंबंध आव्यूह;
- वैकल्पिक आरंभिक अनुमानों, परिमित-अंतर चरणों और ग्राह्य परिसीमाओं के अधीन हल में परिवर्तन;
- दुर्बल अभिनिर्धारणीयता के संदेह वाले प्राचलों के लिए प्रोफाइल आलेख अथवा प्रतिबंधित पुनः-अनुकूलन।

[87] ये निदान प्रतिवेदन कार्यप्रवाह के अनुशंसित विस्तार हैं; जब तक संगत कूट कार्यान्वित और सत्यापित न हो, इन्हें स्वचालित निर्गम नहीं कहना चाहिए।

तालिका 65.2: प्राचल-अभिनिर्धारण कार्यक्रम के प्रमुख फलन

फलन	प्रयोजन
`readInputSheet`	समस्त कुंजीशब्द-आधारित विन्यास पढना और संरचना S बनाना।
`extractEvaluateValues`	$\mathbf{x}_0$, निम्न परिसीमाएँ और ऊपरी परिसीमाएँ मेल खाती `EVALUATE` पंक्तियों से पढना।
`createTempInputFile`	विस्तारक से पहले `_temp` जोडकर कार्यशील प्रति बनाना।
`updateEvaluateValues`	अस्थायी निवेश में प्राचल-मान बदलना; शुष्क चालन के समय वैकल्पिक मौन विधा प्रयुक्त होती है।
`runAnalysis`	FEAP को समकालिक रूप से आरंभ करना और उसकी स्थिति तथा कंसोल निर्गम लौटाना।
`readModelPredValues`	निर्गम का पदच्छेदन करना और `modelPred` से संरेखित अनुश्रवक मान लौटाना।
`initPISheet`	अगला पंक्ति-वार `PI #n` पत्रक बनाना और पुनरावृत्ति 0 लिखना।
`logIterationToSheet`	पुनरावृत्ति संख्या, समय, प्राचल, अनुपात और अवशेष जोडना।
`runLSQnonlin`	`lsqnonlin` का विन्यास और निष्पादन करना।
`updatePlots`	अवशेष और प्राचल डैशबोर्ड बनाना तथा अद्यतन करना।

सार्वजनिक फलन

तालिका 65.3: विस्तृत-पत्रक पाठक और समुच्चयन स्तर द्वारा प्रयुक्त निजी सहायक फलन

फलन	प्रयोजन
`readScalarByKey`	कुंजी खोजना और उसके दाईं ओर का प्रथम अरिक्त मान लौटाना।
`readTextVectorByKey`	कुंजी के दाईं ओर के सभी अरिक्त पाठ-मान लौटाना।
`readNumericVectorByKey`	कुंजी के दाईं ओर के सभी अरिक्त संख्यात्मक मान लौटाना।
`buildFieldAggFunctions`	छिपे मापक्रमण के बिना विस्तृत-पत्रक समुच्चयन व्यंजकों को फलन हैंडल में संकलित करना।
`findKey`	कच्चे कार्यपत्रक कोष्ठों में अक्षर-स्थिति से निरपेक्ष कुंजी ढूँढना।
`isMissingLike`	कार्यान्वयन के अनुसार रिक्त, अनुपस्थित, कोरे अथवा अपरिमित विस्तृत-पत्रक प्रविष्टियों को पहचानना।
`toText`	प्रसामान्यीकृत तुलना के लिए कार्यपत्रक मान को पाठ में बदलना।
`normalizeText`	अपरिवर्तनीय रिक्तियों को हटाने सहित रूपांतरित पाठ को प्रसामान्यीकृत करना।

निजी सहायक फलन

प्रमुख आँकडा-संरचनाएँ और चालन-कालीन चर

नई अभिनिर्धारण समस्या जोडना

1. ATENA निवेशिका और निर्गम फ़ाइलों को बदलें अथवा पुनः नामित करें।
2. `Log.xlsx` में `exeName`, `inpFile`, और `outFile` अद्यतन करें।
3. प्राचल-नाम, अनुश्रवक प्रत्यय, समुच्चयन व्यंजक और लक्ष्य मापन प्रविष्ट करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 65.4: विन्यास संरचना `S` के प्रमुख क्षेत्र

क्षेत्र	प्रकार	प्रयोजन
`exeName`, `inpFile`, `outFile`	पाठ	हलकर्ता निष्पाद्य और निवेशिका/निर्गम फ़ाइल-नाम
`modelPar`	सूची	FEAP निवेशिका फ़ाइल में अद्यतन किए जाने वाले प्राचल-नाम
`modelPred`	सूची	FEAP निर्गम से निकाले जाने वाले अनुशृरवक-नाम
`fieldAggExpr`	सूची	पूर्वानुमानों के समुच्चयन और मात्रक-रूपांतरण में प्रयुक्त विस्तृत-पत्रक व्यंजक
`fieldAggValues`	सदिश	लक्ष्य मापन
`fieldAggFcn`	सूची	समुच्चयन व्यंजकों के संगत संकलित फलन हैंडल
`maxFunEval`, `maxIter`	अदिश	अनुकूलक सीमाएँ
`tolFun`, `tolX`	अदिश	फलन और आंतरिक रूप से प्रसामान्यीकृत चरण सहिष्णुताएँ
`algorithm`, `display`	पाठ	अनुकूलक कलनविधि और प्रदर्शन विधा
`lb`, `ub`	सदिश	निम्न और ऊपरी प्राचल-परिसीमाएँ अथवा अनुशंसित परास

तालिका 65.5: `ParIdentification.m` में चयनित चालन-कालीन चर

चर	प्रकार	प्रयोजन
`x0`, `lb`, `ub`	सदिश	निवेशिका फ़ाइल से पढ़े आरंभिक प्राचल और ग्राह्य सीमाएँ
`inpFileTemp`	पाठ	प्रत्येक मूल्यांकन पर अधिलेखित अस्थायी FEAP निवेशिका फ़ाइल
`piSheetName`	पाठ	वर्तमान पंक्ति-वार अभिनिर्धारण-अभिलेख पत्रक
`nFnEval`, `nIter`	पूर्णांक	फलन-मूल्यांकन और पहचानी गई पुनरावृत्ति गणित्र
`X`	आव्यूह	प्राचल इतिहास
`predictedLast`, `resLast`	सदिश	नवीनतम समुच्चयित पूर्वानुमान और अवशेष
`x`, `resnorm`, `res`	निर्गम	अंतिम प्राचल, अवशेष मानक और अवशेष सदिश
`exitflag`, `output`	निर्गम	समाप्ति कारण और अनुकूलक सांख्यिकी

4. मात्रक सत्यापित करें और प्रत्येक रूपांतरण को `fieldAggExp` में स्पष्ट रूप से सम्मिलित करें।
5. जाँचें कि प्रत्येक अभिनिर्धारित प्राचल का निवेशिका फ़ाइल में प्रतिरक्षणीय आरंभिक मान और परास हो।
6. अप्रेक्षित अनुकूलन को जारी रखने से पहले शुष्क चालन करें और सभी अवशेषों की जाँच करें।
7. अभिसरण के बाद वैकल्पिक आरंभिक मानों से चालन दोहराएँ और अंशांकित प्रतिरूप को स्वतंत्र रूप से वैधीकृत करें।

[88] जब नई समस्या समान निवेश और निर्गम परिपाटियों का अनुसरण करे, तब MATLAB कूट में परिवर्तन आवश्यक नहीं होना चाहिए। हलकर्ता प्रारूप, अनुशृरवक पदच्छेदक, भारण नियम अथवा अनुकूलन तर्क बदलने पर कूट परिवर्तन आवश्यक है।

अभिकल्प निर्णय और सीमाएँ

पंक्ति-वार अभिलेखन: पूर्व स्तंभ-वार व्यवस्था की तुलना में प्रति पुनरावृत्ति एक पंक्ति को छानना, आलेखित करना और निर्यात करना सरल है।

पुनरावृत्ति 0 के रूप में शुष्क चालन: अनुकूलन से पहले संपूर्ण बाहरी-हलकर्ता शृंखला का अभ्यास होता है, जबकि परिणाम औपचारिक अनुकूलक इतिहास से दृश्य रूप से अलग रहता है।

स्पष्ट मात्रक मापक्रमण: प्रत्येक रूपांतरण `fieldAggExp` में अभिलिखित होता है; MATLAB फलन कोई छिपा मापक्रम गुणक नहीं जोड़ते।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विस्तृत-पत्रक-चालित विन्यास: फ़ाइल और अनुश्रवक परिपाटियाँ संगत होने पर वही कूट भिन्न प्रतिरूपों के लिए प्रयुक्त हो सकता है।

पुनरावृत्ति पहचान: फलन-मूल्यांकन गणनाओं से पुनरावृत्तियों का अनुमान सन्निकट है, विशेषतः केंद्रीय अंतर, अस्वीकृत चरण अथवा कलनविधि परिवर्तन होने पर। दीर्घकालीन कार्यान्वयन के लिए निर्गम फलन वरीय है।

बाहरी प्रक्रिया विश्वसनीयता: अवशेष स्वीकार करने से पहले प्रत्येक FEAP चालन की निर्गमन स्थिति, अपेक्षित निर्गम निर्माण, फ़ाइल की नवीनता और परिमित अनुश्रवक मानों के लिए जाँच होनी चाहिए।

65.7 संकर कार्यप्रवाह और सर्वोत्तम व्यवहार

65.7.1 अंशांकन और वैधीकरण

89 अंशांकन प्राचलों के आकलन के लिए प्रेक्षणों का प्रयोग करता है। वैधीकरण अंशांकित प्रतिरूप को स्वतंत्र प्रेक्षणों, भारण-पथों, स्थानों अथवा समय-अवधियों के विरुद्ध परखता है। दोनों कार्यों के लिए समान आँकड़ों का पुनः प्रयोग अनुकूलन मापता है, पूर्वानुमान क्षमता नहीं। आँकड़ा-समुच्चय छोटा होने पर अतिअनुकूलन प्रकट करने के लिए परस्पर-वैधीकरण, रोके गए संवेदक अथवा पृथक प्रायोगिक चरण का प्रयोग करना चाहिए।

65.7.2 संरचनात्मक अनुप्रयोग

90 प्राचल अभिनिर्धारण विधियाँ संरचनात्मक अभियांत्रिकी के संपूर्ण जीवन-चक्र में लागू होती हैं:

- **संघटक अंशांकन:** प्रयोगशाला प्रतिक्रियाओं पर भौतिक अर्थ वाले प्राचल अनुकूलित करें, फिर भिन्न भारण-पथों के अधीन वैधीकृत करें।
- **संरचनात्मक स्वास्थ्य अनुश्रवण:** संवेदक-गुणवत्ता और पर्यावरणीय प्रभावों को ध्यान में रखते हुए आवृत्तियों, विधा-आकारों, विकृतियों, विस्थापनों अथवा दीर्घकालीन प्रवृत्तियों से परिमित अवयव प्रतिरूप अद्यतन करें।
- **जीर्ण होती अवसंरचना:** ह्रास के आयाम, दर और स्थानिक परिवर्तन का अनुमान करने के लिए क्षेत्रीय आँकड़ों को पूर्व ज्ञान से संयोजित करें।
- **भूकंपीय माँग और भंगुरता:** प्राचल-अनिश्चितता को माँग प्रतिरूपों, सीमा-अवस्था संभाव्यताओं और भंगुरता फलनों में प्रसारित करें।
- **क्रमिक अद्यतन:** नए प्रेक्षण आने पर बायेसियन छनित्रों अथवा पुनरावृत्त खेप-अंशांकन द्वारा उन्हें आत्मसात करें।

65.7.3 कार्यप्रवाह निर्णय ढाँचा

91 एक व्यावहारिक संकर कार्यप्रवाह अनेक रणनीतियों को क्रमशः संयोजित कर सकता है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

1. **आँकड़ा शोधन:** यदि अपवादियों अथवा स्थूल संदूषण का संदेह हो, तो अंतःस्थ आँकड़ों का दृढ सर्वसम्मति समुच्चय पहचानने के लिए RANSAC (Section 65.3.2) लागू करें।
2. **आरंभिक अंशांकन:** आरंभिक प्राचल आकलन प्राप्त करने और अभिनिर्धारणीयता समस्याओं की छँटाई के लिए शोधित आँकड़ों पर लेवेनबर्ग–मार्क्वार्ट (Section 65.4) का प्रयोग करें।
3. **स्वतंत्र वैधीकरण:** अंशांकित प्रतिरूप को रोके गए आँकड़ों अथवा भिन्न भारण स्थितियों के विरुद्ध परखें।
4. **पश्च-अनिश्चितता:** यदि प्राचल-अनिश्चितता अनुवर्ती निर्णयों को तात्त्विक रूप से प्रभावित करती हो, तो पश्च-वितरणों, विश्वसनीयता-अंतरालों और पूर्व मान्यताओं के प्रति संवेदनशीलताओं के परिमाणन के लिए बायेसियन अनुमान (Section 65.5) प्रयुक्त करें।
5. **लेखापरीक्षा अनुक्रम:** पुनरुत्पादकता और सहकर्मी समीक्षा के लिए आँकड़ा अपवर्जनों, भारों, पूर्व-वितरणों, प्रतिरूप संस्करणों और अभिसरण निदानों के अभिलेख सुरक्षित रखें।

92 प्रत्येक चरण में प्रतिरूपण विकल्पों और परिणामों का प्रलेखित साक्ष्य सुरक्षित रहना चाहिए। यह अनुशासन वैज्ञानिक कठोरता और हितधारकों के साथ व्यावहारिक संचार दोनों को सुधारता है।

65.8 आँकड़ों, संशयों और निर्णयों से निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी तक

93 अंतिम अनुभाग का प्रयोजन संश्लेषण है। Chapter 64 ने स्थापित किया कि अनिश्चित निवेश और आँकड़ा-गुणवत्ता संरचनात्मक पूर्वानुमानों को कैसे प्रभावित करते हैं; वर्तमान अध्याय ने स्थापित किया कि चयनित प्राचलों का प्रेक्षणों से अनुमान कैसे किया जाता है। दोनों मिलकर भूकंपविज्ञान (Chapter 67), उन्नत गणनात्मक विश्लेषण (Chapter 69), भूकंपीय संकट आकलन (Chapter 70) और अंततः PBEE (Chapter 72) पर आगामी अध्यायों के लिए पद्धतिगत सेतु प्रदान करते हैं।

94 निष्पादन-आधारित भूकंपीय अभिकल्प इसलिए उभरा क्योंकि केवल संहिता-अनुपालन यह नहीं बताता कि किसी विशिष्ट संरचना से किस निष्पादन की अपेक्षा है, कौन-सी क्षति संभाव्य है अथवा उसके क्या परिणाम होंगे (Hamburger et al., 2004)। PBEE को स्थल संकट, संरचनात्मक प्रतिक्रिया, क्षति और परिणामों को जोड़ने वाली प्रतिरूप-शृंखला अपेक्षित है। प्रत्येक कड़ी में अनिश्चितता होती है और अनेक कड़ियों में ऐसे प्राचल होते हैं जिन्हें प्रयोगशाला अथवा क्षेत्रीय साक्ष्य से अंशांकित करना आवश्यक है।

95 Figure 65.8 में संक्षेपित कार्यप्रवाह है:

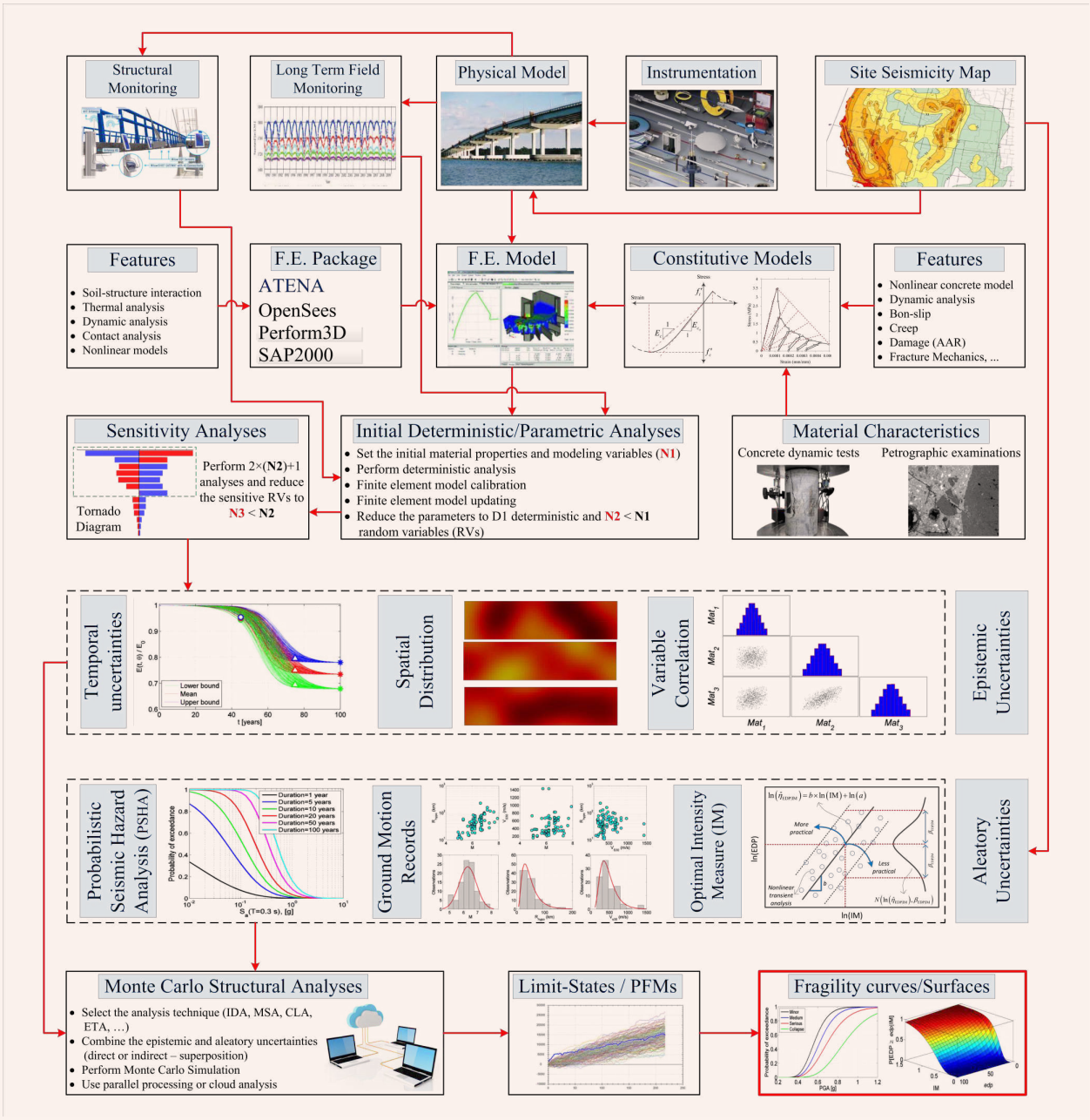
स्थल अभिलक्षणन: स्थल भूकंपिता प्रतिरूप, भौतिक अभिलक्षण, उपकरण-व्यवस्था, दीर्घकालीन अनुश्रवण अभिलेख और उपयोगी होने पर बलात्-कंपन-परीक्षण आँकड़े स्थापित करें।

परिमित अवयव प्रतिरूप: अपेक्षित विश्लेषण विशेषताएँ, संघटक प्रतिरूप, सामग्री-विवरण, सीमा प्रतिबंध और गणनात्मक मंच चुनें। प्रतिरूप-रूप मान्यताओं को स्पष्ट रूप से अभिलिखित करें।

आरंभिक नियतात्मक विश्लेषण: प्रसंभाव्य निवेश अथवा अनुकूलन प्रस्तुत करने से पहले संतुलन, मात्रक, सीमा प्रतिबंध और प्रमुख प्रतिक्रिया-क्रियाविधियाँ सत्यापित करें।

संवेदनशीलता छँटाई: प्रत्याशी निवेशों को विश्वसनीय परास अथवा वितरण निर्दिष्ट करें। अल्प-

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 65.8: स्थल अभिलक्षणन, प्रतिरूप विकास, अनिश्चितता, प्राचल अभिनिर्धारण, संरचनात्मक विश्लेषण और भंगुरता आकलन का एकीकरण

लागत प्रारंभिक अध्ययन एक-समय-पर-एक $2N+1$ मूल्यांकन और टॉर्नेडो आरेख का प्रयोग कर सकता है; उच्च-विमीय अरैखिक समस्या की छँटाई Morris द्वारा बेहतर होती है। यदि छँटाई के बाद मात्रात्मक प्रसरण-आबंटन अपेक्षित हो, तो संक्षिप्त समुच्चय पर Sobol सूचकांक लागू करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्राचल अभिनिर्धारण: प्रभावशाली और व्यावहारिक रूप से अभिनिर्धारणीय प्राचलों के अंशांकन के लिए मापनों का प्रयोग करें। मापन-अनिश्चितता के अनुसार अवशेषों को भारित करें, जैकोबियन कोटि और प्राचल-सहसंबंध जाँचें, स्थूल अपवादी संभाव्य होने पर दृढ विधियों का प्रयोग करें और अंशांकित प्रतिरूप को स्वतंत्र रूप से वैधीकृत करें।

ज्ञानात्मक अनिश्चितता: सामग्री-गुणों, स्थानिक क्षेत्रों, सीमा प्रतिबंधों, ह्रास-अवस्थाओं, अंशांकित प्राचलों और प्रतिरूप-विसंगति के अपूर्ण ज्ञान को निरूपित करें। सहप्रसरण प्रतिरूपों अथवा संयुक्त वितरणों द्वारा निर्भरता सुरक्षित रखें।

यादृच्छिक अनिश्चितता: अंतर्निहित परिवर्तनशीलता, विशेषतः घटना-से-घटना और अभिलेख-से-अभिलेख भू-गति परिवर्तनशीलता को निरूपित करें। संभाव्य भूकंपीय संकट विश्लेषण संकट-वक्र प्रदान करता है; तत्पश्चात उपयुक्त अभिलेख और तीव्रता-माप चुने जाते हैं। संबंधित स्रोतों के लिए (PEER, 2014; Padgett, Nielson, and DesRoches, 2008) देखें।

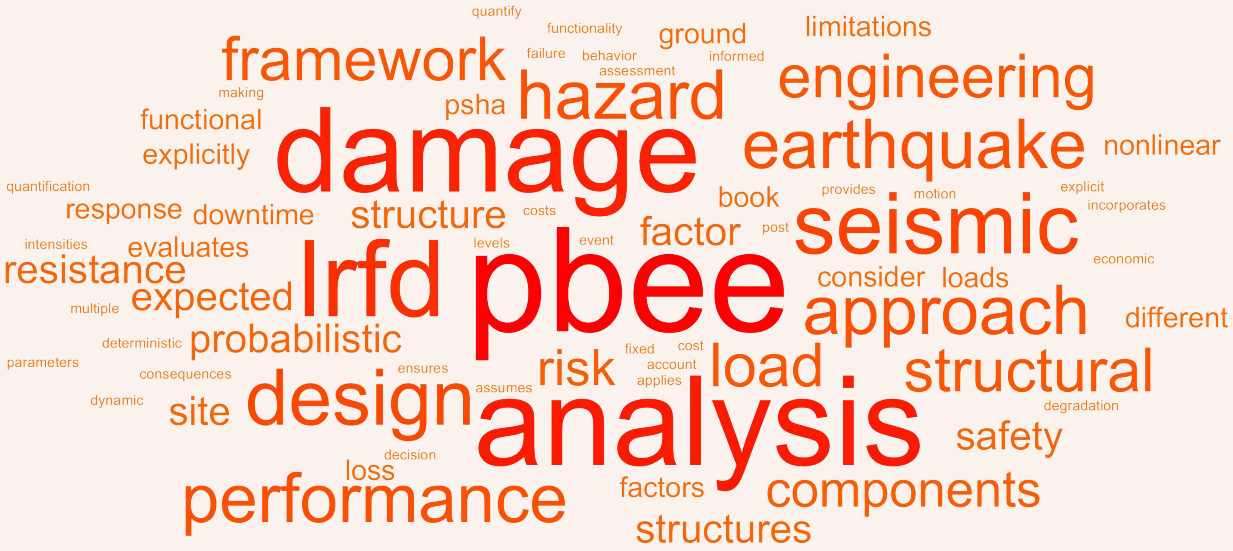
संभाव्य संरचनात्मक विश्लेषण: मोंटे कार्लो, LHS, प्रतिपूरकों अथवा अन्य सत्यापित विधियों का प्रयोग करके अरैखिक विश्लेषणों में ज्ञानात्मक और यादृच्छिक अनिश्चितता प्रसारित करें। प्रभावशाली अनिश्चितता-स्रोतों को छोड़कर गणनात्मक मितव्ययिता प्राप्त नहीं करनी चाहिए।

क्षमता और क्षति फलन: यांत्रिकी, प्रयोगों, प्रेक्षणों और अंशांकित प्रतिक्रिया-राशियों का प्रयोग करके सीमा अवस्थाएँ और संभावित विफलता विधाएँ परिभाषित करें।

भंगुरता और निष्पादन: भंगुरता-वक्र अथवा पृष्ठ बनाएँ और जोखिम-सूचित निर्णयों के समर्थन के लिए उन्हें संकट तथा परिणाम प्रतिरूपों से संयोजित करें।

[96] यह क्रम कठोरतः एकमार्गी नहीं है। नए अनुश्रवण आँकड़े पुनः-अंशांकन प्रेरित कर सकते हैं; संवेदनशीलता विश्लेषण अतिरिक्त मापनों की आवश्यकता प्रकट कर सकता है; वैधीकरण प्रतिरूप-विसंगति उजागर कर सकता है; और PBEE परिणाम पहचान सकते हैं कि कौन-सी अनिश्चितता निर्णय को सर्वाधिक प्रभावित करती है। अगले अध्याय इस चक्र को पूर्ण करने के लिए अपेक्षित संकट और विश्लेषण घटक प्रदान करते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

66 अंतराल

सारांश

यह अध्याय पारंपरिक भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) और निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) के बीच संक्रमण का कार्य करता है। जहाँ LRFD एक नियतात्मक सुरक्षा ढाँचा प्रदान करता है, वहीं इसमें स्पष्ट क्षति-आकलन और जोखिम-परिमाणन का अभाव है।

PBEE संकट विश्लेषण, संरचनात्मक प्रतिक्रिया-मूल्यांकन, क्षति-आकलन और हानि-आकलन को एक एकीकृत, जोखिम-सूचित उपागम में सम्मिलित करके इन सीमाओं को पार करता है।

यह अध्याय PBEE अपनाने की प्रेरणा प्रस्तुत करता है और पुस्तक की उस संरचना का परिचय देता है जो क्रमबद्ध रूप से एक व्यापक "नीचे-से-ऊपर" PBEE ढाँचे की ओर बढ़ती है।

66.1 भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) की सीमाएँ 2207
66.2 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) की ओर क्यों बढ़ें? 2208
66.3 PBEE के चार घटक 2209
66.4 पुस्तक की संरचना 2209

66.1 भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) की सीमाएँ

1 भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD), §36.3, संरचनात्मक अभियांत्रिकी में, विशेषतः इस्पात और कंक्रीट अभिकल्प के लिए, व्यापक रूप से प्रयुक्त पद्धति है। यद्यपि यह भारों और सामग्री-गुणों की अनिश्चितताओं को ध्यान में रखने के लिए संभाव्य ढाँचा प्रदान करता है, इसकी अनेक सीमाएँ हैं जो निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) की ओर संक्रमण आवश्यक बनाती हैं:

एकल-स्तरीय सुरक्षा जाँच LRFD सुनिश्चित करता है कि संरचनाएँ पूर्वनिर्धारित गुणकित भारों के अधीन सुरक्षित रहें, किंतु सामर्थ्य और सेवनीयता से परे निष्पादन मानदंडों, जैसे भूकंप-पश्च मरम्मतयोग्यता अथवा निष्क्रियता-अवधि, पर स्पष्ट रूप से विचार नहीं करता।

स्पष्ट क्षति-विचार का अभाव: LRFD सुनिश्चित करता है कि कोई संरचना चरम सीमा अवस्थाओं के अधीन न गिरे, किंतु भिन्न भूकंप तीव्रताओं के अधीन अपेक्षित क्षति का परिमाणन नहीं करता। LRFD के अनुसार अभिकल्पित संरचनाओं को किसी भूकंपीय घटना में पर्याप्त क्षति हो सकती है, जिससे उच्च मरम्मत-लागत अथवा कार्यक्षमता की हानि हो सकती है।

जटिल भारण परिदृश्यों के लिए अनम्यता: LRFD रैखिक गुणक-आधारित उपागम पर आधारित है, जो अरैखिक व्यवहार, ह्रास अथवा संचयी क्षति पर स्पष्ट रूप से विचार नहीं करता। यह नियत भार-संयोजन मानता है, जबकि भूकंपीय क्रियाएँ गतिक होती हैं और उनकी तीव्रता, अवधि तथा आवृत्ति-अंश बदलते हैं।

जोखिम-आधारित अभिकल्प के स्थान पर एकसमान सुरक्षा-सीमांत: LRFD सामान्य प्रतिरोध गुणक लागू करता है जो स्थल- अथवा संरचना-विशिष्ट नहीं होते। यह विफलता के अधिक परिणाम वाली

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

संरचनाओं (जैसे, अस्पताल बनाम भंडारगृह) में भेद नहीं करता। अत्यंत भिन्न भूकंपीय जोखिम वाले क्षेत्रों पर वही अभिकल्प दर्शन लागू होता है।

भू-गति में chap:trustregion को समाहित करने की अक्षमता: LRFD भार गुणकों का नियतात्मक समुच्चय मानता है, जबकि भूकंप अत्यधिक परिवर्तनशील माँग उत्पन्न करते हैं। यह स्थल-विशिष्ट संकट परिवर्तनशीलता के परिमाणन के लिए संभाव्य भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA) सम्मिलित नहीं करता।

66.2 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) की ओर क्यों बढ़ें?

2 निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) निर्देशात्मक, संहिता-आधारित उपागम से हटकर अनेक भूकंपीय तीव्रताओं के अधीन संरचनाओं का मूल्यांकन करने वाले जोखिम-सूचित ढाँचे को अपनाकर इन सीमाओं का समाधान करती है। प्रमुख लाभों में निम्न सम्मिलित हैं:

स्पष्ट निष्पादन उद्देश्य: केवल सामर्थ्य और सेवनीयता की जाँच के स्थान पर PBEE अनेक निष्पादन स्तरों का मूल्यांकन करती है:

- **प्रचालनात्मक (O)**: कोई पर्याप्त क्षति नहीं, संरचना कार्यशील रहती है।
- **तत्काल अधिभोग (IO)**: अल्प क्षति, पूर्णतः मरम्मतयोग्य।
- **जीवन सुरक्षा (LS)**: मध्यम क्षति, मरम्मतयोग्य किंतु तत्काल कार्यशील नहीं।
- **पतन निवारण (CP)**: गंभीर क्षति किंतु कोई वैश्विक विफलता नहीं।

आर्थिक और कार्यात्मक परिणामों का प्रत्यक्ष परिमाणन: PBEE निम्न का आकलन करके लागत-आधारित निर्णय-निर्माण सम्मिलित करती है:

- अपेक्षित मरम्मत-लागत।
- अपेक्षित निष्क्रियता-अवधि।
- अपेक्षित जनहानि।

संभाव्य भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA) द्वारा जोखिम-आधारित अभिकल्प: PBEE नियत भार गुणकों के स्थान पर स्थल-विशिष्ट भू-गति संकट-वक्र सम्मिलित करती है, जिससे अभिकल्प वास्तविक भूकंपीय जोखिम को प्रतिबिंबित कर पाते हैं।

अरैखिक विश्लेषण और यथार्थवादी संरचनात्मक व्यवहार: PBEE अरैखिक काल-इतिहास विश्लेषण (NLTHA) पर निर्भर करती है और क्षति-प्रगति, पराभव तथा ह्रास को समाहित करती है, जिन्हें LRFD समाहित नहीं करता।

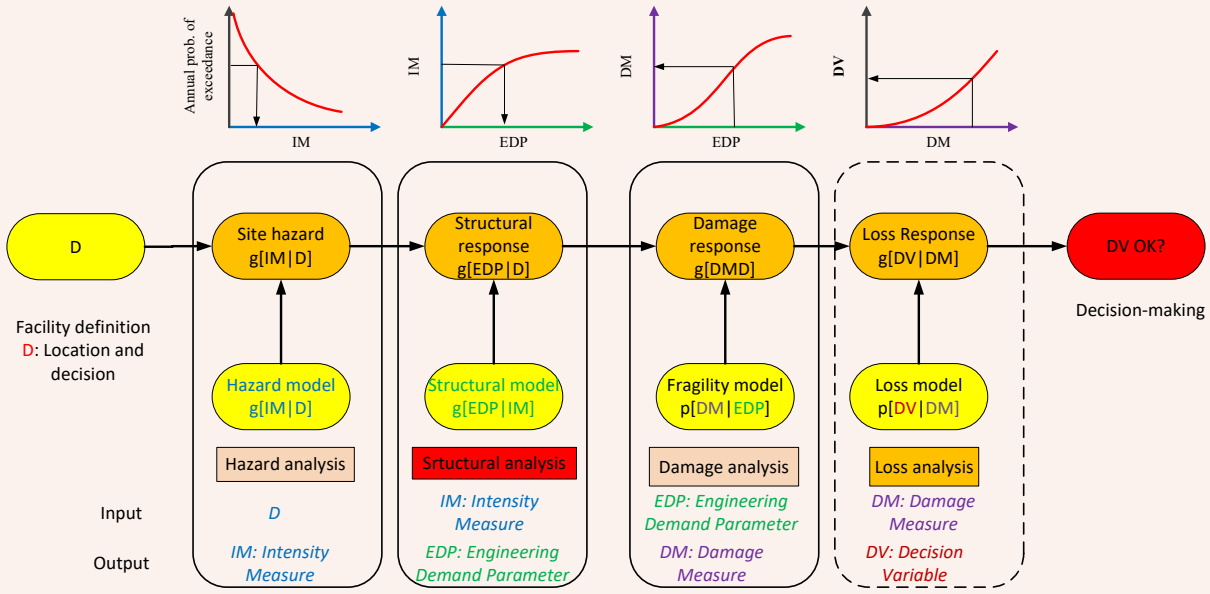
प्रत्यास्थता-उन्मुख उपागम; LRFD भूकंप-पश्च कार्यक्षमता पर स्पष्ट रूप से विचार नहीं करता, जबकि PBEE अभियंताओं को घटना के बाद तीव्र पुनर्प्राप्ति के लिए अभिकल्प करने देती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

66.3 PBEE के चार घटक

PBEE चार परस्पर संबद्ध घटकों के चारों ओर संरचित है, जैसा Fig. 66.1 में दर्शाया गया है:

1. **संकट विश्लेषण:** किसी दिए गए स्थल पर भू-कंपन के भिन्न स्तर अनुभव होने की संभाव्यता का परिमाणन *संभाव्य भूकंपीय संकट विश्लेषण* (PSHA), chapter 67, द्वारा करता है।
2. **संरचनात्मक विश्लेषण:** *अरैखिक गतिक विश्लेषण* और अभियांत्रिकी माँग प्राचलों (EDPs), chapter 69, को सम्मिलित करते हुए भूकंपीय भारों के प्रति संरचनात्मक प्रतिक्रिया का मूल्यांकन करता है।
3. **क्षति विश्लेषण:** *संरचनात्मक और असंरचनात्मक घटकों*, chapter 70, की भौतिक क्षति के आकलन हेतु प्रतिक्रिया-प्राचलों का प्रयोग करता है।
4. **हानि विश्लेषण:** क्षति को *आर्थिक हानियों, निष्क्रियता-अवधि और जनहानि आकलनों*, chapter 71, में बदलता है और लागत-आधारित निर्णय-निर्माण संभव बनाता है।



चित्र 66.1: PBEE के चार घटक

66.4 पुस्तक की संरचना

PBEE प्रस्तुत करने के दो संभावित उपागम हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. ऊपर-से-नीचे उपागम: पहले PBEE का सामान्य अवलोकन दें, फिर चारों घटकों पर अलग-अलग चर्चा करें।
2. नीचे-से-ऊपर उपागम: पहले प्रत्येक घटक का विस्तार से अन्वेषण करें, फिर PBEE ढाँचे में उनका संश्लेषण करें।

[5] यह पुस्तक *नीचे-से-ऊपर उपागम* अपनाती है। तदनुसार अगले चार अध्याय संकट विश्लेषण, संरचनात्मक विश्लेषण, क्षति विश्लेषण और हानि विश्लेषण का अलग-अलग परीक्षण करेंगे। अंतिम अध्याय फिर इन तत्त्वों को एकीकृत करेगा और PBEE ढाँचे की **परिणति बनाएगा।

प्रारूप

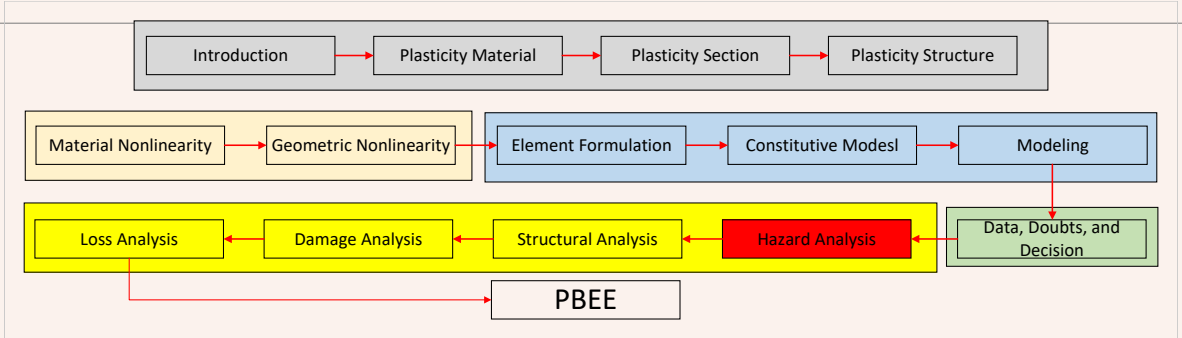
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

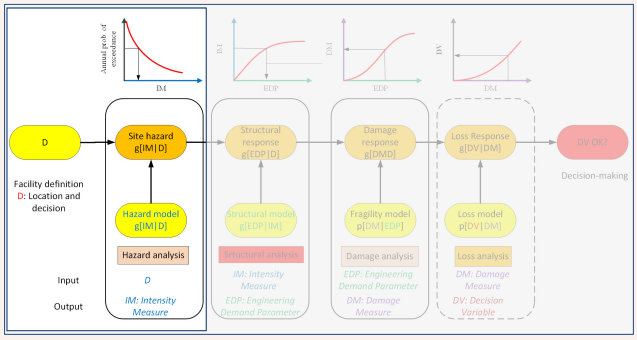
67 संकट विश्लेषण

सारांश

यह अनुभाग भूकंप अभियांत्रिकी के एक अंग के रूप में भूकंपीय संकट विश्लेषण के मूल सिद्धांत समझाता है। Elnashai and Di Sarno, 2015 के अनुसार, भूकंप अभियांत्रिकी अभियांत्रिकी की वह शाखा है जो भूकंप के परिणामों के आकलन और इन परिणामों के शमन से संबंधित है। यह एक अंतर्विषयी विषय है जिसमें भूकंपविज्ञानी, संरचनात्मक और भू-तकनीकी अभियंता, वास्तुकार, नगर नियोजक, सूचना प्रौद्योगिकीविद् और सामाजिक वैज्ञानिक सम्मिलित हैं।

67.1 परिचय 2212
67.2 पुनरावृत्ति संबंध 2212
67.3 क्षीणन प्रतिरूप 2215
67.3.1 मूल सिद्धांत 2215
67.3.2 Boore, Joyner और Fumel (1997) 2215
67.3.3 प्राचलीय मूल्यांकन 2217
67.4 नियतात्मक भूकंपीय संकट विश्लेषण . . . 2218
67.5 प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण 2219
67.6 घटना-समय 2221
67.7 भूकंपीय संकट-वक्र 2222
67.8 भूकंपीय संकट-मानचित्र 2224
67.9 भूकंपीय संकट वियोजन 2224
67.10 लक्ष्य प्रतिक्रिया-वर्णक्रम 2225
67.11 यादृच्छिक भू-गति अनुकरण 2229
67.11.1 Rezaeian और Der Kiureghian (r-d) प्रतिरूप 2230
67.11.2 Yamamoto और Baker (y-b) प्रतिरूप 2231
67.12 सहन-अवधि उत्तेजन फलन 2233
67.12.1 ETEF की प्रथम पीढ़ी 2234
67.12.2 ETEF की द्वितीय पीढ़ी 2234
67.12.3 ETEF की तृतीय पीढ़ी 2236
67.12.4 ETEF की चतुर्थ पीढ़ी 2236
67.12.5 ETEF की पंचम पीढ़ी 2237
67.13 उदाहरण 67.1: भूकंपीय संकट विश्लेषण 2239





संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

M. Amin Hariri-Ardebili द्वारा *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* में लिखित, Saouma and Hariri-Ardebili, 2021

67.1 परिचय

किसी क्षेत्र से संबद्ध भूकंपीय जोखिम 1) भू-कंपन का निश्चित स्तर उत्पन्न करने वाले भूकंप के घटित होने की संभाव्यता (भूकंपीय संकट) और 2) निर्मितियों की संरचनात्मक सुभेद्यता पर निर्भर करता है। भूकंपीय संकट विश्लेषण के लिए दो पृथक प्रतिरूप अपेक्षित हैं:

- भूकंपिता प्रतिरूप (पुनरावृत्ति संबंध/नियम): संभावित सक्रिय स्रोत क्षेत्रों (भूकंप-विवर्तनिक स्रोतों) के भौगोलिक वितरण और प्रत्येक स्रोत में परिमाणों के वितरण का वर्णन करता है।
- क्षीणन प्रतिरूप: किसी दिए गए स्थल पर विशिष्ट भूकंप-विवर्तनिक स्रोत से उत्पन्न भूकंप के प्रभाव का परिमाण और स्रोत-से-स्थल दूरी के फलन के रूप में वर्णन करता है।

67.2 पुनरावृत्ति संबंध

पुनरावृत्ति संबंध किसी निश्चित कालावधि, जैसे एक वर्ष, के दौरान दिए गए स्रोत में दिए गए आकार का भूकंप घटित होने की संभाव्यता व्यक्त करते हैं। Gutenberg and Richter, 1954 का आवृत्ति-परिमाण संबंध चित्र 67.1 के रूप में व्यक्त होता है:

$$\ln N_M = a - b\,M$$
$$\log N_M = a' - b'\,M$$

जहाँ a और b प्रतिरूप स्थिरांक हैं जिनका मूल्यांकन भूकंपवैज्ञानिक प्रेक्षणात्मक आँकड़ों से न्यूनतम-वर्ग अनुकूलन द्वारा किया जा सकता है। N_M प्रति समय-मात्रक और क्षेत्रफल-मात्रक में M से अधिक अथवा उसके बराबर परिमाण वाले भूकंपों की संख्या है। a और a' तथा b और b' के बीच संबंध है:

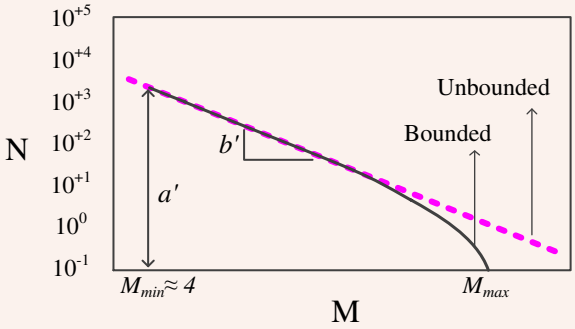
$$a = 2.3025a', \qquad b = 2.3025b'$$

a' और b' के विशिष्ट मान (Kaila and Narain, 1971):

- पश्चिमी कनाडा: $a' = 5.05$; $b' = 1.09$
- जापान: $a' = 6.86$; $b' = 1.22$
- पश्चिमी संयुक्त राज्य: $a' = 5.94$; $b' = 1.14$
- पूर्वी संयुक्त राज्य: $a' = 5.79$; $b' = 1.38$

ध्यान दें कि $\frac{1}{N_M}$ समय-मात्रकों में प्रत्यावर्तन अवधि को निरूपित करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 67.1: (परिबद्ध) गुटेनबर्ग–रिक्टर पुनरावृत्ति नियम

$M < 4$ वाली घटनाओं के अभिलेख, पर्याप्त संख्या में होने पर भी, केवल कुछ वर्ष पीछे तक जाते हैं। परिमाण-पुनरावृत्ति संबंध की गणना में इन आँकड़ों को सामान्यतः बाहर रखा जाता है, क्योंकि वे भ्रामक अभिनति दे सकते हैं। अतः $M_{min} \approx 4$। दूसरी ओर किसी भी भ्रंश-रेखा के लिए अधिकतम प्राप्य परिमाण होता है। M_{max} किसी घटना के अधिकतम आकार को सीमित करने वाले भौतिक प्रतिबंधों के कारण उत्पन्न होता है। अतः पुनरावृत्ति नियम को M_{max} समाहित करने के लिए संशोधित करना चाहिए।

परिबद्ध (संशोधित) गुटेनबर्ग–रिक्टर पुनरावृत्ति नियम को द्विघाती संबंध के रूप में लिखा जा सकता है, चित्र 67.1:

$$N_M = N_{M_{min}} e^{-b(M-M_{min})} \; ; \quad M > M_{min}$$

जहाँ $N_{M_{min}} = e^{a-b_{M_{min}}}$।

यह मानते हुए कि संभाव्यता की व्याख्या सापेक्ष आवृत्ति के रूप में की जा सकती है, भूकंप-परिमाण का संचयी संभाव्यता वितरण (बड़े अक्षर F द्वारा दर्शित) इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{M}}(M) &= P\left[\mathfrak{M} < M | \mathfrak{M} > M_{min}\right] \\ &= \frac{N_{M_{min}} - N_M}{N_{M_{min}}} = 1 - e^{-b(M-M_{min})} \end{aligned}$$

और इसका संगत संभाव्यता घनत्व फलन (छोटे अक्षर f द्वारा दर्शित) होगा:

$$f_{\mathfrak{M}}(M) = \frac{d}{dM} F_{\mathfrak{M}}(M) = b e^{-b(M-M_{min})}$$

अतः ऊपरी परिसीमा लागू करके परिबद्ध गुटेनबर्ग–रिक्टर संबंध को आगे संशोधित किया जाता है:

$$N_M = N_{M_{min}} \frac{e^{-b(M-M_{min})} - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}; \; M_{min} \le M \le M_{max}$$

संगत संचयी वितरण फलन बनता है

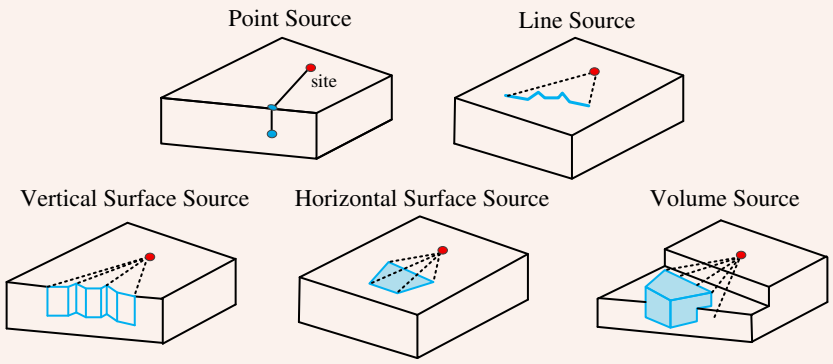
$$F_{\mathfrak{M}}(M) = P\left[\mathfrak{M} < M | M_{min} \le M \le M_{max}\right] = \frac{1 - e^{-b(M-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

और अंततः संगत संभाव्यता घनत्व फलन है

$$f_{\mathfrak{M}}(M) = \frac{be^{-b(M-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}$$

पुनरावृत्ति नियम किसी दिए गए भूकंप-स्रोत के ज्यामितीय क्षेत्रफल पर लागू होता है। अतः भूकंप-स्रोतों की ज्यामिति की परिभाषा भूकंपीय संकट विश्लेषण में निर्णायक हो जाती है। सामान्यतः किसी भूकंपीय स्रोत को निम्न प्रतिरूपों में से एक के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है (Filiatrault, 2013), चित्र 67.2:



चित्र 67.2: भूकंपीय स्रोतों का वर्गीकरण

- बिंदु स्रोत: ज्वालामुखीय गतिविधि से उत्पन्न भूकंप सामान्यतः ऐसे क्षेत्रों में घटित होते हैं जो बिंदु स्रोत के रूप में अभिलक्षित किए जाने के लिए पर्याप्त छोटे होते हैं। अल्प विदारण-लंबाई वाले भ्रंश भी बिंदु स्रोत माने जा सकते हैं।
- रेखा स्रोत: पृष्ठ तक प्रसारित भ्रंश-तल सामान्यतः सुस्पष्ट होते हैं और पृष्ठ पर अथवा उसके निकट उथले भूकंप उत्पन्न करते हैं। इन स्रोतों को एक-विमीय रेखा स्रोत माना जा सकता है।
- ऊर्ध्वाधर पृष्ठ स्रोत: सुस्पष्ट किंतु अधिक गहरे भूकंपों वाले क्षेत्रों के प्रतिरूपण में प्रयुक्त हो सकता है।
- क्षैतिज पृष्ठ स्रोत: जिन क्षेत्रों में भूकंपीय भ्रंशन अपर्याप्त रूप से परिभाषित हो (जैसे उत्तर-पूर्वी अमेरिका), वहाँ अलग-अलग भ्रंश सरलता से पहचाने नहीं जाते। यदि इन क्षेत्रों में उथले भूकंप घटित हों, तो उन्हें क्षैतिज पृष्ठ स्रोतों के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है।
- आयतन स्रोत: जिन क्षेत्रों में भूकंपीय भ्रंशन अपर्याप्त रूप से परिभाषित हो और गहरे भूकंप घटित हों, उन्हें बड़े आयतन स्रोतों द्वारा अभिलक्षित किया जाता है। नाभिकीय गहराई बदल सकती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

67.3 क्षीणन प्रतिरूप

67.3.1 मूल सिद्धांत

क्षीणन संबंध वह फलन है जिसका प्रयोग भू-गति तीव्रता के भिन्न मापों का परिमाण और दूरी के फलन के रूप में आकलन करने के लिए किया जाता है (Atkinson and Boore, 1995; Somerville et al., 1997; Youngs et al., 1997)।

$$\mathrm{IM} = f\,(M, R) \tag{67.1}$$

जहाँ IM तीव्रता-माप है, जैसे PGA, $S_a(0.2s)$, इत्यादि।

वास्तव में अनेक चर सम्मिलित होते हैं जिनका उचित मूल्यांकन भी कठिन है। अतः क्षीणन संबंधों के साथ उच्च स्तर का chap:trustregion संबद्ध है। क्षीणन संबंधों को कभी-कभी भू-गति पूर्वानुमान समीकरण (GMPE) कहा जाता है। भू-*गति पूर्वानुमान समीकरण* समीकरण 67.1 का सर्वाधिक प्रसिद्ध फलनीय रूप है:

$$\begin{aligned}\log\,(\mathrm{IM}) = \log(b_1) + \log\left[f_1(M)\right] + \log\left[f_2(R)\right] \\ + \log\left[f_3(M,R)\right] + \log\left[f_4(E_i)\right] + \log(\varepsilon)\end{aligned}$$

जहाँ E_i संभावित स्रोत, स्थल तथा भूवैज्ञानिक और भू-तकनीकी संरचना-प्रभाव हैं; ε वह प्राचल है जो chap:trustregion और त्रुटियों को निरूपित करता है।

67.3.2 Boore, Joyner और Fumel (1997)

भिन्न क्षेत्रों और जटिलता के विविध स्तरों को ध्यान में रखते हुए सैकड़ों GMPE प्रस्तावित किए गए हैं। Douglas, 2011 ने 1964-2010 के उन सभी संबंधों का सारांश दिया। उदाहरणार्थ, शैल स्थलों पर वर्णक्रमीय कोटियों के लिए Boore, Joyner, and Fumal, 1997 ने निम्न समीकरण प्रस्तावित किया:

$$\ln\,(\mathrm{Y}) = b_1 + b_2(M-6) + b_3(M-6)^2 + b_5\ln(r) + b_V\ln\left(\frac{V_S}{V_A}\right)$$

जहाँ

$$r = \sqrt{r_{jb}^2 + h^2}$$

$$b_1 = \begin{cases} b_{1SS} & \text{for strike-slip earthquakes} \\ b_{1RV} & \text{for reverse-slip earthquakes} \\ b_{1ALL} & \text{if mechanism is not specified} \end{cases}$$

चर Y [g] में वर्णक्रमीय त्वरण (5% अवमंदन) है; M आघूर्ण परिमाण, V_S विचाराधीन परिच्छेद के ऊपरी 30 m में [m/s] में औसत अपरूपण-तरंग वेग और V_A [m/s] में संदर्भ अपरूपण-तरंग वेग है।

r_{jb} स्थल से स्रोत के पृष्ठीय प्रक्षेप तक [km] में निकटतम क्षैतिज दूरी है और h गहराई है। सभी गुणांक [km] में हैं और Table 67.1 में सूचीबद्ध हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 67.1: Boore, Joyner, and Fumal, 1997 प्रतिरूप के अवधि-निर्भर गुणांक

अवधि	b_{1ss}	b_{1RV}	b_{1ALL}	b_2	b_3	b_5	b_V	V_A	h	$\sigma_{\ln(Y)}$
0	-0.313	-0.117	-0.242	0.527	0	-0.778	-0.371	1396	5.57	0.52
0.1	1.006	1.087	1.059	0.753	-0.226	-0.934	-0.212	1112	6.27	0.479
0.12	1.109	1.215	1.174	0.721	-0.233	-0.939	-0.215	1452	6.91	0.485
0.14	1.135	1.261	1.208	0.707	-0.23	-0.938	-0.228	1718	7.18	0.489
0.16	1.112	1.257	1.192	0.702	-0.226	-0.935	-0.248	1910	7.24	0.495
0.18	1.063	1.222	1.151	0.705	-0.216	-0.93	-0.27	2037	7.16	0.499
0.2	0.999	1.17	1.089	0.711	-0.207	-0.924	-0.292	2118	7.02	0.502
0.22	0.925	1.104	1.019	0.721	-0.198	-0.918	-0.315	2158	6.83	0.508
0.24	0.847	1.033	0.941	0.732	-0.189	-0.912	-0.338	2178	6.62	0.511
0.26	0.764	0.958	0.861	0.744	-0.18	-0.906	-0.36	2173	6.39	0.514
0.28	0.681	0.881	0.78	0.758	-0.168	-0.899	-0.381	2158	6.17	0.518
0.3	0.598	0.803	0.7	0.769	-0.161	-0.893	-0.401	2133	5.94	0.522
0.4	0.212	0.423	0.311	0.831	-0.12	-0.867	-0.487	1954	4.91	0.538
0.5	-0.122	0.087	-0.025	0.884	-0.09	-0.846	-0.553	1782	4.13	0.556
0.6	-0.401	-0.203	-0.314	0.928	-0.069	-0.83	-0.602	1644	3.57	0.569
0.7	-0.634	-0.452	-0.555	0.962	-0.053	-0.818	-0.639	1545	3.2	0.582
0.8	-0.829	-0.666	-0.76	0.992	-0.041	-0.809	-0.666	1476	2.98	0.593
0.9	-0.993	-0.848	-0.933	1.018	-0.035	-0.802	-0.685	1432	2.89	0.604
1	-1.133	-1.009	-1.08	1.036	-0.032	-0.798	-0.698	1406	2.9	0.613
1.1	-1.249	-1.145	-1.208	1.052	-0.03	-0.795	-0.706	1396	2.99	0.622
1.2	-1.345	-1.265	-1.315	1.064	-0.032	-0.794	-0.71	1400	3.14	0.629
1.3	-1.428	-1.37	-1.407	1.073	-0.035	-0.793	-0.711	1416	3.36	0.637
1.4	-1.495	-1.46	-1.483	1.08	-0.039	-0.794	-0.709	1442	3.62	0.643
1.5	-1.552	-1.538	-1.55	1.085	-0.044	-0.796	-0.704	1479	3.92	0.649
1.6	-1.598	-1.608	-1.605	1.087	-0.051	-0.798	-0.697	1524	4.26	0.654
1.7	-1.634	-1.668	-1.652	1.089	-0.058	-0.801	-0.689	1581	4.62	0.66
1.8	-1.663	-1.718	-1.689	1.087	-0.067	-0.804	-0.679	1644	5.01	0.664
1.9	-1.685	-1.763	-1.72	1.087	-0.074	-0.808	-0.667	1714	5.42	0.669
2	-1.699	-1.801	-1.743	1.085	-0.085	-0.812	-0.655	1795	5.85	0.672

V_S का सरल आकलन तालिका 67.2 से किया जा सकता है। ध्यान दें कि Y वर्णक्रमीय त्वरण का माध्यिका मान है। अतः ln (Y) पूर्वानुमानित माध्य मान होगा। इसके अतिरिक्त, $\sigma_{\ln(Y)}$, ln (Y) का मानक विचलन है।

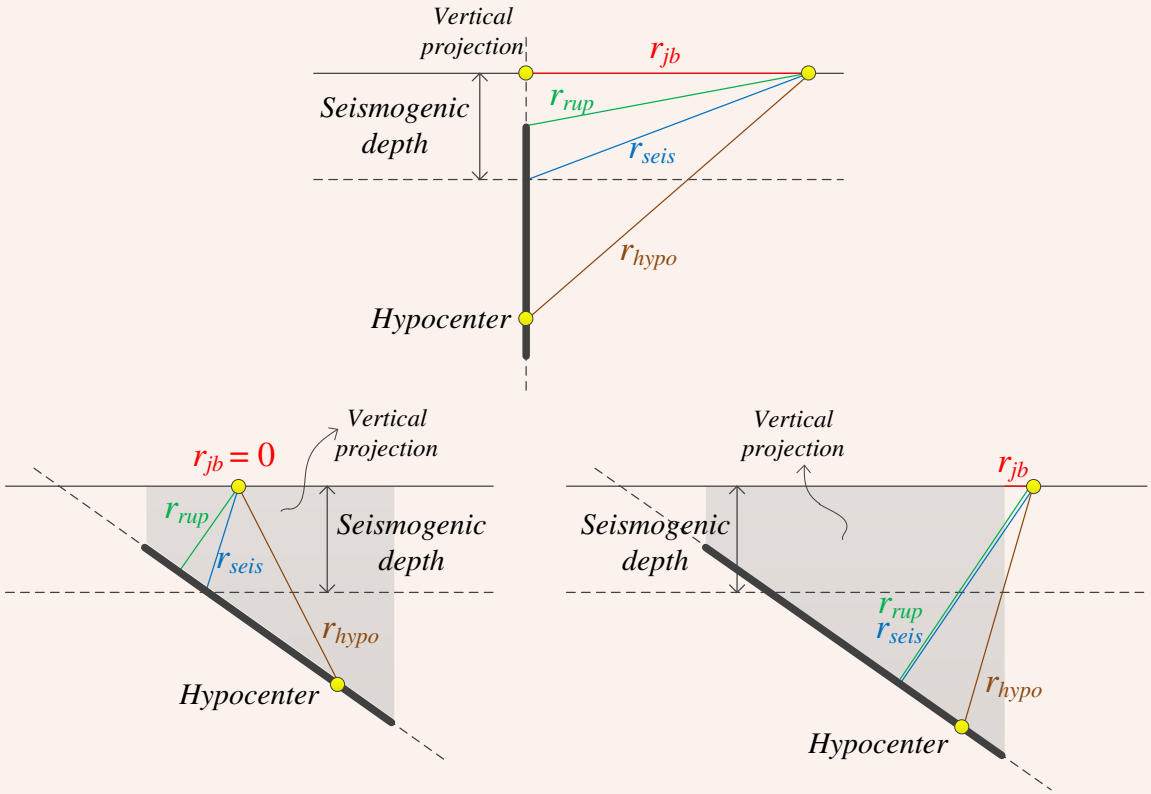
तालिका 67.2: स्थल वर्ग पर आधारित आकलित V_S

NEHRP स्थल वर्ग B	1070 m/s
NEHRP स्थल वर्ग C	520 m/s
NEHRP स्थल वर्ग D	250 m/s
शैल	620 m/s
मृदा	310 m/s

स्थल-से-स्रोत दूरी की विभिन्न परिभाषाएँ चित्र 67.3 में दी गई हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- विदारण दूरी: स्टेशन से विदारण पृष्ठ तक की न्यूनतम दूरी
- Joyner-Boore दूरी: विदारण के ऊर्ध्वाधर प्रक्षेप तक की न्यूनतम क्षैतिज दूरी
- भूकंपजनक दूरी: स्थल से विदारण पृष्ठ के उस बिंदु तक की न्यूनतम दूरी जो किसी न्यूनतम भूकंपजनक गहराई से अधिक गहरा हो
- भूकंपजनक गहराई: पृष्ठीय पदार्थों की गहराई (यह माना जाता है कि अवसादों में निकट-पृष्ठीय विदारण भूकंपजनक नहीं है)
- अवकेंद्रिक दूरी: स्टेशन से अवकेंद्र तक की दूरी



चित्र 67.3: स्थल-से-स्रोत दूरियों का वर्गीकरण

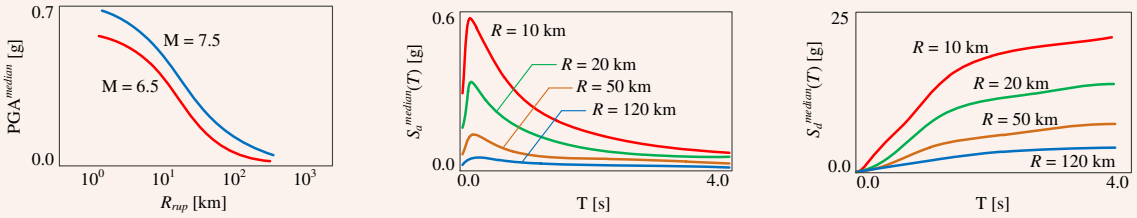
67.3.3 प्राचलीय मूल्यांकन

GMPE के लिए निम्नलिखित सामान्यीकृत प्रेक्षण निकाले जा सकते हैं, चित्र 67.4:

- दूरी बढ़ने पर तीव्रता-माप (Y) घटता है।
- परिमाण बढ़ने पर तीव्रता-माप (Y) बढ़ता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- परिमाण और दूरी केवल तीव्रता को ही नहीं, बल्कि वर्णक्रमीय आकार को भी प्रभावित करते हैं।



(a) R और M के प्रभाव (b) आवर्त-निर्भर वर्णक्रमीय विकास

चित्र 67.4: GMPE का प्राचलीय अन्वेषण

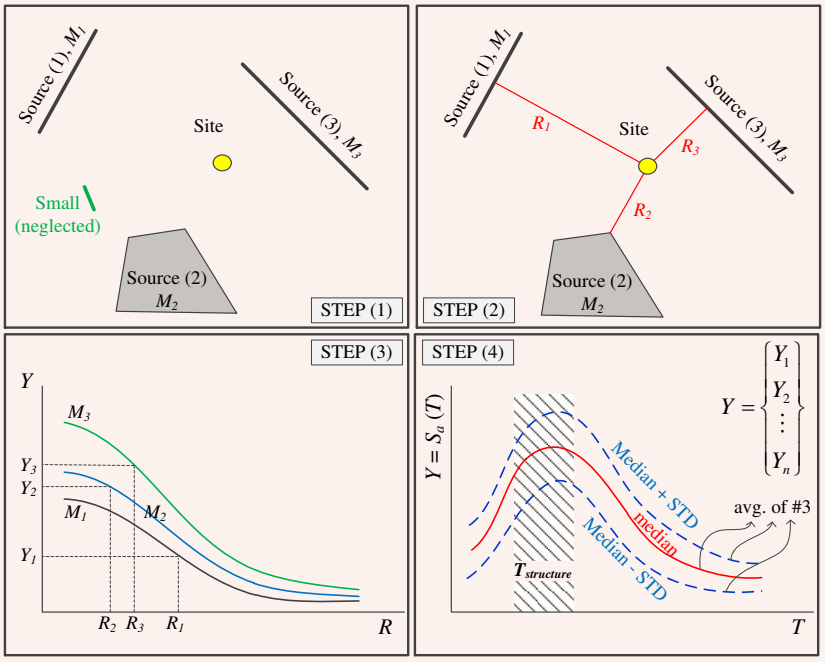
67.4 नियतात्मक भूकंपीय संकट विश्लेषण

नियतात्मक भूकंपीय संकट विश्लेषण (DSHA) भूविज्ञान और ऐतिहासिक भूकंपिता का उपयोग करके भूकंप-स्रोतों की पहचान करता है तथा समय का विचार किए बिना उस प्रबलतम भूकंप (निकृष्टतम स्थिति) का निर्धारण करता है जिसे प्रत्येक स्रोत उत्पन्न करने में सक्षम है। इस प्रक्रिया में एक भूकंपीय परिदृश्य का विकास और उस परिदृश्य का अभिलक्षणन सम्मिलित है। DSHA के अनुप्रयोग में चार पृथक चरण आवश्यक हैं, चित्र 67.5:

- चरण 1: स्थल पर उल्लेखनीय कंपन उत्पन्न करने में सक्षम सभी भूकंप-स्रोतों की पहचान और उनका अभिलक्षणन (ज्यामिति तथा अधिकतम परिमाण) करें।
- चरण 2: चरण 1 में पहचाने गए प्रत्येक स्रोत के लिए स्रोत-से-स्थल दूरी की गणना करें (क्षीणन संबंध के अनुसार अधिकेंद्रिक अथवा अवकेंद्रिक दूरी का उपयोग किया जा सकता है)।
- चरण 3: नियंत्रक भूकंप का चयन करें। उपयुक्त क्षीणन संबंध के अनुसार यही वह भूकंप है जो स्थल पर अधिकतम कंपन उत्पन्न करेगा।
- चरण 4: नियंत्रक भूकंप के आधार पर स्थल के संकट को परिभाषित करें। संकट को वर्णक्रमीय कोटियों, अधिकतम भू-त्वरण, अधिकतम भू-वेग, अधिकतम भू-विस्थापन आदि द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

- लाभ:
  - अनुप्रयोग में सरल,
  - जहाँ विवर्तनिक विशेषताएँ सुव्यवस्थित रूप से परिभाषित हों (रेखा-स्रोत), वहाँ रूढ़िवादी प्रक्रिया।
- हानियाँ:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 67.5: नियतात्मक भूकंपीय संकट विश्लेषण

- स्थल के निकट वितरित स्रोतों पर लागू करना कठिन,
- chap:trustregion का समुचित निरूपण नहीं होता,
- नियंत्रक भूकंप की संभाव्यता के विषय में कोई जानकारी नहीं मिलती,
- स्थल पर संरचना के जीवनकाल में अनुभव किए जा सकने वाले कंपन-स्तर के विषय में कोई जानकारी नहीं मिलती।

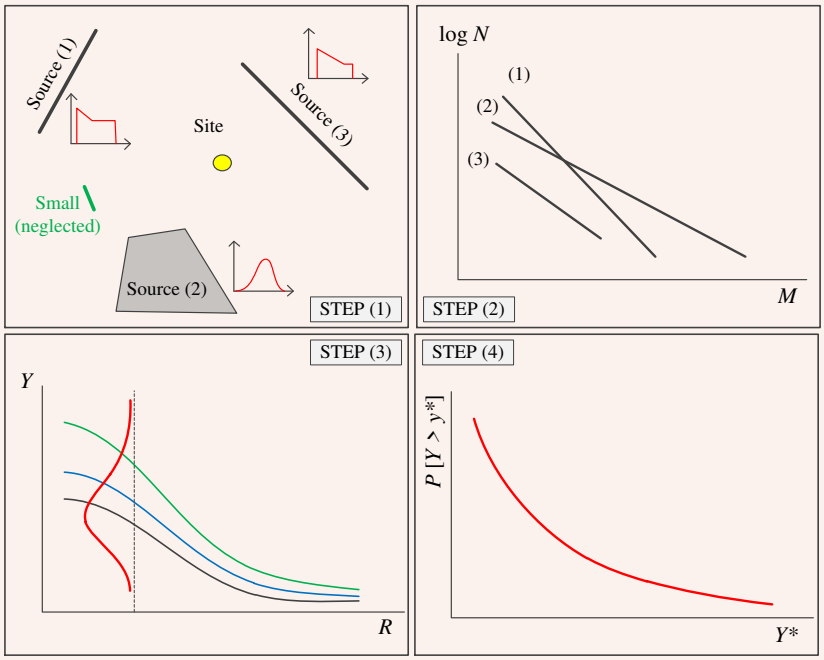
67.5 प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण

C.A. Cornell (1968) द्वारा प्रस्तावित प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA) का उपयोग संयुक्त राज्य अमेरिका के सभी स्थानों के लिए अभिकल्प भूकंप निर्धारित करने में किया जाता है। यह किसी दिए गए स्थल के लिए भूकंपीय प्राचलों (PGA, PGV, $S_a(T_i)$) के रूप में अभिकल्प भूकंप का सापेक्ष परिमाणन प्रदान करता है। PSHA महत्त्वपूर्ण भूकंपों के घटित होने और उनके प्रभावों से संबद्ध अनिश्चितताओं को ध्यान में रखता है। यह सक्रिय भूकंपीय क्षेत्रों में भावी भूकंपों की तिथि, परिमाण, स्थान अथवा प्रभावों का पूर्वानुमान नहीं कर सकता।

PSHA उपागम DSHA के अवयवों का उपयोग करता है और किसी दिए गए परिमाण की भू-गतियों के घटित होने की संभाव्यता का आकलन भी जोड़ता है। प्रत्येक महत्त्वपूर्ण भूकंपीय स्रोत पर विभिन्न परिमाण के भूकंपों के घटित होने की प्रायिकता अथवा आवृत्ति और अंतर्निहित अनिश्चितताओं को विश्लेषण में प्रत्यक्ष रूप से सम्मिलित किया जाता है। किसी स्रोत के किसी भी भाग पर प्रत्येक परिमाण के भूकंप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

की संभावित घटना को PSHA में प्रत्यक्ष रूप से समाविष्ट किया जाता है। PSHA उपागम के परिणामों से यह भी पहचाना जा सकता है कि परिमाण और दूरी का कौन-सा संयोजन संकट में सर्वाधिक योगदान देता है। PSHA के अनुप्रयोग में चार पृथक चरण आवश्यक हैं, जिन्हें नीचे पुनः दर्शाया गया है (चित्र 68.3):



चित्र 67.6: प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण

- चरण 1: भूकंपजनक स्रोतों की परिभाषा: किसी दिए गए स्थल के लिए भूकंप-विवर्तनिक स्रोतों को निरूपित करने वाले भौगोलिक क्षेत्र खींचे जाते हैं। प्रत्येक क्षेत्र के लिए यह माना जाता है कि भूकंप घटित होने की प्रायिकता पूरे पृष्ठीय क्षेत्रफल (भूकंपजनक स्रोत) पर समान है।
- चरण 2: भूकंपिता प्रतिरूप की परिभाषा: प्रत्येक स्रोत के लिए $\ln N_M = a - b\,M$ प्रकार का परिमाण-पुनरावृत्ति संबंध परिभाषित किया जाता है। इस संबंध के प्राचलों को स्थापित करने के लिए ऐतिहासिक भूकंपिता का उपयोग किया जाता है। प्रत्येक स्रोत के लिए एक विच्छेद परिमाण, M_{max}, भी परिभाषित किया जाता है।
- चरण 3: क्षीणन प्रतिरूप की परिभाषा: प्रत्येक स्रोत और दिए गए स्थल के बीच एक क्षीणन संबंध निर्धारित किया जाता है। सामान्यतः पूरे क्षेत्र के लिए एक ही क्षीणन संबंध प्रयुक्त होता है।
- चरण 4: स्थल के लिए संकट-वक्र की गणना:
  - चरण 4-1: दिए गए भू-गति स्तर की पुनरावृत्ति दर की गणना: किसी भी दिए गए स्थल पर चुना हुआ भू-गति स्तर उत्पन्न करने वाले भूकंपों की वार्षिक संख्या ज्ञात करने के लिए क्षीणन संबंधों को परिमाण-पुनरावृत्ति संबंधों के साथ संयोजित किया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- चरण 4-2: चुने हुए भू-गति स्तर के अतिक्रमण की वार्षिक प्रायिकता की गणना: किसी भी दिए गए स्थल पर चुने हुए भू-गति स्तर के अतिक्रमण की वार्षिक प्रायिकता की गणना करने के लिए एक सैद्धांतिक प्रायिकता-वितरण प्रयुक्त किया जाता है। गणना चरण 4-1 में परिकलित पुनरावृत्ति दर पर आधारित होती है।
- चरण 4-3: अतिक्रमण की नियत वार्षिक प्रायिकता वाली समोच्च रेखाओं का आलेखन: प्रत्येक दिए गए स्थल के लिए सभी पूर्ववर्ती चरणों (1 से 4-2) को दोहराया जाता है। तत्पश्चात चुने गए भू-गति प्राचल के लिए समोच्च रेखाएँ खींची जाती हैं। ये समोच्च रेखाएँ पूरे पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए अतिक्रमण की समान वार्षिक प्रायिकता पर आधारित होती हैं।

67.6 घटना-समय

पुनरावृत्ति दर, N, और प्रत्यावर्तन अवधि, T_R, किसी क्षेत्र की ऐतिहासिक भूकंपिता से प्राप्त की जाती हैं। यह मानकर पूर्वानुमान प्राप्त किए जा सकते हैं कि भूकंप घटित होने का अनुक्रम किसी सैद्धांतिक प्रायिकता-वितरण प्रतिरूप का अनुसरण करता है।

PSHA में सामान्यतः पॉइसन प्रायिकता प्रतिरूप, पर विचार किया जाता है, जो मानता है कि भूकंप स्थान और समय की दृष्टि से स्वतंत्र हैं (भूकंपजनक प्रतिरूप)। प्रायिकता, $P_n(y)_t$, कि दिए गए स्थल पर n भूकंप विचाराधीन भूकंपीय प्राचल का y से अधिक अथवा उसके बराबर मान किसी निश्चित समय t में उत्पन्न करेंगे, निम्न है:

$$P_n(y)_{t|N} = \frac{(Nt)^n \, e^{-Nt}}{n!}$$

जहाँ N स्थल पर विचाराधीन भूकंपीय प्राचल का y से अधिक अथवा उसके बराबर मान उत्पन्न करने वाले वार्षिक भूकंपों की संख्या (पुनरावृत्ति दर) है।

अतः प्रायिकता, $P_n(y)_{t|N}$, कि स्थल पर कम-से-कम एक भूकंप विचाराधीन भूकंपीय प्राचल का y से अधिक अथवा उसके बराबर मान दिए गए समय t में उत्पन्न करेगा, स्थल पर ऐसा कोई भूकंप न होने की प्रायिकता, $P_n(y)_{t|N}$, को 1 में से घटाने के बराबर है जो विचाराधीन भूकंपीय प्राचल का y से अधिक अथवा उसके बराबर मान उत्पन्न करे, चित्र 67.7a।

$$P(y)_{t|N} = 1 - e^{-Nt} \tag{67.2}$$

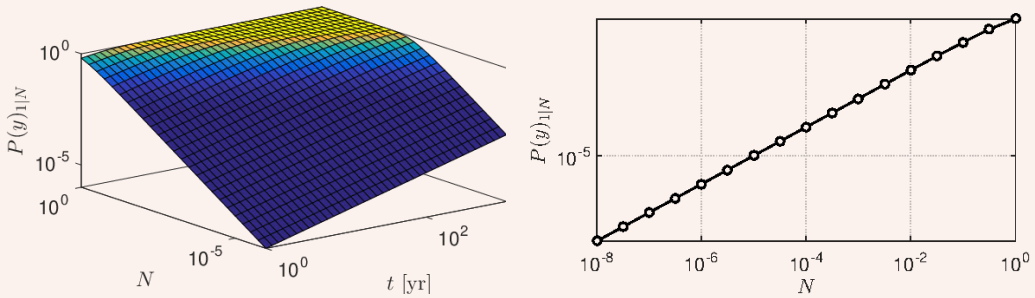
वार्षिक प्रायिकता (t = 1 वर्ष) पर विचार करने पर समीकरण से निम्न प्राप्त होता है, चित्र 67.7b।

$$P(y)_{1|N} = 1 - e^{-N} \tag{67.3}$$

N के छोटे मानों के लिए सरलीकृत प्रतिरूप है

$$P(y)_{1|N} = N$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

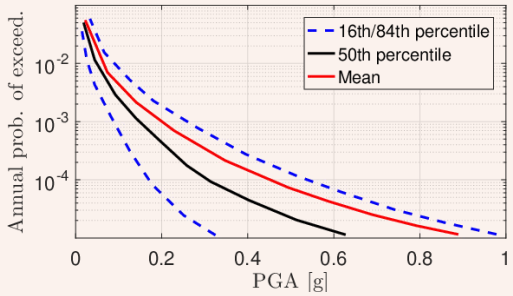


(a) समीकरण 67.2 (b) समीकरण 67.3

चित्र 67.7: पॉइसन प्रायिकता प्रतिरूप

67.7 भूकंपीय संकट-वक्र

PSHA का मूल परिणाम भूकंपीय संकट-वक्र है, जो उस वार्षिक दर अथवा प्रायिकता को दर्शाता है जिस पर बाँध-स्थल पर किसी विशिष्ट भू-गति स्तर का अतिक्रमण होगा। किसी भी संकट-वक्र में ऊर्ध्वाधर अक्ष अतिक्रमण की वार्षिक प्रायिकता (अथवा प्रत्यावर्तन अवधि) दर्शाता है और क्षैतिज अक्ष तीव्रता-माप (IM) प्राचल होता है। बाँधों और नाभिकीय संरचनाओं के जोखिम-विश्लेषण में भूकंपीय संकट-वक्र सामान्यतः एक महत्त्वपूर्ण और उपयोगी साधन हैं। चित्र 67.8 Pine Flat बाँध-स्थल के विशिष्ट भूकंपीय संकट-वक्र दर्शाता है।



चित्र 67.8: माध्य और भिन्नक भूकंपीय संकट-वक्रों का नमूना

भूकंपीय संकट-वक्र उत्पन्न करने के लिए विभिन्न कंप्यूटर कोड उपलब्ध हैं। उदाहरणार्थ, *OpenSHA Hazard Curve Calculator*, जो www.opensha.org/apps पर उपलब्ध है, सर्वाधिक प्रसिद्ध ऑनलाइन कोडों में से एक है।

USBR की अनुशंसाओं (USBR-manual, 2011) के आधार पर बाँधों के संकट-वक्र उत्पन्न करने में सर्वाधिक सामान्य तीव्रता-माप PGA है; तथापि, तटबंध बाँधों के लिए सामान्यतः $S_a(T = 1sec)$ प्रयुक्त होता है, और कंक्रीट बाँधों के लिए प्रायः $S_a(T = 0.2sec)$ अथवा $S_a(T = 0.4sec)$ जैसे लघुतर आवर्तों के वक्र प्रयुक्त होते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भूकंप-विदारण पूर्वानुमान और भू-गति पूर्वानुमान समीकरण उपलब्ध होने पर भूकंपीय संकट-वक्र का आकलन निम्न प्रकार किया जाता है (Applied Technology Council, 2012a):

$$\lambda\left(Y \geq y\right) = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{m=M_{min}}^{M_{max,f}} \sum_{\varrho=1}^{N_{\varrho,f,m}} \left(\lambda\left(f, m, \varrho\right) - \lambda\left(f, m + \Delta m, \varrho\right)\right) \times \left(1 - F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right)\right)$$

जहाँ,

$$F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right) = \frac{1}{N_a} \sum_{a=1}^{N_a} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{y}{exp\left(\mu_{\ln Y,a}\right)}\right)}{\sigma_{\ln Y,a}}\right)$$

- Y स्थल-कंपन का IM प्राचल है, सामान्यतः $S_a(T_1, \xi = 5\%)$,
- y, Y का एक विशिष्ट मान है,
- $\lambda\left(Y \geq y\right)$ वह माध्य दर है जिस पर स्थल y अथवा उससे अधिक तीव्रता का कंपन अनुभव कर सकता है; इसे यहाँ भूकंपीय संकट कहा गया है,
- f भूकंप-विदारण पूर्वानुमान में भ्रंशों का सूचकांक है, $f = 1, 2, ..., N_f$,
- N_f भूकंप-विदारण पूर्वानुमान में भ्रंशों की संख्या है,
- m आघूर्ण परिमाण है, जो Δm = 0.1-परिमाण वृद्धि में लिया जाता है; $m = M_{min}, M_{min} + \Delta m, M_{min} + 2\Delta m, ..., M_{max,f}$,
- M_{min} विचारित न्यूनतम परिमाण है, जैसे 5.0,
- $M_{max,f}$ वह अधिकतम परिमाण है जिसे भूकंप-विदारण पूर्वानुमान के अनुसार भ्रंश f उत्पन्न करने में सक्षम माना जाता है,
- ϱ भ्रंश-अनुरेख के उन विविक्त स्थानों का सूचकांक है जिन पर भूकंप-अधिकेंद्रों को विविक्तीकृत किया गया है, $\varrho = 1, 2, ..., N_{\varrho,f,m}$,
- $N_{\varrho,f,m}$ भ्रंश f के अनुदिश उन विविक्त स्थानों की संख्या है जिन पर परिमाण m का भूकंप केंद्रित हो सकता है,
- $\lambda\left(f, m, \varrho\right)$ वह माध्य आवृत्ति है जिस पर भूकंप-विदारण पूर्वानुमान के अनुसार भ्रंश f, परिमाण m अथवा उससे अधिक के भूकंप स्थान ϱ पर उत्पन्न कर सकता है,
- $F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right)$ उस प्रायिकता को दर्शाता है कि कंपन-तीव्रता $Y \leq y$ होगी, जब भ्रंश f पर परिमाण m का भूकंप हो और उसका अधिकेंद्र ϱ पर स्थित हो,
- a यहाँ प्रयुक्त भू-गति पूर्वानुमान समीकरणों का सूचकांक है, $a = 1, 2, ..., N_a$,
- N_a प्रयुक्त भू-गति पूर्वानुमान समीकरणों की संख्या है,
- Φ कोष्ठक के भीतर के पद पर मूल्यांकित मानक प्रसामान्य संचयी वितरण फलन है। इस शोध-प्रबंध में माना गया है कि सभी भू-गति पूर्वानुमान समीकरण परिमाण, दूरी, क्रियाविधि आदि पर सशर्त Y के लघुगणक-प्रसामान्य वितरण को मानते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- $\mu_{\ln Y,a}$, Y के प्राकृतिक लघुगणक का प्रत्याशित मान है, जो भू-गति पूर्वानुमान समीकरण a के अंतर्गत प्राप्त होता है।
- $\sigma_{\ln Y,a}$, Y के प्राकृतिक लघुगणक का कुल मानक विचलन है, जो भू-गति पूर्वानुमान समीकरण a के अंतर्गत प्राप्त होता है।

67.8 भूकंपीय संकट-मानचित्र

राष्ट्रीय भूकंपीय संकट-मानचित्र सामान्यतः अनेक 5%-अवमंदित वर्णक्रमीय त्वरण कोटियों वाले संकट-वक्रों का उपयोग करके बनाए जाते हैं, जिन्हें 0.0 (PGA), 0.2, 0.3, 0.5, 0.75, 1.0 और 2.0 सेकंड के आवर्तों पर लिया जाता है। प्रति वर्ष N = 0.00211, 0.00103 और 0.00040 की वार्षिक पुनरावृत्ति दरों का उपयोग क्रमशः 10%, 5% और 2% अतिक्रमण-प्रायिकता के संगत मान 50 वर्षों में प्राप्त करने के लिए किया जाता है। अतिक्रमण-प्रायिकता की गणना सामान्यतः पॉइसन (समय-स्वतंत्र) प्रायिकतामूलक प्रतिरूप से की जाती है। अमेरिकी संकट-मानचित्रों के लिए 760 m/s के औसत अपरूपण-तरंग वेग वाली एकसमान दृढ-शैल स्थल-स्थितियाँ भूपर्पटी के ऊपरी 30 m में मानी गईं।

अमेरिका के नमूना भूकंपीय संकट-मानचित्र चित्र 67.9 में दर्शाए गए हैं। United States Geological Survey (USGS) के राष्ट्रीय संकट-मानचित्र उन भूकंप-कंपन स्तरों का वितरण दर्शाते हैं जिनके अमेरिका में घटित होने की एक निश्चित प्रायिकता है। ऑनलाइन USGS अनुप्रयोग[1] का उपयोग करके अनुकूलित संकट-मानचित्र बनाया जा सकता है।

67.9 भूकंपीय संकट वियोजन

भूकंपीय संकट-वियोजन आलेख उपयोगी हैं क्योंकि वे अभिलेख-चयन प्रक्रिया में विभिन्न प्राचलों के योगदान का स्पष्ट चित्र प्रदान कर सकते हैं। बाँध-स्थल पर संकट को नियंत्रित करने वाले स्रोत की पहचान में भी उनका उपयोग किया जा सकता है।

वियोजन आलेख परिमाण और दूरी के उन संयोजनों को दर्शाता है जो किसी संकट-वक्र में सर्वाधिक योगदान देते हैं। यह प्रतिक्रिया-इतिहास विश्लेषण के लिए भूकंप समय-इतिहासों के चयन में उपयोगी है। वियोजन आलेख विचाराधीन तीव्रता और अतिक्रमण-प्रायिकता पर निर्भर करता है। व्यवहार में वियोजन को परिमाण, Δm, और दूरी, Δr, की छोटी वृद्धियों पर संख्यात्मक रूप से प्राप्त किया जाता है।

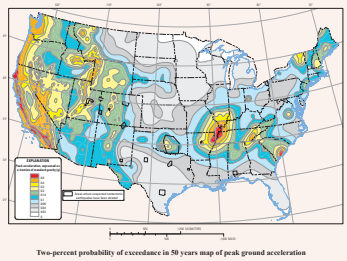
$$C(M,R) = \frac{N(m \le M < m+\Delta m\,;\; r \le R < r+\Delta r)}{N_{total}}$$

जहाँ $N(M,R)$, m और r के आसपास परिमाण तथा दूरी वाले भूकंपों की पुनरावृत्ति दर है, और N_{total} स्थल की कुल पुनरावृत्ति दर है।

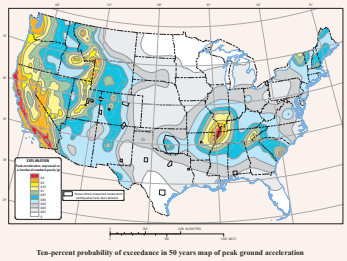
चित्र 67.10 शैल माध्यम पर विभिन्न तीव्रता-मापों और प्रत्यावर्तन अवधियों के लिए University of Colorado Boulder के भूकंपीय वियोजन आलेख दर्शाता है (USGS, 2003)। प्रत्येक स्थिति में बहुलक दूरी, परिमाण और अंतर-घटना पद ज्ञात किए जा सकते हैं।

[1] USGS Custom Hazard Map

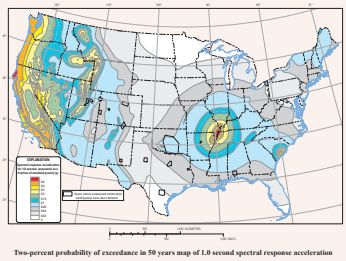
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



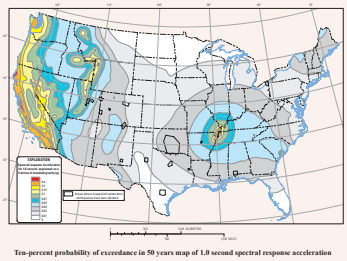
(a) 2%/50yr; PGA



(b) 10%/50yr; PGA



(c) 2%/50yr; $S_a(T = 1.0s)$



(d) 10%/50yr; $S_a(T = 1.0s)$

चित्र 67.9: अमेरिकी संकट-मानचित्रों के नमूने

67.10 लक्ष्य प्रतिक्रिया-वर्णक्रम

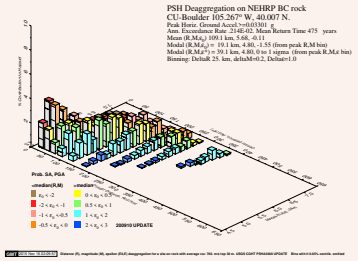
विश्लेषण में प्रयुक्त अनेक भूकंपीय संकट-अंतरालों में से प्रत्येक के लिए एक वर्णक्रम आवश्यक होता है; इन अंतरालों का चयन स्थल के भूकंपीय संकट-वक्र से किया जाता है। सामान्य वर्णक्रमों के तीन प्रकार हैं:

- एकसमान संकट-वर्णक्रम (UHS)
- सशर्त वर्णक्रम (CS)
- सशर्त माध्य वर्णक्रम (CMS)

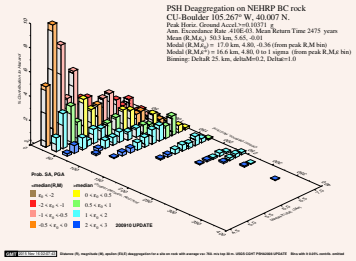
UHS *एकसमान संकट-वर्णक्रम* की गणना भूकंपीय संकट-वक्रों से की जाती है। प्रतिक्रिया-वर्णक्रम को परिभाषित करने के लिए अनेक कंपन-आवर्तों के संकट-वक्र विकसित करके यह कार्य किया जाता है। तत्पश्चात, किसी दी गई अतिक्रमण-प्रायिकता अथवा प्रत्यावर्तन अवधि के लिए प्रत्येक वर्णक्रमीय त्वरण की कोटियाँ संकट-वक्रों से ली जाती हैं और एक "समान संकट प्रतिक्रिया-वर्णक्रम" उत्पन्न किया जाता है। इस प्रकार, विचाराधीन निर्दिष्ट प्रत्यावर्तन अवधियों—सामान्यतः 10,000 और 50,000 वर्ष, किंतु प्रायः निम्नतर, मध्यवर्ती अथवा और भी उच्चतर प्रत्यावर्तन अवधियों—के लिए प्रतिक्रिया-वर्णक्रम वक्र उत्पन्न किए जाते हैं। चित्र 67.11a काल्पनिक बाँध-स्थल पर केवल क्षैतिज दिशा का UHS दर्शाता है।

दूसरी ओर, CS अर्थात सशर्त वर्णक्रम वह प्रतिक्रिया-वर्णक्रम है जो किसी विशिष्ट (सशर्तकारी)

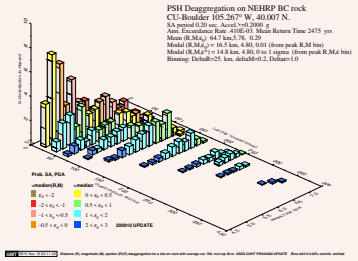
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



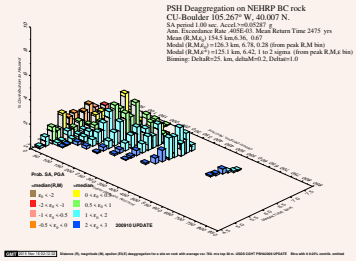
(a) 475 years; PGA



(b) 2475 years; PGA

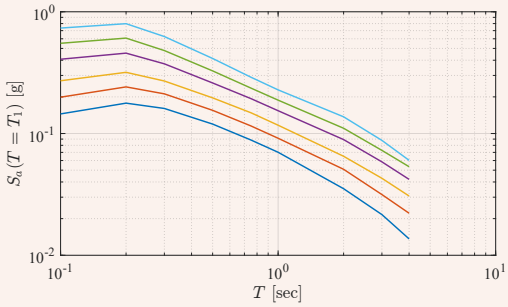


(c) 2475 years; $S_a(T = 0.2s)$

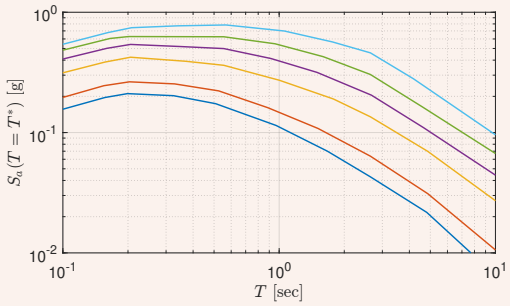


(d) 2475 years; $S_a(T = 1.0s)$

चित्र 67.10: University of Colorado Boulder के भूकंपीय वियोजन आलेखों के नमूने



(a) UHS ($T_1 = 0.3$ s)



(b) CMS ($T^* = 2.5$ s)

चित्र 67.11: विभिन्न प्रतिक्रिया-वर्णक्रमों की तुलना

आवृत, T^* (Lin and Baker, 2014), पर वर्णक्रमीय त्वरण के सापेक्ष सशर्त रहते हुए एक आवृत-परास में विभिन्न वर्णक्रमीय त्वरणों का प्रायिकता-वितरण निर्दिष्ट करता है। प्रत्याशित वर्णक्रम और उसकी परिवर्तनशीलता की गणना करने के लिए सशर्त वर्णक्रम विभिन्न आवृतों पर वर्णक्रमीय त्वरणों के बीच सहसंबंधों को ध्यान में रखता है (Baker and Jayaram, 2008)। चित्र 67.11b, $T^* = 2.5$ s वाली संरचना के लिए विभिन्न संकट-स्तरों पर नमूना CMS प्रस्तुत करता है।

बारंबार घटनाओं के लिए UHS और CMS के आकार समान होने चाहिए। विरल घटनाओं के लिए कुछ आवृतों पर CMS का आयाम UHS से छोटा होगा, क्योंकि सशर्त माध्य वर्णक्रम किसी एक भूकंप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के लिए कम रूढ़िवादी और अधिक यथार्थवादी वर्णक्रम का परिमाणन करता है। CS केवल इस अर्थ में CMS से भिन्न है कि वह वर्णक्रमीय मानों में chap:trustregion पर विचार करता है। CMS अथवा CS का उपयोग किसी दी गई भूकंप-कंपन तीव्रता के लिए UHS की अपेक्षा प्रतिक्रिया का अधिक यथार्थ आकलन प्रदान करेगा, किंतु इस प्रकार के वर्णक्रम उत्पन्न करने के लिए अतिरिक्त प्रयास आवश्यक है।

CMS का विस्तारित रूप, जो प्रतिक्रिया-वर्णक्रम के अतिरिक्त अन्य भू-गति प्राचलों पर विचार करता है, सामान्यीकृत सशर्त तीव्रता-माप (GCIM) है (Bradley, 2010)। यह विधि मुख्यतः भू-गति IM के किसी भी समुच्चय के बहुचर वितरण के निर्माण पर आधारित है, जो किसी विशिष्ट भू-गति IM (सामान्यतः PSHA से प्राप्त) के घटित होने पर सशर्त होता है।

CMS की गणना के मूल चरण, जिन्हें (Lin and Baker, 2014) से अपनाया गया है, निम्न प्रकार संक्षेपित किए जा सकते हैं:

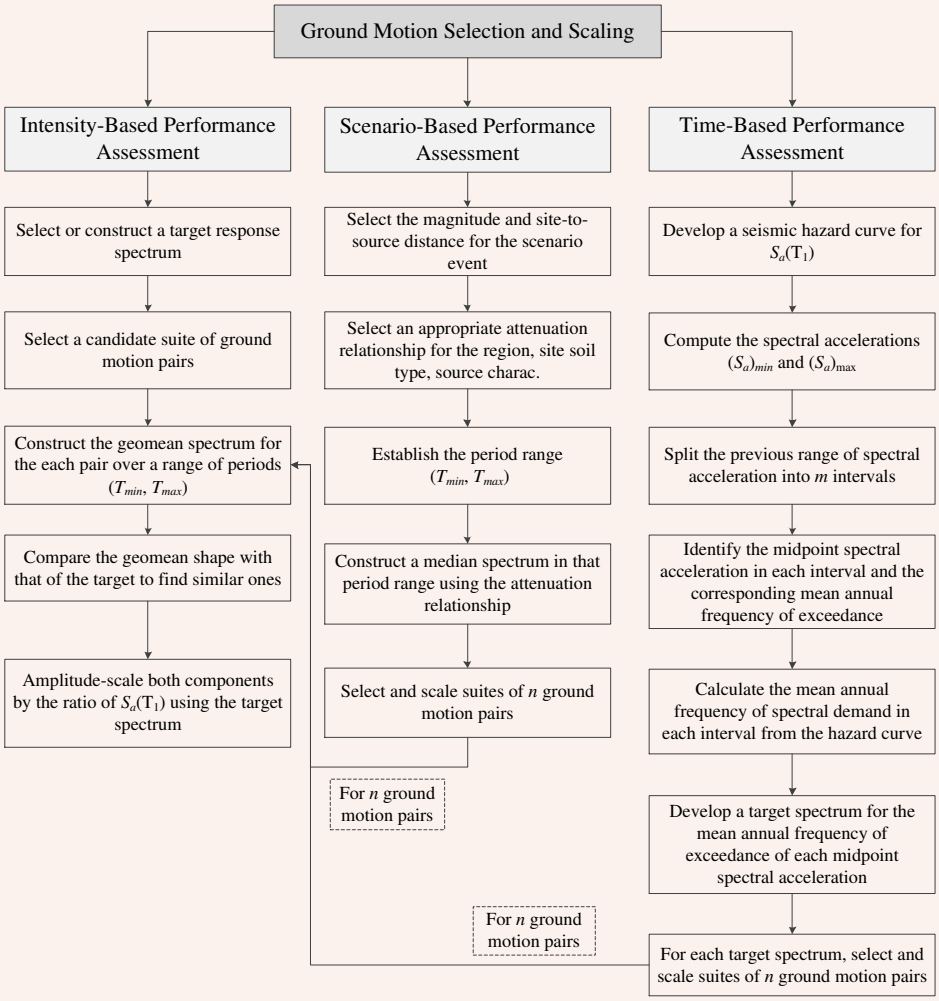
- PSHA का उपयोग करके भूकंप के निवेश प्राचल निर्धारित करें, जिनमें सशर्तकारी आवर्त पर लक्ष्य वर्णक्रमीय त्वरण, $S_a(T^*)$, सशर्तकारी आवर्त, T^*, तथा संबद्ध माध्य कारणकारी भूकंप परिमाण, M, दूरी, R, विदारण क्रियाविधि और स्थल-स्थिति, θ, सम्मिलित हैं।
- GMPE प्रतिरूपों का उपयोग करके वर्णक्रमीय त्वरण का लघुगणकीय माध्य, $\mu_{\ln S_a}(M,R,\theta,T_i)$, और मानक विचलन, $\sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)$, सभी आवर्तों, T_i, पर परिकलित करें।
- एप्सिलॉन, $\varepsilon(T_i)$, परिकलित करें (मानक विचलनों की वह संख्या जिससे $\ln S_a(T_i)$ किसी दिए गए GMPE द्वारा पूर्वानुमानित माध्य वर्णक्रमीय कोटि से भिन्न होता है), किसी भी $S_a(T_i)$ मान के लिए:
$$\varepsilon(T_i) = \frac{\ln S_a(T_i) - \mu_{\ln S_a}(M,R,\theta,T_i)}{\sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)}$$
- सशर्त माध्य लघुगणकीय वर्णक्रमीय त्वरण, $\mu_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)}$, उस सहसंबंध प्रतिरूप (Baker and Jayaram, 2008) का उपयोग करके परिकलित करें जो दो आवर्तों पर एप्सिलॉन मानों के युग्मों के बीच सहसंबंध गुणांक, $\rho\left(\varepsilon(T_i),\varepsilon(T^*)\right)$, को निम्न प्रकार निर्दिष्ट करता है:
$$\mu_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)} = \mu_{\ln S_a}(M,R,\theta,T_i) + \rho\left(\varepsilon(T_i),\varepsilon(T^*)\right)\sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)$$
- सशर्त मानक विचलन, $\sigma_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)}$, निम्न प्रकार परिकलित करें:
$$\sigma_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)} = \sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)\sqrt{1-\rho^2\left(\varepsilon(T_i),\varepsilon(T^*)\right)}$$
- सशर्त मानक विचलन और सशर्त माध्य मान का संयोजन सभी आवर्तों पर लघुगणकीय वर्णक्रमीय त्वरण मानों का पूर्ण वितरण निर्दिष्ट करता है। परिणामी वर्णक्रम-वितरण को CS कहा जाता है, जिससे उसे परिवर्तनशीलता पर विचार न करने वाले CMS से अलग पहचाना जा सके।

तीव्रता-आधारित निष्पादन आकलन (IBPA)

यह विधि यह मानकर संरचना के निष्पादन का मूल्यांकन करती है कि वह कंपन की किसी विशिष्ट तीव्रता के अधीन है। ढाँचा संरचनाओं की स्थिति में कंपन-तीव्रता को 5% अवमंदित प्रत्यास्थ त्वरण प्रतिक्रिया-वर्णक्रम द्वारा परिभाषित किया जाता है। यह आकलन सामान्यतः तब प्रयुक्त होता है जब संरचना

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

किसी विशिष्ट प्रतिक्रिया-वर्णक्रम (जैसे अभिकल्प प्रतिक्रिया-वर्णक्रम) वाले भूकंप-कंपन के अधीन हो (Applied Technology Council, 2012b), चित्र 67.12।



चित्र 67.12: IBPA, SBPA और TBPA के लिए भू-गति चयन और मापन की तुलना

परिदृश्य-आधारित निष्पादन आकलन (SBPA)

यह विधि यह मानकर संरचना के निष्पादन का मूल्यांकन करती है कि वह संरचना-स्थल के सापेक्ष किसी विशिष्ट स्थान पर घटित होने वाले विशिष्ट परिमाण के भूकंप के प्रभावों के अधीन है। एक अथवा अधिक ज्ञात सक्रिय भ्रंशों के निकट स्थित संरचनाओं से संबद्ध निर्णयकर्ताओं के लिए परिदृश्य-आकलन उपयोगी हो सकते हैं। परिदृश्य-आधारित आकलन तीव्रता-आधारित आकलनों से अत्यंत मिलते-जुलते हैं; अंतर केवल यह है कि दिए गए परिदृश्य के अंतर्गत भूकंप-तीव्रता में chap:trustregion पर विचार किया जाता है (Applied Technology Council, 2012b), चित्र 67.12।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समय-आधारित निष्पादन आकलन (TBPA)

यह विधि किसी समयावधि में घटित हो सकने वाले सभी भूकंपों और प्रत्येक के घटित होने की प्रायिकता पर विचार करते हुए उस अवधि में संरचना के निष्पादन का मूल्यांकन करती है। समय-आधारित आकलन भावी भूकंपों के परिमाण और स्थान में chap:trustregion तथा उन भूकंपों से उत्पन्न गति की तीव्रता—दोनों पर विचार करते हैं। वैकल्पिक निष्पादन मानदंडों के बीच निर्णय के लिए प्रयुक्त लागत-लाभ मूल्यांकन में एक वर्ष पर आधारित आकलन उपयोगी होते हैं (Applied Technology Council, 2012b)।

चित्र 67.12 उपर्युक्त तीन विधियों पर आधारित भू-गति चयन और मापन की चरणबद्ध प्रक्रिया की तुलना करता है। उल्लेखनीय है कि TBPA में चित्र 67.12 में प्रस्तुत प्राचलों के अनुशंसित मान निम्न हैं: $(S_a)_{min}$ = 0.05 g, और $(S_a)_{max}$ अतिक्रमण की $0.00002/yr$ वार्षिक आवृत्ति से संबद्ध है (अर्थात 1 घटना 50,000 वर्षों में)। अंतरालों की संख्या m के लिए सामान्यतः 8 अनुशंसित है।

67.11 यादृच्छिक भू-गति अनुकरण

यद्यपि वास्तविक भू-गति अभिलेखों का उपयोग संरचनाओं के भूकंपीय मूल्यांकन की एक मानक विधि है, तथापि उपलब्ध अभिलिखित भू-गतियों की संख्या सीमित हो सकती है (जो भूकंपीय संकट के संकीर्ण और विविक्त परास को ही समाविष्ट कर सकती हैं)। अतः PBEE के संदर्भ में उपयोग हेतु अतिरिक्त भू-गति अभिलेखों का अनुकरण आवश्यक हो सकता है।

अधिकांश भू-गति अनुकरण तकनीकें किसी विशिष्ट भूकंपीय संकट-परिदृश्य पर आधारित त्वरण समय-श्रेणी उत्पन्न कर सकती हैं, जिससे वे SBPA में उपयोग के लिए अत्युत्तम विकल्प बनती हैं (Rezaeian and Der Kiureghian, 2010), (Yamamoto and Baker, 2013)। सामान्यतः इन तकनीकों को दो समूहों में विभाजित किया जा सकता है (Yamamoto, 2011; Taborda and Roten, 2014; Rezaeian and Sun, 2014):

- भौतिकी-आधारित प्रतिरूप भ्रंश-विदारण, तरंग-संचरण और निकट-पृष्ठीय स्थल-प्रवर्धन का स्पष्ट प्रतिरूपण करके भू-गति का अनुकरण करते हैं। वास्तविक भू-गतियों का अच्छा आकलन प्रदान करने के लिए उन्हें सटीक जानकारी की आवश्यकता होती है। सामान्यतः इस उपागम का कार्यान्वयन महँगा है और उच्च-आवृत्ति गतियों के लिए अत्यधिक यथार्थ नहीं है (Pitarka et al., 1998; Taborda and Roten, 2014)।
- यादृच्छिक प्रतिरूप भू-गति समय-श्रेणी का प्रत्यक्ष अनुकरण करते हैं और उपलब्ध आँकड़ा-समुच्चय के आधार पर अनुभवजन्य रूप से अंशांकित होते हैं। सामान्यतः यह उपागम अभिकलनीय दृष्टि से कम महँगा है। यादृच्छिक प्रतिरूप निम्न विधियों में से किसी एक से निर्मित किए जा सकते हैं (Rezaeian and Der Kiureghian, 2010): 1) श्वेत रव को किसी निस्यंदक से प्रवाहित करना (Shinozuka and Sata, 1967), 2) पॉइसन स्पंदों की श्रेणी को रैखिक निस्यंदक से प्रवाहित करना (Cornell, 1964), 3) स्वप्रतिगामी चल-माध्य प्रतिरूप (Hoshiya and Hasgur, 1978), और 4) विकासात्मक वर्णक्रमीय प्रतिरूप (Priestley, 1965)। वास्तविक भू-गतियों का अच्छा आकलन प्राप्त करने के लिए प्रतिरूप में कालिक अनस्थिरता (समय के साथ आयाम में परिवर्तन) और वर्णक्रमीय अनस्थिरता (समय के साथ आवृत्ति में परिवर्तन)—दोनों को ध्यान में रखना चाहिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस खंड में हाल में विकसित और व्यापक रूप से प्रयुक्त दो यादृच्छिक भू-गति प्रतिरूपों का वर्णन किया गया है।

67.11.1 Rezaeian और Der Kiureghian (r-d) प्रतिरूप

Rezaeian और Der Kiureghian ने समय-परिवर्ती प्राचलों वाली मॉडुलित निस्यंदित श्वेत-रव प्रक्रिया पर आधारित पूर्णतः अनस्थिर यादृच्छिक भू-गति प्रतिरूप विकसित किया (Rezaeian and Der Kiureghian, 2008), (Rezaeian and Der Kiureghian, 2010)। इस प्रतिरूप में कालिक और वर्णक्रमीय अनस्थिर अभिलक्षण पूर्णतः असंयुग्मित हैं, जिससे प्रतिरूप-प्राचलों की सरल पहचान संभव होती है। प्रतिरूप में भौतिक व्याख्या वाले प्राचलों की संख्या कम है। भू-गति की विविक्तीकृत त्वरण समय-श्रेणी को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\hat{x}\left(t|\boldsymbol{\theta},\mathbf{W}\right)=\beta\left(t,\boldsymbol{\theta}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{h\left[t-t_i,\boldsymbol{\theta}(t_i)\right]}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k}h\left[t-t_j,\boldsymbol{\theta}(t_j)\right]^2}}w\left(i\Delta t\right),$$
$$k\Delta t<t<(k+1)\Delta t$$

जहाँ $\mathbf{W}=[w\left(i\Delta t\right);i=1,2,...,N_T]$ एक गाउसीय श्वेत-रव अनुक्रम है, Δt चयनित विविक्तीकरण अंतराल है, $\boldsymbol{\theta}$ एक n_θ-विमीय प्रतिरूप-प्राचल सदिश है (अर्थात $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n_\theta}]$), $\beta\left(t,\boldsymbol{\theta}\right)$ समय-मॉडुलन फलन है, और $h\left[t-\tau,\boldsymbol{\theta}(\tau)\right]$ समय-निर्भर प्राकृतिक आवृत्ति $\omega_f(\tau)$ तथा अवमंदन अनुपात $\zeta_f(\tau)$ वाले SDOF रैखिक दोलक की छद्म-त्वरण प्रतिक्रिया के कारण उत्पन्न एकक स्पंद फलन है, जिसमें τ स्पंद के समय को दर्शाता है।

$$h\left[t-\tau,\boldsymbol{\theta}(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{\omega_f(\tau)}{\sqrt{1-\zeta_f^2(\tau)}}\exp\left[-\omega_f(\tau)\zeta_f(\tau)(t-\tau)\right] & \\ \qquad\sin\left[\omega_f(\tau)\sqrt{1-\zeta_f^2(\tau)}(t-\tau)\right] & \tau\le t\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

समय-निर्भर आवृत्ति फलन रैखिक रूप लेता है, जबकि अवमंदन फलन को नियत माना जाता है:

$$\omega_f(\tau)=\omega_{mid}+\omega'\left(\tau-t_{mid}\right)\ ;\qquad\zeta_f(\tau)=\zeta_f$$

जहाँ ω_{mid} केंद्रीय आवृत्ति को दर्शाता है, ω' आवृत्ति-परिवर्तन है, और t_{mid} प्रबल गति की अवधि का मध्य-समय है (वह समय जिस पर Arias तीव्रता अपने अंतिम मान का 45% प्राप्त करती है)।

मॉडुलन फलन के लिए तीन प्राचलों द्वारा नियंत्रित गामा-प्रकार का फलन चुना जाता है:

$$\beta\left(t,I_A,\alpha_2,\alpha_3\right)=\underbrace{\sqrt{I_A\,\frac{(2\alpha_3)^{2\alpha_2-1}}{\Gamma\left(2\alpha_2-1\right)}}}_{\text{intensity}}\underbrace{t^{\alpha_2-1}}_{\text{shape}}\underbrace{e^{-\alpha_3 t}}_{\text{duration}}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $\Gamma(.)$ गामा फलन है, I_A मापित Arias तीव्रता है, और α_2 तथा α_3 क्रमशः आकार और अवधि को नियंत्रित करने वाले प्राचल हैं, जिन्हें प्रभावी अवधि, $D_{5-95} = I_A^{95\%} - I_A^{5\%}$, तथा t_{mid} के माध्यम से समस्या की भौतिकी से जोड़ा जा सकता है। अंततः शून्य अवशिष्ट वेग सुनिश्चित करने के लिए अनुकरणित फलन का उच्च-पारक निस्यंदन किया जाता है।

भू-गति प्रतिरूप-प्राचल सदिश को निम्न प्रकार संक्षेपित किया जा सकता है $\boldsymbol{\theta} = \{I_A, D_{5-95}, t_{mid}, \omega_{mid}, \omega', \zeta_f\}$। यादृच्छिक प्रतिरूप को next generation attenuation (NGA) प्रबल-गति आँकड़ा-संचय के एक उपसमुच्चय पर समायोजित करके प्रत्येक प्रतिरूप-प्राचल के लिए पूर्वानुमान संबंध विकसित किए गए हैं। ये पूर्वानुमान प्रतिरूप निम्न भूकंप और स्थल अभिलक्षणों के रूप में $\boldsymbol{\theta}$ का वर्णन करते हैं: 1) आघूर्ण परिमाण (M_w), 2) विदारण से निकटतम दूरी (R_{rup}) [km] में, 3) मृदा के ऊपरी 30 m का अपरूपण-तरंग वेग (V_{S30}) [m/s] में, और 4) भ्रंश क्रियाविधि (F_{mech}), या तो strike-slip अथवा उत्क्रम। अनुभवजन्य समीकरण निम्न सामान्य रूप लेते हैं:

$$\Phi^{-1}\left[F_\theta(\theta)\right] = \mu\left(M_w, R_{rup}, V_{S30}, F_{mech}, \mathbf{c}\right) + \eta + \sigma$$

जहाँ θ एक प्रतिरूप-प्राचल है, $\Phi[.]$ मानक गाउसीय संचयी वितरण फलन (CDF) है, और F_θ, θ का CDF है (जो अनुभवजन्य रूप से निर्धारित होता है)। तत्पश्चात $\Phi^{-1}\left[F_\theta(\theta)\right]$ किसी प्रतिरूप-प्राचल को भौतिक समष्टि से मानक प्रसामान्य समष्टि में रूपांतरित करता है। μ भूकंप और स्थल अभिलक्षणों के फलन के रूप में पूर्वानुमानित माध्य है तथा $\mathbf{c}$ समाश्रयण गुणांकों के सदिश को दर्शाता है। इसके अतिरिक्त, η और σ प्रसामान्यतः वितरित शून्य-माध्य यादृच्छिक चर हैं और क्रमशः अंतर-घटना तथा अंतः-घटना त्रुटियों को दर्शाते हैं। समाश्रयण गुणांक, त्रुटि-पदों के प्रसरण और प्रतिरूप-प्राचलों के बीच सहसंबंध (Rezaeian and Der Kiureghian, 2010) में प्राप्त किए जा सकते हैं।

67.11.2 Yamamoto और Baker (y-b) प्रतिरूप

Yamamoto और Baker ने यादृच्छिक भू-गतियाँ उत्पन्न करने हेतु समय-श्रेणी के समय और आवृत्ति अभिलक्षणों का परिमाणन करने के लिए तरंगिका पैकेट रूपांतरण (WPT) (जो विविक्त तरंगिका रूपांतरण, DWT, का विस्तारित रूप है) प्रयुक्त किया (Yamamoto, 2011), (Yamamoto and Baker, 2013)। WPT समय और आवृत्ति प्रांतों में विभेदन को नियंत्रित करने का लचीलापन बढ़ाता है। इसके अतिरिक्त, आधार फलन लांबिक होते हैं, जिससे समय-श्रेणी का सरल पुनर्निर्माण संभव होता है।

अग्र और प्रतिलोम WPT निम्न प्रकार परिभाषित हैं:

$$c_{j,k}^i = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi_{j,k}^i(t)dt\ ; \quad x(t) = \sum_{i=1}^{2^j}\sum_{k=1}^{2^{N-j}} c_{j,k}^i \psi_{j,k}^i(t)$$

जहाँ $x(t)$ समय-श्रेणी है, 2^N समय-श्रेणी में आँकड़ा-बिंदुओं की संख्या है, $c_{j,k}^i$ तरंगिका पैकेटों के i^{th} समुच्चय को j^{th} मापनी प्राचल पर दर्शाता है तथा k स्थानांतरण प्राचल है, और $\psi_{j,k}^i$ WPT फलन है।

WPT ऐसी समय-श्रेणी देता है जिसमें बड़े आयाम वाले तरंगिका पैकेट गुणांक कम और छोटे आयाम वाले गुणांक अधिक होते हैं। Yamamoto और Baker ने इस लाभ का उपयोग करके तरंगिका पैकेट गुणांकों

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के दो समूह परिभाषित किए: प्रमुख (जिसमें भू-गति की कुल ऊर्जा का लगभग 70% होता है) और गौण (जिसमें शेष 30% ऊर्जा होती है)। फलतः कुल तरंगिका पैकेट गुणांक इन दोनों समूहों का संयोजन हैं:

$$\left|c^i_{j,k}\right|^2 = \left|c^i_{j,k,maj}\right|^2 + \left|c^i_{j,k,min}\right|^2$$

जिसमें $c^i_{j,k,maj}$ और $c^i_{j,k,min}$ क्रमशः प्रमुख और गौण तरंगिका पैकेट गुणांक हैं।

त्वरण समय-श्रेणी के समय और आवृत्ति अभिलक्षणों का पूर्ण परिमाणन करने के लिए इस प्रतिरूप को 13 प्राचलों की आवश्यकता होती है। इन प्राचलों को यहाँ वर्गीकृत किया गया है; तथापि विस्तृत सूत्रीकरण के लिए पाठक (Yamamoto and Baker, 2013) देखें।

- प्रमुख समूह के लिए: 1) कालिक केंद्रक $E(t)_{maj}$, 2) कालिक प्रसरण $S^2(t)_{maj}$, 3) वर्णक्रमीय केंद्रक $E(f)_{maj}$, 4) वर्णक्रमीय प्रसरण $S^2(f)_{maj}$, 5) गुणांकों के समय और आवृत्ति के बीच सहसंबंध $\rho(t,f)_{maj}$, 6) तरंगिका पैकेट गुणांकों के वर्गित आयामों का माध्य $E(a)_{maj}$,
- गौण समूह के लिए: 7) कालिक केंद्रक $E(t)_{min}$, 8) कालिक प्रसरण $S^2(t)_{min}$, 9) वर्णक्रमीय केंद्रक $E(f)_{min}$, 10) वर्णक्रमीय प्रसरण $S^2(f)_{min}$, 11) समय और आवृत्ति गुणांकों के बीच सहसंबंध $\rho(t,f)_{min}$,
- 12) तरंगिका पैकेटों के आयाम की यादृच्छिकता $S(\xi)$, और 13) संचयी वर्गित त्वरण E_{acc}।

प्रमुख समूह के तरंगिका पैकेट गौण समूह के पैकेटों की तुलना में अत्यधिक यादृच्छिक हैं। अतः तरंगिका पैकेटों के वर्गित आयामों और समय-आवृत्ति स्थानों का पृथक प्रतिरूपण किया जाता है

$$a_{maj} \sim \text{Exponential}\left[E\left(\left|c^i_{j,k,maj}\right|^2\right)\right]$$
$$\left[t_{k,maj}, f_{i,maj}\right] \sim \text{Lognormal}\left[M_{maj}, \Sigma_{maj}\right]$$

जहाँ a_{maj} प्रमुख समूह के तरंगिका पैकेट गुणांक का वर्गित आयाम है, $t_{k,maj}$ और $f_{i,maj}$ प्रमुख तरंगिका गुणांकों के समय तथा आवृत्ति स्थानों के केंद्र हैं, और M_{maj} तथा Σ_{maj} निम्न प्रकार परिभाषित हैं:

$$M_{maj} = \begin{bmatrix} E\left(\ln t_{k,maj}\right) & E\left(\ln f_{i,maj}\right) \end{bmatrix}$$
$$\Sigma_{maj} = \begin{bmatrix} S^2\left(\ln t_{k,maj}\right) & Cov\left(\ln t_{k,maj}, \ln f_{i,maj}\right) \\ Cov\left(\ln t_{k,maj}, \ln f_{i,maj}\right) & S^2\left(\ln f_{i,maj}\right) \end{bmatrix}$$

दूसरी ओर, गौण समूह के तरंगिका पैकेटों का आकलन समय, आवृत्ति और अवशेषों के द्विचर लघुगणक-प्रसामान्य फलनों द्वारा किया जा सकता है (जिनके नियंत्रण के लिए केवल पाँच प्राचल आवश्यक हैं):

$$\left|c^i_{j,k,min}\right|^2 = \frac{1}{2\pi S\left(\ln t_{k,min}\right) S\left(\ln f_{i,min}\right)\sqrt{1-\rho^2\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right)}}$$
$$\times \frac{1}{\ln t_{k,min}.\ln f_{i,min}} \exp\left[-\frac{W_1^2 - 2\rho\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right) W_1 W_2 + W_2^2}{2\left(1-\rho^2\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right)\right)}\right] \times \xi_{k,i}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $t_{k,min}$ और $f_{i,min}$ गौण तरंगिका गुणांकों के समय तथा आवृत्ति स्थानों के केंद्र हैं, ρ सहसंबंध गुणांक है, $\xi_{k,i}$ अंशांकन में प्रयुक्त लघुगणक-प्रसामान्य यादृच्छिक चर है, और दो मध्यवर्ती चर $W_1 = \frac{\ln t_{k,min} - E(\ln t_{k,min})}{S(\ln t_{k,min})}$ तथा $W_2 = \frac{\ln f_{i,min} - E(\ln f_{i,min})}{S(\ln f_{i,min})}$ के रूप में परिभाषित हैं।

अंततः किसी विशिष्ट भूकंप-परिदृश्य के लिए भू-गति उत्पन्न करने हेतु 13 प्राचलों को द्वि-चरणीय समाश्रयण विश्लेषण का उपयोग करके उस परिदृश्य के प्राचलों से जोड़ा जाता है। NGA आँकड़ा-संचय से अभिलिखित भू-गतियों के एक बड़े समुच्चय का उपयोग अधिकतम संभाव्यता आकलन और निम्न फलनिक रूप द्वारा प्राचलों का आकलन करने के लिए किया गया:

$$Y = \alpha + \beta_1 M_w + \beta_2 \ln M_w + \beta_3 \exp M_w + \beta_4 \left(R_{hyp} - R_{rup}\right) + \beta_5 \ln \sqrt{R_{rup}^2 + h^2} + \beta_6 \ln V_{S30} + \eta + \sigma$$

जहाँ Y किसी प्रतिरूप-प्राचल का प्राकृतिक लघुगणक है, और σ तथा η क्रमशः अंतः-घटना और अंतर-घटना अवशेष हैं। प्राचल h, Y के अत्यधिक बड़े मानों के पूर्वानुमान से बचने हेतु नियत किया जाता है जब R_{hyp} (अवकेंद्रिक दूरी) के मान छोटे हों, और प्राचल α तथा β_i समाश्रयण गुणांक हैं जिन्हें (Yamamoto, 2011) और (Yamamoto and Baker, 2013) में पाया जा सकता है।

67.12 सहन-अवधि उत्तेजन फलन

सहन-अवधि (ET) विधि के व्यावहारिक उपयोग के लिए उपयुक्त सहन-अवधि उत्तेजन फलन (ETEF) आवश्यक हैं, जो सुसंगत विश्लेषण परिणाम प्रदान करें। यह खंड ETEF की विभिन्न पीढ़ियों और उन्हें उत्पन्न करने वाले उद्देश्य फलनों[2] पर प्रकाश डालता है। सहन-अवधि विधि में ETEF का उपयोग गतिक भार निवेश फलनों के रूप में किया जाता है। ET विधि में सभी तीव्रता-स्तरों को एक ही उत्तेजन फलन में समाविष्ट किया जाता है। दूसरे शब्दों में, सहन-अवधि उत्तेजन का प्रत्येक समय किसी विशिष्ट तीव्रता-स्तर के संगत होता है। ETEF सामान्यतः इस प्रकार उत्पन्न किए जाते हैं कि वे वांछित अभिकल्प वर्णक्रमों अथवा भू-गतियों के समुच्चयों के साथ संगत हों और उनकी तीव्रता समय के साथ बढ़े। भू-गतियों के साथ संगतता और तीव्रीकरण ETEF की दो प्रमुख विशेषताएँ हैं, जिन पर इन कृत्रिम फलनों के अनुकरण में विचार करना आवश्यक है। ETEF का तीव्रीकरण गुण आयाम-वृद्धि परिच्छेदिका लागू करके प्राप्त किया जाता है। आयाम-वृद्धि परिच्छेदिका अनेक रूप ले सकती है। प्रारंभिक सहन-अवधि उत्तेजनों में रैखिक परिच्छेदिका (जिसमें अधिकतम त्वरण समय के प्रत्यक्ष समानुपाती होता है) अपनाई गई थी। संचयी निरपेक्ष वेग-संगत सहन-अवधि उत्तेजनों के अनुकरण के लिए घातांकीय रूपों पर भी विचार किया जाता है (Mashayekhi et al., 2018b)।

भू-गतियों के साथ संगतता सहन-अवधि उत्तेजन की एक अन्य महत्त्वपूर्ण विशेषता है। भू-गतियों के तीन प्रमुख अभिलक्षण हैं: तीव्रता, आवृत्ति-सामग्री और अवधि। दक्ष सहन-अवधि उत्तेजन का अनुकरण करने के लिए इन तीनों विशेषताओं पर विचार करना आवश्यक है। चूँकि गतियों की आवृत्ति-सामग्री और आयाम प्रतिक्रिया-वर्णक्रम में पर्याप्त रूप से प्रतिबिंबित होते हैं, अतः अनुकरण प्रक्रिया में प्रतिक्रिया-वर्णक्रम पर विचार करने का अर्थ है कि आयाम और आवृत्ति-सामग्री को उपयुक्त रूप से सम्मिलित किया गया है।

[2]यह खंड Prof. H.E. Estekanchi और Dr. M.R. Mashayekhi के सहयोग से लिखा गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

उपर्युक्त आवश्यकताओं को अनुकरण प्रतिबंध कहा जाता है। चाहे चर-परिभाषा की कोई भी विधि प्रयुक्त हो, अनुकरण प्रतिबंधों की संख्या सामान्यतः चरों की संख्या से बहुत अधिक होती है Mashayekhi, Estekanchi, and Vafai, 2019a; Mashayekhi, Estekanchi, and Vafai, 2019b। चूँकि विश्लेषणात्मक विधियाँ ETEF के अनुकरण की व्यावहारिक प्रक्रिया प्रदान नहीं करतीं, इसलिए इष्टतमीकरण उपागम प्रयुक्त किए जाते हैं।

इस खंड में ETEF के उत्पादन का वर्णन किया गया है। उपलब्ध त्वरण भार फलन लक्ष्य वर्णक्रम, आवर्त-परास, उद्देश्य फलन, समय-चरण, अवधि-लंबाई और इष्टतमीकरण कलनविधि की दृष्टि से भिन्न होते हैं। ये उत्तेजन Endurance Time Method की वेबसाइट पर ऑनलाइन उपलब्ध हैं। ETEF उत्पादन के विकासक्रम में सहन-अवधि उत्तेजनों की पाँच पीढ़ियाँ पहचानी जा सकती हैं।

67.12.1 ETEF की प्रथम पीढ़ी

प्रथम-पीढ़ी के उत्तेजन केवल ET विधि की मूल संकल्पना प्रस्तुत करने के लिए उत्पन्न किए गए थे। इस पीढ़ी के ETEF व्यावहारिक उपयोग के लिए उपयुक्त नहीं हैं। प्रथम-पीढ़ी के उत्तेजनों के अनुकरण में आयाम और आवृत्ति-सामग्री में अनस्थिर यादृच्छिक प्रतिरूपों की संकल्पना प्रयुक्त की गई। इस विधि में उत्तेजन फलनों को हार्मोनिक फलनों की सीमित संख्या के योग के रूप में निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है:

$$a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

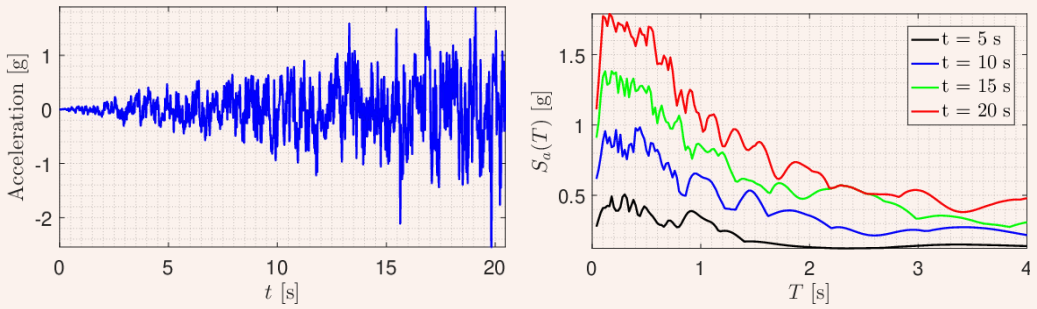
जहाँ N हार्मोनिक फलनों की संख्या है, ω_i और ϕ_i, i^{th} ज्या फलन की क्रमशः कोणीय आवृत्ति तथा कला कोण हैं, और A_i आवृत्ति-आयाम है।

शून्य माध्य और एक के मानक विचलन वाले गाउसीय वितरण का यादृच्छिक उत्तेजन विचारित किया गया। त्वरण आँकड़ा-बिंदुओं की संख्या 2048 चुनी गई और अधिकतम त्वरण 1.0 g रखा गया। एक उपयुक्त मॉडुलन फलन अपनाया गया। अवांछित आवृत्ति-परासों को हटाने के लिए उत्तेजनों को प्रतिलोम Fourier रूपांतरण तकनीक से निस्यंदित किया गया। उद्देश्य किसी विशिष्ट वर्णक्रम से मेल खाने वाले उत्तेजन का अनुकरण करना था। लक्ष्य वर्णक्रम एक विशिष्ट भूकंपीय संहिता अभिकल्प वर्णक्रम था। Fourier वर्णक्रमीय आयामों को समायोजित करके संकेत को वर्णक्रमीय त्वरण फलन से मेल खाने हेतु संशोधित किया गया। स्वीकार्य अनुरूपता प्राप्त होने तक यह प्रक्रिया दोहराई गई। तत्पश्चात परिणामी स्थिर त्वरणलेख को एक रैखिक परिच्छेदिका फलन लागू करके संशोधित किया गया, जिसने विभिन्न समय-अंतरालों पर शिखर त्वरणों की दृष्टि से उसे तीव्रतर बनाया। इन त्वरणलेखों ने सहन-अवधि विश्लेषण की संकल्पना प्रदर्शित करने के उद्देश्य को भलीभाँति पूरा किया। प्रथम पीढ़ी का नमूना त्वरण समय-इतिहास चित्र 67.13a में दर्शाया गया है।

67.12.2 ETEF की द्वितीय पीढ़ी

द्वितीय पीढ़ी में अनुकरण प्रक्रिया के अंतर्गत त्वरण और विस्थापन वर्णक्रमों पर विचार किया जाता है। लक्ष्य वर्णक्रम भू-गतियों के किसी समुच्चय का औसत वर्णक्रम अथवा संहिता-अनुरूप वर्णक्रम हो सकता है। नए ETEF का अनुकरण करने के लिए द्वितीय पीढ़ी में पहली बार इष्टतमीकरण तकनीकें

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) त्वरण समय-इतिहास; ETA20ac01 (प्रथम पीढ़ी, 1st generation)

(b) प्रतिक्रिया-वर्णक्रम; ETA20a01 (द्वितीय पीढ़ी, 2nd generation)

चित्र 67.13: नमूना ETEF

प्रयुक्त की गईं। इष्टतमीकरण के संदर्भ में समीकरणों को उद्देश्य फलनों के रूप में व्यक्त किया जाता है। इस श्रेणी का उद्देश्य फलन समीकरण 67.4 में दर्शाया गया है। उद्देश्य फलन में त्वरण और विस्थापन वर्णक्रमों पर विचार किया गया है।

$$F(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i) \right]^2 + \alpha \left[S_u(T_j,t_i) - S_{uC}(T_j,t_i) \right]^2 \right\} \tag{67.4}$$

जहाँ a_g वांछित सहन-अवधि उत्तेजन है, और α सापेक्ष भार प्राचल है जो लक्ष्य मानों से त्वरण विचलनों की तुलना में विस्थापन विचलन पर लगाए गए प्रभावी दंड को समायोजित कर सकता है। α के उच्च मान लक्ष्य फलन को विस्थापन प्रतिक्रिया-अंतरों के प्रति अधिक संवेदनशील बनाते हैं और α का निम्न मान लक्ष्य फलन को त्वरण-वर्णक्रम अंतरों के प्रति अधिक संवेदनशील बनाता है। $S_{aC}(T,t)$ समय t और आवर्त T पर लक्ष्य त्वरण प्रतिक्रिया-वर्णक्रम है, जो संहिताबद्ध अभिकल्प त्वरण वर्णक्रम अथवा भू-गतियों के किसी समूह का औसत वर्णक्रम हो सकता है। $S_{uC}(T,t)$ समय t और आवर्त T पर लक्ष्य विस्थापन प्रतिक्रिया-वर्णक्रम है। $S_u(T,\tau)$ और $S_a(T,\tau)$ आवर्त T तथा समय τ पर सहन-अवधि उत्तेजन के क्रमशः विस्थापन और त्वरण प्रतिक्रिया-वर्णक्रम हैं। t_{target} लक्ष्य समय है, अर्थात वह समय जिस पर सहन-अवधि उत्तेजन लक्ष्य वर्णक्रम उत्पन्न करते हैं। उपयुक्त लक्ष्य समय के चयन पर भी विचार किया जाना चाहिए। सामान्य अरैखिक स्थिति में यदि लक्ष्य समय बहुत कम हो तो संरचना को अरैखिक चक्रों की यथोचित संख्या से गुजरने का समय नहीं मिल सकता। दूसरी ओर, यदि लक्ष्य समय बहुत अधिक हो तो चक्रों की संख्या अवास्तविक रूप से बड़ी हो जाएगी।

द्वितीय-पीढ़ी के सहन-अवधि उत्तेजनों के उत्पादन में अरैखिक प्रतिक्रिया-मिलान सम्मिलित नहीं है। तथापि द्वितीय-पीढ़ी के उत्तेजनों के अनुकरण में दीर्घ आवर्त सम्मिलित करके उनका उपयोग यथोचित यथार्थता के साथ अरैखिक गतिक विश्लेषण में किया जा सकता है। द्वितीय पीढ़ी में उत्पन्न प्रथम श्रेणी ETA20a01 का त्वरण-वर्णक्रम चित्र 67.13b में दर्शाया गया है। देखा जा सकता है कि इस उत्तेजन का त्वरण-वर्णक्रम रैखिक रूप से बढ़ता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

67.12.3 ETEF की तृतीय पीढ़ी

तृतीय पीढ़ी के अनुकरण में अरैखिक प्रतिक्रियाओं की संगतता पर भी विचार किया गया। द्वितीय-पीढ़ी के सहन-अवधि उत्तेजनों के अनुकरण के सूत्रीकरण के समान, तृतीय पीढ़ी का अनुकरण सामर्थ्य गुणक R परिभाषित करके निम्न प्रकार सूत्रबद्ध किया जाता है:

$$
\begin{aligned}
S_u(T,t,R) &= \max\left(|u(\tau)|\right); \quad \tau \in [0,t] \\
S_{uT}(T,t,R) &= \frac{t}{t_{target}} \times S_{uT}(T,R) \times \frac{T^2}{4\pi^2}; \quad \tau \in [0,t] \\
F(a_g) &= \sum_{T_k=0}^{T_k=T_{max}} \sum_{R_j=0}^{R_j=R_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left[S_u(T_k,R_j,t_i) - S_{uT}(T_k,R_j,t_i)\right]^2
\end{aligned}
$$

द्वितीय पीढ़ी में प्रत्येक आवर्त पर उद्देश्य फलन की गणना हेतु सभी समयों के लिए एक ही गतिक विश्लेषण आवश्यक था; इसके विपरीत तृतीय पीढ़ी में प्रत्येक आवर्त पर उद्देश्य फलन की गणना हेतु प्रत्येक समय के लिए पृथक गतिक विश्लेषण आवश्यक है। यह तथ्य तृतीय-पीढ़ी के सहन-अवधि उत्तेजनों के अनुकरण को जटिल बनाता है।

67.12.4 ETEF की चतुर्थ पीढ़ी

चतुर्थ पीढ़ी में अवधि-संबंधी प्राचल भी अनुकरण प्रक्रिया में सम्मिलित किए जाते हैं। यद्यपि त्वरण और विस्थापन वर्णक्रम भू-गतियों की तीव्रता तथा आवृत्ति-सामग्री के अच्छे प्रतिनिधि हैं, भू-गतियों का समुचित परिमाणन करने के लिए केवल तीव्रता और आवृत्ति-सामग्री ही नहीं, बल्कि अवधि-अभिलक्षणों पर भी विचार करना आवश्यक है। भूकंप अभियांत्रिकी साहित्य में अवधि की अनेक परिभाषाएँ प्रस्तावित की गई हैं (O'Hara and Jacobson, 1991; Wang et al., 2016; Bommer and Martinez-Pereira, 1999; Bolt, 1973); तथापि चतुर्थ-पीढ़ी के ETEF के अनुकरण में संचयी निरपेक्ष वेग (CAV) सम्मिलित किया गया है। Campbell and Bozorgnia, 2012 सुझाव देते हैं कि पारंपरिक संरचनाओं के सामान्य वर्ग की संभावित क्षति का शीघ्र आकलन करने के लिए CAV का उपयोग किया जा सकता है। CAV को गणितीय रूप से $CAV = \int_0^{t_{max}} |a(t)|\,dt$ द्वारा दर्शाया जाता है, जहाँ $a(t)$ त्वरण समय-इतिहास है और t_{max} अवधि है।

समीकरण 67.5 के उद्देश्य फलनों का उपयोग "ETA40lc" श्रेणी के अनुकरण के लिए किया गया। प्रथम तीन पद अवशेषों की गणना सापेक्ष रूप में करते हैं और अन्य तीन पद निरपेक्ष रूप में। Mashayekhi et al., 2018b ने दर्शाया कि निरपेक्ष और सापेक्ष पदों का संयोजन अधिक दक्ष सहन-अवधि उत्तेजन देता है। ये उद्देश्य फलन संपूर्ण समय और आवर्त-परासों पर अवशेषों का समाकलन करते हैं। ध्यान

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

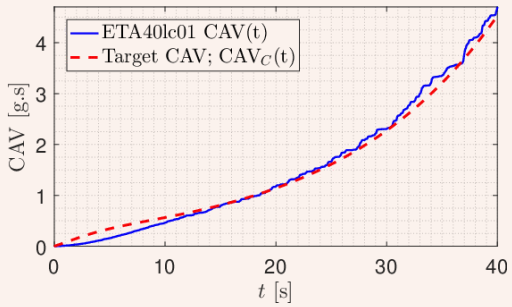
रहे कि इन उद्देश्य फलनों में त्वरण वर्णक्रम, रैखिक विस्थापन वर्णक्रम और CAV पर विचार किया जाता है।

$$F_{CAV-M}(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \begin{array}{c} \left[\frac{S_a(T_j,t_i)-S_{aC}(T_j,t_i)}{S_{aC}(T_j,t_i)}\right]^2 \\ + \left[\frac{S_u(T_j,t_i)-S_{uC}(T_j,t_i)}{S_{uC}(T_j,t_i)}\right]^2 \\ + \left[\frac{CAV(t_i)-CAV_C(t_i)}{CAV_C(t_i)}\right]^2 \\ + \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 \\ + \alpha_{S_u} \left[S_u(T_j,t_i) - S_{uC}(T_j,t_i)\right]^2 \\ \alpha_{CAV} \left[CAV(t_i) - CAV_C(t_i)\right]^2 \end{array} \right\} \tag{67.5}$$

जहाँ a_g त्वरण समय-इतिहास है।

ये उद्देश्य फलन a_g को निवेश के रूप में लेते हैं; α_{S_u} और α_{CAV} भार गुणक हैं, जो क्रमशः विस्थापन वर्णक्रम तथा CAV से संबद्ध अवशेषों के योगदान को नियंत्रित करते हैं।

समय के साथ बढ़ते त्वरण वर्णक्रम के आकार को नियंत्रित करने वाली तीव्रीकरण परिच्छेदिका का रैखिक होना आवश्यक नहीं है। इस श्रेणी के लिए घातांकीय परिच्छेदिका प्रयुक्त की गई। ETA40lc01 के CAV की तुलना चित्र 67.14 में लक्ष्य से की गई है और दोनों के बीच पर्याप्त मेल दिखाई देता है।



चित्र 67.14: ETA40lc01 का CAV बनाम लक्ष्य

67.12.5 ETEF की पंचम पीढ़ी

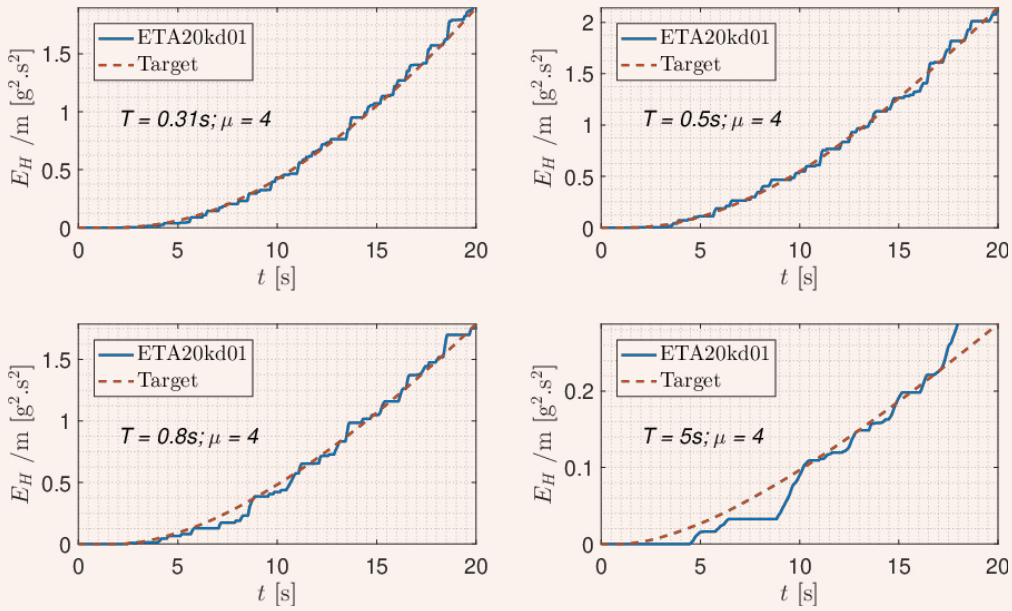
पंचम पीढ़ी में अवशोषित शैथिल्य ऊर्जा को भी उत्पादन प्रक्रिया में सम्मिलित किया जाता है। उल्लेखनीय है कि अवशोषित शैथिल्य ऊर्जा-माँग का उपयोग संचयी क्षति-संबंधी प्राचल के सूचक के रूप में किया जाता है। त्वरण वर्णक्रम के लिए रैखिक रूप से बढ़ता फलन अपनाया जाता है और अरैखिक विस्थापन वर्णक्रम तथा शैथिल्य ऊर्जा के संगत वर्धमान फलनों की गणितीय गणना की जाती है। अरैखिक विस्थापन और शैथिल्य ऊर्जा-माँग के वर्धमान फलनों की गणना की विस्तृत प्रक्रिया Mashayekhi et al., 2018a

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

में उपलब्ध है। समीकरण 67.6 वह उद्देश्य फलन है जो सहन-अवधि उत्तेजनों और लक्ष्य भू-गतियों के गतिक अभिलक्षणों के बीच वर्गित विसंगतियों की गणना करता है:

$$F_{ETEF}(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 + \sum_{\mu_k=1}^{\mu_k=\mu_{max}} \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \begin{matrix} \alpha_{u_m}\left[u_m(\mu_k,T_j,t_i) - u_{mC}(\mu_k,T_j,t_i)\right] \\ +\alpha_{E_H}\left[E_H(\mu_k,T_j,t_i) - E_{HC}(\mu_k,T_j,t_i)\right] \end{matrix} \right\} \tag{67.6}$$

जहाँ $a_g(t)$ त्वरण समय-इतिहास है, $S_a(t,T)$, $u_m(t,T,\mu)$ और $E_H(t,T,\mu)$ सहन-अवधि उत्तेजनों के गतिक अभिलक्षण हैं, तथा $S_{aC}(t,T)$, $u_{mC}(t,T,\mu)$ और $E_{HC}(t,T,\mu)$ भू-गतियों के गतिक अभिलक्षण हैं। E_H शैथिल्य ऊर्जा है और u_m अरैखिक प्रतिक्रिया-विस्थापन है। चित्र 67.15 चार भिन्न आवर्तों पर ETA20kd01 की शैथिल्य ऊर्जा की लक्ष्य से तुलना करता है।



चित्र 67.15: ETA20kd01 की शैथिल्य ऊर्जा बनाम लक्ष्य

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Fernando Botero द्वारा Terremoto en Popayán, 1999। Museo Botero, Bogotá, Colombia।

67.13 उदाहरण 67.1: भूकंपीय संकट विश्लेषण

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

यह उदाहरण Los Angeles, California में 30-मंजिला ऊँची इमारत के लिए प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA) और भूकंपीय वियोजन प्रस्तुत करता है। इसका उद्देश्य शिखर भू-त्वरण (PGA) के विभिन्न स्तरों के अतिक्रमण की वार्षिक प्रायिकता का आकलन करना और भूकंपीय जोखिम में योगदान देने वाले प्रमुख भूकंप-परिदृश्यों को निर्धारित करना है।

भूकंप-विवर्तनिक परिवेश

- भवन-स्थल San Andreas Fault से 50 km दूर स्थित है; यह एक प्रमुख strike-slip भ्रंश है जिसका M7.8–8.2 भूकंप उत्पन्न करने का इतिहास है। - अतिरिक्त मध्यम भ्रंश (M5.5–6.5) स्थल के 20 km के भीतर विद्यमान हैं। - स्थल को औसत अपरूपण-तरंग वेग $V_{S30} = 600$ m/s वाली दृढ मृदा (स्थल वर्ग C) के रूप में वर्गीकृत किया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भूकंपिता प्रतिरूप (पुनरावृत्ति संबंध)

Gutenberg-Richter नियम का उपयोग करते हुए:

$$\log N_M = a' - b'M \tag{67.7}$$

जहाँ:

- क्षेत्रीय भूकंपिता प्राचल:
  - California: $a' = 6.2$, $b' = 1.1$
- न्यूनतम परिमाण: $M_{min} = 4.5$
- अधिकतम परिमाण: $M_{max} = 8.0$
- परिमाण $M \geq 7.5$ की घटना की प्रत्यावर्तन अवधि: 200 वर्ष
- $M \geq 6.0$ भूकंपों की वार्षिक घटना-दर: 0.03 घटनाएँ/वर्ष

क्षीणन प्रतिरूप (GMPE)

Boore, Joyner और Fumal (1997) GMPE का उपयोग करते हुए:

$$\ln \text{PGA} = b_1 + b_2(M - 6) + b_5 \ln(r_{jb} + h) \tag{67.8}$$

जहाँ:

- $M = 7.5$
- Joyner-Boore दूरी: $r_{jb} = 50$ km
- गहराई पद: $h = 5.0$ km
- पूर्वानुमानित PGA: $0.22g$ (माध्यिका मान)

भूकंपीय संकट विश्लेषण

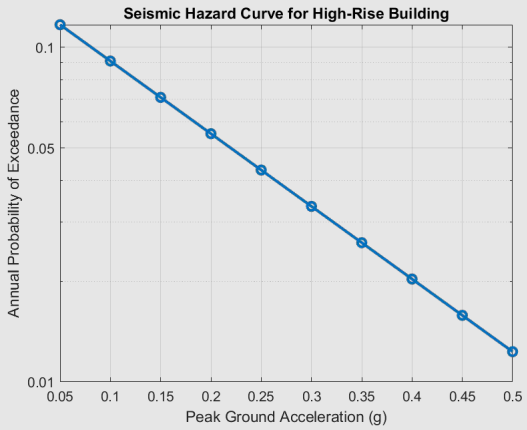
भूकंपीय संकट-वक्र स्थल पर शिखर भू-त्वरण (PGA) के विभिन्न स्तरों की अतिक्रमण-प्रायिकता दर्शाता है। अतिक्रमण-प्रायिकता के लिए घातांकीय क्षय प्रतिरूप का उपयोग करके संकट-वक्र उत्पन्न किया जाता है:

$$P(Y \geq y) = \lambda_0 e^{-by} \tag{67.9}$$

जहाँ λ_0 आधार अतिक्रमण-प्रायिकता है और b क्षय-दर है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



निम्न तालिका विभिन्न भू-गति स्तरों के लिए अतिक्रमण की वार्षिक प्रायिकता प्रदान करती है।

PGA (g)	अतिक्रमण की वार्षिक प्रायिकता
0.05	0.12
0.1	0.06
0.2	0.015
0.3	0.003

भूकंपीय संकट वियोजन

भूकंपीय संकट-वियोजन उन सर्वाधिक संभावित भूकंप-परिदृश्यों की पहचान करता है जो किसी दिए गए वर्णक्रमीय त्वरण स्तर पर संकट में योगदान देते हैं। संरचनात्मक अभिकल्प के लिए प्रतिनिधि भू-गतियों के चयन में यह विश्लेषण अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

$S_a(T = 1.0s) = 0.8g$ के लिए सर्वाधिक संभावित भूकंप-परिदृश्य है:

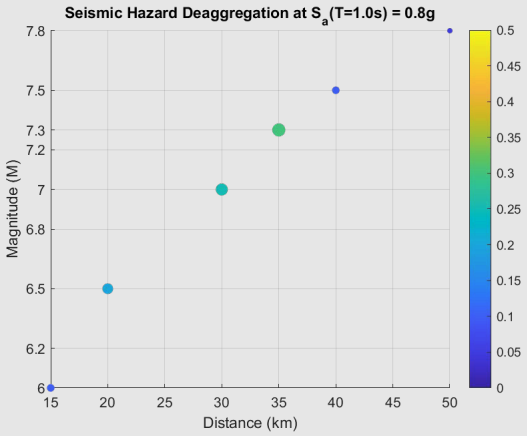
- **परिमाण:** $M = 7.3$
- **दूरी:** $R = 35$ km
- **विदारण प्रकार:** Strike-slip

संकट में अतिरिक्त योगदानों में सम्मिलित हैं:

- $M6.5$, 20 km पर, लगभग 20% योगदान देता है
- $M7.8$, 50 km पर, लगभग 30% योगदान देता है
- $M7.0$, 40 km पर, लगभग 50% योगदान देता है (प्रमुख परिदृश्य)

निम्न वियोजन आलेख संकट-स्तर में विभिन्न परिमाण-दूरी युग्मों के सापेक्ष योगदान दर्शाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चर्चा और अभियांत्रिकी निहितार्थ

संकट-वक्र और वियोजन विश्लेषण के परिणाम भूकंपीय अभिकल्प के लिए मूल्यवान अंतर्दृष्टि प्रदान करते हैं:

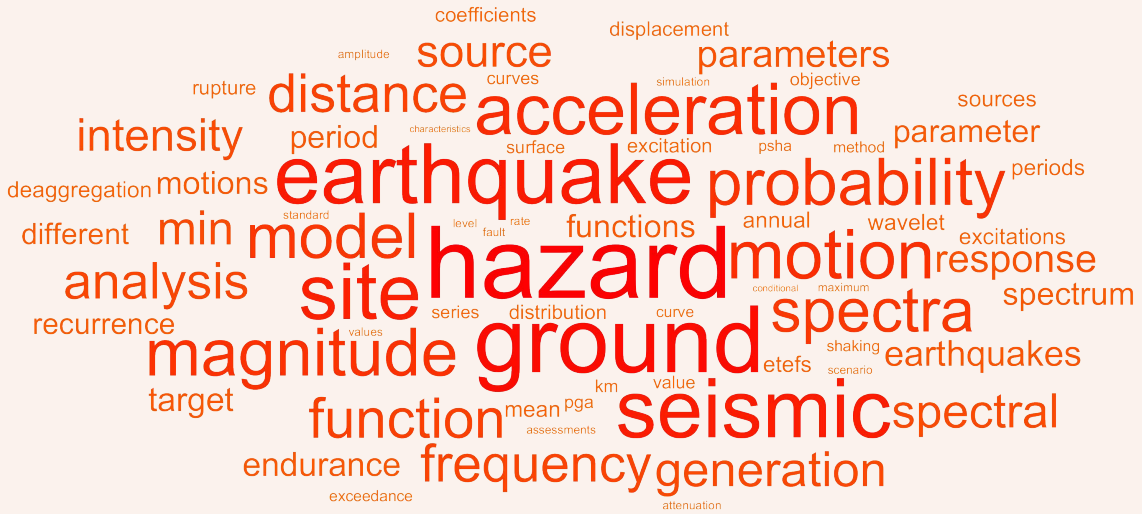
- सर्वाधिक गंभीर भूकंप-परिदृश्य $M7.3$ घटना के संगत है जो 35 km पर घटित होती है; यह दर्शाता है कि निकट-क्षेत्र भूकंपीय प्रभावों पर विचार किया जाना चाहिए।
- PGA = 0.2g के लिए वार्षिक अतिक्रमण-प्रायिकता 1.5% है, जो लक्ष्य जोखिम-स्तरों पर आधारित भूकंपीय अभिकल्प निर्णयों को प्रभावित कर सकती है।
- वियोजन परिणाम अरैखिक समय-इतिहास विश्लेषण के लिए भू-गति अभिलेखों के चयन में सहायक होते हैं, जिससे यथार्थवादी संरचनात्मक प्रतिक्रिया पूर्वानुमान सुनिश्चित किए जा सकें।

निष्कर्ष

PSHA परिणाम दर्शाते हैं कि ऊँची इमारत के स्थल के लिए *सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण संकट* $M7.3$ भूकंपों से उत्पन्न होता है, जो 35 km की दूरी पर घटित होते हैं। ये परिणाम संरचनात्मक सुरक्षा के लिए उपयुक्त भूकंपीय *अभिकल्प प्राचल* निर्धारित करने में अभियंताओं की सहायता करते हैं। संकट-वक्र विभिन्न भू-गति तीव्रताओं की प्रायिकता के आकलन का आधार प्रदान करता है, जबकि वियोजन विश्लेषण भूकंपीय जोखिम में योगदान देने वाले प्रमुख भूकंप-परिदृश्यों की पहचान करता है।

MATLAB®कोड §I.7.1 में है।

प्रारूप



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

68 भूकंपीय संकट विश्लेषण II

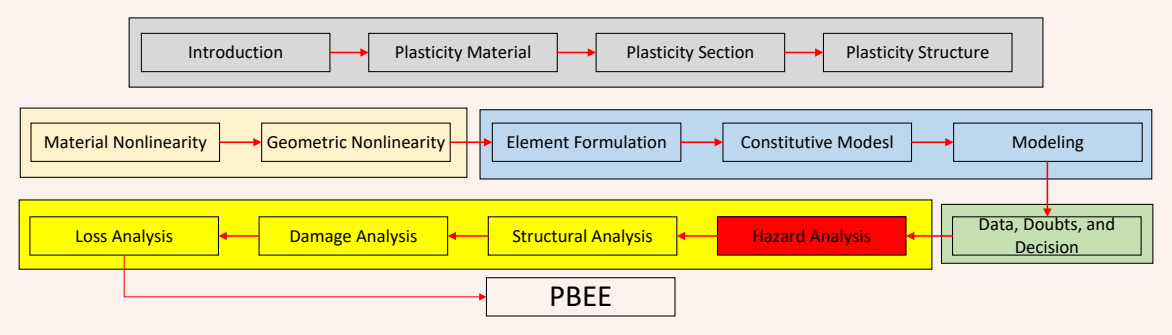
सारांश

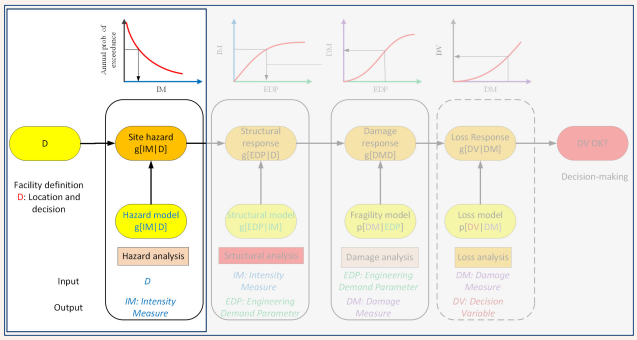
अध्याय 67 में प्रस्तुत भूकंपीय संकट विश्लेषण की आधारभूत अवधारणाओं पर आगे बढ़ते हुए, यह अध्याय व्यापक संकट आकलन के लिए आवश्यक प्रमुख पक्षों को सम्मिलित करके विवेचन का विस्तार करता है।

इसमें भू-गति तीव्रताओं की वार्षिक अतिक्रमण दर के परिमाणन में प्रयुक्त प्रायिकतामूलक रूपरेखा का परिचय दिया गया है तथा संकट वक्रों की रचना और व्याख्या का अन्वेषण किया गया है।

इसके अतिरिक्त, संरचनात्मक निष्पादन और प्रत्यास्थता पर भूकंपीय संकट के प्रभावों के मूल्यांकन हेतु इसमें अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण (ESRA) को समेकित किया गया है। अध्याय भूकंपीय अभिकल्प में प्रत्यावर्तन अवधियों की भूमिका, chap:trustregion परिमाणन के लिए तर्क-वृक्षों के अनुप्रयोग तथा निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी के साथ प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA) के अंतर्संबंध का भी परीक्षण करता है। ये उन्नत कार्यविधियाँ जोखिम का प्रभावी प्रबंधन करते हुए भूकंपीय घटनाओं को सह सकने वाली संरचनाओं के अभिकल्प के लिए महत्त्वपूर्ण अंतर्दृष्टि प्रदान करती हैं।

68.1 परिचय 2245
68.2 वार्षिक अतिक्रमण दर 2245
68.3 संकट वक्र 2246
68.4 अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण (ESRA) 2247
68.4.1 उदाहरण 68.1: प्रत्यावर्तन अवधि की गणनाएँ 2248
68.5 SHA + ESRA के रूप में प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA) 2249





संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

68.1 परिचय

यद्यपि अध्याय 67 में भूकंपीय संकट विश्लेषण का अत्यंत विस्तार से विवेचन किया गया था, फिर भी कुछ पक्ष, विशेषतः व्यावहारिक अनुप्रयोगों और प्रायिकतामूलक रूपरेखा के विस्तारों से संबंधित पक्ष, अनसुलझे रह गए हैं। यह अध्याय संकट वक्रों, प्रत्यावर्तन अवधियों और अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण जैसे प्रमुख घटकों का आगे अन्वेषण करते हुए पिछले अध्याय में स्थापित आधारों पर निर्मित है। इसके अतिरिक्त, यह प्रायिकतामूलक विधियों को संरचनात्मक निष्पादन आकलनों के साथ समेकित करता है और भूकंपीय संकट परिमाणन का अधिक व्यापक परिप्रेक्ष्य प्रस्तुत करता है। इन विषयों का विस्तार करके हम सैद्धांतिक संकट प्रतिरूपण और अभियांत्रिकी अभिकल्प तथा जोखिम न्यूनीकरण के लिए उसके व्यावहारिक निहितार्थों के बीच की दूरी को पाटते हैं।

1 यद्यपि अध्याय 67 में भूकंपीय संकट विश्लेषण का अत्यंत विस्तार से विवेचन किया गया था, कुछ पक्ष अनसुलझे रह गए हैं[1]।

2 “नीचे से ऊपर” उपागम के बावजूद, छूटे हुए पक्षों को यहाँ सम्मिलित किया गया है।

3 भूकंपीय संकट विश्लेषण (SHA), भूकंपीय सक्रियता के कारण किसी विशिष्ट स्थान पर भू-कंपन और भूकंप-संबंधी अन्य प्रभावों की संभावना के मूल्यांकन की प्रक्रिया है। इसका उद्देश्य भूकंपीय घटनाओं की संभाव्यता और तीव्रता का परिमाणन करना है, जिससे संरचनाओं के अभिकल्प, जोखिमों के आकलन और भूकंप-प्रत्यास्थता की योजना के लिए महत्त्वपूर्ण सूचना प्राप्त होती है।

68.2 वार्षिक अतिक्रमण दर

4 प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA) में *वार्षिक अतिक्रमण दर* (λ), किसी विशिष्ट भू-गति तीव्रता (IM) के लिए एक आधारभूत माप है। यह उस प्रायिकता का परिमाणन करती है कि भू-गति एक वर्ष में दिए गए तीव्रता स्तर का अतिक्रमण करेगी:

$$\lambda(IM) = \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} P(IM > x \mid m, r)\, f_M(m)\, f_R(r)\, \mathrm{d}m\, \mathrm{d}r,$$

जहाँ:

- $P(IM > x \mid m, r)$: दूरी r पर परिमाण m के भूकंप की स्थिति में तीव्रता-माप द्वारा x का अतिक्रमण किए जाने की प्रायिकता।
- $f_M(m)$: Gutenberg-Richter संबंध जैसे पुनरावृत्ति प्रतिरूपों से प्राप्त भूकंप-परिमाण का प्रायिकता घनत्व फलन।
- $f_R(r)$: स्रोत-से-स्थल दूरी का प्रायिकता घनत्व फलन, जो क्षेत्रीय भूकंपिता और क्षीणन प्रभावों को सम्मिलित करता है।

[1] क्योंकि मैंने *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* में Amin Hariri-Ardebili द्वारा लिखे गए अध्याय को संशोधित न करने का निर्णय लिया था।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- $m_{\min}, m_{\max}, r_{\min}, r_{\max}$: परिमाण और दूरी की परिसीमाएँ, जिन्हें स्थल के लिए सभी प्रासंगिक भूकंपीय स्रोतों को समेटने हेतु चुना गया है।

5 वार्षिक अतिक्रमण दर (λ) यह दर्शाती है कि किसी विशिष्ट स्थल पर एक वर्ष में किसी विशेष भू-गति तीव्रता (IM) का औसतन कितनी बार अतिक्रमण अपेक्षित है। यह सभी संभावित भूकंप परिदृश्यों की संभाव्यता को संयोजित करती है और प्रत्येक परिदृश्य को उसकी घटित होने की प्रायिकता तथा भू-गति तीव्रता में उसके योगदान के अनुसार भारित करती है। यह माप भूकंपीय संकट के परिमाणन के लिए प्रायिकतामूलक रूपरेखा प्रदान करता है।

6 प्रायिकता $P(IM > x \mid m, r)$ सामान्यतः भू-गति पूर्वानुमान समीकरणों (GMPEs) से प्राप्त होती है, जो परिमाण, स्रोत-से-स्थल दूरी और मृदा गुणों जैसी स्थल-विशिष्ट दशाओं के आधार पर कंपन की अपेक्षित तीव्रता का प्रतिरूपण करते हैं।

7 PSHA प्रायः भूकंपीय स्रोत अभिलक्षण, पुनरावृत्ति प्रतिरूपों और GMPEs में ज्ञानात्मक अनिश्चितताओं को समेटने के लिए तर्क-वृक्षों का उपयोग करता है। वृक्ष की प्रत्येक शाखा किसी भिन्न प्रतिरूप या अभिगृहीत को दर्शाती है और उसे दिया गया भार प्रत्येक विकल्प में विश्वास को प्रतिबिंबित करता है। इन भारित योगदानों को संयोजित करके व्यापक प्रायिकतामूलक संकट आकलन प्राप्त किया जाता है।

68.3 संकट वक्र

संकट वक्र, λ (वार्षिक अतिक्रमण दर) और IM (तीव्रता-माप, जैसे चरम भू-त्वरण (PGA) अथवा वर्णक्रमीय त्वरण (SA)) के बीच संबंध को दर्शाता है, जैसा कि चित्र 68.1 में दिखाया गया है:

$$\lambda(IM) = \text{Rate of exceeding a specific ground motion level at the site.}$$

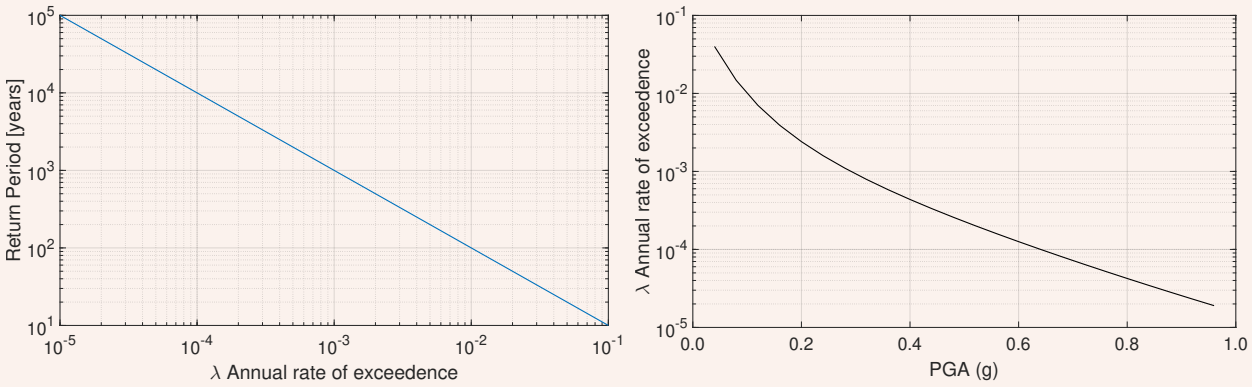
8 संकट वक्रों का उपयोग निम्नलिखित कार्यों के लिए किया जाता है:

- भवन की आयु के दौरान हानिकारक भू-गतियों के अनुभव की प्रायिकता का आकलन, जो निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी के लिए अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।
- विशिष्ट प्रत्यावर्तन अवधियों (जैसे, 10% अतिक्रमण 50 वर्षों में अथवा 2% अतिक्रमण 50 वर्षों में) के अनुरूप भू-गति स्तरों का चयन, जिनका उपयोग सामान्यतः भूकंपीय अभिकल्प संहिताओं में किया जाता है।
- विभिन्न भूकंप परिदृश्यों में भवन की अनुक्रियाओं और सुरक्षा सीमाओं का मूल्यांकन, जिससे संरचनात्मक अभिकल्प और जोखिम न्यूनीकरण में सहायता मिलती है।

9 संकट वक्र स्थलों के बीच उल्लेखनीय रूप से भिन्न होते हैं और स्थानीय भूकंपिता, भ्रंशों से निकटता तथा स्थल-विशिष्ट मृदा दशाओं के अंतर को प्रतिबिंबित करते हैं। उदाहरणार्थ, सक्रिय भ्रंशों के निकट स्थित स्थल सामान्यतः कम सक्रिय क्षेत्रों के स्थलों की तुलना में समान तीव्रता स्तर के लिए अधिक वार्षिक अतिक्रमण दर दर्शाते हैं।

10 अपने सरलतम रूप में प्रत्यावर्तन अवधि (T) और वार्षिक अतिक्रमण दर (λ) के बीच संबंध अत्यंत

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 68.1: संकट वक्र। बायाँ आलेख प्रत्यावर्तन अवधियों की अवधारणा दर्शाता है, जबकि दायाँ आलेख किसी विशिष्ट स्थल का संकट वक्र दिखाता है।

महत्त्वपूर्ण है। प्रत्यावर्तन अवधि किसी स्थल पर विशिष्ट भू-गति तीव्रता के अतिक्रमण की घटनाओं के बीच का औसत समयांतराल है। यह संबंध इस प्रकार व्यक्त किया जाता है:

$$T = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{or equivalently,} \quad \lambda = \frac{1}{T}.$$

11 उदाहरणार्थ, 475 वर्षों की प्रत्यावर्तन अवधि लगभग 0.0021 (0.21%) की वार्षिक अतिक्रमण प्रायिकता के अनुरूप है, जबकि 2,475 वर्षों की प्रत्यावर्तन अवधि 0.0004 (0.04%) की प्रायिकता के अनुरूप है। इन मानों का उपयोग क्रमशः साधारण और महत्त्वपूर्ण संरचनाओं के भूकंपीय अभिकल्प में व्यापक रूप से किया जाता है।

12 यह ध्यान रखना महत्त्वपूर्ण है कि प्रत्यावर्तन अवधि का अर्थ यह नहीं है कि कोई विशिष्ट घटना ठीक इन्हीं अंतरालों पर घटित होगी। इसके स्थान पर यह औसत पुनरावृत्ति अंतराल को दर्शाती है और प्रायिकताओं की गणना अनेक समय-सीमाओं पर की जाती है। उदाहरणार्थ, 475 वर्षों की प्रत्यावर्तन अवधि 10% अतिक्रमण प्रायिकता को 50 वर्षों में इंगित करती है।

68.4 अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण (ESRA)

13 अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण से आशय अभिकल्पित संरचनाओं, अवसंरचना और समाज के लिए भूकंपों से संबद्ध संभावित जोखिमों के आकलन और परिमाणन की प्रक्रिया से है।

14 यह *सुभेद्यता* (वह सीमा, जिस तक किसी संरचना को क्षति हो सकती है) और *उद्भासन* (प्रभावित अवसंरचना का मूल्य अथवा महत्त्व) को सम्मिलित करके भूकंपीय संकट विश्लेषण (SHA) का विस्तार करता है। ये कारक मिलकर भूकंपीय घटनाओं के अपेक्षित परिणाम निर्धारित करते हैं।

15 यदि हम समय के साथ भूकंप की घटनाओं को यादृच्छिक और स्वतंत्र निरूपित करने के लिए Poisson

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

वितरण मानते हैं, तो समयावधि t के दौरान किसी भू-गति स्तर के कम-से-कम एक अतिक्रमण की प्रायिकता इस प्रकार दी जाती है:

$$P_E = 1 - e^{-\lambda t}.$$

अतिक्रमण दर λ के लिए हल करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - P_E)}{t}.$$

प्रत्यावर्तन अवधि की परिभाषा में इसका उपयोग करने पर:

$$T_R = \frac{t}{-\ln(1 - P_E)}.$$

16 सरलीकृत समीकरण $T_R = 1/\lambda$, स्थिर वार्षिक अतिक्रमण दर λ मानता है और समय t में लघु अतिक्रमण प्रायिकताओं (P_E) के लिए वैध सन्निकटन है। यह सन्निकटन तब लागू होता है जब λt लघु हो, जिससे प्राप्त होता है:

$$e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t.$$

17 अतः हम λ को P_E के पदों में व्यक्त कर सकते हैं:

$$P_E \approx \lambda t \quad \Longrightarrow \quad \lambda \approx \frac{P_E}{t}.$$

18 इससे:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{t}{P_E}.$$

परंतु अधिक बड़े P_E के लिए बेहतर परिशुद्धता हेतु लघुगणकीय संबंध का उपयोग किया जाना चाहिए।

68.4.1 उदाहरण 68.1: प्रत्यावर्तन अवधि की गणनाएँ

अतिक्रमण की सामान्य प्रायिकता-परासों पर विचार करें:

- अभिकल्प आधार स्तर (DBL): $P_E \in [20\%, 64\%]$,
- अधिकतम अभिकल्प स्तर (MDL): $P_E \in [10\%, 20\%]$।

$t = 100$ वर्षों की अभिकल्प आयु वाले बाँध के लिए अतिक्रमण दरों और प्रत्यावर्तन अवधियों की गणना निम्नवत् की जाती है:

1. $P_E = 0.20$ (DBL, 20% अतिक्रमण प्रायिकता) के लिए:

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - 0.20)}{100} = -\frac{\ln(0.80)}{100} \approx 0.00223.$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इस अतिक्रमण दर का उपयोग करने पर आकलित प्रत्यावर्तन अवधि है:

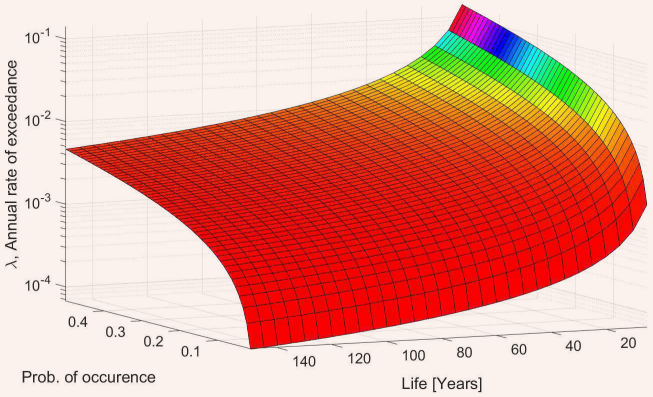
$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0.00223} \approx 450\,\text{years}.$$

2. $P_E = 0.10$ (MDL, 10% अतिक्रमण प्रायिकता) के लिए:

$$\lambda = -\frac{\ln(1-0.10)}{100} = -\frac{\ln(0.90)}{100} \approx 0.00105.$$

इस अतिक्रमण दर का उपयोग करने पर आकलित प्रत्यावर्तन अवधि है:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0.00105} \approx 1,000\,\text{years}.$$



चित्र 68.2: अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण पृष्ठ

68.5 SHA + ESRA के रूप में प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA)

19 अभियांत्रिकी भूकंपीय जोखिम विश्लेषण (ESRA) वार्षिक अतिक्रमण दर λ प्रदान करता है, जो दी गई आयु t में कम-से-कम एक घटना घटित होने की प्रायिकता को निरूपित करती है (चित्र 68.3)।

20 भूकंपीय संकट विश्लेषण (SHA), वार्षिक अतिक्रमण दर λ और तीव्रता-माप (IM) के बीच संबंध प्रदान करता है।

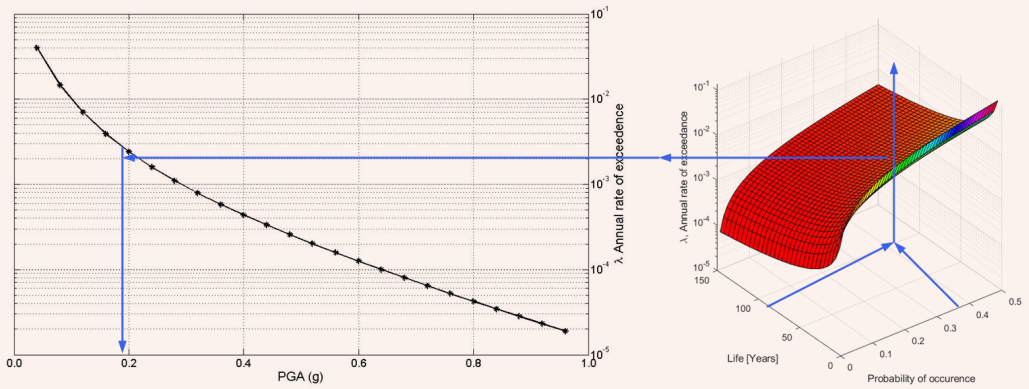
21 प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA), दी गई अवधि में किसी विशिष्ट स्थल पर भू-कंपन के विभिन्न स्तरों की संभाव्यता का आकलन करने हेतु ESRA और SHA को समेकित करता है।

22 विशिष्ट भूकंप परिदृश्यों पर केंद्रित नियतात्मक भूकंपीय संकट आकलनों के विपरीत, PSHA भूकंप के घटित होने, परिमाण, स्थान और भू-गति में अनिश्चितताओं को सम्मिलित करता है और भूकंपीय संकट का प्रायिकतामूलक माप प्रदान करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

23 यह उपागम एक सुव्यवस्थित प्रक्रिया का अनुसरण करता है, जैसा कि चित्र 68.3 में दर्शाया गया है:

1. निर्धारित करें: (a) विचाराधीन आयु (वर्ष) और (b) घटित होने की प्रायिकता।
2. ESRA पृष्ठ से λ प्राप्त करें (चित्र 68.2)।
3. संगत चरम भू-त्वरण (PGA) निर्धारित करने के लिए SHA वक्र का उपयोग करें (चित्र 68.1)।



चित्र 68.3: प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण (PSHA)।

24 PGA निर्धारित हो जाने पर अनेक विश्लेषणों के लिए n भू-गति त्वरण समय-इतिहासों का समुच्चय चुना (अथवा उत्पन्न किया) जाता है।

25 इन विश्लेषणों से प्रमुख अनुक्रिया प्राचल निकाले और आलेखित किए जाते हैं:

तीव्रता-माप (IM) भू-गति अभिलक्षणों का परिमाणात्मक निरूपण, सामान्यतः चरम भू-त्वरण (PGA) अथवा वर्णक्रमीय त्वरण।

अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP) सुरक्षा आकलन से संबंधित संरचनात्मक अनुक्रिया राशि, जैसे आधार अपरूपण, अंतरतलीय अपवाह अथवा तल त्वरण।

26 प्रायिकतामूलक भूकंपीय माँग प्रतिरूप विकसित करने के लिए यह प्रक्रिया विभिन्न तीव्रता स्तरों पर m बार दोहराई जाती है।

27 सभी स्थितियों में हम EDP *बनाम* IM को आलेखित करते हैं, जो *भूकंपीय माँग प्रतिरूप* है और प्रायः इस प्रकार निरूपित किया जाता है:

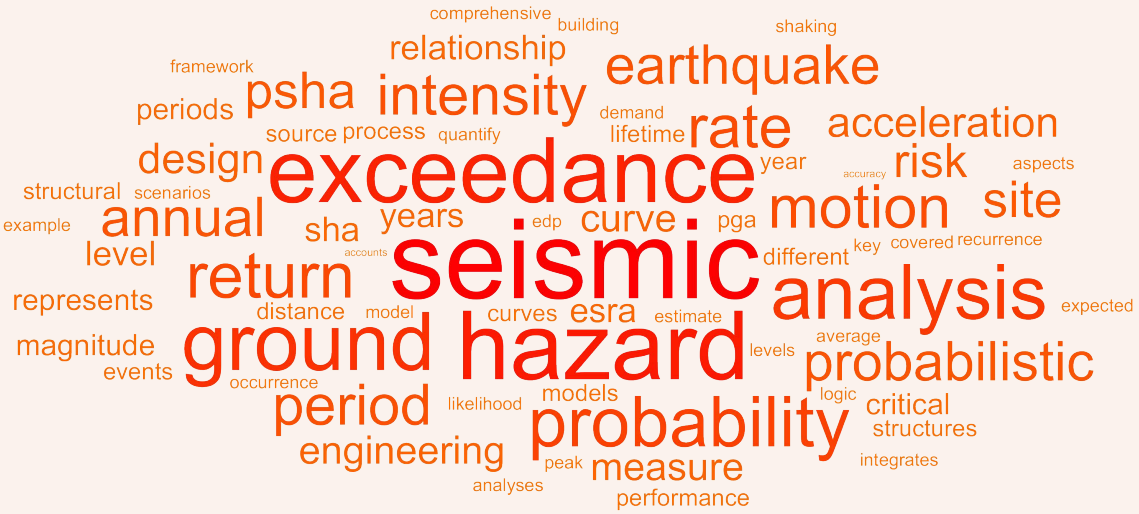
$$EDP = a.IM^b$$

जहाँ a और b अरैखिक गतिक विश्लेषणों से प्राप्त समाश्रयण गुणांक हैं (अध्याय 53 देखें)।

28 सावधान रहें, PSHA के परिणाम स्रोत अभिलक्षण सहित निवेश प्रतिरूपों की परिशुद्धता पर अत्यधिक निर्भर करते हैं; दुर्लभ चरम घटनाओं के लिए ऐतिहासिक आँकड़े सीमित हो सकते हैं; और गैर-तकनीकी हितधारकों के लिए प्रायिकतामूलक परिणामों की व्याख्या चुनौतीपूर्ण हो सकती है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

69 संरचनात्मक विश्लेषण

सारांश

यह अध्याय भूकंपीय विश्लेषण की उन्नत कार्यविधियाँ प्रस्तुत करता है और भवनों तथा सेतुओं जैसी संरचनाओं की भूकंपीय क्षमता के आकलन में प्रयुक्त अनेक उपागमों को समेटता है। पुशओवर विश्लेषण (POA), बहु-पट्टी विश्लेषण (MSA), वृद्धिशील गतिक विश्लेषण (IDA), मेघ विश्लेषण (CLA) और सहन-अवधि विश्लेषण (ETA) सहित विभिन्न विधियों के सैद्धांतिक आधारों तथा व्यावहारिक अनुप्रयोगों का अन्वेषण करते हुए उनके संबंधित लाभों और सीमाओं को रेखांकित किया गया है।

पुशओवर विश्लेषण का विस्तृत विवेचन व्यापक रूप से प्रयुक्त स्थैतिक अरैखिक प्रक्रिया के रूप में किया गया है, जो वृद्धिशील रूप से लगाए गए पार्श्व भारण के अधीन अप्रत्यास्थ संरचनात्मक व्यवहार की अंतर्दृष्टि प्रदान करती है। भूकंपीय बलों के अधीन संरचनात्मक प्रत्यास्थता की समझ को सुगम बनाने के लिए क्षमता वक्र और निष्पादन बिंदु जैसे प्रमुख परिणामों का विश्लेषण किया गया है। इसके अतिरिक्त, भूकंपीय विश्लेषण की व्यापक वैचारिक रूपरेखा स्थापित करने हेतु क्षमता फलन, प्रतिबलक-अनुक्रिया संबंधों और अभियांत्रिकी माँग प्राचलों जैसी आवश्यक परिभाषाएँ प्रस्तुत की गई हैं।

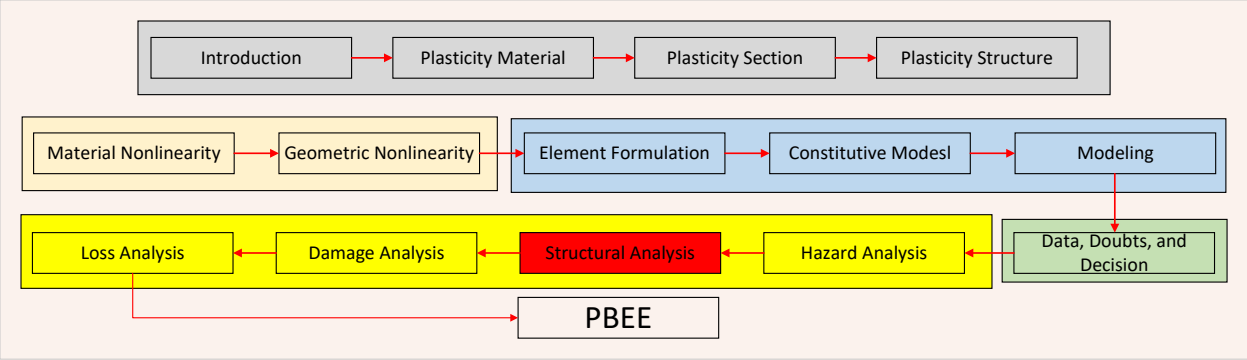
प्रत्येक कार्यविधि का परीक्षण उसके सैद्धांतिक आधार, कार्यान्वयन संबंधी विचारों और व्यावहारिक अनुप्रयोगों के संदर्भ में किया गया है। अध्याय प्रतिरूपण उपागमों, भार प्रतिरूपों की परिभाषाओं, वृद्धिशील भारण प्रक्रियाओं और संरचनात्मक अनुक्रिया आँकड़ों की व्याख्या का सुव्यवस्थित विवेचन करता है। विश्लेषण परिणामों पर उनके प्रभावों को दर्शाने के लिए प्रतिलोम त्रिभुजीय, आयताकार और प्रथम-विधा भार वितरणों सहित विभिन्न भार प्रतिरूपों का विश्लेषण किया गया है।

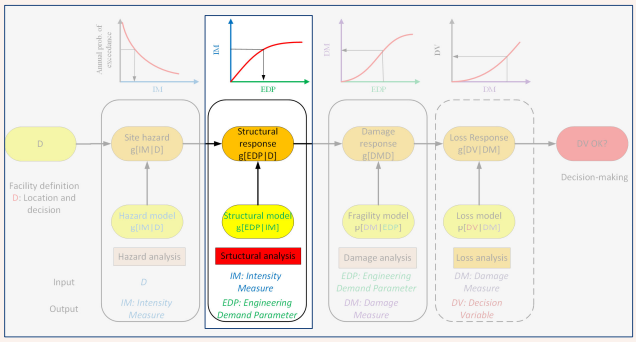
सिद्धांत और व्यवहार के बीच सेतु स्थापित करने के लिए दो विस्तृत प्रकरण-अध्ययन प्रस्तुत किए गए हैं। प्रथम उदाहरण में भूकंपीय विश्लेषण के अधीन इस्पात ढाँचा है, जिसमें सुघट्य कब्जों, आधार अपरूपण क्षमताओं और विरूपण सीमाओं की पहचान दर्शाई गई है। द्वितीय उदाहरण वास्तविक सेतु-स्तंभ अभिकल्प का गहन मूल्यांकन प्रस्तुत करता है, जिसमें AASHTO भूकंपीय सेतु अभिकल्प दिशानिर्देशों पर आधारित अनुक्रिया वर्णक्रम विश्लेषण, सुघट्य आघूर्ण गणनाएँ और निष्पादन-आधारित आकलन मानदंड सम्मिलित हैं।

अध्याय का समापन निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी और संरचनात्मक प्रत्यास्थता आकलन में इन कार्यविधियों के महत्त्व की पुनर्पुष्टि के साथ होता है। सुव्यवस्थित कार्यविधि और व्यावहारिक प्रकरण-अध्ययन प्रदान करके यह अध्याय संरचनाओं के भूकंपीय मूल्यांकन और अभिकल्प में संलग्न अभियंताओं के लिए महत्त्वपूर्ण संसाधन का कार्य करता है।

69.1 परिचय 2253
69.2 आधारभूत परिभाषाएँ 2254
69.3 क्षमता और माँग 2255
69.3.1 माँग-क्षमता संबंध 2255
69.3.2 माँग आकलन की विधियाँ 2255
69.3.3 क्षमता अभिकल्प सिद्धांत . 2257
69.4 भूकंपीय विश्लेषण विधियाँ 2258
69.4.1 पुशओवर विश्लेषण (POA) . . . 2258
69.4.2 वृद्धिशील गतिक विश्लेषण (IDA)2296
69.4.3 बहु-पट्टी विश्लेषण (MSA) . . 2298
69.4.4 मेघ विश्लेषण (CLA) 2300
69.4.5 सहन-अवधि विश्लेषण (ETA) . 2301
69.4.6 सारांश 2303
69.5 आगे क्या है 2305

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।





69.1 परिचय

1 भूकंपीय घटनाओं के प्रति संरचनात्मक अनुक्रिया का परिशुद्ध आकलन भूकंप अभियांत्रिकी का महत्त्व-पूर्ण पक्ष है। वर्षों के दौरान भवनों, सेतुओं और अन्य अवसंरचनाओं के भूकंपीय निष्पादन के मूल्यांकन हेतु विभिन्न विश्लेषणात्मक और संख्यात्मक विधियाँ विकसित की गई हैं।

2 सरलीकृत स्थैतिक उपागमों से लेकर व्यापक गतिक अनुकरणों तक विस्तृत ये कार्यविधियाँ अभियंताओं को संरचनात्मक व्यवहार के पूर्वानुमान और भूकंपीय जोखिमों के न्यूनीकरण के लिए साधनों का एक परास प्रदान करती हैं।

3 भूकंपीय विश्लेषण विधियों को व्यापक रूप से रैखिक और अरैखिक उपागमों में वर्गीकृत किया जा सकता है, जिनमें स्थैतिक और गतिक तकनीकों के बीच और भेद किए जाते हैं। पारंपरिक रैखिक-प्रत्यास्थ विश्लेषण गणनात्मक रूप से दक्ष होते हुए भी प्रायः उन अप्रत्यास्थ विरूपणों और क्षति क्रियाविधियों की पूर्ण सीमा को नहीं समेट पाते, जिन्हें संरचनाएँ प्रबल भूकंपों के दौरान अनुभव करती हैं। दूसरी ओर, अरैखिक विधियाँ सामग्री और ज्यामितीय अरैखिकता पर विचार करके संरचनात्मक निष्पादन का अधिक यथार्थपरक निरूपण प्रदान करती हैं।

4 यह अध्याय प्रमुख भूकंपीय विश्लेषण कार्यविधियों का गहन विवेचन प्रस्तुत करता है और संरचनात्मक प्रत्यास्थता की अधिक गहरी अंतर्दृष्टि प्रदान करने वाली अरैखिक तकनीकों पर केंद्रित है। इनमें स्थैतिक अरैखिक प्रक्रिया पुशओवर विश्लेषण ने अपेक्षाकृत कम गणनात्मक माँग के साथ अप्रत्यास्थ व्यवहार का सन्निकटन करने की अपनी क्षमता के कारण प्रमुखता प्राप्त की है। वृद्धिशील गतिक विश्लेषण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(IDA), बहु-पट्टी विश्लेषण (MSA) और सहन-अवधि विश्लेषण (ETA) जैसी अन्य उन्नत विधियाँ परिवर्ती भूकंपीय उत्तेजनों के अधीन संरचनात्मक निष्पादन के गतिक परिप्रेक्ष्य प्रस्तुत करती हैं।

5 भूकंपीय विश्लेषण का एक महत्त्वपूर्ण पक्ष क्षमता वक्रों, माँग प्राचलों और विफलता क्रियाविधियों सहित प्रमुख अनुक्रिया प्राचलों की व्याख्या है। ये संकेतक अभिकल्प निर्णयों, पुनःसंयोजन रणनीतियों और जोखिम आकलनों को सूचित करते हैं। इसके अतिरिक्त, SAP2000, ETABS और OpenSees जैसे आधुनिक गणनात्मक साधनों ने इन विधियों की परिशुद्धता और प्रयोज्यता को उल्लेखनीय रूप से बढ़ाया है तथा बढ़ती दक्षता के साथ जटिल संरचनात्मक अनुकरणों को सुगम बनाया है।

6 अध्याय भूकंपीय विश्लेषण तकनीकों के सैद्धांतिक आधारों, कार्यविधिक रूपरेखाओं और व्यावहारिक अनुप्रयोगों को सुव्यवस्थित रूप से रेखांकित करते हुए आगे बढ़ता है। तुलनात्मक विवेचन और प्रकरण-अध्ययनों के माध्यम से इसका उद्देश्य अभियंताओं और अनुसंधानकर्ताओं को प्रत्येक उपागम के लाभों तथा सीमाओं दोनों की व्यापक समझ से सुसज्जित करना है, जिससे अंततः भूकंप-प्रतिरोधी अभिकल्प और आकलन में सूचित निर्णय लेने में सहायता मिले।

7 अगले अध्याय (70) में हम यहाँ विवेचित अरैखिक भूकंपीय विश्लेषण का परिमाणात्मक आकलन प्रस्तुत करेंगे।

69.2 आधारभूत परिभाषाएँ

8 आइए संरचनात्मक तंत्र की "क्षमता" से संबंधित विभिन्न पदों के बीच भेद करके आरंभ करें।

क्षमता वक्र: अपनी मूल परिभाषा में यह अवधारणा अरैखिक बल-विस्थापन वक्र (Freeman, 1978) को संदर्भित करती है; इसका निर्धारण आधार अपरूपण के *सापेक्ष* छत विस्थापन की गणना के लिए संरचना को स्थैतिक रूप से भारित करके किया जाता है। इस वक्र को *पुशओवर* वक्र (Freeman, 1998) भी कहा जाता है। प्रयोगशाला में सुविधाओं की उपलब्धता के अनुसार भार-नियंत्रण अथवा विस्थापन-नियंत्रण नवाचार स्थापित करके भार-विस्थापन वक्र अभिलिखित किया जा सकता है। तथापि, विस्थापन-नियंत्रण परीक्षण का उपयोग करके विफलता-पश्च व्यवहार को अभिलिखित किया जा सकता है। पारंपरिक क्षमता वक्र को अपव्ययित ऊर्जा के पदों में भी आलेखित किया जा सकता है, जिसे *ऊर्जा-आधारित क्षमता* वक्र (D'Ambrisi and Mezzi, 2015) कहा जाता है।

क्षमता आरेख: यह अवधारणा छद्म-त्वरण के *सापेक्ष* विरूपण-वर्णक्रम कोटि (Chopra and Goel, 1999) को संदर्भित करती है; इसकी गणना आधार अपरूपण को मूल कंपन विधा के प्रभावी विधिक द्रव्यमान से और चरम विस्थापन को द्रव्यमान सहभागिता गुणक से विभाजित करके की जाती है। इस आरेख को *क्षमता वर्णक्रम* भी कहा जाता है।

क्षमता फलन: इस अवधारणा को संरचना की क्षमता को प्रभावित करने वाले बाह्य (अथवा आंतरिक) प्राचल, जिसे "प्रतिबलक" (S) भी कहा जाता है, और स्थूल स्तर पर तंत्र की "अनुक्रिया" (R) के बीच संबंध के रूप में परिभाषित किया जाता है। पारंपरिक क्षमता वक्र के विपरीत, क्षमता फलन अधिक सामान्य अवधारणा है और परिचय में वर्णित किसी भी आरंभक से उत्पन्न किया जा सकता है; इसके अतिरिक्त, यह केवल भूकंपीय क्रिया तक सीमित नहीं है।

प्रतिबलक: 1) वृद्धिशील रूप से बढ़ता एकदिश, चक्रीय अथवा समय-निर्भर भार (या विस्थापन, त्वरण,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दाब); 2) वृद्धिशील रूप से घटता प्रतिरोध प्राचल अथवा सामर्थ्य गुणों में ह्रास; या 3) तंत्र में विफलता की ओर ले जाने वाला विविक्त बढ़ता/घटता क्रांतिक प्राचल हो सकता है। PBEE में S को सामान्यतः तीव्रता-माप (IM) प्राचल कहा जाता है। तथापि, वर्तमान आलेख में S को अधिक सामान्य रूप से परिभाषित किया गया है और यह किसी ऐसी राशि को संदर्भित करता है जिसका परिवर्तन (सतत अथवा विविक्त) तंत्र की उत्तरोत्तर विफलता और उसके अंतिम पतन की ओर ले जा सकता है।

अनुक्रिया: परिवर्ती प्रतिबलक के अधीन तंत्र के व्यवहार का निरूपण करती है। इसे निरपेक्ष अथवा सापेक्ष अर्थ में दर्शाया जाता है। R हो सकती है: 1) अपवाह अथवा ऊर्जा अपव्यय जैसा एकल क्षति चर (DV); 2) क्षति सूचकांक (DI) के रूप में अनेक DVs का संयोजन; अथवा 3) कोई सुरक्षा अनुश्रवण सूचकांक (Wang, Gu, and Bao, 2013)। भूकंप अभियांत्रिकी के क्षेत्र में R को सामान्यतः अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP) (Vamvatsikos and Cornell, 2004) कहा जाता है।

69.3 क्षमता और माँग

69.3.1 माँग-क्षमता संबंध

9 संरचनात्मक विश्लेषण में सुरक्षा, कार्यक्षमता और लागत-प्रभाविता सुनिश्चित करने हेतु क्षमता और माँगों के बीच अन्योन्यक्रिया को समझना आधारभूत है।

10 क्षमता और माँगों के बीच संबंध यह निर्धारित करता है कि संरचना सामान्य और चरम दोनों दशाओं में अपेक्षित रूप से निष्पादन कर सकती है या नहीं। संरचना में प्रत्याशित माँगों से अधिक पर्याप्त क्षमता होनी चाहिए और सामग्री व्यवहार, भार आकलन, भूकंप के घटित होने, परिमाण, भू-गति तथा निर्माण गुणवत्ता की अनिश्चितताओं को समाहित करने हेतु सुरक्षा सीमा सम्मिलित होनी चाहिए। यह संतुलन प्रायः सुरक्षा गुणक अथवा माँग-से-क्षमता अनुपात द्वारा व्यक्त किया जाता है।

11 क्षमता और माँग दोनों को सामान्यतः Gaussian प्रायिकतामूलक वितरण, चित्र 69.1, द्वारा अभिलक्षित किया जाता है, जो सामग्रियों, निर्माण और पर्यावरणीय कारकों की अंतर्निहित परिवर्तिता को प्रतिबिंबित करता है। ये वितरण अभियंताओं को क्षमता और माँग वक्रों के अतिव्यापन का विश्लेषण करके विफलता की प्रायिकता का परिमाणन करने देते हैं।

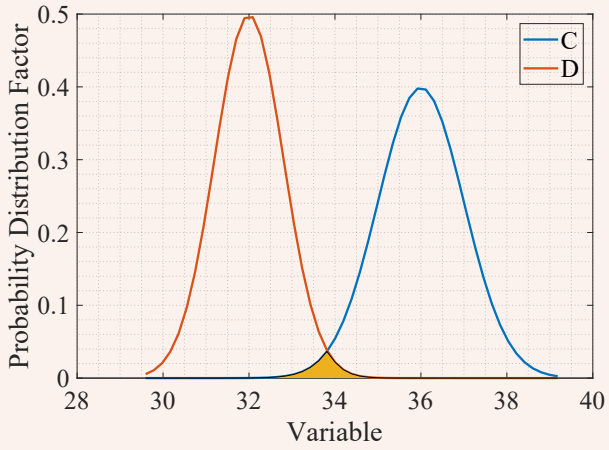
69.3.2 माँग आकलन की विधियाँ

12 माँगें उन भारों और प्रतिबलों को निरूपित करती हैं जिनके अधीन संरचना अपनी आयु के दौरान रहती है, जिनमें गुरुत्व, पवन, भूकंप और अन्य पर्यावरणीय अथवा प्रचालनात्मक बल सम्मिलित हैं।

13 हमारे संदर्भ में निष्पादन स्तरों के परिमाणात्मक मूल्यांकन हेतु विशिष्ट अभियांत्रिकी माँग प्राचलों (EDP) और उपयुक्त स्वीकृति मानदंडों की पहचान करना आवश्यक होगा।

14 EDP मापनीय अनुक्रिया राशियाँ हैं (सामान्यतः चरम (अपरूपण), बल और विरूपण, अंतरतलीय अपवाह अथवा संरचनात्मक तथा असंरचनात्मक घटकों के तल त्वरण।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 69.1: क्षमता और माँग की प्रायिकतामूलक प्रकृति

15 निष्पादन की जाँच वांछित निष्पादन स्तर के स्वीकृति मानदंडों (क्षमता) से परिकलित माँगों की तुलना करके की जाती है।

16 EDP का निर्धारण निम्नलिखित से किया जाता है:

संरचनात्मक प्रतिरूप विकास: संरचनात्मक विश्लेषण सॉफ्टवेयर में संरचना का विस्तृत प्रतिरूप बनाया जाता है। प्रतिरूप सामग्री गुणों, ज्यामिति, परिसीमा दशाओं और अवमंदन अभिलक्षणों को समेटता है।

भू-गतियों का चयन: भूकंपीय संकट विश्लेषण के आधार पर स्थल-विशिष्ट भू-गतियाँ चुनी जाती हैं। ये गतियाँ वास्तविक भूकंप अभिलेख अथवा संश्लेषित रूप से उत्पन्न त्वरणलेख हो सकती हैं।

भूकंपीय संकट: भूकंपों के कारण किसी स्थल पर भू-कंपन की संभावना को संदर्भित करता है। संकट का परिमाणन चरम भू-त्वरण (PGA) अथवा वर्णक्रमीय त्वरण (SA) जैसे भू-गति के विशिष्ट स्तरों के अतिक्रमण की प्रायिकता के पदों में किया जाता है।

गतिक विश्लेषण: **अरैखिक समय-इतिहास विश्लेषण:** यह PBEE में EDPs के निर्धारण की सर्वाधिक सामान्य विधि है। संरचना को चुनी गई भू-गतियों के अधीन किया जाता है और प्रत्येक समय चरण पर अनुक्रिया की गणना की जाती है।

स्थैतिक पुशओवर विश्लेषण: कुछ सरल अध्ययनों में अरैखिक स्थैतिक विश्लेषण का उपयोग करके EDPs का सन्निकटन किया जाता है।

रैखिक विश्लेषण: कुछ स्थितियों में रैखिक अनुक्रिया वर्णक्रम विश्लेषण का उपयोग किया जा सकता है, परंतु PBEE के लिए यह कम परिशुद्ध है।

EDPs का अभिलेखन: विश्लेषण प्रत्येक भू-गति के लिए EDPs के समय-इतिहास अथवा चरम मान प्रदान करता है। निष्पादन का मूल्यांकन करने के लिए इन परिणामों का सांख्यिकीय विश्लेषण (जैसे, माध्य, माध्यिका अथवा 90वाँ शतमक) किया जाता है।

17 संरचनात्मक विन्यास के अनुसार अरैखिक विश्लेषणों के परिणाम अभिगृहीत निवेश प्राचलों और प्रयुक्त प्रतिरूपों के प्रकारों के प्रति संवेदनशील हो सकते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

18 व्यक्ति को संरचना के उन भागों के विषय में स्पष्ट अपेक्षाएँ होनी चाहिए जिनमें अप्रत्यास्थ विरूपण अपेक्षित हैं और तत्पश्चात् विश्लेषणों का उपयोग निम्नलिखित के लिए करना चाहिए:

1. अप्रत्यास्थ विरूपणों के स्थानों की पुष्टि करना।
2. निम्नलिखित को अभिलक्षित करना:
    - पराभवशील अवयवों की विरूपण माँगें।
    - अपराभवशील अवयवों में बल माँगें।

19 क्षमता अभिकल्प अवधारणाएँ विश्वसनीय निष्पादन प्रदान कर सकती हैं।

69.3.3 क्षमता अभिकल्प सिद्धांत

20 क्षमता अभिकल्प भूकंप अभियांत्रिकी की एक आधारभूत अवधारणा है, जिसे भूकंपीय बलों के अधीन संरचनाओं का तन्य और पूर्वानुमेय व्यवहार सुनिश्चित करने हेतु विकसित किया गया है। यह सिद्धांत ऊर्जा अपव्यय को अधिकतम करने और भंगुर विफलता विधाओं को रोकने के उद्देश्य से संरचनाओं में विफलता क्रियाविधियों के नियंत्रण को प्राथमिकता देता है। तन्यता और सामर्थ्य पदानुक्रम पर बल देकर क्षमता अभिकल्प सुनिश्चित करता है कि संरचनाएँ भूकंपों के दौरान सुरक्षित रूप से निष्पादन करें।

21 क्षमता अभिकल्प का केंद्रीय विचार संरचनात्मक घटकों के बीच सामर्थ्य पदानुक्रम स्थापित करना है। उदाहरणार्थ, आघूर्ण-प्रतिरोधी ढाँचों में धरनों को जानबूझकर स्तंभों से पहले पराभव के लिए अभिकल्पित किया जाता है। इससे सुनिश्चित होता है कि धरनों में सुघट्य कब्जों के निर्माण द्वारा संरचना भूकंपीय ऊर्जा का अपव्यय कर सके, जबकि स्तंभ प्रत्यास्थ और स्थिर रहें। इस उपागम को प्रायः "प्रबल स्तंभ, दुर्बल धरन" अवधारणा कहा जाता है, जो पतन के जोखिम को न्यूनतम करती है और पूर्वानुमेय संरचनात्मक व्यवहार को प्रोत्साहित करती है।

22 तन्यता क्षमता अभिकल्प का केंद्रीय तत्त्व है। संरचनात्मक घटकों का विवरण इस प्रकार किया जाता है कि वे अपनी भार-वहन क्षमता खोए बिना उल्लेखनीय अप्रत्यास्थ विरूपण सह सकें। सुघट्य रूप से विरूपित होने की यह क्षमता संरचना को भूकंप के दौरान ऊर्जा अवशोषित और अपव्ययित करने देती है। इसे प्राप्त करने के लिए अभिकल्प अपरूपण विफलता, व्याकुंचन अथवा बंध विफलता जैसी भंगुर विफलता क्रियाविधियों से सावधानीपूर्वक बचता है। ये विफलता विधाएँ अवांछनीय मानी जाती हैं क्योंकि वे अचानक और बिना चेतावनी के घटित होती हैं।

23 अभिप्रेत सामर्थ्य पदानुक्रम सुनिश्चित करने हेतु अतिसामर्थ्य गुणकों का भी उपयोग किया जाता है। उदाहरणार्थ, स्तंभों और नींवों को धरनों से अधिक सामर्थ्य के साथ अभिकल्पित किया जाता है, जिससे क्रांतिक घटकों में अनपेक्षित विफलताएँ रोकी जाती हैं। इसी प्रकार, बंधित ढाँचा तंत्रों में बंधनों को तनाव में पराभव करते हुए संपीडन में स्थिर रहने के लिए अभिकल्पित किया जाता है, जिससे ऊर्जा अपव्यय अभिप्रेत रूप से हो।

24 क्षमता अभिकल्प के सिद्धांत विविध संरचनात्मक तंत्रों पर लागू होते हैं। प्रबलित कंक्रीट आघूर्ण-प्रतिरोधी ढाँचों में सुघट्य कब्जों को भूकंपीय घटनाओं के दौरान धरनों के सिरों पर बनने के लिए अभिकल्पित किया जाता है। ये कब्जे धरनों को बड़े घूर्णन सहने देते हैं, जिससे स्तंभों और संरचना के अन्य भागों की

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रक्षा करते हुए ऊर्जा का प्रभावी अपव्यय होता है। अपरूपण भित्तियों में क्षमता अभिकल्प सुनिश्चित करता है कि भंगुर अपरूपण विफलता से पहले आनमनी पराभव हो, जिससे भित्ति का तन्य व्यवहार बढ़ता है।

25 क्षमता अभिकल्प के प्राथमिक लाभों में से एक भूकंपों के दौरान संरचनात्मक निष्पादन में उसकी पूर्वानुमेयता है। विफलताओं के स्थान और क्रम को नियंत्रित करके अभियंता सुनिश्चित कर सकते हैं कि संरचनाएँ नियंत्रित और सुरक्षित ढंग से व्यवहार करें। यह उपागम आकस्मिक पतन रोककर और निवासियों को निकासी के लिए पर्याप्त समय देकर सुरक्षा भी बढ़ाता है। इसके अतिरिक्त, क्षमता अभिकल्प लागत-प्रभावी है, क्योंकि यह तन्य व्यवहार को विशिष्ट क्षेत्रों में संकेंद्रित करके संरचना के अन्य भागों में अतिअभिकल्प की आवश्यकता घटाता है।

26 क्षमता अभिकल्प सिद्धांत आधुनिक भूकंपीय अभिकल्प संहिताओं में अंतर्निहित हैं, जैसे संयुक्त राज्य में ASCE/SEI 7, यूरोप में Eurocode 8 और Japanese Building Standard Law। ये संहिताएँ तन्यता, सामर्थ्य पदानुक्रम और ऊर्जा अपव्यय के आधारभूत विचारों को सम्मिलित करती हैं और सुनिश्चित करती हैं कि जीवन तथा संपत्ति की रक्षा करते हुए संरचनाएँ भूकंपीय बलों को सहने में सक्षम हों।

69.4 भूकंपीय विश्लेषण विधियाँ

69.4.1 पुशओवर विश्लेषण (POA)

सिद्धांत

27 पुशओवर विश्लेषण संरचनाओं की भूकंपीय क्षमता के आकलन हेतु प्रयुक्त स्थैतिक अरैखिक प्रक्रिया है। भूकंपीय भारों के अधीन भवनों और सेतुओं के निष्पादन के मूल्यांकन के लिए यह संरचनात्मक अभियांत्रिकी में विशेष रूप से लोकप्रिय है।

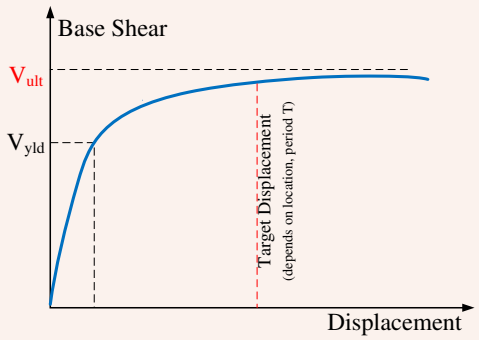
28 गतिक भूकंपीय विश्लेषणों के विपरीत, पुशओवर विश्लेषण क्रमशः बढ़ते पार्श्व भारों के प्रति संरचना की अनुक्रिया का अनुकरण करके उसकी विफलता क्रियाविधियों सहित उसके अप्रत्यास्थ व्यवहार का विस्तृत चित्र प्रदान करता है। भारण के परिमाण में वृद्धि के साथ संरचना की दुर्बल कड़ियाँ (सुघट्य जोड़) और विफलता विधाएँ ज्ञात होती हैं।

29 पुशओवर विश्लेषण का प्रमुख परिणाम *क्षमता* वक्र अथवा *पुशओवर* वक्र है, जो आधार अपरूपण और छत विस्थापन के बीच संबंध को निरूपित करता है। यह वक्र अभियंताओं को संरचना की भूकंपीय क्षमता निर्धारित करने और विभिन्न संकट स्तरों के अधीन निष्पादन उद्देश्यों की पूर्ति का मूल्यांकन करने देता है।

30 ATC-40 (ATC-40, 1996) और FEMA-273 (FEMA, 1997b) दस्तावेजों ने पुशओवर विश्लेषण के लिए प्रतिरूपण प्रक्रियाएँ, स्वीकृति मानदंड और विश्लेषण प्रक्रियाएँ विकसित की हैं। ये दस्तावेज पुशओवर विश्लेषण में प्रयुक्त कब्जों के लिए बल-विरूपण मानदंड परिभाषित करते हैं।

31 यह विधि सदस्य और संरचना स्तरों पर पराभव तथा विफलता के क्रम के साथ-साथ संरचना के समग्र क्षमता वक्र की प्रगति का अनुरेखण करने देती है, चित्र 69.2। यह मूलतः संरचना पर माँग को परिभाषित करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 69.2: क्षमता वक्र

प्रमुख उद्देश्य

[32] पुशओवर विश्लेषण अनेक महत्त्वपूर्ण उद्देश्यों की पूर्ति करता है:

- संरचनात्मक निष्पादन का आकलन: संरचना की अप्रत्यास्थ अनुक्रिया का मूल्यांकन।
- दुर्बल बिंदुओं की पहचान: संभावित विफलता बिंदुओं और क्रांतिक घटकों का पता लगाना।
- भूकंपीय क्षमता का निर्धारण: आधार अपरूपण, छत विस्थापन और तन्यता माँगों का आकलन।
- पुनःसंयोजन आवश्यकताओं का मूल्यांकन: भूकंपीय निष्पादन सुधारने हेतु सुदृढीकरण और पुनःसंयोजन रणनीतियों को सूचित करना।

अभिगृहीत और सीमाएँ

[33] प्रभावी होते हुए भी पुशओवर विश्लेषण विशिष्ट अभिगृहीतों पर आधारित है, जो उसकी प्रयोज्यता सीमित कर सकते हैं:

- विश्लेषण मानता है कि अनुक्रिया पर *मूल कंपन विधा* का प्रभुत्व है, जिससे यह मुख्यतः निम्न और मध्यम ऊँचाई वाले भवनों के लिए उपयुक्त है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- सामान्यतः स्थिर आलंब दशाएँ मानी जाती हैं और उच्चतर-विधा प्रभावों की उपेक्षा की जाती है, जब तक कि भिन्न भार प्रतिरूपों के साथ अनेक पुशओवर विश्लेषण न किए जाएँ।
- अवधि, आवृत्ति अंतर्वस्तु और मृदा-संरचना अन्योन्यक्रिया जैसे गतिक प्रभाव समाहित नहीं होते।

पुशओवर विश्लेषण के चरण

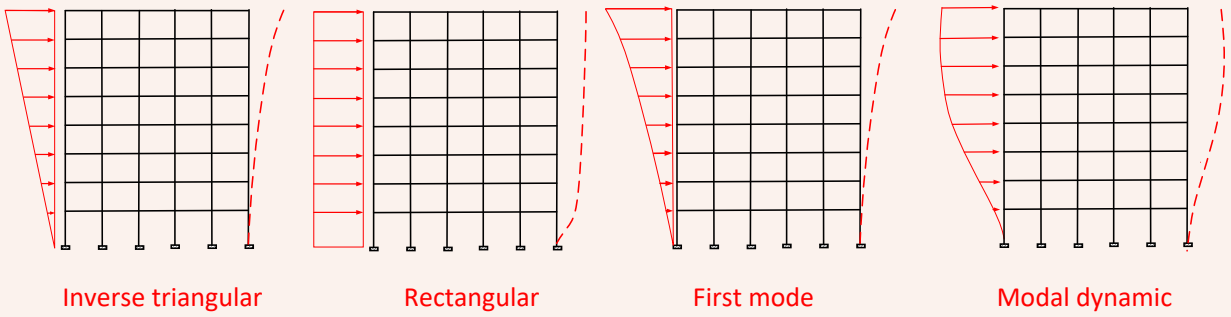
संरचना का प्रतिरूपण

- ज्यामिति, सामग्री गुणों और परिसीमा दशाओं के निरूपण हेतु *अरैखिक संरचनात्मक प्रतिरूप* का उपयोग करें।
- धरन-स्तंभ संयोजनों, स्तंभों के आधार अथवा धरनों के मध्य-विस्तार जैसे क्रांतिक स्थानों पर सुघट्य कब्जे परिभाषित करें।
- सामग्री व्यवहार को *बल-विरूपण संबंध* (जैसे, द्विरैखिक अथवा त्रिरैखिक प्रतिरूप) का उपयोग करके निरूपित करें।

गुरुत्व भार लगाएँ पार्श्व भारण से पूर्व संरचना का संतुलन सुनिश्चित करने हेतु मृत भारों और चल भारों के एक अंश सहित स्थैतिक गुरुत्व भार लगाए जाते हैं।

पार्श्व भार प्रतिरूप परिभाषित करें सामान्य भार प्रतिरूपों में निम्नलिखित सम्मिलित हैं, चित्र 69.3:

- प्रतिलोम त्रिभुजीय भार: आधार से शीर्ष तक रैखिक रूप से बढ़ता भार प्रतिरूप, जो उलटे त्रिभुजीय वितरण को निरूपित करता है।
- आयताकार भार: संरचना की ऊँचाई पर लगाया गया समान भार वितरण।
- प्रथम-विधा भार: संरचना की मूल विधा आकृति के समानुपाती भार प्रतिरूप।
- विधिक गतिक भार: गतिक विश्लेषण के विधिक योगदानों से प्राप्त भार वितरण, जो उच्चतर-विधा प्रभावों को निरूपित करता है।



चित्र 69.3: पुशओवर विश्लेषण के लिए पार्श्व भार

वृद्धिशील भारण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- पार्श्व बलों अथवा विस्थापनों को लक्ष्य मान तक वृद्धिशील रूप से लगाएँ। लक्ष्य विस्थापन अनुक्रिया वर्णक्रम से निर्धारित किया जा सकता है:

$$\Delta = g\left(\frac{T}{2\pi}\right) C_s$$

  जहाँ Δ वर्णक्रमीय विस्थापन है, T अवधि है और C_s प्रत्यास्थ भूकंपीय गुणांक है।
- प्रत्येक चरण पर संतुलन और सुसंगतता जाँचें करें।
- वैश्विक अथवा स्थानीय विफलता होने तक जारी रखें (जैसे, सुघट्य कब्जा निर्माण, अत्यधिक विस्थापन)।

संरचनात्मक अनुक्रिया का अनुश्रवण प्रमुख अनुक्रिया प्राचलों में निम्नलिखित सम्मिलित हैं:

- आधार अपरूपण: संरचना द्वारा प्रतिरोधित कुल पार्श्व बल।
- छत विस्थापन: संरचना की विरूपण क्षमता का माप।
- सुघट्य कब्जा निर्माण: अप्रत्यास्थ व्यवहार के स्थान और क्रम।

क्षमता वक्र विकसित करें संरचना की वैश्विक अप्रत्यास्थ अनुक्रिया निरूपित करने वाला पुशओवर वक्र बनाने हेतु आधार अपरूपण को छत विस्थापन के सापेक्ष आलेखित करें।

परिणामों की व्याख्या

क्षमता वक्र पुशओवर वक्र को निम्नलिखित भागों में विभाजित किया जाता है:

- प्रत्यास्थ क्षेत्र: प्रारंभिक अनुक्रिया।
- अप्रत्यास्थ क्षेत्र: क्रमिक दृढता ह्रास दर्शाने वाली अरैखिक अनुक्रिया।
- पतन बिंदु: अधिकतम आधार अपरूपण अथवा विस्थापन क्षमता का बिंदु।

निष्पादन बिंदु क्षमता वक्र के साथ *माँग वर्णक्रम* (भूकंपीय विश्लेषण से) का प्रतिच्छेद *निष्पादन बिंदु* परिभाषित करता है, जो भूकंप के दौरान अपेक्षित विस्थापन को निरूपित करता है।

कब्जा निर्माण प्रतिरूप सुघट्य कब्जे विफलता क्रियाविधियों और संभावित दुर्बल कडियों की अंतर्दृष्टि प्रदान करते हैं। यह सत्यापित करने हेतु कब्जा निर्माण क्रमों का उपयोग करें कि संरचना *तन्य व्यवहार* (वरीय) अथवा *भंगुर व्यवहार* (अवांछनीय) दर्शाती है।

अपवाह और तन्यता संरचना द्वारा अभिकल्प निष्पादन उद्देश्यों की पूर्ति सुनिश्चित करने हेतु अंतरतलीय अपवाह अनुपात और समग्र तन्यता माँग की गणना करें।

अनुप्रयोग

- निष्पादन-आधारित अभिकल्प: विभिन्न भूकंपीय संकट स्तरों (तत्काल अधिभोग, जीवन सुरक्षा, पतन निवारण) के अधीन निष्पादन का मूल्यांकन।
- पुनःसंयोजन अभिकल्प: संरचनात्मक सुदृढीकरण तकनीकों (जैसे, बंधन और अपरूपण भित्तियाँ जोडना) की प्रभाविता का आकलन।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- क्षति आकलन: आपदा अनुक्रिया योजना के लिए विद्यमान संरचनाओं में संभावित क्षति का आकलन।

उन्नत विचार

- उच्चतर-विधा प्रभाव: विशेषतः ऊँची अथवा अनियमित संरचनाओं में उच्चतर विधाओं को समाहित करने हेतु विविध भार प्रतिरूपों के साथ अनेक पुशओवर विश्लेषण करें।
- अनुकूली पुशओवर विश्लेषण: कब्जे बनने और दृढता बदलने पर भार वितरण प्रतिरूप को गतिक रूप से अद्यतन करें।
- सॉफ्टवेयर साधन: SAP2000, ETABS और OpenSees जैसे साधन सुघट्य कब्जों तथा अरैखिक व्यवहार के प्रतिरूपण की अंतर्निहित सुविधाओं द्वारा पुशओवर विश्लेषण को सुगम बनाते हैं।
- अरैखिक सामग्री प्रतिरूप: वास्तविक व्यवहार का बेहतर अनुकरण करने हेतु सामग्री-विशिष्ट प्रतिरूप (जैसे, परिसीमित कंक्रीट और इस्पात पराभव) सम्मिलित करें।

भूकंपीय विश्लेषण से तुलना

[34] पुशओवर विश्लेषण और भूकंपीय विश्लेषण की तुलना सारणी 69.1 में की गई है।

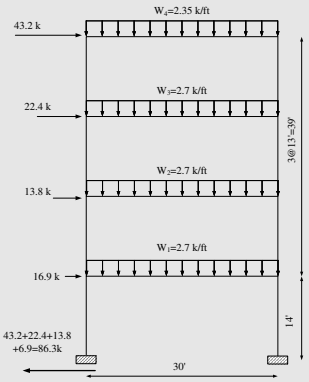
तालिका 69.1: पुशओवर विश्लेषण और भूकंपीय विश्लेषण की तुलना

पक्ष midrule प्रकृति	**पुशओवर विश्लेषण** अरैखिक स्थैतिक प्रक्रिया	**भूकंपीय विश्लेषण** अथवा अरैखिक गतिक प्रक्रिया
गतिक प्रभाव	गतिक गुणों (जैसे, समय-निर्भर जडत्वीय बलों) की उपेक्षा	भू-गति प्रभावों सहित गतिक गुणों पर प्रत्यक्ष विचार
प्रतिरूपित व्यवहार	अप्रत्यास्थ अनुक्रिया और विफलता क्रियाविधियों पर केंद्रित	अरैखिक विश्लेषण न होने पर प्रायः प्रत्यास्थ अनुक्रिया तक सीमित
उच्चतर-विधा प्रभाव	अनेक विश्लेषण न किए जाने पर उपेक्षित	गतिक विश्लेषण में पूर्णतः समाहित
जटिलता	गणनात्मक रूप से सरल, कम संसाधनों की आवश्यकता	विशेषतः अरैखिक गतिक विश्लेषण के लिए अधिक गणना-सघन
परिणाम	क्षमता वक्र, कब्जा निर्माण प्रतिरूप, तन्यता माँगें	समय-इतिहास अनुक्रियाएँ, विधिक योगदान, ऊर्जा अपव्यय
प्रयोज्यता	नियमित विन्यास वाली निम्न से मध्यम ऊँचाई की संरचनाओं के लिए उपयुक्त	ऊँची, अनियमित अथवा क्रांतिक संरचनाओं के लिए आवश्यक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

69.4.1.1 उदाहरण 69.1: मॉंग वक्र का उदाहरण

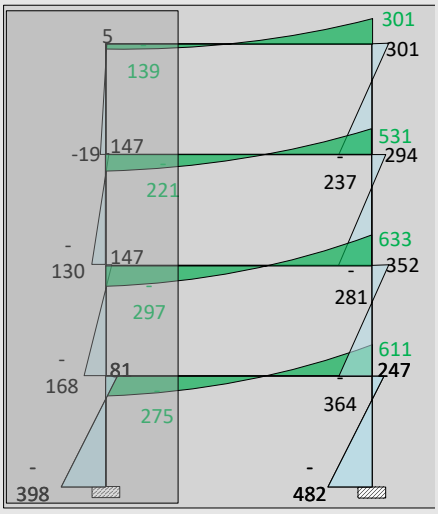
Goel और Chao की *Performance-Based Plastic Design: Earthquake-Resistant Steel Structures* से अनुकूलित



हम निम्नलिखित ढाँचे के लिए मॉंग वक्र निर्धारित करना चाहते हैं, F_y= 50 ksi, E=30,000 ksi; अक्षीय और अपरूपण विरूपण उपेक्षित हैं। प्रत्यास्थ-पूर्णतः सुघट्य आघूर्ण-वक्रता अभिगृहीत है।

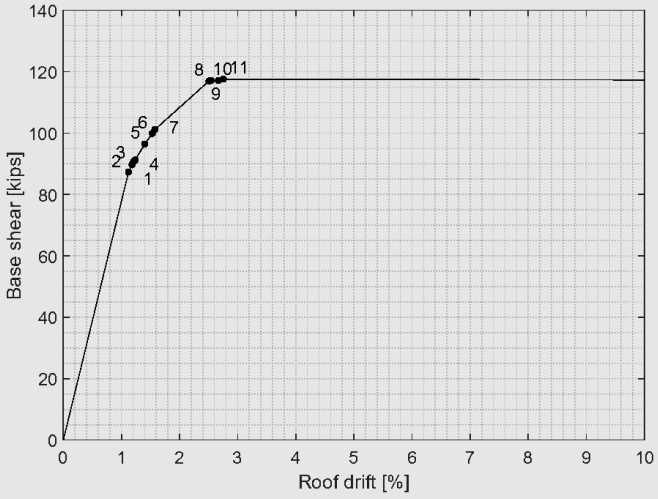
- पहले प्रत्यास्थ विश्लेषण किया जाता है और सभी सदस्यों ने $M_{max} < M_p = F_y Z_x$ संतुष्ट किया।

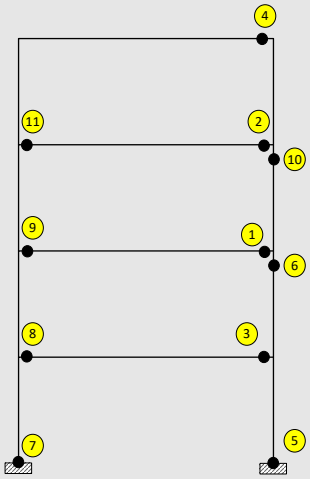
तल	$M_{u,req}$ (k-ft)	धरन परिच्छेद	M_p (k-ft)	$M_{u,req}$ (k-ft)	स्तंभ परिच्छेद	M_p (k-ft)
4	301	W16x40	304	301	W16x40	304
3	531	W24x55	558	294	W16x40	304
2	633	W24x62	638	364	W21x44	398
1	611	W24x62	638	482	W21x55	525



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- आधार अपरूपण (कुल पार्श्व बल) के सापेक्ष छत अपवाह अनुपात (छत विस्थापन/ऊँचाई) तथा सुघट्य कब्जों के निर्माण का स्थान और क्रम नीचे दिखाए गए हैं।
- प्रथम सुघट्य कब्जा बनने पर प्रत्यास्थ सीमा का पार्श्व बल 87.6 kips है, जो 86.3 kips के अभिकल्प मान से किंचित अधिक है।
- उस बिंदु के पश्चात् सुघट्य कब्जों के क्रमिक निर्माण के साथ आघूर्णों का पुनर्वितरण होता है और ढाँचा 117.5 kips के चरम सामर्थ्य तक 2.7% छत अपवाह अनुपात पर पहुँचता है।
- पराभव क्रियाविधि 3 तलों पर आंशिक पार्श्व-विचलन क्रियाविधि निकली, जिसमें धरन सिरों, स्तंभों के आधार तथा दूसरे और तीसरे तलों के शीर्ष पर सुघट्य कब्जे हैं।
- तन्यता अनुपात (V_{ult}/V_y) 1.36 है।





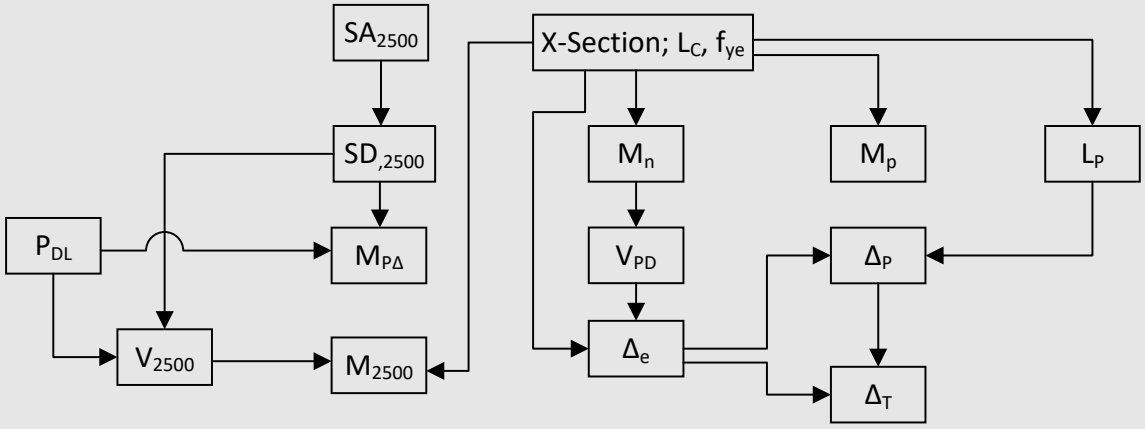
69.4.1.2 उदाहरण 69.2: पुशओवर विश्लेषण; व्यावहारिक उदाहरण

समस्या सूत्रकार: Marilyne Lefebvre (Kiewit Engineering Co.)
समाधान: Marilye Lefebvre, Victor Saouma, Cody Harrington, Mohammad Salchi, Mohammad T. Nikoukalam

समस्या सूत्रण

यह विवरण अनेक भागों में विभाजित होगा। पहले समस्या को §69.4.1.2 में व्यक्त किया गया है। तत्पश्चात् आपको उस अभिकल्प विस्थापन को निर्धारित करने हेतु स्थल का अनुक्रिया वर्णक्रम विश्लेषण करना होगा जिसे समायोजित किया जाना है, §69.4.1.2। इस बिंदु पर आप हस्त-गणनाओं (AASHTO संहिता के अनुसार) द्वारा क्षमता निर्धारित कर सकते हैं, §69.4.1.2। इसमें सुघट्य कब्जा लंबाई, सुघट्य आघूर्णों और संगत आधार अपरूपण तथा अंततः प्रत्यास्थ और सुघट्य विस्थापनों की गणनाएँ सम्मिलित होंगी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



समस्या कथन

निम्नलिखित गृहकार्य Kiewit द्वारा किए गए विश्लेषण पर आधारित है। इससे आपको यह बोध होगा कि किसी अभिकल्प फर्म में सामान्यतः क्या किया जाता है।

Goethals Bridge न्यूयॉर्क नगर के बाहर स्थित है। यह Staten Island, NY और Elisabeth, NJ के बीच Arthur Kill (Staten Island Sound) को पार करता है, चित्र 69.4। नए सेतु का मुख्य विस्तार केबल-आधारित सेतु है, जबकि दोनों पहुँच-मार्ग पूर्ववढलित खंडीय पेटी गर्डर हैं। नया सेतु Roaring 20's के दौरान निर्मित इस्पात कैंटिलीवर सेतु को प्रतिस्थापित कर रहा है। इस अभ्यास में आपको New Jersey की ओर पहुँच-विस्तार के स्तंभ-अभिकल्प का अभिकल्प भूकंप भार के विरुद्ध विश्लेषण करना है। एक स्तंभ को प्रतिनिधि परिच्छेद के रूप में चुना गया है और उस पर पुशओवर विश्लेषण किया गया है।





चित्र 69.4: सेतु का स्थान और चित्र

स्तंभ लंबाई (L_c) 40 ft है; स्थिरता बिंदु तक शाफ्ट लंबाई (L_S) 60 ft है; वेधित शाफ्ट व्यास (d_s) 8 ft है; स्तंभ के लिए f_{cc} 5,000 psi और अंततः शाफ्ट के लिए f_{cs} 4,000 psi है।

भाग 1: अनुक्रिया वर्णक्रम विश्लेषण

स्थल का अभिकल्प अनुक्रिया वर्णक्रम सारणी 69.2 में संक्षिप्त है, जहाँ C_S प्रत्यास्थ भूकंपीय गुणांक हैं। 2,500 वर्ष का स्थल वर्ग F चुनें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 69.2: NJ पहुँच संरचनाओं का अभिकल्प अनुक्रिया वर्णक्रम

1,000 वर्ष वर्ग A			2,500 वर्ष वर्ग A			1,000 वर्ष वर्ग F			2,500 वर्ष वर्ग F		
T (sec)	C_s	Δ (ft)	T (sec)	C_s	Δ (ft)	T (sec)	C_s	Δ (ft)	T (sec)	C_s	Δ (ft)
0.00	0.072	0	0.00	0.244	0	0.00	0.270	0	0.00	0.520	0
0.04	0.144	0.000217	0.04	0.578	0.000754	0.04	0.379	0.000495	0.04	1.144	0.001493
0.05	0.144	0.000294	0.05	0.566	0.001155	0.05	0.407	0.000829	0.05	1.300	0.002651
0.10	0.144	0.001175	0.10	0.508	0.004143	0.10	0.543	0.004432	0.10	1.300	0.010603
0.15	0.144	0.002643	0.15	0.451	0.008277	0.15	0.680	0.012479	0.15	1.300	0.023857
0.20	0.144	0.004698	0.20	0.394	0.012854	0.20	0.680	0.022185	0.20	1.300	0.042413
0.22	0.144	0.005531	0.22	0.381	0.01503	0.22	0.680	0.026844	0.22	1.300	0.05132
0.30	0.104	0.007634	0.30	0.328	0.024053	0.30	0.680	0.049917	0.30	1.300	0.095429
0.45	0.069	0.011446	0.45	0.228	0.037685	0.45	0.200	0.033033	0.45	0.813	0.134198
0.50	0.062	0.012724	0.50	0.195	0.039762	0.50	0.167	0.033985	0.50	0.650	0.132541
0.60	0.056	0.01649	0.60	0.177	0.051914	0.60	0.100	0.029363	0.60	0.552	0.162083
1.00	0.031	0.025448	1.00	0.104	0.084826	1.00	0.040	0.032625	1.00	0.160	0.130502
2.00	0.025	0.081237	2.00	0.050	0.163127	2.00	0.016	0.052201	2.00	0.055	0.17944
3.00	0.019	0.136537	3.00	0.040	0.293629	3.00	0.013	0.092982	3.00	0.035	0.256925
4.00	0.012	0.160517	4.00	0.030	0.391505	4.00	0.009	0.121802	4.00	0.025	0.326254
5.00	0.006	0.122345	5.00	0.020	0.407818	5.00	0.006	0.122345	5.00	0.020	0.407818
									6.00		0.5

कार्य

1. C_s अनुक्रिया वर्णक्रम आलेखित करें।
2. वक्र का बहिर्वेशन करें और बताएँ कि T = 6 seconds के लिए C_S क्या है।
3. विस्थापन अनुक्रिया वर्णक्रम आलेखित करें।
4. वक्र का बहिर्वेशन करें और बताएँ कि T = 6 seconds के लिए विस्थापन क्या है।

भाग 2: क्षमता (स्तंभ के लिए हस्त-गणनाएँ)

आपको *AASHTO guide specifications for LRFD seismic bridge design* (AASHTO, Seismic, 2011) के संलग्न 2nd संस्करण तक पहुँच की आवश्यकता होगी। इलेक्ट्रॉनिक प्रति CU Library की वेबसाइट से प्राप्त की जा सकती है।

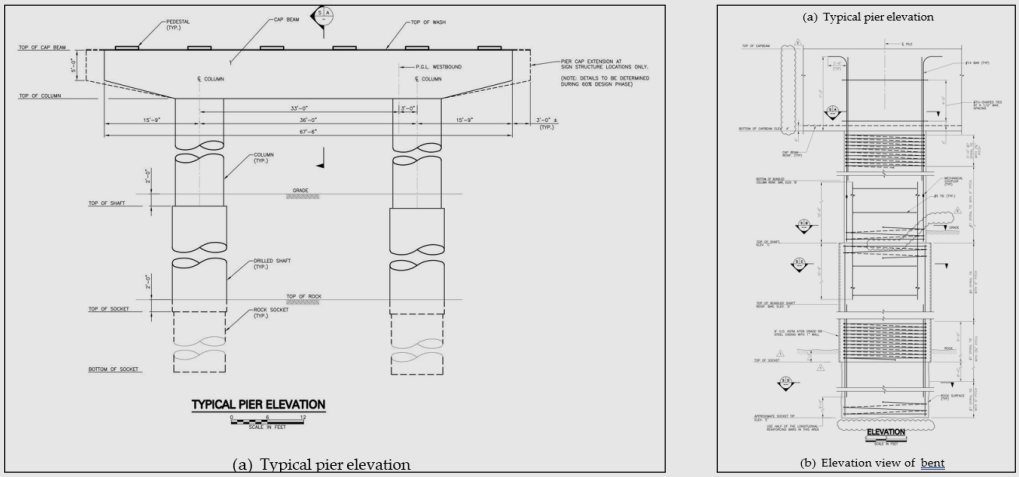
बेंट के गुण नीचे दिए गए हैं:

1. स्तंभ की लंबाई = 40 feet
2. वेधित शाफ्ट की लंबाई = 60 feet
3. स्तंभ का व्यास =7 feet
4. वेधित शाफ्ट का व्यास = 8 feet
5. स्तंभ और स्तंभ-टोपी का संपीडन सामर्थ्य (f'_c) = 5 ksi
6. वेधित शाफ्ट का संपीडन सामर्थ्य (f'_c) = 4 ksi
7. मानें कि स्तंभ-टोपी 7'-0" गहराई और 8'-6" चौडाई की आयताकार धरन है। केवल स्तंभों के बीच के भाग पर ध्यान केंद्रित करें। स्तंभ का विश्लेषण करते समय स्तंभ-टोपी विस्तारों और पीठिकाओं की उपेक्षा करें। बेंट के गुण हैं:
8. स्तंभ परिच्छेद: मानें कि सरिया अंतराल लगभग 6 inches है।
9. वेधित शाफ्ट परिच्छेद: इस्पात आवरण की उपेक्षा करें। स्पष्ट आवरण 4 inches है। मानें कि सरिया अंतराल लगभग 6 inches है #14 छडों के लिए और 9 inches है # 18 छडों के लिए।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पहुँच-विस्तारों के प्रारूपिक स्तंभ ऊर्ध्वदृश्य और योजनाएँ चित्र 69.5 तथा 69.6 में दर्शाई गई हैं।

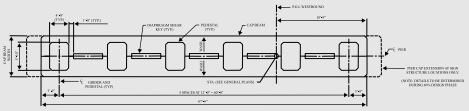


(a) प्रारूपिक स्तंभ ऊर्ध्वदृश्य (b) बेंट का ऊर्ध्वदृश्य

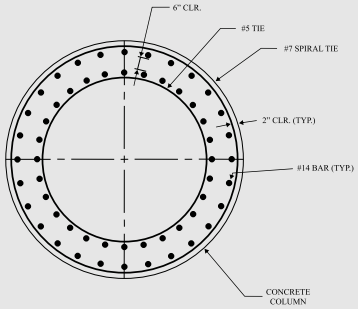
चित्र 69.5: स्तंभ और सेतु-स्तंभ के आयाम

प्रारूप

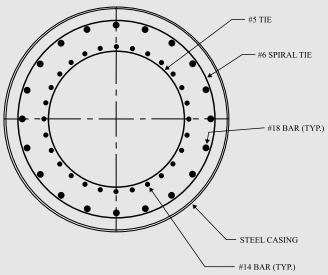
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



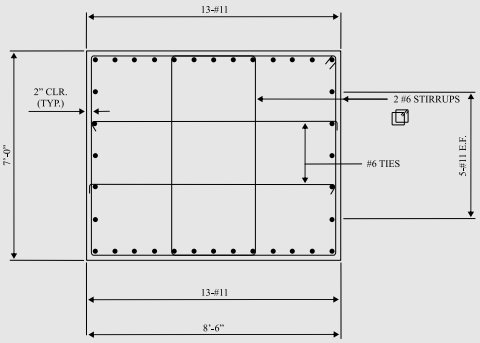
(a) प्रारूपिक स्तंभ ऊर्ध्ववदृश्य



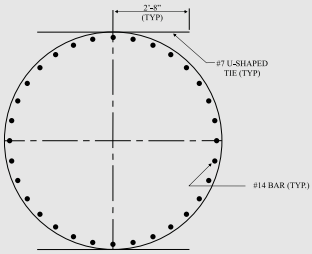
(b) SB परिच्छेद



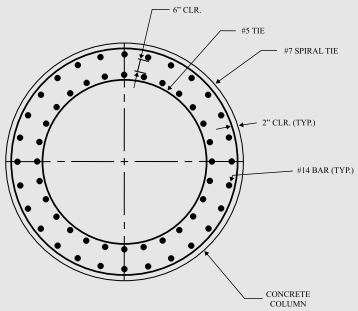
(c) SC परिच्छेद



(d) SA परिच्छेद



(e) टोपी धरन पर स्तंभ परिच्छेद



(f) आधार पर स्तंभ परिच्छेद

चित्र 69.6: स्तंभ और शाफ्ट अनुप्रस्थ परिच्छेद

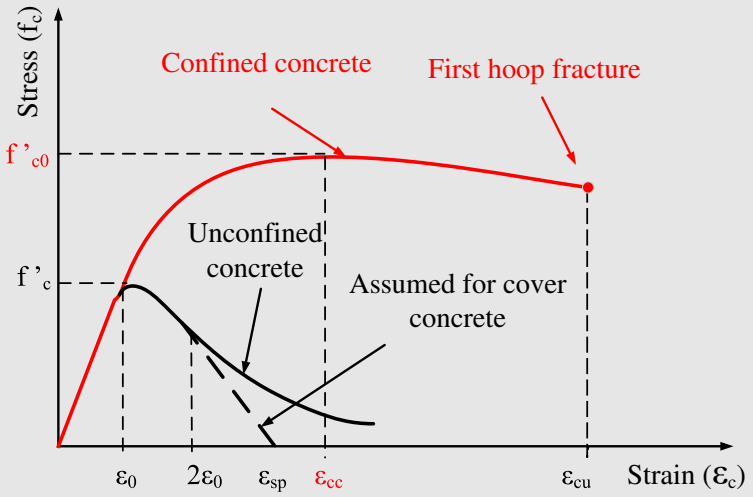
वेधित शाफ्ट क्यों?

(AASHTO, Seismic, 2011) में आपको भूकंपीय क्षेत्र B-D में वेधित शाफ्ट को क्षमता-संरक्षित सदस्य के रूप में अभिकल्पित करना आवश्यक है (और आप चाहते हैं कि भूकंप के दौरान वह प्रत्यास्थ रहे)। इस प्रकार स्तंभ की किसी भी क्षति को देखा और सुधारा जा सकता है।

कार्य

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

5. योजनाओं के आधार पर (AASHTO, Seismic, 2011, chap. 3) में दिए अनुसार भूकंप-प्रतिरोधी तंत्र की पहचान करें (अर्थात् क्या यह प्रकार 1, प्रकार 2 आदि है?)।
6. ~~स्तंभ की नाममात्र आघूर्ण क्षमता ज्ञात करें। यदि आप Mander प्रतिबल वितरण का उपयोग करके M_{ne} ज्ञात कर सकें तो अतिरिक्त अंक दिए जाएँगे~~ (Mander, Priestley, and Park, 1988), चित्र 69.7 ~~Whitney प्रतिबल खंड के स्थान पर।~~



चित्र 69.7: परिसीमित और अपरिसीमित कंक्रीट के एकदिश भारण का प्रतिबल-विकृति संबंध (Mander, Priestley, and Park, 1988)

Whitney, M_n = 6,220 kip-ft (±10%); Mander, M_n = 8,551 kip-ft (±10%)

7. (AASHTO, Seismic, 2011, chap 8) का उपयोग करते हुए, यदि सरिया ASTM A706 इस्पात है तो सरिए का अपेक्षित पराभव सामर्थ्य f_{ye} निर्धारित करें (ध्यान दें: f_y = 60 ksi)।
8. स्तंभ की विश्लेषणात्मक सुघट्य कब्जा लंबाई L_p निर्धारित करें। संकेत: (AASHTO, Seismic, 2011, §4.11) देखें।

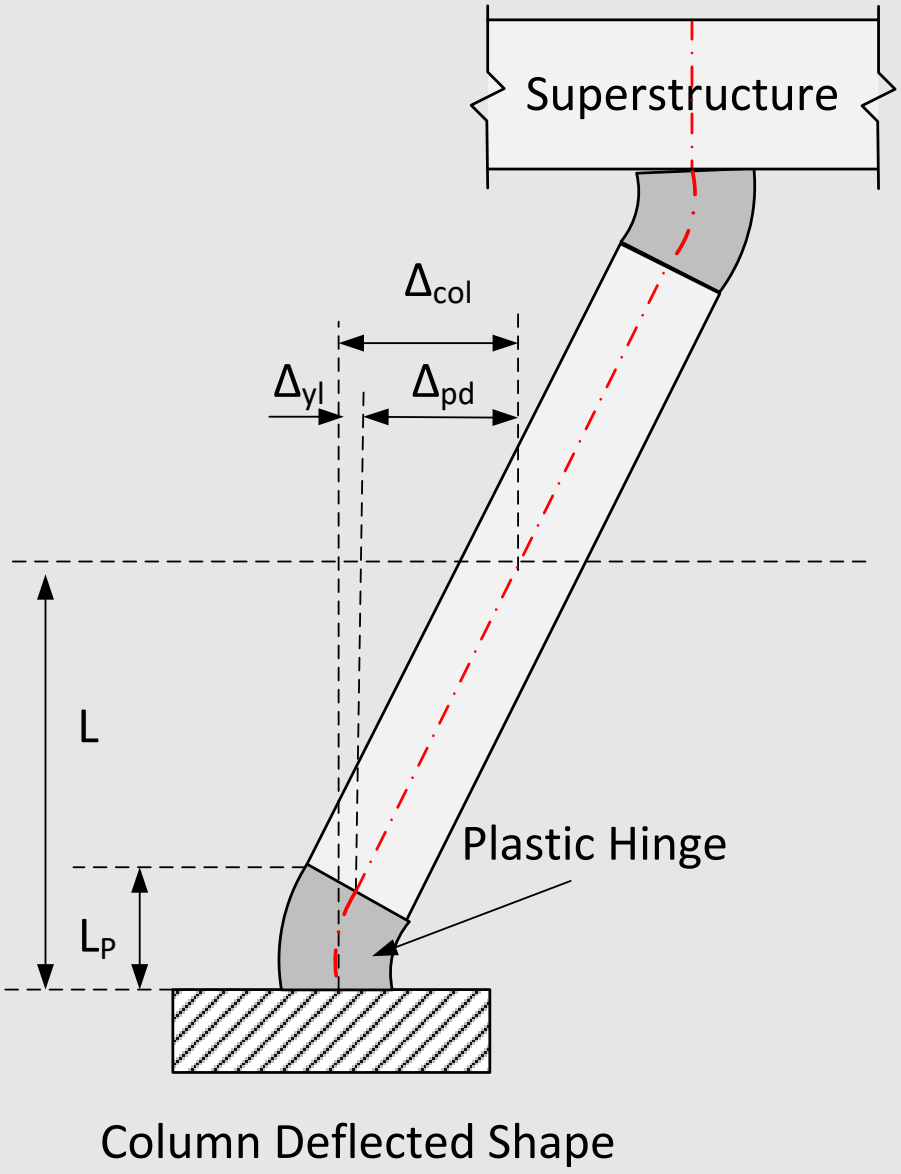
$$L_P = 0.08L_C + 0.15f_{ye}d_{bl} \geq 0.3f_{ye}d_{bl} \quad (4.11.6\text{-}1)$$

जहाँ

L	अधिकतम आघूर्ण बिंदु से आघूर्ण प्रतिवक्रता बिंदु तक स्तंभ की लंबाई (in.)
f_{ye}	अनुदैर्ध्य स्तंभ प्रबलन इस्पात छडों का अपेक्षित पराभव सामर्थ्य (ksi)
d_{bl}	अनुदैर्ध्य स्तंभ प्रबलन इस्पात छडों का नाममात्र व्यास (in.)

प्रारूप

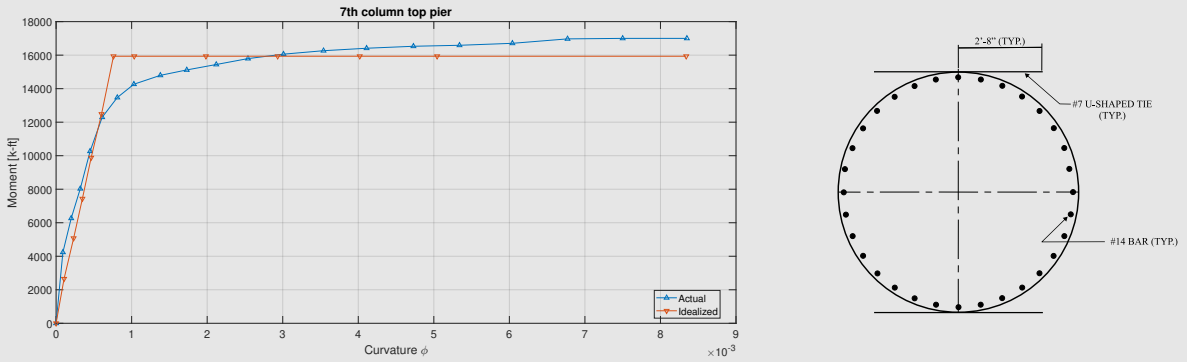
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



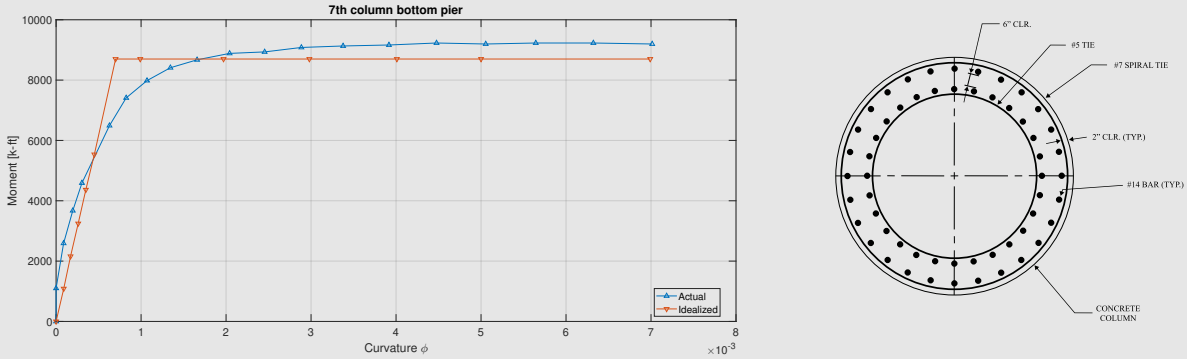
चित्र 69.8: सेतु-स्तंभ की विक्षेपित आकृति और वक्रता आरेख; AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 से अनुकूलित

9. `P-M-Diagrams.xlsx` के आँकड़ों का उपयोग करके स्तंभ के शीर्ष, स्तंभ के आधार और वेधित शाफ्ट में सुघट्य आघूर्ण M_p निर्धारित करें। इन आदर्शीकृत आघूर्ण-वक्रता वक्रों को आलेखित करें ((AASHTO, Seismic, 2011, figures 8.5.1 and C4.9.1) देखें)। बताएँ कि इनमें से कौन-सा आघूर्ण सबसे छोटा है (भाग 3 में हम अपने परिणामों की तुलना के लिए इसका उपयोग करेंगे)। अभी मानें कि स्तंभ पर अभिकल्प अक्षीय भार P_{DL} = 2,500 kips है (इसमें सेतु-स्तंभ का स्व-भार सम्मिलित है)। सुघट्य आघूर्ण चित्र 69.9 में दर्शाए गए आघूर्णों के समान होने चाहिए।

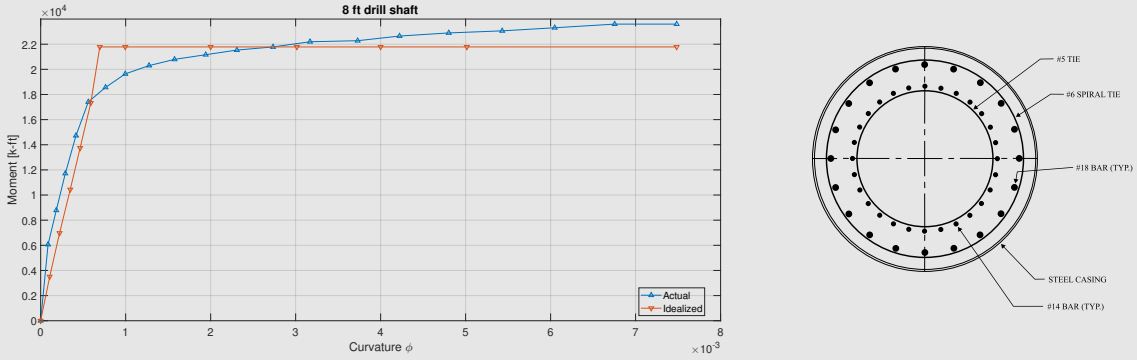
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) सेतु-स्तंभ के शीर्ष पर 7ft व्यास का स्तंभ; M_P=15,839 kip-ft (± 10%)



(b) सेतु-स्तंभ के तल पर 7 ft व्यास के स्तंभ की आघूर्ण-वक्रता; M_P=8,662 kip-ft (± 10%)



(c) 8 ft व्यास के वेधित शाफ्ट की आघूर्ण-वक्रता; M_P=21,786 kip-ft (± 10%)

चित्र 69.9: आघूर्ण-वक्रताएँ और सुघट्य आघूर्ण

10. सुघट्य आघूर्ण विकसित करने के लिए आवश्यक अपरूपण V_p क्या है?
11. स्तंभ का प्रत्यास्थ विस्थापन Δ_e ज्ञात करें। **संकेत:** AASHTO, Seismic, 2011, Fig. C4.9-2 देखें और आघूर्ण क्षेत्रफल लागू करें।
12. स्तंभ का सुघट्य विस्थापन Δ_{pd} ज्ञात करें। मानें कि सुघट्य वक्रता Φ_{pd} 0.005/ft है।
13. स्तंभ के शीर्ष पर कुल विस्थापन (Δ_{total}) ज्ञात करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

भाग 3: माँग भार निर्धारित करें

स्तंभ पर अभिकल्प अक्षीय भार P_{DL} = 2,500 kips है।

कार्य

14. $P\Delta$ प्रभावों से स्तंभ के आधार पर आघूर्ण क्या है? क्या $M_{P\Delta}$, $0.25M_P$ से छोटा/बड़ा/समान है?
15. स्तंभ के आधार पर अपरूपण V_{2500} क्या है?
16. इस अपरूपण बल से स्तंभ के आधार पर आघूर्ण M_{2500} क्या है? क्या M2500, $0.25M_P$ से छोटा/बड़ा/समान है?
17. क्या माँग आघूर्ण भाग 2 में प्राप्त अनुमेय आघूर्ण से बड़ा/छोटा/समान है? AASHTO में आनमन का Φ गुणक 0.9 है यदि परिच्छेद तनाव-नियंत्रित हो अथवा 0.7 है यदि परिच्छेद संपीडन-नियंत्रित हो।

भाग 4: पुशओवर विश्लेषण

AASHTO संहिता से सन्निकट कुल विस्थापन निर्धारित किया गया था; अब हम पुशओवर विश्लेषण करके अधिक परिशुद्ध मान प्राप्त करना चाहते हैं।

विभिन्न विश्लेषण करने के लिए हमें सॉफ़्टवेयर (RISA, SAP अथवा कोई अन्य प्रत्यास्थ संहिता) का उपयोग करना होगा।

चित्र AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 4.8-2 सेतु-स्तंभ ढाँचे के लिए अभिगृहीत सुघट्य कब्जा क्रम दर्शाता है। सरलता के लिए हम मानेंगे कि स्तंभ-टोपी दृढ है—इस प्रकार हमें केवल स्तंभों के विस्थापन पर विचार करना होगा। पुशओवर विश्लेषण में आगे बढ़ते समय इस क्रम को ध्यान में रखें।

कार्य

18. अपने प्रतिरूप का चित्रण दें और सुनिश्चित करें कि अवयव तथा आसंधि संकेतनों को स्पष्ट रूप से नामांकित किया गया है (रेखाचित्र स्वीकार्य हैं)। सेतु-स्तंभ और वेधित शाफ़्ट दोनों का प्रतिरूपण करें। मानें कि आपके प्रतिरूप के तल पर वेधित शाफ़्ट स्थिर है।
19. भाग 2 की भाँति स्तंभ के शीर्ष, स्तंभ के आधार और वेधित शाफ़्ट में सुघट्य आघूर्ण M_P निर्धारित करें। P = 0 kips से P = 5,000 kips तक के परिणाम सारणीबद्ध करें (ΔP = 500 kips)। *उपलब्ध कराई गई* `P-M.xlsx` *फ़ाइल से निकाला जाए*)।
20. स्तंभ के शीर्ष पर 1-kip कृषैतिज बल लगाएँ। अपने प्रतिरूप की प्रत्येक आसंधि पर अक्षीय बल, आघूर्ण और विस्थापन बताएँ।
21. कब्जा बनने तक अपरूपण बल को वृद्धिशील रूप से बढ़ाएँ। कब्जा किस बल और स्थान पर बनता है?
22. अपने परिणाम सारणीबद्ध करें। प्रत्येक आसंधि पर अक्षीय बल, आघूर्ण और विस्थापन बताएँ।
23. आसंधि पर कब्जा लगाएँ (सुनिश्चित करें कि कब्जे पर आघूर्ण शून्य है)। पुनः स्तंभ के शीर्ष पर 1-kip कृषैतिज बल लगाएँ। अपने प्रतिरूप की प्रत्येक आसंधि पर अक्षीय बल, आघूर्ण और विस्थापन बताएँ।
24. कब्जा बनने तक अपरूपण बल को वृद्धिशील रूप से बढ़ाएँ। कब्जा किस बल और स्थान पर बनता है?
25. पुनः अपने परिणाम सारणीबद्ध करें।
26. आसंधि पर कब्जा लगाएँ और स्तंभ पर धक्का देते रहें (दूसरे शब्दों में, दो बार और)।
27. चार परिदृश्यों के कृषैतिज बल जोड़ें। प्रत्येक आसंधि पर अक्षीय बल, आघूर्ण और विस्थापन भी जोड़ें।
28. सेतु-स्तंभ में विफलता कहाँ दिखाई देगी? क्या यह AASHTO में दिए विफलता मानदंडों का अनुसरण करती है?
29. विफलता पर स्तंभ के शीर्ष का विस्थापन क्या है?
30. पुशओवर विश्लेषण की तुलना भाग 2 में की गई हस्त-गणनाओं से करें। आपके विचार में इनमें से कौन-सा विश्लेषण अधिक रूढ़िवादी है?

प्रतिरूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

31. क्या सेतु-स्तंभ का अभिकल्प पर्याप्त है (दूसरे शब्दों में, क्या पुशओवर विश्लेषण से परिकलित अपरूपण और आघूर्ण भाग 3 से परिकलित अभिकल्प भारों से बड़े/छोटे/समान हैं)?

सहायता

संरचनात्मक विश्लेषण

आपके कार्य को सुगम बनाने हेतु ढाँचे का क्रमिक विश्लेषण किया गया है और परिणाम सारणी 69.3 में दर्शाए गए हैं।

तालिका 69.3: पुशओवर विश्लेषण के क्रमिक विश्लेषण

V (K)	Node	P_{eq} (K)	M^i_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.81	28.84	0.00
	N2	-0.81	-1.17	-0.01
	N3	-0.81	-21.17	-0.01
	N4	0.81	28.82	0.00
	N5	0.81	-1.17	-0.01
	N6	0.81	-21.17	-0.01
1	N1	-0.56	28.15	0.00
	N2	-0.56	11.23	-0.01
	N3	-0.56	0.00	-0.02
	N4	0.56	43.47	0.00
	N5	0.56	0.37	-0.01
	N6	0.56	-28.37	-0.02
1	N1	-0.75	0.00	0.00
	N2	-0.75	0.00	-0.02
	N3	-0.75	0.00	-0.03
	N4	0.75	60.61	0.00
	N5	0.75	0.63	-0.02
	N6	0.75	-39.38	-0.03

कब्जा निर्माण का निर्धारण

प्रत्येक विश्लेषण के बाद आपको निर्धारित करना होगा कि अगला कब्जा अथवा कब्जे कहाँ बनेंगे। आपको निम्नलिखित जैसी सारणी पूरण करनी होगी:

V (K)	आसंधि	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	सुघट्य कब्जा?	$M_P/M_{eq,Tot}$
40	Ni	-	-	-	-	-	-	-	-
	Nj	-	-	-	-	-	-	-	-

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

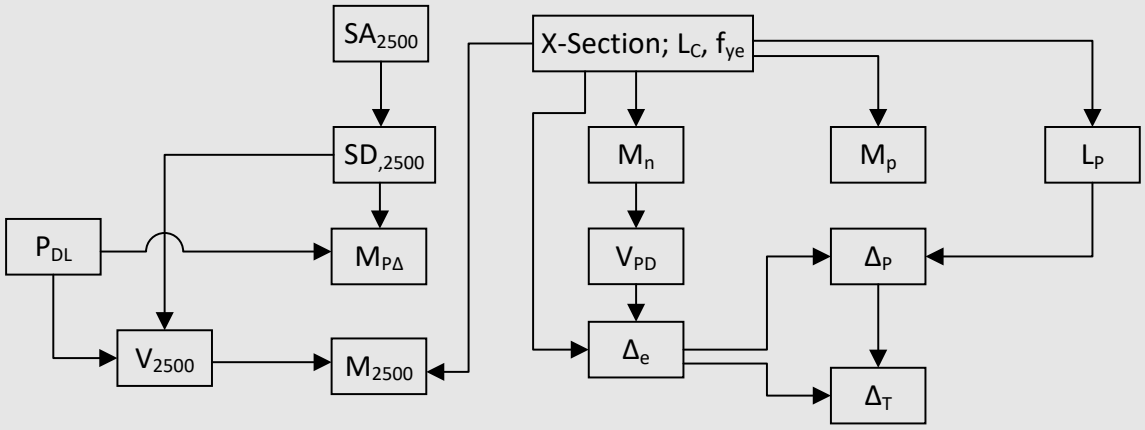
- P_{EQ}, M^i_{EQ} और Δ पिछले विश्लेषण परिणामों (सारणी 69.6) को स्तंभ 1 के अपरूपण बल से गुणा करके प्राप्त होते हैं (शीघ्र ही इस पर और चर्चा होगी)।
- P_{total}, P_{DL} (2,500 Kip) और P_{eq} का योग है।
- $M_{EQ,total}$ सभी पूर्ववर्ती मानों और वर्तमान मान के योग के बराबर है। उदाहरणार्थ, सारणी 69.9 में $M^i_{EQ,total} = M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ}$ और N1 के लिए

$$\begin{aligned} M^i_{EQ,total} &= M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ} \\ &= 19,322 + 282 = 19,603 \end{aligned}$$

- M_P पर विशेष ध्यान देना आवश्यक है, क्योंकि शीर्ष पर क्षैतिज बल बढ़ने पर परिच्छेदों में अक्षीय बल बदलते हैं और इस कारण आघूर्ण क्षमताएँ भी बदलती हैं। अतः Excel सारणी `trend` फलन का उपयोग करती है, जो निम्न जैसे दो अंत बिंदुओं के बीच रैखिक फलन का न्यूनतम-वर्ग सन्निकटन खोजता है:
`=TREND('P vs Mp'!D3:D53,'P vs Mp'!A3:A53,F10)`
वर्तमान विश्लेषण में $0 < P_{total} < 5,000$।
- हम मानते हैं कि अगला सुघट्य कब्जा तब बनेगा जब $M_{eq,Tot} \geq 0.95 M_p$।

तथापि, समस्या वास्तव में अरैखिक है, क्योंकि कब्जा निर्माण की दशा इस चरण पर अपरूपण के परिमाण पर निर्भर करती है। अतः हम एक कब्जा बनने तक V के मान को (10 kips से) बढ़ाएँगे। इस स्थिति में यह 40 है।

कार्यों के बीच अन्योन्यक्रिया



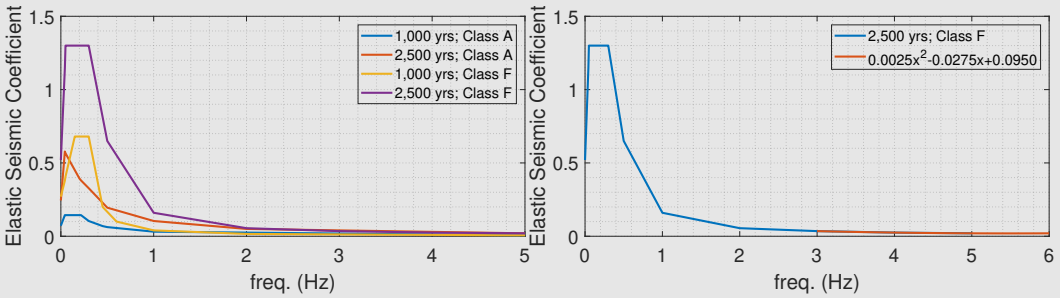
समाधान

भाग 1: अनुक्रिया वर्णक्रम विश्लेषण

निर्दिष्ट स्थान और वर्ग A तथा F के लिए 1000, 2500 वर्षों के C_s गुणांक सारणी 69.2 में दर्शाए गए थे।

① C_s और विस्थापन अनुक्रिया वर्णक्रम के आलेख (6 sec. तक बहिर्वेशन सहित) चित्र 69.10 में दर्शाए गए हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) सभी (b) 2,500 वर्ष, वर्ग F

चित्र 69.10: अनुक्रिया वर्णक्रम विश्लेषण (C_S)

प्रत्यास्थ भूकंपीय गुणांकों (C_S) को निम्नलिखित द्वारा वर्णक्रमीय विस्थापनों (Δ) में रूपांतरित किया जा सकता है:

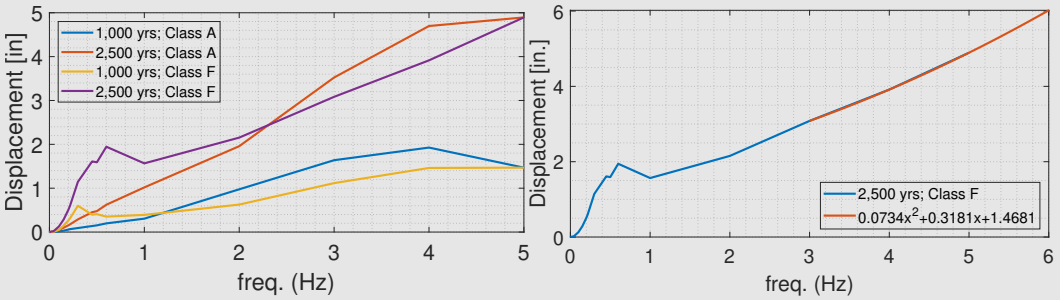
$$\Delta = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 C_S \tag{69.1}$$

② अंतिम तीन आँकड़ा बिंदुओं के लिए द्विघाती समंजन से प्राप्त होता है:

$$C_S = 0.0025f^2 - 0.0275f + 0.0950 \tag{69.2}$$

समीकरण 69.2 में $T = 6$ sec रखने पर C_s=0.02 (चित्र 69.11b से भी)।

③ विस्थापन अनुक्रिया वर्णक्रम चित्र 69.11 में दर्शाए गए हैं।



(a) सभी (b) 2,500 वर्ष, वर्ग F

चित्र 69.11: विस्थापन अनुक्रिया वर्णक्रम विश्लेषण

④ जिससे C_S के लिए T = 6 seconds पर प्राप्त होता है, Δ =6 in.

भाग 2: क्षमता (सेतु-स्तंभ के लिए हस्त-गणनाएँ)

भूकंप-प्रतिरोधी तंत्र

AASHTO, Seismic, 2011, §3.3 निर्दिष्ट करता है कि सेतुओं का भूकंप-प्रतिरोधी तंत्र (ERS) भूकंपीय रूप से प्रेरित बलों को आसपास की मृदा में संचारित करने हेतु विश्वसनीय और अबाधित भार-पथ तथा भूकंपीय रूप से

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रेरित विस्थापनों को विश्वसनीय रूप से नियंत्रित करने के लिए ऊर्जा अपव्यय और/अथवा अवरोध के पर्याप्त साधन प्रदान करे। सेतु के सभी संरचनात्मक और नींव अवयव भूकंपीय प्रतिरोध की चुनी गई अभिकल्प रणनीति तथा अन्य संरचनात्मक आवश्यकताओं के अनुरूप प्रत्याशित विस्थापन प्राप्त करने में सक्षम हों। अभिकल्प सेतु तंत्र के अपेक्षित व्यवहार अभिलक्षणों के आधार पर इन मार्गदर्शक विनिर्देशों में प्रयुक्त निम्नलिखित तीन वैश्विक भूकंपीय अभिकल्प रणनीतियों पर आधारित होना चाहिए, चित्र 69.12:

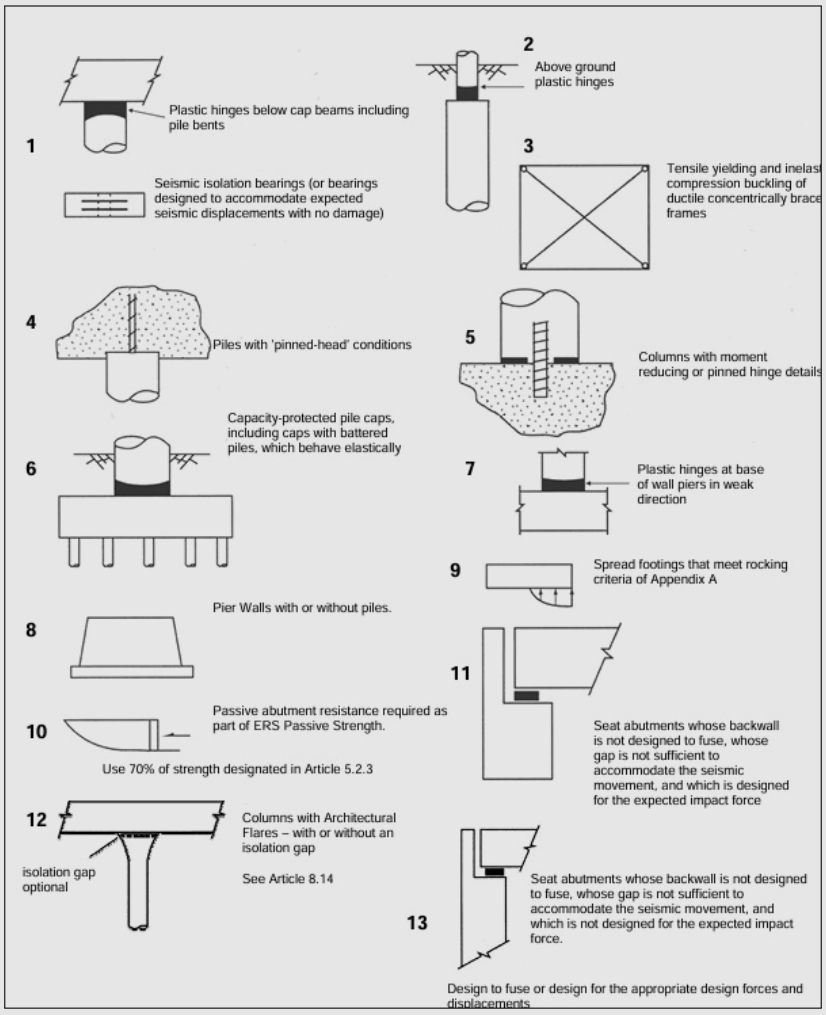
प्रकार 1 मूलतः प्रत्यास्थ अधिरचना के साथ तन्य अधःसंरचना: इस श्रेणी में स्तंभों, भित्तियों और अंत्याधारों में पारंपरिक सुघट्य कब्जाकरण सम्मिलित है, जो निष्क्रिय मृदा प्रतिरोध के पूर्ण संघटन द्वारा जडत्वीय बलों को सीमित करता है। ऐसी नींवें भी सम्मिलित हैं जो भूमिगत कब्जाकरण द्वारा जडत्वीय बलों को सीमित कर सकती हैं, जैसे ढेरों पर ढेर-बेंट और समाकलित अंत्याधार।

प्रकार 2 तन्य अधिरचना के साथ मूलतः प्रत्यास्थ अधःसंरचना: यह श्रेणी केवल आलंबों पर तन्य अनुप्रस्थ ढाँचों वाली सीधी, अविकरिणत, इस्पात I-परिच्छेद संयुक्त गर्डर अधिरचनाओं पर लागू होती है। इस रणनीति का उपयोग स्वामी द्वारा अनुमोदित और प्रकरण-विशिष्ट अभिकल्प मानदंड तथा कार्यविधि पर आधारित होना चाहिए।

प्रकार 3 दोनों के बीच गलनीय क्रियाविधि के साथ प्रत्यास्थ अधिरचना और अधःसंरचना: इस श्रेणी में भूकंपीय रूप से विलगित संरचनाएँ और वे संरचनाएँ सम्मिलित हैं जिनमें अधिरचना तथा अधःसंरचना के बीच संचारित जडत्वीय बलों को नियंत्रित करने के लिए अवमंदकों जैसे अनुपूरक ऊर्जा-अपव्यय उपकरण प्रयुक्त होते हैं।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 69.12: अनुमेय भूकंप-प्रतिरोधी अवयव (ERES) (AASHTO, Seismic, 2011)

⑤ चित्र 69.5a से विचाराधीन अधिरचना प्रबलित कंक्रीट धरन है, सेतु भूकंपीय रूप से विलगित नहीं है और कोई अनुपूरक ऊर्जा-अपव्यय उपकरण प्रयुक्त नहीं है; अतः सेतु का भूकंप-प्रतिरोधी तंत्र प्रकार 1 है।

नाममात्र आघूर्ण क्षमता

⑥ ध्यान दें कि नाममात्र आघूर्ण की गणनाएँ यहाँ प्रस्तुत नहीं हैं और `Kiewit` द्वारा दी गई थीं

AASHTO, Seismic, 2011, §8.5 अपेक्षित नाममात्र आघूर्ण क्षमता M_{ne} को कंक्रीट और प्रबलन इस्पात सामर्थ्यों के पदों में तब परिभाषित करता है, जब या तो कंक्रीट विकृति 0.003 के परिमाण तक पहुँचती है अथवा प्रबलन इस्पात विकृति सारणी 69.4 में परिभाषित घटित चरम तनन विकृति तक पहुँचती है।

आधार स्तंभ चित्र 69.6b में दर्शाया गया है और हम Whitney प्रतिबल खंड अथवा Mander प्रतिरूप का उपयोग करके नाममात्र आघूर्ण क्षमता की गणना करना चाहते हैं[a]

Whitney प्रतिबल खंड का उपयोग करने पर आधार पर स्तंभ की नाममात्र आघूर्ण क्षमता M_{ne} = 6,220 kip-ft (± 10%) (Whitney) प्राप्त होती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Mander प्रतिरूप (Mander, Priestley, and Park, 1988), चित्र 69.7, में संपूर्ण प्रतिबल-विकृति वक्र का वर्णन 3-प्राचल समीकरणों द्वारा किया जाता है:

$$\frac{f_c}{f'_{cc}} = \frac{n\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)}{(n-1)+\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)^n} \tag{69.3}$$

$$n = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \tag{69.4}$$

$$E_c \text{ (MPa)} = 5,000\sqrt{f'_c \text{ (MPa)}} \tag{69.5}$$

$$E_{sec} = \frac{f'_{cc}}{\varepsilon_{cc}} \tag{69.6}$$

ε_{cc} परिसीमित कंक्रीट के अधिकतम संपीडन सामर्थ्य पर विकृति है:

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0}\left[1+5\left(\frac{f'_{cc}}{f'_c}-1\right)\right]$$

और परिसीमित कंक्रीट का संपीडन सामर्थ्य f'_{cc} इस प्रकार दिया जाता है:

$$f'_{cc} = f'_c\left(-1.254+2.254\sqrt{1+\frac{7.94f'_t}{f'_c}}-2\frac{f'_t}{f'_c}\right)$$

जिसमें f'_t इस प्रकार दिया जाता है:

$$f'_t = \frac{1}{2}k_e\rho_s f_{yh}$$

जिसमें ρ_s = अनुप्रस्थ परिसीमन इस्पात के आयतन का परिसीमित कंक्रीट अंतर्भाग के आयतन से अनुपात, f_{yh} = अनुप्रस्थ प्रबलन का पराभव सामर्थ्य, k_e = परिसीमन गुणांक। वृत्ताकार हूपों के लिए:

$$k_e = \frac{\left(1-\frac{s'}{2d_s}\right)^2}{1-\rho_{cc}}$$

और वृत्ताकार सर्पिलों के लिए:

$$k_e = \frac{1-\frac{s'}{2d_s}}{1-\rho_{cc}}$$

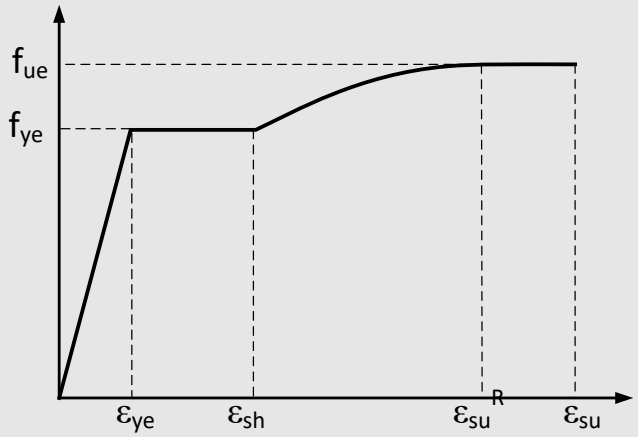
जहाँ ρ_{cc} = अनुदैर्ध्य प्रबलन के क्षेत्रफल का परिच्छेद अंतर्भाग के क्षेत्रफल से अनुपात, s' = सर्पिल अथवा हूप छड़ों के बीच स्पष्ट अंतराल, d_s = सर्पिल का व्यास।

प्रतिबल-विकृति वक्र परिभाषित करने हेतु Mander प्रतिरूप का उपयोग करने पर आधार पर स्तंभ की नाममात्र आघूर्ण क्षमता प्राप्त होती है:

$$M_{ne} = 8,551(\pm 10\%) \text{ (kip-ft; Mander)} \tag{69.7}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

⑦ **अपेक्षित पराभव सामर्थ्य** f_{ye} AASHTO, Seismic, 2011, §8.4.2 कहता है कि प्रबलन इस्पात का प्रतिरूपण ऐसे प्रतिबल-विकृति संबंध से किया जाए जो आरंभिक प्रत्यास्थ भाग, पराभव पठार और विकृति-कठोरीकरण परास दर्शाता हो जिसमें विकृति के साथ प्रतिबल बढता है, चित्र 69.13 (AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 8.4.2-1)।



चित्र 69.13: प्रबलन इस्पात प्रतिबल-विकृति प्रतिरूप

विशिष्ट आँकड़ों के अभाव में सारणी 69.4 में दिए इस्पात प्रबलन गुणों का उपयोग किया जाना चाहिए।

तालिका 69.4: प्रबलन इस्पात छड़ों के प्रतिबल गुण (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1)

गुण	संकेतन	छड़ आकार	ASTM A 706	ASTM A 615 (ग्रेड 60)
निर्दिष्ट न्यूनतम पराभव प्रतिबल (ksi)	fy	#3– #18	60	60
अपेक्षित पराभव प्रतिबल (ksi)	f_{ye}	#3– #18	68	68
अपेक्षित तनन सामर्थ्य (ksi)	f_{ue}	#3– #18	95	95
अपेक्षित पराभव विकृति	ε_{ye}	#3– #18	0.0023	0.0023
		#3– #8	0.0150	0.0150
		#9	0.0125	0.0125
विकृति-कठोरीकरण का आरंभ	ε_{sh}	#10 & #11	0.0115	0.0115
		#14	0.0075	0.0075
		#18	0.0050	0.0050
घटित चरम तनन विकृति	ε_{su}^{R}	#4– #10	0.090	0.060
		#11– #18	0.060	0.040
चरम तनन विकृति	ε_{su}	#4– #10	0.120	0.090
		#11– #18	0.090	0.060

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रत्यास्थ क्षेत्र में प्रत्यास्थता मापांक E_s को 29,000 ksi लिया जाए। सारणी 69.4 के अनुसार ASTM A706 सरिए, आकार #3-#18, का अपेक्षित पराभव सामर्थ्य 68 ksi प्राप्त होता है।

⑧ सुघट्य कब्जा लंबाई L_p AASHTO, Seismic, 2011, §4.11.6 कहता है कि स्तंभों की विश्लेषणात्मक सुघट्य कब्जा लंबाई L_p को स्तंभ की उस समतुल्य लंबाई के रूप में लिया जाए जिस पर सुघट्य घूर्णन के आकलन हेतु सुघट्य वक्रता स्थिर मानी जाती है, चित्र 69.16। अधिकतम आघूर्ण बिंदु से प्रतिवक्रता बिंदु तक समतुल्य सदस्य का सुघट्य विस्थापन सुघट्य घूर्णन के आधार पर निर्धारित किया जाए।

पाद, समाकलित बेंट टोपी, अतिविशाल शाफ्ट अथवा आवरित शाफ्ट में ढाँचित प्रबलित कंक्रीट स्तंभों के लिए inches में सुघट्य कब्जा लंबाई L_P, AASHTO, Seismic, 2011, Equation 4.11.6-1 से निर्धारित की जा सकती है:

$$L_P = 0.08L_C + 0.15 f_{ye} d_{bl} \geq 0.3 f_{ye} d_{bl}$$

जहाँ:

L अधिकतम आघूर्ण बिंदु से आघूर्ण प्रतिवक्रता बिंदु तक स्तंभ की लंबाई (in.)
f_{ye} अनुदैर्ध्य स्तंभ प्रबलन इस्पात छडों का अपेक्षित पराभव सामर्थ्य (ksi)
d_{bl} अनुदैर्ध्य स्तंभ प्रबलन इस्पात छडों का नाममात्र व्यास (in)

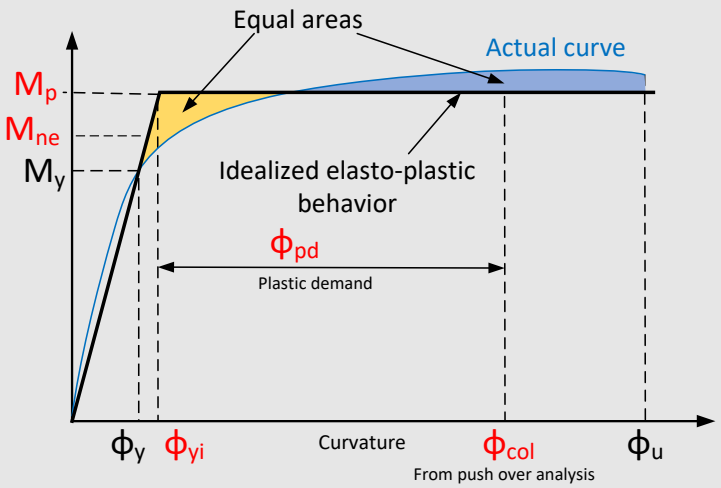
चूँकि इस परियोजना के विश्लेषण में मृदा और शाफ्ट की अन्योन्यक्रिया पर विचार नहीं किया गया है, सेतु-स्तंभ की कुल ऊँचाई स्तंभ की ऊँचाई (40 ft) और शाफ्ट की ऊँचाई (60 ft) का योग है। इस स्थिति में नति-परिवर्तन बिंदु लगभग सेतु-स्तंभ की मध्य ऊँचाई ($L \simeq 50$ ft) पर होगा। अतः:

$$L_c \simeq 50 \times 12 = 600 \text{ (in)} \tag{69.8}$$
$$f_{ye} = 68 \text{ (ksi)} \tag{69.9}$$
$$d_{bl} = 1.693 \text{ (in)} \tag{69.10}$$
$$L_P = \max\{0.08 \times 600 + 0.15 \times 68 \times 1.693, 0.3 \times 68 \times 1.693\} \tag{69.11}$$
$$= \max\{65.3, 34.5\} = 65.3 \text{ (in)} \tag{69.12}$$

⑨ सुघट्य आघूर्ण M_p AASHTO, Seismic, 2011, §8.5 कहता है कि सभी तन्य कंक्रीट सदस्यों की सुघट्य आघूर्ण क्षमता अपेक्षित सामग्री गुणों के आधार पर आघूर्ण-वक्रता ($M - \Phi$) विश्लेषण द्वारा परिकलित की जाए। आघूर्ण-वक्रता विश्लेषण में मृत भार के अक्षीय बलों के साथ उलटने के कारण अक्षीय बल सम्मिलित हों।

सदस्य के अनुप्रस्थ परिच्छेद की सुघट्य आघूर्ण क्षमता का आकलन करने हेतु ($M - \Phi$) वक्र को प्रत्यास्थ पूर्णतः सुघट्य अनुक्रिया से आदर्शीकृत किया जाना चाहिए। आदर्शीकृत वक्र का प्रत्यास्थ भाग प्रथम प्रबलन छड पराभव दर्शाने वाले बिंदु से गुजरे। आदर्शीकृत सुघट्य आघूर्ण क्षमता प्रथम प्रबलन छड पराभव बिंदु के आगे वास्तविक और आदर्शीकृत ($M - \Phi$) वक्रों के बीच क्षेत्रों को बराबर करके प्राप्त की जाए, जैसा चित्र 69.14 AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 8.5-1 में दर्शाया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 69.14: आघूर्ण वक्रता ((AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1) से अनुकूलित)

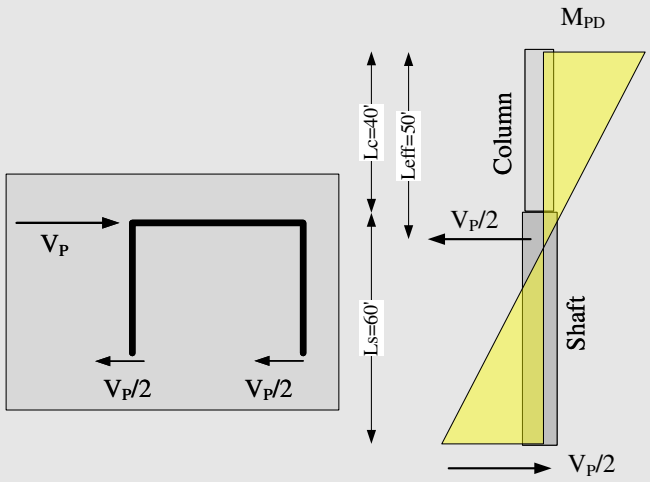
स्तंभ के शीर्ष, स्तंभ के आधार और वेधित शाफ्ट में परिच्छेदों की आघूर्ण-वक्रता तथा संगत आदर्शीकृत वक्र नीचे निर्धारित किए गए हैं।

पुनः ध्यान दें कि स्तंभ के तल में 2-inch का भाग (जहाँ युग्मक है) ऐसा है जिसमें बाहरी सरिए असतत हैं। युग्मक केवल संयोजक का कार्य करता है—उससे कोई सामर्थ्य प्राप्त नहीं होता। आप यह भी देखते हैं कि वेधित शाफ्ट के ठीक ऊपर शाफ्ट के शीर्ष और बाहरी सरिए के सिरे के बीच 2" का अंतर है। दोनों स्थितियों में तल स्तंभ का सुघट्य आघूर्ण केवल भीतरी सरिए के भीतर बने परिसीमित कंक्रीट के आधार पर परिकलित किया जाना चाहिए।

परिणामों के अनुसार स्तंभ के आधार पर सुघट्य आघूर्ण सबसे छोटा है। तथापि, ध्यान देना चाहिए कि इसका अर्थ यह नहीं है कि प्रथम सुघट्य कब्जा स्तंभ के आधार पर बनेगा, क्योंकि क्षमता का माँग से अनुपात संरचना में सुघट्य कब्जा निर्माण का क्रम नियंत्रित करता है।

⑩ **अपरूपण** V_p स्थैतिकी से प्रथम सुघट्य कब्जा स्तंभ के शीर्ष पर बनता है और दोनों स्तंभों में प्रथम सुघट्य आघूर्ण विकसित करने के लिए आवश्यक संगत अपरूपण V_p, चित्र 69.15, है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 69.15: सेतु-स्तंभ की ऊँचाई में आघूर्ण वितरण

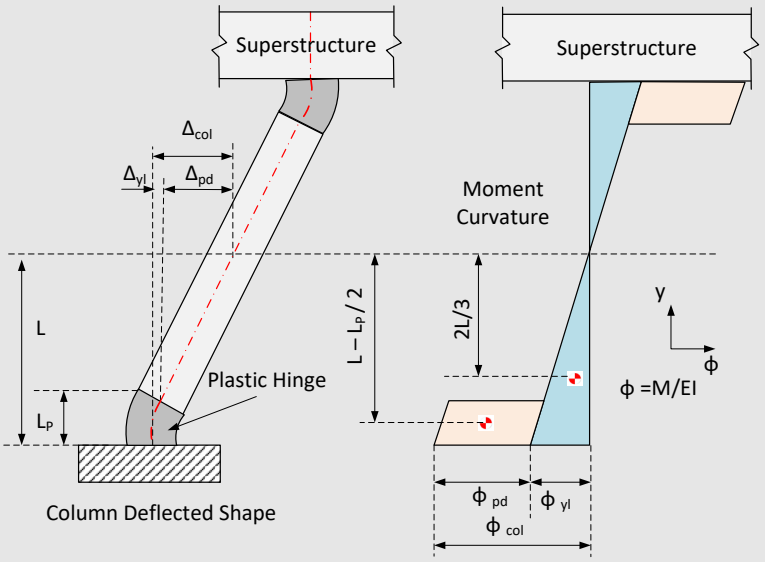
7ft व्यास के स्तंभ के शीर्ष के लिए $M_p = 15,839$k-ft

$$L_{eff} = \frac{L_C + L_S}{2} = \frac{60+40}{2} = 50\text{ft} \tag{69.13}$$

$$\frac{V_P}{2} L_{eff} = M_c^t \Rightarrow V_P = 2\frac{M_c^t}{L_{eff}} = 2\frac{15,839}{50} = 634 \text{ (kips)} \tag{69.14}$$

⑪ **प्रत्यास्थ विस्थापन** Δ_e हम सदस्य के घूर्णन और विक्षेप के निर्धारण हेतु वक्रता-क्षेत्रफल विधि का उपयोग करते हैं[b], चित्र 69.16।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 69.16: सेतु-स्तंभ की विक्षेपित आकृति और वक्रता आरेख; AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 से अनुकूलित

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P \text{ 1st curvature area theorem} \tag{69.15}$$

$$\Delta_e = \left(\Phi_{yld}\frac{L}{2}\right) \times \frac{2}{3}L \text{ 2nd curvature area theorem} \tag{69.16}$$

$$\Phi_{yld} = \frac{M_y}{E_C I_C} \tag{69.17}$$

$$E_c = 57\sqrt{f'_{cc}} = 57\sqrt{5,000} = 4,031 \text{ (ksi)} \tag{69.18}$$

$$I_C = \frac{\pi d_C^4}{64} = \frac{\pi \times 7^4 \times 12^4}{64} = 2,443,920 \text{ (in}^4\text{)} \tag{69.19}$$

$$\Phi_{yld} = \frac{15,839 \times 12}{4031 \times 2,443,920} = 1.93 \times 10^{-5} \tag{69.20}$$

$$\Delta_e = \left(1.93 \times 10^{-5}\frac{50 \times 12}{2}\right) \times \frac{2}{3}(50 \times 12) = 2.32 \text{ inch} \tag{69.21}$$

(69.22)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

⑫ **सुघट्य विस्थापन** Δ_{PD} Φ_{PD} का आकलन चित्र 69.9b से 0.005/ft किया जा सकता है। सुघट्य विस्थापन निम्नलिखित समीकरणों से निर्धारित किया जा सकता है:

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P \tag{69.23}$$

$$\Phi_{PD} = 0.005 \times \frac{65.3}{12} = 0.0272 \tag{69.24}$$

$$\Delta_{PD} = \theta_P \left(L_C - \frac{L_P}{2} \right) \tag{69.25}$$

$$= 0.0272 \left((50 \times 12 - \frac{65.3}{2} \right) \simeq 15.4 \text{ (in.)} \tag{69.26}$$

⑬ **कुल विस्थापन** Δ_{total} कुल विस्थापन केवल प्रत्यास्थ और सुघट्य विस्थापनों का योग है:

$$\Delta_{tot} = \Delta_e + \Delta_{PD} = 2.3 + 15.4 = 17.7 \text{ (in.)} \tag{69.27}$$

भाग 3: माँग भार

स्तंभ पर अभिकल्प अक्षीय भार P_{DL} = 2,500 kips है।

⑭ **$P\Delta$ प्रभावों से स्तंभ के आधार पर आघूर्ण** AASHTO, Seismic, 2011, §4.11.5, $P-\Delta$ प्रभावों की आवश्यकताओं को समेटता है और AASHTO, Seismic, 2011, Eq. 4.11.5-1 प्रबलित कंक्रीट स्तंभों के लिए निर्दिष्ट करता है:

$$P_{DL}\Delta_r \leq 0.25 M_P$$

जहाँ

P_{DL} अगुणकित मृत भार (kips)
Δ_r प्रतिवक्रता बिंदु और सुघट्य कब्जे के सबसे दूरस्थ सिरे के बीच सापेक्ष पार्श्व विस्थापन (in.).
यहाँ यह 2,500 वर्षों के अनुक्रिया वर्णक्रम से विस्थापन होगा।
M_P अपेक्षित सामग्री गुणों पर आधारित प्रबलित कंक्रीट स्तंभ की आदर्शीकृत सुघट्य आघूर्ण क्षमता (kip-in.)

संगत AASHTO टिप्पणी कहती है कि $P-\Delta$ प्रभावों की उपेक्षा की जा सकती है। पिछले समीकरण को संतुष्ट न करने वाले स्तंभों के लिए अभिकल्पक के पास निम्नलिखित में से एक अथवा अधिक पर विचार करने का विकल्प है:

- अनुदैर्ध्य प्रबलन जोडकर स्तंभ की आघूर्ण क्षमता बढाना।
- AASHTO, Seismic, 2011, §4.1.3 में वर्णित अनुसार सेतु के गतिक अभिलक्षण समायोजित करना।
- स्तंभ पर कार्यरत मृत भार माँग घटाने हेतु सेतु को पुनर्विन्यस्त करना।
- $P-\Delta$ प्रभावों पर स्पष्ट रूप से विचार करने हेतु अरैखिक समय-इतिहास विश्लेषण का उपयोग करना।

भूकंपीय माँगों के साथ $P-\Delta$ प्रभावों पर विचार करने की एकमात्र कठोर विधि अरैखिक समय-इतिहास विश्लेषण का उपयोग है। अरैखिक समय-इतिहास विश्लेषण का उपयोग करते समय पराभव-पश्च दृढता, दृढता ह्रास और अभारण दृढता के ऐसे प्रतिरूप आवश्यक हैं जो भूकंपीय रूप से प्रेरित चक्रीय भारण के कारण अपेक्षित संरचनात्मक अनुक्रिया

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

को समेट सकें। इस प्रकार के विश्लेषण की जटिलता के कारण अनुशंसा की जाती है कि जहाँ व्यावहारिक हो, समीकरण 4.11.5-1 की आवश्यकताएँ संतुष्ट की जाएँ।

$$\begin{aligned} M_{P-\Delta} &= P_{DL}\Delta_r && (69.28)\\ P_{DL} &= 2,500 \text{ (Kip)} && (69.29)\\ \Delta_r &= 6 \text{ (in.) From Eq. 69.1} && (69.30)\\ M_{P-\Delta} &= (2,500)(0.5) = 1,250 \text{ (kip-ft)} && (69.31)\\ 0.25 * M_P &= 0.25(8,662) = 2,166 \text{ (kip-ft) } \checkmark && (69.32) \end{aligned}$$

जहाँ M_P चित्र 69.9b से निर्धारित किया गया है। अतः $P-\Delta$ प्रभावों से अनुक्रिया पर उल्लेखनीय प्रभाव अपेक्षित नहीं है और इन्हें उपेक्षणीय माना गया है।

15 स्तंभ के आधार पर अपरूपण V_{2500} V_{2500}, 2,500 वर्षों की घटना से उत्पन्न अपरूपण है और इससे निर्धारित होता है:

$$V_{2500} = C_S P_{DL} = (0.02)(2,500) = 50 \text{ (kips)}$$

C_S को $T = 6$ sec. के लिए चित्र 69.10b अथवा समीकरण 69.2 से निर्धारित किया जाता है, जबकि अक्षीय बल दिया गया है।

16 स्तंभ के आधार पर M_{2500} स्तंभ के आधार पर 2,500 वर्षों का आघूर्ण M_{2500} इससे निर्धारित होता है:

$$M_{2500} = V_{2500}L_C = (50)(40) = 2,000 < M_P \text{ (kip-ft.)}$$

जो 8,662 k-ft की स्तंभ क्षमता से कम है (चित्र 69.9b)।

17 माँग आघूर्ण बनाम अनुमेय आघूर्ण अनुमेय आघूर्ण है:

$$\begin{aligned} \phi M_{ne} &= (0.9)(8,551) = 7,695.9 \text{ (kip-ft)} && (69.33)\\ &> M_{2500}(2,000) && (69.34) \end{aligned}$$

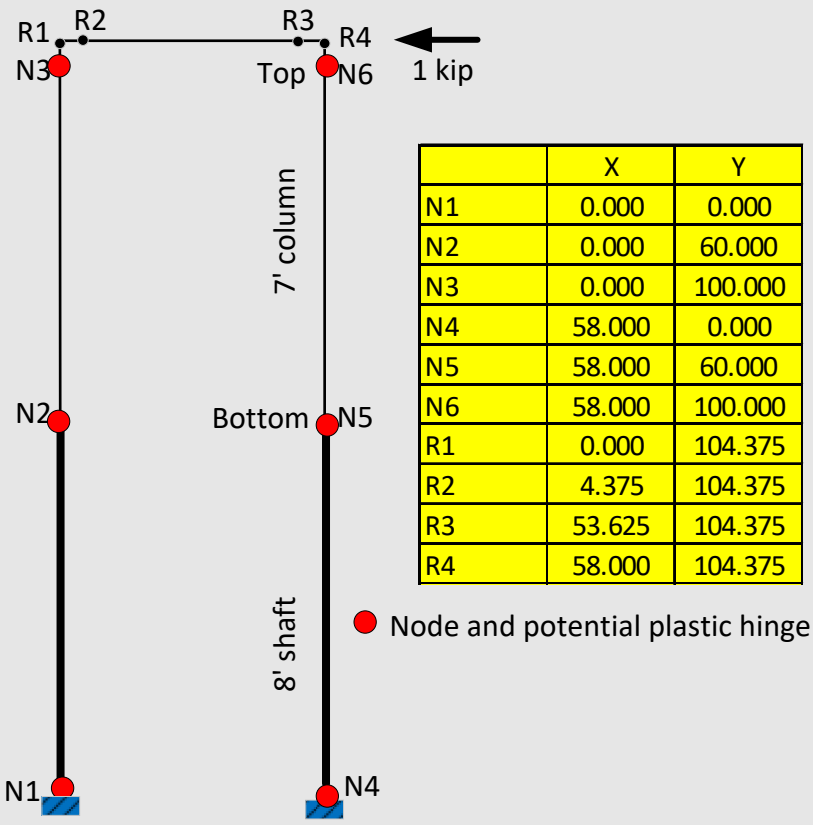
जहाँ M_{ne} समीकरण 69.7 से है।

भाग 4: पुशओवर विश्लेषण भाग

18 प्रतिरूप का चित्रण दृढ टोपी धरन मानते हुए केवल स्तंभों का प्रतिरूपण किया जाना है और उन्हें आधारशिला से दृढतापूर्वक संयोजित माना गया है।

Kiewit चित्र 69.17 में दर्शाए जाल पर आधारित चरण-दर-चरण पुशओवर प्रत्यास्थ स्थैतिक विश्लेषण प्रस्तुत करता है। स्तंभ केवल परिच्छेद क्षेत्रफल, जडत्व आघूर्ण और प्रत्यास्थता मापांक से अभिलक्षित हैं। अतः सॉफ्टवेयर प्रतिरूपण में न तो अरैखिक सामग्री और न ही तंतु परिच्छेद परिभाषित करने की आवश्यकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



	X	Y
N1	0.000	0.000
N2	0.000	60.000
N3	0.000	100.000
N4	58.000	0.000
N5	58.000	60.000
N6	58.000	100.000
R1	0.000	104.375
R2	4.375	104.375
R3	53.625	104.375
R4	58.000	104.375

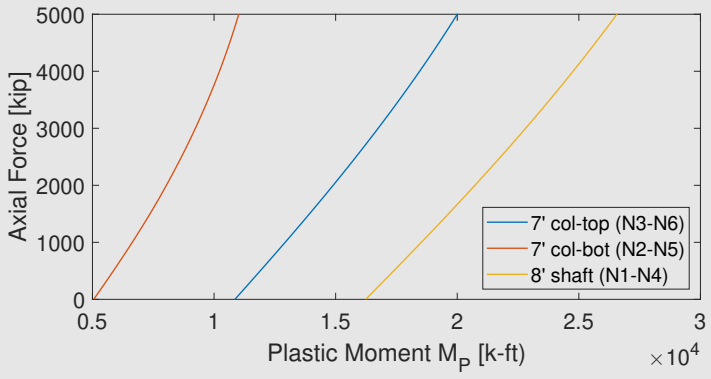
चित्र 69.17: RISA प्रतिरूप

⑲ **स्तंभों के शीर्ष पर सुघट्य आघूर्ण** M_P सारणी 69.5 (आपको उपलब्ध कराई गई $N - M_p$ स्प्रेडशीट से निकाली गई) तीन भिन्न परिच्छेदों और अक्षीय बलों के परास (वृद्धियाँ 100 kips के बराबर) के लिए आघूर्ण क्षमताएँ दर्शाती है। संरचना को धकेले जाने और फलतः अक्षीय बल बदलने पर परिच्छेदों की आघूर्ण क्षमताओं पर अक्षीय बल के प्रभाव को समाहित करने हेतु इन आघूर्ण क्षमताओं का पुशओवर विश्लेषण में उपयोग किया जाता है। (ΔP = 500 kips)। इन्हें चित्र 69.18 में भी दर्शाया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 69.5: अक्षीय बलों के परास पर तीन भिन्न परिच्छेदों की आघूर्ण क्षमताएँ

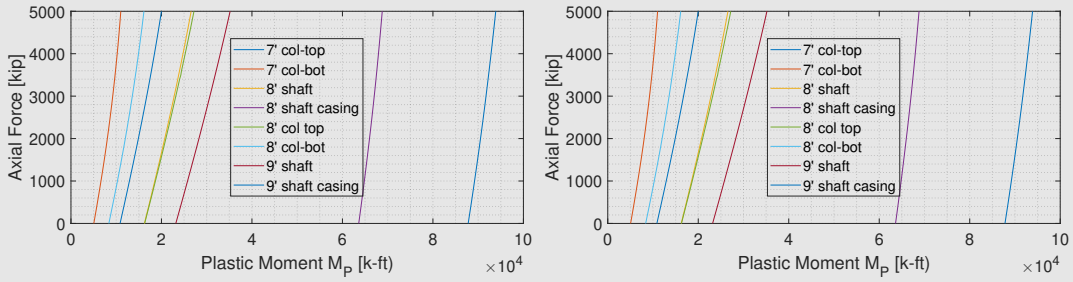
	7 ft स्तंभ (शीर्ष)	7 ft स्तंभ (तल)	8 ft शाफ्ट
P (K)	M_p (K-ft)	M_p (K-ft)	M_p (K-ft)
-	10,858	5,051	16,234
100	11,067	5,216	16,467
200	11,276	5,379	16,698
300	11,484	5,541	16,929
400	11,692	5,702	17,159
500	11,899	5,862	17,388
600	12,105	6,020	17,617
700	12,312	6,177	17,846
800	12,517	6,332	18,073
900	12,721	6,485	18,299
1,000	12,924	6,637	18,525
1,100	13,126	6,787	18,750
1,200	13,327	6,934	18,974
1,300	13,528	7,080	19,196
1,400	13,727	7,224	19,419
1,500	13,924	7,366	19,639
1,600	14,121	7,505	19,859
1,700	14,318	7,643	20,077
1,800	14,512	7,778	20,296
1,900	14,706	7,911	20,512
2,000	14,898	8,040	20,727
2,100	15,089	8,169	20,941
2,200	15,278	8,295	21,154
2,300	15,467	8,419	21,366
2,400	15,654	8,541	21,576
2,500	15,839	8,662	21,786
2,600	16,024	8,780	21,994
2,700	16,207	8,897	22,200
2,800	16,388	9,011	22,405
2,900	16,568	9,122	22,610
3,000	16,747	9,232	22,812
3,100	16,925	9,340	23,013
3,200	17,101	9,445	23,214
3,300	17,275	9,549	23,412
3,400	17,448	9,651	23,609
3,500	17,619	9,751	23,805



चित्र 69.18: तीन आवश्यक स्तंभों का अन्योन्यक्रिया आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सभी परिच्छेदों के सुघट्य आघूर्ण (गणनाएँ यहाँ प्रस्तुत नहीं हैं) चित्र 69.19 में दिए गए हैं।



चित्र 69.19: सुघट्य आघूर्ण

0.95 ϕ गुणक की व्याख्या Marilyne Lefebvre द्वारा प्रदत्त

मेरा मानना है कि समीकरण $M_{EQ} \leq 0.95 M_p$ में 0.95 गुणक सुघट्य आघूर्ण पर लगाया गया घटाव गुणक है और यह (AASHTO, LRFD, 2017) (AASHTO LRFD सेतु अभिकल्प विनिर्देश) तथा (AASHTO, Seismic, 2011) (AASHTO भूकंपीय विनिर्देश) में प्राप्त दो भार गुणकों का औसत है। उस भार गुणक के उपयोग का दर्शन नीचे समझाया गया है:

AASHTO LRFD 8th संस्करण में बल-आधारित अभिकल्प के लिए स्तंभ की आनमनी क्षमता पर सीमा रखी गई। चूँकि LRFD में तन्यता माँग की गणना नहीं की गई, रूढिवादी रहने हेतु सुघट्य आघूर्ण पर 0.9 का घटाव गुणक लगाया गया:

> *स्तंभों को द्विअक्षीय रूप से अभिकल्पित करना और न्यूनतम तथा अधिकतम दोनों अक्षीय बलों के लिए जाँचना आवश्यक है। इन विनिर्देशों के पिछले संस्करण ने आनमनी प्रतिरोध गुणक को 0.9 से 0.5 तक घटाया था जब अक्षीय भार O से $0.20 f'_c A_g$ तक बढा, क्योंकि अक्षीय भार बढने के साथ तन्यता क्षमता घटने की प्रवृत्ति होती है। इस संस्करण में यह आवश्यकता शिथिल की गई है, परंतु अत्यधिक विक्षेप के कारण तन्यता क्षमता पर माँग सीमित करने हेतु $P - \Delta$ आवश्यकता जोडी गई है (अनुच्छेद 4.7.4.5)। साथ ही R-गुणक अपने पिछले स्तरों पर रखे गए हैं (अनुच्छेद 3.10.7), यद्यपि अभिकल्प भूकंप की प्रत्यावर्तन अवधि 500 से 1.000 वर्ष तक बढाई गई है। NCHRP 12-49 और 20-7(192) दोनों प्रावधानों में अनुशंसित आनमनी प्रतिरोध गुणक 1.0 है। तथापि, चूँकि वर्तमान विनिर्देश बल-आधारित हैं और 12-49 तथा 20-7(193) दोनों प्रावधानों की भाँति तन्यता माँग की स्पष्ट गणना नहीं करते, अधिक कठोर विश्लेषण के स्थान पर गुणक को 0.9 तक सीमित करना उचित माना गया है।*
>
> [C5.11.4.1.2](AASHTO, LRFD, 2017)

वास्तव में (AASHTO, Seismic, 2011) में वह भार प्रतिरोध गुणक 1.0 है, क्योंकि आप भार संयोजन 1.0DC + 1.0DW + 0.5LL + 1.0EQ और अपेक्षित सामग्री गुणों (अर्थात् f'_{ce} और f_{ye}) का उपयोग कर रहे हैं।

सामान्यतः California और Washington जैसे उच्च भूकंपीय क्षेत्र में विस्थापन-आधारित अभिकल्प का उपयोग वांछनीय है, क्योंकि तन्यता और विस्थापन क्षमता की आवश्यकताएँ AASHTO Seismic में AASHTO LRFD की तुलना में अधिक कठोर हैं।

विस्थापन-आधारित अभिकल्प बल-आधारित अभिकल्प से कुछ भिन्न कार्य करता है, परंतु पुशओवर विश्लेषण उसी प्रकार किया जाता है—क्षैतिज बल बढाने के स्थान पर विस्थापन बढाया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तथापि, इस उदाहरण में हम पुशओवर विश्लेषण द्वारा बल-आधारित अभिकल्प प्रदर्शित कर रहे हैं (अर्थात् सुघट्य कब्जा बनने तक अपरूपण बल बढ़ाया जाता है)।

चूँकि Goethals भूकंपीय क्षेत्र A (SD1 = 0.03) में है, AASHTO Seismic शाफ्ट को क्षमता-संरक्षित सदस्य बनाने की आवश्यकता नहीं रखता। इस बेंट के ऊर्ध्वदृश्य (संलग्न Word दस्तावेज देखें) से देखा जा सकता है कि केवल भीतरी स्तंभ पिंजरा शाफ्ट में विस्तारित है। स्तंभ सरिपल पिंजरा शाफ्ट में विस्तारित नहीं है।

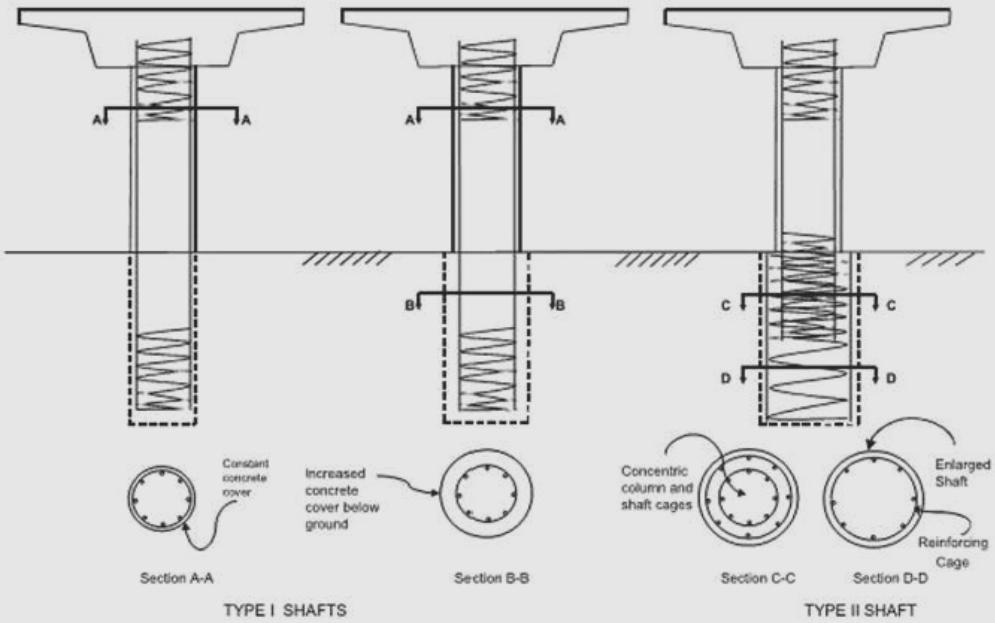
21’-0” का भीतरी पिंजरा शाफ्ट में विस्तारित है, परंतु अनुप्रस्थ प्रबलन बंध हैं। स्तंभ का सरिपल प्रबलन किसी प्रारूपिक क्षमता-संरक्षित सदस्य की भाँति शाफ्ट में विस्तारित नहीं है। अतः इन दोनों बातों के आधार पर हमने निर्धारित किया कि शाफ्ट पूर्णतः प्रत्यास्थ व्यवहार नहीं कर रहा, अर्थात् सुघट्य कब्जा शाफ्ट के भीतर बन सकता है। RISA पर किए पुशओवर विश्लेषण से अंततः पुष्टि हुई कि इस बेंट की विफलता क्रियाविधि शाफ्ट के आधार पर कब्जा निर्माण है।

भार गुणक के विषय में, क्योंकि वेधित शाफ्ट क्षमता-संरक्षित सदस्य नहीं है, हम स्तंभ के तन्य अभिकल्प के लिए 1.0 भार गुणक का उपयोग उचित नहीं मानते, क्योंकि AASHTO Seismic ने 1.0 भार गुणक को क्षमता-संरक्षित सदस्य पर आधारित किया है। अतः प्रारंभिक अभिकल्प के लिए, यदि हम AASHTO LRFD के समीकरणों का उपयोग जारी रखना चाहते हैं तो 1.0 भार घटाव गुणक के स्थान पर हमने अपने विश्लेषण में मनमाने रूप से 0.95 का उपयोग किया (जो AASHTO LRFD और AASHTO Seismic के गुणकों का औसत है)। अनुच्छेद C5.11.4.1.2 हमें 0.9 से भिन्न गुणक का उपयोग करने देता है, यदि हमने केवल संहिता समीकरणों पर निर्भर रहने से अधिक कठोर विश्लेषण किया हो (अर्थात् स्तंभ की विस्थापन क्षमता की गणना—जो हमने अपने पुशओवर विश्लेषण द्वारा की)। शाफ्ट में सुघट्य कब्जा निर्माण पर विचार करने हेतु हमने केवल स्तंभ की सुघट्य क्षमता पर घटाव गुणक जोड़ा।

CALTRANS, 2013 ने दो भिन्न शाफ्ट विन्यासों की अच्छी व्याख्या दी है (नीचे Caltrans Seismic Design Criteria संस्करण 1.7 का चित्र देखें), चित्र 69.20।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Type I shafts are designed so the plastic hinge will form below ground in the shaft. The concrete cover and area of transverse and longitudinal reinforcement may change between the column and Type I shaft, but the cross section of the confined core is the same for both the column and the shaft. The global displacement ductility demand, μ_D for a Type I shaft shall be as specified in Section 2.2.4, with an upperbound value corresponding to that of the supported column.

Type II shafts are designed so the plastic hinge will form at or above the shaft/column interface, thereby, containing the majority of inelastic action to the ductile column element. Type II shafts are usually enlarged shafts characterized by a reinforcing cage in the shaft that has a core diameter larger than that of the column it supports. Type II shafts shall be designed to remain elastic. See Section 7.7.3.2 for design requirements for Type II shafts.

Figure 2.2.4-1 Shaft Definitions

NOTE:
Generally, the use of Type II shafts should be discussed and approved at the Type Selection Meeting. Type II Shafts will increase the foundation costs, compared to Type I Shafts, however there is an advantage of improved post-earthquake inspection and repair. Typically, Type I shafts are appropriate for short columns, while Type II shafts are used in conjunction with taller columns. The end result shall be a structure with a balanced stiffness as discussed in Section 7.

चित्र 69.20: Caltrans की शाफ्ट परिभाषा(CALTRANS, 2013)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सामान्यतः प्रकार II शाफ्टों के उपयोग पर प्रकार चयन बैठक में चर्चा और अनुमोदन होना चाहिए। प्रकार II शाफ्ट प्रकार 1 शाफ्ट की तुलना में नींव लागत बढ़ाएँगे, परंतु भूकंप-पश्च निरीक्षण और मरम्मत में सुधार का लाभ है। सामान्यतः प्रकार I शाफ्ट छोटे स्तंभों के लिए उपयुक्त हैं, जबकि प्रकार II शाफ्ट ऊँचे स्तंभों के साथ प्रयुक्त होते हैं। अंतिम परिणाम अनुभाग 7 में वर्णित संतुलित दृढता वाली संरचना होनी चाहिए।

(CALTRANS, 2013)

20 **विश्लेषण I; कोई कब्जा नहीं; सुघट्य-पूर्व** हम ढाँचे (स्थैतिकतः अनिर्धार्य) का विश्लेषण आरंभ करते हैं; सॉफ्टवेयर द्वारा 1 kip का एकक पार्श्व बल लगाया गया है, सारणी 69.6।

तालिका 69.6: विश्लेषण परिणाम; शून्य कब्जा

$V(K)$	आसंधि	P_{eq} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.805	28.84	0.000
	N2	-0.805	-1.17	-0.008
	N3	-0.805	-21.17	-0.013
	N4	0.805	28.82	0.000
	N5	0.805	-1.17	-0.008
	N6	0.805	-21.17	-0.013

21-22 **वृद्धिशील विश्लेषण I (स्प्रेडशीट)** हम एक नई सारणी (स्प्रेडशीट) बनाते हैं, जिसमें:

- P_{EQ}, M^i_{EQ} और Δ पिछले विश्लेषण परिणामों (सारणी 69.6) को स्तंभ 1 के अपरूपण बल से गुणा करके प्राप्त होते हैं (शीघ्र ही इस पर और चर्चा होगी)।
- P_{total}, P_{DL} (2,500 Kip) और P_{eq} का योग है।
- $M_{EQ,total}$ सभी पूर्ववर्ती मानों और वर्तमान मान के योग के बराबर है। उदाहरणार्थ, सारणी 69.9 में $M^i_{EQ,total} = M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ}$ और N1 के लिए

$$\begin{aligned} M^i_{EQ,total} &= M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ} \\ &= 19,322 + 282 = 19,603 \end{aligned}$$

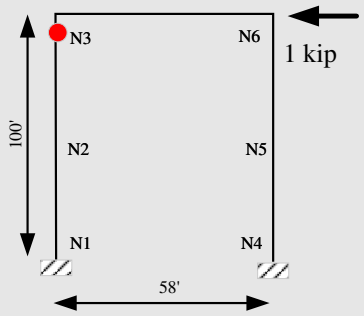
- M_P पर विशेष ध्यान आवश्यक है, क्योंकि शीर्ष पर क्षैतिज बल बढ़ने पर परिच्छेदों में अक्षीय बल बदलते हैं और फलतः आघूर्ण क्षमताएँ भी बदलती हैं। अतः Excel सारणी `trend` फलन का उपयोग करती है, जो निम्न जैसे दो अंत बिंदुओं के बीच रैखिक फलन का न्यूनतम-वर्ग सन्निकटन खोजता है:
  `=TREND('P vs Mp'!D3:D53,'P vs Mp'!A3:A53,F10)`
  वर्तमान विश्लेषण में $0 < P_{total} < 5,000$।
- हम मानते हैं कि अगला सुघट्य कब्जा तब बनेगा जब $M_{eq,Tot} \geq 0.95 M_p$।

तथापि, समस्या वास्तव में अरैखिक है, क्योंकि कब्जा निर्माण की दशा इस चरण पर अपरूपण के परिमाण पर निर्भर करती है। अतः हम एक कब्जा बनने तक V के मान को (10 kips से) बढ़ाएँगे। इस स्थिति में यह 670 kips है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 69.7: प्रथम कब्जा निर्माण की ओर ले जाने वाला अपरूपण समायोजन

V (K)	आसंधि	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	सुघट्य कब्जा?	$M_P/M_{eq,Tot}$
670	N1	-539.66	19,322	0.00	1,960	19,322	20,531	NO	1.06
	N2	-539.66	-784	-5.19	1,960	-784	7,796	NO	-9.94
	N3	-539.66	-14,186	-8.79	1,960	-14,186	14,704	YES	-1.04
	N4	539.66	19,310	0.00	3,040	19,310	22,769	NO	1.18
	N5	539.66	-785	-5.19	3,040	-785	9,085	NO	-11.58
	N6	539.66	-14,182	-8.78	3,040	-14,182	16,687	NO	-1.18



चित्र 69.21: प्रथम सुघट्य कब्जा बनने के बाद संशोधित प्रत्यास्थ प्रतिरूप

तालिका 69.8: विश्लेषण परिणाम; एक कब्जा

V (K)	आसंधि	P_{eq} (K)	M^2_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.565	28.15	0.000
	N2	-0.565	11.23	-0.009
	N3	-0.565	0.00	-0.022
	N4	0.565	43.47	0.000
	N5	0.565	0.37	-0.012
	N6	0.565	-28.37	-0.021

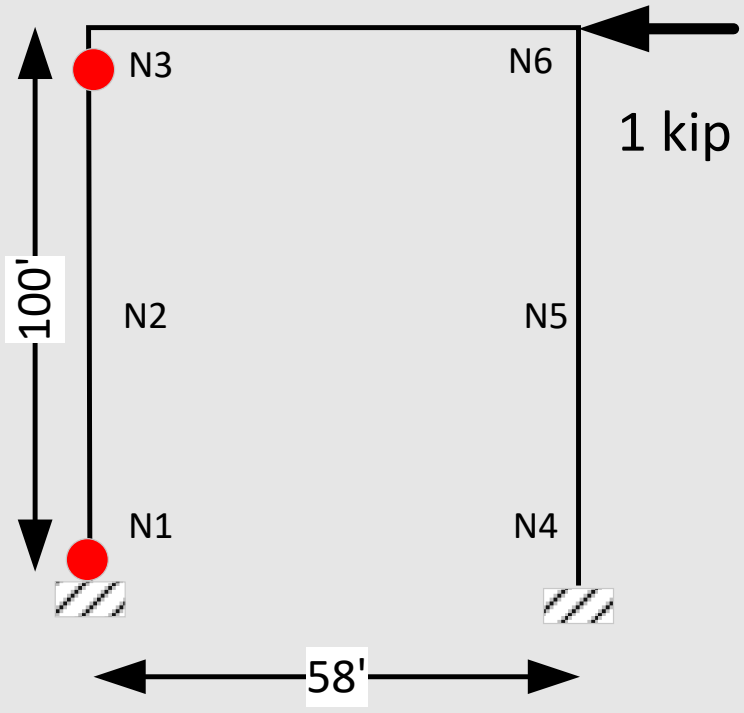
प्रतिरूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 69.9: द्वितीय कब्जा निर्माण की ओर ले जाने वाला अपरूपण समायोजन

V (K)	आसंधि	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	सुघट्य कब्जा?	$M_P/M_{eq,Tot}$
10	N1	-5.65	282	0.00	1,955	19,603	20,519	YES	1.05
	N2	-5.65	112	-0.09	1,955	-672	7,789	NO	-11.59
	N3	-5.65	0	-0.22	1,955	-14,186	14,694	YES	-1.04
	N4	5.65	435	0.00	3,045	19,744	22,781	NO	1.15
	N5	5.65	4	-0.12	3,045	-781	9,092	NO	-11.64
	N6	5.65	-284	-0.21	3,045	-14,466	16,697	NO	-1.15

23-25 एक कब्जा



चित्र 69.22: द्वितीय सुघट्य कब्जा बनने के बाद संशोधित प्रत्यास्थ प्रतिरूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 69.10: विश्लेषण परिणाम; दो कब्जे

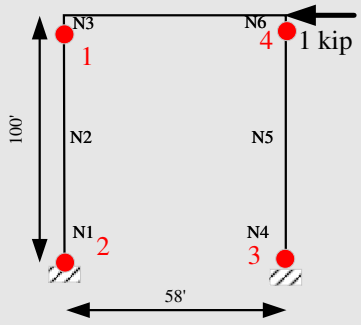
V (K)	आसंधि	P_{eq} (K)	M^3_{EQ} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	-0.755	0.00	0.000
	N2	-0.755	0.00	-0.019
	N3	-0.755	0.00	-0.031
	N4	0.755	60.61	0.000
	N5	0.755	0.63	-0.017
	N6	0.755	-39.38	-0.030

तालिका 69.11: तृतीय और चतुर्थ कब्जा निर्माण की ओर ले जाने वाला अपरूपण समायोजन

V (K)	आसंधि (K-ft)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{total} (K)	$M_{EQ,total}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	सुघट्य कब्जा?	$M_P/M_{eq,total}$
40	N1	-30.18	0	0.00	1,925	19,603	20,457	YES	1.04
	N2	-30.18	0	-0.74	1,925	-672	7,753	NO	-11.54
	N3	-30.18	0	-1.24	1,925	-14,186	14,638	YES	-1.03
	N4	30.18	2,425	0.00	3,075	22,169	22,844	YES	1.03
	N5	30.18	25	-0.67	3,075	-755	9,128	NO	-12.08
	N6	30.18	-1,575	-1.20	3,075	-16,041	16,753	YES	-1.04

26-27 दो कब्जे

27 पतन क्रियाविधि (चार कब्जों सहित) अब हमारे पास एक क्रियाविधि है, चित्र 69.23, और हमें भारों का योग करना है।



चित्र 69.23: 4 सुघट्य कब्जों के निर्माण सहित पतन क्रियाविधि

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सारणी 69.12 में:

$$
\begin{aligned}
V_{tot} &= 670 + 10 + 40 = 720 \\
P^{N6}_{eq,Tot} &= 539.6 + 5.65 + 30.18 = 575.49 \\
M^{N4}_{eq,Tot} &= 19,310 + 435 + 2,425 = 22,169 \\
\Delta^{N5}_{Tot} &= -5.19 - 0.12 - 0.67 = -5.97 \\
P^{N5}_{Tot} &= 2,500 + 575.49 = 3,075 \\
M^{N4}_{eq,Tot} &= 22,169 \quad \text{from last analysis}
\end{aligned}
$$

तालिका 69.12: विफलता पर बलों, आघूर्णों और विस्थापनों का योग

V_{Tot}	आसंधि	$P_{EQ,Tot}$	$M_{EQ,Tot}$	Δ_{Tot}	P_{Tot}	$M_{EQ,Tot}$	M_p
720	N1	-575.49	19,603	0.00	1,925	19,603	20,457
	N2	-575.49	-672	-6.02	1,925	-672	7,753
	N3	-575.49	-14,186	-10.25	1,925	-14,186	14,638
	N4	575.49	22,169	0.00	3,075	22,169	22,844
	N5	575.49	-755	-5.97	3,075	-755	9,128
	N6	575.49	-16,041	-10.19	3,075	-16,041	16,753

28 **सेतु-स्तंभ विफलता** सुघट्य कब्जों का उत्तरोत्तर निर्माण, जिसका अंतिम परिणाम स्तंभ क्रियाविधि है, ऊपर वर्णित किया गया है। (AASHTO, Seismic, 2011, §4.7) सुघट्य कब्जा निर्माण के स्थान पर विचार करता है। इस विश्लेषण में सेतु-स्तंभ के शीर्ष और तल पर सुघट्य कब्जे विकसित होना प्रत्याशित है।

अतः अभिकल्प AASHTO विनिर्देशों के अनुरूप है।

29 **विफलता पर शीर्ष स्तंभ विस्थापन** सारणी 69.12 से शीर्ष स्तंभ विस्थापन आसंधि 3 पर होता है और 10.25 inch के बराबर है (N3 के संगत)।

30 **पुशओवर विश्लेषण और हस्त-गणनाओं की तुलना** हस्त-गणनाओं से $\Delta_{tot} = 17.7$ inch प्राप्त हुआ, समीकरण 69.27 से,

पुशओवर विश्लेषण से $\Delta_{tot} = 10.19$ inch।

स्पष्टतः हस्त-गणना रूढिवादी पक्ष पर है।

31 **सेतु-स्तंभ अभिकल्प का आकलन** अपरूपण क्षमता 360 kips ($V_{tot}/2$), $V_{2,500}$=50 kip के अभिकल्प भार से बहुत अधिक है। इसी प्रकार पुशओवर विश्लेषण में परिकलित आघूर्ण क्षमताएँ ($M_{eq,total}$), भाग 3 में परिकलित अभिकल्प भारों (M_{2500}=2,000 kip-ft) से बहुत अधिक हैं।

अतः अभिकल्प पर्याप्त है।

[a]हमने कक्षा में ऐसा अभ्यास किया है, यद्यपि Mander की तुलना में किंचित सरल समीकरण (Desayi, 1964) और आयताकार परिच्छेदों के लिए। इस अनुभाग के विश्लेषण करने हेतु संहिता का सरलता से विस्तार किया जा सकता है।

[b]1st प्रमेय: *दो बिंदुओं के बीच ढाल में परिवर्तन उन दोनों बिंदुओं के बीच वक्रता (M/EI) आरेख के क्षेत्रफल के बराबर है।*

2nd प्रमेय (यहाँ लागू): *दो बिंदुओं के बीच विस्थापन, विक्षेपित आकृति के बिंदु के सापेक्ष वक्रता आरेख के अधीन क्षेत्र के आघूर्ण के बराबर है।*

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

69.4.2 वृद्धिशील गतिक विश्लेषण (IDA)

निम्नलिखित अनुभाग *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* से पुनरुत्पादित है, जिसके लेखक Mahdavi, 2023 हैं।

35 वृद्धिशील गतिक विश्लेषण (IDA) भूकंपीय भारण के अधीन संरचनात्मक अनुक्रिया के मूल्यांकन की एक विधि है। इस उपागम में प्रत्येक भू-गति अभिलेख को अनेक तीव्रता-माप (IM) स्तरों तक क्रमबद्ध ढंग से मापित किया जाता है, और प्रत्येक मापित स्तर के लिए अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP) की गणना की जाती है (Vamvatsikos and Cornell, 2002)।

36 तत्पश्चात विभिन्न तीव्रता स्तरों पर EDP मानों को जोड़कर, प्रायः सुप्लाइन समंजन का उपयोग करते हुए, IDA वक्र बनाया जाता है (Vamvatsikos and Cornell, 2004)।

37 भूकंपीय भंगुरता आकलन में इस विधि का व्यापक उपयोग होता है, क्योंकि इससे विभिन्न तीव्रता स्तरों पर पतन की प्रायिकता निर्धारित की जा सकती है। यह सुनिश्चित करती है कि संरचनात्मक पतन पर्याप्त रूप से उच्च तीव्रताओं पर हो, अतः यह प्रायिकतामूलक भूकंपीय आकलन के लिए उपयोगी है।

38 तथापि, भू-गतियों के मापन से उनकी आवृत्ति-अंतर्वस्तु विकृत हो सकती है, जिससे अवास्तविक अभिलेख-आकृतियाँ बन सकती हैं और संरचनात्मक अनुक्रिया के पूर्वानुमान प्रभावित हो सकते हैं (Haselton et al., 2011)।

39 पतन की प्रायिकता के आकलन के लिए IDA निम्नलिखित की गणना पर केंद्रित होता है:

$$P\left[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im\right]$$

40 IDA द्वारा भंगुरता के आकलन के तीन प्रमुख उपागम हैं:

पूर्ण IDA परिणामों सहित EDP क्षमता-आधारित भंगुरता IDA वक्रों को आलेखित करके IDA किया जाता है और जब माँग, EDP_d, संरचनात्मक क्षमता, EDP_c, से अधिक हो जाती है तब पतन परिभाषित किया जाता है (Zareian et al., 2010)। किसी दिए गए तीव्रता स्तर पर पतन की प्रायिकता की गणना इस प्रकार होती है:

$$P[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im]=P[\mathrm{EDP}_d\geq\mathrm{EDP}_c|\mathrm{IM}=im]=\sum_{\text{all }edp_c}P[\mathrm{EDP}_d\geq\mathrm{EDP}_c|\mathrm{EDP}_c=edp_c,\mathrm{IM}=im]P[\mathrm{EDP}_c=edp_c]$$

चित्र 69.24a विभिन्न भू-गति अभिलेखों के EDP क्षमता मानों के साथ दो विशिष्ट IM स्तरों पर EDP माँग दर्शाता है। प्रत्येक IM स्तर के लिए पतन-प्रायिकताओं की गणना करके और परिणामों को आलेखित करके एक अनुभवजन्य भंगुरता वक्र प्राप्त किया जा सकता है, जिसे तत्पश्चात लॉग-सामान्य संचयी वितरण फलन (CDF) द्वारा समंजित किया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पूर्ण IDA परिणामों सहित IM क्षमता-आधारित भंगुरता पतन तीव्रता-माप क्षमता, IM_{cap}, को प्रत्येक IDA वक्र पर अनंतस्पर्शी बिंदु के रूप में पहचाना जाता है (चित्र 69.24b)। पतन की प्रायिकता निम्नलिखित है:

$$P[\mathrm{C}|\mathrm{IM} = im] = P[\mathrm{IM}_{cap} < \mathrm{IM} = im]$$

पतन आँकड़ों पर लॉग-सामान्य CDF समंजित करके भंगुरता फलन प्राप्त किया जाता है। लॉग-सामान्य प्राचलों, η और β, के आकलन के लिए सामान्यतः दो सांख्यिकीय विधियाँ प्रयुक्त होती हैं:

आघूर्ण विधि (MM) MM उपागम लॉग-सामान्य वितरण के आघूर्णों का पतन आँकड़ों से मिलान करके η (माध्यिका) और β (लघुगणकीय मानक विचलन) का आकलन करता है:

$$\hat{\eta} = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{N_T} \ln(\mathrm{IM}_{cap_i})}{N_T}\right),$$

$$\hat{\beta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_T} \left[\ln(\mathrm{IM}_{cap_i}) - \ln(\hat{\eta})\right]^2}{N_T - 1}}$$

जहाँ N_T भू-गति अभिलेखों की कुल संख्या है।

अधिकतम संभाव्यता आकलन (MLE) MLE लॉग-संभाव्यता फलन को अधिकतम करके η और β का आकलन करता है:

$$\{\hat{\eta}, \hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmax} \sum_{i=1}^{N_T} \ln\left\{\phi\left(\frac{\ln(\mathrm{IM}_{cap_i}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right\}$$

MLE सामान्यतः, विशेषकर छोटे आँकड़ा-समुच्चयों के लिए, अधिक यथार्थ प्राचल-आकलन देता है।

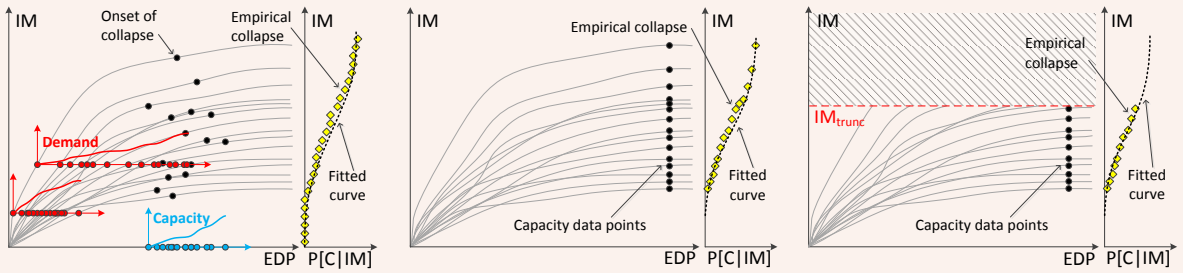
खंडित IDA परिणामों सहित IM क्षमता-आधारित भंगुरता खंडित IDA में अधिकतम IM स्तर IM_{trunc} तक सीमित रहता है, अर्थात कुछ अभिलेख पतन तक नहीं पहुँचते (चित्र 69.24c)। इससे सेंसरित आँकड़े प्राप्त होते हैं, जिनके लिए एक संशोधित संभाव्यता फलन आवश्यक है:

$$\mathcal{L}(\eta, \beta; \mathbf{IM}_{cap}, \mathrm{IM}_{trunc}) = \left(\prod_{i=1}^{N_C} \phi\left(\frac{\ln(\mathrm{IM}_{cap_i}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right) \times \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(\mathrm{IM}_{trunc}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right)^{N_T - N_C}$$

जहाँ N_C पतन उत्पन्न करने वाले अभिलेखों की संख्या है। प्राचलों η और β का आकलन सेंसरित

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आँकड़ों सहित अधिकतम संभाव्यता आकलन (MLECD) द्वारा किया जाता है (Baker, 2015), जिससे खंडित आँकड़ा-समुच्चयों का यथार्थ भंगुरता आकलन सुनिश्चित होता है।



(a) EDP क्षमता-आधारित; पूर्ण IDA (b) IM क्षमता-आधारित; पूर्ण IDA (c) IM क्षमता-आधारित; खंडित IDA

चित्र 69.24: IDA विधि पर आधारित संकल्पनात्मक पतन-भंगुरता वक्र

69.4.3 बहु-पट्टी विश्लेषण (MSA)

निम्नलिखित अनुभाग Saouma and Hariri-Ardebili, 2021 *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* से पुनरुत्पादित है।

41 वृद्धिशील गतिक विश्लेषण (IDA), जिसमें भू-गतियों के एक नियत समुच्चय को क्रमशः मापित किया जाता है, के विपरीत बहु-पट्टी विश्लेषण (MSA) अनेक विविक्त निर्दिष्ट तीव्रता स्तरों (SILs) पर विश्लेषण करता है।

42 जब तीन या अधिक SILs के लिए विश्लेषण किया जाता है, तो विधि MSA कहलाती है (Cornell and Jalayer, 2002)। यदि केवल एक अथवा दो SILs प्रयुक्त हों, तो उपागम क्रमशः एकल-पट्टी विश्लेषण (SSA) और द्वि-पट्टी विश्लेषण (DSA) कहलाता है।

43 IDA की तुलना में MSA अधिक लचीलापन प्रदान करता है। क्रमागत SILs के बीच अंतराल समान होना आवश्यक नहीं है; उदाहरणार्थ, चित्र 69.25a में SIL_2 और SIL_3 के बीच तथा SIL_6 और SIL_7 के बीच का अंतर अन्य स्थितियों से अधिक है। यह परिवर्तन विश्लेषण के लिए अपेक्षित विशिष्ट अतिक्रमण आवृत्तियों के कारण हो सकता है।

44 प्रत्येक SIL को निर्दिष्ट भू-गतियों की संख्या भी भिन्न हो सकती है, और प्रत्येक पट्टी के लिए चुनी गई गतियाँ अलग हो सकती हैं, विशेषकर जब चयन के लिए सशर्त स्पेक्ट्रम प्रयुक्त किया जाए।

45 SILs की संख्या ऐच्छिक है, किंतु इसे बढ़ाने से अतिरिक्त संगणनात्मक प्रयास की कीमत पर भंगुरता-वक्र समंजन की यथार्थता सुधरती है। चित्र 69.25a में आठ SILs के लिए विश्लेषण किए गए हैं, परंतु सभी भू-गतियों के पतन तक पहुँचने तक और भी सम्मिलित किए जा सकते हैं।

46 पट्टियों के बीच चुनी गई भू-गतियों में भिन्नता के कारण SIL_i की अनुभवजन्य पतन-प्रायिकता SIL_{i+1}

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के बराबर अथवा उससे अधिक हो सकती है। चित्र 69.25a में SIL_4 की अनुभवजन्य पतन-प्रायिकता SIL_5 से अधिक है, जबकि SIL_7 और SIL_8 में पतन आँकड़ा-बिंदुओं की संख्या समान है।

माध्यिका और लघुगणकीय मानक विचलन का आकलन

[47] भंगुरता फलन की माध्यिका और लघुगणकीय मानक विचलन का आकलन निम्नलिखित तीन विधियों में से किसी एक द्वारा किया जा सकता है।

वर्गित त्रुटियों का योग (SSE) यह विधि प्रेक्षित पतन-अंशों और भंगुरता फलन द्वारा पूर्वानुमानित प्रायिकताओं के बीच वर्गित त्रुटियों के योग को न्यूनतम करती है:

$$\{\hat{\eta},\hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmin} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{N_{C_i}}{N_{T_i}} - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right)^2$$

जहाँ N_{C_i} और N_{T_i} क्रमशः पतित स्थितियों की संख्या और $\text{IM} = im_i$ पर भू-गतियों की कुल संख्या हैं, तथा m IM स्तरों की संख्या है।

अधिकतम संभाव्यता आकलन (MLE) प्रत्येक SIL पर पतन और अपतन घटनाओं को स्वतंत्र मानते हुए द्विपद वितरण का उपयोग किया जा सकता है। प्रायिकता p वाले द्विपद वितरण का प्रायिकता-द्रव्यमान फलन है:

$$\mathcal{L}(p\,;\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{u_i}{v_i} p_i^{v_i} \left(1 - p_i\right)^{u_i - v_i}$$

जहाँ v_i, u_i परीक्षणों में पतनों की संख्या दर्शाता है। MSA के लिए संभाव्यता फलन इस प्रकार लिखा जा सकता है:

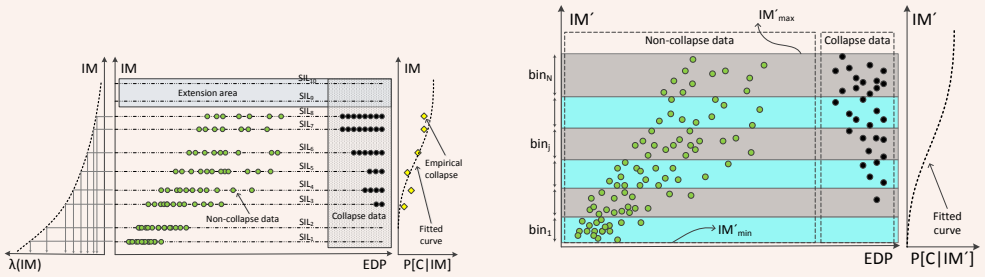
$$\mathcal{L}(\eta,\beta;\,\mathbf{IM},\mathbf{N_T},\mathbf{N_C}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{N_{T_i}}{N_{C_i}} \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right)^{N_{C_i}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right]^{N_{T_i} - N_{C_i}}$$

प्रायः संभाव्यता फलन के लघुगणक को अधिकतम करना अधिक सुविधाजनक होता है, जिससे आकलित प्राचल प्राप्त होते हैं (Baker, 2015):

$$\{\hat{\eta},\hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmax} \sum_{i=1}^{m} \left(\ln\binom{N_{T_i}}{N_{C_i}} + N_{C_i} \ln\left(\Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right) + (N_{T_i} - N_{C_i}) \ln\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right) \right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रूपांतरित समष्टि में रैखिक समाश्रयण (LRTS) Porter, Kennedy, and Bachman, 2007 में विधि B के नाम से भी ज्ञात यह विधि तब प्रयुक्त होती है जब भू-गतियों का चयन किसी वैकल्पिक तीव्रता-माप (IM′) के आधार पर किया जाए। ऐसी स्थितियों में SSE और MLE लागू नहीं होते, क्योंकि पतन आँकड़ा-बिंदु पूर्वनिर्धारित SILs तक सीमित न होकर IM′ समष्टि में फैले होते हैं (चित्र 69.25b)। प्रक्रिया में प्रत्येक आँकड़ा-बिंदु के IM'_i मानों की पहचान, उन्हें N कोशों में विभाजित करना जहाँ $N = \lfloor \sqrt{M} \rfloor$, और प्रति कोश औसत तीव्रता-माप निर्धारित करना सम्मिलित है। तत्पश्चात रूपांतरित समष्टि में समाश्रयण रेखा समंजित करके η और β प्राप्त किए जाते हैं, जो भंगुरता फलन को परिभाषित करते हैं।



(a) प्राथमिक IM पर आधारित (b) वैकल्पिक IM′ पर आधारित

चित्र 69.25: MSA विधि पर आधारित संकल्पनात्मक पतन-भंगुरता वक्र

69.4.4 मेघ विश्लेषण (CLA)

निम्नलिखित अनुभाग Saouma and Hariri-Ardebili, 2021 *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* से पुनरुत्पादित है।

[48] मेघ विश्लेषण (CLA) वह प्रक्रिया है जिसमें किसी संरचना को अमापित अथवा यथाभिलिखित भू-गतियों के अपेक्षाकृत बड़े समुच्चय के अधीन रखकर उसका संख्यात्मक विश्लेषण किया जाता है।

[49] यदि भू-गति अभिलेखों को किसी पूर्वनिर्धारित कोश से चुना जाता है, तो वे (M_{bin}, R_{bin}) द्वारा अभिलक्षित भूकंप परिदृश्य को निरूपित करते हैं, जहाँ M_{bin} और R_{bin} क्रमशः कोश के प्रतिनिधि परिमाण और दूरी के अनुरूप हैं (Jalayer, 2003)।

[50] विश्लेषण-परिणामों से अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP) और तीव्रता-माप (IM) के बीच संबंध स्थापित किया जाता है, जिससे तथाकथित **मेघ अनुक्रिया** बनती है।

[51] CLA का उपयोग प्रायः प्रायिकतामूलक भूकंपीय माँग विश्लेषण (PSDA) के साथ किया जाता है। व्यापक रूप से स्वीकृत धारणा है कि CLA से प्राप्त विविक्त आँकड़ा-बिंदु लघुगणकीय समष्टि में रैखिक प्रवृत्ति दर्शाते हैं, जो अंकगणितीय समष्टि में घात-नियम संबंध के अनुरूप है (Padgett, Nielson, and

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

DesRoches, 2008; Jankovic and Stojadinovic, 2004; Ramamoorthy, Gardoni, and Bracci, 2006):

$$\eta_{\text{EDP|IM}} = a \cdot \text{IM}^b \tag{69.35}$$

जहाँ a और b समाश्रयण नियतांक हैं, और $\eta_{\text{EDP|IM}}$ दिए गए IM के लिए EDP का माध्यिका मान है। दिए गए IM के लिए EDP का लघुगणकीय मानक विचलन, जिसे $\beta_{\text{EDP|IM}}$ से निरूपित किया गया है, इस प्रकार आकलित होता है:

$$\beta_{\text{EDP|IM}} = \sigma_{\ln(\text{EDP|IM})} \approx \sqrt{\frac{\sum \left(\ln(edp_i) - \ln(a \cdot \text{IM}^b)\right)^2}{n-2}} \tag{69.36}$$

जहाँ n अरैखिक क्षणिक विश्लेषणों की संख्या है।

69.4.5 सहन-अवधि विश्लेषण (ETA)

निम्नलिखित अनुभाग Saouma and Hariri-Ardebili, 2021 *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* से पुनरुत्पादित है।

सहन-अवधि विश्लेषण (ETA) एक गतिक पुशओवर प्रक्रिया है, जिसका उपयोग पूर्व-अभिकल्पित तीव्रतावर्धी उत्तेजनों के अधीन संरचनाओं के भूकंपीय निष्पादन का आकलन करने के लिए होता है (Estekanchi, Vafai, and Sadeghazar, 2004)। अनुरूपित त्वरण फलन संरचना को क्रमशः **निम्न उत्तेजन स्तर**, जहाँ अनुक्रिया प्रत्यास्थ रहती है, से **मध्यम उत्तेजन स्तर**, जहाँ अरैखिक व्यवहार आरंभ होता है, और अंततः **उच्च उत्तेजन स्तर**, जहाँ संरचना विफलता तक पहुँचती है, तक कंपित करने के लिए अभिकल्पित होते हैं। अनुक्रिया की यह संपूर्ण प्रगति एक **एकल** काल-वृत्तांत विश्लेषण में ग्रहण की जाती है।

सहन-अवधि त्वरण फलनों (ETAFs) का जनन

ETA की एक प्रमुख चुनौती *सहन-अवधि त्वरण फलनों (ETAFs)* का जनन है (Nozari and Estekanchi, 2011), जिन्हें आगे Mashayekhi and Estekanchi, 2013 ने इष्टतम किया। ETAFs के उत्पादन की प्रक्रिया में निम्नलिखित चरण सम्मिलित हैं:

चरण 1: स्थिर यादृच्छिक त्वरण फलन का जनन $Z(t)$ से निरूपित त्वरण फलन का जनन $\delta t = 0.01$, $N_{pnt} = 2^{11}$ आसंधियों, और चरम भू-त्वरण (PGA) = $1.0g$ का उपयोग करके किया जाता है। बिंदुओं की संख्या, N_{pnt}, ऐच्छिक है।

चरण 2: आवृत्ति प्रक्षेत्र में रूपांतरण निम्नलिखित प्राप्त करने के लिए फूरिये रूपांतरण लगाएँ:

$$Z(i\omega) = \mathcal{F}(Z(t)),$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ i काल्पनिक इकाई है और ω आवृत्ति है।

चरण 3: निस्यंदक फलन का अनुप्रयोग आवृत्ति-अंतर्वस्तु को वास्तविक भू-गतियों के सदृश आकार देने के लिए एक निस्यंदक फलन लगाया जाता है (Clough and Penzien, 1993):

$$A\left(i\omega\right) = \frac{1 + 2i\xi_1\frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + 2i\xi_1\frac{\omega}{\omega_1}} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 + 2i\xi_2\frac{\omega}{\omega_2}} Z\left(i\omega\right)$$

पहला पद निम्न-पारक निस्यंदक को निरूपित करता है, जबकि दूसरा उच्च-पारक निस्यंदक को। प्राचल ω_1, ξ_1, ω_2, और ξ_2 इन निस्यंदकों की आवृत्तियों और अवमंदन गुणांकों के अनुरूप हैं।

चरण 4: लक्ष्य स्पेक्ट्रम से मिलान हेतु आवृत्ति-अंतर्वस्तु का समायोजन आवृत्ति-अंतर्वस्तु को संशोधित करने के लिए अनेक पुनरावृत्तियाँ की जाती हैं, ताकि जनित अनुक्रिया स्पेक्ट्रम लक्ष्य स्पेक्ट्रम के अनुरूप हो:

$$A^{new}\left(i\omega\right) = A^{old}\left(i\omega\right)\frac{S_a^{\text{trg}}(\omega)}{S_a^{\text{gen}}(\omega)}$$

जहाँ $S_a^{\text{trg}}(\omega)$ लक्ष्य स्पेक्ट्रम है (भवन संहिताओं अथवा प्रायिकतामूलक भूकंपीय संकट विश्लेषण से), और $S_a^{\text{gen}}(\omega)$ जनित स्पेक्ट्रम है।

चरण 5: त्वरण काल-वृत्तांत का संशोधन समय के साथ तीव्रतावर्धन सुनिश्चित करने के लिए त्वरण काल-वृत्तांत पर रैखिक रूपरेखा फलन, $l(t) = t/t_{\text{trg}}$, लगाया जाता है। प्राचल t_{trg}, जिसे सामान्यतः 10 सेकंड रखा जाता है, ऐच्छिक है।

चरण 6: अनुक्रिया स्पेक्ट्रमों का इष्टतमीकरण काल प्रक्षेत्र में इष्टतमीकरण फलन द्वारा त्वरण और विस्थापन अनुक्रिया स्पेक्ट्रम संशोधित किए जाते हैं:

$$\underset{a_g}{minF}(a_g) = \int_0^{T_{max}}\int_0^{t_{max}}\left\{\left[S_a(T,t) - \frac{t}{t_{\text{trg}}}S_a^{\text{trg}}(T)\right]^2 + \chi_0\left[S_d(T,t) - \frac{t}{t_{\text{trg}}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 S_a^{\text{trg}}(T)\right]^2\right\}$$

जहाँ a_g वांछित ETAF है, χ_0 एक भार प्राचल है, और $t_{\max}$ तथा $T_{\max}$ इष्टतमीकरण प्रक्रिया में क्रमशः अधिकतम समय और आवर्तकाल हैं। एक प्रतिदर्श ETAF चित्र 69.26a में दर्शाया गया है।

क्षमता फलन की व्युत्पत्ति

क्षमता फलन प्राप्त करने के लिए पहले ETA वक्र निर्धारित किया जाना चाहिए (चित्र 69.26b)। ETA वक्र समय के साथ EDP का अधिकतम निरपेक्ष मान आलेखित करता है:

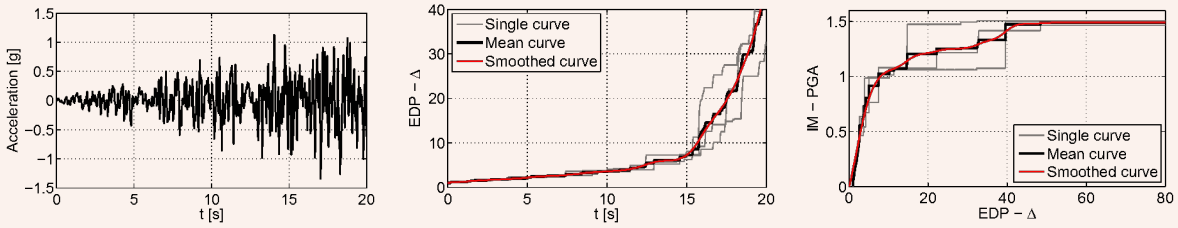
$$\Omega\left(\text{EDP}(t)\right) \equiv \max\left\{\text{Abs}\left(\text{EDP}(\tau) : \tau \in [0,t]\right)\right\}$$

तत्पश्चात समय और त्वरण के बीच प्रत्यक्ष संबंध का लाभ लेते हुए समय प्राचल को IM में रूपांतरित किया जाता है (चित्र 69.26a)। अंततः **EDP-IM** निर्देशांकों को **IM-EDP** निर्देशांकों में रूपांतरित

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

किया जाता है, जिससे सोपानिक क्षमता फलन प्राप्त होता है। इस फलन को बाद में समतल किया जा सकता है (चित्र 69.26c)।

चूँकि एक एकल ETAF अपनी यादृच्छिक प्रकृति के कारण chap:trustregion के अधीन होता है, अतः विश्वसनीयता सुधारने के लिए सामान्यतः तीन भिन्न ETAFs का माध्य प्रयुक्त किया जाता है (Hariri-Ardebili and Mirzabozorg, 2014; Hariri-Ardebili and Saouma, 2015)।



(a) प्रतिदर्श ETAF (b) ETA वक्र (c) क्षमता फलन

चित्र 69.26: ETA-आधारित क्षमता फलन का जनन

69.4.6 सारांश

52 भूकंपीय भंगुरता विश्लेषण विभिन्न कार्यविधियों द्वारा किया जा सकता है, जिनमें से प्रत्येक के अपने लाभ और सीमाएँ हैं। इस अध्याय में पाँच व्यापक रूप से प्रयुक्त उपागमों की चर्चा की गई है: परंपरागत पुशओवर विश्लेषण (POA), वृद्धिशील गतिक विश्लेषण (IDA), बहु-पट्टी विश्लेषण (MSA), मेघ विश्लेषण (CLA), और सहन-अवधि विश्लेषण (ETA)।

53 इन कार्यविधियों की तुलना तालिका 69.13 में दी गई है, जबकि चित्र 69.28 उनकी प्रमुख विशेषताओं और अनुप्रयोगों का सार प्रस्तुत करता है।

परंपरागत पुशओवर विश्लेषण (POA)

54 परंपरागत पुशओवर विश्लेषण (POA) एक *सथैतिक* विधि है, जिसका उपयोग एकदिश रूप से बढ़ते पार्श्व भारों के अधीन संरचनाओं की भूकंपीय अनुक्रिया का आकलन करने के लिए किया जाता है।

55 यह विधि मानती है कि संरचनात्मक अनुक्रिया को एकल अपरिवर्ती भारण प्रतिरूप, जो सामान्यतः मूल विधा-आकृति पर आधारित होता है, द्वारा ग्रहण किया जा सकता है। यद्यपि POA संगणनात्मक रूप से दक्ष है और निष्पादन-आधारित भूकंपीय अभिकल्प में व्यापक रूप से प्रयुक्त होता है, यह *उच्चतर-विधा प्रभावों अथवा गतिक भूकंप भारण की परिवर्तनशीलता को ग्रहण नहीं करता*।

56 POA क्षमता वक्र का आकलन प्रदान करता है, किंतु उसमें प्रायिकतामूलक आकलन की क्षमता नहीं होती।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

वृद्धिशील गतिक विश्लेषण (IDA)

57 IDA एक *गतिक* विधि है, जिसमें भू-गति अभिलेखों को अनेक तीव्रता-माप (IM) स्तरों तक क्रमशः *मापित* किया जाता है और तदनुरूप अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP) मानों की गणना की जाती है।

58 इन परिणामों द्वारा निर्मित *IDA* वक्र, विभिन्न IM स्तरों पर पतन-प्रायिकताओं की पहचान करके प्रायिकतामूलक भूकंपीय आकलन संभव बनाता है।

59 चित्र 69.24 IDA-आधारित भंगुरता आकलन के विभिन्न उपागम दर्शाता है। यद्यपि IDA व्यापक संरचनात्मक अनुक्रिया आँकड़े प्रदान करता है, इसकी सीमाएँ भी हैं, जैसे अभिलेखों को मापित करने पर भू-गति की आवृत्ति-अंतर्वस्तु में संभावित विकृति।

बहु-पट्टी विश्लेषण (MSA)

60 MSA अभिलेखों को निरंतर मापित करने के स्थान पर अनेक *विविक्त तीव्रता स्तरों (SILs)* पर भूकंपीय विश्लेषण करके IDA को उन्नत करता है।

61 यह उपागम सांख्यिकीय दृढता बढ़ाता है और अधिक यथार्थ भंगुरता आकलन संभव बनाता है। IDA के विपरीत MSA भू-गतियों के नियत समुच्चय की धारणा नहीं करता; विभिन्न IM स्तरों पर भिन्न अभिलेख प्रयुक्त किए जा सकते हैं।

62 MSA का लचीलापन चित्र 69.25 में प्रदर्शित है, जो SILs का चयन दर्शाता है। प्रत्येक SIL पर अनुभवजन्य पतन-प्रायिकताएँ प्राप्त की जाती हैं, और भंगुरता फलन के आकलन हेतु *वर्गित त्रुटियों का योग (SSE), अधिकतम संभाव्यता आकलन (MLE), और रूपांतरित समष्टि में रैखिक समाश्रयण (LRTS)* जैसी विभिन्न समाश्रयण तकनीकें लागू की जा सकती हैं।

मेघ विश्लेषण (CLA)

63 CLA, IM स्तरों को क्रमशः बढ़ाने के स्थान पर संरचना को *अमापित भू-गतियों* के बड़े *समुच्चय* के अधीन रखकर IDA और MSA से भिन्न होता है।

64 इससे *मेघ अनुक्रिया* प्राप्त होती है, जिसमें सभी अभिलेखों के लिए EDP को IM के सापेक्ष आलेखित किया जाता है। CLA का प्रमुख लाभ यह है कि यह भू-गति अभिलेखों को कृत्रिम रूप से संशोधित किए बिना उनकी *प्राकृतिक परिवर्तनशीलता* को ग्रहण करता है।

65 EDP और IM के बीच संबंध को प्रायः घात-नियम रूप का माना जाता है, जैसा कि समीकरण 69.35 में वर्णित है।

66 तत्पश्चात दिए गए *IM* के लिए *EDP* का *लघुगणकीय मानक विचलन* समीकरण 69.36 द्वारा आकलित किया जाता है, जिससे भूकंपीय भंगुरता आकलन का दक्ष किंतु सरलीकृत उपागम प्राप्त होता है।

सहन-अवधि विश्लेषण (ETA)

67 ETA एक *गतिक पुशओवर* विधि है, जिसमें संरचनाओं को वास्तविक भूकंप अभिलेखों के स्थान पर *पूर्व-अभिकल्पित तीव्रतावर्धी उत्तेजनों* के अधीन रखा जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[68] भूकंपीय तीव्रता क्रमशः बढ़ाने के लिए *सहन-अवधि त्वरण फलन (ETAFs)* जनित किए जाते हैं, जिससे एक ही काल-वृत्तांत विश्लेषण में प्रत्यास्थ, अरैखिक और विफलता अवस्थाओं में संरचनात्मक व्यवहार का आकलन किया जा सकता है। ETAFs के जनन की प्रक्रिया चित्र 69.26 में विस्तृत है, जो दर्शाता है कि लक्ष्य स्पेक्ट्रमों से मिलान और अनुक्रिया विशेषताओं के इष्टतमीकरण हेतु त्वरण काल-वृत्तांत कैसे संशोधित किए जाते हैं।

[69] अंतिम परिणाम एक *क्षमता* फलन है, जो समय के साथ संरचना की अनुक्रिया वर्णित करता है और IM-EDP प्रारूप में भंगुरता सूचना देता है।

तुलना और अनुप्रयोग

[70] यथार्थता के स्तर, संगणनात्मक लागत और संबद्ध धारणाओं के अनुसार इन पाँचों कार्यविधियों के उद्देश्य भिन्न हैं। चित्र 69.27 अरैखिक क्षणिक विश्लेषणों का तुलनात्मक अवलोकन प्रदान करता है और विभिन्न उपागमों के लिए निवेश आँकड़ों की आवश्यकताएँ तथा अपेक्षित संरचनात्मक अनुक्रियाएँ दर्शाता है।

[71] इसके अतिरिक्त, तालिका 69.13 POA, IDA, MSA, CLA, और ETA की साथ-साथ तुलना प्रस्तुत करती है।

तालिका 69.13: भूकंपीय संरचनात्मक विश्लेषण विधियों की तुलना

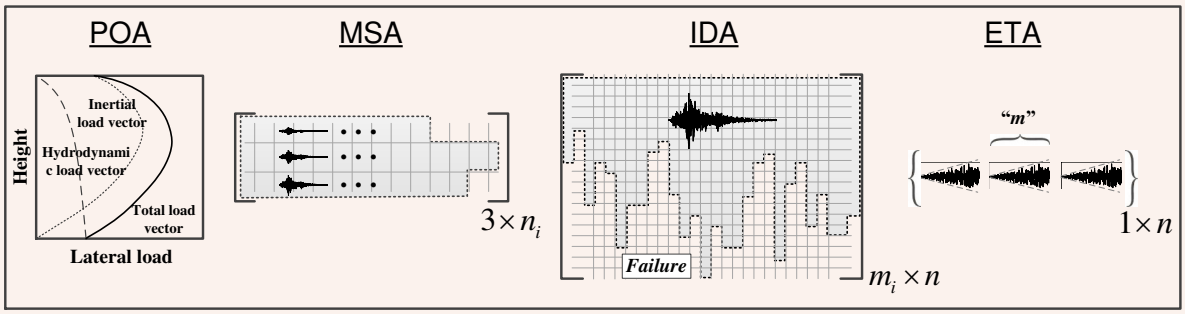
विधि	प्रकार	निवेश आँकड़े	संगणन लागत	प्रायिकता-मूलक	सीमाएँ
POA	स्थैतिक	एकल पुशओवर वक्र	निम्न	नहीं	गतिक प्रभावों की उपेक्षा, कोई परिवर्तनशीलता नहीं
IDA	गतिक	मापित भू-गतियाँ	उच्च	हाँ	मापन के कारण आवृत्ति-अंतर्वस्तु में विकृति
MSA	गतिक	अनेक IM स्तर, अमापित अभिलेख	मध्यम	हाँ	प्रति SIL अनेक भू-गतियाँ आवश्यक
CLA	गतिक	बड़ा अमापित अभिलेख समुच्चय	मध्यम	हाँ	EDP-IM संबंध में लॉग-रैखिक प्रवृत्ति की धारणा
ETA	गतिक	कृत्रिम रूप से जनित उत्तेजन	मध्यम	नहीं	संश्लिष्ट उत्तेजन वास्तविक अभिलेखों से न मिल सके

चित्र 69.28

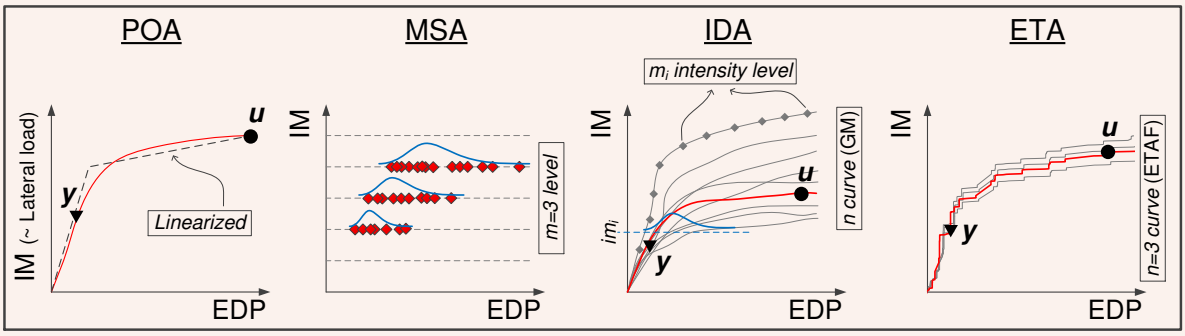
69.5 आगे क्या है

[72] अगले अध्याय (70) में इस अध्याय में चर्चित अरैखिक भूकंपीय विश्लेषण का मात्रात्मक आकलन किया जाएगा।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

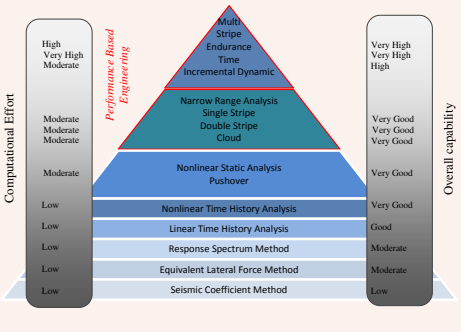


(a) अरैखिक क्षणिक (POA के अतिरिक्त) विश्लेषणों के विभिन्न संभावित निवेश प्रकार



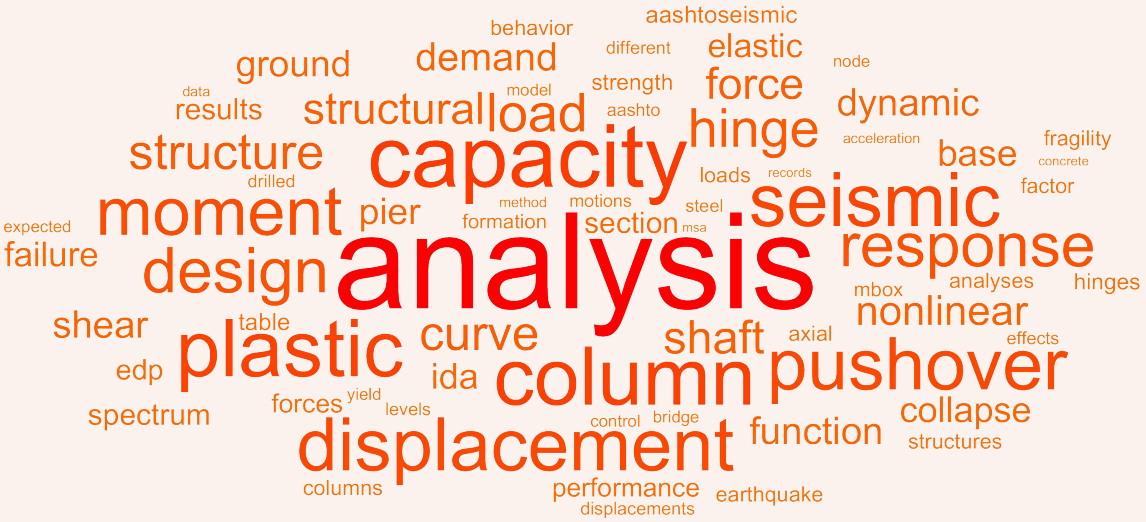
(b) आकलन हेतु विश्लेषण परिणाम

चित्र 69.27: चार भिन्न रणनीतियों की प्रमुख विशेषताएँ (Hariri-Ardebili, Saouma, and Porter, 2016)



चित्र 69.28: भूकंपीय विश्लेषण की सापेक्ष जटिलताएँ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप सामग्री

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

70 क्षति विश्लेषण

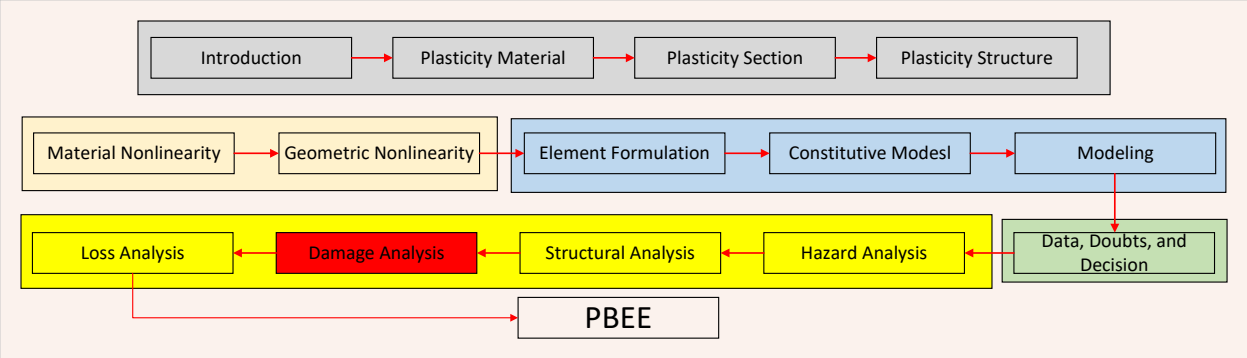
सारांश

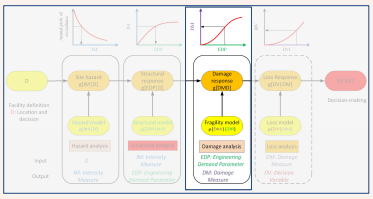
यह अध्याय भूकंप-प्रेरित संरचनात्मक क्षति के परिमाणन और मूल्यांकन हेतु एक रूपरेखा प्रस्तुत करता है, जिसमें निर्धारणात्मक तथा प्रायिकतामूलक दोनों उपागम समेकित हैं। सीमा अवस्थाओं—स्वीकार्य और अस्वीकार्य निष्पादन को पृथक करने वाली देहलियों—की अवधारणा से आरंभ करके अध्याय प्रचालन अवस्था से पतन-निवारण अवस्था तक की पदानुक्रमिक व्यवस्था का अन्वेषण करता है। रैखिक विश्लेषण (माँग-क्षमता अनुपात, संचयी अपरत्यास्थ अवधि) और अरैखिक विश्लेषण (विरूपण-आधारित तथा ऊर्जा-आधारित सूचकांक) दोनों के लिए विभिन्न क्षति सूचकांक प्रस्तुत किए गए हैं। प्रायिकतामूलक आकलन की ओर प्रगति भूकंपीय माँग और संरचनात्मक क्षमता की अनिश्चितताओं को स्वीकार करती है तथा अभियांत्रिकी माँग प्राचलों को क्षति अवस्थाओं के परिमाणात्मक प्रतिनिधियों के रूप में प्रयुक्त करती है। अंतर्मंजिला विस्थापन सीमाओं, क्षति सूचकांकों और माँग-क्षमता अनुपातों की स्थापित देहलियाँ उनके संगत निष्पादन स्तरों सहित प्रस्तुत की गई हैं। व्यापक निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी रूपरेखा में क्षति विश्लेषण को स्थापित करके अध्याय दर्शाता है कि ये तकनीकी अवधारणाएँ जटिल संरचनात्मक अनुक्रियाओं को सुविज्ञ निर्णय लेने हेतु सार्थक आकलनों में कैसे रूपांतरित करती हैं।

70.1 परिचय 2309
70.2 सीमा अवस्थाएँ 2310
70.2.1 सीमा अवस्थाओं का पदानुक्रम . 2311
70.2.2 प्रायिकतामूलक रूपरेखा 2311
70.2.3 PBEE रूपरेखा में कार्यान्वयन . 2312
70.2.4 अंशांकन और सत्यापन 2312
70.2.5 बहु-उद्देश्यीय विचार 2312
70.2.6 क्षति सूचकांकों से संबंध 2313
70.3 क्षति सूचकांक 2313
70.3.1 क्षति सूचकांक और निष्पादन मानदंड 2313
70.3.2 प्रायिकतामूलक क्षति आकलन की ओर संक्रमण 2315
70.3.3 क्षति का प्रायिकतामूलक निरूपण 2315
70.3.4 क्षति मापक और अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP) 2316
70.3.5 क्षति आकलन में chap:trustregion 2316
70.3.6 परिमाणात्मक क्षति मापक . . . 2317
70.4 निष्पादन 2318
70.4.1 निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी रूपरेखा 2319
70.4.2 निष्पादन स्तर और स्वीकार्यता मानदंड 2320
70.4.3 सीमा अवस्थाओं, क्षति सूचकांकों और निष्पादन स्तरों का समेकन 2322
70.5 भंगुरता वक्रों और जोखिम आकलन की ओर संक्रमण 2323

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।





70.1 परिचय

1 संरचनात्मक क्षति आकलन भूकंपीय अभिकल्प और पुनःसंयोजन में अभियांत्रिकी विश्लेषण तथा निर्णय लेने के बीच का महत्त्वपूर्ण अंतरापृष्ठ है। यद्यपि उन्नत अरैखिक विश्लेषण तकनीकें संरचनात्मक व्यवहार की अंतर्दृष्टि देती हैं, सार्थक अभियांत्रिकी निर्णयों के मार्गदर्शन हेतु उनकी व्याख्या क्षति मापकों और निष्पादन मानदंडों द्वारा की जानी चाहिए। यह अध्याय निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) के संदर्भ में क्षति विश्लेषण की व्यवस्थित रूपरेखा प्रस्तुत करता है, जिसमें संरचनात्मक तंत्रों पर भूकंपीय भारण के प्रभावों का परिमाणन करने हेतु निर्धारणात्मक और प्रायिकतामूलक उपागम समेकित हैं।

2 क्षति विश्लेषण का आधार सीमा अवस्थाओं की अवधारणा में निहित है—स्पष्टतः परिभाषित वे देहलियाँ जो स्वीकार्य निष्पादन को अस्वीकार्य निष्पादन से पृथक करती हैं। ये अवस्थाएँ पूर्ण प्रचालन क्षमता से पतन निवारण तक निष्पादन उद्देश्यों का पदानुक्रम स्थापित करती हैं। इन सीमाओं को परिभाषित करके हितधारकों की अपेक्षाओं और विनियामक आवश्यकताओं के सापेक्ष संरचनात्मक अनुक्रिया के मूल्यांकन की सुव्यवस्थित रूपरेखा बनती है। सीमा अवस्थाओं का प्रायिकतामूलक निरूपण भूकंपीय घटनाओं और संरचनात्मक व्यवहार में अंतर्निहित अनिश्चितताओं को स्वीकार करता है, जिससे द्विआधारी उत्तीर्ण/अनुत्तीर्ण मूल्यांकन के स्थान पर जोखिम-सूचित आकलन संभव होता है।

3 क्षति सूचकांक वे परिमाणात्मक साधन हैं जो मापते हैं कि कोई संरचना अपनी परिभाषित सीमा अवस्थाओं को पार करने के कितने निकट है। रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषणों के लिए माँग-क्षमता अनुपात (DCR), संचयी अप्रत्यास्थ अवधि (CID), और संचयी अप्रत्यास्थ क्षेत्रफल (CIA) जैसे सूचकांक संभावित क्षति के परिमाण, अवधि और विस्तार की अंतर्दृष्टि प्रदान करते हैं। अरैखिक संदर्भों में अधिक परिष्कृत सूचकांक विरूपण-आधारित तथा ऊर्जा-आधारित सूत्रणों द्वारा पराभव, विदरण और ऊर्जा अपव्यय के संचयी प्रभाव ग्रहण करते हैं। ये मापक जटिल विश्लेषणात्मक परिणामों को संरचनात्मक अखंडता और अवशिष्ट क्षमता के सार्थक मापों में रूपांतरित करते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4 प्रायिकतामूलक आकलन विधियों के साथ निर्धारणात्मक क्षति सूचकांकों का समेकन भूकंपीय अभियांत्रिकी में महत्त्वपूर्ण प्रगति है। भंगुरता वक्र—जो विशिष्ट क्षति अवस्थाओं के अतिक्रमण की प्रायिकता को भू-गति तीव्रता के फलन के रूप में व्यक्त करते हैं—संभावित भूकंप परिदृश्यों के संपूर्ण विस्तार में संभावित निष्पादन का व्यापक चित्र प्रदान करते हैं। यह प्रायिकतामूलक रूपरेखा भू-गति विशेषताओं, पदार्थ गुणों और प्रतिरूपण धारणाओं की अनिश्चितताओं को समाहित करती है, जिससे अधिक दृढ जोखिम आकलन और न्यूनीकरण रणनीतियाँ संभव होती हैं।

5 इन अवधारणाओं के व्यावहारिक कार्यान्वयन के लिए विश्लेषणात्मक मापकों और निष्पादन उद्देश्यों के बीच परिमाणात्मक संबंध आवश्यक हैं। अंतर्मंजिला विस्थापन अनुपात और चरम तल त्वरण जैसे अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDPs) क्षति अवस्थाओं के मापनीय प्रतिनिधि बनते हैं। ASCE 41-17 और FEMA 356 जैसे प्रामाणिक स्रोतों की स्थापित देहलियाँ इन EDPs को अपेक्षित निष्पादन स्तरों से सहसंबद्ध करने वाले मानक मान प्रदान करती हैं। ये संबंध अभियंताओं को विश्लेषणात्मक परिणामों को संहिता आवश्यकताओं और हितधारक अपेक्षाओं के अनुरूप संरचनात्मक निष्पादन आकलनों में रूपांतरित करने देते हैं।

6 इस संपूर्ण अध्याय में व्यापक PBEE रूपरेखा के भीतर क्षति विश्लेषण की केंद्रीय भूमिका पर बल दिया गया है। भूकंपीय संकट अभिलक्षण को संरचनात्मक अनुक्रिया और निष्पादन मूल्यांकन से जोड़कर क्षति विश्लेषण जोखिम-सूचित निर्णय लेने की तकनीकी नींव प्रदान करता है। यहाँ प्रस्तुत कार्यविधियाँ भूकंपीय जोखिम के परिमाणन, निर्वचन और संप्रेषण का व्यवस्थित उपागम स्थापित करती हैं, जिससे अंततः अधिक आघात-सह और आर्थिक रूप से व्यवहार्य संरचनात्मक अभिकल्प संभव होते हैं।

7 अध्याय सीमा अवस्थाओं, क्षति सूचकांकों और निष्पादन स्तरों के विस्तृत परीक्षण के साथ आगे बढ़ता है और अंत में तकनीकी विश्लेषण तथा व्यावहारिक अनुप्रयोग के बीच अंतर को पाटने वाला समेकित उपागम प्रस्तुत करता है। क्षति विश्लेषण का यह व्यापक विवेचन आगामी अध्यायों में चर्चित भंगुरता विश्लेषण और हानि आकलन कार्यविधियों की भूमिका तैयार करता है।

70.2 सीमा अवस्थाएँ

8 सीमा अवस्थाएँ वे महत्त्वपूर्ण देहलियाँ हैं जो स्वीकार्य और अस्वीकार्य संरचनात्मक निष्पादन के बीच सीमाएँ परिभाषित करती हैं। निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) की रूपरेखा में सीमा अवस्थाएँ पूर्वपरिभाषित निष्पादन उद्देश्यों के सापेक्ष संरचनात्मक अनुक्रियाओं के मूल्यांकन हेतु आवश्यक मानदंड हैं।

9 PBEE में सीमा अवस्थाएँ विशिष्ट क्षति स्थितियों अथवा निष्पादन स्तरों के अनुरूप परिमाणात्मक सीमाएँ प्रदान करती हैं। ये अवस्थाएँ वे मानदंड स्थापित करती हैं जिनके सापेक्ष अभियांत्रिकी माँग प्राचलों (EDPs) का मूल्यांकन करके निर्धारित किया जाता है कि संरचना अपने निष्पादन उद्देश्यों को पूरा करती है अथवा नहीं।

10 सीमा अवस्थाओं की अवधारणा क्षति के गुणात्मक वर्णनों को परिमाणात्मक निर्णय मापकों में रूपांतरित करती है, जो सुसंगत और विश्वसनीय निष्पादन आकलन संभव बनाते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

70.2.1 सीमा अवस्थाओं का पदानुक्रम

[11] PBEE में सामान्यतः संरचनात्मक और असंरचनात्मक क्षति के क्रमशः अधिक गंभीर स्तरों के अनुरूप सीमा अवस्थाओं का पदानुक्रम सम्मिलित होता है:

1. **प्रचालन सीमा अवस्था (OLS)**: संरचना नगण्य क्षति सहित पूर्णतः कार्यशील रहती है। आवश्यक सेवाएँ बिना व्यवधान जारी रहती हैं और मरम्मत की आवश्यकता नहीं होती। यह तात्कालिक अधिभोग निष्पादन के अनुरूप है।
2. **तात्कालिक अधिभोग सीमा अवस्था (IOLS)**: अल्प संरचनात्मक क्षति होती है, किंतु निरीक्षण के पश्चात भवन तात्कालिक अधिभोग हेतु सुरक्षित रहता है। असंरचनात्मक घटकों में सीमित क्षति हो सकती है, परंतु उनकी कार्यशीलता बनी रहती है।
3. **जीवन-सुरक्षा सीमा अवस्था (LSLS)**: उल्लेखनीय संरचनात्मक क्षति होती है, किंतु भवन पतन रोकने हेतु पर्याप्त अवशिष्ट सामर्थ्य और दृढता बनाए रखता है। निकासी आवश्यक होती है और पुनः अधिभोग से पूर्व मरम्मत की आवश्यकता होने की संभावना रहती है।
4. **पतन-निवारण सीमा अवस्था (CPLS)**: गंभीर संरचनात्मक क्षति आंशिक अथवा पूर्ण पतन की देहली के निकट पहुँचती है। संरचना संभवतः मरम्मत योग्य न हो, किंतु पतन टालकर उसने जनहानि रोकी होती है।

70.2.2 प्रायिकतामूलक रूपरेखा

[12] आधुनिक PBEE कार्यविधि में सीमा अवस्थाओं का निरूपण निर्धारणात्मक के स्थान पर प्रायिकतामूलक रूप में किया जाता है। यह उपागम भूकंपीय माँग, संरचनात्मक क्षमता और क्षति आकलन में अंतर्निहित अनिश्चितताओं को स्वीकार करता है। प्रत्येक सीमा अवस्था के लिए एक भंगुरता फलन विकसित किया जाता है, जो सीमा अवस्था के अतिक्रमण की प्रायिकता को तीव्रता-माप (IM) अथवा अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP) के फलन के रूप में व्यक्त करता है।

[13] सीमा अवस्था के अतिक्रमण की प्रायिकता सामान्यतः इस प्रकार व्यक्त की जाती है:

$$P(LS|EDP) = \Phi\left(\frac{\ln(EDP) - \ln(EDP_{median})}{\beta_{LS}}\right)$$

जहाँ:

- Φ मानक सामान्य संचयी वितरण फलन है
- EDP_{median} सीमा अवस्था से संबद्ध माध्यिका क्षमता है
- β_{LS} chap:trustregion निरूपित करने वाला लघुगणकीय मानक विचलन है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

70.2.3 PBEE रूपरेखा में कार्यान्वयन

14 Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEER) द्वारा विकसित PBEE रूपरेखा में सीमा अवस्थाएँ क्षति विश्लेषण द्वारा संरचनात्मक अनुक्रिया विश्लेषण को निर्णय चरों से जोड़ती हैं। इससे एक पूर्ण प्रायिकतामूलक आकलन मार्ग बनता है:

1. **संकट विश्लेषण**: भूकंपीय संकट का तीव्रता-मापों (IMs) के पदों में अभिलक्षण करता है
2. **संरचनात्मक विश्लेषण**: IMs को अभियांत्रिकी माँग प्राचलों (EDPs) से संबंधित करता है
3. **क्षति विश्लेषण**: सीमा अवस्थाओं द्वारा EDPs को क्षति मापों (DMs) से प्रतिचित्रित करता है
4. **हानि विश्लेषण**: DMs को निर्णय चरों (DVs) में रूपांतरित करता है

15 सीमा अवस्थाएँ क्षति विश्लेषण चरण के केंद्र में हैं, जहाँ वे परिकलित EDPs के आधार पर विभिन्न क्षति अवस्थाओं के घटित होने की देहलियाँ परिभाषित करती हैं।

70.2.4 अंशांकन और सत्यापन

16 उपयुक्त सीमा अवस्थाएँ स्थापित करने के लिए प्रायोगिक परीक्षण, पूर्व भूकंपों के क्षेत्रीय प्रेक्षण और विशेषज्ञ निर्णय द्वारा अंशांकन आवश्यक है। सीमा अवस्थाओं को वास्तविक निष्पादन के सापेक्ष सत्यापित किया जाना चाहिए, ताकि वे अपेक्षित निष्पादन स्तरों का यथार्थ निरूपण करें। इस अंशांकन प्रक्रिया में प्रायः निम्नलिखित सम्मिलित होते हैं:

- संरचनात्मक घटकों और तंत्रों का प्रयोगशाला परीक्षण
- भूकंपोत्तर क्षति सर्वेक्षणों का विश्लेषण
- सत्यापित प्रतिरूपों द्वारा संख्यात्मक अनुरूपण
- विशेषज्ञ मत-संग्रह और सर्वसम्मति विकास

70.2.5 बहु-उद्देश्यीय विचार

17 आधुनिक PBEE अनुप्रयोगों में प्रायः विभिन्न निष्पादन चिंताओं को संबोधित करने वाली अनेक सीमा अवस्थाएँ होती हैं:

- संरचनात्मक घटक क्षति
- असंरचनात्मक घटक क्षति
- अंतर्वस्तु क्षति
- कार्यशीलता व्यवधान
- मरम्मत लागत और समय
- पर्यावरणीय प्रभाव

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

18 यह बहु-उद्देश्यीय उपागम हितधारकों को विभिन्न आयामों में संभावित भूकंपीय निष्पादन की व्यापक समझ के आधार पर सुविज्ञ निर्णय लेने देता है।

19 PBEE में सीमा अवस्थाओं की समुचित परिभाषा और अनुप्रयोग ऐसी संरचनाओं के अभिकल्प की दृढ रूपरेखा देते हैं जो भूकंपीय संकट के विभिन्न स्तरों के अधीन विशिष्ट निष्पादन उद्देश्य पूरे करें, जिससे अंततः अधिक आघात-सह भवन और अवसंरचना प्राप्त होते हैं।

70.2.6 क्षति सूचकांकों से संबंध

20 सीमा अवस्थाएँ संरचनात्मक निष्पादन की महत्त्वपूर्ण देहलियाँ परिभाषित करती हैं, किंतु इन देहलियों के अतिक्रमण का निर्धारण करने हेतु परिमाणात्मक मापक आवश्यक हैं। यहीं क्षति सूचकांक आवश्यक होते हैं—वे इन स्थापित सीमा अवस्थाओं के सापेक्ष क्षति का विस्तार मापने और परिमाणित करने के गणितीय साधन प्रदान करते हैं।

21 क्षति सूचकांक व्यावहारिक मापन साधनों के रूप में अभियंताओं को यह आकलन करने देते हैं कि कोई संरचना किसी विशिष्ट सीमा अवस्था तक पहुँची है अथवा उसे पार कर चुकी है। अगले अनुभाग में देखे जाने वाले ये सूचकांक सरल माँग-क्षमता अनुपातों से लेकर समय के साथ संचयी क्षति को समाहित करने वाले जटिल प्रायिकतामूलक फलनों तक विस्तृत हैं। सीमा अवस्थाओं के साथ क्षति सूचकांकों का समेकन निष्पादन आकलन की एक व्यापक रूपरेखा बनाता है, जो सैद्धांतिक देहलियों को मापनीय संरचनात्मक अनुक्रियाओं से जोड़ता है।

70.3 क्षति सूचकांक

इस अनुभाग के कुछ अंश (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) से हैं

70.3.1 क्षति सूचकांक और निष्पादन मानदंड

22 *निष्पादन सूचकांक* वह संख्यात्मक माप है जिसका उपयोग भूकंपीय उत्तेजन के अधीन किसी संरचना की क्षति, स्थिरता अथवा समग्र अनुक्रिया के परिमाणन हेतु होता है। ये सूचकांक सुरक्षा और सेवायोग्यता के वस्तुनिष्ठ मानदंड स्थापित करते हैं, अभिकल्प विकल्पों अथवा पुनःसंयोजन रणनीतियों के बीच तुलना सुगम बनाते हैं और जोखिम-सूचित निर्णय लेना संभव करते हैं। पूर्व अनुभाग ने सीमा अवस्थाओं को देहली सीमाओं के रूप में स्थापित किया था, जबकि क्षति सूचकांक इन सीमाओं के पार होने का निर्धारण करने हेतु आवश्यक परिमाणात्मक मापक प्रदान करते हैं।

23 रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण के लिए सामान्य सूचकांक स्पष्ट क्षति प्रतिरूपण के बिना प्रत्यास्थ पदार्थ व्यवहार मानते हुए प्रतिबल-आधारित और विकृति-आधारित मानदंडों पर केंद्रित होते हैं। *माँग-क्षमता अनुपात* (DCR) प्रेरित प्रतिबल अथवा विकृति और अनुमत सीमाओं का अनुपात मापता है, जहाँ इकाई से अधिक मान स्वीकार्य देहलियों का अतिक्रमण दर्शाते हैं। मानक प्रतिबल-आधारित मानदंड के अतिरिक्त,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रतिबल और विकृति प्रदिशों की त्रिअक्षीयता के कारण निम्नलिखित वैकल्पिक विकृति-आधारित मानदंड प्रस्तावित है:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

प्रतिबल और विकृति के पदों में संगत माँग-क्षमता अनुपात हैं:

$$\begin{cases} \text{Stress-based} & \text{DCR}^{\sigma} = \dfrac{\sigma}{f_t'} \\ \text{Strain-based} & \text{DCR}^{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \end{cases}$$

DCR चरम अतिक्रमण मापता है, किंतु अवधि अथवा विस्तार ग्रहण नहीं करता; अतः अतिरिक्त सूचकांकों की आवश्यकता होती है।

24 *संचयी अप्रत्यास्थ अवधि* (CID) किसी परिभाषित देहली से ऊपर प्रतिबल अथवा विकृति विचलनों की कुल अवधि परिमाणित करती है और भूकंपीय उत्तेजन के समय अतिप्रतिबलन का विस्तार दर्शाती है। चूँकि रैखिक प्रत्यास्थ विश्लेषण प्रतिबल पुनर्वितरण को समाहित नहीं करता, इसलिए एकल अतिक्रमण अनिवार्यतः विफलता उत्पन्न नहीं करता। इसके स्थान पर CID दो स्तरों ($1.0 \le \text{DCR} \le 2.0$) पर अतिक्रमण की संचयी अवधि का अनुरेखण करती है और चक्रीय भारण के अधीन संरचनात्मक सहनशीलता का प्रभावी माप देती है।

25 *संचयी अप्रत्यास्थ क्षेत्रफल* (CIA) अतिक्रमण की अवधि और परिमाण दोनों समाहित करके CID को परिष्कृत करता है। समय के साथ प्रतिबल अथवा विकृति अतिक्रमण के समाकल के रूप में परिभाषित CIA केवल अतिप्रतिबलन घटनाओं के घटित होने के स्थान पर उनकी गंभीरता को समाहित करता है। प्रतिबल-आधारित आकलनों में CIA की इकाई प्रति इकाई क्षेत्रफल बल गुणा समय होती है।

26 एक अन्य महत्त्वपूर्ण मापक क्षति *स्थानिक वितरण अनुपात* (DSDR) है, जो संपूर्ण संरचना के सापेक्ष अतिप्रतिबलित अथवा अतिविकृत क्षेत्र को मापकर क्षति प्रसार के विस्तार का आकलन करता है। समय के साथ स्थानीय अतिक्रमणों को परिमाणित करने वाले CID और CIA के विपरीत DSDR संभावित विफलता क्षेत्रों का स्थानिक माप प्रदान करता है।

27 अरैखिक भूकंपीय विश्लेषण के लिए सूचकांक पदार्थ क्षति, विदर प्रसार और ऊर्जा अपव्यय पर आधारित होते हैं। विरूपण-आधारित *क्षति सूचकांक* (DI^{def}) पराभव और चरम विस्थापन द्वारा सामान्यीकृत महत्त्वपूर्ण बिंदुओं पर अधिकतम निरपेक्ष विस्थापन के आधार पर स्थिरता का मूल्यांकन करता है:

$$\text{DI}^{\text{def}} = \frac{|\Delta_{max}| - \Delta_y}{\Delta_u - \Delta_y}, \quad \Delta_y \le |\Delta_{max}| \le \Delta_u$$

जहाँ Δ_y और Δ_u क्रमशः पराभव और चरम विस्थापन निरूपित करते हैं।

28 *ऊर्जा-आधारित* क्षति सूचकांक ($\text{DI}^{\text{energy}}$) विदरण और सुघट्यता के कारण संचयी ऊर्जा अपव्यय का अनुरेखण करता है:

$$\text{DI}^{\text{energy}} = \frac{\sum_{i=1}^{s} (E_H)_i}{(E_H)_u}$$

जहाँ $(E_H)_i$ व्यक्तिगत विदरों द्वारा अपव्ययित ऊर्जा है और $(E_H)_u$ पतन पर कुल ऊर्जा-अपव्यय क्षमता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

70.3.2 प्रायिकतामूलक क्षति आकलन की ओर संक्रमण

29 माँग-क्षमता अनुपात (DCR), संचयी अप्रत्यास्थ अवधि (CID), और संचयी अप्रत्यास्थ क्षेत्रफल (CIA) जैसे निर्धारणात्मक क्षति सूचकांक संरचनात्मक निष्पादन की आवश्यक अंतर्दृष्टि देते हैं, किंतु वे भूकंपीय भारण और संरचनात्मक अनुक्रिया में अंतर्निहित अनिश्चितताओं को पूर्णतः ग्रहण नहीं करते।

30 ये सूचकांक क्षति के आकलन हेतु विविक्त देहलियाँ प्रदान करते हैं, किंतु बदलती भूकंपीय तीव्रताओं के अधीन किसी क्षति अवस्था के अतिक्रमण की प्रायिकता परिमाणित नहीं कर सकते।

31 वास्तव में भू-गति विशेषताओं, पदार्थ गुणों और संरचनात्मक काल-प्रभाव में परिवर्तनशीलता जैसे कारकों के कारण भूकंपीय संकट और संरचनात्मक अनुक्रिया अत्यधिक अनिश्चित होते हैं। अधिक व्यापक उपागम के लिए निर्धारणात्मक सूचकांकों से *प्रायिकतामूलक क्षति आकलन* की ओर संक्रमण आवश्यक है, जो जोखिम-सूचित निर्णय संभव बनाता है और पूर्व अनुभाग में चर्चित सीमा अवस्थाओं की प्रायिकतामूलक रूपरेखा का पूरक है।

32 प्रायिकतामूलक आकलन की मूल अवधारणा *भंगुरता वक्र* है, जो किसी विशिष्ट क्षति अवस्था के अतिक्रमण की प्रायिकता को चरम भू-त्वरण (PGA) अथवा वर्णक्रमीय त्वरण (SA) जैसे तीव्रता-माप (IM) के फलन के रूप में व्यक्त करता है। द्विआधारी उत्तीर्ण/अनुत्तीर्ण परिणाम देने वाले निर्धारणात्मक आकलनों के विपरीत भंगुरता वक्र भूकंपीय तीव्रताओं के विस्तार में क्षति के विभिन्न स्तर घटित होने की *संभाव्यता* वर्णित करते हैं।

33 भंगुरता वक्र बनाने के लिए DCR, CID, और CIA जैसे निर्धारणात्मक सूचकांक विभिन्न क्षति देहलियाँ परिभाषित करने वाले *अभियांत्रिकी माँग प्राचलों (EDPs)* के रूप में प्रयुक्त होते हैं। भूकंप परिदृश्यों के एक विस्तार में अनेक संरचनात्मक अनुरूपण करके प्रत्येक क्षति देहली के अतिक्रमण की प्रायिकता का आकलन करने वाले सांख्यिकीय प्रतिरूप विकसित किए जा सकते हैं। ये देहलियाँ निष्पादन मूल्यांकन के लिए स्थापित सीमा अवस्थाओं के प्रत्यक्ष अनुरूप हैं।

34 निर्धारणात्मक से प्रायिकतामूलक आकलन की ओर यह संक्रमण निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE) में आवश्यक है। केवल पूर्वपरिभाषित सीमाएँ पूरी करने हेतु संरचनाओं का अभिकल्प करने के स्थान पर अभियंता जोखिमों के पूर्ण वर्णक्रम का आकलन करने हेतु प्रायिकतामूलक प्रतिरूपों का उपयोग कर सकते हैं, जिससे अधिक आघात-सह और लागत-प्रभावी भूकंपीय न्यूनीकरण रणनीतियाँ संभव होती हैं।

35 अगला अध्याय अन्वेषण करेगा कि इन अवधारणाओं को *हानि विश्लेषण* में कैसे समेकित किया जाता है, जहाँ आर्थिक और कार्यात्मक परिणामों के आकलन हेतु प्रायिकतामूलक क्षति मापकों को और परिष्कृत किया जाता है। भंगुरता वक्रों की व्युत्पत्ति और अनुप्रयोगों सहित अधिक विस्तृत चर्चा अध्याय 72 में प्रस्तुत है।

70.3.3 क्षति का प्रायिकतामूलक निरूपण

36 क्षति को द्विआधारी घटना (सुरक्षित बनाम विफल) मानने के स्थान पर PBEE क्षति अवस्थाओं को सतत प्रायिकता वितरणों के रूप में प्रतिरूपित करता है। यह भूकंपीय निवेश और संरचनात्मक अनुक्रिया में अंतर्निहित अनिश्चितताओं को समाहित करता है—जो पूर्व में चर्चित सीमा अवस्थाओं के प्रायिकतामूलक निरूपण का प्रत्यक्ष विस्तार है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[37] किसी दिए गए भू-गति तीव्रता-माप IM (जैसे चरम भू-त्वरण, वर्णक्रमीय त्वरण) के लिए दी गई क्षति अवस्था D_i के अतिक्रमण की प्रायिकता सामान्यतः इस प्रकार व्यक्त की जाती है:

$$P(D > D_i | IM) = \Phi\left(\frac{\ln IM - \ln IM_i}{\beta}\right)$$

जहाँ:

- $\Phi(\cdot)$ मानक सामान्य संचयी वितरण फलन है।
- IM_i वह माध्यिका तीव्रता-माप है जिस पर क्षति अवस्था D_i पार होती है।
- β क्षति देहली में chap:trustregion निरूपित करने वाला लघुगणकीय मानक विचलन है।

[38] यह सूत्रण *भंगुरता वक्रों* की ओर ले जाता है, जो किसी दी गई क्षति अवस्था तक पहुँचने अथवा उसका अतिक्रमण करने की प्रायिकता को भूकंपीय तीव्रता के फलन के रूप में वर्णित करते हैं। प्रत्येक वक्र सामान्यतः निष्पादन आकलन रूपरेखा में पहचानी गई किसी विशिष्ट सीमा अवस्था के अनुरूप होता है।

70.3.4 क्षति मापक और अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP)

[39] क्षति का प्रायिकतामूलक परिमाणन करने हेतु अभियांत्रिकी माँग प्राचलों (EDPs) को संरचनात्मक अनुक्रिया के मापनीय प्रतिनिधियों के रूप में प्रयुक्त किया जाता है। सामान्य EDPs में सम्मिलित हैं:

- **अंतर्मंजिला विस्थापन अनुपात (IDR):** भवनों में विरूपण-आधारित क्षति के आकलन हेतु प्रयुक्त।
- **चरम तल त्वरण (PFA):** असंरचनात्मक घटक क्षति के मूल्यांकन हेतु महत्त्वपूर्ण।
- **चरम अपरूपण बल (PSF):** अपरूपण-प्रधान संरचनाओं के लिए महत्त्वपूर्ण।
- **संचयी विस्थापन माँग:** चक्रीय ह्रास ग्रहण करने हेतु सेतुओं और ऊँची संरचनाओं में प्रयुक्त।

[40] ये EDPs भूकंपीय माँग और संरचनात्मक निष्पादन के बीच कडी का कार्य करते हैं। अरैखिक गतिक विश्लेषण से EDP वितरण प्राप्त होने पर उसे अनुभवजन्य अथवा विश्लेषणात्मक प्रतिरूपों द्वारा संगत क्षति अवस्थाओं से प्रतिचित्रित किया जा सकता है। यही प्रतिचित्रण प्रक्रिया मापित अथवा परिकलित संरचनात्मक अनुक्रियाओं को निष्पादन रूपरेखा में परिभाषित सीमा अवस्थाओं से जोडती है।

70.3.5 क्षति आकलन में chap:trustregion

[41] क्षति प्रतिरूपण का प्रायिकतामूलक उपागम chap:trustregion के विभिन्न स्रोतों को समाहित करता है:

1. **भूकंपीय संकट chap:trustregion:** भू-गति परिवर्तनशीलता संरचनात्मक अनुक्रिया में अंतर उत्पन्न करती है।
2. **पदार्थ और निर्माण परिवर्तनशीलता:** कंक्रीट सामर्थ्य, इस्पात गुणों और कार्य-कौशल में अंतर क्षमता को प्रभावित करते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. **प्रतिरूपण chap:trustregion:** विभिन्न विश्लेषण तकनीकें और धारणाएँ पूर्वानुमानित अनुक्रिया में परिवर्तन उत्पन्न करती हैं।

[42] इन अनिश्चितताओं को *मॉन्टे कार्लो अनुरूपण*, बायेज़ीय अद्यतन और क्षति प्रतिरूपों के सांख्यिकीय अंशांकन द्वारा PBEE में समेकित किया जाता है। इन अनिश्चितताओं को स्पष्टतः समाहित करके रूपरेखा इस बात का अधिक यथार्थ आकलन देती है कि विभिन्न सीमा अवस्थाएँ कब पार हो सकती हैं।

70.3.6 परिमाणात्मक क्षति मापक

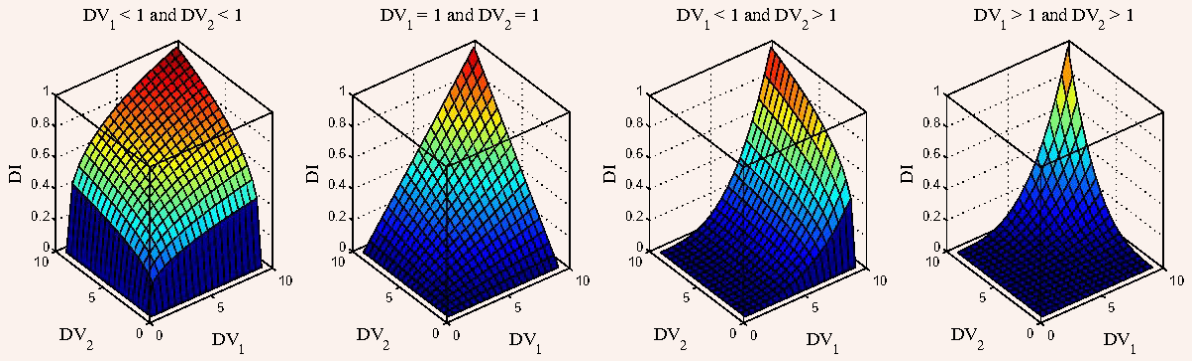
क्षति सूचकांक (DI) को एक अथवा अधिक क्षति चरों (DVs) के फलन के रूप में परिभाषित किया जाता है। यह ऐसी राशि है जिसे किसी क्षति के अभाव में शून्य और विफलता अथवा पतन होने पर इकाई रखा जाता है, $\mathrm{DI} \in [0, 1]$ (Hariri-Ardebili et al., 2016):

$$\mathrm{DI} = f\left(\mathrm{DV}_i\right) \ , \quad i = 1, ..., N$$

जहाँ n सहभागी DVs की संख्या है। यदि $n = 1$ हो तो इसे एकल-चर DI और यदि $n > 1$ हो तो बहु-चर DI कहा जाता है (Kappos, 1997)। क्षति सूचकांक के विकास का सर्वाधिक प्रचलित रूप इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\mathrm{DI} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{DV}_i - \mathrm{DV}_{L_i}}{\mathrm{DV}_i - \mathrm{DV}_{U_i}} \right)^{\kappa_i}$$

जहाँ DV_{L_i} और DV_{U_i}, i^{th} क्षति चर की निम्न और उच्च सीमाएँ (देहली) हैं तथा κ क्षति चर के विभिन्न चरणों में क्षति सूचकांक के परिवर्तन की दर से संबंधित घातांक है। ये निम्न और उच्च सीमाएँ प्रायः PBEE रूपरेखा की विशिष्ट सीमा अवस्थाओं के प्रत्यक्ष अनुरूप होती हैं और अमूर्त सीमा-अवस्था अवधारणा तथा परिमाणात्मक क्षति आकलन प्रक्रिया के बीच महत्त्वपूर्ण कड़ी बनाती हैं। चित्र 70.1 दो DVs वाले काल्पनिक DI के लिए κ_i के संयोजन पर आधारित चार भिन्न प्रतिरूप दर्शाता है।



चित्र 70.1: एक DI और दो DVs के बीच संबंध (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021)

क्षति सूचकांकों को विभिन्न अनुप्रयोगों के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है (Hariri-Ardebili and Saouma, 2015):

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- *स्थानीय* बनाम *वैश्विक*: स्थानीय DI किसी अवयव, सदस्य अथवा संरचना के सीमित भाग में क्षति का संकेतक है। दूसरी ओर वैश्विक DI संपूर्ण संरचना की क्षति अवस्था ग्रहण करता है। वैश्विक DI की गणना स्थानीय DIs के भारित योग द्वारा की जा सकती है।
- *एकल-चर* बनाम *बहु-चर*: DI की गणना एकल चर अथवा अनेक चरों के संयोजन से की जा सकती है। सामान्यतः संयुक्त DI विभिन्न प्राचलों को समाहित करता है और क्षति की प्रगति का अधिक व्यापक संकेतक देता है।
- *संचयी* बनाम *असंचयी*: संचयी DI क्षणिक विश्लेषण के समय क्षति का संचय ग्रहण कर सकता है, जबकि असंचयी DI केवल अंतिम अवस्था ग्रहण कर सकता है।
- *निर्धारणात्मक* बनाम *यादृच्छिक*: चूँकि सभी पदार्थ विषमांगी होते हैं, DI इस विषमांगता को यादृच्छिक अथवा निर्धारणात्मक व्यंजकों द्वारा ग्रहण कर भी सकता है और नहीं भी।
- *क्षति सूचकांक* बनाम *क्षति स्पेक्ट्रम*: क्षति स्पेक्ट्रम किसी भू-गति अभिलेख के अधीन एकल-स्वतंत्रता-कोटि तंत्रों की शृंखला के लिए संरचनात्मक आवर्तकाल के सापेक्ष क्षति सूचकांक का परिवर्तन निरूपित करता है (Bozorgnia and Bertero, 2003)।
- *संरचनात्मक* बनाम *आर्थिक*: संरचनात्मक DI क्षति को संरचनात्मक प्राचलों के पदों में ग्रहण करता है। दूसरी ओर आर्थिक DI संगत प्रतिस्थापन लागत से मरम्मत लागत के अनुपात जैसी लागत अवधारणाएँ प्रस्तुत करता है।

[43] क्षति सूचकांकों के ये वर्गीकरण अभियंताओं को PBEE रूपरेखा में स्थापित सीमा अवस्थाओं के सापेक्ष संरचनात्मक निष्पादन का मूल्यांकन करने के लचीले साधन प्रदान करते हैं। आकलन की विशिष्ट आवश्यकताओं के आधार पर उपयुक्त सूचकांक चुनकर अभियंता ऐसे व्यापक मूल्यांकन विकसित कर सकते हैं जो परिमाणात्मक मापों को गुणात्मक निष्पादन उद्देश्यों से जोड़ें।

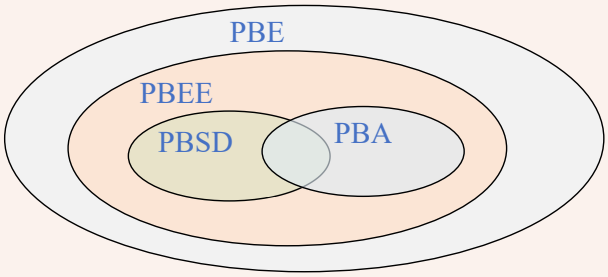
[44] विभिन्न सूचकांकों द्वारा क्षति का वर्गीकरण और परिमाणन भूकंपीय अभिकल्प और आकलन के निष्पादन-आधारित उपागमों के कार्यान्वयन की तकनीकी नींव प्रदान करते हैं। ये क्षति मापक अभियांत्रिकी विश्लेषण और हितधारकों द्वारा स्थापित निष्पादन उद्देश्यों के बीच परिमाणात्मक कड़ी बनते हैं।

[45] क्षति परिमाणन से निष्पादन मूल्यांकन की ओर बढ़ते समय इन तकनीकी अवधारणाओं को निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी की व्यापक रूपरेखा में रखना आवश्यक है, जो केवल संरचनात्मक सुरक्षा ही नहीं, बल्कि कार्यशीलता, आर्थिक विचारों और सामाजिक अपेक्षाओं को भी संबोधित करे।

70.4 निष्पादन

[46] निष्पादन-आधारित उपागम भूकंपीय संकट, संरचनात्मक अनुक्रिया और क्षति आकलन की हमारी समझ का परिपाक हैं। इस व्यापक संदर्भ में पूर्व में चर्चित सीमा अवस्थाएँ और क्षति सूचकांक संरचनात्मक निष्पादन के परिमाणन और मूल्यांकन के तकनीकी साधन प्रदान करते हैं, जैसा कि चित्र 70.2 में दर्शाया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 70.2: PBEE: व्यापक परिदृश्य

70.4.1 निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी रूपरेखा

47 निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी (PBE) में किसी संरचना तथा उसके असंरचनात्मक घटकों और अंतर्वस्तु के अभिकल्प मानदंड, संरचनात्मक तंत्र, विन्यास, अनुपातन और विवरण का चयन सम्मिलित है। यह प्रक्रिया निर्माण गुणवत्ता सुनिश्चित करती है और दीर्घकालिक अनुरक्षण का प्रबंध करती है। PBE का प्रमुख उद्देश्य निर्दिष्ट विश्वसनीयता स्तरों के भीतर यह सुनिश्चित करना है कि संरचना अथवा सुविधा प्रत्याशित उत्तेजन स्तरों के अधीन पूर्वपरिभाषित सीमा अवस्थाओं से अधिक क्षति न सहन करे।

48 PBE निष्पादन लक्ष्यों को व्यापक रूप से संबोधित करने हेतु संरचनात्मक अभियांत्रिकी, पदार्थ विज्ञान और जोखिम आकलन सहित विभिन्न अनुशासनों को समेकित करता है। इसमें अभिकल्प विकल्पों को परिष्कृत करने और निष्पादन उद्देश्यों का अनुपालन सुनिश्चित करने हेतु पुनरावृत्त मूल्यांकन सम्मिलित हैं। यह व्यापक प्रक्रिया आरंभिक परियोजना अवधारणा से प्रारंभ होकर संरचना के संपूर्ण जीवनचक्र में, उसके प्रचालन, अनुरक्षण और अंतिम सेवामुक्ति सहित, विस्तृत होती है (Bertero and Bertero, 2002)।

49 भूकंप अभियांत्रिकी के संदर्भ में PBE अनेक पूरक उपागमों में अभिव्यक्त होता है:

- **निष्पादन-आधारित भूकंप अभियांत्रिकी (PBEE)** PBE के सिद्धांतों को उन परिदृश्यों पर लागू करती है जहाँ भूकंपीय संकट अभिकल्प विचारों पर प्रभावी होता है। PBEE संरचना के संपूर्ण जीवनचक्र को संबोधित करती है और सुनिश्चित करती है कि वह निर्दिष्ट क्षति देहलियों का अतिक्रमण किए बिना बदलती तीव्रताओं की भूकंप भू-गतियाँ सहन कर सके (Bertero and Bertero, 2002)।

  PBEE में सम्मिलित हैं:

  - भू-गति विशेषताएँ परिभाषित करने हेतु विस्तृत भूकंपीय संकट विश्लेषण।
  - प्रायिकतामूलक जोखिम आकलनों के साथ संरचनात्मक निष्पादन मानदंडों का समेकन।
  - तात्कालिक कार्यशीलता और दीर्घकालिक आघात-सहता दोनों पर बल।

- **निष्पादन-आधारित भूकंपीय अभिकल्प (PBSD)** अभिकल्प चरण पर स्पष्ट रूप से केंद्रित PBEE गतिविधियों का उपसमुच्चय है। इसमें भूकंपीय आघात-सहता समाहित करने का सुव्यवस्थित उपागम सम्मिलित है (Bertero and Bertero, 2002):

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

  - स्थल-विशिष्ट आँकड़ों द्वारा भूकंपीय संकटों की पहचान और परिमाणन।
  - निष्पादन स्तरों और अभिकल्प उद्देश्यों का चयन।
  - उपयुक्तता और संभावित जोखिमों हेतु स्थल स्थितियों का मूल्यांकन।
  - निष्पादन उद्देश्यों के अनुरूप संकल्पनात्मक अभिकल्पों का विकास।
  - प्रारंभिक और अंतिम अभिकल्प सत्यापन हेतु संख्यात्मक प्रतिरूपण और अनुरूपण।
  - व्यापक स्वीकार्यता जाँच और समकक्ष समीक्षा।
  - निर्माण गुणवत्ता आश्वासन प्रक्रियाओं का विनिर्देशन।
  - निष्पादन लक्ष्यों का सतत अनुपालन सुनिश्चित करने हेतु निर्माणोत्तर अनुश्रवण।

- **निष्पादन-आधारित आकलन (PBA)** विद्यमान संरचनाओं अथवा नवीन पूर्ण अभिकल्पों के भूकंपीय निष्पादन का परिमाणात्मक मूल्यांकन करने हेतु PBEE सिद्धांतों का अनुप्रयोग है। PBA हितधारकों को भूकंपीय घटनाओं के प्रति संरचना की अनुक्रिया की प्रायिकतामूलक अंतर्दृष्टि देता है और जोखिम प्रबंधन हेतु सुविज्ञ निर्णय संभव बनाता है (Zareian and Krawinkler, 2009)।

  PBA में सम्मिलित हैं:

  - संरचनात्मक व्यवहार के पूर्वानुमान हेतु विश्लेषणात्मक प्रतिरूपण और अनुरूपण।
  - सुभेद्यताओं की पहचान हेतु विद्यमान संरचनाओं का मूल्यांकन।
  - क्षति की संभाव्यता और परिणामों के आकलन हेतु प्रायिकतामूलक जोखिम आकलन।
  - पहचाने गए जोखिमों के न्यूनीकरण हेतु पुनःसंयोजन अथवा उन्नयन रणनीतियों का विकास।
  - हितधारकों को जोखिमों को प्रभावी रूप से समझने और प्रबंधित करने में सहायता हेतु स्पष्ट पदों में परिणामों की प्रस्तुति।

70.4.2 निष्पादन स्तर और स्वीकार्यता मानदंड

50 PBEE पहले उन प्रमुख संरचनात्मक घटकों के विविक्त निष्पादन स्तर पहचानने का प्रयास करती है जो भवन की कार्यशीलता और सुरक्षा को उल्लेखनीय रूप से प्रभावित करते हैं। ये निष्पादन स्तर विभिन्न भूकंपीय तीव्रताओं के अधीन संरचनाओं के प्रत्याशित व्यवहार को संप्रेषित करने की मानकीकृत विधि देते हैं और पूर्व अनुभागों में चर्चित सीमा अवस्थाओं तथा क्षति सूचकांकों से प्रत्यक्षतः जुड़ते हैं।

51 ASCE 41 (ASCE 2007) और अन्य संहिताएँ सामान्यतः तीन प्रमुख निष्पादन स्तरों के लिए मार्गदर्शन देती हैं (तालिका 72.1):

- **तात्कालिक अधिभोग**: संरचनात्मक क्षति (जैसे इस्पात का पराभव, कंक्रीट का उल्लेखनीय विदरण) और असंरचनात्मक क्षति सीमित करके मूलतः प्रत्यास्थ व्यवहार अपेक्षित है।
- **जीवन सुरक्षा**: चोट अथवा जनहानि का जोखिम न्यूनतम करने और आवश्यक आवागमन मार्गों को सुलभ रखने हेतु संरचनात्मक और असंरचनात्मक घटकों की क्षति सीमित करें।
- **पतन निवारण**: संरचनात्मक विरूपणों और बलों को सामर्थ्य तथा दृढता के उल्लेखनीय ह्रास के आरंभ तक सीमित करके भवन के आंशिक अथवा पूर्ण पतन का अल्प जोखिम सुनिश्चित करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

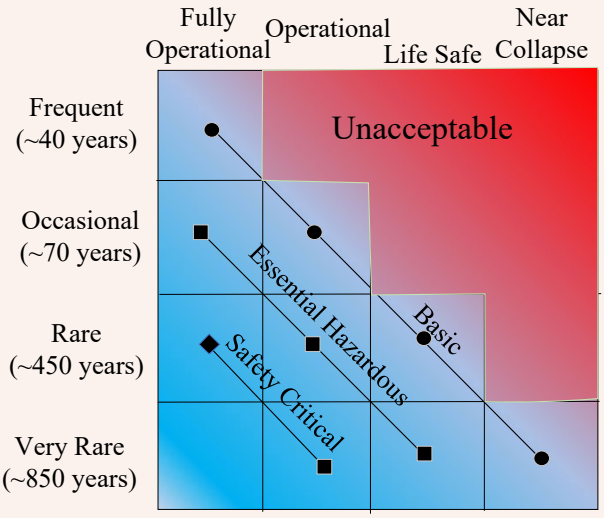
52 FEMA 356 (FEMA-356, 2000) अन्य रूपरेखाओं में प्रस्तुत स्तरों के समान विभिन्न लक्ष्य भवन निष्पादन स्तर और भूकंप संकट स्तर परिभाषित करती है। निष्पादन स्तर और संगत भौतिक क्षति के वर्णन तालिका 72.1 में दर्शाए गए हैं, जो संरचनात्मक और असंरचनात्मक दोनों घटकों की क्षति का गुणात्मक वर्णन देती है।

53 निष्पादन-आधारित भूकंपीय अभिकल्प की एक प्रभावशाली रूपरेखा Structural Engineers Association of California (SEAOC) के Vision 2000 दस्तावेज़ ने प्रदान की। इसने चार विविक्त निष्पादन स्तर स्थापित किए: 1) पूर्णतः प्रचालनशील, 2) प्रचालनशील, 3) जीवन सुरक्षा, और 4) पतन के निकट; प्रत्येक संरचनात्मक और असंरचनात्मक घटकों की क्षति के वर्णक्रम तथा अधिभोगियों और सुविधा की कार्यशीलता के परिणामी प्रभावों में एक विशिष्ट पट्टी निरूपित करता है (SEAOC, 1995)।

54 SEAOC रूपरेखा ने अतिक्रमण प्रायिकता पर आधारित विभिन्न संकट स्तर भी वर्णित किए:

- बारंबार तीव्रता स्तर: 50% अतिक्रमण प्रायिकता, 30 वर्षों में
- यदाकदा तीव्रता स्तर: 50% अतिक्रमण प्रायिकता, 50 वर्षों में
- विरल तीव्रता स्तर: 10% अतिक्रमण प्रायिकता, 50 वर्षों में
- अति-विरल तीव्रता स्तर: 10% अतिक्रमण प्रायिकता, 100 वर्षों में

55 संकट स्तरों के साथ निष्पादन स्तरों का समेकन सुविधा के महत्त्व के अनुसार बदलते निष्पादन उद्देश्य बनाता है, जैसा कि चित्र 70.3 में दर्शाया गया है। विकर्ण रेखाएँ विभिन्न सुविधा प्रकारों के अनुरूप भिन्न उद्देश्य निरूपित करती हैं; अधिक महत्त्वपूर्ण सुविधाओं से गंभीर भूकंपीय घटनाओं के अधीन भी उच्चतर निष्पादन स्तर बनाए रखने की अपेक्षा की जाती है।



चित्र 70.3: भवनों के लिए अनुशंसित न्यूनतम भूकंपीय निष्पादन अभिकल्प उद्देश्य (Porter, 2003)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

70.4.3 सीमा अवस्थाओं, क्षति सूचकांकों और निष्पादन स्तरों का समेकन

56 सीमा अवस्थाओं, क्षति सूचकांकों और निष्पादन स्तरों के बीच परिमाणात्मक संबंध स्थापित करना PBEE के व्यावहारिक कार्यान्वयन हेतु आवश्यक है। तालिकाएँ 70.1 और 70.2 प्रामाणिक स्रोतों की स्थापित देहलियाँ प्रस्तुत करती हैं, जिनका उपयोग संरचनात्मक निष्पादन के आकलन हेतु किया जा सकता है।

तालिका 70.1: ASCE 41-17 के अनुसार विभिन्न निष्पादन स्तरों हेतु अनुमत अंतर्मंजिला विस्थापन अनुपात (IDR)

संरचनात्मक तंत्र	तात्कालिक अधिभोग	जीवन सुरक्षा	पतन निवारण
आघूर्ण ढाँचे (इस्पात)	0.7%	2.5%	5.0%
आघूर्ण ढाँचे (कंक्रीट)	1.0%	2.0%	4.0%
बंधित ढाँचे	0.5%	1.5%	2.0%
कंक्रीट अपरूपण भित्तियाँ	0.5%	1.0%	2.0%
चिनाई अपरूपण भित्तियाँ	0.3%	0.6%	1.0%

57 ASCE 41-17 (Civil Engineers, 2017) की ये विस्थापन सीमाएँ मापनीय अभियांत्रिकी माँग प्राचलों और अपेक्षित निष्पादन स्तरों के बीच प्रत्यक्ष सहसंबंध देती हैं। विभिन्न निर्माण प्रकारों की भिन्न विरूपण क्षमताएँ स्वीकार करते हुए सीमाएँ संरचनात्मक तंत्र के अनुसार बदलती हैं।

तालिका 70.2: क्षति सूचकांक देहलियाँ और संगत संरचनात्मक अवस्थाएँ

क्षति सूचकांक विस्तार	क्षति अवस्था	वर्णन
$DI < 0.1$	अल्प	कोई उल्लेखनीय क्षति नहीं; प्रत्यास्थ अनुक्रिया प्रभावी
$0.1 \le DI < 0.25$	मामूली	अल्प विदरण; सीमित पराभव संभव
$0.25 \le DI < 0.4$	मध्यम	उल्लेखनीय विदरण; कुछ स्थानीय पराभव; क्षमता अपरभावित
$0.4 \le DI < 0.8$	गंभीर	व्यापक विदरण; विस्तृत पराभव; क्षमता में उल्लेखनीय कमी
$0.8 \le DI < 1.0$	पतन	व्यापक क्षति; अल्प अवशिष्ट सामर्थ्य अथवा दृढता
$DI \ge 1.0$	ध्वस्त	पूर्ण विफलता; कोई अवशिष्ट क्षमता नहीं

58 तालिका 70.2 की क्षति सूचकांक देहलियाँ Park & Ang क्षति प्रतिरूप (Park and Ang, 1985) पर आधारित हैं, जिसे प्रायोगिक परीक्षण और भूकंपोत्तर अन्वेषणों द्वारा व्यापक रूप से सत्यापित किया गया है। यह प्रतिरूप संचयी क्षति के आकलन हेतु अधिकतम विरूपण और शैथिल्य ऊर्जा अपव्यय को संयोजित करता है। Williams, Villemure, and Sexsmith, 1997 ने इन क्षति सूचकांक मानों और बड़े भूकंपों के पश्चात संरचनाओं में प्रेक्षित निष्पादन के बीच सहसंबंध स्थापित किए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[59] निर्धारणात्मक भूकंपीय आकलनों के लिए माँग-क्षमता अनुपात (DCR) निष्पादन स्तरों से संबंधित एक अन्य परिमाणात्मक माप प्रदान करते हैं। तालिका 70.3 FEMA दिशानिर्देशों की DCR देहलियाँ प्रस्तुत करती है।

तालिका 70.3: FEMA 356 के अनुसार माँग-क्षमता अनुपात (DCR) देहलियाँ

DCR विस्तार	निष्पादन स्तर	अपेक्षित व्यवहार
DCR < 1.0	तात्कालिक अधिभोग	घटक मूलतः प्रत्यास्थ रहता है; नगण्य क्षति
$1.0 \leq$ DCR < 2.0	जीवन सुरक्षा	क्षति होती है, किंतु संरचना पतन के विरुद्ध सुरक्षा अंतर बनाए रखती है
$2.0 \leq$ DCR < 3.0	पतन निवारण	सीमित शेष क्षमता सहित उल्लेखनीय क्षति; पतन के निकट
DCR ≥ 3.0	CP से परे	घटक विफल हो चुका है; कोई शेष क्षमता नहीं

[60] FEMA 356 (FEMA-356, 2000) की ये DCR देहलियाँ घटक-स्तरीय निष्पादन के लिए सरल आकलन विधि देती हैं। अधिक व्यापक क्षति प्रतिरूपों की तुलना में सरलीकृत होने पर भी DCR मान संरचनाओं के अभिकल्प और मूल्यांकन हेतु व्यावहारिक मानदंड देते हैं।

[61] इन विभिन्न मापकों—विस्थापन सीमाओं, क्षति सूचकांकों और माँग-क्षमता अनुपातों—का समेकन अभियंताओं को स्थापित सीमा अवस्थाओं के सापेक्ष संरचनात्मक निष्पादन के आकलन की व्यापक रूपरेखा देता है। विश्लेषणात्मक परिणामों को इन देहलियों से सहसंबद्ध करके अभियंता जटिल संरचनात्मक अनुक्रियाओं को हितधारक अपेक्षाओं और संहिता आवश्यकताओं के अनुरूप सार्थक निष्पादन आकलनों में रूपांतरित कर सकते हैं।

[62] यह ध्यान रखना महत्त्वपूर्ण है कि यद्यपि ये देहलियाँ सामान्य मार्गदर्शन देती हैं, स्थल-विशिष्ट स्थितियाँ, संरचनात्मक विशिष्टताएँ और विशेष अधिभोग आवश्यकताएँ इन मानों में संशोधन आवश्यक बना सकती हैं। निष्पादन-आधारित अभिकल्प और आकलन के व्यापक संदर्भ में इन मानदंडों की व्याख्या और अनुप्रयोग हेतु व्यावसायिक निर्णय आवश्यक रहता है।

[63] यह समेकित उपागम अभियंताओं को विश्लेषणात्मक परिणामों (क्षति सूचकांकों और EDPs) को हितधारकों तक संप्रेषित किए जा सकने वाले सार्थक निष्पादन आकलनों में रूपांतरित करने देता है। इन संबंधों को स्थापित करके PBEE तकनीकी विश्लेषण और व्यावहारिक निर्णय लेने के बीच अंतर को पाटती है।

70.5 भंगुरता वक्रों और जोखिम आकलन की ओर संक्रमण

[64] सीमा अवस्थाओं, क्षति सूचकांकों और निष्पादन स्तरों के अब स्पष्टतः परिभाषित तथा समेकित होने पर अगला चरण *भंगुरता वक्रों* का विकास है, जो विशिष्ट क्षति अवस्थाओं अथवा निष्पादन स्तरों के अतिक्रमण की प्रायिकता को भूकंपीय तीव्रता के फलन के रूप में परिमाणित करते हैं। अध्याय 72 में चर्चित ये वक्र PBEE में जोखिम आकलन, हानि आकलन और निर्णय लेने की नींव हैं।

[65] भंगुरता वक्र भूकंपीय संकटों, संरचनात्मक अनुक्रिया, क्षति क्रियाविधियों और निष्पादन अपेक्षाओं की हमारी समझ का परिपाक हैं। वे निर्धारणात्मक अभियांत्रिकी मापकों को ऐसे प्रायिकतामूलक जोखिम

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आकलनों में रूपांतरित करते हैं जो भूकंप अभियांत्रिकी की अंतर्निहित अनिश्चितताओं को समाहित करते हैं और हितधारकों को परिमाणनीय जोखिम स्तरों के आधार पर सुविज्ञ निर्णय लेने देते हैं।



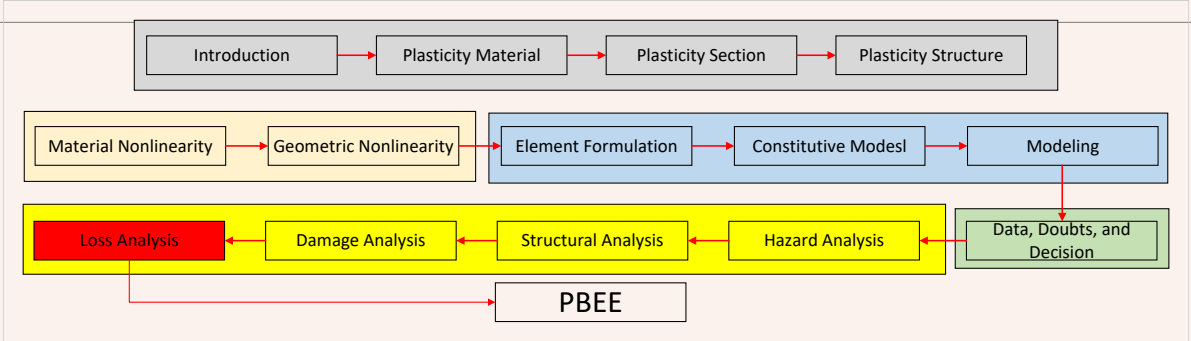
प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

71 हानि विश्लेषण

सारांश

निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) में हानि विश्लेषण भूकम्पीय क्षति के आर्थिक और सामाजिक प्रभावों का परिमाण निर्धारित करता है, जिनमें मरम्मत लागत, कार्यबंदी अवधि और जनहानि सम्मिलित हैं। प्रायिकता मॉडलों, भंगुरता फलनों और परिणाम फलनों का उपयोग करके यह जोखिम आकलन को संरचनात्मक सुरक्षा से आगे विस्तारित करता है। यह अध्याय क्रमिक प्रभावों और सामाजिक-आर्थिक अनिश्चितताओं का भी परीक्षण करता है तथा प्रत्यास्थता नियोजन में उनकी भूमिका को रेखांकित करता है। PBEE में हानि विश्लेषण का समाकलन सुरक्षा, लागत और सामाजिक कल्याण के बीच संतुलन स्थापित करते हुए जोखिम-सूचित निर्णय-निर्माण को संभव बनाता है।



1 हानि विश्लेषण निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) का एक मूलभूत घटक है और भूकम्प-जनित क्षति के आर्थिक तथा सामाजिक परिणामों के मूल्यांकन में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

2 केवल संरचनात्मक सुरक्षा पर केन्द्रित पारम्परिक अभिकल्प उपागमों के विपरीत, PBEE का उद्देश्य भूकम्पीय घटनाओं से सम्बद्ध वित्तीय लागत, कार्यात्मक कार्यबंदी अवधि और मानवीय परिणामों का परिमाण निर्धारित करना है। ऐसा करके यह अभियन्ताओं, नीति-निर्माताओं और हितधारकों को प्रत्यास्थता रणनीतियों, बीमा नीतियों और शमन उपायों के विषय में सूचित निर्णय लेने में समर्थ बनाता है।

3 हानि विश्लेषण का मूल मरम्मत लागत, कार्यबंदी अवधि और जनहानि के आकलन में निहित है।

4 मरम्मत लागत में किसी संरचना को उसकी भूकम्प-पूर्व अवस्था में पुनर्स्थापित करने के लिए आवश्यक वित्तीय संसाधन सम्मिलित होते हैं। ये लागतें संरचनात्मक और असंरचनात्मक क्षति की सीमा के साथ-साथ श्रम तथा सामग्री की उपलब्धता पर निर्भर करती हैं।

5 कार्यबंदी अवधि उस समय को दर्शाती है जिसके दौरान कोई सुविधा भूकम्प-जनित क्षति के कारण प्रचालन से बाहर रहती है; इससे केवल व्यवसाय और संस्थान ही नहीं, बल्कि अस्पताल तथा आपातकालीन प्रतिक्रिया केन्द्र जैसी आवश्यक सेवाएँ भी प्रभावित होती हैं। कुछ मामलों में, विशेषकर महत्त्वपूर्ण अवसंरचना के लिए, कार्यात्मक कार्यबंदी अवधि का प्रभाव प्रत्यक्ष मरम्मत लागत से अधिक हो सकता है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6 चोटों और मृत्यु सहित जनहानि, हानि विश्लेषण का एक अन्य महत्त्वपूर्ण पक्ष है, क्योंकि संरचनात्मक विफलताएँ और गिरता हुआ मलबा मानव जीवन के लिए गम्भीर जोखिम उत्पन्न करते हैं।

7 हानियों का परिमाण निर्धारित करने के लिए प्रायिकता मॉडलों, भंगुरता फलनों और परिणाम फलनों के संयोजन की आवश्यकता होती है।

8 प्रायिकता मॉडल भूकम्पीय संकट आकलनों को संरचनात्मक निष्पादन आँकड़ों के साथ समाकलित करके क्षति के विभिन्न स्तरों की सम्भाव्यता का अनुमान लगाते हैं।

9 भंगुरता फलन किसी निर्दिष्ट भू-कम्पन स्तर पर किसी संरचना के एक विशेष क्षति अवस्था तक पहुँचने की प्रायिकता परिभाषित करते हैं।

10 परिणाम फलन इन क्षति अवस्थाओं को मरम्मत लागत और कार्यबंदी अवधि के आकलन जैसी परिमाणात्मक हानियों में रूपान्तरित करते हैं। संयुक्त रूप से ये विधियाँ भूकम्पीय जोखिम का ऐसा व्यापक मूल्यांकन संभव बनाती हैं जो केवल संरचनात्मक निष्पादन से आगे जाता है।

11 सामाजिक-आर्थिक कारकों की अनिश्चितताएँ हानि विश्लेषण को और जटिल बनाती हैं। सामाजिक-आर्थिक अनिश्चितताओं में श्रम लागत का उतार-चढ़ाव, सामग्री की कमी और विभिन्न क्षेत्रों के पुनर्बहाली प्रयासों में अन्तर सम्मिलित हैं। इन अनिश्चितताओं का समाधान करने के लिए हानि आकलनों को परिष्कृत करने और निर्णय-निर्माण में सुधार लाने हेतु मोंटे कार्लो अनुकरण तथा बेज़ियन अनुमान विधियों सहित उन्नत सांख्यिकीय उपागम आवश्यक हैं।

12 हानि विश्लेषण का एक महत्त्वपूर्ण पक्ष भूकम्पीय क्षति के क्रमिक प्रभावों को समझना है। उदाहरणार्थ, किसी महत्त्वपूर्ण सेतु की विफलता परिवहन संजाल को बाधित कर सकती है, जिससे आपातकालीन प्रतिक्रिया प्रयासों में विलम्ब और आर्थिक हानियों में वृद्धि होती है।

13 इसी प्रकार, औद्योगिक सुविधाओं की क्षति से संकटकारी पदार्थों का रिसाव हो सकता है, जो आपदा के प्रभाव को बढ़ा देता है। इन क्रमिक प्रभावों को ध्यान में रखकर PBEE भूकम्पीय प्रत्यास्थता का अधिक व्यापक दृष्टिकोण प्रदान करता है और अप्रत्यक्ष हानियों को न्यूनतम करने वाली अवसंरचना में निवेश का मार्गदर्शन करता है।

14 PBEE में हानि विश्लेषण के कार्यान्वयन के प्रत्यास्थता नियोजन पर महत्त्वपूर्ण प्रभाव पड़ते हैं। निर्णयकर्ता इन विश्लेषणों का उपयोग यह निर्धारित करने के लिए कर सकते हैं कि उच्चतर भूकम्पीय अभिकल्प मानकों में निवेश आर्थिक रूप से उचित है अथवा विद्यमान संरचनाओं का पुनःसंयोजन दीर्घकालीन जोखिमों को घटाने का लागत-प्रभावी साधन प्रदान करेगा।

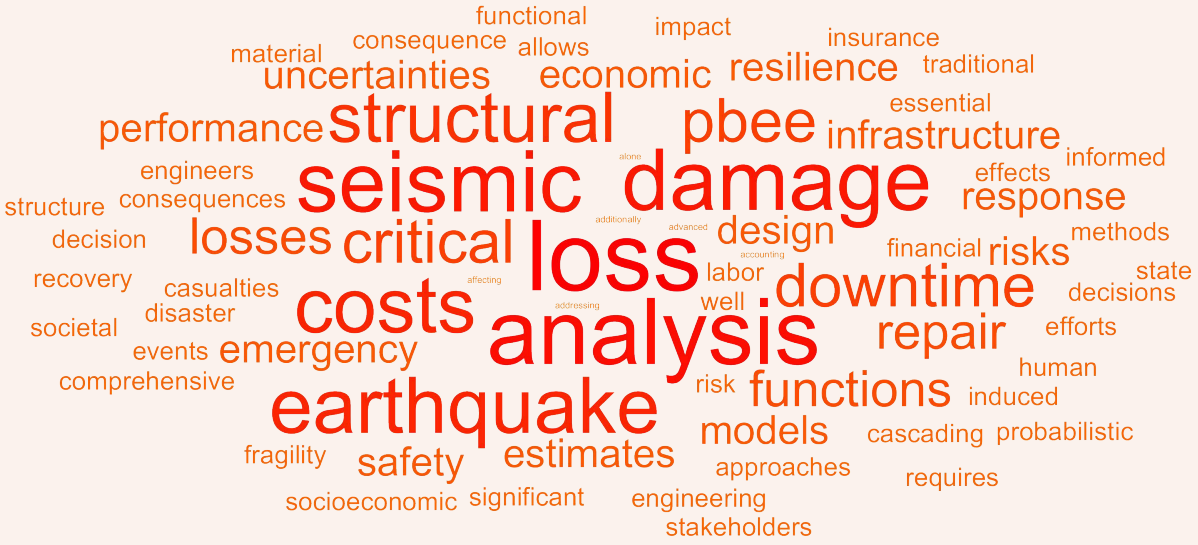
15 इसके अतिरिक्त, हानि आकलन बीमा मॉडलों और आपदा-तत्परता योजनाओं के विकास को सूचित करते हैं, जिससे समुदायों को भूकम्प के बाद अधिक दक्षता से पुनर्बहाली में सहायता मिलती है। सरकारें और निजी क्षेत्र के हितधारक इन अन्तर्दृष्टियों का उपयोग भूकम्पीय उन्नयन तथा आपातकालीन प्रतिक्रिया अवसंरचना के लिए वित्तपोषण को प्राथमिकता देने में कर सकते हैं, जिससे अधिक सुदृढ़ और संधारणीय पुनर्बहाली सुनिश्चित होती है।

16 PBEE ढाँचे में हानि विश्लेषण को समाकलित करके अभियन्ता और नियोजक पारम्परिक सुरक्षा मापकों से आगे बढ़कर भूकम्पीय घटनाओं के व्यापक प्रभावों पर विचार कर सकते हैं। यह परिवर्तन आधुनिक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भूकम्प अभियांत्रिकी के लिए आवश्यक है, क्योंकि इससे सुरक्षा, आर्थिक व्यवहार्यता और सामाजिक कल्याण में संतुलन स्थापित करने वाले जोखिम-सूचित अभिकल्प निर्णय संभव होते हैं।

17 इसके अतिरिक्त, वैश्विक नगरीकरण बढ़ने और भूकम्पीय जोखिम अधिक तात्कालिक होने के साथ, भावी आपदाओं को सहने में सक्षम प्रत्यास्थ नगरों को आकार देने के लिए हानि-विश्लेषण कार्यविधियों का परिष्करण अत्यन्त महत्त्वपूर्ण होगा।



प्रारूप सामग्री

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

72 प्रायिकता जोखिम आकलन (⊇ PBEE)[1]

सारांश

यह अध्याय प्रायिकता जोखिम आकलन (PRA) को एक व्यापक ढाँचे के रूप में प्रस्तुत करता है, जो निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) के सिद्धान्तों को समाहित और विस्तारित करता है।

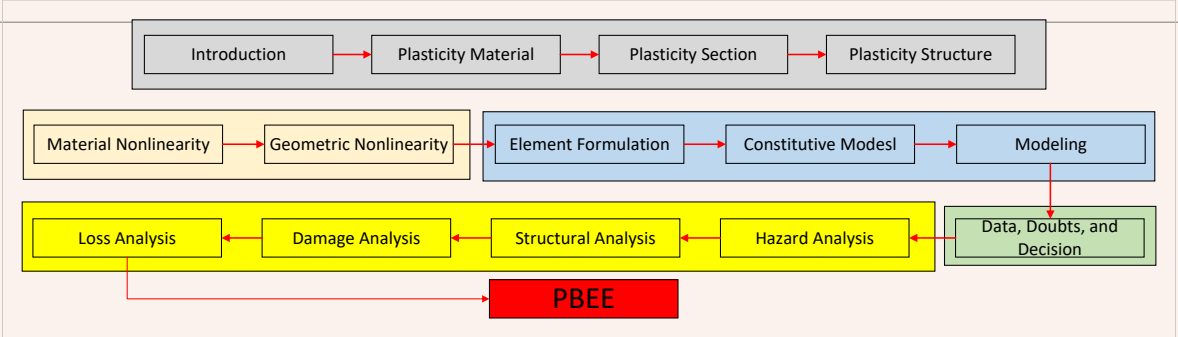
PBEE के हमारे अधोमुखी विकास के संकल्पनात्मक शीर्ष के रूप में यह रेखांकित करता है कि जोखिम आकलन किस प्रकार भूकम्पीय संकट, संरचनात्मक अनुक्रिया, क्षति और हानि को एकीकृत प्रायिकता कार्यविधि में समाकलित करता है। निर्देशात्मक अभिकल्प उपागमों से PBEE-1 और PBEE-2 तक के विकास का, उनकी अपनी सामर्थ्य और सीमाओं सहित, अनुसरण किया गया है।

इस ढाँचे में भंगुरता वक्रों को आवश्यक उपकरणों के रूप में प्रस्तुत किया गया है; वे अभियांत्रिकी माँग प्राचलों और क्षति मापकों के बीच प्रायिकता सम्बन्ध प्रदान करते हैं तथा संरचनात्मक और असंरचनात्मक निष्पादन में chap:trustregion के परिमाण-निर्धारण को संभव बनाते हैं।

72.1 नए प्रतिमान: निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) 2329
72.1.1 भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) की सीमाएँ 2329
72.1.2 भाग I: स्पष्ट निष्पादन उद्देश्य 2330
72.1.3 भाग II: कार्यात्मक और आर्थिक परिणामों का प्रत्यक्ष परिमाण-निर्धारण: 2332
72.1.4 PBEE कार्यान्वयन की प्रक्रिया 2337
72.2 अनुक्रिया से क्षति तक: भंगुरता वक्र . . 2338
72.2.1 मूल सिद्धान्त और परिभाषाएँ . . 2339
72.2.2 भंगुरता वक्रों का विकास 2339
72.2.3 गणितीय निरूपण 2340
72.2.4 सतत फलन बनाम विविक्त आवृयूह2341
72.3 PBEE ढाँचे में भूमिका 2343
72.4 उदाहरण 72.1: सम्पूर्ण PBEE उदाहरण 2344
72.5 ऐतिहासिक मील-पत्थर और आधारभूत पूर्-लेख 2348

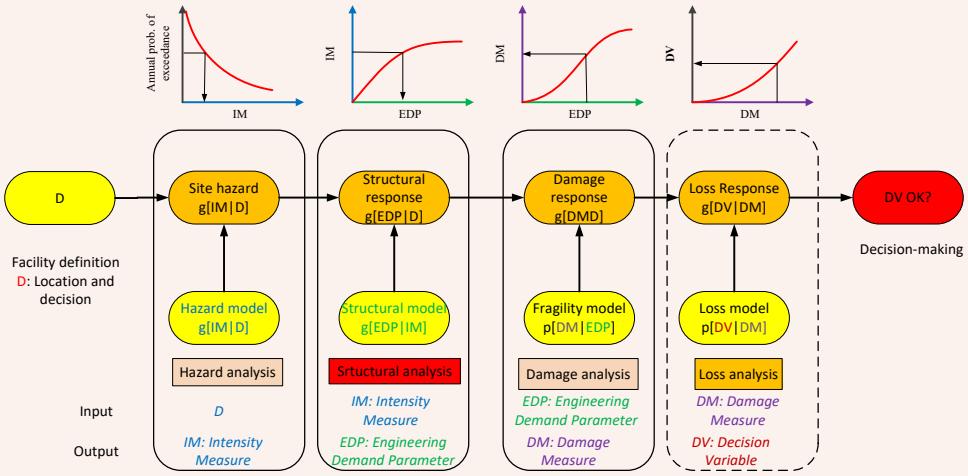
परिशिष्ट

भाग 1: आधारभूत संदर्भ सामग्री



[1]प्रतीक ⊇ दर्शाता है कि प्रायिकता जोखिम आकलन को निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी के अधिसमुच्चय के रूप में माना गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



72.1 नए प्रतिमान: निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE)

72.1.1 भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) की सीमाएँ

1 पारम्परिक अभिकल्प दर्शन की सीमाओं को रेखांकित करने के लिए यह अध्याय *अन्तराल* (chapter 66) में प्रस्तुत प्रमुख विचारों का पुनरवलोकन करते हुए आरम्भ होता है।

2 §36.3 में विवेचित भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) का संरचनात्मक अभियांत्रिकी में, विशेषकर इस्पात और कंक्रीट अभिकल्प के लिए, व्यापक उपयोग होता है। यद्यपि LRFD भारों और सामग्री गुणों की अनिश्चितताओं को ध्यान में रखने हेतु प्रायिकता संकल्पनाएँ समाहित करता है, तथापि इसकी अनेक सीमाएँ PBEE की ओर परिवर्तन को प्रेरित करती हैं:

एकल-स्तरीय सुरक्षा जाँच: LRFD पूर्वनिर्धारित गुणकित भारों के अधीन संरचनात्मक सुरक्षा सुनिश्चित करता है, किन्तु भूकम्पोत्तर मरम्मत-योग्यता, कार्यात्मक कार्यबंदी अवधि अथवा प्रत्यास्थता जैसे व्यापक निष्पादन उद्देश्यों को सम्बोधित नहीं करता।

क्षति के स्पष्ट विचार का अभाव: LRFD विभिन्न भूकम्प तीव्रताओं पर प्रत्याशित क्षति का परिमाण निर्धारित किए बिना चरम सीमा अवस्थाओं के अधीन पतन निवारण पर केन्द्रित है। फलतः संरचनाएँ बची रह सकती हैं, किन्तु व्यापक क्षति और उच्च मरम्मत लागत सह सकती हैं।

जटिल भारण परिदृश्यों के लिए अनम्यता: LRFD भारों के रैखिक संयोजनों और नियत गुणकों पर निर्भर करता है, जिससे गतिक भूकम्पीय भारण के अधीन अरैखिक व्यवहार, क्षरण और संचयी क्षति को सम्बोधित करने की इसकी क्षमता सीमित होती है।

एकसमान सुरक्षा अन्तराल: LRFD अधिभोग प्रकार अथवा स्थल-विशिष्ट भूकम्पीय जोखिम की परवाह किए बिना सामान्य सुरक्षा गुणक लागू करता है। अतः विफलता के भिन्न सामाजिक परिणामों

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के बावजूद महत्त्वपूर्ण सुविधाओं और साधारण भवनों का प्रायः समान सुरक्षा स्तरों के लिए अभिकल्प किया जाता है।

स्थल-विशिष्ट संकट के साथ समाकलन का अभाव: LRFD प्रायिकता भूकम्पीय संकट विश्लेषण (PSHA) को समाहित नहीं करता और इस प्रकार विशिष्ट स्थलों के भूकम्पीय भू-कम्पनों में निहित परिवर्तनशीलता तथा chap:trustregion की उपेक्षा करता है।

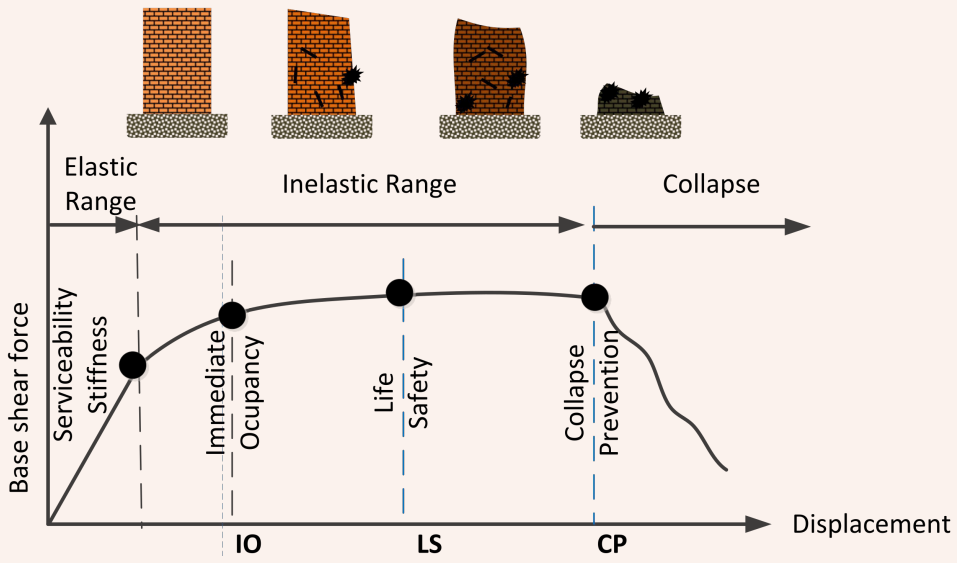
[3] निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) का विकास निर्देशात्मक, संहिता-आधारित उपागमों की सीमाओं को दूर करने के लिए किया गया था। यह एक जोखिम-सूचित ढाँचा प्रस्तुत करता है जो अनेक भूकम्पीय तीव्रताओं पर संरचनात्मक निष्पादन का स्पष्ट मूल्यांकन करता है।

72.1.2 भाग I: स्पष्ट निष्पादन उद्देश्य

72.1.2.1 विधि

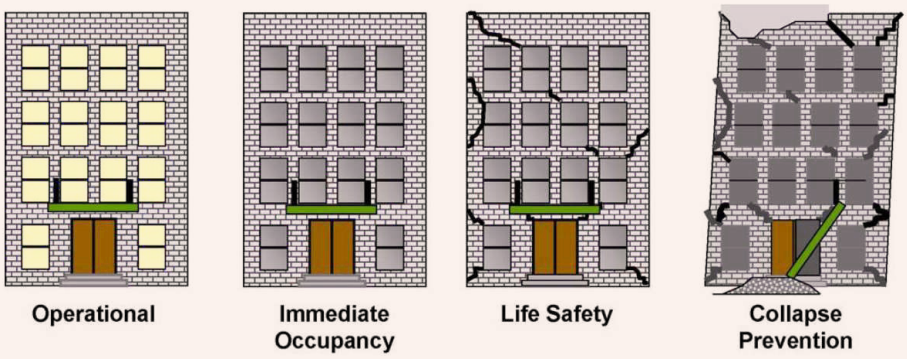
[4] पूर्वोक्त सीमाओं को सम्बोधित करने के लिए PBEE की प्रथम पीढ़ी ने भूकम्पीय माँगों के अधीन भवनों हेतु विविक्त निष्पादन उद्देश्य प्रस्तुत किए (FEMA, 1997b; FEMA, 1997a), चित्र 72.2,

- *प्रचालन (O):* कोई उल्लेखनीय क्षति नहीं; संरचना पूर्णतः कार्यशील रहती है।
- *तात्कालिक अधिभोग (IO):* अल्प क्षति; भवन सुरक्षित और मरम्मत-योग्य है।
- *जीवन सुरक्षा (LS):* मध्यम क्षति; संरचना मरम्मत-योग्य है, किन्तु हस्तक्षेप के बिना कार्यशील नहीं है।
- *पतन निवारण (CP):* गम्भीर क्षति; भवन समग्र पतन से बचता है, किन्तु विफलता के निकट हो सकता है।



चित्र 72.1: PBEE की प्रथम पीढ़ी का संकल्पनात्मक विवरण; (**Whittaker0303**)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 72.2: विविक्त निष्पादन स्तरों के चित्रण, (FEMA, 2012)

[5] इस संकल्पनात्मक ढाँचे को चित्र 72.1 में दर्शाया गया है और तालिका 72.1 में आगे सारांशित किया गया है (**Whittaker0303**)।

तालिका 72.1: विभिन्न लक्षित भवन निष्पादन स्तरों के लिए संरचनात्मक और असंरचनात्मक घटकों की क्षति का परिसर (तालिका C1-2) (FEMA-356, 2000)

निष्पादन स्तर	पतन निवारण	जीवन सुरक्षा	तात्कालिक अधिभोग	प्रचालन
समग्र क्षति	गम्भीर	मध्यम	अल्प	अत्यल्प
संरचनात्मक घटक	अल्प अवशिष्ट दृढता और सामर्थ्य, किन्तु भार-वहनी स्तम्भ तथा भित्तियाँ कार्यशील। बडे स्थायी अपवाह। कुछ निकास अवरुद्ध। भराव और अपरिबद्ध मुंडेर विफल अथवा आरम्भिक विफलता में। भवन पतन के निकट।	सभी तलों में कुछ अवशिष्ट सामर्थ्य और दृढता शेष। गुरुत्व-भार-वहनी अवयव कार्यशील। भित्तियों की तल-बाह्य विफलता अथवा मुंडेरों का उलटना नहीं। कुछ स्थायी अपवाह। विभाजकों को क्षति। भवन की मरम्मत आर्थिक सीमा से परे हो सकती है।	कोई स्थायी अपवाह नहीं। संरचना मूल सामर्थ्य और दृढता को पर्याप्त रूप से बनाए रखती है। अग्रभागों, विभाजकों, छतों और संरचनात्मक अवयवों में छोटी दरारें। उद्वाहक पुनः चालू किए जा सकते हैं। अग्नि सुरक्षा प्रचालनीय।	कोई स्थायी अपवाह नहीं। संरचना मूल सामर्थ्य और दृढता को पर्याप्त रूप से बनाए रखती है। अग्रभागों, विभाजकों, छतों और संरचनात्मक अवयवों में छोटी दरारें। सामान्य प्रचालन के लिए महत्त्वपूर्ण सभी तन्त्र कार्यशील।
असंरचनात्मक घटक	व्यापक क्षति।	गिरने के संकटों का शमन, किन्तु अनेक स्थापत्य, यांत्रिक और वैद्युत तन्त्र क्षतिग्रस्त।	उपकरण और अन्तर्वस्तु सामान्यतः सुरक्षित, किन्तु यांत्रिक विफलता अथवा उपयोगिता सेवाओं के अभाव में कार्य न करें।	नगण्य क्षति। विद्युत और अन्य उपयोगिता सेवाएँ उपलब्ध, सम्भवतः आरक्षित स्रोतों से।

72.1.2.2 PBEE-1 की सीमाएँ

[6] अपने नवाचारों के बावजूद PBEE-1 में अनेक कमियाँ थीं:

- *घटक-आधारित मूल्यांकन:* निष्पादन का आकलन तन्त्र-स्तरीय व्यवहार के स्थान पर अलग-अलग घटकों की सीमाओं के आधार पर किया जाता था।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- *व्यक्तिनिष्ठ स्वीकृति मानदण्ड:* अनेक निष्पादन सीमाएँ विशेषज्ञ निर्णय पर आधारित थीं और उनमें सुदृढ प्रायोगिक सत्यापन का अभाव था।
- *अपर्याप्त असंरचनात्मक केन्द्रण:* हानियों और कार्यशीलता पर उल्लेखनीय प्रभाव के बावजूद प्रक्रियाओं ने असंरचनात्मक क्षति की व्यापक रूप से उपेक्षा की।
- *असत्यापित परिणाम और रूढिवादिता:* निष्पादन पूर्वानुमानों का कठोर सत्यापन नहीं किया गया था, जिससे प्रायः रूढिवादी अभिकल्प उत्पन्न होते थे।
- *हितधारक-विच्छेद:* ढाँचे ने मरम्मत लागत, कार्यबंदी अवधि अथवा व्यवसाय निरन्तरता जैसी हितधारक प्राथमिकताओं को सम्बोधित नहीं किया।
- *दायित्व की सम्भावना:* निष्पादन लक्ष्यों को गारंटी समझने की भ्रान्ति ने अभियन्ताओं को विधिक जोखिम के सम्मुख रखा।

7 इन सीमाओं ने अधिक व्यापक ढाँचे—PBEE-2—के विकास को प्रेरित किया।

72.1.2.3 अभिकल्प बनाम विश्लेषण

8 जिस प्रकार संरचनात्मक अभियांत्रिकी (§36.1.1) अभिकल्प और विश्लेषण में भेद करती है, उसी प्रकार PBEE इस द्विभाजन का विस्तार करता है:

निष्पादन-आधारित भूकम्पीय अभिकल्प (PBSD): भूकम्पीय भारण के अधीन निर्दिष्ट निष्पादन लक्ष्यों की पूर्ति हेतु नई संरचनाओं का अभिकल्प।

निष्पादन-आधारित आकलन (PBA): किसी संरचना के निष्पादन का परिमाणात्मक मूल्यांकन, जो विद्यमान और नए दोनों भवनों पर लागू होता है।

72.1.3 भाग II: कार्यात्मक और आर्थिक परिणामों का प्रत्यक्ष परिमाण-निर्धारण:

72.1.3.1 परिचय

9 PBEE से तात्पर्य ऐसी अभियांत्रित सुविधाओं के अभिकल्प, मूल्यांकन और निर्माण से है जिनका सामान्य तथा चरम भारों के अधीन निष्पादन स्वामियों, उपयोगकर्ताओं और समाज की विविध आवश्यकताओं तथा उद्देश्यों के अनुरूप होता है।

10 1997 में Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEER) ने निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी के लिए अधिक सुदृढ कार्यविधि विकसित करने का निर्णय लिया, जिसे अगली पीढी का PBEE (PBEE-2 अथवा PEER PBEE भी कहा जाता है) नाम दिया गया। PEER द्वारा विकसित PEER PBEE ढाँचा निष्पादन-आधारित प्रक्रिया के प्रत्येक चरण पर chap:trustregion और यादृच्छिकता के प्रभावों की प्रत्यक्ष गणना को सुगम बनाता है।

11 अधिक विशिष्ट रूप से:

- निष्पादन-आधारित भूकम्पीय अभिकल्प, सम्भावित संकट जिसे भवन द्वारा अनुभव किए जाने की सम्भावना है को देखते हुए, भवन के सम्भावित निष्पादन का स्पष्ट मूल्यांकन करता है; इसमें

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सम्भावित संकट के परिमाण-निर्धारण और भवन की वास्तविक अनुक्रिया के आकलन में निहित अनिश्चितताओं को ध्यान में रखा जाता है।

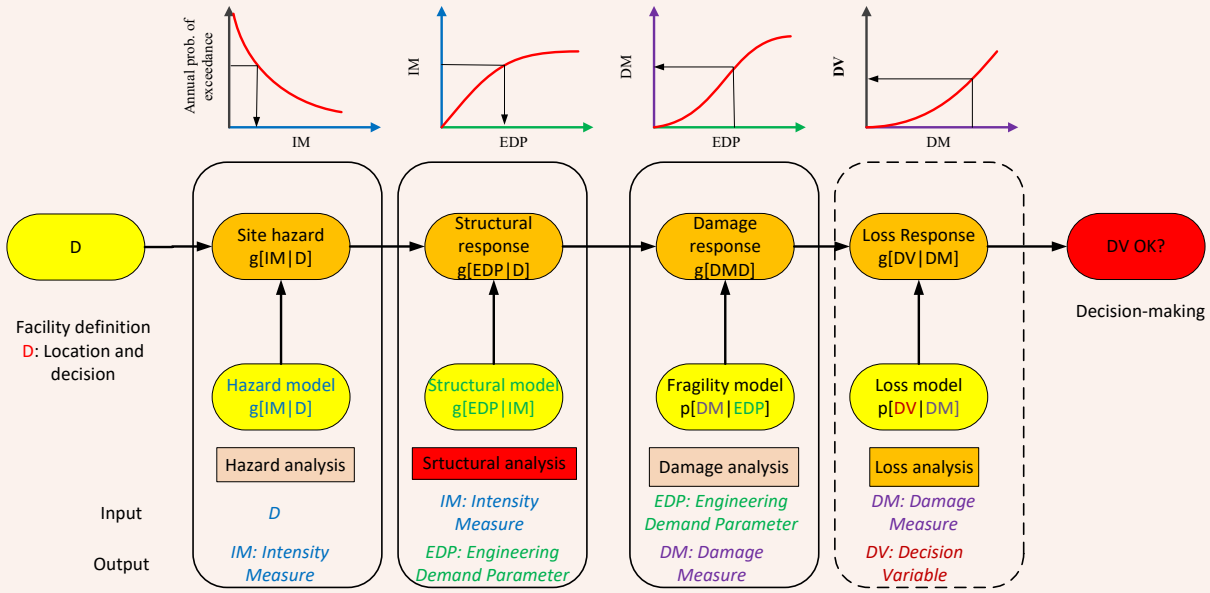
- LRFD के विपरीत, यह स्वयं को संकट के एक स्तर तक सीमित नहीं रखता, बल्कि अनेक स्तरों पर विचार करता है।
- निष्पादन को जनहानि, मरम्मत और प्रतिस्थापन लागत, मरम्मत समय तथा असुरक्षित घोषण-पट्ट होने की प्रायिकता के रूप में मापा जाता है।
- निष्पादन का आकलन किसी विशेष भूकम्प परिदृश्य अथवा तीव्रता के लिए, अथवा घटित हो सकने वाले सभी भूकम्पों और एक निर्दिष्ट कालावधि में प्रत्येक की सम्भाव्यता को ध्यान में रखकर किया जा सकता है।
- निष्पादन को प्रचालन, तात्कालिक अधिभोग, जीवन सुरक्षा और पतन निवारण के रूप में पहचाने गए विविक्त निष्पादन स्तरों की शृंखला में व्यक्त किया जाता है।
- संरचनात्मक और असंरचनात्मक दोनों घटकों की क्षति से सम्बद्ध निष्पादन की संकल्पना प्रस्तुत की गई। इनमें से किसी निष्पादन स्तर को भूकम्पीय संकट के एक विशिष्ट स्तर से जोड़कर निष्पादन उद्देश्य विकसित किए गए।
- उच्च-स्तरीय कम्पनियों में यह प्रचलित व्यवहार की अवस्था है। यह सुस्थापित है।
- तथापि:
  - सीमा अवस्थाएँ घटक-आधारित हैं, वास्तव में तन्तर-व्यापी नहीं (यदि एक घटक विफल होता है, तो क्या वह प्रगतिशील पतन आरम्भ करता है?)।
  - केवल MCE घटना (2%/50वर्ष) पर विचार करता है।
  - chap:trustregion और प्रायिकता का सीमित निरूपण।
  - संहिता से ऊपर अभिकल्प के लिए सीमित सूचना।

72.1.3.2 सामान्य ढाँचा

[12] PEER PBEE का सामान्य ढाँचा चित्र 72.3 में दर्शाया गया है। यह भूकम्पीय निष्पादन आकलन को चार प्रमुख चरणों में विभाजित करता है, चित्र 72.3:

1. *संकट विश्लेषण:* *प्रायिकता भूकम्पीय संकट विश्लेषण* (PSHA) का उपयोग करके किसी दिए गए स्थल पर भू-कम्पन के विभिन्न स्तर अनुभव करने की प्रायिकता का परिमाण निर्धारित करता है, chapter 67।
2. *संरचनात्मक विश्लेषण:* *अरैखिक गतिक विश्लेषण* और अभियांत्रिकी माँग प्राचलों (EDPs) को समाहित करते हुए भूकम्पीय भारों के प्रति संरचनात्मक अनुक्रिया का मूल्यांकन करता है, chapter 69।
3. *क्षति विश्लेषण:* अनुक्रिया प्राचलों का उपयोग करके *संरचनात्मक और असंरचनात्मक घटकों* की भौतिक क्षति का आकलन करता है, chapter 70।
4. *हानि विश्लेषण:* क्षति को *आर्थिक हानियों, कार्यबंदी अवधि और जनहानि के आकलनों* में रूपान्तरित करता है, जिससे लागत-आधारित निर्णय-निर्माण संभव होता है, chapter 71।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र 72.3: PBEE के चार घटक

[13] इनमें से प्रत्येक चरण के परिणाम सामान्यीकृत चरों के रूप में निरूपित होते हैं: तीव्रता मापक (IM), अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP), क्षति मापक (DM) और निर्णय चर (DV)। इस प्रक्रिया को त्रिगुण समाकल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जो सम्पूर्ण प्रायिकता प्रमेय का अनुप्रयोग है (Porter, 2003): index[p2]damage! measure index[p2]decision variable

$$g\,[\mathrm{DV}|\mathrm{D}] \;=\; \int\int\int p\,[\mathrm{DV}|\mathrm{DM},\mathrm{D})\,p\,[\mathrm{DM}|\mathrm{EDP},\mathrm{D}] \\ p\,[\mathrm{EDP}|\mathrm{IM},\mathrm{D}]\,g\,[\mathrm{IM}|\mathrm{D}]\,d\mathrm{IM}.d\mathrm{EDP}.d\mathrm{DM} \tag{72.1}$$

जहाँ $p\,[\mathrm{X}|\mathrm{Y}]$, X के उस पूरक संचयी वितरण फलन को दर्शाता है जो Y पर प्रतिबन्धित है; $g\,[\mathrm{X}|\mathrm{Y}]$, X की उस माध्य वार्षिक घटित होने की दर को दर्शाता है जो दिए गए Y के अनुरूप है; और D सुविधा के स्थान, संरचनात्मक, असंरचनात्मक तथा अन्य विशेषताओं को दर्शाता है। ध्यान दें कि आगे सरलता के लिए हम D पर प्रतिबन्ध को छोड़ देते हैं।

IM: *तीव्रता मापक* भूकम्पीय भू-कम्पन की विशेषताओं का परिमाणात्मक वर्णन करता है। यह प्राचल सामान्यतः अतिक्रमण की माध्य वार्षिक प्रायिकता, $g\,[\mathrm{IM}]$, के फलन के रूप में व्यक्त किया जाता है।

EDP: *अभियांत्रिकी माँग प्राचल* भूकम्पीय कम्पन के प्रति संरचनात्मक तथा असंरचनात्मक घटकों और अन्तर्वस्तु की अनुक्रिया का वर्णन करता है। इस चरण के उत्पाद प्रतिबन्धित प्रायिकताएँ, $p\,[\mathrm{EDP}|\mathrm{IM}]$, हैं।

DM: *क्षति मापक* संरचनात्मक और असंरचनात्मक घटकों की भौतिक दशा का वर्णन करता है। भवन की कार्यशीलता, अधिभोग-तत्परता, जीवन सुरक्षा और आवश्यक मरम्मतों का अभिलक्षण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

करने हेतु DMs में क्षति के प्रभावी विवरण सम्मिलित होते हैं। इस चरण के उत्पाद प्रतिबन्धित प्रायिकताएँ, p [DM|EDP], हैं।

DV: *निर्णय* चर क्षति आकलनों को उन राशियों में रूपान्तरित करता है जो जोखिम-सम्बन्धी निर्णय लेने के उत्तरदायी व्यक्तियों के लिए उपयोगी हों। वर्तमान में प्रयुक्त DVs, जिन्हें निर्णय मापकों के रूप में पहचाना जाता है, प्रत्यक्ष मौद्रिक हानि, कार्यबंदी अवधि (अथवा पुनर्स्थापन समय) और मृत्यु (जनहानि) हैं। इस चरण के उत्पाद प्रतिबन्धित प्रायिकताएँ, p [DV|DM], हैं।

[14] जैसा पहले उल्लेख किया गया है, संरचनाओं के निष्पादन आकलन हेतु PBEE-2 कार्यविधि में प्रत्यक्ष मौद्रिक हानि, कार्यबंदी अवधि और जनहानि को निर्णय चरों के रूप में प्रयुक्त किया जाता है। Applied Technology Council, 2012b तीन प्रकार के निष्पादन आकलनों का उपयोग करता है: 1) तीव्रता-आधारित, 2) परिदृश्य-आधारित और 3) समय-आधारित।

72.1.3.3 PBEE 1 और PBEE 2 के बीच अन्तर

PBEE 1 (प्रथम-पीढ़ी निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी) से PBEE 2 (द्वितीय-पीढ़ी निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी) तक का विकास कार्यविधि, कार्यक्षेत्र और अनुप्रयोग में महत्त्वपूर्ण उन्नति दर्शाता है। प्रमुख अन्तरों का अवलोकन नीचे दिया गया है और तालिका 72.2 में सारांशित है।

प्रमुख अन्तर

- *कार्यविधिक ढाँचा:* PBEE 1 नियतात्मक विधियों और निर्देशात्मक मानदण्डों पर निर्भर था, जबकि PBEE 2 ने प्रायिकता, बहुविषयी ढाँचा प्रस्तुत किया (Center, 2010)।
- *विश्लेषणात्मक चरण:* PBEE 2 ने संकट विश्लेषण, संरचनात्मक विश्लेषण, क्षति विश्लेषण और हानि विश्लेषण को समाकलित करने वाले प्रमापीय ढाँचे को औपचारिक रूप दिया; PBEE 1 में इन्हें स्पष्ट रूप से पृथक नहीं किया गया था (FEMA, 2012)।
- *कार्यक्षेत्र:* PBEE 2 ने असंरचनात्मक तन्त्रों, सामाजिक प्रभावों और आर्थिक विचारों को सम्मिलित करने हेतु अपना केन्द्रण विस्तारित किया, जो PBEE 1 के संरचना-केन्द्रित उपागम से भिन्न है (American Society of Civil Engineers, 2017)।
- *भू-कम्पन निरूपण:* PBEE 2 प्रायिकता भूकम्पीय संकट विश्लेषण (PSHA) और स्थल-विशिष्ट भू-कम्पन चयन को समाहित करता है, जबकि PBEE 1 सरलीकृत संकट विवरणों का उपयोग करता था (Civil Engineers, 2022)।
- *निष्पादन मापक:* PBEE 2 संरचनात्मक सुरक्षा के अतिरिक्त मरम्मत लागत, कार्यबंदी अवधि, मृत्यु और कार्यशीलता का मूल्यांकन करता है (FEMA, 2012)।
- *निर्णय-निर्माण:* PBEE 2, PBEE 1 के संहिता-आधारित अनुपालन से आगे बढ़कर जोखिम-सूचित निर्णय-निर्माण के लिए क्रियाशील सूचना प्रदान करता है (Center, 2010)।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 72.2: PBEE 1 और PBEE 2 की तुलना

पक्ष	PBEE 1	PBEE 2
कार्यविधि	नियतात्मक, निर्देशात्मक	प्रायिकता, बहुविषयी (Center, 2010)
विश्लेषणात्मक चरण	संकट, माँग और क्षति का अन्तर्निहित समाकलन	प्रमापीय ढाँचा: संकट, संरचनात्मक, क्षति और हानि विश्लेषण (FEMA, 2012)
कार्यक्षेत्र	केवल संरचनात्मक तन्त्र	संरचनात्मक और असंरचनात्मक तन्त्र, सामाजिक तथा आर्थिक प्रभाव (American Society of Civil Engineers, 2017)
भू-कम्पन	सरलीकृत संकट विवरण	प्रायिकता भूकम्पीय संकट विश्लेषण (PSHA), स्थल-विशिष्ट चयन (Civil Engineers, 2022)
निष्पादन मापक	संरचनात्मक सुरक्षा (जैसे, जीवन सुरक्षा)	संरचनात्मक सुरक्षा, मरम्मत लागत, कार्यबंदी अवधि, मृत्यु, कार्यशीलता (FEMA, 2012)
निर्णय-निर्माण	संहिता-आधारित अनुपालन	जोखिम-सूचित, हितधारक-केन्द्रित निर्णय (Center, 2010)

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

72.1.4 PBEE कार्यान्वयन की प्रक्रिया

15 PBEE के चार मूल घटकों—संकट, संरचनात्मक अनुक्रिया, क्षति और हानि—का नीचे से ऊपर अन्वेषण करने के बाद अब हम निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) आकलन के कार्यान्वयन हेतु आवश्यक चरणों के पूर्ण अनुक्रम का वर्णन करते हैं। यह ऊपर से नीचे प्रक्रियात्मक दृष्टिकोण व्यवहार में PBEE लागू करने वाले अभियन्ताओं और विश्लेषकों के लिए विशेष रूप से उपयोगी है।

16 प्रक्रिया में अन्तर्निहित विश्लेषण का एक समुच्चय है, जो भूकम्पीय संकट से निर्णय चरों (DVs) तक आगे बढ़ता है और प्रत्येक चरण में अनिश्चितताओं को समाहित करता है। चरणों की रूपरेखा निम्न प्रकार दी जा सकती है:

1. सुविधा और निष्पादन उद्देश्य परिभाषित करें:
   - संरचना तथा उसके स्थान, अधिभोग और उपयोग का अभिलक्षण करें।
   - हितधारक प्राथमिकताएँ पहचानें (जैसे, जीवन सुरक्षा, कार्यात्मक निरन्तरता, मरम्मत लागत सीमाएँ, कार्यबंदी अवधि की सीमाएँ)।
   - उपयुक्त निर्णय चर चुनें (जैसे, जनहानि, लागत, पुनर्बहाली समय)।
2. प्रायिकता भूकम्पीय संकट विश्लेषण (PSHA) करें, chapter 67:
   - चयनित तीव्रता मापकों (IMs), सामान्यतः मूल आवर्तकाल पर वर्णक्रमीय त्वरण, के लिए स्थल-विशिष्ट भू-कम्पन संकट वक्र विकसित करें।
   - विभिन्न पुनरागमन अवधियों अथवा संकट स्तरों (जैसे, 10%, 2%, 0.5%—50 वर्षों में) के लिए प्रतिनिधि भू-कम्पन चुनें।
3. अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDPs) व्युत्पन्न करने हेतु संरचनात्मक विश्लेषण करें, chapter 69:
   - संरचना का अरैखिक प्रतिरूप बनाएँ (अथवा विद्यमान प्रतिरूपों का उपयोग करें)।
   - चयनित भू-कम्पनों के अधीन अरैखिक गतिक विश्लेषण अथवा अनुक्रिया इतिहास विश्लेषण करें।
   - अन्तरतलीय अपवाह, तल त्वरण और घटक विरूपण जैसे EDPs निकालें।
   - प्रतिबन्धित प्रायिकता वितरणों $p(\text{EDP}|\text{IM})$ का आकलन करें।
4. क्षति विश्लेषण करें, chapter 70:
   - संरचनात्मक और असंरचनात्मक दोनों घटकों के EDPs को क्षति मापकों (DMs) से प्रति-चित्रित करें।
   - $p(\text{DM}|\text{EDP})$ के मूल्यांकन हेतु भंगुरता फलनों अथवा अनुभवजन्य सम्बन्धों का उपयोग करें।
   - घटक-विशिष्ट सीमाओं और घटना-पश्चात कार्यशीलता को ध्यान में रखें।
5. हानि विश्लेषण करें, chapter 71:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- DMs को जनहानि, मरम्मत लागत और कार्यबंदी अवधि जैसे निर्णय चरों (DVs) से प्रतिचित्रित करें।
- हानि प्रतिरूपों अथवा पुनर्बहाली फलनों का उपयोग करके $p(\mathrm{DV}\,|\,\mathrm{DM})$ का मूल्यांकन करें।
- कुल प्रत्याशित हानि मापक प्राप्त करने हेतु सभी घटकों की हानियों का समुच्चयन करें।

6. सभी अनिश्चितताओं पर समाकलन करें:

   - सम्पूर्ण प्रायिकता प्रमेय का उपयोग करके IM, EDP, DM और DV पर प्रायिकता समाकलन करें:

$$g[\mathrm{DV}] = \int\int\int p[\mathrm{DV}|\mathrm{DM}]\, p[\mathrm{DM}|\mathrm{EDP}]\, p[\mathrm{EDP}|\mathrm{IM}]\, g[\mathrm{IM}]\, d\mathrm{IM}\, d\mathrm{EDP}\, d\mathrm{DM}$$

   - जब संवृत-रूप व्यंजक उपलब्ध न हों, तब मोंटे कार्लो अनुकरण अथवा संख्यात्मक समाकलन का उपयोग करें।

7. परिणामों का प्रतिवेदन और निर्वचन करें:

   - प्रत्याशित वार्षिक हानि (EAL), हानि-अतिक्रमण वक्र और परिदृश्य-आधारित परिणाम जैसे निष्कर्ष प्रस्तुत करें।
   - जोखिम शमन, अभिकल्प निर्णय, पुनःसंयोजन प्राथमिकता अथवा हितधारक संचार को सूचित करने हेतु परिणामों का उपयोग करें।

[17] यह प्रक्रियात्मक अनुक्रम अभिकल्प और आकलन दोनों में PBEE लागू करने के लिए व्यावहारिक मार्गचित्र प्रदान करता है। यद्यपि प्रत्येक चरण को विवरण और परिष्कार के विभिन्न स्तरों के साथ विकसित किया जा सकता है, समाकलित ढाँचा सुनिश्चित करता है कि निष्पादन को समाज के लिए महत्त्वपूर्ण परिणामों के रूप में मापा जाए।

72.2 अनुक्रिया से क्षति तक: भंगुरता वक्र

[18] पिछले खण्ड में रेखांकित PBEE ढाँचा प्रतिबन्धित सम्बन्धों की एक शृंखला—तीव्रता मापक (IMs), अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDPs), क्षति मापक (DMs) और निर्णय चर (DVs)—के माध्यम से भूकम्पीय निवेश को सार्थक निर्णय चरों से जोड़ता है। संरचनात्मक विश्लेषण जहाँ अन्तरतलीय अपवाह अथवा तल त्वरण जैसे EDPs देता है, वहीं निर्णय-निर्माण के लिए क्षति और उसके परिणामों की सूचना आवश्यक होती है।

[19] संरचनात्मक अनुक्रिया और भौतिक क्षति के बीच इस अन्तराल को पाटना *भंगुरता* वक्रों की भूमिका है। ये वक्र किसी निश्चित भूकम्पीय माँग स्तर (सामान्यतः एक EDP) के दिए होने पर किसी संरचनात्मक अथवा असंरचनात्मक घटक द्वारा निरिदष्ट क्षति अवस्था को पार करने की प्रायिकता का परिमाण निर्धारित करते हैं। इस प्रकार वे PBEE में अरैखिक संरचनात्मक विश्लेषण और क्षति/हानि प्रतिरूपण के बीच प्रायिकता सम्बन्ध का कार्य करते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[20] भंगुरता फलन PBEE का केन्द्रीय अंग है, विशेषकर क्षति के आरम्भ और प्रगति में chap:trustregion को औपचारिक रूप देने में। यह नियतात्मक जाँचों से संरचनात्मक निष्पादन के प्रायिकता विवरण की ओर परिवर्तन संभव बनाता है। निम्न खण्ड भंगुरता की परिभाषाएँ, भेद, प्रतिरूपण विधियाँ और व्यापक PBEE ढाँचे में उनकी भूमिका प्रस्तुत करते हैं।

72.2.1 मूल सिद्धान्त और परिभाषाएँ

[21] एक *भंगुरता* वक्र उस प्रतिबन्धित प्रायिकता को निरूपित करता है कि कोई संरचनात्मक तन्त्र अथवा घटक, वर्णक्रमीय त्वरण (Sa) अथवा चरम भू-त्वरण (PGA) जैसे *तीव्रता मापक (IM)* के फलन के रूप में, किसी विशिष्ट सीमा अवस्था (LS) को पार करता है:

$$P[\text{LS}|\text{IM} = im]$$

[22] अधिक औपचारिक रूप में भंगुरता को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$P[D \geq C_{\text{LS}}|\text{IM} = im] = P\left[\frac{D}{C_{\text{LS}}} \geq 1 \mid \text{IM} = im\right]$$

जहाँ D माँग है और C_{LS} सीमा अवस्था की क्षमता सीमा है।

[23] PBEE में भंगुरता को प्रायः EDP-से-DM स्तर पर व्यक्त किया जाता है:

$$P[\text{DM} \geq dm \mid \text{EDP} = edp]$$

यह रूप दर्शाता है कि भंगुरता किस प्रकार संरचनात्मक अनुक्रिया को प्रत्याशित क्षति से जोड़ती है।

शब्दावली: भंगुरता बनाम सुभेद्यता बनाम संकट

- भंगुरता दी गई माँग पर किसी क्षति अवस्था के अतिक्रमण की प्रायिकता का परिमाण निर्धारित करती है।
- सुभेद्यता दिए गए संकट पर प्रत्याशित *हानियों* (जैसे, लागत, कार्यबंदी अवधि, जनहानि) का परिमाण निर्धारित करती है।
- संकट वक्र IM मानों के अतिक्रमण की आवृत्ति (PSHA का निर्गम) का परिमाण निर्धारित करते हैं।

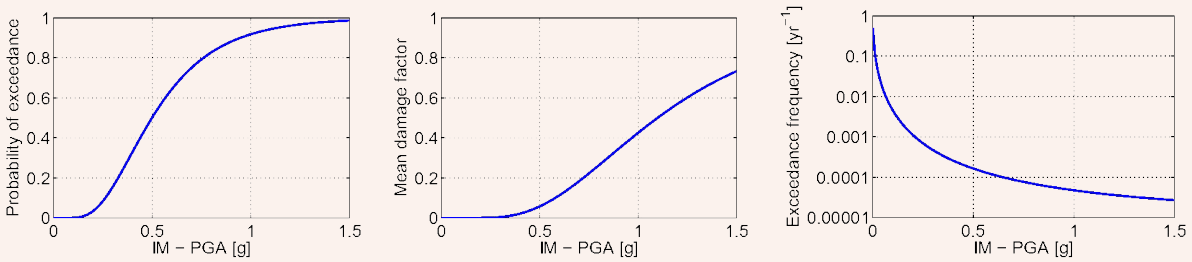
[24] ये तीनों तत्त्व संयुक्त रूप से जोखिम आकलन और हानि अनुमान को आधार प्रदान करते हैं। चित्र 72.4 इनके भेद को दर्शाता है।

72.2.2 भंगुरता वक्रों का विकास

भंगुरता आँकड़ों के स्रोत

- अनुभवजन्य: भूकम्पोत्तर प्रेक्षण; वास्तविक किन्तु सीमित।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) भंगुरता वक्र (b) सुभेद्यता वक्र (c) संकट वक्र

चित्र 72.4: भूकम्पीय भंगुरता, सुभेद्यता और संकट वक्रों की तुलना

- विश्लेषणात्मक: अरैखिक समय-इतिहास अनुकरण (IDA, MSA)।
- अन्वेषणात्मक: विशेषज्ञ मत; आँकड़ों की कमी होने पर प्रयुक्त।
- प्रायोगिक: प्रयोगशाला परीक्षण; लागत के कारण विरल।
- संकर: अनुभवजन्य और विश्लेषणात्मक आँकड़ों का संयोजन।

पतन और चरम अनुक्रियाओं का निरूपण

25 यदि अनुकरणों के दौरान पतन अथवा संख्यात्मक अस्थिरता देखी जाती है, तो ऐसी घटनाओं को ध्यान में रखने के लिए भंगुरता को पुनःसूत्रित किया जाना चाहिए:

$$P[EDP \geq edp|IM] = P[EDP \geq edp|IM, \text{NoCollapse}](1-P[\text{Collapse}|IM])+P[\text{Collapse}|IM]$$

एकल बनाम अनेक क्षति अवस्थाएँ

26 भंगुरता को सीमा अवस्थाओं (LS_i) की शृंखला पर व्यक्त किया जा सकता है, जिनमें प्रत्येक एक क्षति अवस्था (DS_i) के अनुरूप होती है। क्रमिक रूप से प्रतिरूपित करने पर:

$$P[\text{DS}_i|IM] = P[\text{LS}_i|IM] - P[\text{LS}_{i+1}|IM]$$

27 वैकल्पिक रूप से, समान्तर तन्त्रों में:

$$P[\text{DS}_i|IM] = P[\text{LS}_1|IM] \cdot P[\text{DS}_i|\text{LS}_1]$$

72.2.3 गणितीय निरूपण

लघुगणक-सामान्य प्रतिरूप (IM-आधारित)

$$P[\text{LS}|IM = im] = \Phi\left(\frac{\ln(im) - \ln(\eta)}{\beta}\right)$$

जहाँ η माध्यिका क्षमता है और β परिक्षेपण है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सामान्यीकृत रैखिक प्रतिरूप (GLMs)

28 GLMs सम्बन्ध फलनों (जैसे, प्रोबिट, लॉजिट, पूरक लॉग-लॉग) का उपयोग करके भंगुरता व्यक्त करते हैं। उदाहरणार्थ:

$$\text{Logit: } P = \frac{e^{\theta_0+\theta_1 IM}}{1+e^{\theta_0+\theta_1 IM}}$$

29 GLMs फलनीय रूप में नम्यता प्रदान करते हैं और विभिन्न निरूपणों पर प्रतिरूप की उपयुक्तता का मूल्यांकन करने के लिए प्रयुक्त किए जा सकते हैं।

72.2.4 सतत फलन *बनाम* विविक्त आव्यूह

30 भंगुरता विश्लेषण के परिणामों को उनके निरूपण के आधार पर भी वर्गीकृत किया जा सकता है: या तो *सतत फलन* (अर्थात् भंगुरता वक्र) अथवा *विविक्त मानों की तालिका*, जिसे *क्षति प्रायिकता आव्यूह (DPM)* कहते हैं (Erberik, 2015)।

31 भंगुरता वक्रों को उनके द्वारा निरूपित सीमा अवस्थाओं की संख्या के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है:

एकल: किसी विशिष्ट सीमा अवस्था (LS) अथवा अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP) की सीमा के अतिक्रमण की प्रायिकता निरूपित करता है।

अनेक: विभिन्न सीमा अवस्थाओं के अनुरूप भंगुरता वक्रों के समुच्चय का उपयोग किसी संरचनात्मक तन्त्र की पूर्ण क्षति-अवस्था रूपरेखा का वर्णन करने के लिए किया जा सकता है।

32 सीमा अवस्थाएँ (LS) (खण्ड 70.2 देखें) विभिन्न क्षति अवस्थाओं (DS) के बीच सीमाएँ परिभाषित करती हैं; इनका गुणात्मक (जैसे, अल्प, मध्यम, व्यापक) अथवा क्षति सूचकांक (DI) का उपयोग करके परिमाणात्मक वर्णन किया जा सकता है। N_{LS} सीमा अवस्थाओं वाले तन्त्र के लिए $N_{\text{DS}} = N_{\text{LS}} + 1$ अनुरूप क्षति अवस्थाएँ होती हैं। क्षति अवस्था 0 (DS_0) अक्षत दशा को निरूपित करती है।

33 क्षति अवस्थाओं को दो भिन्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है:

क्रमिक: (अर्थात् क्रमबद्ध) तन्त्र को DS_i से होकर बढ़ने के बाद ही DS_{i+1} तक पहुँचना चाहिए। किसी विशिष्ट DS में होने की प्रायिकता है:

$$P[\text{DS} = ds_i \mid \text{IM} = im] = \begin{cases} 1 - P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im], & i = 0 \\ P[\text{LS}_i \mid \text{IM} = im] - P[\text{LS}_{i+1} \mid \text{IM} = im], & 1 \le i < N_{\text{DS}} \\ P[\text{LS}_i \mid \text{IM} = im], & i = N_{\text{DS}} \end{cases} \tag{72.2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समकालिक: (अर्थात् समान्तर) प्रत्येक क्षति अवस्था का स्वतन्त्र रूप से मूल्यांकन किया जाता है:

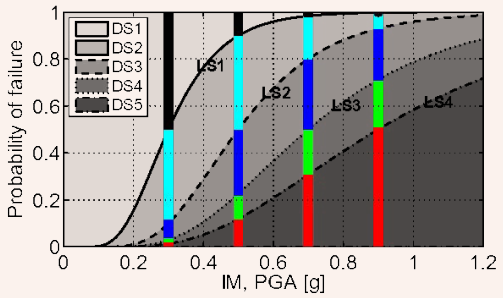
$$P[\text{DS} = ds_i \mid \text{IM} = im] = \begin{cases} 1 - P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im], & i = 0 \\ P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im] \cdot P[\text{DS} = ds_i \mid \text{LS}_1], & 1 \le i \le N_{\text{DS}} \end{cases} \tag{72.3}$$

[34] ध्यान दें कि समकालिक मूल्यांकन में सभी क्षति अवस्थाओं की प्रायिकताओं का योग 1.0 से अधिक हो सकता है:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{DS}}} P[\text{DS} = ds_i \mid \text{LS}_1] > 1.0$$

index[p2]Damage! Probability Matrix

[35] क्षति प्रायिकता आव्यूह (DPM): ऐसा आव्यूह है जो चयनित भूकम्पीय तीव्रता स्तरों (SILs) पर DS प्रायिकताओं के विविक्त मान दर्शाता है। प्रत्येक स्तम्भ एक विविक्त IM स्तर निरूपित करता है, जबकि प्रत्येक पंक्ति एक विशिष्ट क्षति अवस्था के अनुरूप होती है। यद्यपि प्रत्येक भंगुरता वक्र एक सतत फलन है, DPM नियत IM मानों पर इन फलनों के विविक्त प्रतिचयन को निरूपित करता है।



(a) भंगुरता वक्र



(b) क्षति प्रायिकता आव्यूह

चित्र 72.5: भंगुरता वक्र और क्षति प्रायिकता आव्यूह के बीच सम्बन्ध

भंगुरता वक्र बनाम पृष्ठ

[36] एक *भंगुरता* वक्र किसी क्षति अवस्था के अतिक्रमण की प्रायिकता को एकल IM से सम्बद्ध करता है। दूसरी ओर, एक भंगुरता पृष्ठ अनेक चरों पर विचार करता है, चित्र 72.6:

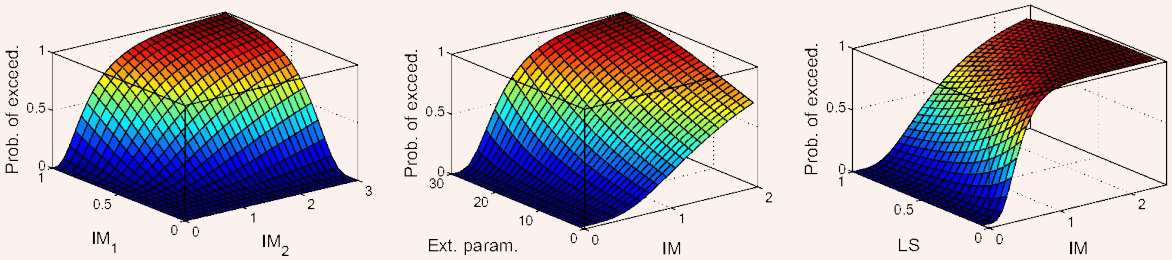
- *सदिश IMs:* दो अथवा अधिक IMs के फलन के रूप में भंगुरता, जैसे, $P[\text{LS}|IM_1, IM_2]$
- *समय-निर्भर भंगुरता:* $P[\text{LS}(t)|IM]$ के माध्यम से प्रतिरूपित कालप्रभावन अथवा क्षरण
- *सीमा-अवस्था परिसर भंगुरता:* सीमा अवस्थाओं के सातत्य पर प्रायिकता पृष्ठ।

[37] ये सामान्यीकरण बाँधों अथवा नाभिकीय संयन्त्रों जैसे जटिल तन्त्रों के लिए विशेष रूप से प्रासंगिक हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका 72.3: सतत बनाम विविक्त भंगुरता निरूपणों की तुलना

विशेषता	भंगुरता वक्र (सतत)	क्षति प्रायिकता आव्यूह (विविक्त)
निरूपण	चिकना फलन (जैसे, लघुगणक-सामान्य CDF)	विविक्त IM स्तरों पर प्रायिकताओं की तालिका
आँकड़ा विभेदन	प्रान्त के भीतर अनन्त	प्रतिचयित बिन्दुओं तक सीमित
प्रयोज्यता	विश्लेषणात्मक ढाँचों के लिए सर्वोत्तम	परिदृश्य-आधारित आकलनों के लिए उपयोगी
भण्डारण प्रारूप	फलन प्राचल (जैसे, μ, β)	मानों का आव्यूह
निर्वचन	फलनीय	सारणीबद्ध



(a) दो IM प्राचल (b) IM + बाह्य प्राचल (c) IM + LS परिवर्तन

चित्र 72.6: भूकम्पीय भंगुरता पृष्ठों के विभिन्न पक्ष

72.3 PBEE ढाँचे में भूमिका

[38] निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) के सन्दर्भ में भंगुरता फलन प्रतिबन्धित सम्बन्धों की शृंखला में आवश्यक कड़ियों का कार्य करते हैं, जो भू-कम्पन से संरचनात्मक अनुक्रिया, क्षति और अन्ततः आर्थिक हानि अथवा जनहानि जैसे निर्णय मापकों तक chap:trustregion के प्रवाह का परिमाण निर्धारित करती है।

[39] इस प्रायिकता प्रगति, चित्र 72.3, को PEER PBEE ढाँचे में औपचारिक रूप दिया गया है, जो सम्पूर्ण प्रायिकता प्रमेय का उपयोग करके किसी दिए गए निर्णय चर (DV) के अतिक्रमण की माध्य वार्षिक आवृत्ति की गणना करता है। मूल सूत्रीकरण किसी निर्दिष्ट DV सीमा के अतिक्रमण की दर प्राप्त करने हेतु तीव्रता मापकों (IM), अभियांत्रिकी माँग प्राचलों (EDP) और क्षति मापकों (DM) पर समाकलन करता है:

$$\lambda_{\mathrm{DV}}(dv) = \int_{dm}\int_{edp}\int_{im} P[\mathrm{DV} \geq dv \mid \mathrm{DM} = dm] \times dP[\mathrm{DM} \geq dm \mid \mathrm{EDP} = edp]\, dP[\mathrm{EDP} \geq edp \mid \mathrm{IM} = im]\, |\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{IM}}(im)|$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[40] इस सूत्रीकरण में भंगुरता संरचनात्मक अनुक्रिया और परिणामी क्षति अथवा हानि के बीच प्रमुख कड़ी है। पद $P[\text{EDP} \geq edp \mid \text{IM} = im]$—जिसे कभी-कभी माँग भंगुरता कहा जाता है (Mackie and Stojadinovic, 2005)—उस प्रायिकता का परिमाण निर्धारित करता है कि भूकम्पीय तीव्रता के किसी दिए गए स्तर के लिए संरचनात्मक माँग निर्दिष्ट सीमा को पार करती है। यह संरचनात्मक गतिकी में भंगुरता के पारम्परिक उपयोग को दर्शाता है।

[41] तथापि PEER PBEE ढाँचे के भीतर भंगुरता को अधिक संकीर्ण रूप से, ज्ञात संरचनात्मक अनुक्रिया के दिए होने पर किसी विशिष्ट क्षति मापक के अतिक्रमण की प्रतिबन्धित प्रायिकता के रूप में परिभाषित किया जाता है:

$$\text{Fragility} = P[\text{DM} \geq dm \mid \text{EDP} = edp]$$

यह परिभाषा भौतिक अनुक्रिया से क्षति अवस्था तक के परिवर्तन को ग्रहण करती है और PBEE कार्यविधि में एक प्रमुख प्रायिकता चरण निरूपित करती है (Porter, Kennedy, and Bachman, 2007; Gunay and Mosalam, 2013)। विशेष रूप से, क्रमिक और समकालिक क्षति-अवस्था प्रायिकताओं का वर्णन करने वाले दोनों समीकरणों 72.2 और 72.3 को इस भंगुरता व्यंजक के रूप में पुनःसूत्रित किया जा सकता है।

[42] समग्रतः भंगुरता फलन भूकम्पीय संकट को क्रियाशील निष्पादन मापकों में रूपान्तरित करने की PBEE प्रक्रिया का मेरुदण्ड हैं।

72.4 उदाहरण 72.1: सम्पूर्ण PBEE उदाहरण

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

यह उदाहरण निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) का एक संख्यात्मक उदाहरण प्रस्तुत करता है, जिसमें सभी चार प्रमुख घटक सम्मिलित हैं:

- *भूकम्पीय संकट विश्लेषण* - भू-कम्पन अतिक्रमण प्रायिकताओं का आकलन।
- *संरचनात्मक विश्लेषण* - भूकम्पीय भारों के अधीन संरचनात्मक अनुक्रिया की गणना।
- *क्षति विश्लेषण* - अनुक्रिया के आधार पर भौतिक क्षति का मूल्यांकन।
- *हानि विश्लेषण* - आर्थिक हानियों, कार्यबंदी अवधि और जनहानि का आकलन।

इस अध्ययन में निम्न धारणाएँ की गई हैं:

- स्थल लॉस एंजेलिस के नगर-केन्द्र में स्थित है।
- भवन तीन-तलीय इस्पात आघूर्ण ढाँचा है।
- भवन का मूल आवर्तकाल $T_1 = 1.2$ सेकण्ड है।
- भू-कम्पन तीव्रता वर्णक्रमीय त्वरण $S_a(T_1)$ में मापी जाती है।
- अभियांत्रिकी माँग प्राचल (EDP) अधिकतम अन्तरतलीय अपवाह अनुपात θ है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भूकम्पीय संकट विश्लेषण

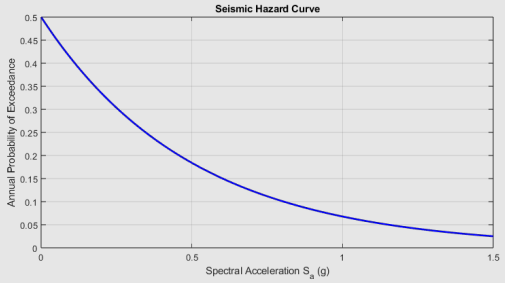
वर्णक्रमीय त्वरण S_a के अतिक्रमण की प्रायिकता को इस प्रकार प्रतिरूपित किया गया है:

$$\lambda(S_a) = Ae^{-BS_a}$$

जहाँ स्थल-विशिष्ट प्राचल हैं:

- $A = 0.5$ (मापन गुणक)
- $B = 2.0$ (क्षय दर)

इस प्रतिरूप पर आधारित गणित संकट वक्र नीचे दिया गया है।



संरचनात्मक विश्लेषण: IDA वक्र

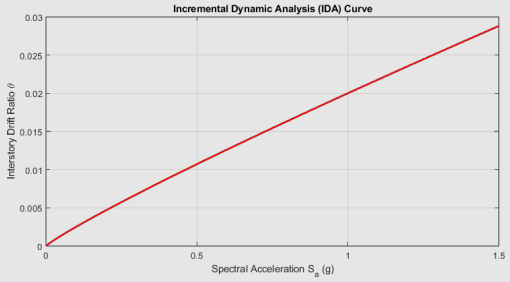
संरचनात्मक अनुक्रिया का अभिलक्षण अन्तरतलीय अपवाह अनुपात θ से किया जाता है, जिसका सन्निकटन है:

$$\theta = C_1 S_a^{C_2}$$

जहाँ अनुभवजन्य नियतांक हैं:

- $C_1 = 0.02$
- $C_2 = 0.9$

यह सम्बन्ध वृद्धिशील गतिक विश्लेषण (IDA) से व्युत्पन्न है।



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

क्षति विश्लेषण: भंगुरता वक्र

भंगुरता वक्र अपवाह अनुपात θ के आधार पर विभिन्न क्षति अवस्थाओं के अतिक्रमण की प्रायिकता परिभाषित करते हैं:

$$P(D_i|\theta) = \Phi\left(\frac{\ln(\theta) - \ln(\theta_{50})}{\beta}\right)$$

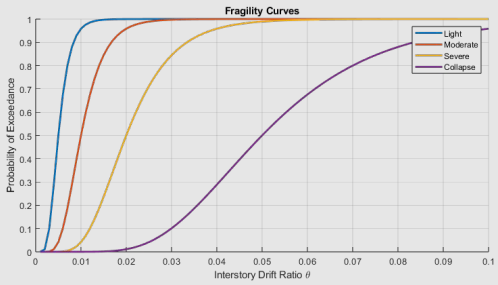
जहाँ:

- θ_{50} माध्यिका अपवाह क्षमता है।
- $\beta = 0.4$ परिक्षेपण (chap:trustregion गुणक) निरूपित करता है।

विचार की गई चार क्षति अवस्थाएँ हैं:

क्षति अवस्था	माध्यिका अपवाह अनुपात θ_{50}	परिक्षेपण β
अल्प क्षति	0.005 (0.5%)	0.4
मध्यम क्षति	0.01 (1.0%)	0.4
गम्भीर क्षति	0.02 (2.0%)	0.4
पतन	0.05 (5.0%)	0.4

भंगुरता वक्र नीचे दर्शाए गए हैं।



हानि आकलन

प्रत्याशित हानि की गणना इस प्रकार की जाती है:

$$\mathbb{E}[\text{Loss}] = \sum P(D_i) \times \text{Loss}_i$$

जहाँ क्षति प्रायिकताएँ और हानि परिणाम हैं:

क्षति अवस्था	मरम्मत लागत ($M)	कार्यबंदी अवधि (दिन)	जनहानि (%)
अल्प	0.1	2	0.0
मध्यम	0.5	14	0.01
गम्भीर	2.0	60	0.1
पतन	10.0	300	5.0

गणित क्षति प्रायिकताओं का उपयोग करते हुए:

- प्रत्याशित मरम्मत लागत: $0.59M।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- प्रत्याशित कार्यबंदी अवधि: 10.4 दिन।
- प्रत्याशित जनहानि: 0.01%।

हानि आकलन

प्रत्याशित हानि की गणना इस प्रकार की जाती है:

$$\mathbb{E}[\text{Loss}] = \sum P(D_i) \times \text{Loss}_i$$

प्रत्येक प्रतिदर्श को हानि निर्दिष्ट करने हेतु विभिन्न क्षति अवस्थाओं के अतिक्रमण की प्रायिकता का उपयोग किया गया। गणनाओं में यादृच्छिकता प्रस्तुत करने के लिए प्रत्येक क्षति अवस्था के प्रायिकता वितरणों का उपयोग किया गया।

क्षति अवस्थाएँ और सम्बद्ध प्रायिकताएँ निम्न प्रकार परिभाषित की गईं:

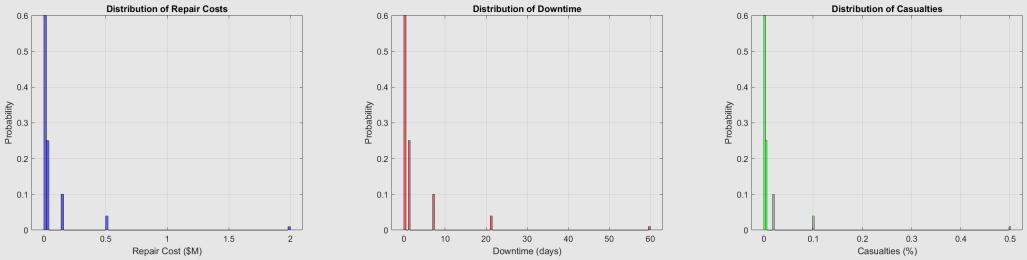
क्षति अवस्था	प्रायिकता	निर्दिष्ट हानियाँ
अल्प क्षति	90%	मरम्मत लागत: $0.1M, कार्यबंदी अवधि: 2 दिन, जनहानि: 0.0%
मध्यम क्षति	60%	मरम्मत लागत: $0.5M, कार्यबंदी अवधि: 14 दिन, जनहानि: 0.01%
गम्भीर क्षति	10%	मरम्मत लागत: $2.0M, कार्यबंदी अवधि: 60 दिन, जनहानि: 0.1%
पतन	0%	मरम्मत लागत: $10.0M, कार्यबंदी अवधि: 300 दिन, जनहानि: 5.0%

परिवर्तनशीलता प्रस्तुत करने के लिए हानियों पर सामान्य वितरण लागू किए गए, जिनके मानक विचलन माध्य मानों के 10% नियत किए गए।

अनुकरण से प्राप्त प्रत्याशित मान नीचे सारांशित हैं।

मापक	प्रत्याशित मान (माध्य)	मानक विचलन
प्रत्याशित मरम्मत लागत	$1.08M	$0.25M
प्रत्याशित कार्यबंदी अवधि	30.76 दिन	8.5 दिन
प्रत्याशित जनहानि	0.48%	0.12%

निम्न आयतचित्र मोंटे कार्लो अनुकरण से प्राप्त मरम्मत लागत और कार्यबंदी अवधि के वितरण दर्शाते हैं।



जहाँ क्षति प्रायिकताएँ और हानि परिणाम नीचे दिए गए हैं।

क्षति अवस्था	मरम्मत लागत ($M)	कार्यबंदी अवधि (दिन)	जनहानि (%)
अल्प	0.1	2	0.0
मध्यम	0.5	14	0.01
गम्भीर	2.0	60	0.1
पतन	10.0	300	5.0

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रेक्षण

PBEE हानि विश्लेषण में मानक विचलन का माध्य से अधिक होना पूर्णतः सम्भव है। यह हानि आकलन में प्रायिकता प्रतिरूपण की प्रकृति से सम्बद्ध अनेक कारणों से होता है।

दक्षिण-विषम वितरण: PBEE में हानि वितरण प्रायः लघुगणक-सामान्य अथवा परेटो वितरण जैसे दीर्घ-पुच्छ, दक्षिण-विषम वितरणों का अनुसरण करते हैं। ये वितरण माध्य के सापेक्ष बड़ा प्रसरण प्रदर्शित कर सकते हैं।

अरैखिक संरचनात्मक अनुक्रियाएँ: भू-कम्पन विशेषताओं, संरचनात्मक अनुक्रिया और भंगुरता फलनों में chap:trustregion के कारण क्षति और हानि प्रतिरूप प्रायः उच्च परिवर्तनशीलता प्रदर्शित करते हैं। विरल किन्तु चरम हानियों की उपस्थिति मानक विचलन को उल्लेखनीय रूप से बढ़ा सकती है।

लागत प्रतिरूपों में गुणात्मक chap:trustregion: हानि आकलन में प्रयुक्त मरम्मत लागत प्रतिरूप प्रायः मरम्मत समय, श्रम लागत, सामग्री लागत और अप्रत्यक्ष आर्थिक हानि सहित अनेक अनिश्चितताओं को संयोजित करते हैं। जब इन्हें गुणात्मक यादृच्छिकता (जैसे, लघुगणक-सामान्य वितरणों का उपयोग करके) के साथ प्रतिरूपित किया जाता है, तब विचरण गुणांक (COV) बड़ा हो सकता है।

मोंटे कार्लो अनुकरण और दीर्घ-पुच्छ व्यवहार: जब हानि आकलन के लिए मोंटे कार्लो प्रतिचयन का उपयोग किया जाता है, तब चरम प्रत्यक्षीकरण (जैसे, विनाशकारी हानि उत्पन्न करने वाला पूर्ण संरचनात्मक पतन) माध्य के सापेक्ष मानक विचलन को बढ़ा सकते हैं।

μ_X और σ_X प्राचलों वाले लघुगणक-सामान्य वितरण के लिए माध्य और मानक विचलन इस प्रकार दिए जाते हैं:

$$E[X] = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}$$
$$\mathrm{Std}(X) = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}\sqrt{e^{\sigma_X^2} - 1}$$

मानक विचलन माध्य से अधिक होता है जब:

$$\sqrt{e^{\sigma_X^2} - 1} > 1 \tag{72.4}$$

जिसका सरलीकृत रूप है:

$$\sigma_X^2 > \ln(2) \approx 0.693 \tag{72.5}$$

PBEE में क्षति और लागत प्रतिरूपों का chap:trustregion प्रायः σ_X^2 को 1 से अधिक करता है, जिससे $\sigma > \mu$ सामान्य घटना बन जाती है।

इस उदाहरण का MATLAB®कूट §I.7.2 में दिया गया है।

72.5 ऐतिहासिक मील-पत्थर और आधारभूत प्रलेख

[43] निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) का विकास FEMA, ASCE, PEER और ATC के आधारभूत प्रलेखों की एक शृंखला से आकार ग्रहण करता रहा है। इन कृतियों ने ऐसी प्रमुख संकल्पनाएँ और कार्यविधियाँ प्रस्तुत कीं जो अब आधुनिक भूकम्पीय जोखिम आकलन और अभिकल्प का मेरुदण्ड हैं, तालिका 72.4।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- *ATC-13 (1985)* — भवन प्रकारों के लिए आरम्भिक विशेषज्ञ-आधारित भंगुरता और हानि आकलन प्रदान किए तथा सुभेद्यता विश्लेषण की आधारशिला रखी (ATC-13, 1985)।
- *FEMA 273/274 (1997)* — प्रायिकता संकट स्तरों और तात्कालिक अधिभोग, जीवन सुरक्षा तथा पतन निवारण जैसे निष्पादन स्तरों से जुड़े निष्पादन उद्देश्य प्रस्तुत किए (FEMA, 1997b; FEMA, 1997a)।
- *FEMA 356 (2000)* — FEMA 273/274 को अभियन्ता-अनुकूल प्रारूप में संश्लेषित करने वाला पूर्वमानक, जो बाद में ASCE 41 का आधार बना (FEMA-356, 2000)।
- *PEER ढाँचा (2003)* — Pacific Earthquake Engineering Research Center ने IM–EDP–DM–DV शृंखला और प्रायिकता समाकलन प्रस्तुत करते हुए PBEE-2 कार्यविधि को औपचारिक रूप दिया (Porter, 2003; Center, 2010)।
- *FEMA P-58 (2012–2021)* — कार्यशीलता, कार्यबंदी अवधि और हानि आकलन सहित अलग-अलग भवनों के निष्पादन आकलन हेतु व्यापक प्रायिकता ढाँचा प्रदान किया (FEMA, 2012)।
- *ASCE 7 और ASCE 41* — निष्पादन-आधारित अभिकल्प और मूल्यांकन को मुख्यधारा की संरचनात्मक अभियांत्रिकी संहिताओं में समाहित किया (Civil Engineers, 2022; American Society of Civil Engineers, 2017)।

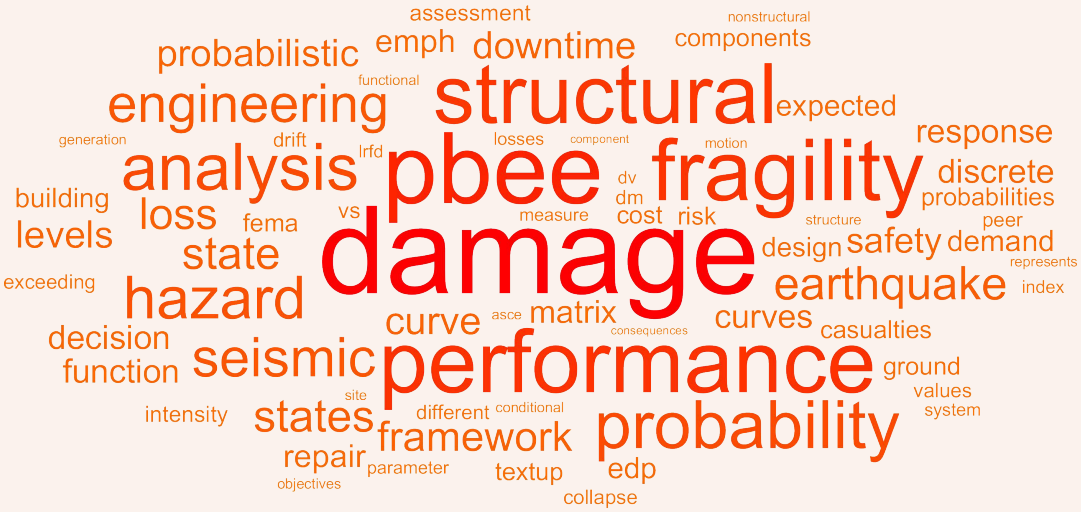
[44] इन प्रलेखों ने भंगुरता-आधारित हानि प्रतिरूपण और समय-आधारित निष्पादन मापकों जैसी विकसित होती कार्यविधियों के साथ PBEE को भूकम्पीय जोखिम-सूचित अभियांत्रिकी के प्रचलित व्यवहार के रूप में स्थापित किया है।

तालिका 72.4: निष्पादन-आधारित भूकम्प अभियांत्रिकी (PBEE) के ऐतिहासिक विकास के प्रमुख प्रलेख।

वर्ष	प्रलेख	अभिकरण	प्रमुख योगदान
1985	ATC-13	ATC	विशेषज्ञ-आधारित भंगुरता और हानि आकलन
1997	FEMA 273/274	FEMA	संकट स्तरों और क्षति अवस्थाओं से जुड़े निष्पादन उद्देश्य
2000	FEMA 356	FEMA	विद्यमान भवनों हेतु ASCE 41 की ओर ले जाने वाला पूर्वमानक
2003	PEER ढाँचा	PEER	IM–EDP–DM–DV शृंखला; प्रायिकता निष्पादन प्रतिरूपण
2012–21	FEMA P-58	FEMA	प्रायिकता भवन-विशिष्ट हानि, कार्यबंदी अवधि और कार्यशीलता
2022	ASCE 7	ASCE	निष्पादन-आधारित प्रावधानों सहित आधुनिक भारण मानक
2023	ASCE 41	ASCE	विद्यमान भवनों का अद्यतन भूकम्पीय मूल्यांकन

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिशिष्ट

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

A इकाइयाँ

A.1 SI इकाइयाँ 2352
A.2 मेट्रिक उपसर्ग और गुणक 2353
A.3 इकाइयाँ और रूपांतरण गुणक 2353
A.4 विभिन्न मेट्रिक इकाइयों में बल, लंबाई, कार्य और प्रतिबल का सारांश 2354
A.5 भौतिक राशियों का मेट्रिक से इम्पीरियल इकाइयों में रूपांतरण 2354

A.1 SI इकाइयाँ

राशि	विमाएँ		इकाइयाँ
	तकनीकी	मूल इकाइयाँ	परिभाषा
लंबाई	L	L	m
समय	t	t	s
द्रव्यमान	M	M	Kg
तापमान	T	T	K
द्रव्यमान घनत्व (ρ)	$M.L^{-3}$	$M.L^{-3}$	Kgm^{-3}
बल (F)	F	$M.L.t^{-2}$	N
प्रतिबल	F.L−2	$M.L^{-3}.t^{-2}$	MPa

प्रति प्रकाशन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

A.2 मेट्रिक उपसर्ग और गुणक

उपसर्ग	संक्षिप्त रूप	गुणक
टेरा	T	10^{12}
गीगा	G	10^{9}
मेगा	M	10^{6}
किलो	k	10^{3}
हेक्टो	h	10^{2}
डेका	da	10
डेसी	d	10^{-1}
सेंटी	c	10^{-2}
मिली	m	10^{-3}
माइक्रो	μ	10^{-6}
नैनो	n	10^{-9}
पिको	p	10^{-12}

A.3 इकाइयाँ और रूपांतरण गुणक

लंबाई	m (मीटर)	1 inch = 0.0254 m	1 m = 39.37 inch
बल	N (न्यूटन)	1 lb = 4.4482 N	1 N = 0.22481 lb
द्रव्यमान	Kg (किलोग्राम)	1 lbm = 0.45359 Kg	1 Kg=2.2046 lb
घनत्व	Kg/m^3	1 lbm/ft^3 = 16.018 Kg/m^3	1 Kg/m^3=0.062428 lbm/ft^3
तापमान	T	T $^oF=[(9/5)T^oC+32]$	
त्वरण	m/s^2	1 in/s^2 = 0.0254 m/s^2	
दृढता	N/m	1 lb/in = 175.1 N/m	
प्रतिबल	Pa = N/m^2	1 psi = 6,894.8 Pa	1 MPa = 145.04 psi
कार्य	J=N-m=	1 ft-lbf= 1.3558 J	1 J = 0.73756 ft- lbf

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

A.4 विभिन्न मेट्रिक इकाइयों में बल, लंबाई, कार्य और प्रतिबल का सारांश

बल	लंबाई	कार्य	प्रतिबल
F	**L**	**FL**	**FL-2**
N	m	J	Pa
	mm	mJ	MPa
kN	m	kJ	kPa
	mm	J	GPa
MN	m	MJ	MPa
	mm	kJ	TPa
Pa	m	N	
MPa	mm	N	
	m	MN	

A.5 भौतिक राशियों का मेट्रिक से इम्पीरियल इकाइयों में रूपांतरण

f'_c			f'_t		E	
psi	**kg/cm^2**	**Mpa**	**psi**	**Mpa**	**ksi**	**Gpa**
2,000	141	13.8	200	1.38	2,500	17.2
2,500	176	17.2	250	1.72	3,000	20.7
3,000	211	20.7	300	2.07	3,500	24.1
3,500	246	24.1	350	2.41	4,000	27.6
4,000	281	27.6	400	2.76	4,500	31.0
4,500	316	31.0	450	3.10	5,000	34.5
5,000	352	34.5	500	3.45	5,500	37.9
5,500	387	37.9	550	3.79	6,000	41.4
6,000	422	41.4	600	4.14	6,500	44.8
6,500	457	44.8	650	4.48	7,000	48.3

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

B भार: अनुभवजन्य-आधारित अभिकल्प

इस अध्याय से पूर्व अध्याय 18 पढना चाहिए।

सारांश

यह परिशिष्ट संरचनात्मक भारों के लिए अनुभवजन्य आँकडे और अभिकल्प मार्गदर्शन प्रदान करता है तथा संरचनात्मक विश्लेषण और अभिकल्प संबंधी मुख्य अध्यायों का पूरक है। भार-वर्गों—स्थायी भार (स्वभार), चल भार (अधिभोग और उपयोग), पर्यावरणीय भार (पवन, हिम और भूकंप) तथा विशेष भार—के अनुसार व्यवस्थित यह परिशिष्ट पदार्थों के इकाई भार, सामान्य तल और छत भार तथा विभिन्न भवन-प्रकारों और अधिभोगों के लिए भार गुणक सारणीबद्ध करता है। संदर्भ सारणियाँ ऐलुमिनियम, ईंट, कंक्रीट, इस्पात और काष्ठ के व्यावहारिक मान; सामान्य तल-प्रणालियों और छत-निर्माणों के विनिर्देश; तथा चरम और सेवायोग्यता सीमा अवस्थाओं के लिए भार-संयोजनों पर मार्गदर्शन देती हैं। ये अनुभवजन्य आँकडे और गुणांक पूरे ग्रंथ में प्रयुक्त अभिकल्प गणनाओं और भार-स्थितियों का आधार प्रदान करते हैं।

B.1 स्थायी भार 2355
B.2 पवन भार 2355
B.2.1 उदाहरण B.1: पवन भार 2357
B.3 भूकंप 2359
B.3.1 उदाहरण B.2: फ्रेम पर भूकंप भार 2367
B.3.2 उदाहरण B.3: ऊँचे भवन पर भूकंप भार 2368
B.4 सेतु भार 2369
B.5 भार संयोजन 2369
B.6 चल भार न्यूनीकरण 2371
B.6.1 उदाहरण B.4: चल भार न्यूनीकरण I 2372
B.6.2 उदाहरण B.5: चल भार न्यूनीकरण II 2373
B.7 भार स्थान-निर्धारण 2373

B.1 स्थायी भार

पदार्थ	$\mathrm{lb/ft^3}$	$\mathrm{kN/m^3}$
ऐलुमिनियम	173	27.2
ईंट	120	18.9
कंक्रीट	145	33.8
इस्पात	490	77.0
काष्ठ (पाइन)	40	6.3

तालिका B.1: पदार्थों के इकाई भार

B.2 पवन भार

[1] पहले §18.2.2.1 देखें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

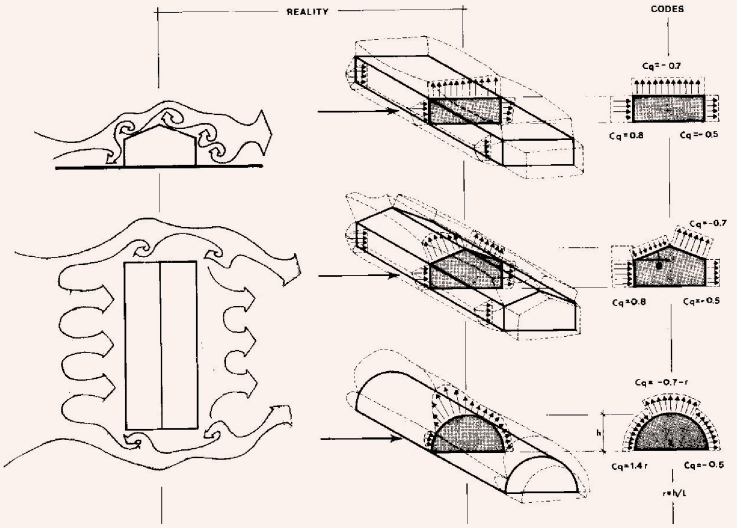
पदार्थ	$\mathrm{lb/ft^2}$
काष्ठ	40-50
इस्पात	50-80
प्रबलित कंक्रीट	100-150

तालिका B.2: भवनों में औसत सकल स्थायी भार

2 तूफानों के समय पवन वेग 150 मील प्रति घंटा अथवा उससे अधिक तक पहुँच सकता है। यह लगभग 60 psf के गतिक दाब q_s के अनुरूप है (जो भवनों में औसत ऊर्ध्वाधर अधिभोग भार जितना अधिक है)।

3 पवन दाब ऊँचाई के साथ बढ़ता है, सारणी B.5।

4 पवन भार अनुवात पक्षों पर चूषण उत्पन्न करेगा, चित्र B.1।



चित्र B.1: संरचनाओं पर पवन भार का प्रभाव (Schueller, 1996)

5 भवन के आकार और परिवेश को ग्रहण करने के लिए इस परिमाण को संशोधित करना आवश्यक है। अतः अभिकल्प दाब p (psf) निम्न है

$$p = C_e C_q I q_s$$

दाब को सभी भित्तियों और छतों के अभिलंब माना जाता है और

C_e **वेग-दाब गुणांक** ऊँचाई, अनावरण और झोंका गुणक को ग्रहण करता है। यह इस तथ्य को ग्रहण करता है कि पवन वेग ऊँचाई के साथ बढ़ता है और वायु-प्रवाह गतिक प्रकृति का है (अर्थात पवन दाब स्थिर नहीं है), सारणी B.6।

C_q **दाब गुणांक** एक आकार गुणक है, जो गैबल ढाँचों के लिए सारणी B.7 में दिया गया है।

I **महत्त्व गुणक** सारणी B.8 के अनुसार। जहाँ

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I आवश्यक सुविधाएँ: अस्पताल; अग्निशमन और पुलिस केंद्र; टंकियाँ; आपात वाहन आश्रय; आरक्षित विद्युत-उत्पादन उपकरण; सरकारी संचार केंद्रों की संरचनाएँ और उपकरण।

II संकटकारी सुविधाएँ: विषैले अथवा विस्फोटक पदार्थों की इतनी मात्रा को आश्रय, आलंब अथवा धारण करने वाली संरचनाएँ कि उनके मुक्त होने पर सामान्य जन की सुरक्षा संकट में पड़ जाए।

III विशेष अधिभोग संरचनाएँ: ऐसी आवृत संरचनाएँ जिनका प्राथमिक अधिभोग सार्वजनिक सभा हो और क्षमता > 300 व्यक्ति हो।
माध्यमिक स्तर तक के विद्यालयों अथवा शिशु-दिवस केंद्रों के भवन, क्षमता > 250 व्यक्ति।
महाविद्यालयों अथवा प्रौढ़ शिक्षा विद्यालयों के भवन, क्षमता > 500 व्यक्ति।
50 अथवा अधिक निवासी अशक्त रोगियों वाली चिकित्सीय सुविधाएँ, जो ऊपर सम्मिलित न हों।
कारागार और निरोध सुविधाएँ।
अधिभोग >5,000 व्यक्ति वाली सभी संरचनाएँ।
विद्युत-उत्पादन केंद्रों और ऊपर असम्मिलित अन्य सार्वजनिक उपयोगिता सुविधाओं की वे संरचनाएँ तथा उपकरण, जो निरंतर प्रचालन के लिए आवश्यक हों।

IV मानक अधिभोग संरचनाएँ: वे सभी संरचनाएँ जिनके अधिभोग अथवा कार्य ऊपर सूचीबद्ध नहीं हैं।

[6] सामान्य भवनों के प्रारंभिक अभिकल्प के लिए $C_e = 1.0$ और $C_q = 1.3$ माना जा सकता है, जिससे

$$p = (1.3).020256V^2 = .00333V^2 \tag{B.1}$$

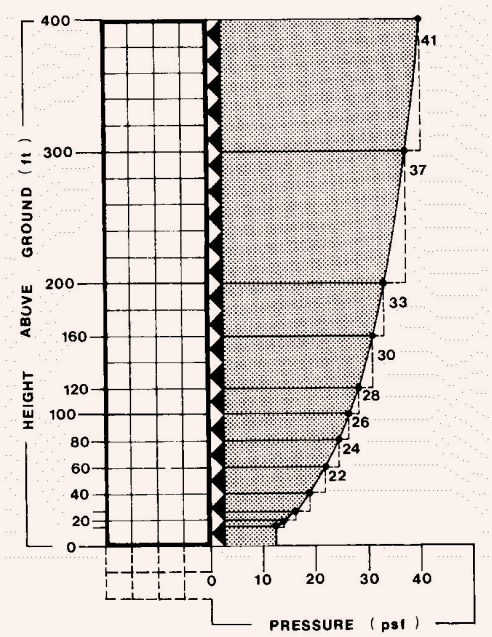
जो 80 mph पवन वेग के लिए 21 psf दाब के अनुरूप है, चित्र B.2, सारणी B.9।

B.2.1 उदाहरण B.1: पवन भार

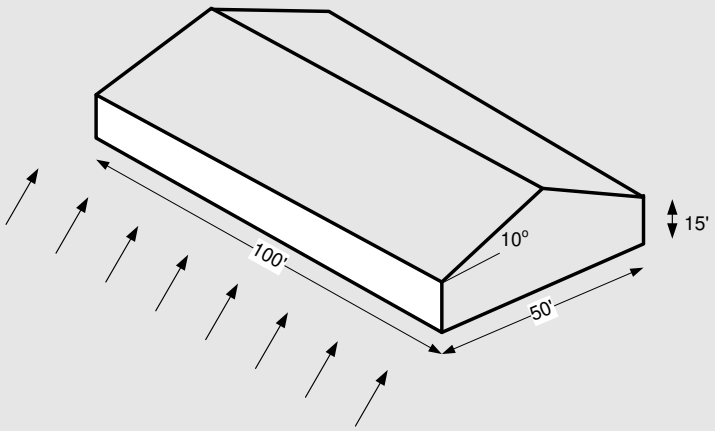
नीचे दर्शाए गए उस भवन पर पवन बल निर्धारित करें, जो सेंट लुई में निर्मित है और वृक्षों से घिरा है।

1. चित्र 18.3 से सेंट लुई में अधिकतम पवन वेग 70 mph है। क्योंकि भवन संरक्षित है, हम $C_e = 0.7$, $I = 1.$ ले सकते हैं। मूल पवन दाब $q_s = 0.00256 \times (70)^2 = 12.54$ psf है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र B.2: सामान्य पवन-बल प्रतिरोधी भवन संरचनाओं के लिए सन्निकट अभिकल्प पवन-दाब p



2. छत की ढाल 8:15=6.4:12 है, जिससे वाताभिमुख और अनुवात दोनों पक्षों के लिए $C_q = -0.7$ मिलता है। ऊर्ध्वाधर भित्तियों के लिए वाताभिमुख पक्ष पर $C_q = 0.8$ और अनुवात पक्ष पर $C_q = -0.5$ है।
3. अतः छत पर अनुप्रयुक्त दाब है $p = 0.7 \times (-0.7) \times 12.54 =$ -6.14 psf अर्थात छत पर उत्थान कार्य करता है।
4. वाताभिमुख भित्ति पर दाब $0.7 \times 0.8 \times 12.54 =$7.02 psf है और अनुवात भित्ति पर $0.7 \times (-0.5) \times 12.54 =$-4.39 psf (चूषण) है।
5. पवन की दिशा बदल सकती है; अतः प्रत्येक संरचनात्मक घटक को सभी संभावित भार-संयोजनों का प्रतिरोध करने के लिए अभिकल्पित किया जाना चाहिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6. बड़े पवन भारों के अधीन हो सकने वाली विशाल संरचनाओं के लिए स्वयं संरचना और उसके परिवेश का पवन-सुरंग परीक्षण प्रायः किया जाता है।

B.3 भूकंप

7 भवनों को निम्न का प्रतिरोध करने में सक्षम होना चाहिए:

लघु भूकंप बिना क्षति के,

मध्यम भूकंप बिना संरचनात्मक क्षति के, किंतु संभवतः कुछ गैर-संरचनात्मक क्षति सहित,

प्रबल भूकंप बिना ढहे, किंतु संभवतः कुछ संरचनात्मक और गैर-संरचनात्मक क्षति सहित।

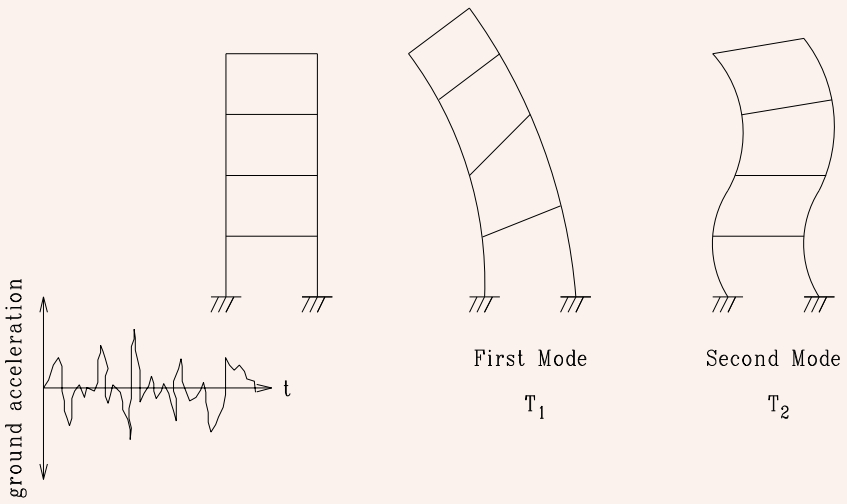
यह उपयुक्त गतिक विश्लेषण द्वारा प्राप्त किया जाता है।

8 प्रारंभिक अभिकल्पों अथवा छोटी संरचनाओं के लिए एक *समतुल्य क्षैतिज स्थैतिक भार* निर्धारित किया जा सकता है।

9 वास्तविक भार निम्न पर निर्भर करते हैं:

1. भूमि-त्वरण की तीव्रता (मृदा/शैल गुणों सहित)।
2. भवन के गतिक गुण, जैसे उसके विधा-आकार, कंपन-अवधियाँ और अवमंदन अभिलक्षण।
3. भवन का द्रव्यमान।

10 संरचना की गतिक अनुक्रिया में एक निर्णायक गुणक उसके कंपन की मूल अवधि (अथवा प्रथम कंपन-विधा) है। यह गति के एक पूर्ण चक्र के लिए आवश्यक समय है, चित्र B.3। यदि भूकंपीय उत्तेजना की आवृत्ति भवन की आवृत्ति के निकट हो, तो अनुनाद हो सकता है। इससे बचना चाहिए।



चित्र B.3: भवन के कंपन

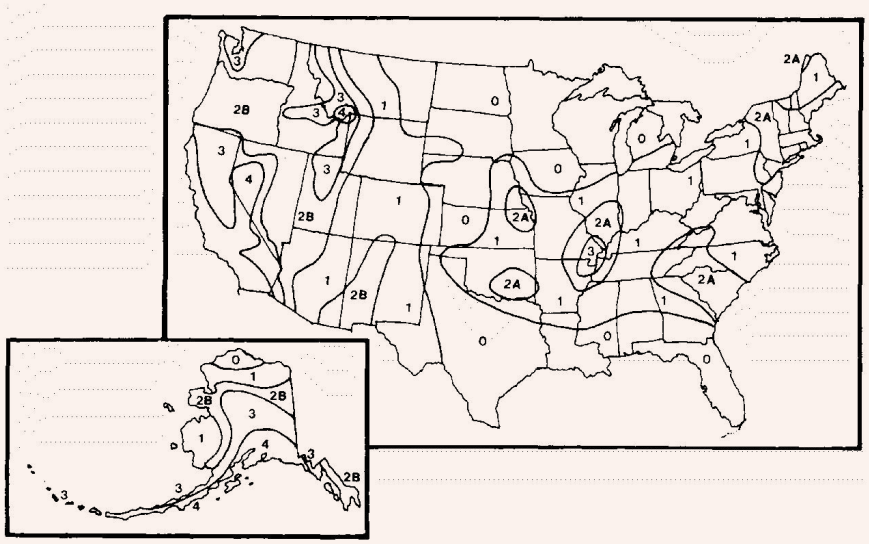
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भूकंप भार (मुख्यतः) क्षैतिज जड़त्व बल ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) के कारण क्षैतिज बल के रूप में प्रकट होता है। प्रत्येक स्तर पर क्षैतिज बल की गणना आधार अपरूपण बल V के अंश के रूप में की जाती है

$$V = \frac{ZIC}{R_W} W$$

जहाँ:

Z: **क्षेत्र गुणक:** चित्र B.4 से निर्धारित किया जाना है और सारणी B.10 से।



चित्र B.4: संयुक्त राज्य के भूकंपीय क्षेत्र, (ICBO, 1994)

I: **महत्त्व गुणक:** जो सारणी B.8 में दिया गया है।

C: **अभिकल्प अनुक्रिया स्पेक्ट्रम** निम्न द्वारा दिया गया है

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} \leq 2.75$$

T सेकंड में भवन के कंपन की मूल अवधि है। इसे भवन के मुक्त कंपन विश्लेषण से निर्धारित किया जा सकता है अथवा निम्न अनुभवजन्य सूत्र से आकलित किया जा सकता है

$$T = C_t (h_n)^{3/4}$$

जहाँ:
h_n आधार के ऊपर भवन की ऊँचाई ft में है।
और

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

C_t 0.035 इस्पात आघूर्ण-प्रतिरोधी ढाँचे
C_t 0.030 प्रबलित कंक्रीट आघूर्ण-प्रतिरोधी ढाँचे और उत्केंद्रित बंधित ढाँचे S: **स्थल गु-**
C_t 0.020 अन्य सभी भवन

णांक सारणी B.11 द्वारा दिया गया है ध्यान दें कि सैन फ्रांसिस्को के 1990? के भूकंप में अधिकांश क्षति मरीना क्षेत्र में हुई, जहाँ अनेक घर कोमल मृदा पर बनाए गए थे।

और

$$\frac{C}{R_W} \geq 0.075$$

R_W तालिका B.12 में दिया गया है।

W **भार** संरचना का कुल भार।

13 क्षैतिज बल V को भवन की ऊँचाई में दो भागों में वितरित किया जाता है। पहला भाग (केवल यदि $T \geq 0.7$ sec. हो तो लगाया जाता है) एक संकेंद्रित बल F_1 है, जिसका मान

$$F_t = 0.07TV \leq 0.25V \tag{B.2}$$

होता है और आघात-प्रभाव के कारण भवन के शीर्ष पर लगाया जाता है। शेष बल $V - F_t$ को त्रिभुजाकार भार के रूप में वितरित किया जाता है, जो आधार पर घटकर शून्य हो जाता है।

14 प्रत्येक तल के स्तर पर तल-भार को नियत मानने पर, प्रत्येक तल पर कार्यरत बल निम्न प्रकार दिया जाता है

$$F_x = \frac{(V - F_t)h_x}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n} = \frac{(V - F_t)h_x}{\Sigma_{i=1}^{n} h_i} \tag{B.3}$$

जहाँ h_i और h_n क्रमशः आधार से स्तर i, n अथवा x तक ft में ऊँचाइयाँ हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पदार्थ	lb/ft^2
छतें	
चैनल-निलंबित प्रणाली	1
ध्वनिक तंतु टाइल	1
तल	
इस्पात डेक	2-10
सादा कंक्रीट, 1 in.	12
लिनोलियम, 1/4 in.	1
कठोर काष्ठ	4
छादन	
ताँबा अथवा टिन	1-5
5-परत फेल्ट और बजरी	6
डामर शिंगल	3
मृत्तिका टाइलें	9-14
काष्ठ आवरण	3
स्थान पर ढाली गई 1 in. ऊष्मारोधी परत	2
विभाजन	
मृत्तिका टाइल, 10 in.	40
जिप्सम ब्लॉक, 5 in.	14
काष्ठ स्टड 2x4 (12-16 in. o.c.)	2
सीमेंट पलस्तर, 1 in.	10
जिप्सम पलस्तर, 1 in.	5
भित्तियाँ	
ईंट, 12 in.	120
खोखला कंक्रीट ब्लॉक (भारी गिट्टी)	
4 in.	30
8 in.	55
12 in.	80
खोखला कंक्रीट ब्लॉक (हल्की गिट्टी)	
4 in.	21
8 in.	38
12 in.	55

तालिका B.3: भवन-पदार्थों के भार

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

उपयोग अथवा अधिभोग	lb/ft^2
सभा क्षेत्र	50
कॉरि्नस, मार्की और आवासीय बालकनियाँ	60
गलियारे और सीढ़ियाँ	100
गैराज	50
कार्यालय भवन	50
आवासीय	40
भंडारण	125-250

तालिका B.4: न्यूनतम समान रूप से वितरित चल भार, (ICBO, 1994)

ऊँचाई क्षेत्र	पवन-वेग मानचित्र क्षेत्र						
(फुट में)	20	25	30	35	40	45	50
<30	15	20	25	25	30	35	40
30 to 49	20	25	30	35	40	45	50
50 to 99	25	30	40	45	50	55	60
100 to 499	30	40	45	55	60	70	75
500 to 1199	35	45	55	60	70	80	90
>1,200	40	50	60	70	80	90	100

तालिका B.5: भूमि के ऊपर पवन वेग का परिवर्तन

C_e	अनावरण	
1.39-2.34	D	विशाल जलराशि की ओर मुख वाला खुला, समतल भूभाग
1.06-2.19	C	किसी पूर्ण चतुर्थांश में स्थल से आधा मील तक विस्तृत अथवा खुला समतल भूभाग
0.62-1.80	B	भवनों, वन अथवा 20 ft या अधिक ऊँची पृष्ठीय अनियमितताओं वाला भूभाग

तालिका B.6: पवन भार के लिए C_e गुणांक, (ICBO, 1994)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

		वाताभिमुख पक्ष	अनुवात पक्ष
गैबल ढाँचे (V:H)			
छत ढाल	<9:12	−0.7	−0.7
	9:12 to 12:12	0.4	−0.7
	>12:12	0.7	−0.7
भित्तियाँ		0.8	−0.5
भवन (ऊँचाई < 200 ft)			
ऊर्ध्वाधर प्रक्षेप	ऊँचाई < 40 ft	1.3	−1.3
	ऊँचाई > 40 ft	1.4	−1.4
क्षैतिज प्रक्षेप		−0.7	−0.7

तालिका B.7: पवन-दाब गुणांक C_q, (ICBO, 1994)

	अधिभोग वर्ग	महत्त्व गुणक I	
		भूकंप	पवन
I	आवश्यक सुविधाएँ	1.25	1.15
II	संकटकारी सुविधाएँ	1.25	1.15
III	विशेष अधिभोग संरचनाएँ	1.00	1.00
IV	मानक अधिभोग संरचनाएँ	1.00	1.00

तालिका B.8: पवन और भूकंप भार के महत्त्व गुणक, (ICBO, 1994)

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ऊँचाई भूमि से ऊपर (ft)	अनावरण			
	B		C	
	मूल पवन वेग (mph)			
	70	80	70	80
0-15	10	13	17	23
20	11	14	18	24
25	12	15	19	25
30	12	16	20	26
40	14	18	21	28
60	17	22	25	33
80	18	24	27	35
100	20	26	28	37
120	21	28	29	38
160	23	30	31	41
200	25	33	33	43
300	29	37	36	47
400	32	41	38	50

तालिका B.9: सामान्य पवन-बल प्रतिरोधी भवन संरचनाओं के लिए सन्निकट अभिकल्प पवन-दाब p

भूकंपीय क्षेत्र	0	1	2A	2B	3	4
Z	0	0.075	0.15	0.2	0.3	0.4

तालिका B.10: विभिन्न भूकंपीय क्षेत्रों के लिए Z गुणक, UBC1994

प्रकार	विवरण	S गुणक
S_1	शैल-सदृश पदार्थ अथवा 200 ft से कम दृढ/सघन मृदा वाला मृदा-परिच्छेद।	1.0
S_2	200 ft से अधिक सघन अथवा दृढ मृदा।	1.2
S_3	70 ft अथवा अधिक मृदा, जिसमें 20 ft से अधिक कोमल से मध्यम दृढ मृत्तिका हो, किंतु 40 ft से अधिक कोमल मृत्तिका न हो।	1.5
S_4	40 ft से अधिक कोमल मृत्तिका वाली मृदा।	2.0

तालिका B.11: भूकंप भारण के लिए S स्थल गुणांक, (ICBO, 1994)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

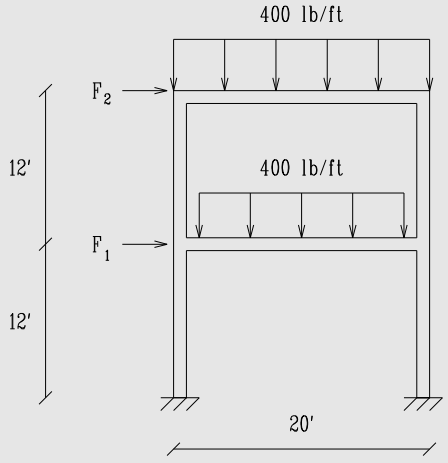
संरचनात्मक तंत्र	R_W	H (ft)
भारवाही भित्ति तंत्र		
अपरूपण पैनलों वाली हल्की फ्रेमयुक्त भित्तियाँ		
तीन मंजिल या उससे कम ऊँची संरचनाओं की प्लाइवुड भित्तियाँ	8	65
अन्य सभी हल्की फ्रेमयुक्त भित्तियाँ	6	65
अपरूपण भित्तियाँ		
कंक्रीट	8	240
चिनाई	8	160
भवन फ्रेम तंत्र जिसमें ट्रस या अपरूपण भित्तियाँ प्रयुक्त हों		
इस्पात उत्केंद्रित ब्रेसयुक्त तन्य फ्रेम	10	240
अपरूपण पैनलों वाली हल्की फ्रेमयुक्त भित्तियाँ		
तीन मंजिल या उससे कम ऊँची संरचनाओं की प्लाइवुड भित्तियाँ	9	65
अन्य सभी हल्की फ्रेमयुक्त भित्तियाँ	7	65
अपरूपण भित्तियाँ		
कंक्रीट	8	240
चिनाई	8	160
संकेंद्रित ब्रेसयुक्त फ्रेम		
इस्पात	8	160
कंक्रीट (केवल क्षेत्र I और 2 के लिए)	8	-
भारी काष्ठ	8	65
आघूर्ण-प्रतिरोधी फ्रेम तंत्र		
विशेष आघूर्ण-प्रतिरोधी फ्रेम (SMRF)		
इस्पात	12	N.L.
कंक्रीट	12	N.L.
कंक्रीट मध्यवर्ती आघूर्ण-प्रतिरोधी फ्रेम (IMRF)केवल क्षेत्र 1 और 2 के लिए	8	-
साधारण आघूर्ण-प्रतिरोधी फ्रेम (OMRF)		
इस्पात	6	160
कंक्रीट (केवल क्षेत्र 1 के लिए)	5	-
द्वैत तंत्र (चयनित स्थितियाँ केवल तन्य दृढ फ्रेमों के लिए हैं)		
अपरूपण भित्तियाँ		
SMRF सहित कंक्रीट	12	N.L.
SMRF सहित चिनाई	8	160
इस्पात उत्केंद्रित ब्रेसयुक्त तन्य फ्रेम	6-12	160-N.L.
संकेंद्रित ब्रेसयुक्त फ्रेम	12	N. L.
इस्पात SMRF सहित इस्पात	10	N.L.
इस्पात OMRF सहित इस्पात	6	160
कंक्रीट SMRF सहित कंक्रीट (केवल क्षेत्र 1 और 2 के लिए)	9	-

तालिका B.12: विभिन्न संरचनात्मक तंत्रों के लिए R_W की आंशिक सूची, (ICBO, 1994)

© 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

B.3.1 उदाहरण B.2: फ्रेम पर भूकंप भार

नीचे दर्शाई गई अस्पताल की तन्य फ्रेम संरचना के लिए सन्निकट भूकंप बल निर्धारित कीजिए। प्रत्येक तल के लिए DL 200 lb/ft और LL 400 lb/ft है। संरचना कोमल मृदा पर निर्मित है। प्रत्येक तल के भार के रूप में DL तथा 50%LL का योग उपयोग कीजिए। भवन क्षेत्र 3 में स्थित है।



1. कंपन का मूल आवर्तकाल है

$$T = C_t(h_n)^{3/4} = (0.030)(24)^{3/4} = 0.32 \text{ sec.} \tag{B.4}$$

2. C गुणांक है

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} = \frac{(1.25)(2.0)}{(0.32)^{2/3}} = 5.344 > 2.75 \tag{B.5}$$

   $C = 2.75$ का उपयोग करें।

3. अन्य गुणांक हैं: Z =0.3; I=1.25; R_W=12

4. जाँच

$$\frac{C}{R_W} = \frac{2.75}{12} = 0.23 > 0.075\checkmark \tag{B.6}$$

5. कुल ऊर्ध्वाधर भार है

$$W = 2\left((200 + 0.5(400)\right)(20) = 16000 \text{ lbs} \tag{B.7}$$

6. कुल भूकंपीय आधार अपरूपण है

$$V = \frac{ZIC}{R_W} = \frac{(0.3)(1.25)(2.75)}{12} = 0.086W \tag{B.8}$$

$$= (0.086)(16000) = 1375 \; lbs \tag{B.9}$$

7. चूँकि $T < 0.7$ sec. है, अतः कोई आघात-प्रभाव नहीं है।

8. इसलिए प्रत्येक तल पर भार निम्न प्रकार दिया जाता है

$$F_2 = \frac{(1375)(24)}{12+24} = 916.7 lbs \tag{B.10}$$

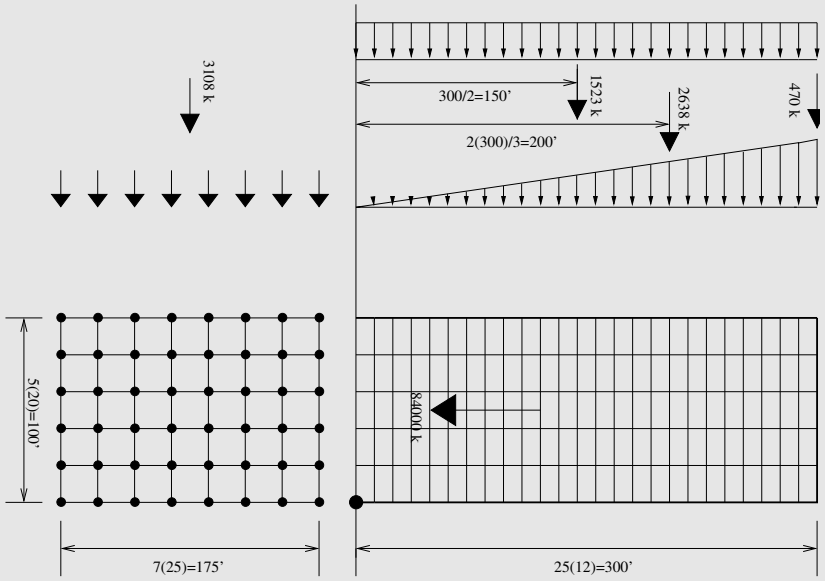
$$F_1 = \frac{(1375)(12)}{12+24} = 458.3 lbs \tag{B.11}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

B.3.2 उदाहरण B.3: ऊँचे भवन पर भूकंप भार

निम्नलिखित अंश Schueller, 1996 *The design of Building Structures* से पुनरुत्पादित है।

25 मंजिला तन्य, दृढ आकाशीय कंक्रीट फ्रेम संरचना के लघु दिशा में सन्निकट चरम पार्श्व भार निर्धारित कीजिए। अनुप्रस्थ दिशा में दृढ फ्रेमों के बीच की दूरी 25 ft तथा अनुदैर्ध्य दिशा में 20 ft है। भवन के तल-विन्यास का आयाम 175x100 ft है और संरचना की ऊँचाई 25(12)=300 ft है। यह कार्यालय भवन 70 mph पवन वेग वाले नगरीय परिवेश और भूकंपीय क्षेत्र 4 में स्थित है। इस अध्ययन के लिए भवन का औसत कुल स्थायी भार 192 psf लिया गया है। मृदा की दशाएँ अज्ञात हैं।



1. भवन का कुल भार है

$$W = (0.1926)\ \text{psf}(100 \times 175)\ \text{ft}^2 \times 25\ \text{storeys} = 84,000\ \text{k} \tag{B.12}$$

2. दृढ फ्रेम के कंपन का मूल आवर्तकाल है

$$T = C_t(h_n)^{3/4} = 0.030(300)^{3/4} = 2.16\ \text{sec.} > 0.7\ \text{sec.}\checkmark \tag{B.13}$$

3. C गुणांक है

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} = \frac{(1.25)(1.5)}{(2.16)^{2/3}} = 1.12 \le 2.75\checkmark \tag{B.14}$$

4. अन्य गुणांक हैं Z=0.4; I=1, R_W=12
5. जाँच करते हैं

$$\frac{C}{R_W} = \frac{1.12}{12} = 0.093 \ge 0.075\checkmark \tag{B.15}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

6. चरम लघु दिशा में कुल भूकंपीय आधार अपरूपण है

$$V = \frac{ZIC}{R_W}W = \frac{(0.4)(1)(1.12)}{(12)}W = 0.037W \quad \text{(B.16)}$$

$$= (0.037)(84000) = 3108kip \quad \text{(B.17)}$$

7. चूँकि $T > 0.7$ sec. है, अतः आघात-प्रभाव पर विचार करना आवश्यक है

$$F_t = 0.07TV = (0.07)(2.16)(3108) = 470 \text{ k} \leftarrow \quad \text{(B.18)}$$

$$le \quad 0.25V = (0.25)(3108) = 777 \text{ k} \quad \text{(B.19)}$$

अतः कुल त्रिभुजाकार भार है

$$V - F_t = 3108 - 470 = 2638 \text{ k} \quad \text{(B.20)}$$

8. जाँच करें कि क्या पवन भार नियंत्रक है। तालिका xx से रूढिवादी रूप से 29 psf का एकसमान पवन दाब मानते हैं, जिससे कुल पार्श्व बल प्राप्त होता है

$$P_W = (0.029) \text{ psf}(175 \times 300) \text{ ft}^2 = 1523 \text{ k} < 3108 \text{ k} \quad \text{(B.21)}$$

कुल भूकंपीय भार का परिमाण स्पष्ट रूप से कुल पवन बल से अधिक है।

B.4 सेतु भार

राजमार्ग सेतुओं के लिए अभिकल्प भार AASHTO (Association of American State Highway Transportation Officials) द्वारा दिए जाते हैं। मुख्य राजमार्गों पर सेतुओं के अभिकल्प के लिए HS-20 ट्रक का उपयोग किया जाता है, चित्र B.5। निर्दिष्ट धुरी भारों और अंतराल वाले अभिकल्प ट्रक अथवा समतुल्य एकसमान तथा संकेंद्रित भार का उपयोग किया जाना चाहिए। इस भारण को इस प्रकार रखा जाना चाहिए कि अधिकतम प्रतिबल उत्पन्न हों।

B.5 भार संयोजन

15 संहिताओं में निर्दिष्ट चल भार अधिकतम संभावित भारों को निरूपित करते हैं।

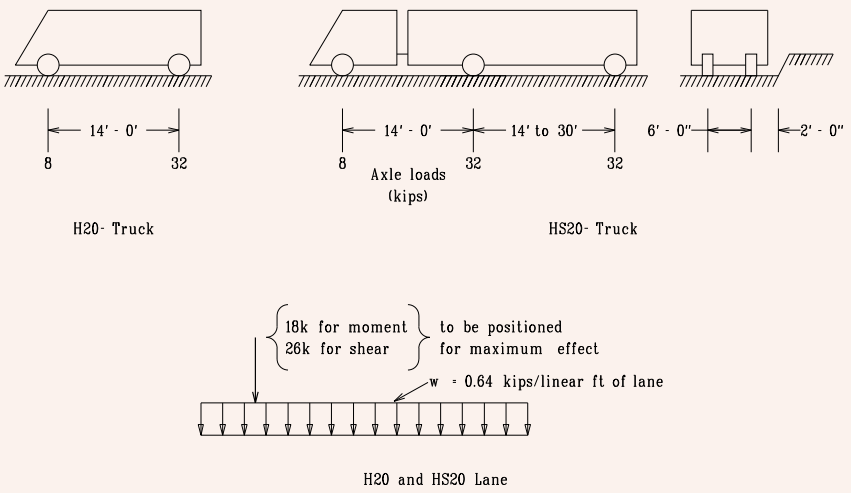
16 इन सभी भारों के एक साथ उत्पन्न होने की संभावना अत्यल्प होती है। अतः कुछ भारों को एक साथ संयोजित करने पर भवन संहिताएँ निश्चित न्यूनीकरण की अनुमति देती हैं।

17 इसके अतिरिक्त, संरचनाओं का अभिकल्प भारों के संयोजन का प्रतिरोध करने के लिए किया जाना चाहिए।

18 जहाँ D= स्थायी; L= चल; Lr= छत का चल; W= पवन; E= भूकंप; S= हिम; T= तापमान; H= मृदा भार निरूपित करते हैं:

19 कंक्रीट संरचनाओं की भार एवं प्रतिरोध गुणक अभिकल्प (LRFD) विधि के लिए American Concrete

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र B.5: ट्रक भार

Institute (ACI) भवन अभिकल्प संहिता (318) (ACI 318, 2019) निम्नलिखित भार संयोजनों पर विचार करना आवश्यक करती है:

1. 1.4D+1.7L
2. 0.75(1.4D+1.7L+1.7W)
3. 0.9D+1.3W
4. 1.4D +1.7L+1.7H
5. 0.75(1.4D+1.4T+1.7L)
6. 1.4(D+T)

जबकि इस्पात संरचनाओं के लिए American Institute of Steel Construction (AISC) संहिता, (American Institute of Steel Construction, 2016), निम्नलिखित संयोजनों के सत्यापन की अपेक्षा करती है

1. 1.4D
2. 1.2D+1.6L+0.5(Lr or S)
3. 1.2D+0.5L (or 0.8W)+1.6(Lr or S)
4. 1.2D+0.5L+0.5(Lr or S)+1.3W
5. 1.2D+0.5L(or 0.2 S)+1.5E
6. 0.9D+1.3W(or 1.5 E)

[20] प्रत्येक मूल भार (L, D, W, आदि) के लिए विश्लेषण पृथक रूप से किया जा सकता है और तत्पश्चात अध्यारोपण के सिद्धांत का उपयोग करके भारों को रैखिक रूप से संयोजित किया जा सकता है (जब तक प्रत्यास्थ सीमा न पहुँच गई हो)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

21 भारों को प्रायः *सामान्य*, *असामान्य* और चरम के रूप में वर्गीकृत किया जाता है।

B.6 चल भार न्यूनीकरण

22 चल भार न्यूनीकरण संरचनात्मक अभिकल्प की एक महत्वपूर्ण संकल्पना है। इसका उद्देश्य बड़े क्षेत्रों में पूर्ण चल भार के एक साथ लगने की कम संभावना को ध्यान में रखते हुए संरचनात्मक सदस्यों के अभिकल्प भारों को इष्टतम बनाना है। यह प्रावधान (ACI 318, 2019) और (ASCE/SEI 7-16, 2017) सहित विभिन्न भवन संहिताओं में अनुमत है।

23 चल भार न्यूनीकरण का आधारभूत सिद्धांत यह है कि जैसे-जैसे प्रभावी क्षेत्र बढ़ता है, अधिकतम चल भार के एक साथ लगने की संभावना घटती है। अतः बड़े क्षेत्रों को आधार देने वाले धरन, गर्डर और स्तंभ जैसे संरचनात्मक सदस्यों का अभिकल्प न्यूनीकृत चल भारों के लिए किया जा सकता है।

24 ACI 318 सदस्य द्वारा समर्थित प्रभावी क्षेत्र के आधार पर चल भार न्यूनीकरण की अनुमति देता है। सुरक्षा सुनिश्चित करते हुए अभिकल्प को इष्टतम बनाने के लिए चल भार न्यूनीकरण के विशिष्ट सूत्र दिए गए हैं।

25 ASCE 7-16 का अनुभाग 4.8 चल भार न्यूनीकरण के विस्तृत नियम देता है। चल भार न्यूनीकरण का सामान्य सूत्र है:

$$L_r = L \cdot \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_T}}\right), \tag{B.22}$$

जहाँ:

- L_r न्यूनीकृत चल भार (psf) है।
- L अन्यूनीकृत चल भार (psf) है।
- A_T सदस्य द्वारा समर्थित प्रभावी क्षेत्र (ft^2 में) है।

26 न्यूनीकृत चल भार निम्न से कम नहीं होना चाहिए:

- एक तल को आधार देने वाले सदस्यों के लिए मूल चल भार का 50%।
- अनेक तलों को आधार देने वाले सदस्यों के लिए मूल चल भार का 40%।

27 कुछ परिस्थितियों में चल भार न्यूनीकरण की अनुमति नहीं है, जैसे:

- उच्च अधिभोग भार वाले समागम क्षेत्र।
- भंडारण अथवा गोदाम क्षेत्र।
- संकेंद्रित भार वाले क्षेत्र।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

B.6.1 उदाहरण B.4: चल भार न्यूनीकरण I

$A_T = 400\,ft^2$ प्रभावी क्षेत्र को आधार देने वाले एक स्तंभ पर विचार कीजिए, जिसके लिए मूल चल भार $L = 100\,psf$ है। न्यूनीकृत चल भार की गणना निम्न प्रकार की जाती है:

$$\begin{aligned} L_r &= L\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_T}}\right) \\ &= 100\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{400}}\right) \\ &= 100\left(0.25 + \frac{15}{20}\right) \\ &= 100\,(0.25 + 0.75) \\ L_r &= 100\,\text{psf} \end{aligned}$$

इस स्थिति में कोई न्यूनीकरण नहीं होता, क्योंकि चल भार न्यूनीकरण सूत्र से मूल चल भार के बराबर मान प्राप्त होता है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

B.6.2 उदाहरण B.5: चल भार न्यूनीकरण II

10 मंजिला कार्यालय भवन में दोनों दिशाओं में स्तंभों के बीच की दूरी 16 ft है, कुल स्थायी भार 60 psf, हिम भार 20 psf और चल भार 80 psf है। भूतल के स्तंभ का अभिकल्प जिस कुल चल भार और कुल भार के लिए किया जाना चाहिए, उसे निर्धारित कीजिए।

1. प्रभावी क्षेत्र $16 \times 16 = 256 ft^2 > 150 \checkmark$ है।
2. न्यूनीकरण R, $R = .08(16 \times 16 - 150) = 8.48\%$ है।
3. अधिकतम अनुमत न्यूनीकरण $R^{max} = 23.1\left(1 + \frac{60}{80}\right) = 40.4\%$ है, जो 60% से कम है ✓।
4. प्रत्येक तल के स्तंभ का न्यूनीकृत *संचयी* भार है

तल	छत	10	9	8	7	6	5	4	3	2	कुल
संचयी R (%)	8.48	16.96	25.44	33.92	42.4	51.32	59.8	60	60	60	
संचयी LL	20	80	80	80	80	80	80	80	80	80	740
संचयी R× LL	18.3	66.4	59.6	52.9	46.08	38.9	32.2	32	32	32	410

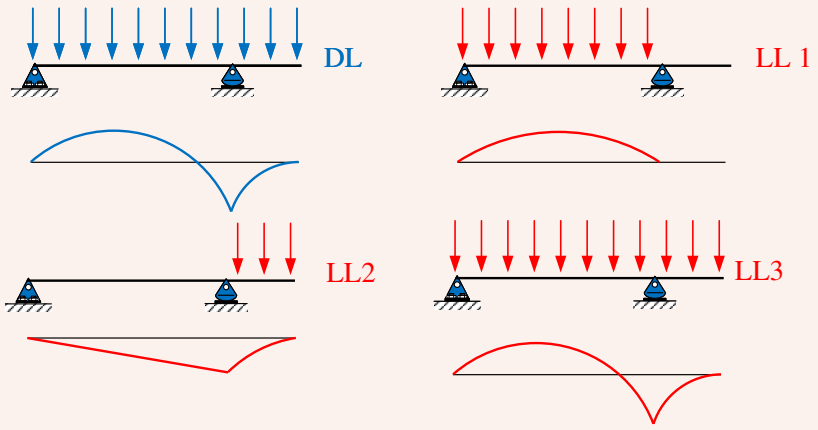
   निचले स्तंभ के लिए परिणामी अभिकल्प चल भार 740 Kips से घटकर 410 Kips हो गया है।
5. कुल स्थायी भार $DL = (10)(60) = 600$ Kips है; अतः भार में कुल न्यूनीकरण $\frac{740-410}{740+600} \times 100$=25% है।

B.7 भार स्थान-निर्धारण

[28] केवल स्थायी भार स्थिर होता है। इसके विपरीत, चल भार संरचना के किसी दिए गए घटक पर लगाया भी जा सकता है और नहीं भी। अतः विभिन्न स्थानों पर अधिकतम आंतरिक बल (धनात्मक अथवा ऋणात्मक आघूर्ण, अपरूपण) उत्पन्न करने वाली भार स्थान-निर्धारण व्यवस्था पर विचार करना आवश्यक है, चित्र B.6।

अप्रकाशित प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र B.6: आघूर्णों को अधिकतम करने के लिए भार स्थान-निर्धारण

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

C रैखिक समघात अवकल समीकरण

सारांश

इस ग्रंथ में अनेक सूत्रीकरण द्वितीय अथवा, अधिक प्रायः, चतुर्थ कोटि के अवकल समीकरणों तक ले जाते हैं। यह अध्याय उनके समाधानों की संक्षिप्त रूपरेखा प्रस्तुत करता है।

C.1 नियामक अवकल समीकरणों का सारांश . . 2375
C.2 समाधान 2376
C.3 स्थिरता i: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ 2376
C.4 स्थिरता ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 2378
C.5 प्रत्यास्थ नींव पर धरन; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$2378

अवकल समीकरण वह समीकरण है जिसमें अज्ञात एक फलन होता है तथा फलन और उसके अवकलज दोनों समीकरण में उपस्थित हो सकते हैं।

C.1 नियामक अवकल समीकरणों का सारांश

धरन

(समीकरण 22.2)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = w(x) \quad \text{or} \quad \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

केबल

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{H}$$

आनमन के साथ सादृश्य पर ध्यान दें

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI}$$

धरन का वृहद् विक्षेपण

(समीकरण 29.2)

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\frac{dx}{ds} = -\alpha^2 \cos\phi$$

समाधान के लिए दीर्घवृत्तीय समाकलों का प्रयोग करें।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पट्टिका

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}} \tag{C.1}$$

अथवा

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}} \tag{C.2}$$

प्रत्यास्थ नींव पर धरन

समीकरण 22.3

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4k^4 y = 0$$

C.2 समाधान

एक *साधारण अवकल समीकरण* (ordinary differential equation, ODE) में केवल एक स्वतंत्र चर (जैसे x अथवा t) होता है। इसके विपरीत, एक *आंशिक अवकल समीकरण* (partial differential equation, PDE) में एक से अधिक स्वतंत्र चर (जैसे x, y अथवा x, t) होते हैं।

कोई अवकल समीकरण *रैखिक* होता है यदि समीकरण का प्रत्येक पद आश्रित चर अथवा उसके अवकलजों में से किसी को भी नहीं, अथवा ठीक एक को, समाहित करता हो। आश्रित चर का स्वयं अथवा उसके अवकलजों के साथ कोई गुणनफल नहीं होता। प्रत्येक पद में x, $\dot{x}$ अथवा $\ddot{x}$ के समतुल्य; अथवा $f(x)$ और उसके अवकलजों की अधिकतम एक घात होती है।

यदि आश्रित चर और उसके सभी अवकलज केवल अचरों से गुणित हों, तो अवकल समीकरण के गुणांक अचर होते हैं।

समघात रैखिक समीकरण वह है जिसका दायाँ पक्ष शून्य हो (और सभी पदों में आश्रित चर तथा उसके अवकलजों की ठीक एक घात हो)।

C.3 स्थिरता i: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$

निम्न द्वितीय-कोटि अवकल समीकरण है

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + ky = 0 \tag{C.3}$$

अथवा

$$y'' + ky = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्पष्टतः इस समीकरण का समाधान निम्न रूप का होगा

$$y = e^{\lambda x}$$

और तब

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

समीकरण C.3 में प्रतिस्थापित करने पर

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + k e^{\lambda x} = 0$$
$$\Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + k) = 0$$

किंतु, क्योंकि $e^{\lambda x}$ कभी शून्य नहीं हो सकता, अतः

$$\lambda^2 + k = 0 \qquad \text{अभिलाक्षणिक समीकरण} \tag{C.4}$$

अभिलाक्षणिक समीकरण का समाधान सरलतः है

$$\lambda^2 = \pm\sqrt{-1}\sqrt{k}$$

अथवा

$$\lambda^2 = \pm i\sqrt{k} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i\sqrt{k} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{k} \end{cases}$$

इन व्यंजकों को समीकरण C.3 में प्रतिस्थापित करने पर

$$y = C_1 e^{i\sqrt{k}x} + C_2 e^{-i\sqrt{k}x} \tag{C.5}$$

ऑयलर के सूत्र (उनके अनेक सूत्रों में से एक) का प्रयोग करने पर

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \tag{C.6}$$

प्राप्त होता है

$$e^{i\sqrt{k}x} = \cos(\sqrt{k}x) + i\sin(\sqrt{k}x)$$
$$e^{-i\sqrt{k}x} = \cos(\sqrt{k}x) - i\sin(\sqrt{k}x)$$

इन व्यंजकों को क्रमशः समीकरण C.5 में प्रतिस्थापित किया जाता है

$$y = C_1\left[\cos(\sqrt{k}x) + i\sin(\sqrt{k}x)\right] + C_2\left[\cos(\sqrt{k}x) - i\sin(\sqrt{k}x)\right]$$
$$= (C_1 + C_2)\cos(\sqrt{k}x) + i(C_1 - C_2)\sin(\sqrt{k}x)$$

हम समाकलन के नए अचर D_1 और D_2 प्रस्तुत कर सकते हैं

$$y = D_1\cos(\sqrt{k}x) + D_2\sin(\sqrt{k}x) \tag{C.7}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

C.4 स्थिरता ii; $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

स्थिरता, 29.21।

पुनः, निम्न समीकरण का समाधान

$$\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$y = e^{\lambda x}$ के रूप में खोजा जाता है। तब

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$
$$y^{(4)} = \lambda^4 e^{\lambda x}.$$

अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर मिलता है

$$\left(\lambda^4 + k^2\lambda^2\right) e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^4 + k^2\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda^2 + k^2) = 0.$$

आगे गुणनखंड करने पर,

$$\lambda^2(\lambda - ik)(\lambda + ik) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = ik, \\ \lambda_4 = -ik. \end{cases} \tag{C.8}$$

क्योंकि $\lambda = 0$ एक द्विक मूल है, इसका योगदान $(C_1 + C_2x)e^{0x} = C_1 + C_2x$ है। सम्मिश्र संयुग्मी मूल घातांकीय पद $e^{\pm ikx}$ देते हैं। अतः व्यापक समाधान है

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{ikx} + C_4e^{-ikx}.$$

ऑयलर की सर्वसमिकाओं का प्रयोग करने पर,

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx), \qquad e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx),$$

दोलनी भाग को $\cos(kx)$ और $\sin(kx)$ के रैखिक संयोजन (अचरों की पुनर्परिभाषा सहित) के रूप में समतुल्यतः लिखा जा सकता है। अतः,

$$y = C_1 + C_2x + C_3\cos(kx) + C_4\sin(kx).$$

C.5 प्रत्यास्थ नींव पर धरन; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$

प्रत्यास्थ नींव पर धरन 22.3

निम्न चतुर्थ-कोटि अवकल समीकरण दिया है

$$y^{(4)} + ky = 0 \tag{C.9}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

हम रखते हैं

$$m^2 = \sqrt{\frac{k}{4}} \quad \text{or} \quad k = 4m^4$$

अवकल समीकरण बन जाता है

$$y^{(4)} + 4m^4 = 0 \tag{C.10}$$

पुनः, स्पष्टतः इस समीकरण का समाधान निम्न रूप का होगा

$$y = e^{\lambda x}$$

और

$$y^{(4)} = \lambda^4 e^{\lambda x}$$

समीकरण C.10 में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$e^{\lambda x}(\lambda^4 + 4m^4) = 0$$

पुनः, $e^{\lambda x}$ कभी शून्य नहीं हो सकता; अतः संगत अभिलाक्षणिक समीकरण होगा

$$\lambda^4 + 4m^4 = 0 \tag{C.11}$$

$$\lambda^4 + 4m^4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2m^2 i)(\lambda^2 + 2m^2 i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = m(1+i) \\ \lambda_2 = m(1-i) \\ \lambda_3 = m(-1+i) \\ \lambda_4 = m(-1-i) \end{cases}$$

समाधानों को समीकरण C.9 में प्रतिस्थापित करें

$$y = C_1 e^{m(1+i)x} + C_2 e^{m(1-i)x} + C_3 e^{m(-1+i)x} + C_4 e^{m(-1-i)x}$$

किंतु $e^{a+b} = e^a e^b$ है और ऑयलर समीकरण (समीकरण C.6) का पुनः प्रयोग करने पर

$$y = e^{(mx)}\left(C_1 \sin(mx) + C_2 \cos(mx)\right) + e^{(-mx)}\left(C_3 \sin(mx) + C_4 \cos(mx)\right) \tag{C.12}$$

अधिक सुरुचिपूर्ण समाधान निम्न संबंधों के प्रयोग से आरंभ होगा

$$e^x = \cosh x + \sinh x; \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

और प्रतिस्थापित करने पर

$$y = C_1 \sin(mx)\sinh(mx) - C_3 \sin(mx)\sinh(mx) + C_2 \cos(mx)\sinh(mx) - C_4 \cos(mx)\sinh(mx) + C_2 \cos(mx)$$

पुनर्व्यवस्थित करने पर

$$y = D_1 \cos(mx)\cosh(mx) + D_2 \sin(mx)\sinh(mx)) \tag{C.13}$$
$$+ D_3 \cos(mx)\sinh(mx) + D_4 \sin(mx)\cosh(mx) \tag{C.14}$$

जो चार क्राइलोव फलनों (Kolosova and Kuroyedov, 2013) के सदृश हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D प्रत्यास्थ मेहराब; उन्नत विश्लेषण

सारांश

यह परिशिष्ट विभिन्न भारण दशाओं के अधीन सममित वृत्ताकार मेहराबों के प्रत्यास्थ विश्लेषण हेतु वैश्लेषिक समीकरण विकसित करता है। स्थैतिकी, न्यूनतम कार्य और आभासी कार्य के सिद्धांतों का उपयोग करते हुए, मेहराब की ज्यामिति परिभाषित करने वाले त्रिकोणमितीय चरों के साथ तीन-कब्जीय, दो-कब्जीय और कब्जाविहीन मेहराबों के संवृत-रूप हल व्युत्पन्न किए गए हैं। वैश्लेषिक विधियों का सत्यापन SAP 2000 से प्राप्त संख्यात्मक हलों के सापेक्ष किया गया है तथा उन्हें बिंदु भार, स्वभार और समान रूप से वितरित भारों वाले विस्तृत हल किए हुए उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है। मेहराब के पूरे विस्तार में आंतरिक बलों (अपरूपण, अक्षीय बल और आघूर्ण) की व्यवस्थित गणना की गई है और प्रत्येक प्रकार के मेहराब के संरचनात्मक व्यवहार का विश्लेषण करके प्रतिक्रिया प्रतिरूपों, भार-पथों और प्रतिबल वितरण के अंतर स्पष्ट किए गए हैं।

D.1 परिचय 2380
D.2 तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2382
D.2.1 विश्लेषण प्रक्रिया 2382
D.2.2 बिंदु भार 2382
D.2.3 स्वभार 2389
D.2.4 समान रूप से वितरित भार 2393
D.2.5 तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन 2395
D.2.6 निष्कर्ष 2397
D.3 दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब 2398
D.3.1 विश्लेषण प्रक्रिया 2398
D.3.2 बिंदु भार 2398
D.3.3 स्व-भार 2410
D.3.4 समान रूप से वितरित भार 2417
D.3.5 दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन 2421
D.3.6 निष्कर्ष 2423
D.4 कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब 2424
D.4.1 विश्लेषण प्रक्रिया 2424
D.4.2 बिंदु भार 2424
D.4.3 स्व-भार 2438
D.4.4 समान रूप से वितरित भार 2446
D.4.5 कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन 2451
D.4.6 निष्कर्ष 2453
D.5 निष्कर्ष 2453

भाग 2: संरचनात्मक विश्लेषण एवं अभिकल्प सारणियाँ

स्नातकोत्तर शोधप्रबंध “Analysis of Arches”, जिसके लेखक Sonavane, 2014 हैं, से

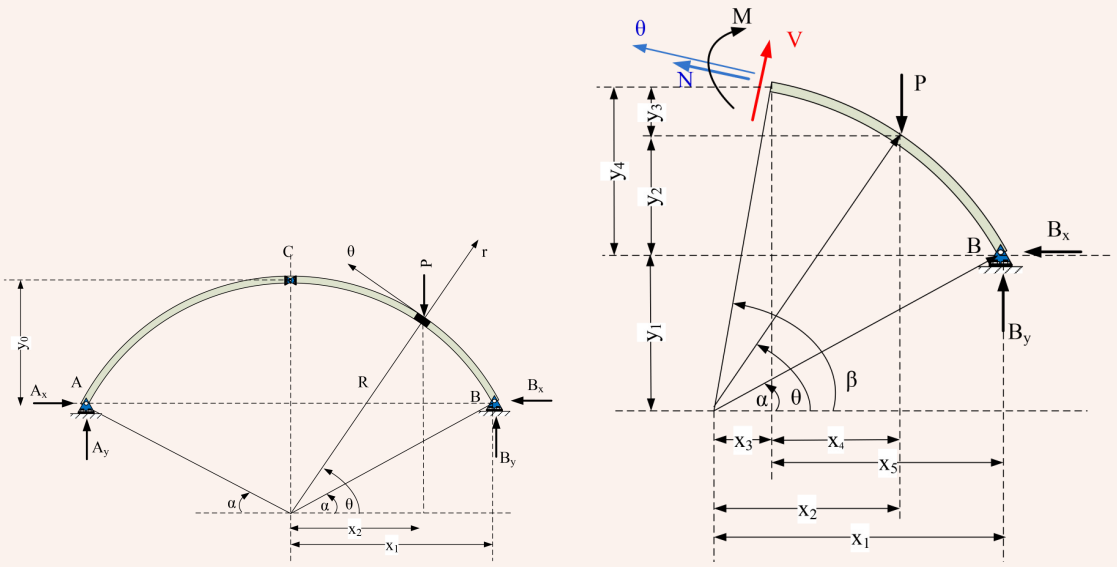
D.1 परिचय

यह अध्याय विशेष रूप से विभिन्न भारण दशाओं के अधीन सममित तीन-कब्जीय, दो-कब्जीय और कब्जाविहीन वृत्ताकार मेहराबों के वैश्लेषिक समीकरण विकसित करने हेतु स्थैतिकी, न्यूनतम कार्य के सिद्धांत और आभासी कार्य विधि के अनुप्रयोग पर केंद्रित है। प्रत्येक प्रकार के मेहराब की ज्यामिति परिभाषित करने वाले कुछ त्रिकोणमितीय चरों को प्रस्तुत करके वैश्लेषिक समीकरणों को सामान्यीकृत किया गया है। समीकरणों का सत्यापन उपलब्ध साहित्य में चर्चित उदाहरणों से किया गया है। इसके अतिरिक्त, ऊपर उल्लिखित तीन प्रकार के मेहराबों के प्रतिरूप विकसित करने के लिए संरचनात्मक विश्लेषण प्रोग्राम Sap 2000 का उपयोग किया गया है और उनके विश्लेषण की तुलना वैश्लेषिक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समीकरणों से प्राप्त हलों से की गई है। वैश्लेषिक समीकरणों के हलों का आगे प्रत्येक प्रकार के मेहराब के संरचनात्मक व्यवहार पर चर्चा करने के लिए उपयोग किया गया है।

चित्र D.1 में तीन-कब्जीय मेहराब उन त्रिकोणमितीय चरों को दर्शाता है जो सममित वृत्ताकार मेहराब की ज्यामिति परिभाषित करते हैं और वैश्लेषिक समीकरणों की व्युत्पत्ति में प्रयुक्त होते हैं। दो-कब्जीय और कब्जाविहीन मेहराब के लिए भी समान चर प्रयुक्त होते हैं। आकृति ACB एक मेहराब को निरूपित करती है, जहाँ A और B अंत्याधार हैं तथा बिंदु C मेहराब का मुकुट है। दूरी y0 मेहराब के उठान को और दूरी x1 मेहराब के विस्तार के आधे भाग को निरूपित करती है। अक्षर α वृत्त के केंद्र और अंत्याधार को जोड़ने वाली रेखा द्वारा क्षैतिज के साथ बनाए गए कोण को दर्शाता है; फलतः जब α शून्य हो तो यह अर्धवृत्ताकार मेहराब होता है। सभी आयाम और कोण अंत्याधार B से मापे जाते हैं। अक्षर θ उस कोण को दर्शाता है जिस पर भार P मेहराब-पसलि पर लगाया जाता है। बल Ax और Bx क्षैतिज प्रतिक्रियाएँ तथा बल Ay और By अंत्याधारों पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाएँ हैं। अपरूपण बल (V), अक्षीय बल (N) और आघूर्ण (M), मेहराब के पूरे विस्तार में किसी भी कोण β पर आंतरिक बल हैं। चित्र D.1b आंतरिक बलों के लिए प्रयुक्त चिह्न परिपाटी दर्शाता है, जिसमें दक्षिणावर्त आघूर्ण, बाह्यमुखी अपरूपण बल और तन्य अक्षीय बल को धनात्मक माना गया है। समग्रतः मेहराब की ज्यामिति परिभाषित करने वाली नामावली में सभी बलों के लिए बड़े अक्षर और सभी आयामों के लिए छोटे अक्षर प्रयुक्त किए गए हैं।



(a) प्रतिक्रियाएँ (b) आंतरिक बल

चित्र D.1: वृत्ताकार मेहराब की ज्यामिति

Trignometric Variables

x1=R Cos[α]; x2=R Cos[θ]; x3= R Cos[β]; x4=x2 − x3; x5=x1 − x3;
y0=R(1 − Sin[α]); y1=R Sin[α]; y2=R (Sin[θ] − Sin[α]); y3=R Sin[β] − y1 − y2; y4=R Sin[β] − y1;

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.2 तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब

एक सममित तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब में कुल चार प्रतिक्रियाएँ होती हैं—प्रत्येक आलंब पर दो। तीन-कब्जीय मेहराब और दो-कब्जीय अथवा कब्जाविहीन मेहराब के बीच प्रमुख अंतर मुकुट पर कब्जे के कारण मेहराब-पसलि की असांतत्यता है, जो तीन-कब्जीय मेहराब को दो स्वतंत्र रूप से आलंबित वक्र घटकों में बदल देती है। प्रत्येक स्वतंत्र घटक में दो समान और विपरीत प्रतिक्रियाएँ होती हैं। अतः प्रत्येक घटक के लिए दो अज्ञात प्रतिक्रियाओं और संतुलन के तीन समीकरणों के कारण सममित तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब स्थैतिकतः निर्धार्य संरचना है।

D.2.1 विश्लेषण प्रक्रिया

विश्लेषण के लिए तीन भारण दशाओं पर विचार किया गया है: एक बिंदु भार, मेहराब का स्वभार और मेहराब पर लगाया गया समान रूप से वितरित भार। स्वभार और समान रूप से वितरित भार मेहराब के केंद्र के सापेक्ष सममित होते हैं, जबकि मुकुट के अतिरिक्त किसी अन्य स्थान पर लगाया गया बिंदु भार केंद्र के सापेक्ष असममित होता है। अतः विश्लेषण को सुपष्ट करने के लिए स्वभार और समान रूप से वितरित भारण दशाओं हेतु समान चित्र तथा बिंदु भार दशा हेतु चित्रों का अलग समूह प्रयुक्त किया गया है। तीनों भारण दशाओं का विश्लेषण Mathematica का उपयोग करके तीन चरणों में किया गया है: प्रथम चरण में आलंब प्रतिक्रियाएँ, द्वितीय चरण में पूरे मेहराब के आंतरिक बल और द्वितीय चरण के आंतरिक बल समीकरणों का उपयोग करते हुए तृतीय चरण की गणनाएँ की गई हैं। सभी चरणों की Mathematica फाइलें संबंधित अनुभागों में सम्मिलित हैं और सरलीकरण के लिए केवल प्रतिक्रियाओं तथा आंतरिक बलों के अंतिम समीकरणों का विस्तार किया गया है। आलंब प्रतिक्रियाओं और आंतरिक बलों के वैश्लेषिक समीकरण ऊपर परिभाषित त्रिकोणमितीय चरों के रूप में हैं।

D.2.2 बिंदु भार

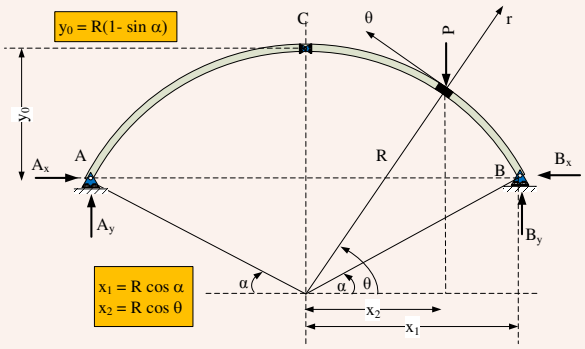
इस स्थिति में लगाया गया अवयवी बल निम्न प्रकार दिया जाता है

$$dp = P \tag{D.1}$$

प्रतिक्रियाएँ

चित्र D.2 पर विचार करके आलंबों पर क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाएँ निर्धारित की जाती हैं। जब बिंदु भार मेहराब के मुकुट के अतिरिक्त किसी अन्य स्थान पर लगाया जाता है, तब वह मेहराब के केंद्र के सापेक्ष असममित भारण दशा उत्पन्न करता है। चूँकि ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया 'By' का व्यंजक मुकुट C के सापेक्ष बिंदु भार P के स्थान पर निर्भर करता है, इसलिए समीकरणों के दो अलग समूह विकसित किए गए हैं—एक $\theta < \frac{\Pi}{2}$ और दूसरा $\theta \geq \frac{\Pi}{2}$ दशा के लिए। आलंब प्रतिक्रिया की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र D.2: बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब

Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 - P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY - P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(P-P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

$\theta < \frac{\pi}{2}$

Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

```
SigMC= - BXy0 + BYx1 - Px2;
```

```
Sol3=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol3[[1]]
```

$$\frac{-P\text{Cos}[\alpha]+P\text{Cos}[\theta]}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

```
AX=BX;
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
MO=FullSimplify[−AXy1 − AYx1 − Px2 + BXy1 + BYx1]
```
```
0
```
```
Clear[AX];Clear[BX];
```
$\theta > \frac{\pi}{2}$
Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)
```
SigMC= − BXy0 + BYx1;
```
```
Sol3=Solve[SigMC==0,BX];BX=BX/.Sol3[[1]]
```
$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$
```
AX=BX;
```
Check statics by taking moment about O CCW +ve
```
MO=FullSimplify[−AXy1 − AYx1 − Px2 + BXy1 + BYx1]
```
```
0
```

आंतरिक बल

मुकुट के अतिरिक्त किसी अन्य स्थान पर बिंदु भार की स्थिति असममित भारण दशा उत्पन्न करने के साथ-साथ आंतरिक बलों में असांतत्य भी उत्पन्न करती है। आंतरिक बलों की यह असांतत्यता चित्र D.3 में दर्शाई गई है। अतः मेहराब के पूरे विस्तार में किसी कोण β पर आंतरिक बलों का व्यंजक उस कोण θ के सापेक्ष उसके संबंध पर निर्भर करता है जिस पर बिंदु भार लगाया गया है। निम्नलिखित दशाओं पर विचार करके आंतरिक बलों के लिए समीकरणों के विभिन्न समूह विकसित किए गए हैं।

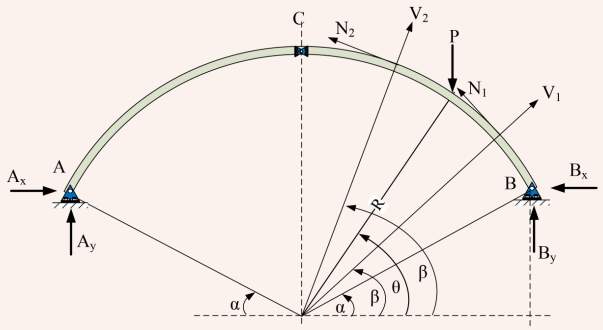
$$\theta < \frac{\Pi}{2} \longrightarrow \beta < \theta, \beta \geq \theta, \quad \theta \geq \frac{\Pi}{2} \longrightarrow \beta < \theta, \beta \geq \theta \tag{D.2}$$

चित्र D.4 के मुक्त-पिंड आरेख का उपयोग मेहराब के पूरे विस्तार में किसी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण निर्धारित करने के लिए किया जाता है। मेहराब के पूरे विस्तार में किसी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है।

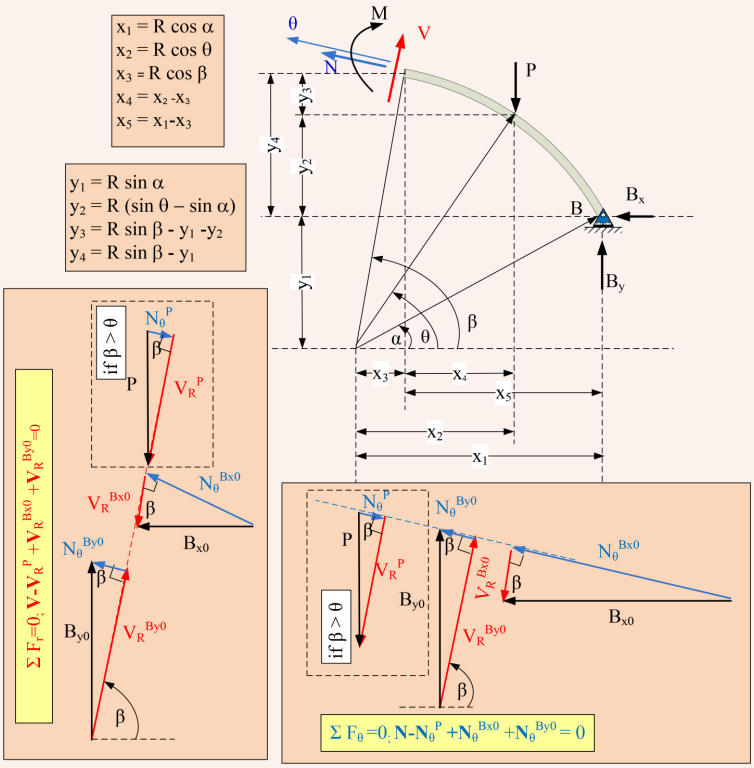
Internal Forces

$\theta < \frac{\pi}{2}$ & $\beta < \theta$
Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)
```
SigFV1= − BXCos[β] + BYSin[β] + V1;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र D.3: θ के सापेक्ष β का संबंध



चित्र D.4: बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$_\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](-\text{Sec}[\alpha]+\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN1=BXSin[β] + BYCos[β] + N1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,N1]]; N1[β_]=N1/.Sol5[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](1-\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM1=BXy4 − BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + 2PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

$\theta < \frac{\pi}{2}$ & $\beta > \theta$

Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV2= − BXCos[β] + BYSin[β] − PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$\frac{P(-\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN2=BXSin[β] + BYCos[β] − PCos[β] + N2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,N2]]; N2[β_]=N2/.Sol8[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2=BXy4 − BYx5 + Px4 + M2;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2]; M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

Internal Forces

$\theta > \frac{\pi}{2}$ & $\beta < \theta$

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV1= - BXCos[β] + BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](-\text{Sec}[\alpha]+\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN1=BXSin[β] + BYCos[β] + N1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,N1]]; N1[β_]=N1/.Sol5[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](1-\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM1=BXy4 - BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

$\theta > \frac{\pi}{2}$ & $\beta > \theta$

Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV2= - BXCos[β] + BYSin[β] - PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]-\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN2=BXSin[β] + BYCos[β] - PCos[β] + N2;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,N2]];N2[β_]=N2/.Sol8[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2=BXy4 − BYx5 + Px4 + M2;
```

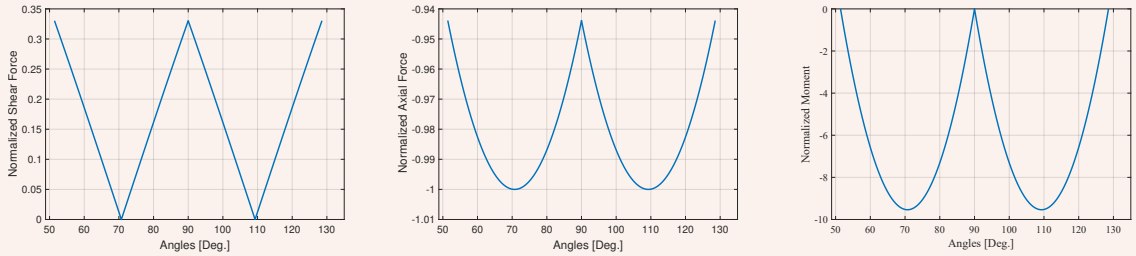
```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2];M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] - 2PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

विक्षेप

तीन-कब्जीय मेहराब के वैश्लेषिक समीकरणों को विक्षेप की गणना में लागू करते समय कुछ अप्रत्याशित कठिनाइयाँ उत्पन्न हुईं, जिनसे सम्मिश्र हल प्राप्त हुआ। अतः भावी कार्य में इसका और अन्वेषण आवश्यक है।

परिणामों का सारांश



चित्र D.5: बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आंतरिक बलों के आलेख

चित्र D.5 ऊपर के अनुभाग में चर्चित तीन-कब्जीय मेहराब के उदाहरण के आलेख दर्शाता है। मेहराब के मुकुट पर एक बिंदु भार लगाया गया है। आंतरिक अक्षीय बल और अपरूपण बल को अंत्याधारों पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया तथा प्रणोद के परिणामी के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आंतरिक आघूर्ण को आंतरिक अक्षीय बल और उठान के गुणनफल के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आलेख के अनुसार सभी आंतरिक बल मेहराब के मुकुट के सापेक्ष सममित हैं और तीन-कब्जीय मेहराब दो स्वतंत्र वक्र घटकों की तरह व्यवहार करता है। अक्षीय संपीडन बल प्रत्येक घटक के मध्यबिंदु पर अधिकतम होता है और कब्जीय आलंबों की ओर घटता है; उच्च और निम्न अक्षीय बलों में लगभग 5% का अंतर है। आंतरिक आघूर्ण कब्जों पर शून्य और प्रत्येक घटक के मध्यबिंदु पर अधिकतम होता है। दूसरी ओर, अपरूपण बल आंतरिक अक्षीय बल और आघूर्ण की तुलना में कम है तथा अधिकतम आंतरिक आघूर्ण के स्थानों पर शून्य है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

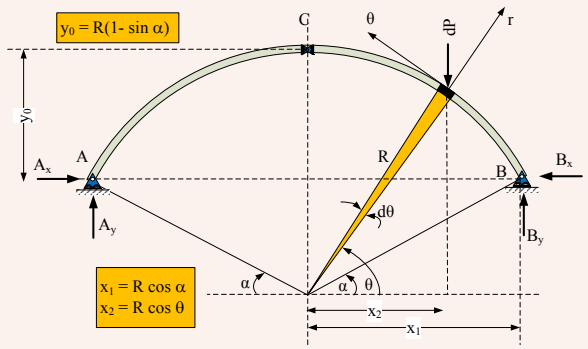
D.2.3 स्वभार

इस स्थिति में लगाया गया अवयवी बल निम्न प्रकार दिया जाता है

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.3}$$

प्रतिक्रियाएँ

चित्र D.6 पर विचार करके आलंबों पर क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाएँ निर्धारित की जाती हैं। आलंब प्रतिक्रिया की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है।



चित्र D.6: स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब

Reactions

Define the load (omitting the $d\theta$)

$dP' = wR;$

Determine vertical reaction by taking summation of forces in the y direction

$$BY = \int_{\alpha}^{\pi/2} dP'\, d\theta$$

$$Rw\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

$$SigMC = -BXy0 + BYx1 - \int_{\alpha}^{\pi/2} x2\, dP'\, d\theta;$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol1=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol1[[1]]
```

$$-\frac{R(-2w+\pi w\text{Cos}[\alpha]-2w\alpha\text{Cos}[\alpha]+2w\text{Sin}[\alpha])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

```
CX=BX;
```

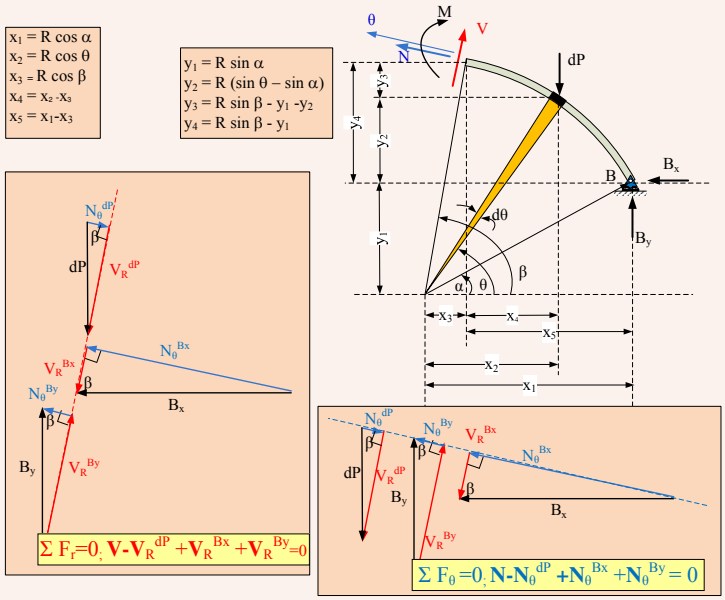
Check statics by taking moment about O (CCW +ve)

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 - CX(y1 + y0) - ∫_α^(π/2) x2dP' dθ]
```

$$0$$

आंतरिक बल

चित्र D.7 के मुक्त-पिंड आरेख का उपयोग मेहराब के पूरे विस्तार में किसी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण निर्धारित करने के लिए किया जाता है। अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण



चित्र D.7: स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख

की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है।

Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

SigFV= − BXCos[β] + BYSin[β] − $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′Sin[β]$d\theta$ + V;

Sol2=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; $V[\beta_]$=V/.Sol2[[1]]

$$-\frac{Rw(\text{Cos}[\beta](-2+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\text{Sin}[\alpha])+(\pi-2\beta)(-1+\text{Sin}[\alpha])\text{Sin}[\beta])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

SigFN=BXSin[β] + BYCos[β] − $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′Cos[β]$d\theta$ + N;

Sol3=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]]; NN[$\beta_$]=N/.Sol3[[1]]

$$\frac{1}{2}Rw\left(-(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]+\frac{(-2+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\text{Sin}[\alpha])\text{Sin}[\beta]}{-1+\text{Sin}[\alpha]}\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigM=BXy4 − BYx5 + $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′x4$d\theta$ + M;

Sol4=FullSimplify[Solve[SigM==0,M]]; $M[\beta_]$=M/.Sol4[[1]]

$$\frac{R^2w(-(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha])+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha](-1+\text{Sin}[\beta]))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

विक्षेप

ऊपर विकसित वैश्लेषिक समीकरणों का उपयोग सममित वृत्ताकार मेहराब में विक्षेप की गणना के लिए किया जाता है (Kinney, 1957, pg 547-558)। त्रिकोणमितीय चरों के लिए प्रयुक्त संख्यात्मक मान निम्नलिखित हैं,

मेहराब-पसलि की चौडाई (b) = 2 ft, मेहराब-पसलि की गहराई (d) = 3 ft, क्षेत्रफल (a) = 6 ft^2, जडत्व आघूर्ण (i) = 4.5 ft^4, प्रत्यास्थता मापांक (e) = 3645 Ksi, α= 0.8975 rad., त्रिज्या (R) = 160.35 ft., विस्तार = 200 ft, उठान = 35 ft, W=2.275 kip/ft।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

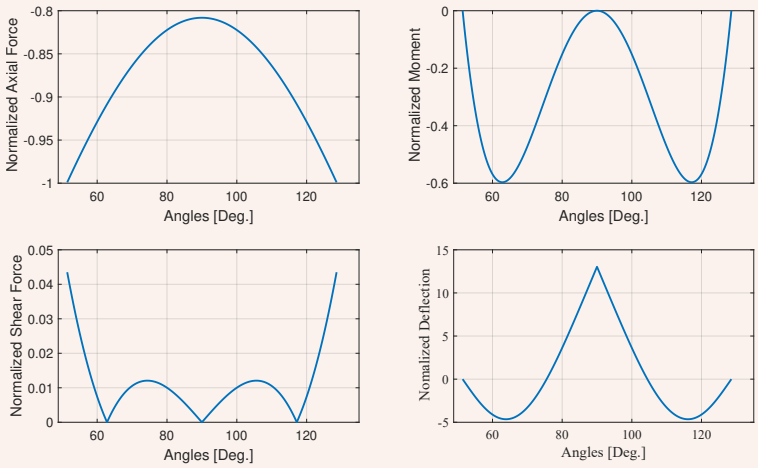
विचारित मेहराब उदाहरण में विक्षेप की गणना के लिए आभासी कार्य का निम्नलिखित समीकरण प्रयुक्त किया जाता है।

$$\delta P.\Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M\ \delta \mathrm{M1}}{EI}\ Rd\beta + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M\ \delta \mathrm{M2}}{EI}\ Rd\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{M\ \delta \mathrm{M3}}{EI}\ Rd\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta \mathrm{M4}}{EI}\ Rd\beta\right] \tag{D.4}$$

जहाँ

δP	Δ की दिशा में लगाया गया बाह्य आभासी इकाई भार
Δ	वास्तविक लगाए गए भार से उत्पन्न बाह्य विस्थापन
M	वास्तविक भार से धरन में उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$\delta \mathrm{M1}(\beta < \theta)$, $\delta \mathrm{M2}(\beta \geq \theta)$	जब $\theta < \frac{\pi}{2}$ हो तब बाह्य आभासी इकाई भार से उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$\delta \mathrm{M3}(\beta < \theta)$, $\delta \mathrm{M4}(\beta \geq \theta)$	जब $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ हो तब बाह्य आभासी इकाई भार से उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण

परिणामों का सारांश



चित्र D.8: स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख

चित्र D.8 ऊपर के अनुभाग में चर्चित स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय मेहराब उदाहरण के आलेख दर्शाता है। आंतरिक अक्षीय बल और अपरूपण बल को अंत्याधारों पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया तथा प्रणोद के परिणामी के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। अक्षीय संपीडन बल अंत्याधारों पर अधिकतम होता है और मुकुट की ओर घटकर अधिकतम मान का लगभग 81% रह जाता है। दूसरी ओर अपरूपण बल अपेक्षाकृत कम है और अंत्याधार से मुकुट तक क्रमशः लगभग 4% और 1% के बीच बदलता है। आंतरिक आघूर्ण को आंतरिक अक्षीय बल और उठान के गुणनफल के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आंतरिक आघूर्ण कब्जों के स्थान पर शून्य और कब्जों के बीच अधिकतम होता है। कब्जों के बीच आघूर्ण आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

में कोई नति-परिवर्तन बिंदु न होने से कहा जा सकता है कि स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय मेहराब दो स्वतंत्र रूप से आलंबित वक्र घटकों की तरह व्यवहार करता है। तीन-कब्जीय मेहराब में विक्षेप मुकुट पर अधिकतम होता है और अंत्याधारों से विस्तार के $\frac{1}{6}$ पर घटकर अधिकतम का लगभग 40% रह जाता है। आलंब अचल होने के कारण अलग-अलग वक्र घटकों में नीचे की ओर विक्षेप मुकुट को ऊपर की ओर धकेलता है।

D.2.4 समान रूप से वितरित भार

इस स्थिति में लगाया गया अवयवी बल निम्न प्रकार दिया जाता है

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.5}$$

प्रतिक्रियाएँ

चित्र D.6 पर विचार करके आलंबों पर क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाएँ निर्धारित की जाती हैं। आलंब प्रतिक्रिया की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है।

Reactions

Define the load (omitting the dθ)

```
dP'=wRSin[θ];
```

Determine vertical reaction by taking summation of forces in the y direction

```
BY= ∫_α^(π/2) dP' dθ
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

```
SigMC= − BXy0 + BYx1 − ∫_α^(π/2) x2dP' dθ;
```

```
Sol1=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol1[[1]]
```

$$-\frac{Rw\text{Cos}[\alpha]^2}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

```
CX=BX;
```

Check statics by taking moment about O (CCW +ve)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

MO=FullSimplify $\left[\text{BXy1} + \text{BYx1} - \text{CX}(\text{y1} + \text{y0}) - \int_{\alpha}^{\pi/2} \text{x2dP}' \, d\theta\right]$

0

आंतरिक बल

चित्र D.7 के मुक्त-पिंड आरेख का उपयोग मेहराब के पूरे विस्तार में किसी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण निर्धारित करने के लिए किया जाता है। मेहराब के पूरे विस्तार में किसी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है।

Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

SigFV= $-\text{BXCos}[\beta] + \text{BYSin}[\beta] - \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}' \text{Sin}[\beta] \, d\theta + V$;

Sol2=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V/.Sol2[[1]]

$$\frac{1}{2} Rw\text{Cos}[\beta](1 + \text{Sin}[\alpha] - 2\text{Sin}[\beta])$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

SigFN=BXSin[β] + BYCos[β] $- \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}' \text{Cos}[\beta] \, d\theta + N$;

Sol3=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]]; NN[β_]=N/.Sol3[[1]]

$$\frac{1}{2} Rw\left(-2\text{Cos}[\beta]^2 + \frac{\text{Cos}[\alpha]^2 \text{Sin}[\beta]}{-1 + \text{Sin}[\alpha]}\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigM=BXy4 − BYx5 $+ \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}' \text{x4} \, d\theta + M$;

Sol4=FullSimplify[Solve[SigM==0,M]]; M[β_]=M/.Sol4[[1]]

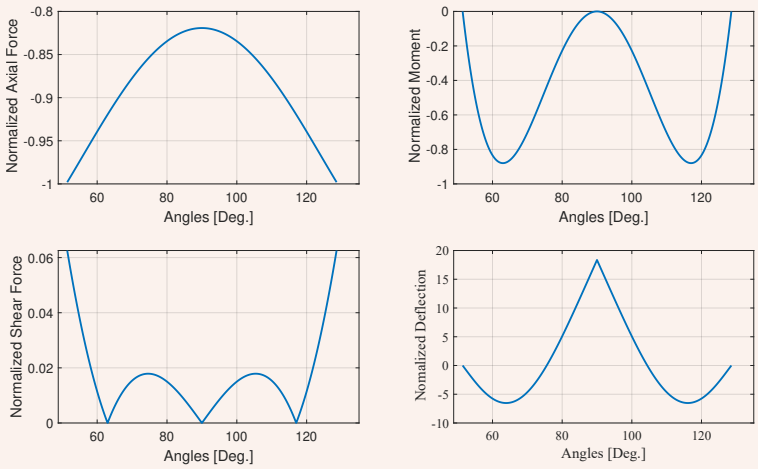
$$\frac{1}{2} R^2 w(-1 + \text{Sin}[\beta])(-\text{Sin}[\alpha] + \text{Sin}[\beta])$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.2.4.1 विक्षेप

समान रूप से वितरित भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब में विक्षेप की गणना की प्रक्रिया तथा त्रिकोणमितीय चरों के लिए प्रयुक्त संख्यात्मक मान अनुभाग D.2.3 में चर्चित स्वभार की दशा के समान हैं; अतः उन्हें यहाँ नहीं दर्शाया गया है।

परिणामों का सारांश



चित्र D.9: समान रूप से वितरित भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख

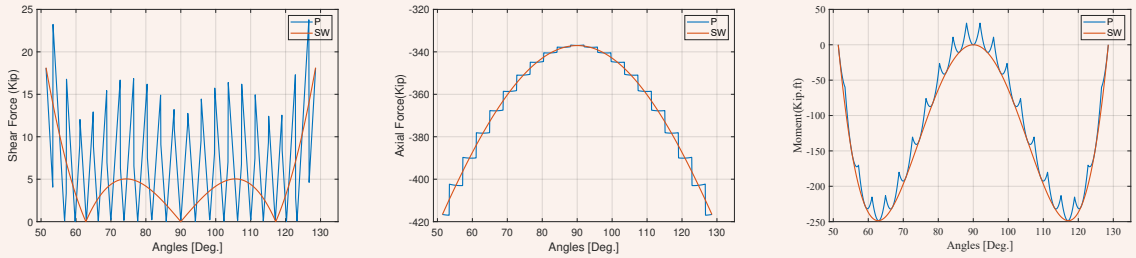
चित्र D.9 ऊपर के अनुभाग में चर्चित समान रूप से वितरित भार के अधीन तीन-कब्जीय मेहराब के आलेख दर्शाता है। आंतरिक अक्षीय बल और अपरूपण बल को अंत्याधारों पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया तथा प्रणोद के परिणामी के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। अक्षीय संपीडन बल अंत्याधारों पर अधिकतम होता है और मुकुट की ओर घटकर अधिकतम मान का लगभग 82.5% रह जाता है। दूसरी ओर अपरूपण बल अपेक्षाकृत कम है और अंत्याधार से मुकुट तक क्रमशः लगभग 6% और 2% के बीच बदलता है। आंतरिक आघूर्ण को आंतरिक अक्षीय बल और उठान के गुणनफल के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आंतरिक आघूर्ण कब्जों के स्थान पर शून्य और कब्जों के बीच अधिकतम होता है। तीन-कब्जीय मेहराब में विक्षेप मुकुट पर अधिकतम होता है और अंत्याधारों से विस्तार के $\frac{1}{6}$ पर घटकर अधिकतम का लगभग 33 % रह जाता है। आलंब अचल होने के कारण अलग-अलग वक्र घटकों में नीचे की ओर विक्षेप मुकुट को ऊपर की ओर धकेलता है।

D.2.5 तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन

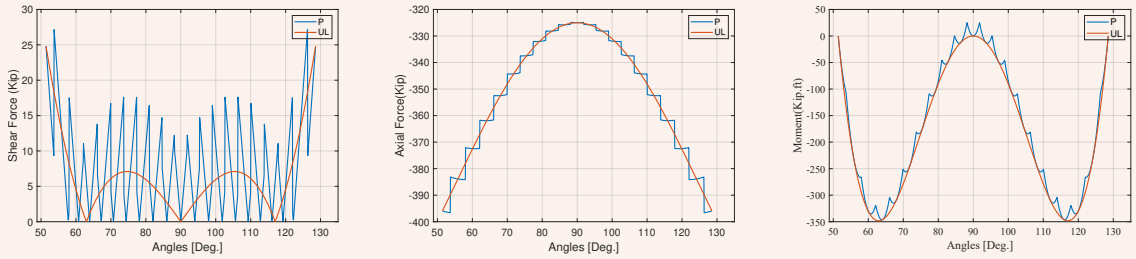
बिंदु भार, स्वभार और समान रूप से वितरित भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के लिए ऊपर विकसित वैश्लेषिक समीकरणों का सत्यापन दो चरणों में किया गया है। प्रथम, मेहराब के पूरे विस्तार में लगाए गए स्वभार और समान रूप से वितरित भार को 20 बिंदु भारों की श्रेणी में विभाजित किया गया है। स्वभार और समान रूप से वितरित भार के वैश्लेषिक समीकरणों तथा उनके संबंधित बिंदु भारों का उपयोग करके आंतरिक बलों के आलेख बनाए गए हैं। वैश्लेषिक हलों की वैधता जाँचने के लिए इन आलेखों को

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अध्यारोपित किया गया है। चूँकि स्वभार अथवा समान रूप से वितरित भार बिंदु भारों की अपनी संबंधित श्रेणी के समतुल्य हैं, उनके आलेख परस्पर निकटता से मेल खाते हैं।

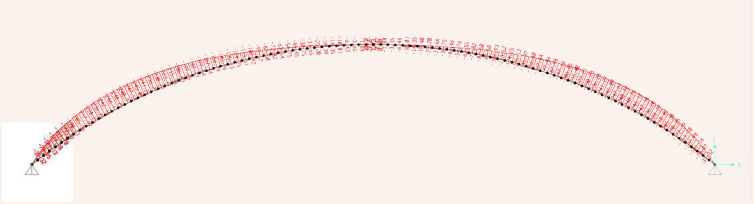


चित्र D.10: स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब बनाम बिंदु भारों की श्रेणी



चित्र D.11: समान रूप से वितरित भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब बनाम बिंदु भारों की श्रेणी

चित्र D.10 और चित्र D.11 वैश्लेषिक समीकरणों के सत्यापन हेतु ऊपर चर्चित प्रक्रिया दर्शाते हैं। द्वितीय, स्वभार की दशा में तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का Sap 2000 प्रतिरूप विकसित किया गया है। इसके विश्लेषण से प्राप्त आघूर्ण, अपरूपण बल और अक्षीय बल आरेखों की तुलना वैश्लेषिक समीकरणों से बनाए गए आलेखों से की गई है।

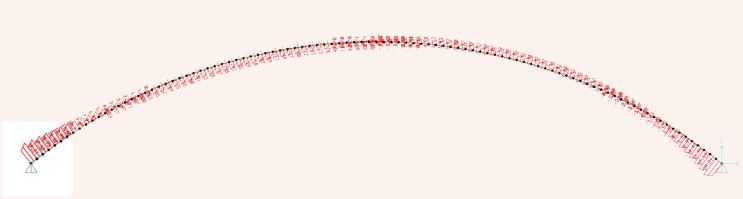


चित्र D.12: Sap 2000—स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का आघूर्ण आरेख



चित्र D.13: Sap 2000—स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अक्षीय बल आरेख

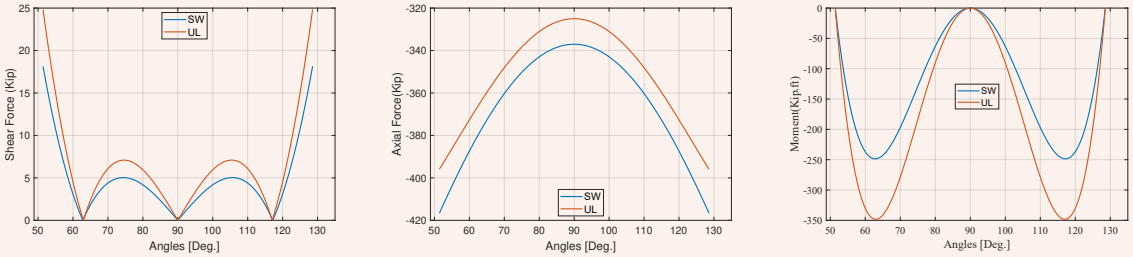
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र D.14: Sap 2000—स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अपरूपण बल आरेख

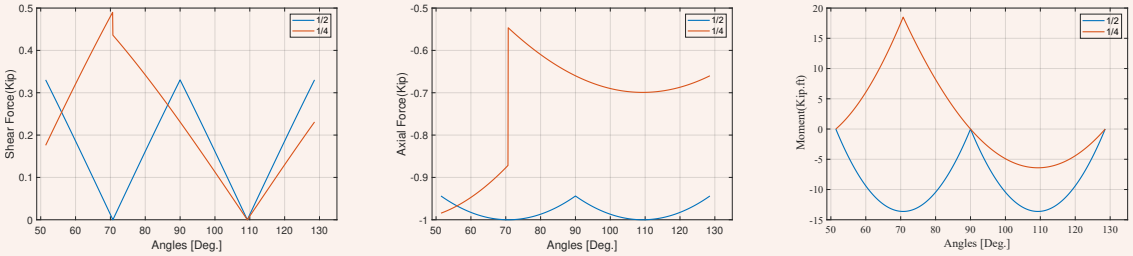
चित्र D.12 के आघूर्ण आरेख, चित्र D.13 के अक्षीय बल आरेख और चित्र D.14 के अपरूपण बल आरेख के संख्यात्मक मान चित्र D.10 के आलेखों पर अपने संबंधित मानों से मेल खाते हैं।

D.2.6 निष्कर्ष



चित्र D.15: स्वभार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब बनाम समान रूप से वितरित भार

यह अनुभाग बिंदु भार, स्वभार और समान रूप से वितरित भार के अधीन तीन-कब्जीय मेहराब के संरचनात्मक व्यवहार की चर्चा आंतरिक बलों तथा विक्षेप के रूप में करता है। चित्र D.15 समान भार w=2.275 kip/ft के अधीन स्वभार दशा की तुलना समान रूप से वितरित भारण दशा से करता है। स्वभार की तुलना में समान रूप से वितरित भार अधिक आंतरिक अपरूपण बल और आघूर्ण तथा कम आंतरिक संपीडन अक्षीय बल उत्पन्न करता है। चित्र D.16 असममित भारण दशा के आलेख दर्शाता है। इस



चित्र D.16: विस्तार के 1/2 और 1/4 पर बिंदु भार के अधीन तीन-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब

उद्देश्य से मुकुट तथा विस्तार के एक-चौथाई स्थान पर इकाई भार लगाया गया है। इस दशा में विस्तार के एक-चौथाई स्थान पर लगाए गए बिंदु भार से उत्पन्न अधिकतम आघूर्ण, मुकुट पर लगाए गए भार से उत्पन्न आघूर्ण से लगभग 1.5 गुना अधिक है। विस्तार के एक-चौथाई स्थान पर लगाए गए बिंदु भार से उत्पन्न अधिकतम अक्षीय बल मुकुट पर लगाए गए भार से उत्पन्न बल के निकट है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.3 दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब

एक सममित दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब में कुल चार प्रतिक्रियाएँ होती हैं—प्रत्येक आलंब पर दो। चूँकि दो-कब्जीय मेहराब की पसलि आलंबों के बीच सतत होती है और आलंब-बिंदु अचल होते हैं, इसलिए लगाया गया भार न केवल ऊर्ध्वाधर बल्कि क्षैतिज प्रतिक्रिया भी उत्पन्न करता है, जिसे सामान्यतः प्रणोद कहा जाता है। चार अज्ञात प्रतिक्रिया बलों को हल करने के लिए संतुलन के केवल तीन समीकरण उपलब्ध होने के कारण दो-कब्जीय मेहराब प्रथम कोटि तक स्थैतिकतः अनिर्धार्य होता है।

D.3.1 विश्लेषण प्रक्रिया

प्रारंभ में स्थैतिकतः अनिर्धार्य दो-कब्जीय मेहराब—जिसे आगे मूल संरचना कहा गया है—की एक अतिरिक्त प्रतिक्रिया हटाकर उसे स्थैतिकतः निर्धार्य मेहराब में बदला जाता है, जिसे आगे प्राथमिक संरचना कहा गया है। स्थैतिकी की साधारण विधि से लगाए गए भार के कारण प्राथमिक संरचना में आलंब प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल ज्ञात किए जाते हैं। तत्पश्चात यह मानते हुए कि प्राथमिक संरचना पर कोई बाह्य बल नहीं है, हटाए गए अतिरिक्त बल के स्थान पर इकाई आभासी बल लगाया जाता है और इस इकाई भार से उत्पन्न आंतरिक बलों की गणना की जाती है। मूल स्थैतिकतः अनिर्धार्य दो-कब्जीय मेहराब में अतिरिक्त प्रतिक्रिया की गणना के लिए लगाए गए भार के अधीन मेहराब के विरूपण का संगतता समीकरण लिया जाता है। सभी आलंब प्रतिक्रियाएँ ज्ञात हो जाने पर मेहराब के आंतरिक बलों की गणना स्थैतिकी की साधारण विधि से की जाती है। यहाँ वर्णित विश्लेषण प्रक्रिया Mathematica का उपयोग करके सात चरणों में संपन्न की गई है। सभी चरणों की Mathematica फाइलें संबंधित अनुभागों में सम्मिलित हैं और सरलीकरण के लिए केवल प्रतिक्रियाओं तथा आंतरिक बलों के अंतिम समीकरणों का विस्तार किया गया है।

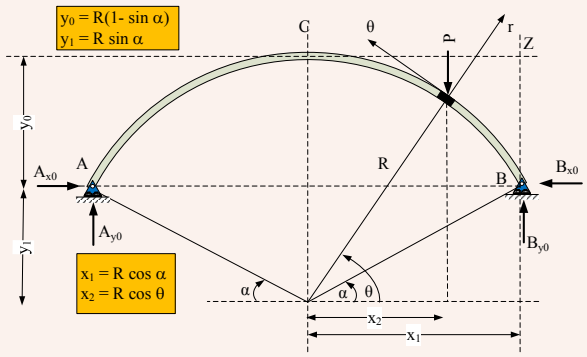
विश्लेषण के लिए तीन भारण दशाओं पर विचार किया गया है: एक बिंदु भार, मेहराब का स्वभार और मेहराब पर लगाया गया समान रूप से वितरित भार। स्वभार और समान रूप से वितरित भार मेहराब के केंद्र के सापेक्ष सममित होते हैं, जबकि मुकुट के अतिरिक्त किसी अन्य स्थान पर लगाया गया बिंदु भार केंद्र के सापेक्ष असममित होता है। अतः विश्लेषण को स्पष्ट करने के लिए स्वभार और समान रूप से वितरित भारण दशाओं हेतु समान चित्र तथा बिंदु भार दशा हेतु चित्रों का अलग समूह प्रयुक्त किया गया है। आलंब प्रतिक्रियाओं और आंतरिक बलों के वैश्लेषिक समीकरण ऊपर परिभाषित त्रिकोणमितीय चरों के रूप में हैं।

D.3.2 बिंदु भार

इस स्थिति में लगाया गया अवयवी बल निम्न प्रकार दिया जाता है

$$dp = P \tag{D.6}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र D.17: बिंदु भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब

प्राथमिक संरचना: प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल

चित्र D.17 में दर्शाए गए मूल दो-कब्जीय मेहराब के अंत्याधार B पर अतिरिक्त बल Bxo को हटाकर उसे प्राथमिक संरचना में बदला जाता है। मेहराब पर किसी भी स्थान पर बिंदु भार आंतरिक बलों में असांतत्य उत्पन्न करता है। आंतरिक बलों की यह असांतत्यता चित्र D.3 में दर्शाई गई है। अतः मेहराब के पूरे विस्तार में किसी कोण β पर आंतरिक बलों का व्यंजक उस कोण θ के सापेक्ष उसके संबंध पर निर्भर करता है जिस पर बिंदु भार लगाया गया है। निम्नलिखित दशाओं पर विचार करके आंतरिक बलों के लिए समीकरणों के विभिन्न समूह विकसित किए गए हैं।

$$\beta < \theta,\ \beta \geq \theta \tag{D.7}$$

चित्र D.18 के मुक्त-पिंड आरेख का उपयोग आलंबों पर क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाएँ तथा मेहराब के पूरे विस्तार में किसी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण निर्धारित करने के लिए किया जाता है। आलंब प्रतिक्रिया की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है।

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

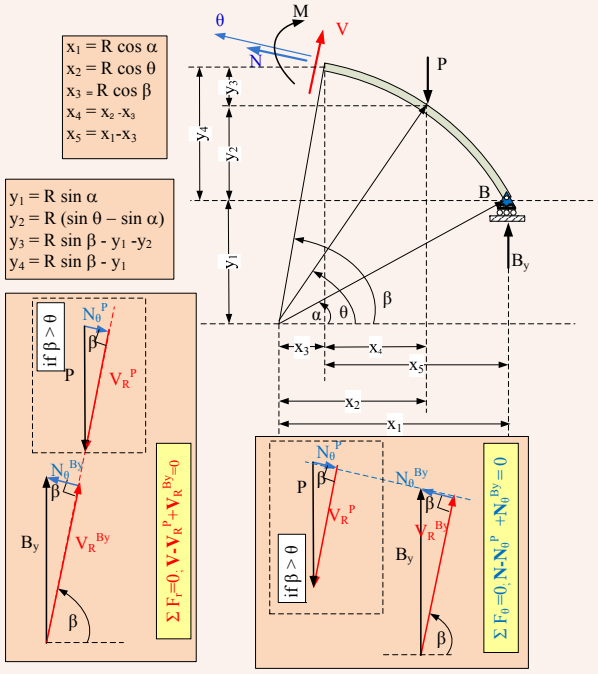
```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

0



चित्र D.18: अंत्याधार ‘b’ पर अतिरिक्त प्रणोद हटाने के बाद दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब

मेहराब के पूरे विस्तार में किसी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Primary Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV1=BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN1=BYCos[β] + NN1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,NN1]]; NN1[β_]=NN1/.Sol5[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM1= − BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(R\text{Cos}[\alpha]-R\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

For $\beta > \theta$

Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV2=BYSin[β] − PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P(-1+\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN2=BYCos[β] − PCos[β] + NN2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,NN2]]; NN2[β_]=NN2/.Sol8[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P\text{Cos}[\beta](-1+\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2= − BYx5 + Px4 + M2;
```

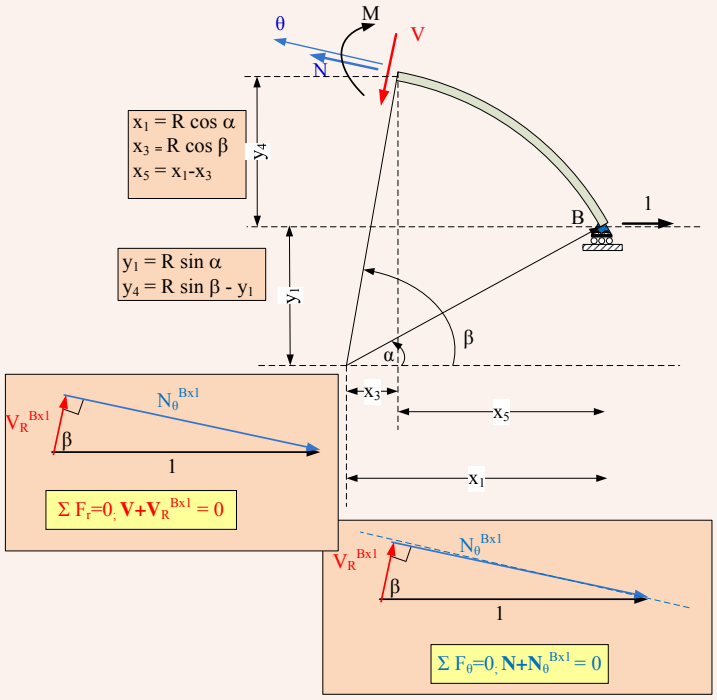

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2];M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

प्राथमिक संरचना: आभासी इकाई बल

वास्तविक भार के अधीन अंत्याधार B के विस्थापन की दिशा में Bxo के स्थान पर इकाई आभासी बल लगाया जाता है। चित्र D.19 के मुक्त-पिंड आरेख का उपयोग आभासी इकाई भार के कारण मेहराब के पूरे विस्तार में किसी कोण β पर उत्पन्न आंतरिक बल निर्धारित करने के लिए किया जाता है। आभासी बल से उत्पन्न आंतरिक बलों की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है।



चित्र D.19: लगाए गए आभासी बल सहित दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब

Primary Structure: Virtual Force

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
SigFδV=FullSimplify[BX1Cos[β] − δV];
```

```
Sol10=Solve[SigFδV==0,δV]; δV[β_]=δV/.Sol10[[1]]
```

```
Cos[β]
```

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδN=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δN];
```

```
Sol11=Solve[SigFδN==0,δN]; δN[β_]=δN/.Sol11[[1]]
```

```
Sin[β]
```

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδM=FullSimplify[−BX1y4 + δM];
```

```
Sol12=Solve[SigδM==0,δM]; δM[β_]=δM/.Sol12[[1]]
```

```
−RSin[α] + RSin[β]
```

मूल संरचना: अतिरिक्त बल

लगाए गए भार के अधीन मेहराब के विरूपण के निम्नलिखित संगतता समीकरण और आभासी कार्य विधि का उपयोग अंत्याधार B पर अतिरिक्त बल Bxo निर्धारित करने के लिए किया जाता है। इस प्रक्रिया में संगतता समीकरण के आनमनी और अक्षीय दोनों घटकों तथा आंतरिक बलों की असांतत्यता पर विचार किया जाता है।

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_\alpha^\theta \frac{M1\ \delta\mathrm{M1}}{EI}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta\mathrm{M2}}{EI}\,d\beta + \int_\alpha^\theta \frac{N1\ \delta\mathrm{N1}}{a\ e}\,d\beta + \int_\alpha^{(\pi-\alpha)} \frac{N2\ \delta\mathrm{N2}}{a\ e}\,d\beta\right] \tag{D.8}$$

जहाँ

$M1(\beta < \theta),\ M2(\beta \geq \theta)$	वास्तविक भार से धरन में उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$\delta\mathrm{M1}(\beta < \theta), \delta\mathrm{M2}(\beta \geq \theta)$	बाह्य आभासी इकाई भार से उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$N1(\beta < \theta), N2(\beta \geq \theta)$	वास्तविक भार से धरन में उत्पन्न आंतरिक अक्षीय बल
$\delta N1(\beta < \theta), \delta N2(\beta \geq \theta)$	बाह्य आभासी इकाई भार से उत्पन्न आंतरिक अक्षीय बल

अतिरिक्त बल की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

DeltaBX1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1[\beta]\delta M[\beta]}{ei} d\beta + \int_{\theta}^{\pi-\alpha} \frac{M2[\beta]\delta M[\beta]}{ei} d\beta\right]$;

DeltaBX1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{NN1[\beta]\delta N[\beta]}{ae} d\beta + \int_{\theta}^{\pi-\alpha} \frac{NN2[\beta]\delta N[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Deformation due to virtual load (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\delta M[\beta]\delta M[\beta]}{ei} d\beta\right]$;

F11A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\delta N[\beta]\delta N[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F11=F11F + F11A;

Redundant force in original structure

Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];

FullSimplify[BXO]

$$\frac{P\left(-(i-3aR^2)\text{Cos}[2\alpha]+(i-aR^2)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta]))\right)}{2(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+2(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]}$$

मूल संरचना: प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल

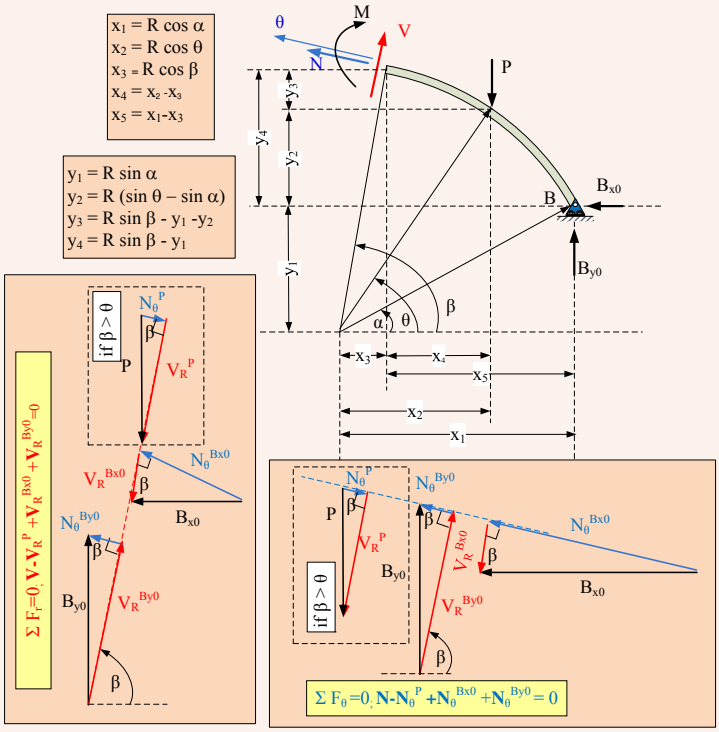
मूल संरचना में अतिरिक्त बल Bxo की गणना के बाद शेष आलंब प्रतिक्रियाएँ और मूल संरचना के आंतरिक बल चित्र D.20 के मुक्त-पिंड आरेख का उपयोग करके निर्धारित किए जाते हैं। आलंब प्रतिक्रियाओं की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है

Original Structure: Reactions

Determine Vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

SigMAO=BYO2x1 − P(x1 + x2);

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र D.20: बिंदु भार के अधीन मूल दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol13=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol13[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol14=Solve[BYO − P + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol14[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P-P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BYOx1 + BXOy1 − AYOx1 − AXOy1 − Px2]
```

0

आंतरिक बलों की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम निम्नलिखित है।

Original Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO1= − BXOCos[β] + BYOSin[β] + VO1;
```

```
Sol15=Solve[SigFVO1==0,VO1]; VO1[β_]:=VO1/.Sol15[[1]];
```

```
FullSimplify[VO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(-(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]\right.$$
$$+\left(\text{Cos}[\beta]\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO1=BXOSin[β] + BYOCos[β] + NO1;
```

```
Sol16=Solve[SigFNO1==0,NO1]; NO1[β_]:=NO1/.Sol16[[1]];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
FullSimplify[NO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(-\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\right.$$
$$+\left(\text{Sin}[\beta]\left(\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO1=BXOy4 − BYOx5 + MO1;
```

```
sol17=Solve[SigMO1==0,MO1]; MO1[β_]:=MO1/.sol17[[1]];
```

```
FullSimplify[MO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(R(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\right.$$
$$-\left(R(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\left(\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

For $\beta > \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO2= − BXOCos[β] + BYOSin[β] − PSin[β] + VO2;
```

```
Sol18=Solve[SigFVO2==0,VO2]; VO2[β_]:=VO2/.Sol18[[1]];
```

```
FullSimplify[VO2[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(2\text{Sin}[\beta]-(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]\right.$$
$$+\left(\text{Cos}[\beta]\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO2=BXOSin[β] + BYOCos[β] − PCos[β] + NO2;
```

```
Sol19=Solve[SigFNO2==0,NO2]; NO2[β_]:=NO2/.Sol19[[1]];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

FullSimplify[NO2[β]]

$$\frac{1}{2}P\,(2\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]+(\text{Sin}[\beta]\,((i-3aR^2)\,\text{Cos}[2\alpha]+(-i+aR^2)\,\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])))\,/((\pi-2\alpha)\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha])+(i-3aR^2)\,\text{Sin}[2\alpha]))$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO2=BXOy4 − BYOx5 + Px4 + MO2;
```

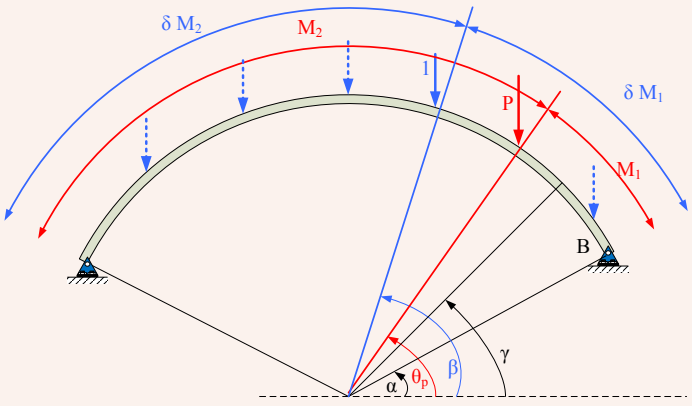
```
sol20=Solve[SigMO2==0,MO2]; MO2[β_]:=MO2/.sol20[[1]];
```

FullSimplify[MO2[β]]

$$\frac{1}{2}PR\,(2(\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\theta])+(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]+((\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\,(-(i-3aR^2)\,\text{Cos}[2\alpha]+(i-aR^2)\,\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])))\,/((\pi-2\alpha)\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha])+(i-3aR^2)\,\text{Sin}[2\alpha]))$$

विक्षेप

चित्र D.21 और ऊपर विकसित वैश्लेषिक समीकरणों का उपयोग सममित दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब में विक्षेप की गणना के लिए किया जाता है। विक्षेप की गणना के लिए आभासी कार्य का निम्नलिखित समीकरण प्रयुक्त किया जाता है।



चित्र D.21: दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब में विक्षेप की गणना हेतु मुक्त-पिंड आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

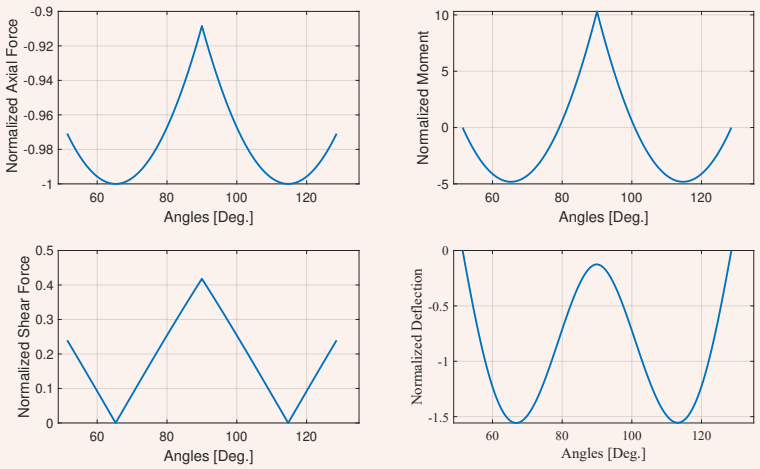
$$\delta P.\,\Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1\ \delta M1}{EI}\ Rd\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta M2}{EI}\ Rd\beta\right] \tag{D.9}$$

जहाँ

δP	Δ की दिशा में लगाया गया बाह्य आभासी इकाई भार
Δ	वास्तविक लगाए गए भार से उत्पन्न बाह्य विस्थापन
$M1(\beta < \theta),\ M2(\beta \geq \theta)$	वास्तविक बिंदु भार से धरन में उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$	बाह्य आभासी इकाई भार से उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण

परिणामों का सारांश

चित्र D.22 ऊपर चर्चित दो-कब्जीय मेहराब उदाहरण के आलेख दर्शाता है। मेहराब के मुकुट पर एक बिंदु भार लगाया गया है। आंतरिक अक्षीय बल और अपरूपण बल को अंत्याधारों पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया तथा प्रणोद के परिणामी के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आंतरिक आघूर्ण को आंतरिक अक्षीय बल और उठान के गुणनफल के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आलेख के अनुसार सभी आंतरिक बल मेहराब के मुकुट के सापेक्ष सममित हैं। अक्षीय संपीडन बल दोनों अंत्याधारों से विस्तार के लगभग $\frac{1}{6}$ पर अधिकतम होता है और मुकुट पर घटकर अधिकतम मान का लगभग 91% रह जाता है। आंतरिक आघूर्ण कब्जों पर शून्य और मुकुट पर अधिकतम होता है। दूसरी ओर अपरूपण बल आंतरिक अक्षीय बल और आघूर्ण की तुलना में कम है। विक्षेप कब्जों पर शून्य तथा दोनों अंत्याधारों से विस्तार के लगभग $\frac{1}{6}$ पर अधिकतम होता है।



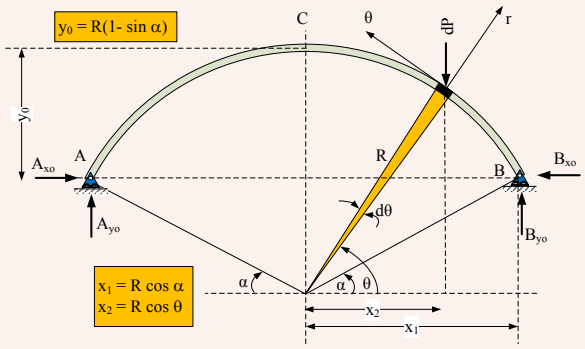
चित्र D.22: बिंदु भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.3.3 स्व-भार

इस स्थिति में अवयवी अनुप्रयुक्त बल निम्न प्रकार दिया जाता है:

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.10}$$



चित्र D.23: स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब

प्राथमिक संरचना: प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल

चित्र D.23 में दर्शाए गए मूल दो-कब्जीय मेहराब के अंत्याधार B पर अतिरिक्त बल Bxo को हटाकर उसे प्राथमिक संरचना में परिवर्तित किया जाता है। चित्र D.24 के मुक्त-पिंड आरेख का उपयोग आलंबों पर क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाएँ और मेहराब-विस्तार में किसी भी कोण β पर आंतरिक बल—अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण—निर्धारित करने के लिए किया जाता है। आलंब-प्रतिक्रिया की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Primary Strucure: Reactions

Define the load (omitting the dθ)

```
dP'=wR;
```

Determine reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ;
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol2=Solve[BY - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AY==0, AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

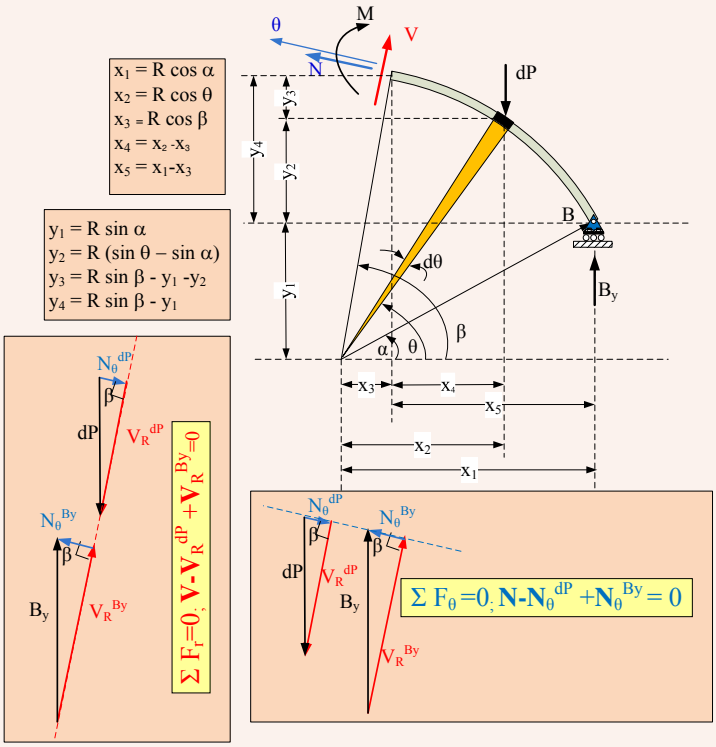
```
SigMZ=AXy0 - AY2x1 + ∫_α^(π-α) dP'(x1 - x2) dθ - BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 - AXy1 - AYx1 - ∫_α^(π-α) x2dP' dθ]
```

0



चित्र D.24: अंत्याधार B पर अतिरिक्त प्रणोद हटाने के बाद दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मेहराब-विस्तार में किसी भी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Primary Structure: Internal Forces

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV=BYSin[β] − ∫_α^β dP′Sin[β]dθ + V;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]];V[β_]=V/.Sol4[[1]]
```

$$-\tfrac{1}{2}Rw(\pi-2\beta)\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN=BYCos[β] − ∫_α^β dP′Cos[β]dθ + N;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]];NN[β_]=N/.Sol5[[1]]
```

$$-\tfrac{1}{2}Rw(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM= − BYx5 + ∫_α^β dP′x4dθ + M;
```

```
Sol6=Solve[SigM==0,M];M[β_]=M/.Sol6[[1]]
```

$$\tfrac{1}{2}\left(\pi R^2 w\text{Cos}[\alpha]-2R^2 w\alpha\text{Cos}[\alpha]-\pi R^2 w\text{Cos}[\beta]+2R^2 w\beta\text{Cos}[\beta]+2R^2 w\text{Sin}[\alpha]-2R^2 w\text{Sin}[\beta]\right)$$

प्राथमिक संरचना: आभासी एकक बल

आभासी एकक भार से मेहराब-विस्तार में किसी भी कोण β पर उत्पन्न आंतरिक बलों को निर्धारित करने के लिए चित्र D.19 तथा बिंदु भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के लिए प्रयुक्त समान प्रक्रिया अपनाई जाती है। आभासी बलों से उत्पन्न आंतरिक बलों की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Primary Structure: Virtual Force

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδV=FullSimplify[BX1Cos[β] − δV];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol10=Solve[SigFδV==0,δV]; δV[β_]=δV/.Sol10[[1]]
```

```
Cos[β]
```

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδN=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δN];
```

```
Sol11=Solve[SigFδN==0,δN]; δN[β_]=δN/.Sol11[[1]]
```

```
Sin[β]
```

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδM=FullSimplify[−BX1y4 + δM];
```

```
Sol12=Solve[SigδM==0,δM]; δM[β_]=δM/.Sol12[[1]]
```

```
−RSin[α] + RSin[β]
```

मूल संरचना: अतिरिक्त बल

अनुप्रयुक्त भार के अधीन मेहराब के विरूपण के लिए निम्न संगतता समीकरण का आभासी कार्य विधि के साथ उपयोग करके अंत्याधार B पर अतिरिक्त बल Bxo निर्धारित किया जाता है। इस प्रक्रिया में संगतता समीकरण के आनमनी और अक्षीय, दोनों घटक सम्मिलित किए जाते हैं।

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\mathrm{M}}{EI}\ d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N\ \delta\mathrm{N}}{a\ e}\ d\beta \right] \tag{D.11}$$

जहाँ

M वास्तविक भार से बीम में उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$\delta\mathrm{M}$ बाह्य आभासी एकक भार से उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
N वास्तविक भार से बीम में उत्पन्न आंतरिक अक्षीय बल
δN बाह्य आभासी एकक भार से उत्पन्न आंतरिक अक्षीय बल

अतिरिक्त बल की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

```
DeltaBX1F=FullSimplify[∫_α^(π−α) M[β]δM[β]/(e i) dβ];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
DeltaBX1A=FullSimplify[∫_α^(π−α) NN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;
```

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

```
F11F=FullSimplify[∫_α^(π−α) δM[β]δM[β]/(ei) dβ];
```

```
F11A=FullSimplify[∫_α^(π−α) δN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

Redundant force in original structure

```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\left((\pi-2\alpha)\left(-4aR^2-(i-5aR^2)\text{Cos}[2\alpha]\right)-(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha))\text{Sin}[2\alpha]\right)}{2(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+2(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]}$$

मूल संरचना: प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल

मूल संरचना में अतिरिक्त बल Bxo की गणना के बाद, चित्र D.25 के मुक्त-पिंड आरेख का उपयोग करके शेष आलंब-प्रतिक्रिया और मूल संरचना के आंतरिक बल निर्धारित किए जाते हैं। आलंब-प्रतिक्रियाओं की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 − ∫_α^(π−α)(x1 + x2)dP′ dθ;
```

```
Sol10=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol10[[1]]
```

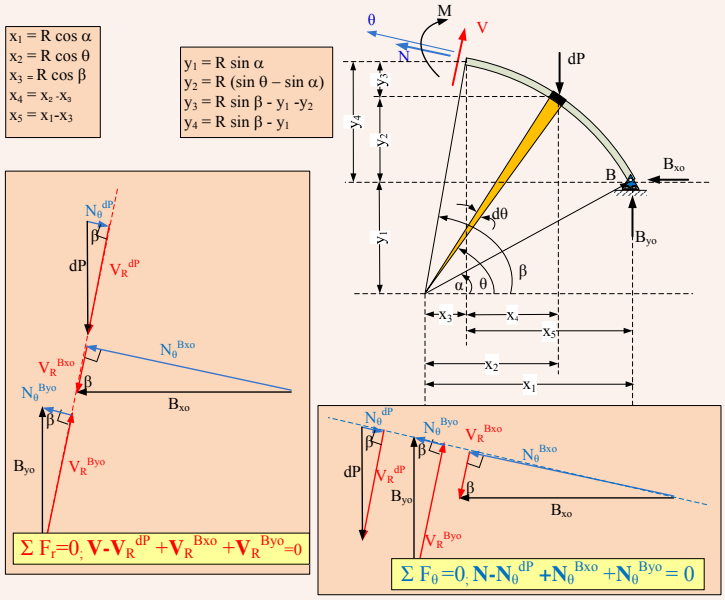
$$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol11=Solve[BYO − ∫_α^(π−α) dP′ dθ + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol11[[1]]
```

$$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र D.25: स्व-भार के अधीन मूल दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

$$\text{MO=FullSimplify}\left[\text{BYOx1} + \text{BXOy1} - \text{AYOx1} - \text{AXOy1} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{dP}' \text{x2} d\theta\right]$$

```
0
```

आंतरिक बलों की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

$$\text{SigFVO= – BXOCos}[\beta] + \text{BYOSin}[\beta] - \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}' \text{Sin}[\beta] d\theta + \text{VO};$$

```
Sol12=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol12[[1]];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

FullSimplify[VO[β]]

$$-\left(Rw\left(\text{Cos}[\beta]\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)+(\pi-2\beta)\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/\left(2\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] $-\int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}'\text{Cos}[\beta]d\theta$ + NO;

Sol13=Solve[SigFNO==**0**,NO]; NNO[β_]:=NO/.Sol13[[**1**]];

FullSimplify[NNO[β]]

$$\left(Rw\left((\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(-(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)+\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/\left(2\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

Clear[MO];

SigMO=BXOy4 − BYOx5 + $\int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}'\text{x4}d\theta$ + MO;

sol14=Solve[SigMO==**0**,MO]; MO[β_]:=MO/.sol14[[**1**]];

FullSimplify[MO[β]]

$$\frac{1}{2}R^2w\left((\pi-2\alpha)(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])-\left(\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)-2((\alpha-\beta)\text{Cos}[\beta]-\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\beta])\right)$$

विक्षेप

ऊपर विकसित विश्लेषणात्मक समीकरणों का उपयोग अनुभाग D.2.3 में विवेचित सममित वृत्ताकार मेहराब के उदाहरण में विक्षेप की गणना के लिए किया जाता है। विक्षेप की गणना हेतु आभासी कार्य का निम्न समीकरण प्रयुक्त होता है।

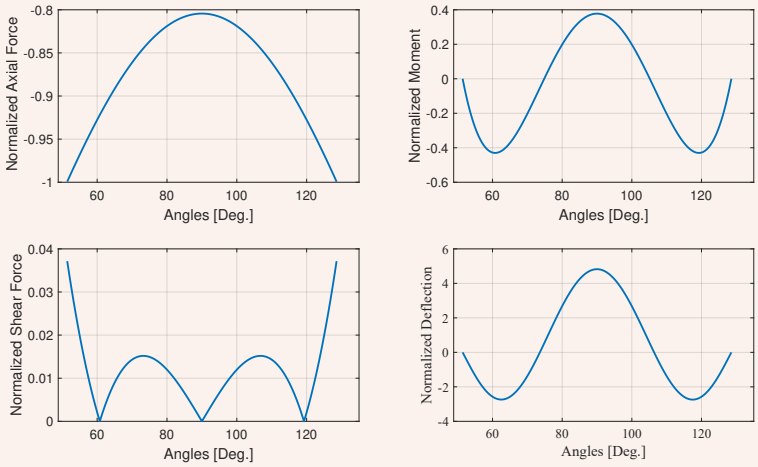
$$\delta P.\,\Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M\ \delta\text{M1}}{EI}\ Rd\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\text{M2}}{EI}\ Rd\beta\right] \tag{D.12}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ

δP	Δ की दिशा में अनुप्रयुक्त बाह्य आभासी एकक भार
Δ	वास्तविक अनुप्रयुक्त भार से उत्पन्न बाह्य विस्थापन
M	वास्तविक भार से बीम में उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$\delta M1(\beta < \theta)$, $\delta M2(\beta \geq \theta)$	बाह्य आभासी एकक भार से उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण

परिणामों का सारांश



चित्र D.26: स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख

चित्र D.26 ऊपर के अनुभाग में विवेचित स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय मेहराब के आलेख दर्शाता है। आंतरिक अक्षीय बल और अपरूपण बल को अंत्याधारों पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया तथा प्रणोद के परिणामी के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। अक्षीय संपीडन बल अंत्याधारों पर अधिकतम है और शिखर की ओर घटते हुए अधिकतम मान का लगभग 80.5% रह जाता है। दूसरी ओर, अपरूपण बल अपेक्षाकृत कम है और अंत्याधार से शिखर तक क्रमशः लगभग 3.75% और 1.5% के बीच परिवर्तित होता है। आंतरिक आघूर्ण को आंतरिक अक्षीय बल और उत्थान के गुणनफल के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आंतरिक आघूर्ण कब्जों के स्थान पर शून्य है और अंत्याधारों से विस्तार के लगभग $\frac{1}{6}$ पर अधिकतम है। आघूर्ण आरेख में दो नति-परिवर्तन बिंदु हैं, जो मेहराब के शून्य-विक्षेप बिंदुओं के अनुरूप हैं। विक्षेप शिखर पर अधिकतम है और विक्षेप-आलेख की रूपरेखा आघूर्ण आरेख के समान है। अधिकतम धनात्मक और ऋणात्मक विक्षेप क्रमशः मेहराब में अधिकतम धनात्मक और ऋणात्मक आघूर्ण के बिंदुओं के अनुरूप हैं।

D.3.4 समान रूप से वितरित भार

इस स्थिति में अवयवी अनुप्रयुक्त बल निम्न प्रकार दिया जाता है:

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.13}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चित्र D.23 में दर्शाए गए मूल दो-कब्जीय मेहराब के अंत्याधार B पर अतिरिक्त बल Bxo को हटाकर उसे प्राथमिक संरचना में परिवर्तित किया जाता है। वास्तविक भार से उत्पन्न आलंब-प्रतिक्रिया और आंतरिक बल तथा आभासी भार से उत्पन्न आंतरिक बल सम्मिलित करने वाले प्रथम तीन चरण स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के समान हैं। सरलता के लिए यहाँ केवल अतिरिक्त बल, आलंब-प्रतिक्रियाएँ और मूल संरचना के आंतरिक बलों की गणना से संबंधित चरण दर्शाए गए हैं।

मूल संरचना: अतिरिक्त बल

स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय मेहराब के लिए प्रयुक्त प्रक्रिया यहाँ दोहराई जाती है। अनुप्रयुक्त भार के अधीन मेहराब के विरूपण का संगतता समीकरण और आभासी कार्य विधि मिलकर अंत्याधार B पर अतिरिक्त बल Bxo निर्धारित करते हैं। इस प्रक्रिया में संगतता समीकरण के आनमनी और अक्षीय, दोनों घटक सम्मिलित किए जाते हैं। अतिरिक्त बल की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

```
DeltaBX1F=FullSimplify[Integrate[M[β]δM[β]/ei, {β, α, π-α}]];
```

```
DeltaBX1A=FullSimplify[Integrate[NN[β]δN[β]/ae, {β, α, π-α}]];
```

```
DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;
```

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

```
F11F=FullSimplify[Integrate[δM[β]δM[β]/ei, {β, α, π-α}]];
```

```
F11A=FullSimplify[Integrate[δN[β]δN[β]/ae, {β, α, π-α}]];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

Redundant force in original structure

```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{w\left(9aR^3\text{Cos}[\alpha]-16iR\text{Cos}[\alpha]^3+aR^3(7\text{Cos}[3\alpha]+3(\pi-2\alpha)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha]))\right)}{12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मूल संरचना: प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल

मूल संरचना में अतिरिक्त बल Bxo की गणना के बाद, चित्र D.25 के मुक्त-पिंड आरेख का उपयोग करके शेष आलंब-प्रतिक्रिया और मूल संरचना के आंतरिक बल निर्धारित किए जाते हैं। आलंब-प्रतिक्रियाओं की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ;
```

```
Sol10=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol10[[1]]
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol11=Solve [BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO] ; AYO=AYO/.Sol11[[1]]
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify [BYOx1 + BXOy1 - AYOx1 - AXOy1 - ∫_α^(π-α) dP'x2 dθ]
```

$$0$$

आंतरिक बलों की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol12=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol12[[1]];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

FullSimplify[VO[β]]

$$\left(Rw\left(3\left(-4i+3aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\left(-4i+7aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]\text{Cos}[\beta]\right.\right.$$
$$+3aR^2(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\beta](\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha])$$
$$\left.-6\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[2\beta]\right)/$$
$$\left(12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] $-\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′Cos[β]$d\theta$ + NO;

Sol13=Solve[SigFNO==**0**,NO]; NNO[β_]:=NO/.Sol13[[**1**]];

FullSimplify[NNO[β]]

$$\left(Rw\left(12\text{Cos}[\beta]^2\left(-(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.+\left(3\left(4i-3aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]+\left(4i-7aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]+3aR^2(\pi-2\alpha)(-\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[3\alpha])\right)\text{Sin}[\beta]\right)/$$
$$\left(12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

Clear[MO];

SigMO=BXOy4 − BYOx5 + $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′x4$d\theta$ + MO;

sol14=Solve[SigMO==**0**,MO]; MO[β_]:=MO/.sol14[[**1**]];

FullSimplify[MO[β]]

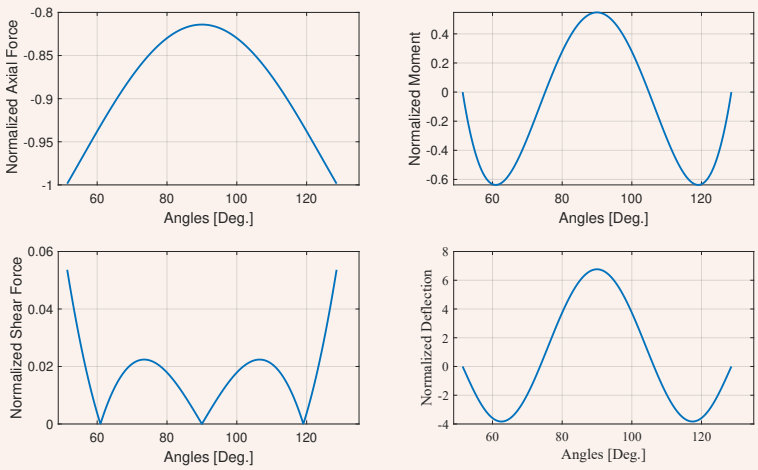
$$\frac{1}{12}R^2w\left(12\text{Cos}[\alpha](\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])-6(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])^2\right.$$
$$\left.+\left(\left(9aR^2\text{Cos}[\alpha]-16i\text{Cos}[\alpha]^3+aR^2(7\text{Cos}[3\alpha]+3(\pi-2\alpha)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha])\right)\right)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\right)/$$
$$\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)$$

विक्षेप

समान रूप से वितरित भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब में विक्षेप की गणना की प्रक्रिया तथा त्रिकोणमितीय चर के लिए प्रयुक्त संख्यात्मक मान स्व-भार की स्थिति के समान हैं; अतः उन्हें यहाँ नहीं दर्शाया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिणामों का सारांश



चित्र D.27: समान रूप से वितरित भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के आलेख

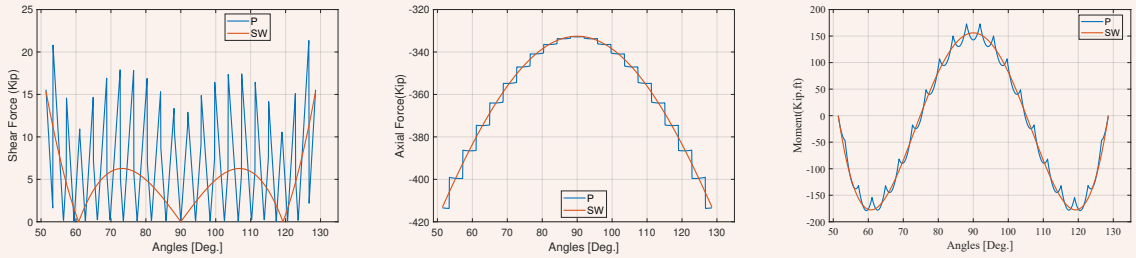
चित्र D.27 ऊपर के अनुभाग में विवेचित समान रूप से वितरित भार के अधीन दो-कब्जीय मेहराब के आलेख दर्शाता है। आंतरिक अक्षीय बल और अपरूपण बल को अंत्याधारों पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया तथा प्रणोद के परिणामी के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। अक्षीय संपीडन बल अंत्याधारों पर अधिकतम है और शिखर की ओर घटते हुए अधिकतम मान का लगभग 81.5% रह जाता है। दूसरी ओर, अपरूपण बल अपेक्षाकृत कम है और अंत्याधार से शिखर तक क्रमशः लगभग 5.25% और 2% के बीच परिवर्तित होता है। आंतरिक आघूर्ण को आंतरिक अक्षीय बल और उत्थान के गुणनफल के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आंतरिक आघूर्ण कब्जों के स्थान पर शून्य है और अंत्याधारों से विस्तार के लगभग $\frac{1}{6}$ पर अधिकतम है। आघूर्ण आरेख में दो नति-परिवर्तन बिंदु हैं, जो मेहराब के शून्य-विक्षेप बिंदुओं के अनुरूप हैं। विक्षेप शिखर पर अधिकतम है और विक्षेप-आलेख की रूपरेखा आघूर्ण आरेख के समान है। अधिकतम धनात्मक और ऋणात्मक विक्षेप क्रमशः मेहराब में अधिकतम धनात्मक और ऋणात्मक आघूर्ण के बिंदुओं के अनुरूप हैं।

D.3.5 दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन

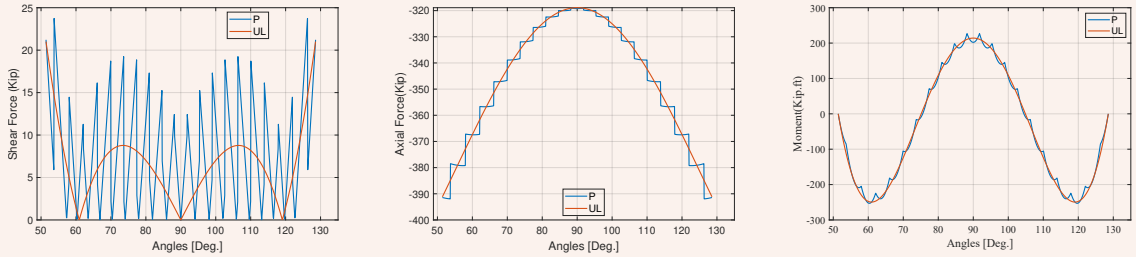
बिंदु भार, स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब के लिए ऊपर विकसित विश्लेषणात्मक समीकरणों का सत्यापन दो चरणों में किया जाता है। पहले, मेहराब-विस्तार में अनुप्रयुक्त स्व-भार और समान रूप से वितरित भार को 20 बिंदु भारों की श्रेणी में विभाजित किया जाता है। स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के विश्लेषणात्मक समीकरणों तथा उनके संगत बिंदु भारों का उपयोग करके आंतरिक बलों और विक्षेपों के आलेख बनाए जाते हैं। विश्लेषणात्मक समाधानों की वैधता जाँचने के लिए इन आलेखों को अध्यारोपित किया जाता है। चूँकि स्व-भार अथवा समान रूप से वितरित भार अपनी-अपनी बिंदु भार श्रेणी के समतुल्य हैं, उनके आलेख परस्पर निकटता से मेल खाते हैं।

चित्र D.28 और चित्र D.29 विश्लेषणात्मक समीकरणों के सत्यापन हेतु ऊपर विवेचित प्रक्रिया दर्शाते हैं। दूसरे चरण में, स्व-भार के अधीन वृत्ताकार मेहराब के लिए Sap 2000 प्रतिरूप विकसित किया जाता है। उसके विश्लेषण से प्राप्त आघूर्ण, अपरूपण बल और अक्षीय बल आरेखों की तुलना

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र D.28: स्व-भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब की तुलना



चित्र D.29: समान रूप से वितरित भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब की तुलना

विश्लेषणात्मक समीकरणों से बनाए गए आलेखों से की जाती है। चित्र D.30 के आघूर्ण आरेख, चित्र



चित्र D.30: Sap 2000—स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का आघूर्ण आरेख



चित्र D.31: Sap 2000—स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अक्षीय बल आरेख

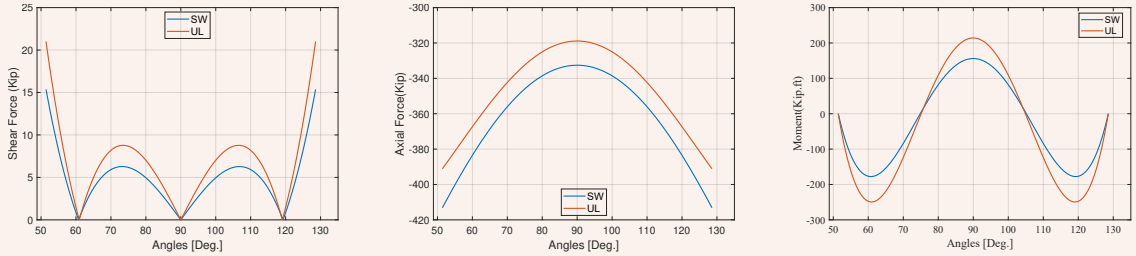
D.31 के अक्षीय बल आरेख और चित्र D.32 के अपरूपण बल आरेख के संख्यात्मक मान चित्रD.28 के आलेखों पर उनके संगत मानों से निकटता से मेल खाते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



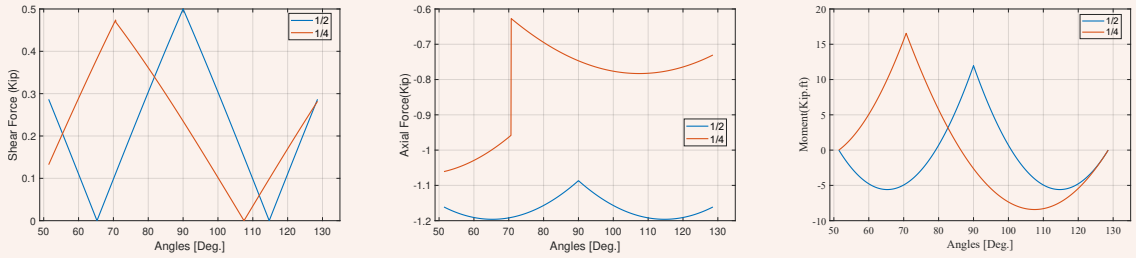
चित्र D.32: Sap 2000—स्व-भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब का अपरूपण बल आरेख

D.3.6 निष्कर्ष



चित्र D.33: स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब की तुलना

इस अनुभाग में बिंदु भार, स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के अधीन दो-कब्जीय मेहराब के संरचनात्मक व्यवहार की विवेचना आंतरिक बलों और विक्षेप के संदर्भ में की गई है। चित्र D.33 समान भार w=2.275 kip/ft के लिए स्व-भार और समान रूप से वितरित भार की स्थितियों की तुलना करता है। स्व-भार की तुलना में समान रूप से वितरित भार अधिक आंतरिक अपरूपण बल और आघूर्ण, किंतु कम आंतरिक अक्षीय संपीडन बल उत्पन्न करता है।



चित्र D.34: विस्तार के 1/2 और 1/4 पर बिंदु भार के अधीन दो-कब्जीय वृत्ताकार मेहराब

चित्र D.34 असममित भारण की स्थिति के आलेख दर्शाता है। इस प्रयोजन के लिए शिखर पर और विस्तार के चतुर्थांश पर एकक भार लगाया जाता है। इस स्थिति में विस्तार के चतुर्थांश पर लगाए गए बिंदु भार से उत्पन्न अधिकतम आघूर्ण, शिखर पर लगाए गए भार से उत्पन्न आघूर्ण का लगभग 1.4 गुना है। विस्तार के शिखर पर लगाए गए बिंदु भार से उत्पन्न अधिकतम अक्षीय बल, विस्तार के चतुर्थांश पर लगाए गए भार से उत्पन्न अक्षीय बल का लगभग 1.2 गुना है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.4 कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब

एक सममित कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब में कुल छह प्रतिक्रियाएँ होती हैं—प्रत्येक आलंब पर तीन। चूँकि कब्जारहित मेहराब की पसली आलंबों के बीच सतत होती है और आलंब-बिंदु अचल होते हैं, इसलिए अनुप्रयुक्त भार केवल ऊर्ध्वाधर ही नहीं, बल्कि क्षैतिज प्रतिक्रिया भी उत्पन्न करता है, जिसे सामान्यतः प्रणोद कहा जाता है। छह अज्ञात प्रतिक्रिया बलों को निर्धारित करने के लिए संतुलन के केवल तीन समीकरण उपलब्ध होने के कारण कब्जारहित मेहराब तृतीय कोटि तक स्थैतिकतः अनिर्धार्य होता है।

D.4.1 विश्लेषण प्रक्रिया

आरंभ में स्थैतिकतः अनिर्धार्य कब्जारहित मेहराब की तीन अतिरिक्त प्रतिक्रियाएँ हटाकर उसे स्थैतिकतः निर्धार्य मेहराब अर्थात् प्राथमिक संरचना में परिवर्तित किया जाता है। स्थैतिकी की साधारण विधि से अनुप्रयुक्त भार के कारण प्राथमिक संरचना की आलंब-प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल निकाले जाते हैं। तत्पश्चात् प्राथमिक संरचना पर कोई बाह्य बल न होने की कल्पना करके हटाए गए अतिरिक्त बलों अथवा आघूर्णों के स्थान पर क्रमशः आभासी एकक बल अथवा आघूर्ण लगाया जाता है और उनसे उत्पन्न आंतरिक बलों की गणना की जाती है। मूल स्थैतिकतः अनिर्धार्य कब्जारहित मेहराब की अतिरिक्त प्रतिक्रियाएँ निकालने के लिए अनुप्रयुक्त भार के अधीन मेहराब-विरूपण का संगतता समीकरण लिया जाता है। सभी आलंब-प्रतिक्रियाएँ प्राप्त हो जाने पर स्थैतिकी की साधारण विधि से मेहराब के आंतरिक बल निकाले जाते हैं। आगे इन्हीं आंतरिक बलों से अनुप्रयुक्त भार के अधीन मेहराब का विक्षेप निकाला जाता है। यहाँ वर्णित विश्लेषण Mathematica द्वारा सात चरणों में किया गया है। सभी चरणों की Mathematica फाइलें संबंधित अनुभागों में सम्मिलित हैं और सरलता के लिए केवल प्रतिक्रियाओं तथा आंतरिक बलों के अंतिम समीकरण विस्तृत किए गए हैं। विश्लेषण के लिए तीन भारण स्थितियाँ ली गई हैं: बिंदु भार, मेहराब का स्व-भार और मेहराब पर अनुप्रयुक्त समान रूप से वितरित भार। स्व-भार और समान रूप से वितरित भार मेहराब के केंद्र के प्रति सममित हैं, जबकि शिखर के अतिरिक्त किसी अन्य स्थान पर लगाया गया बिंदु भार केंद्र के प्रति असममित होता है। अतः विश्लेषण को सुपष्ट करने के लिए स्व-भार और समान रूप से वितरित भार की स्थितियों में समान चित्र प्रयुक्त हुए हैं, जबकि बिंदु भार की स्थिति के लिए भिन्न चित्र-समुच्चय प्रयुक्त हुआ है।

D.4.2 बिंदु भार

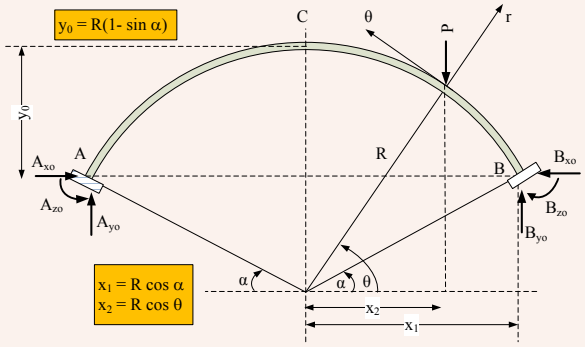
इस स्थिति में अवयवी अनुप्रयुक्त बल निम्न प्रकार दिया जाता है:

$$dp = P \tag{D.14}$$

प्राथमिक संरचना: प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल

चित्र D.35 में दर्शाए गए मूल कब्जारहित मेहराब के अतिरिक्त बल Bxo और अतिरिक्त आघूर्ण Bzo तथा Azo को हटाकर उसे प्राथमिक संरचना में परिवर्तित किया जाता है। मेहराब पर किसी भी स्थान पर बिंदु भार होने से आंतरिक बलों में असांतत्य उत्पन्न होता है। यह असांतत्य चित्र D.3 में दर्शाया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र D.35: बिंदु भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब

अतः मेहराब-विस्तार में किसी भी कोण β पर आंतरिक बलों का व्यंजक उस कोण θ के साथ उसके संबंध पर निर्भर करता है जिस पर बिंदु भार लगाया गया है। निम्न स्थितियों को ध्यान में रखकर आंतरिक बलों के लिए भिन्न समीकरण-समुच्चय विकसित किए जाते हैं।

$$\beta < \theta,\ \beta \geq \theta \tag{D.15}$$

कब्जारहित मेहराब की प्राथमिक संरचना दो-कब्जीय मेहराब के समान है। चित्र D.18 के मुक्त-पिंड आरेख से आलंबों पर क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाएँ और मेहराब-विस्तार में किसी भी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल तथा आघूर्ण निर्धारित किए जाते हैं। आलंब-प्रतिक्रिया की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

```
0
```

मेहराब-विस्तार में किसी भी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

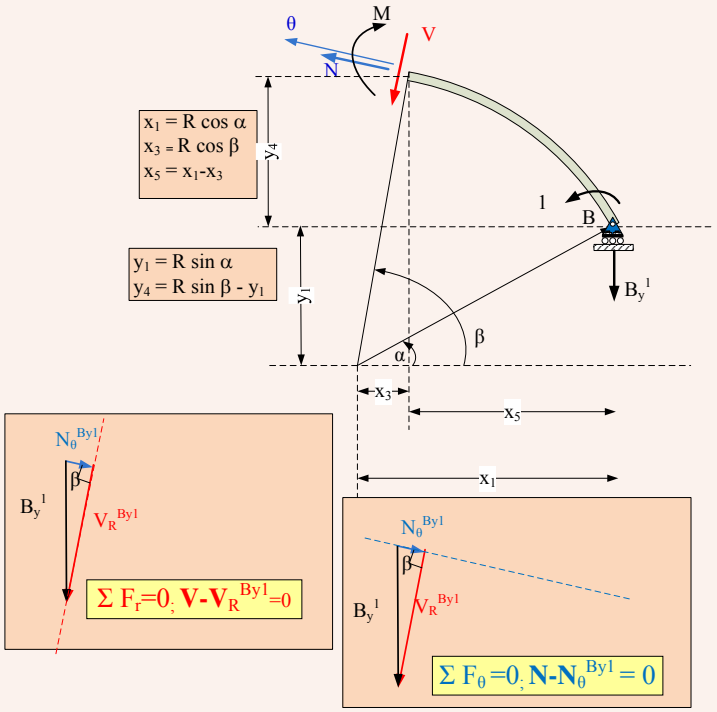
```
0
```

प्रति प्रकाशन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्राथमिक संरचना: आभासी एकक बल

वास्तविक भार के अधीन अंत्याधार B के विस्थापन की दिशा में Bxo के स्थान पर आभासी एकक बल लगाया जाता है। चित्र D.19 के मुक्त-पिंड आरेख से आभासी एकक भार के कारण मेहराब-विस्तार में किसी भी कोण β पर उत्पन्न आंतरिक बल निर्धारित किए जाते हैं। इसी प्रकार, वास्तविक भार के अधीन अंत्याधार B और A के घूर्णन की दिशा में क्रमशः Bzo और Azo के स्थान पर एकक आघूर्ण लगाए जाते हैं। चित्र D.36 और चित्र D.37 के मुक्त-पिंड आरेखों से अंत्याधार B और A पर लगाए गए आभासी आघूर्णों के कारण किसी भी कोण β पर उत्पन्न आंतरिक बल निर्धारित किए जाते हैं। आभासी बलों से उत्पन्न आंतरिक बलों की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।



चित्र D.36: B पर आभासी आघूर्ण सहित कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब

Primary Structure: Virtual Forces

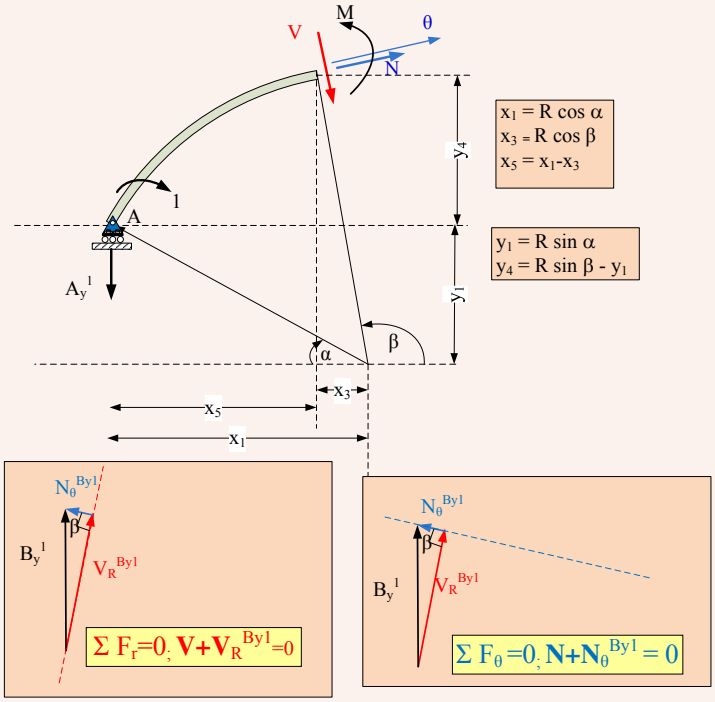
Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδVBX1=FullSimplify[BX1Cos[β] + δVBX1];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र D.37: A पर आभासी आघूर्ण सहित कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब

```
Sol7=Solve[SigFδVBX1==0,δVBX1]; δVBX1[β_]=δVBX1/.Sol7[[1]]
```

```
−Cos[β]
```

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδNBX1=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δNBX1];
```

```
Sol8=Solve[SigFδNBX1==0,δNBX1]; δNBX1[β_]=δNBX1/.Sol8[[1]]
```

```
Sin[β]
```

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδMBX1=FullSimplify[−BX1y4 + δMBX1];
```

```
Sol9=Solve[SigδMBX1==0,δMBX1]; δMBX1[β_]=δMBX1/.Sol9[[1]]
```

```
−RSin[α] + RSin[β]
```

Apply virtual moment at B

```
BZ1=1;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Determine vertical reaction at B by taking moment about A (CW +ve)

```
SigMABZ1=FullSimplify[2x1BY1 − BZ1];
```

```
Sol10=Solve[SigMABZ1==0,BY1]; BY1=BY1/.Sol10[[1]]
```

$$\frac{\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

Summation of forces in the radial direction; Shear(+ve outward)

```
SigFδVBZ1=FullSimplify[−BY1Sin[β] + δVBZ1];
```

```
Sol11=Solve[SigFδVBZ1==0,δVBZ1]; δVBZ1[β_]=δVBZ1/.Sol11[[1]]
```

$$\frac{\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]}{2R}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδNBZ1=FullSimplify[−BY1Cos[β] + δNBZ1];
```

```
Sol12=Solve[SigFδNBZ1==0,δNBZ1]; δNBZ1[β_]=δNBZ1/.Sol12[[1]]
```

$$\frac{\text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδMBZ1=FullSimplify[BY1x5 − BZ1 + δMBZ1];
```

```
Sol13=Solve[SigδMBZ1==0,δMBZ1]; δMBZ1[β_]=δMBZ1/.Sol13[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(1 + \text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha])$$

Apply virtual moment at A

```
AZ1=1;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment about A (CW +ve)

```
SigMAAZ1=FullSimplify[AZ1 − 2x1BY2];
```

```
Sol14=Solve[SigMAAZ1==0,BY2]; BY2=BY2/.Sol14[[1]];
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδVAZ1=FullSimplify[BY2Sin[β] + δVAZ1];
```

```
Sol15=Solve[SigFδVAZ1==0,δVAZ1]; δVAZ1[β_]=δVAZ1/.Sol15[[1]]
```

$$-\frac{\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]}{2R}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδNAZ1=FullSimplify[BY2Cos[β] + δNAZ1];
```

```
Sol16=Solve[SigFδNAZ1==0,δNAZ1]; δNAZ1[β_]=δNAZ1/.Sol16[[1]]
```

$$-\frac{\text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδMAZ1=FullSimplify[−BY2x5 + δMAZ1];
```

```
Sol17=Solve[SigδMAZ1==0,δMAZ1]; δMAZ1[β_]=δMAZ1/.Sol17[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(1 - \text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha])$$

मूल संरचना: अतिरिक्त बल

अनुप्रयुक्त भार के अधीन मेहराब के विरूपण का निम्न संगतता समीकरण आभासी कार्य विधि के साथ अतिरिक्त बलों Bxo, Bzo और Azo को निर्धारित करने के लिए प्रयुक्त होता है। इस प्रक्रिया में संगतता समीकरण के आनमनी और अक्षीय दोनों घटकों के साथ आंतरिक बलों के असांततय को भी सम्मिलित किया जाता है।

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1\ \delta\text{M1}}{EI}\ d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta\text{M2}}{EI}\ d\beta + \int_{\alpha}^{\theta} \frac{N1\ \delta\text{N1}}{a\ e}\ d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N2\ \delta\text{N2}}{a\ e}\ d\beta\right] \tag{D.16}$$

जहाँ

$M1(\beta < \theta), M2(\beta \geq \theta)$	वास्तविक भार से बीम में उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$\delta M1(\beta < \theta), \delta M2(\beta \geq \theta)$	बाह्य आभासी एकक भार से उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$N1(\beta < \theta), N2(\beta \geq \theta)$	वास्तविक भार से बीम में उत्पन्न आंतरिक अक्षीय बल
$\delta N1(\beta < \theta), \delta N2(\beta \geq \theta)$	बाह्य आभासी एकक भार से उत्पन्न आंतरिक अक्षीय बल

अतिरिक्त बल की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Redundant Forces

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

```
DeltaBX1F=FullSimplify [∫_α^θ M1[β]δMBX1[β]/(ei) dβ + ∫_θ^(π−α) M2[β]δMBX1[β]/(ei) dβ];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
DeltaBX1A=FullSimplify[∫_α^θ NN1[β]δNBX1[β]/(ae) dβ + ∫_θ^(π-α) NN2[β]δNBX1[β]/(ae) dβ];
```

```
DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;
```

Rotation at B

```
DeltaBZ1F=FullSimplify[∫_α^θ M1[β]δMBZ1[β]/(ei) dβ + ∫_θ^(π-α) M2[β]δMBZ1[β]/(ei) dβ];
```

```
DeltaBZ1A=FullSimplify[∫_α^θ NN1[β]δNBZ1[β]/(ae) dβ + ∫_θ^(π-α) NN2[β]δNBZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;
```

Rotation at A

```
DeltaAZ1F=FullSimplify[∫_α^θ M1[β]δMAZ1[β]/(ei) dβ + ∫_θ^(π-α) M2[β]δMAZ1[β]/(ei) dβ];
```

```
DeltaAZ1A=FullSimplify[∫_α^θ NN1[β]δNAZ1[β]/(ae) dβ + ∫_θ^(π-α) NN2[β]δNAZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;
```

Deformation due to virtual load (Flexural + Axial)

```
F11F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBX1[β]δMBX1[β]/(ei) dβ];
F11A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBX1[β]δNBX1[β]/(ae) dβ];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

```
F12F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBX1[β]δMBZ1[β]/(ei) dβ];
F12A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBX1[β]δNBZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F12=F12F + F12A;
```

```
F13F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBX1[β]δMAZ1[β]/(ei) dβ];
F13A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBX1[β]δNAZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F13=F13F + F13A;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
F22F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBZ1[β]δMBZ1[β]/(ei) dβ];
F22A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBZ1[β]δNBZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F22=F22F + F22A;
```

```
F23F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBZ1[β]δMAZ1[β]/(ei) dβ];
F23A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBZ1[β]δNAZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F23=F23F + F23A;
```

```
F33F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMAZ1[β]δMAZ1[β]/(ei) dβ];
F33A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNAZ1[β]δNAZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11+BZOF12+AZOF13==DeltaBX1,BXOF21+BZOF22+AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31+
BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{P\left(-(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(i-aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\theta]-2aR^2(\pi-2\alpha+2\text{Sin}[2\alpha])+4aR^2\text{Cos}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)}{2\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

मूल संरचना: प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल

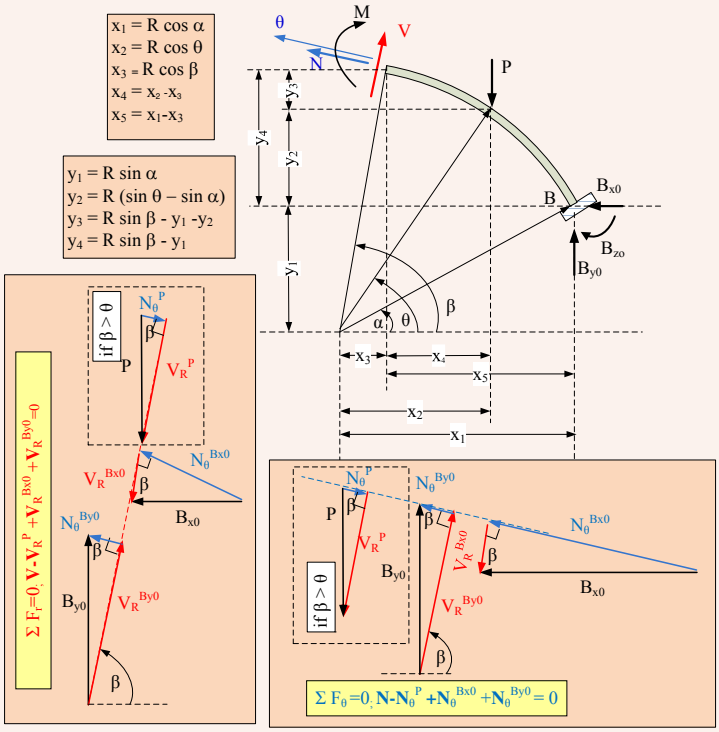
मूल संरचना में अतिरिक्त बल Bxo, Bzo और Azo की गणना के बाद, चित्र D.38 के मुक्त-पिंड आरेख से शेष आलंब-प्रतिक्रियाएँ और मूल संरचना के आंतरिक बल निर्धारित किए जाते हैं। आलंब-प्रतिक्रियाओं की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Reactions

Determine Vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 − P(x1 + x2) + AZO − BZO;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र D.38: बिंदु भार के अधीन मूल कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का मुक्त-पिंड आरेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol21=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol21[[1]];
```

```
FullSimplify[BYO]
```

$$\frac{P\left(-4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]-(i+aR^2)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+(-i+aR^2)\text{Sin}[2\theta]\right)}{2(i+aR^2)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])}$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol22=Solve[BYO - P + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[AYO]
```

$$\frac{P\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]-2(i+aR^2)(\alpha-\theta+\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha])+(i-aR^2)\text{Sin}[2\theta]\right)}{2(i+aR^2)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])}$$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[-BZO + BYOx1 + BXOy1 + AZO - AYOx1 - AXOy1 - Px2]
```

```
0
```

आंतरिक बलों की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO1= - BXOCos[β] + BYOSin[β] + VO1;
```

```
Sol23=Solve[SigFVO1==0,VO1]; VO1[β_]:=VO1/.Sol23[[1]];
```

```
FullSimplify[VO1[β]]
```

$$\begin{aligned}&\left(P\left(-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\beta](-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+\right.\right.\\&\left.4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\\&-2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\right.\\&\left.\left.\left(i+aR^2\right)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\right)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\right.\\&\left.\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)\end{aligned}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
SigFNO1=BXOSin[β] + BYOCos[β] + NO1;
```

```
Sol24=Solve[SigFNO1==0,NO1]; NO1[β_]:=NO1/.Sol24[[1]];
```

```
FullSimplify[NO1[β]]
```

$$\left(P\left(2\left(i+aR^2\right)\left(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\right.$$
$$-2\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\Big)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)\left(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO1=BXOy4 − BYOx5 + BZO + MO1;
```

```
sol25=Solve[SigMO1==0,MO1]; MO1[β_]:=MO1/.sol25[[1]];
```

```
FullSimplify[MO1[β]]
```

$$-\left(PR\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left((\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right.\right.$$
$$-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha](\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left(i+3aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+2aR^2\text{Sin}[\beta]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)$$
$$+\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-2\text{Cos}[\theta]\left(-2aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)(\pi-\alpha-\theta)-2aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-\alpha-\theta)\text{Sin}[2\alpha]\right)+\left(i+aR^2\right)(2(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]-2(\pi-2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\theta])\right)$$
$$+\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\Big)\Big/\left(2\left(i+aR^2\right)\left(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

For $\beta > \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO2= − BXOCos[β] + BYOSin[β] − PSin[β] + VO2;
```

```
Sol26=Solve[SigFVO2==0,VO2]; VO2[β_]:=VO2/.Sol26[[1]];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
FullSimplify[VO2[β]]
```

$$-\left(P\left(2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\beta](-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\right.$$
$$\left.-4\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta]\left(-i\text{Sin}[\theta]+aR^2(-2\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\theta])\right)\right)\right)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\right.$$
$$\left.\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO2=BXOSin[β] + BYOCos[β] − PCos[β] + NO2;
```

```
Sol27=Solve[SigFNO2==0,NO2]; NO2[β_]:=NO2/.Sol27[[1]];
```

```
FullSimplify[NO2[β]]
```

$$-\left(P\left(-2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\right.$$
$$\left.-4\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta]\left(-i\text{Sin}[\theta]+aR^2(-2\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\theta])\right)\right)\right)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\right.$$
$$\left.\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO2=BXOy4 − BYOx5 + Px4 + BZO + MO2;
```

```
sol28=Solve[SigMO2==0,MO2]; MO2[β_]:=MO2/.sol28[[1]];
```

```
FullSimplify[MO2[β]]
```

$$-\left(PR\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left((\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right.\right.$$
$$-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha](\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left(i+3aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+2aR^2\text{Sin}[\beta]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)$$
$$+\left(i+aR^2\right)\left(2\text{Cos}[\theta]\left((\pi-2\alpha)\left(aR^2(2+(\pi-2\alpha)(\alpha-\theta))+i(\pi-2\alpha)(\alpha-\theta)+2aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-8aR^2\text{Cos}[\alpha]^3\text{Sin}[\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)\text{Sin}[2\alpha]^2\right)+\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])(2(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]-2(\pi-2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\theta])\right)$$
$$-\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(-4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)\right.$$
$$\left.\left.(2\alpha-2\theta+\text{Sin}[2\alpha])+\left(-i+aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\right)\Big/\left(2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विक्षेप

चित्र D.21 और ऊपर विकसित विश्लेषणात्मक समीकरणों का उपयोग अनुभाग D.2.2 में विवेचित सममित कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के उदाहरण में विक्षेप की गणना के लिए किया जाता है। विक्षेप की गणना हेतु आभासी कार्य का निम्न समीकरण प्रयुक्त होता है।

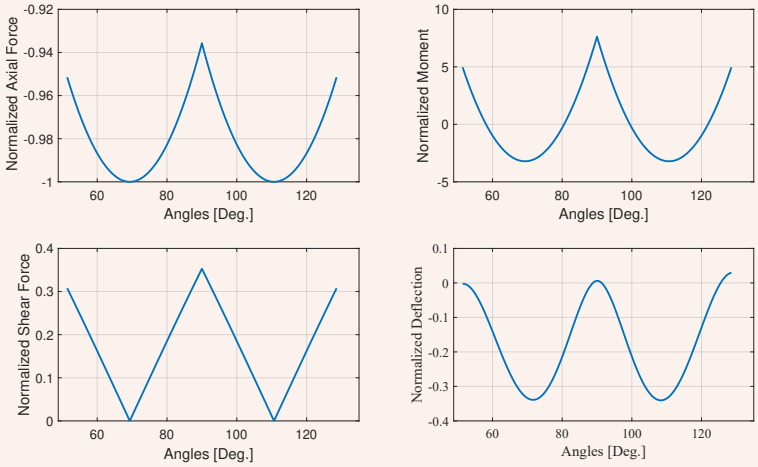
$$\delta P.\,\Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1\ \delta \mathrm{M1}}{EI}\ Rd\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta \mathrm{M2}}{EI}\ Rd\beta\right] \tag{D.17}$$

जहाँ

δP	Δ की दिशा में अनुप्रयुक्त बाह्य आभासी एकक भार
Δ	वास्तविक अनुप्रयुक्त भार से उत्पन्न बाह्य विस्थापन
$M1(\beta < \theta),\ M2(\beta \geq \theta)$	वास्तविक बिंदु भार से बीम में उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$	बाह्य आभासी एकक भार से उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण

परिणामों का सारांश

चित्र D.39 ऊपर के अनुभाग में विवेचित कब्जारहित मेहराब के उदाहरण के आलेख दर्शाता है। मेहराब के शिखर पर एक बिंदु भार लगाया गया है। आंतरिक अक्षीय बल और अपरूपण बल को अंत्याधारों पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया तथा प्रणोद के परिणामी के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आंतरिक आघूर्ण को आंतरिक अक्षीय बल और उत्थान के गुणनफल के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आलेख के अनुसार सभी आंतरिक बल मेहराब के शिखर के प्रति सममित हैं। अक्षीय संपीडन बल दोनों अंत्याधारों से विस्तार के लगभग $\frac{1}{4}$ पर अधिकतम है और शिखर पर घटकर अधिकतम मान का लगभग 93.5% रह जाता है। आंतरिक आघूर्ण शिखर पर अधिकतम है। दूसरी ओर, अपरूपण बल आंतरिक अक्षीय बल और आघूर्ण की तुलना में अपेक्षाकृत कम है। विक्षेप अंत्याधारों पर शून्य और दोनों अंत्याधारों से विस्तार के लगभग 1/4 पर अधिकतम है।



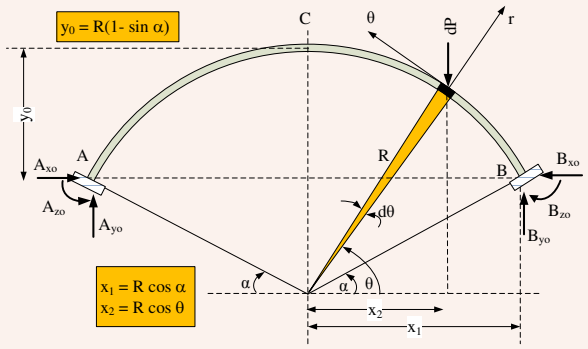
चित्र D.39: बिंदु भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के आलेख

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.4.3 स्व-भार

इस स्थिति में अवयवी अनुप्रयुक्त बल निम्न प्रकार दिया जाता है:

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.18}$$



चित्र D.40: स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब

प्राथमिक संरचना: प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल

चित्र D.40 में दर्शाए गए मूल कब्जारहित मेहराब के अतिरिक्त बल Bxo और अतिरिक्त आघूर्ण Bzo तथा Azo को हटाकर उसे प्राथमिक संरचना में परिवर्तित किया जाता है। कब्जारहित मेहराब की प्राथमिक संरचना दो-कब्जीय मेहराब के समान है। चित्र D.24 के मुक्त-पिंड आरेख से आलंबों पर क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाएँ और मेहराब-विस्तार में किसी भी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल तथा आघूर्ण निर्धारित किए जाते हैं। आलंब-प्रतिक्रिया की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Primary Structure: Reactions

Define the load (omitting the dθ)

```
dP'=wR;
```

Determine reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ;
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]];
```

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 - AY2x1 + ∫_α^(π-α) dP'(x1 - x2) dθ - BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 - AXy1 - AYx1 - ∫_α^(π-α) x2dP' dθ]
```

```
0
```

मेहराब-विस्तार में किसी भी कोण β पर अक्षीय बल, अपरूपण बल और आघूर्ण की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Primary Structure: Internal Forces

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV=BYSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + V;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi-2\beta)\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN=BYCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β] dθ + NN;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN==0,NN]]; NN[β_]=NN/.Sol5[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM= - BYx5 + ∫_α^β dP'x4 dθ + M;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol6=Solve[SigM==0,M];M[β_]=M/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2}\left(\pi R^2 w\text{Cos}[\alpha] - 2R^2 w\alpha\text{Cos}[\alpha] - \pi R^2 w\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\beta\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\text{Sin}[\alpha] - 2R^2 w\text{Sin}[\beta]\right)$$

प्राथमिक संरचना: आभासी एकक बल

चित्र D.19, चित्र D.36 और चित्र D.37 तथा बिंदु भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के लिए प्रयुक्त समान प्रक्रिया का अनुसरण करके आभासी एकक भार से मेहराब-विस्तार में किसी भी कोण β पर उत्पन्न आंतरिक बल निर्धारित किए जाते हैं। बिंदु भार के अधीन कब्जारहित मेहराब के लिए आभासी बलों से उत्पन्न आंतरिक बलों की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम यहाँ भी लागू होता है।

मूल संरचना: अतिरिक्त बल

अनुप्रयुक्त भार के अधीन मेहराब के विरूपण के लिए निम्न संगतता समीकरण का आभासी कार्य विधि के साथ उपयोग करके अतिरिक्त बल Bxo, Bzo और Azo निर्धारित किए जाते हैं। इस प्रक्रिया में संगतता समीकरण के आनमनी और अक्षीय, दोनों घटक सम्मिलित किए जाते हैं।

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\text{M}}{EI}\ d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N\ \delta\text{N}}{a\ e}\ d\beta\right] \tag{D.19}$$

जहाँ

M	वास्तविक भार से बीम में उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
δM	बाह्य आभासी एकक भार से उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
N	वास्तविक भार से बीम में उत्पन्न आंतरिक अक्षीय बल
δN	बाह्य आभासी एकक भार से उत्पन्न आंतरिक अक्षीय बल

अतिरिक्त बल की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

```
DeltaBX1F=FullSimplify[∫_α^(π-α) M[β]δMBX1[β]/(ei) dβ];
DeltaBX1A=FullSimplify[∫_α^(π-α) NN[β]δNBX1[β]/(ae) dβ];
```

```
DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;
```

Rotation at B

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
DeltaBZ1F=FullSimplify[∫_α^(π-α) M[β] δMBZ1[β]/(ei) dβ];
DeltaBZ1A=FullSimplify[∫_α^(π-α) NN[β] δNBZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;
```

Rotation at A

```
DeltaAZ1F=FullSimplify[∫_α^(π-α) M[β] δMAZ1[β]/(ei) dβ];
DeltaAZ1A=FullSimplify[∫_α^(π-α) NN[β] δNAZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;
```

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

```
F11F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBX1[β] δMBX1[β]/(ei) dβ];
F11A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBX1[β] δNBX1[β]/(ae) dβ];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

```
F12F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBX1[β] δMBZ1[β]/(ei) dβ];
F12A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBX1[β] δNBZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F12=F12F + F12A;
```

```
F13F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBX1[β] δMAZ1[β]/(ei) dβ];
F13A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBX1[β] δNAZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F13=F13F + F13A;
```

```
F22F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBZ1[β] δMBZ1[β]/(ei) dβ];
F22A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBZ1[β] δNBZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F22=F22F + F22A;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
F23F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBZ1[β]δMAZ1[β]/(e i) dβ];
F23A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBZ1[β]δNAZ1[β]/(a e) dβ];
```

```
F23=F23F + F23A;
```

```
F33F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMAZ1[β]δMAZ1[β]/(e i) dβ];
F33A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNAZ1[β]δNAZ1[β]/(a e) dβ];
```

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11+BZOF12+AZOF13==DeltaBX1,BXOF21+BZOF22+AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31+
BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\left(-2aR^2(-8+(\pi-2\alpha)^2)-(-16aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2)\text{Cos}[2\alpha]-(i+7aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}{2\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

मूल संरचना: प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल

मूल संरचना में अतिरिक्त बल Bxo, Bzo और Azo की गणना के बाद, चित्र D.41 के मुक्त-पिंड आरेख से शेष आलंब-प्रतिक्रियाएँ और मूल संरचना के आंतरिक बल निर्धारित किए जाते हैं। आलंब-प्रतिक्रियाओं की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

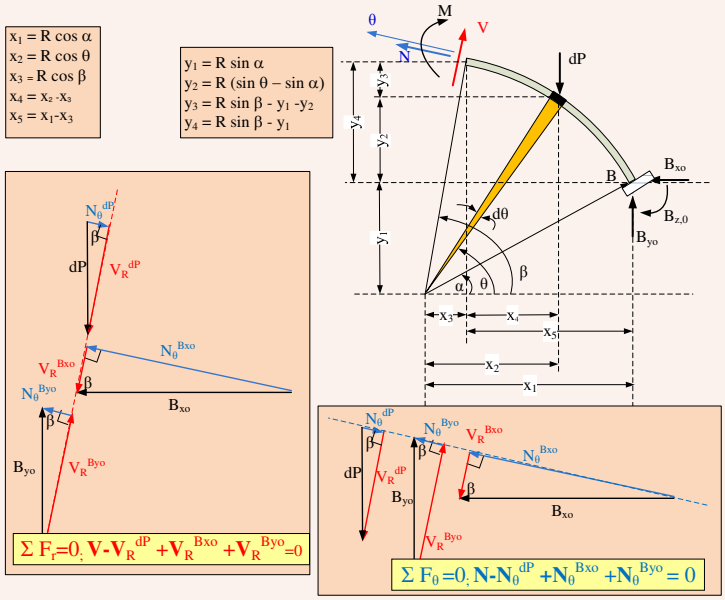
```
SigMAO=BYO2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ + AZO - BZO;
```

```
Sol18=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol18[[1]]
```

$$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र D.41: कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब में आंतरिक बल

Sol19=Solve $\left[\text{BYO} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{dP}' d\theta + \text{AYO}==0, \text{AYO}\right]$; AYO=AYO/.Sol19[[1]]

$\frac{1}{2} Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

AXO=BXO;

Clear[MO];

MO=FullSimplify $\left[\text{BZO} + \text{BYOx1} + \text{BXOy1} - \text{AZO} - \text{AYOx1} - \text{AXOy1} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{dP}' \text{x2} d\theta\right]$

0

आंतरिक बलों की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

SigFVO= $-\text{BXOCos}[\beta] + \text{BYOSin}[\beta] - \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}' \text{Sin}[\beta] d\theta + \text{VO}$;

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Sol20=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol20[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β_]]
```

$$-\left(Rw\left(\text{Cos}[\beta]\left(2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+7aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\pi-2\beta)\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β]dθ + NO;
```

```
Sol21=Solve[SigFNO==0,NO]; NO[β_]:=NO/.Sol21[[1]];
```

```
FullSimplify[NO[β_]]
```

$$-\left(Rw\left((\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+7aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
Clear[MO];
```

```
SigMO=BXOy4 - BYOx5 + BZO + ∫_α^β dP'x4dθ + MO;
```

```
sol22=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[MO[β_]]
```

$$\left(R^2w\left(2\left(3i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\left(aR^2-i\left(-3+(\pi-2\alpha)^2\right)-aR^2(\pi-2\alpha)^2+\left(3i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\alpha]\right.\right.$$
$$\left.+(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.$$
$$\left.\left.+\left(-2\left(4aR^2+i(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-8aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]-\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विक्षेप

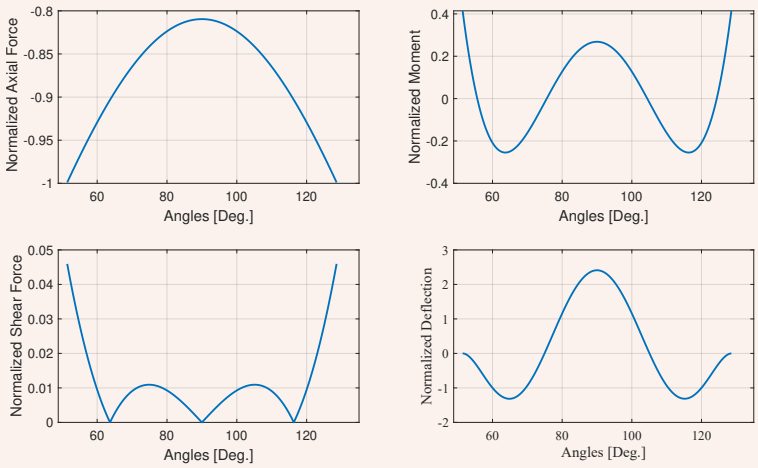
ऊपर विकसित विश्लेषणात्मक समीकरणों का उपयोग अनुभाग D.2.3 में विवेचित सममित कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के उदाहरण में विक्षेप की गणना के लिए किया जाता है। विक्षेप की गणना हेतु आभासी कार्य का निम्न समीकरण प्रयुक्त होता है।

$$\delta P.\,\Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M\ \delta \mathrm{M1}}{EI}\ Rd\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta \mathrm{M2}}{EI}\ Rd\beta\right] \tag{D.20}$$

जहाँ

δP	Δ की दिशा में अनुप्रयुक्त बाह्य आभासी एकक भार
Δ	वास्तविक अनुप्रयुक्त भार से उत्पन्न बाह्य विस्थापन
M	वास्तविक भार से बीम में उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$\delta M1(\beta < \theta)$	बाह्य आभासी एकक भार से उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण
$\delta M2(\beta \geq \theta)$	बाह्य आभासी एकक भार से उत्पन्न आंतरिक आघूर्ण

परिणामों का सारांश



चित्र D.42: स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के आलेख

चित्र D.42 ऊपर के अनुभाग में विवेचित स्व-भार के अधीन कब्जारहित मेहराब के आलेख दर्शाता है। आंतरिक अक्षीय बल और अपरूपण बल को अंत्याधारों पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया तथा प्रणोद के परिणामी के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। अक्षीय संपीडन बल अंत्याधारों पर अधिकतम है और शिखर की ओर घटते हुए अधिकतम मान का लगभग 81% रह जाता है। दूसरी ओर, अपरूपण बल अपेक्षाकृत कम है और अंत्याधार से शिखर तक क्रमशः लगभग 4.75% और 1.0% के बीच परिवर्तित होता है। आंतरिक आघूर्ण को आंतरिक अक्षीय बल और उत्थान के गुणनफल के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आंतरिक आघूर्ण अंत्याधारों पर अधिकतम है और शिखर पर तथा अंत्याधारों से विस्तार के लगभग $\frac{1}{6}$ पर अधिकतम मान का लगभग 60 % है। आघूर्ण आरेख में चार नति-परिवर्तन बिंदु हैं, जो मेहराब के शून्य-विक्षेप बिंदुओं

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

के अनुरूप हैं। विक्षेप शिखर पर अधिकतम है और विक्षेप-आलेख की रूपरेखा आघूर्ण आरेख के समान है। धनात्मक और ऋणात्मक विक्षेप क्रमशः मेहराब के धनात्मक और ऋणात्मक आघूर्ण के अनुरूप हैं।

D.4.4 समान रूप से वितरित भार

इस स्थिति में अवयवी अनुप्रयुक्त बल निम्न प्रकार दिया जाता है:

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.21}$$

चित्रD.40 में दर्शाए गए मूल कब्जारहित मेहराब के अतिरिक्त बल Bxo और अतिरिक्त आघूर्ण Bzo तथा Azo को हटाकर उसे प्राथमिक संरचना में परिवर्तित किया जाता है। वास्तविक भार से उत्पन्न आलंब-प्रतिक्रिया और आंतरिक बल तथा आभासी भार से उत्पन्न आंतरिक बल सम्मिलित करने वाले प्रथम तीन चरण स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के समान हैं। सरलता के लिए यहाँ केवल अतिरिक्त बल, आलंब-प्रतिक्रियाएँ और मूल संरचना के आंतरिक बलों की गणना से संबंधित चरण दर्शाए गए हैं।

मूल संरचना: अतिरिक्त बल

स्व-भार के अधीन कब्जारहित मेहराब के लिए प्रयुक्त प्रक्रिया यहाँ दोहराई जाती है। अनुप्रयुक्त भार के अधीन मेहराब के विरूपण का संगतता समीकरण और आभासी कार्य विधि मिलकर अंत्याधार B पर अतिरिक्त बल Bxo निर्धारित करते हैं। इस प्रक्रिया में संगतता समीकरण के आनमनी और अक्षीय, दोनों घटक सम्मिलित किए जाते हैं। अतिरिक्त बल की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Redundant Forces

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

$$\text{DeltaBX1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\text{MBX1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBX1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\text{NN}[\beta]\delta\text{NBX1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;}$$

Rotation at B

$$\text{DeltaBZ1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\text{MBZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBZ1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\text{NN}[\beta]\delta\text{NBZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;}$$

Rotation at A

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

DeltaAZ1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
DeltaAZ1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{NN[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MBX1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F11A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NBX1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F11=F11F + F11A;

F12F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F12A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F12=F12F + F12A;

F13F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F13A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F13=F13F + F13A;

F22F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBZ1[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F22A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBZ1[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F22=F22F + F22A;

F23F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBZ1[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F23A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBZ1[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F23=F23F + F23A;

F33F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MAZ1[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F33A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NAZ1[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11+BZOF12+AZOF13==DeltaBX1,BXOF21+BZOF22+AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31+
BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\text{Cos}[\alpha]\left(-(\pi-2\alpha)\left(2(i-aR^2)+(2i+aR^2)\text{Cos}[2\alpha]\right)-3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)}{3\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

मूल संरचना: प्रतिक्रियाएँ और आंतरिक बल

मूल संरचना में अतिरिक्त बल Bxo, Bzo और Azo की गणना के बाद, चित्र D.41 के मुक्त-पिंड आरेख से शेष आलंब-प्रतिक्रियाएँ और मूल संरचना के आंतरिक बल निर्धारित किए जाते हैं। आलंब-प्रतिक्रियाओं की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Strcture: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ + AZO - BZO;
```

```
Sol18=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol18[[1]]
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol19=Solve [BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO] ; AYO=AYO/.Sol19[[1]]
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

MO=FullSimplify $\left[\text{BZO} + \text{BYOx1} + \text{BXOy1} - \text{AZO} - \text{AYOx1} - \text{AXOy1} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{dP'x2}\, d\theta\right]$

0

आंतरिक बलों की गणना की व्युत्पत्ति दर्शाने वाला Mathematica निर्गम नीचे दिया गया है।

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

SigFVO= $-\text{BXOCos}[\beta] + \text{BYOSin}[\beta] - \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP'Sin}[\beta]\, d\theta + \text{VO};$

Sol20=Solve[SigFVO==**0**,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol20[[**1**]];

FullSimplify[VO[β_]]

$$\begin{aligned}&\left(Rw\left(2\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]\left(-(\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)-3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.\\&\left.-3\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[2\beta]\right)\Big)/\\&\left(6\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)\end{aligned}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

SigFNO=$\text{BXOSin}[\beta] + \text{BYOCos}[\beta] - \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP'Cos}[\beta]\, d\theta + \text{NO};$

Sol21=Solve[SigFNO==**0**,NO]; NO[β_]:=NO/.Sol21[[**1**]];

FullSimplify[NO[β_]]

$$\begin{aligned}&\left(Rw\left(6\text{Cos}[\beta]^2\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.\\&\left.+2\text{Cos}[\alpha]\left((\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)+3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\Big)/\\&\left(6\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)\end{aligned}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

Clear[MO];

SigMO=$\text{BXOy4} - \text{BYOx5} + \text{BZO} + \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP'x4}\, d\theta + \text{MO};$

sol22=Solve[SigMO==**0**,MO]; MO[β_]:=MO/.sol22[[**1**]];

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

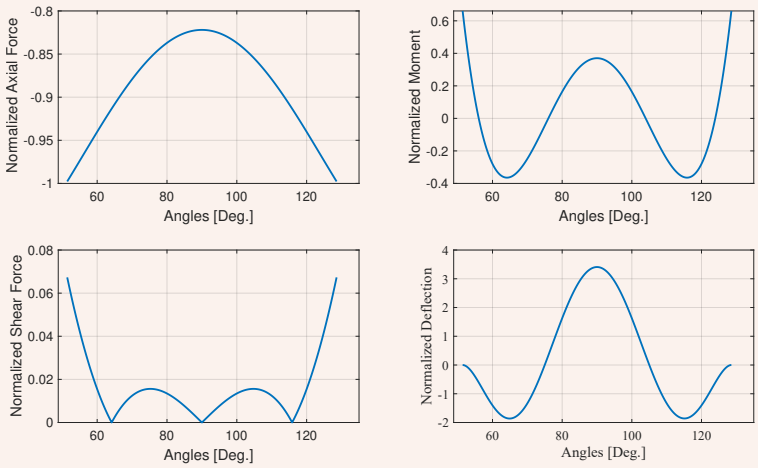
FullSimplify[MO[β_]]

$$\left(R^2 w \left(9\left(-3i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]^2 + 3\text{Cos}[2\beta]\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right) + \text{Cos}[\alpha]\left(-\left(5i+aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]-6\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]+4\left((\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)+3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)\Big/\left(12\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

विक्षेप

समान रूप से वितरित भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब में विक्षेप की गणना की प्रक्रिया तथा त्रिकोणमितीय चर के लिए प्रयुक्त संख्यात्मक मान स्व-भार की स्थिति के समान हैं; अतः उन्हें यहाँ नहीं दर्शाया गया है।

परिणामों का सारांश



चित्र D.43: समान रूप से वितरित भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के आलेख

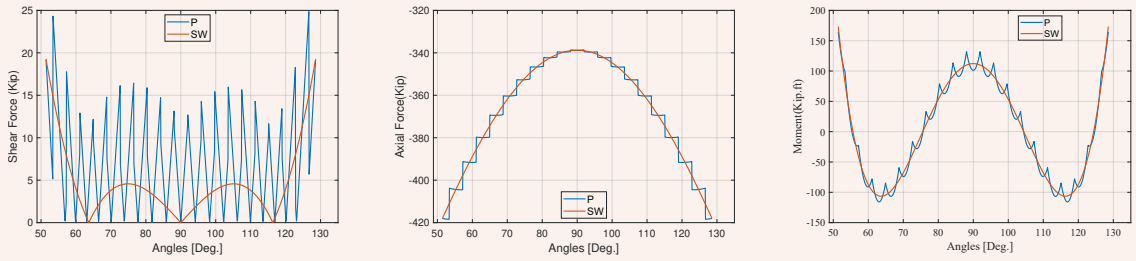
चित्र D.43 ऊपर के अनुभाग में विवेचित समान रूप से वितरित भार के अधीन कब्जारहित मेहराब के आलेख दर्शाता है। आंतरिक अक्षीय बल और अपरूपण बल को अंत्याधारों पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रिया तथा प्रणोद के परिणामी के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। अक्षीय संपीडन बल अंत्याधारों पर अधिकतम है और शिखर की ओर घटते हुए अधिकतम मान का लगभग 82.5% रह जाता है। दूसरी ओर, अपरूपण बल अपेक्षाकृत कम है और अंत्याधार से शिखर तक क्रमशः लगभग 6.75% और 1.75% के बीच परिवर्तित होता है। आंतरिक आघूर्ण को आंतरिक अक्षीय बल और उत्थान के गुणनफल के सापेक्ष सामान्यीकृत किया गया है। आंतरिक आघूर्ण अंत्याधारों पर अधिकतम है और शिखर पर तथा अंत्याधारों से विस्तार के लगभग $\frac{1}{6}$ पर अधिकतम मान का लगभग 67 % है। आघूर्ण आरेख में चार नति-परिवर्तन बिंदु हैं, जो मेहराब के शून्य-विक्षेप बिंदुओं के अनुरूप हैं। विक्षेप शिखर पर अधिकतम है और विक्षेप-आलेख की

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

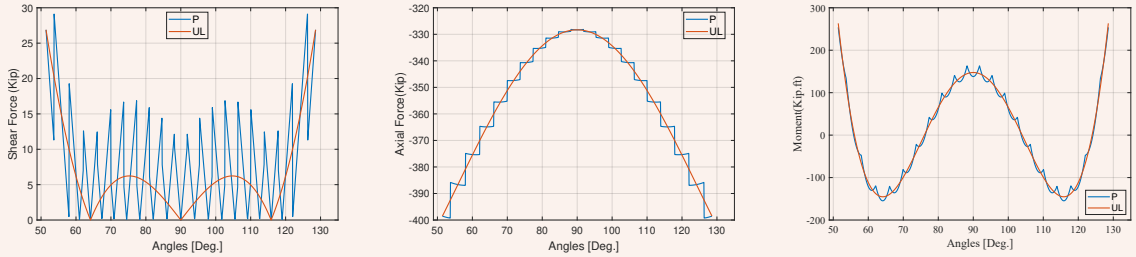
रूपरेखा आघूर्ण आरेख के समान है। धनात्मक और ऋणात्मक विक्षेप क्रमशः मेहराब के धनात्मक और ऋणात्मक आघूर्ण के अनुरूप हैं।

D.4.5 कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब: सत्यापन

बिंदु भार, स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब के लिए ऊपर विकसित विश्लेषणात्मक समीकरणों का सत्यापन दो चरणों में किया जाता है। पहले, मेहराब-विस्तार में अनुप्रयुक्त स्व-भार और समान रूप से वितरित भार को 20 बिंदु भारों की श्रेणी में विभाजित किया जाता है। स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के विश्लेषणात्मक समीकरणों तथा उनके संगत बिंदु भारों का उपयोग करके आंतरिक बलों और विक्षेपों के आलेख बनाए जाते हैं। विश्लेषणात्मक समाधानों की वैधता जाँचने के लिए इन आलेखों को अध्यारोपित किया जाता है। चूँकि स्व-भार अथवा समान रूप से वितरित भार अपनी-अपनी बिंदु भार श्रेणी के समतुल्य हैं, उनके आलेख परस्पर निकटता से मेल खाते हैं।



चित्र D.44: स्व-भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब की तुलना



चित्र D.45: समान रूप से वितरित भार और बिंदु भारों की श्रेणी के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब की तुलना

चित्र D.44 और चित्र D.45 विश्लेषणात्मक समीकरणों के सत्यापन हेतु ऊपर विवेचित प्रक्रिया दर्शाते हैं। दूसरे चरण में, स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का Sap 2000 प्रतिरूप विकसित किया जाता है। उसके विश्लेषण से प्राप्त आघूर्ण, अपरूपण बल और अक्षीय बल आरेखों की तुलना विश्लेषणात्मक समीकरण से बनाए गए आलेखों से की जाती है। चित्र D.46 के आघूर्ण आरेख, चित्र D.47 के अक्षीय बल आरेख और चित्र D.48 के अपरूपण बल आरेख के संख्यात्मक मान चित्रD.44 के आलेखों पर उनके संगत मानों से निकटता से मेल खाते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



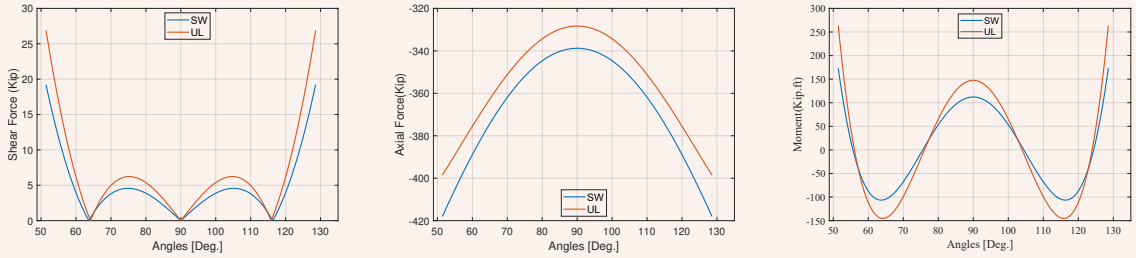
चित्र D.46: Sap 2000—स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का आघूर्ण आरेख



चित्र D.47: Sap 2000—स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का अक्षीय बल आरेख



चित्र D.48: Sap 2000—स्व-भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब का अपरूपण बल आरेख



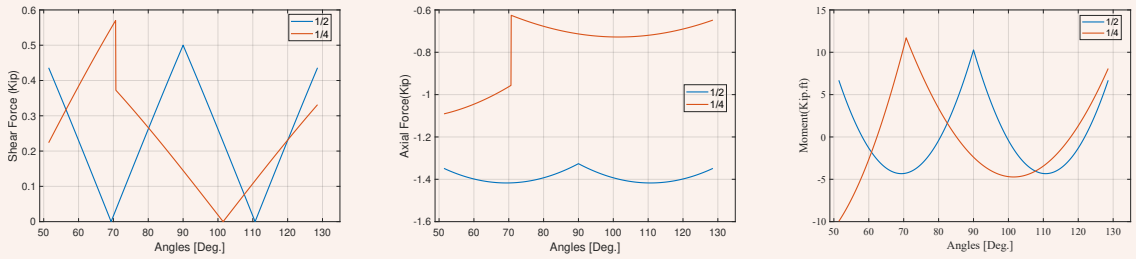
चित्र D.49: स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब की तुलना

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

D.4.6 निष्कर्ष

इस अनुभाग में बिंदु भार, स्व-भार और समान रूप से वितरित भार के अधीन कब्जारहित मेहराब के संरचनात्मक व्यवहार की विवेचना आंतरिक बलों और विक्षेप के संदर्भ में की गई है। चित्र D.49 समान भार w=2.275 kip/ft के लिए स्व-भार और समान रूप से वितरित भार की स्थितियों की तुलना करता है। स्व-भार की तुलना में समान रूप से वितरित भार अधिक आंतरिक अपरूपण बल, आघूर्ण और विक्षेप, किंतु कम आंतरिक अक्षीय संपीडन बल उत्पन्न करता है। चित्र D.50 असममित भारण की स्थिति के आलेख



चित्र D.50: विस्तार के 1/2 और 1/4 पर बिंदु भार के अधीन कब्जारहित वृत्ताकार मेहराब

दर्शाता है। इस प्रयोजन के लिए शिखर पर और विस्तार के चतुर्थांश पर एकक भार लगाया जाता है। इस स्थिति में विस्तार के चतुर्थांश पर लगाए गए बिंदु भार से उत्पन्न अधिकतम आघूर्ण, शिखर पर लगाए गए भार से उत्पन्न आघूर्ण का लगभग 1.2 गुना है। विस्तार के शिखर पर लगाए गए बिंदु भार से उत्पन्न अधिकतम अक्षीय बल, विस्तार के चतुर्थांश पर लगाए गए भार से उत्पन्न अक्षीय बल का लगभग 1.3 गुना है।

D.5 निष्कर्ष

इस अध्याय का केंद्रबिंदु तीन-कब्जीय, दो-कब्जीय और कब्जारहित मेहराबों की आलंब-प्रतिक्रियाओं तथा आंतरिक बलों के विश्लेषणात्मक समीकरण विकसित करना और इन समीकरणों से प्रत्येक प्रकार के मेहराब का संरचनात्मक व्यवहार समझना था। तीन-कब्जीय मेहराब स्थैतिकतः निर्धार्य है, अतः उसके विश्लेषणात्मक समीकरणों की व्युत्पत्ति के लिए केवल स्थैतिकी की साधारण विधियाँ आवश्यक थीं। इसके विपरीत, स्थैतिकतः अनिर्धार्य दो-कब्जीय और कब्जारहित मेहराबों के लिए विरूपण के संगतता समीकरण के साथ आभासी कार्य विधि प्रयुक्त हुई।

प्रत्येक प्रकार के मेहराब का विश्लेषण तीन भारण स्थितियों—बिंदु भार, स्व-भार और समान रूप से वितरित भार—के अधीन किया गया। सममित भारण में तीनों प्रकार के मेहराबों के बीच मुख्य अंतर उनके आघूर्ण आरेख में नति-परिवर्तन बिंदुओं की संख्या और मेहराब-विस्तार में आघूर्ण-वितरण पर उनके प्रभाव का है। चित्र D.15 के अनुसार तीन-कब्जीय मेहराब में कोई नति-परिवर्तन बिंदु नहीं होता और निकटवर्ती कब्जों के बीच उच्च ऋणात्मक आघूर्ण होता है। चित्र D.33 में लाल बिंदुओं से दर्शाए अनुसार दो-कब्जीय मेहराब में दो नति-परिवर्तन बिंदु होते हैं और शिखर पर उच्च धनात्मक आघूर्ण होता है। चित्र D.49 में लाल बिंदुओं से दर्शाए अनुसार कब्जारहित मेहराब में चार नति-परिवर्तन बिंदु होते हैं और अंत्याधारों पर उच्च धनात्मक आघूर्ण होता है। तीनों मेहराबों के लिए स्व-भार और समान रूप से वितरित भार की तुलना से ज्ञात होता है कि स्व-भार आंतरिक अक्षीय बल में अधिक योगदान देता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

है, जबकि समान रूप से वितरित भार आंतरिक आघूर्ण में अधिक योगदान देता है। यह अपने स्व-भार का प्रतिरोध करने वाली मेहराब की विशिष्ट संपीडन क्रियाविधि को दर्शाता है।

प्रत्येक प्रकार के मेहराब के आंतरिक बलों के आलेख दर्शाते हैं कि मेहराब के शिखर पर लगाया गया बिंदु भार, मेहराब के स्व-भार अथवा पूरे विस्तार पर लगाए गए समान रूप से वितरित भार की तुलना में आंतरिक बलों का भिन्न प्रतिरूप उत्पन्न करता है। दो-कब्जीय अथवा कब्जारहित मेहराब के शिखर पर बिंदु भार लगाने से अंत्याधारों से विस्तार के लगभग $\frac{1}{4}$ से $\frac{1}{6}$ की दूरी पर अधिकतम अक्षीय बल और शिखर पर अधिकतम आघूर्ण उत्पन्न होता है। तीन-कब्जीय मेहराब के शिखर पर बिंदु भार लगाने से अंत्याधारों से विस्तार के लगभग $\frac{1}{4}$ की दूरी पर अधिकतम अक्षीय बल और आघूर्ण उत्पन्न होते हैं। तीन-कब्जीय अथवा दो-कब्जीय मेहराब पर स्व-भार या समान रूप से वितरित भार लगाने से अंत्याधारों पर अधिकतम अक्षीय बल और अंत्याधारों से विस्तार के $\frac{1}{6}$ पर अधिकतम आघूर्ण उत्पन्न होता है; किंतु यही भार कब्जारहित मेहराब पर लगाने से अधिकतम अक्षीय बल और आघूर्ण दोनों अंत्याधारों पर उत्पन्न होते हैं। स्व-भार अथवा समान रूप से वितरित भार के अधीन तीनों प्रकार के मेहराबों का अधिकतम विक्षेप शिखर पर होता है। अध्ययन किए गए मेहराबों में आंतरिक बल और विक्षेप के परिवर्तन की समझ का उपयोग उनके अनुप्रस्थ काट तथा संपीडन और आनमनी सामर्थ्य के इष्टतमीकरण में किया जा सकता है। सभी प्रकार के मेहराबों के लिए विश्लेषण में शिखर पर और विस्तार के $\frac{1}{4}$ पर लगाए गए बिंदु भारों से उत्पन्न आंतरिक बलों की भी तुलना की गई। परिणाम दर्शाते हैं कि अधिकतम आघूर्ण तब उत्पन्न होता है जब बिंदु भार विस्तार के $\frac{1}{4}$ पर लगाया जाता है, जबकि अधिकतम अक्षीय बल भार को शिखर पर लगाने से उत्पन्न होता है। सामान्यतः तीनों प्रकार के मेहराबों में असममित भारण, सममित भारण की तुलना में पर्याप्त अधिक आंतरिक आघूर्ण उत्पन्न करता है। बिंदु भार के स्थान और आंतरिक बल के इस संबंध का उपयोग खुले स्पैन्ड्रेल वाले मेहराब सेतु के अभिकल्प में स्तंभों के उपयुक्त स्थान निर्धारित करने के लिए किया जा सकता है। विश्लेषण के परिणामों के आधार पर कहा जा सकता है कि मेहराब के केंद्र के प्रति स्तंभों का सममित विन्यास एक दक्ष अभिकल्प समाधान देगा। दो-कब्जीय और कब्जारहित मेहराबों के 'मूल संरचना: अतिरिक्त बल' अनुभाग में दर्शाए संगतता समीकरणों में अक्षीय और आनमनी, दोनों घटक सम्मिलित किए गए हैं। यह देखा गया कि मेहराब-विश्लेषण पर उपलब्ध अनेक साहित्य-स्रोत संगतता समीकरण का केवल आनमनी घटक प्रयुक्त करते हैं। यद्यपि दो-कब्जीय मेहराब के आंतरिक बलों पर इसका प्रभाव नगण्य है, किंतु अक्षीय घटक को छोड़ने से कब्जारहित मेहराब के आंतरिक आघूर्ण में लगभग 20% त्रुटि उत्पन्न होती है। विश्लेषणात्मक समाधानों के सत्यापन के लिए Sap 2000 कार्यक्रम प्रयुक्त किया गया। वर्तमान में कोई तैयार 'arch' घटक उपलब्ध नहीं है; अतः Sap 2000 में मेहराब बनाने के लिए अनेक खंडों का उपयोग किया जाता है। सत्यापन प्रक्रिया ने संकेत दिया कि खंडों की इष्टतम संख्या न होने से आंतरिक बलों की गणना में पर्याप्त त्रुटि हो सकती है। यहाँ विकसित विश्लेषणात्मक समीकरण मेहराब में आंतरिक बल ज्ञात करने के लिए प्रारंभिक साधन के रूप में प्रयुक्त हो सकते हैं।

प्रूफ़ पठनीय

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

E बेलनाकार शेलों की विश्लेषण सारणियाँ

निम्न सारणियाँ (Whitney et al., 1952 PDF) से ली गई हैं। ये (Portland Cement Association, 1954 PDF), (Gibson, 1968 PDF) और निस्संदेह (Billington, 1965 PDF) में भी दी गई हैं।

मूल व्युत्पत्ति Finsterwalder, 1933 द्वारा प्रस्तुत की गई थी।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

an ordinary indeterminate structure. As a matter of fact, since in most cases the thickness of the shell is determined by practical considerations (such as sufficient depth for reinforcement), a single investigation is generally sufficient. However, to achieve this economy in time and labor, a systematization of the analytical procedure is necessary. Such a systematization is here attempted, and to expedite the analysis and bring the various load-stress relationships into a coherent group, formulas and tables for the various stresses in a shell are given in this section. Those interested in the development of the formulas from which the tables are computed can find the development of the theory in Appendix II.

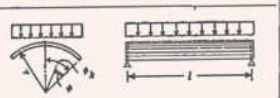
In its broader aspects the analysis of cylindrical shells is strikingly similar to the analysis of ordinary indeterminate structures. In the analysis of an indeterminate structure, it is customary to make it determinate by releasing end restraints, thereby allowing rotation and displacement of the end to occur. Afterward, reactions are applied to bring the boundary back to its original or desired position. The final stresses are the algebraic sum of those found in the determinate state and those induced by the end restraints.

The analysis of a thin shell follows the same procedure. It is first assumed that the surface load is transmitted to the supports solely by direct stresses, generally called "membrane stresses," which is equivalent to assuming the structure to be determinate. In the indeterminate two-dimensional analysis the preliminary step of making the structure determinate leads to displacements that are inconsistent with the prescribed end conditions, but in shell design the preliminary step called "membrane analysis" yields displacements and reactions along the longitudinal edges of the shell that do not comply with the boundary requirements. To satisfy these requirements, line loads must be applied along the longitudinal edges of the shell. In contrast with general surface loading, these line loads create bending as well as direct stresses in the shell. The stresses produced by the line loads must be added to the direct stresses previously evaluated to obtain the final stress pattern. Thus it is evident that the design of thin shells can be divided into two stages: (1) Determine the internal stresses and the edge forces created by the surface loading on the basis of membrane analysis; and (2), determine the stresses due to the edge line loading. It is in this order that the analysis of cylindrical shells will be presented.

Notation.—The letter symbols in this manual are defined where they first appear, in the text or by diagram, and are assembled alphabetically for reference, in Appendix III.

Step 1. Surface Loads.—The membrane analysis of a cylindrical shell subjected to surface loads involves only successive differentiations and integrations of the radial and tangential components of the surface loads. Since this is always possible for continuous loads, the stresses created by any type of continuous load distribution expressible as a function of the longitudinal and radial coordinates, x and ϕ, can be determined. For most conditions, the surface loads on the shell will be uniform in the longitudinal direction of the shell. The force and displacement components produced by two such loads

TABLE 1A.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS UNIFORMLY DISTRIBUTED ALONG THE LENGTH OF THE BARREL

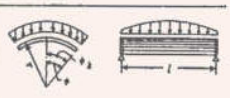
	(a) Uniform Transverse Load[a]	(b) Dead Weight Load[a]
		
	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) \times$ Col. (1) Shearing Force S— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \left(1-\frac{2x}{l}\right) \times$ Col. (2) Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times$ Col. (3) Vertical Displacement[b] Δ_V— $p_0 r \frac{l^4}{\rho t E} \times \left\{2\left(\frac{r}{l}\right)^4 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l} + 6\left(\frac{r}{l}\right)^4\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]\right\} \times$ Col. (4) Horizontal Displacement[c] Δ_H— $p_0 r \frac{l^4}{\rho t E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (5) $+ \left[2\left(\frac{r}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{r}{l} + 6\left(\frac{r}{l}\right)^4\left(\frac{x}{l} - (x/l)^2\right)\right] \times$ Col. (6)$\right\}$	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) \times$ Col. (7) Shearing Force S— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \left(1-\frac{2x}{l}\right) \times$ Col. (8) Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times$ Col. (9) Vertical Displacement Δ_V— $p_0 r \frac{l^4}{\rho t E}\left\{-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{r}{l}\right)^4\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] + \left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (10)$\right\}$ Horizontal Displacement Δ_H— $p_0 r \frac{l^4}{\rho t E}\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (11)

$\phi_0 - \phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−1.500	0	−1.0000	0.5000	0	0	−1.0000	0	−1.0000	1.0000	0
5	−1.477	−0.1302	−0.9924	0.4944	0.0872	−0.0003	−0.9960	−0.0871	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−1.409	−0.2565	−0.9698	0.4775	0.1736	−0.0025	−0.9853	−0.1736	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−1.295	−0.3749	−0.9330	0.4506	0.2588	−0.0072	−0.9749	−0.2589	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−1.150	−0.4820	−0.8830	0.4148	0.3420	−0.0200	−0.9399	−0.3421	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.965	−0.5748	−0.8214	0.3722	0.4226	−0.0377	−0.9098	−0.4225	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.750	−0.6503	−0.7500	0.3447	0.5000	−0.0625	−0.8658	−0.5000	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.513	−0.7048	−0.6710	0.2748	0.5736	−0.0944	−0.8194	−0.5737	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.261	−0.7385	−0.5868	0.2247	0.6428	−0.1328	−0.7661	−0.6428	−0.7660	0.5868	0.4924
45	0	−0.7500	−0.5000	0.1767	0.7071	−0.1768	−0.7071	−0.7071	−0.7071	0.5000	0.5000
50	0.261	−0.7385	−0.4132	0.1328	0.7680	−0.2247	−0.6427	−0.7661	−0.6428	0.4132	0.4924
55	0.513	−0.7048	−0.3200	0.0944	0.8191	−0.2749	−0.5736	−0.8192	−0.5738	0.3200	0.4698
60	0.750	−0.6503	−0.2500	0.0625	0.8660	−0.3248	−0.5000	−0.8660	−0.5000	0.2500	0.4330
65	0.965	−0.5746	−0.1788	0.0377	0.9063	−0.3722	−0.4225	−0.9062	−0.4226	0.1786	0.3830
70	1.150	−0.4820	−0.1170	0.0199	0.9397	−0.4149	−0.3420	−0.9397	−0.3420	0.1170	0.3214
75	1.295	−0.3749	−0.0689	0.0086	0.9659	−0.4506	−0.2588	−0.9659	−0.2588	0.0689	0.2500
80	1.409	−0.2565	−0.0301	0.0028	0.9848	−0.4770	−0.1732	−0.9847	−0.1736	0.0301	0.1710
85	1.477	−0.1302	−0.0076	0.0004	0.9962	−0.4943	−0.0873	−0.9962	−0.0872	0.0076	0.0868
90	1.500	0	0	0	1.0000	−0.5000	0	−1.0000	0	0	0

[a] The use of column numbers in the formulas refers to the appropriate coefficient in the column cited
[b] Downward direction is positive. [c] Inward direction is positive.

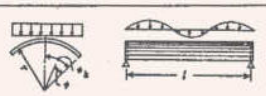
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

TABLE 1B.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING LONGITUDINALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM POSITIVE AT THE MIDDLE

	(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD	(b) DEAD WEIGHT LOAD
		
	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (2)}\right] \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times \text{Col. (3)} \times \sin \frac{\pi x}{l}$ Vertical Displacement Δ_Y— $p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(1+\frac{1}{2}(\pi r/l)^2+\frac{1}{12}(\pi r/l)^4\right) \times \text{Col. (4)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$ Horizontal Displacement Δ_H— $+p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (5)} + \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \times \text{Col. (6)}\right\} \times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)}\right] \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times \text{Col. (9)} \times \sin \frac{\pi x}{l}$ Vertical Displacement Δ_Y— $p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^2+\frac{2}{\pi^4}+\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (10)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$ Horizontal Displacement Δ_H— $+p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (11)}\right] \times \sin \frac{\pi x}{l}$

$\phi_1-\phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−0.3040	0	−1.0000	0.12319	0	0	−0.2026	0	−1.000	1.0000	0
5	−0.2993	−0.0829	−0.9924	0.12180	0.0872	−0.00009	−0.2019	−0.0555	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−0.2856	−0.1633	−0.9698	0.11766	0.1736	−0.00064	−0.1996	−0.1105	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−0.2623	−0.2387	−0.9330	0.11102	0.2588	−0.00213	−0.1975	−0.1648	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−0.2329	−0.3069	−0.8830	0.10222	0.3420	−0.00490	−0.1904	−0.2178	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.1954	−0.3658	−0.8214	0.09170	0.4226	−0.00930	−0.1837	−0.2690	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.1520	−0.4140	−0.7500	0.08001	0.5000	−0.01539	−0.1754	−0.3183	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.1040	−0.4487	−0.6710	0.06771	0.5736	−0.02325	−0.1660	−0.3652	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.0528	−0.4702	−0.5868	0.05537	0.6428	−0.03272	−0.1552	−0.4092	−0.7660	0.5868	0.4924
45	0	−0.4775	−0.5000	0.04355	0.7071	−0.04355	−0.1433	−0.4502	−0.7071	0.5000	0.5000
50	0.0528	−0.4702	−0.4132	0.03272	0.7660	−0.05537	−0.1302	−0.4877	−0.6428	0.4132	0.4924
55	0.1040	−0.4487	−0.3290	0.02325	0.8191	−0.06771	−0.1162	−0.5215	−0.5736	0.3290	0.4698
60	0.1520	−0.4140	−0.2500	0.01539	0.8660	−0.08001	−0.1013	−0.5513	−0.5000	0.2500	0.4330
65	0.1954	−0.3658	−0.1786	0.00930	0.9063	−0.09170	−0.0856	−0.5769	−0.4226	0.1786	0.3830
70	0.2329	−0.3069	−0.1170	0.00490	0.9397	−0.10222	−0.0693	−0.5982	−0.3420	0.1170	0.3214
75	0.2623	−0.2387	−0.0659	0.00213	0.9659	−0.11102	−0.0534	−0.6149	−0.2588	0.0659	0.2500
80	0.2856	−0.1633	−0.0301	0.00064	0.9848	−0.11766	−0.0351	−0.6269	−0.1736	0.0301	0.1710
85	0.2993	−0.0829	−0.0076	0.00009	0.9962	−0.12180	−0.0177	−0.6342	−0.0872	0.0076	0.0868
90	0.3040	0	0	0	1.0000	−0.12319	0	−0.6368	0	0	0

TABLE 1C.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING SINUSOIDALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM AT THE MIDDLE

	(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD	(b) DEAD WEIGHT LOAD
		
	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{\pi r}\right)^2 \times \text{Col. (1)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_0 r \frac{1}{\pi} \times \text{Col. (2)} \times \cos \frac{3\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times \text{Col. (3)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$ Vertical Displacement Δ_Y— $p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[1+\frac{9}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{81}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \text{Col. (4)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$ Horizontal Displacement Δ_H— $p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (5)} + \left[1+\frac{9}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{81}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \text{Col. (6)}\right\} \sin \frac{3\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{\pi r}\right)^2 \times \text{Col. (7)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_0 r \left(\frac{l}{\pi r}\right) \times \text{Col. (8)} \times \cos \frac{3\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times \text{Col. (9)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$ Vertical Displacement Δ_Y— $p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\frac{2}{81(\pi^2)^2}+\frac{4}{9}\left(\frac{r}{\pi l}\right)^2+\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (10)}\right] \sin \frac{3\pi x}{l}$ Horizontal Displacement Δ_H— $p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (11)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$

$\phi_1-\phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−0.0338	0	−1.0000	0.00152	0	0	−0.0225	0	−1.0000	1.0000	0
5	−0.0332	−0.0276	−0.9924	0.00150	0.0872	−0.00000	−0.0224	−0.0185	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−0.0317	−0.0544	−0.9698	0.00145	0.1736	−0.00000	−0.0222	−0.0368	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−0.0291	−0.0796	−0.9330	0.00137	0.2588	−0.00002	−0.0219	−0.0549	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−0.0259	−0.1023	−0.8830	0.00126	0.3420	−0.00006	−0.0212	−0.0726	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.0217	−0.1219	−0.8214	0.00113	0.4226	−0.00011	−0.0204	−0.0867	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.0169	−0.1383	−0.7500	0.00099	0.5000	−0.00019	−0.0195	−0.1061	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.0116	−0.1498	−0.6710	0.00081	0.5736	−0.00029	−0.0181	−0.1217	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.0059	−0.1567	−0.5868	0.00068	0.6428	−0.00040	−0.0172	−0.1384	−0.7660	0.5868	0.4924
45	0	−0.1592	−0.5000	0.00054	0.7071	−0.00054	−0.0159	−0.1501	−0.7071	0.5000	0.5000
50	0.0059	−0.1567	−0.4132	0.00040	0.7660	−0.00068	−0.0145	−0.1625	−0.6428	0.4132	0.4924
55	0.0116	−0.1498	−0.3290	0.00029	0.8191	−0.00081	−0.0129	−0.1738	−0.5736	0.3290	0.4698
60	0.0169	−0.1383	−0.2500	0.00019	0.8660	−0.00099	−0.0113	−0.1818	−0.5000	0.2500	0.4330
65	0.0217	−0.1219	−0.1786	0.00011	0.9063	−0.00113	−0.0095	−0.1923	−0.4226	0.1786	0.3830
70	0.0259	−0.1023	−0.1170	0.00006	0.9397	−0.00126	−0.0077	−0.1994	−0.3420	0.1170	0.3214
75	0.0291	−0.0796	−0.0689	0.00002	0.9659	−0.00137	−0.0058	−0.2050	−0.2588	0.0689	0.2500
80	0.0317	−0.0544	−0.0301	0.00000	0.9848	−0.00145	−0.0040	−0.2090	−0.1736	0.0301	0.1710
85	0.0332	−0.0276	−0.0076	0.00000	0.9962	−0.00150	−0.0019	−0.2114	−0.0872	0.0076	0.0868
90	0.0338	0	0	0	1.0000	−0.00152	0	−0.2122	0	0	0

प्रति प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(the first varies uniformly in the transverse direction and the second varies as the weight of the shell) are presented in Table 1A, in which the internal forces and displacements in the system of cylindrical coordinates, shown in Fig. 13, are:

T_ϕ = the direct force component in the transverse direction, considered positive when tensile;
T_x = the direct force component in the longitudinal direction, considered positive when tensile;
S = the tangential shearing force, considered positive when it creates tension in the direction of increasing values of x and ϕ;
Δ_V = the vertical displacement, considered positive when it is in the downward direction;
Δ_H = the horizontal displacement, considered positive when it is directed inward;

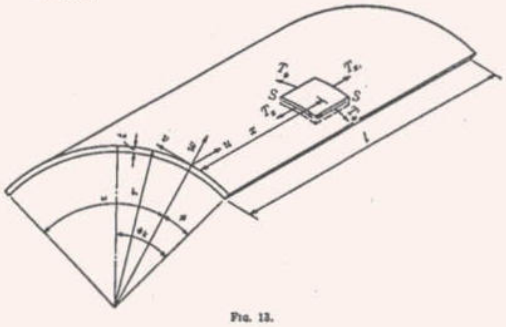


FIG. 13.

l = length of shell between supports;
r = centerline radius of shell;
t = thickness of shell;
x = longitudinal distance measured from the left support;
ϕ = angle measured from the right edge of shell;
ϕ_1 = angle subtended by the edge of shell measured from the centerline axis;
E = modulus of elasticity of concrete;
p_x = intensity of uniform load on unit area; and,
p_d = intensity of dead load on unit area.

Although it is possible to obtain the internal forces produced by any surface loads, because of mathematical difficulties, the corrective line loads applied along the longitudinal edges are expressible only as functions of $\sin \frac{n\pi x}{l}$ or $\cos \frac{n\pi x}{l}$ in which n is any integer. To avoid confusion in the application of

the line loads under Step 2, it is expedient to regard the surface load on the shell as the sum of partial loads, the intensity of which is defined as $A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$.

By a suitable selection of the values of A_n which will vary with each n, it is possible to approximate with any degree of accuracy any variation of loading. This representation of a known function by a series of sines or cosines is called "Fourier Analysis" and the series is called "Fourier Series." The Fourier series for a uniform load equals:

$$p_x = \frac{4p}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l} \cdots\right] \quad \ldots\ldots\ldots (1a)$$

or:

$$p_x = \frac{4p}{\pi}\sum_{n=1,3,5}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1b)$$

The partial loads represented by the first three terms are shown in Figs. 14(a), 14(b) and 14(c). The sum of the first and second term is shown in Fig. 14(d), and the sum of the first three terms is represented in Fig. 14(e). The sum of all the terms of the series gives the straight line $p = 1$. In general, only the first few terms of this series are needed to achieve sufficient accuracy. Hence, the internal forces and displacements produced by the sinusoidal loading represented by the first two terms are given in Tables 1B and 1C.

For the purpose of indicating the accuracy obtained by using only the first two partial loads, a comparison between values obtained by Table 1A and the sum of the values of Tables 1B and 1C is made. The internal forces at $\phi_1 - \phi = 30°$ and at $x = \frac{l}{2}$ for T_x and T_ϕ and at $x = 0$ for S, in a shell subject to a uniform load, computed by Table 1A, are

$$T_x = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2(-0.750 \times \tfrac{1}{4}) = -0.1875\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad \ldots\ldots (2a)$$

$$S = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)(-0.650 \times 1) = -0.650\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right) \quad \ldots\ldots (2b)$$

and,

$$T_\phi = p_x r\,(-0.750 \times 1) = -0.750\, p_x r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2c)$$

Using the coefficients from Tables 1B and 1C and applying the load constants indicated by the Fourier series:

$$T_x = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2\frac{4}{\pi}\left[-0.1520 \times 1 - \frac{1 \times (-)\,0.0169}{3}\right]$$
$$= -0.186\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3a)$$

$$S = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)\frac{4}{\pi}\left[-0.414 + \frac{1 \times (-)\,0.1380}{3}\right] = -0.586\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right) \quad \ldots (3b)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

and,

$$T_\phi = p_u r \frac{4}{\pi}\left[-0.750 - \frac{1 \times (-) 0.750}{3}\right] = -0.635\, p_u r \ldots\ldots (3c)$$

Comparing the values obtained by the partial loads with those obtained by the uniform load, it is seen that good agreement is obtained for the longitudinal force T_x. The shear and transverse force components obtained by the sum of the first two sinusoidal loads are approximately 10% and 15% too small. In designing shells by partial loads, this discrepancy should be borne in mind and adjustments should be made to the final values.

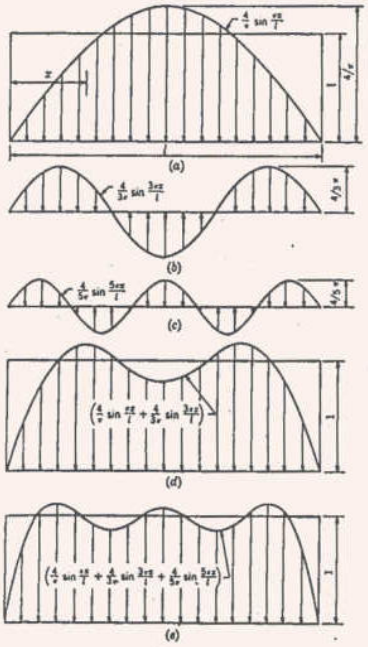
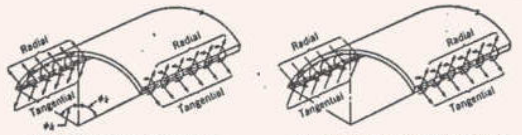


FIG. 14.

It is evident from Tables 1A, 1B and 1C that, for shells whose subtended angle is less than 180°, the membrane analysis gives transverse and shearing forces acting on and along the longitudinal edge. If the necessary marginal forces can be provided by the edge reactions and at the same time, the displacement of the supporting members correspond to the calculated displacements of the shell, the membrane analysis suffices; but to fulfill these requirements, deep edge members are often needed. In most cases these are neither possible nor desirable. On the contrary, in current practice the longitudinal edge beams are frequently omitted or reduced to a minimum size to exploit the full strength of the concrete shell. This reduction in the size of the edge beams means that the boundary conditions required by the membrane analysis are unfulfilled—in other words that the statical requirements of the shell are unsatisfied. To satisfy the requirements of statics, line loads must be applied.

Step 2—Line Loads Along the Longitudinal Edges.—Along the longitudinal edges four separate line loads, a radial shearing force, a longitudinal shearing force, a tangential transverse force and a moment, can be applied along each edge as shown in Fig. 15. The line loads along one edge can be different from those acting along the other edge. With these eight line loads, four on each edge, any edge requirement can be satisfied.

For a single barrel with no edge member, subject to a symmetrical load, the corrective line loads will consist simply of a tangential transverse force and a longitudinal shearing force equal to but opposite in direction to T_ϕ and S given by the membrane analysis. When the edge conditions are complicated by the presence of longitudinal edge beams or adjoining shells, in addition to the two afore-mentioned loads, a radial shearing force and a moment normal to the edge must be applied. The relative magnitude of each force will depend on the strains and rotation produced by each load. The determination of the correct proportions of each is illustrated in design examples. However, briefly,



(a) SYMMETRICAL LINE LOADS (b) ANTISYMMETRICAL LINE LOADS

FIG. 15.

the procedure consists of establishing a number of simultaneous equations fulfilling known edge requirements.

The effect of edge line loads on the shell is basically different from the effect of surface loads. As previously mentioned, line loads produce bending as well as direct forces. The various forces produced by line loads are illustrated in Fig. 16 with the additional force components defined as:

- N_ϕ = the radial shearing force on the radial face, considered positive when it acts outwardly on the face facing the negative ϕ-direction;
- N_x = the radial shearing force on the longitudinal face, considered positive when it acts outwardly on the face facing the negative x-axis;
- M_ϕ = bending moment on the radial face, considered positive when it produces tension in the inner fibers;
- M_x = bending moment on the transverse face, considered positive when it produces tension in the inner fibers;
- M_t = torsional moment, considered positive when it produces tension in the inner fibers in the direction of increasing values of x and ϕ;
- u = the displacement of the shell in the longitudinal direction, considered positive in the direction of increasing values of x;

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

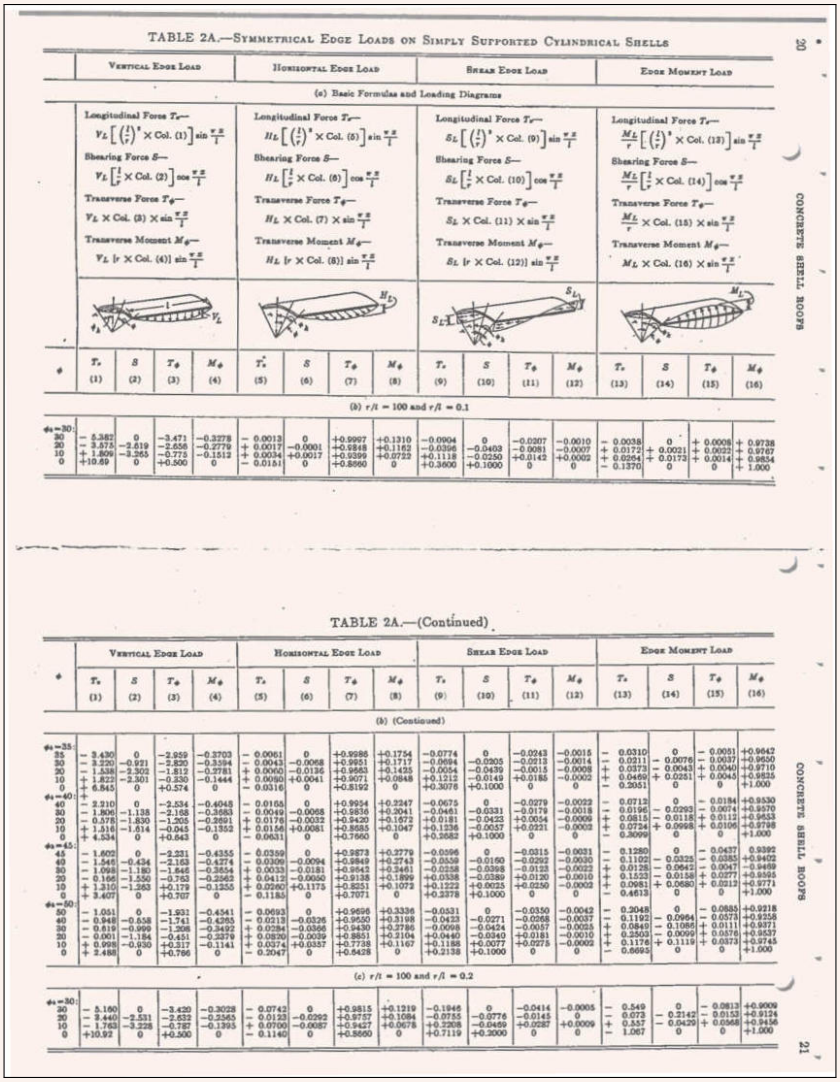


TABLE 2A.—Symmetrical Edge Loads on Simply Supported Cylindrical Shells

φ	Vertical Edge Load T_x (1)	Vertical Edge Load S (2)	Vertical Edge Load T_ϕ (3)	Vertical Edge Load M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	Horizontal Edge Load S (6)	Horizontal Edge Load T_ϕ (7)	Horizontal Edge Load M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	Shear Edge Load S (10)	Shear Edge Load T_ϕ (11)	Shear Edge Load M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	Edge Moment Load S (14)	Edge Moment Load T_ϕ (15)	Edge Moment Load M_ϕ (16)
(a) Basic Formulas and Loading Diagrams																
	Longitudinal Force T_x— $V_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (1)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$		Shearing Force S— $V_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (2)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $V_L \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $V_L\,[r \times \text{Col. (4)}]\sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $H_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (5)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$	Shearing Force S— $H_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (6)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $H_L \times \text{Col. (7)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Moment M_ϕ— $H_L\,[r \times \text{Col. (8)}]\sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $S_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (9)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$	Shearing Force S— $S_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (10)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $S_L \times \text{Col. (11)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Moment M_ϕ— $S_L\,[r \times \text{Col. (12)}]\sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $\frac{M_L}{r}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (13)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$	Shearing Force S— $\frac{M_L}{r}\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (14)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $\frac{M_L}{r} \times \text{Col. (15)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Moment M_ϕ— $M_L \times \text{Col. (16)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$
(b) $r/l = 100$ and $r/l = 0.1$																
30	− 5.382	0	−3.471	−0.3278	− 0.0013	0	+0.9997	+0.1310	−0.0904	0	−0.0207	−0.0010	− 0.0038	0	+ 0.0008	+ 0.9738
20	− 3.572	−2.619	−2.656	−0.2779	+ 0.0017	−0.0001	+0.9948	+0.1162	−0.0396	−0.2403	−0.0081	−0.0007	+ 0.0172	+ 0.0021	+ 0.0022	+ 0.9787
10	+ 1.809	−3.265	−0.773	−0.1512	+ 0.0034	+0.0017	+0.9399	+0.0722	+0.1118	−0.0250	+0.0142	+0.0002	+ 0.0264	+ 0.0173	+ 0.0014	+ 0.9854
0	+10.89	0	+0.500	0	− 0.0181	0	+0.8860	0	+0.3600	+0.1000	0	0	− 0.1370	0	0	+ 1.000

TABLE 2A.—(Continued)

φ	Vertical Edge Load T_x (1)	Vertical Edge Load S (2)	Vertical Edge Load T_ϕ (3)	Vertical Edge Load M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	Horizontal Edge Load S (6)	Horizontal Edge Load T_ϕ (7)	Horizontal Edge Load M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	Shear Edge Load S (10)	Shear Edge Load T_ϕ (11)	Shear Edge Load M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	Edge Moment Load S (14)	Edge Moment Load T_ϕ (15)	Edge Moment Load M_ϕ (16)
(b) (Continued)																
φ=35:																
35	− 3.430	0	−2.959	−0.3703	− 0.0061	0	+0.9986	+0.1754	−0.0774	0	−0.0243	−0.0015	− 0.0310	0	− 0.0051	+0.9642
30	− 3.220	−0.921	−2.820	−0.3394	− 0.0043	−0.0068	+0.9951	+0.1717	−0.0694	−0.0205	−0.0213	−0.0014	− 0.0211	− 0.0076	− 0.0037	+0.9650
20	− 1.538	−2.302	−1.812	−0.2781	+ 0.0060	−0.0136	+0.9853	+0.1425	−0.0354	−0.0439	−0.0115	−0.0008	+ 0.0373	− 0.0043	+ 0.0040	+0.9710
10	+ 1.822	−2.301	−0.330	−0.1444	+ 0.0080	+0.0041	+0.9071	+0.0848	+0.1212	−0.0149	+0.0185	−0.0002	+ 0.0489	+ 0.0251	+ 0.0045	+0.9825
0	+ 6.845	0	+0.574	0	− 0.0316	0	+0.8192	0	+0.3076	+0.1000	0	0	− 0.2051	0	0	+1.000
φ=40:																
40	− 2.310	0	−2.534	−0.4048	− 0.0155	0	+0.9934	+0.2247	−0.0675	0	−0.0279	−0.0022	− 0.0712	0	− 0.0184	+0.9530
30	− 1.806	−1.138	−2.168	−0.3583	− 0.0049	−0.0068	+0.9836	+0.2041	−0.0461	−0.0331	−0.0179	−0.0018	− 0.0196	− 0.0293	− 0.0074	+0.9570
20	− 0.578	−1.830	−1.205	−0.2891	+ 0.0176	−0.0032	+0.9420	+0.1672	+0.0181	−0.0423	+0.0054	−0.0009	− 0.0815	− 0.0118	− 0.0112	+0.9653
10	+ 1.516	−1.814	+0.045	−0.1552	+ 0.0156	+0.0081	+0.8585	+0.1047	+0.1236	−0.0057	+0.0231	−0.0003	− 0.0724	+ 0.0098	+ 0.0106	+0.9798
0	+ 4.534	0	+0.643	0	− 0.0631	0	+0.7660	0	+0.3682	+0.1000	0	0	− 0.3099	0	0	+1.000
φ=45:																
45	− 1.602	0	−2.231	−0.4355	− 0.0359	0	+0.9873	+0.2779	−0.0596	0	−0.0315	−0.0031	− 0.1280	0	− 0.0437	0.9392
40	− 1.545	−0.434	−2.163	−0.4274	− 0.0309	−0.0094	+0.9849	+0.2743	−0.0559	−0.0160	−0.0292	−0.0030	− 0.1102	− 0.0325	− 0.0385	+0.9402
30	− 1.068	−1.185	−1.846	−0.3854	+ 0.0033	−0.0181	+0.9643	+0.2461	−0.0258	−0.0398	−0.0123	−0.0022	− 0.0128	− 0.0642	− 0.0247	−0.9489
20	− 0.166	−1.550	−0.763	−0.2862	+ 0.0412	−0.0050	+0.9138	+0.1899	+0.0338	−0.0389	+0.0120	−0.0010	− 0.1533	− 0.0158	− 0.0277	+0.9595
10	+ 1.310	−1.263	+0.179	−0.1355	+ 0.0260	+0.1175	+0.8251	+0.1072	+0.1222	+0.0025	+0.0250	−0.0002	− 0.0081	+ 0.0580	+ 0.0213	+0.9771
0	+ 3.407	0	+0.707	0	− 0.1185	0	+0.7071	0	+0.3278	+0.1000	0	0	− 0.4613	0	0	+1.000
φ=50:																
50	− 1.051	0	−1.931	−0.4541	− 0.0693	0	+0.9696	+0.3336	−0.0531	0	−0.0350	−0.0042	− 0.2048	0	− 0.0885	+0.9218
40	− 0.948	−0.658	−1.741	−0.4265	− 0.0213	−0.0326	+0.9550	+0.3198	−0.0423	−0.0271	−0.0268	−0.0037	− 0.1192	− 0.0964	− 0.0573	+0.9258
30	− 0.619	−0.999	−1.208	−0.3492	+ 0.0284	−0.0366	+0.9430	+0.2786	−0.0096	−0.0424	−0.0057	−0.0025	− 0.0849	− 0.1086	− 0.0111	+0.9271
20	− 0.001	−1.184	−0.451	−0.2379	+ 0.0830	−0.0039	+0.9051	+0.2104	+0.0460	−0.0340	+0.0181	−0.0010	− 0.2303	− 0.0099	− 0.0576	+0.9537
10	+ 0.998	−0.930	+0.217	−0.1141	+ 0.0374	+0.0357	+0.7738	+0.1167	+0.1188	+0.0077	+0.0275	−0.0002	− 0.1176	+ 0.1119	+ 0.0373	+0.9745
0	+ 2.488	0	+0.786	0	− 0.2047	0	+0.6428	0	+0.2138	+0.1000	0	0	− 0.6695	0	0	+1.000
(c) $r/l = 100$ and $r/l = 0.2$																
φ=30:																
30	− 5.160	0	−3.420	−0.3028	− 0.0743	0	+0.9815	+0.1219	−0.1946	0	−0.0414	−0.0005	− 0.549	0	− 0.0813	+0.9009
20	− 3.440	−2.531	−2.623	−0.2565	− 0.0123	−0.0292	+0.9757	+0.1084	−0.0755	−0.0776	−0.0145	0	− 0.073	− 0.2142	− 0.0153	+0.9124
10	− 1.763	−3.228	−0.787	−0.1393	+ 0.0700	−0.0687	+0.9427	+0.0678	+0.2208	−0.0489	+0.0287	+0.0009	− 0.357	− 0.0429	+ 0.0588	+0.9456
0	+10.92	0	+0.500	0	− 0.1465	0	+0.8660	0	+0.7119	+0.3000	0	0	− 1.067	0	0	+1.000

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

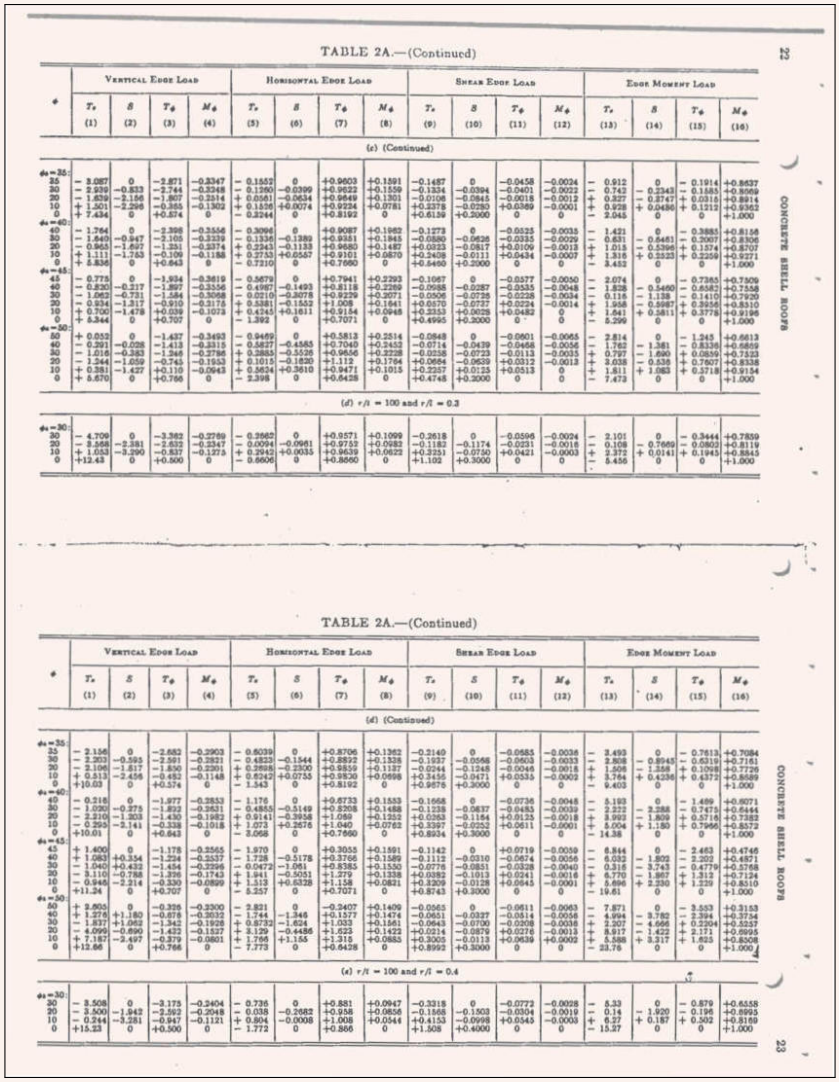


TABLE 2A.—(Continued)

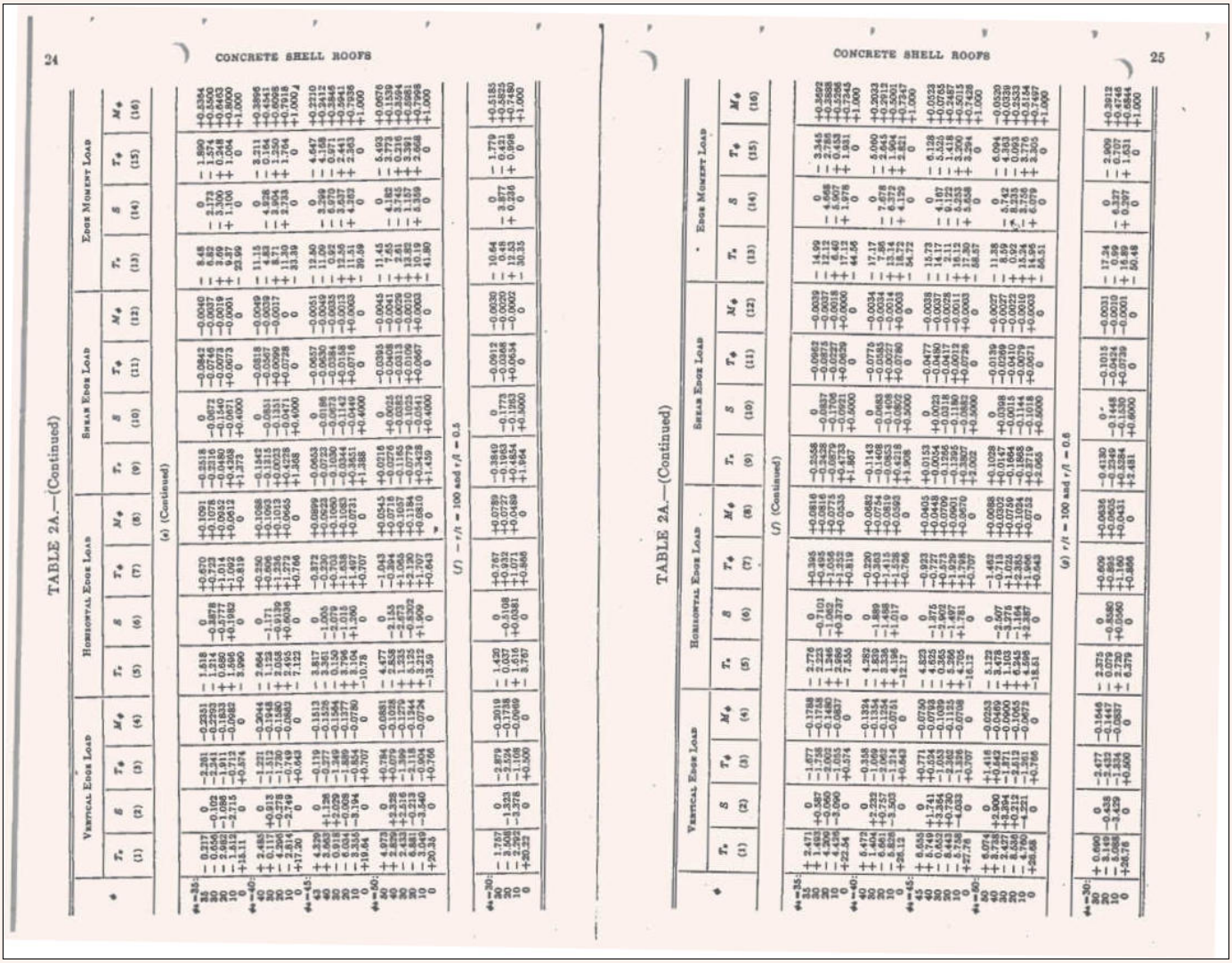
ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(c) (Continued)																
$\phi_1=25°$																
25	− 3.087	0	−2.871	−0.3347	− 0.1552	0	+0.9603	+0.1591	−0.1487	0	−0.0458	−0.0024	− 0.912	0	− 0.1914	+0.8637
30	− 2.939	−0.833	−2.744	−0.3248	− 0.1560	−0.0399	+0.9622	+0.1559	−0.1334	−0.0394	−0.0401	−0.0022	+ 0.742	− 0.2343	− 0.1685	+0.8069
20	− 1.829	−2.156	− 1.807	−0.2314	+ 0.0581	−0.0634	+0.9849	+0.1301	−0.0108	−0.0845	−0.0018	−0.0012	+ 0.327	− 0.3747	+ 0.0315	+0.8914
10	+ 1.501	−2.296	−0.365	−0.1302	+ 0.1556	+0.0074	+0.9224	+0.0781	+0.2378	−0.0293	+0.0369	−0.0001	+ 0.928	+ 0.0486	+ 0.1212	+0.9562
0	+ 7.434	0	+0.574	0	− 0.2244	0	+0.8192	0	+0.6139	+0.3000	0	0	+ 2.045	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$																
40	− 1.764	0	−2.398	−0.3556	− 0.3096	0	+0.9087	+0.1962	−0.1273	0	−0.0325	−0.0035	− 1.421	0	− 0.3885	+0.8156
30	− 1.645	−0.847	−2.105	−0.3339	− 0.1336	−0.1389	+0.9351	+0.1845	−0.0880	−0.0626	−0.0335	−0.0029	− 0.631	− 0.6481	− 0.3007	+0.8306
20	− 0.963	−1.697	−1.351	−0.2374	+ 0.2243	−0.1133	+0.9680	+0.1487	+0.0323	−0.0817	+0.0109	−0.0013	+ 1.015	− 0.5296	+ 0.1574	+0.8707
10	+ 1.111	−1.763	−0.109	−0.1188	+ 0.2753	+0.0557	+0.9161	+0.0870	+0.2408	−0.0111	+0.0434	−0.0007	+ 1.316	+ 0.2523	+ 0.2259	+0.9271
0	+ 6.836	0	+0.643	0	− 0.7210	0	+0.7660	0	+0.6460	+0.2000	0	0	+ 3.452	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$																
45	− 0.775	0	−1.934	−0.3619	− 0.5679	0	+0.7941	+0.2293	−0.1067	0	−0.0377	−0.0050	− 2.074	0	− 0.7385	+0.7309
40	− 0.820	−0.217	−1.897	−0.3556	− 0.4967	−0.1493	+0.8118	+0.2269	−0.0988	−0.0287	−0.0535	−0.0048	− 1.828	− 0.5460	− 0.6582	+0.7358
30	− 1.062	−0.731	−1.584	−0.3068	− 0.2210	−0.2078	+0.9229	+0.2071	−0.0506	−0.0795	−0.0228	−0.0034	− 0.116	− 1.138	− 0.1410	+0.7920
20	− 0.934	−1.217	−0.910	−0.2176	+ 0.5381	−0.1552	+1.008	+0.1641	+0.0570	−0.0737	+0.0224	−0.0014	+ 1.958	− 0.6987	+ 0.3956	+0.8510
10	+ 0.700	−1.478	+0.039	−0.1073	+ 0.4245	+0.1611	+0.9154	+0.0948	+0.2353	+0.3028	+0.0482	0	+ 1.641	+ 0.2811	+ 0.3778	+0.9196
0	+ 5.344	0	+0.707	0	− 1.392	0	+0.7071	0	+0.4995	+0.3000	0	0	+ 5.299	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$																
50	+ 0.052	0	−1.437	−0.3493	− 0.9469	0	+0.5813	+0.2514	−0.0848	0	−0.0601	−0.0065	− 2.814	0	− 1.245	+0.6613
40	− 0.291	−0.028	−1.413	−0.3315	− 0.5827	−0.4585	+0.7040	+0.2452	−0.0714	−0.0439	−0.0468	−0.0056	− 1.762	− 1.381	− 0.8336	+0.6869
30	− 1.016	−0.383	−1.345	−0.2788	+ 0.2885	−0.5526	+0.9456	+0.2238	−0.0258	−0.0723	−0.0113	−0.0035	+ 0.797	− 1.690	+ 0.0839	+0.7533
20	− 1.244	−1.059	−0.745	−0.1953	+ 0.1015	−0.1820	+1.112	+0.1794	+0.0664	−0.0959	+0.0312	−0.0013	+ 3.038	− 0.538	+ 0.7607	+0.8338
10	+ 0.381	−1.427	+0.110	−0.0943	+ 0.5824	+0.3610	+0.9471	+0.1015	+0.2257	+0.0125	+0.0513	0	+ 1.811	+ 1.083	+ 0.3718	+0.9154
0	+ 5.870	0	+0.766	0	− 2.398	0	+0.6428	0	+0.4748	+0.3000	0	0	+ 7.473	0	0	+1.000
(d) $r/t = 100$ and $r/t = 0.3$																
$\phi_1=30°$																
30	− 4.709	0	−3.362	−0.2789	− 0.2662	0	+0.9571	+0.1099	−0.2618	0	−0.0596	−0.0024	+ 2.101	0	− 0.3444	+0.7859
20	− 3.668	−2.381	−2.632	−0.2347	− 0.0094	−0.0961	+0.9753	+0.0982	−0.1182	−0.1174	−0.0231	−0.0016	+ 0.108	− 0.7689	− 0.0803	+0.8119
10	+ 1.053	−3.290	−0.837	−0.1275	+ 0.2942	+0.0035	+0.9639	+0.0622	+0.3251	−0.0750	+0.0421	−0.0003	+ 2.372	+ 0.0141	+ 0.1945	+0.8845
0	+12.43	0	+0.500	0	− 0.6606	0	+0.8660	0	+1.102	+0.3000	0	0	+ 5.456	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(d) (Continued)																
$\phi_1=35°$																
35	− 2.156	0	−2.682	−0.2903	− 0.6039	0	+0.8706	+0.1362	−0.2140	0	−0.0585	−0.0036	+ 3.493	0	− 0.7613	+0.7084
30	− 2.203	−0.595	−2.591	−0.2821	− 0.4823	−0.1544	+0.8932	+0.1328	−0.1937	−0.0568	−0.0603	−0.0033	+ 2.808	− 0.8945	− 0.5319	+0.7161
20	− 2.051	−1.817	−1.930	−0.2301	− 0.2958	−0.2300	+0.9359	+0.1137	−0.0244	−0.1245	−0.0046	−0.0018	+ 1.508	− 1.358	+ 0.1098	+0.7729
10	+ 0.513	−2.456	−0.452	−0.1148	+ 0.8242	+0.0755	+0.9830	+0.0898	+0.3455	−0.0471	+0.0535	−0.0002	+ 3.764	+ 0.4236	+ 0.4372	+0.8589
0	+10.03	0	+0.574	0	− 1.343	0	+0.8192	0	+0.8978	+0.3000	0	0	+ 9.403	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$																
40	− 0.218	0	−1.977	−0.2853	− 1.176	0	+0.8733	+0.1553	−0.1668	0	−0.0736	−0.0048	+ 5.193	0	− 1.489	+0.6071
30	− 1.030	−0.375	−1.822	−0.2631	− 0.4855	−0.5149	+0.8208	+0.1488	−0.1238	−0.0637	−0.0483	−0.0039	+ 2.222	− 2.288	− 0.7475	+0.6444
20	− 2.210	−1.303	−1.430	−0.1982	+ 0.9141	−0.3958	+1.059	+0.1252	+0.0263	−0.1164	+0.0125	−0.0018	+ 3.993	− 1.809	+ 0.5718	+0.7382
10	− 0.295	−3.141	−0.338	−0.1018	+ 1.073	+0.2676	+1.040	+0.0762	+0.3397	−0.0252	+0.0611	−0.0001	+ 5.004	+ 1.180	+ 0.7966	+0.8572
0	+10.01	0	+0.643	0	− 3.068	0	+0.7660	0	+0.8934	+0.3000	0	0	+ 14.38	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$																
45	+ 1.400	0	−1.178	−0.2565	− 1.970	0	+0.3055	+0.1591	−0.1142	0	+0.0719	−0.0059	+ 6.844	0	− 2.463	+0.4746
40	+ 1.083	+0.334	−1.224	−0.2537	− 1.728	−0.5178	+0.3766	+0.1589	−0.1112	−0.0310	−0.0674	−0.0056	+ 6.032	− 1.802	− 2.202	+0.4871
30	− 1.040	+0.432	−1.454	−0.2296	− 0.0472	−1.061	+0.8585	+0.1550	−0.0776	−0.0851	−0.0328	−0.0040	+ 0.316	− 3.743	− 0.4779	+0.5768
20	− 3.110	−0.788	−1.396	−0.1743	+ 1.941	−0.5051	+1.279	+0.1338	+0.0382	−0.1013	+0.0241	−0.0016	+ 6.770	− 1.867	+ 1.313	+0.7124
10	− 0.946	−2.214	−0.330	−0.0899	+ 1.313	+0.6328	+1.158	+0.0821	+0.3209	−0.0128	+0.0545	−0.0001	+ 5.696	+ 2.230	+ 1.229	+0.8510
0	+11.24	0	+0.707	0	− 5.257	0	+0.7071	0	+0.8743	+0.3000	0	0	+ 19.61	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$																
50	+ 2.805	0	−0.326	−0.2300	− 2.821	0	−0.2407	+0.1409	−0.0565	0	−0.0511	−0.0063	+ 7.871	0	− 3.553	+0.3153
40	+ 1.276	+1.180	−0.678	−0.2032	− 1.744	−1.346	+0.1577	+0.1474	−0.0651	−0.0337	−0.0514	−0.0056	+ 4.994	− 3.782	− 2.394	+0.3734
30	− 1.837	+1.062	−1.342	−0.1928	+ 0.8732	−1.624	+1.033	+0.1561	−0.0643	−0.0730	−0.0308	−0.0036	+ 2.207	− 4.666	+ 0.2204	+0.5237
20	− 4.099	−0.890	−1.432	−0.1527	+ 3.129	−0.6486	+1.523	+0.1422	+0.0214	−0.0879	+0.0276	−0.0013	+ 8.917	− 1.422	+ 2.171	+0.5995
10	+ 7.187	−3.497	−0.279	−0.0801	+ 1.705	+1.155	+1.315	+0.0853	+0.3005	−0.0113	+0.0539	+0.0002	+ 5.588	+ 3.217	+ 1.525	+0.8508
0	+12.66	0	+0.766	0	− 7.773	0	+0.6428	0	+0.8992	+0.3000	0	0	− 23.76	0	0	+1.000
(e) $r/t = 100$ and $r/t = 0.4$																
$\phi_1=30°$																
30	− 3.508	0	−3.175	−0.2404	− 0.736	0	+0.881	+0.0947	−0.3318	0	−0.0772	−0.0028	+ 5.33	0	− 0.879	+0.6558
20	− 3.500	−1.942	−2.562	−0.2048	+ 0.038	−0.2682	+0.958	+0.0856	−0.1568	−0.1503	−0.0304	−0.0019	+ 0.14	+ 1.920	− 0.196	+0.8995
10	− 0.244	−3.281	−0.947	−0.1121	+ 0.804	−0.0008	+1.008	+0.0344	+0.4153	−0.0998	+0.0545	−0.0003	+ 6.27	+ 0.187	+ 0.502	+0.8169
0	+15.23	0	+0.500	0	− 1.772	0	+0.866	0	+1.508	+0.4000	0	0	− 15.27	0	0	+1.000

अनुवादित

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

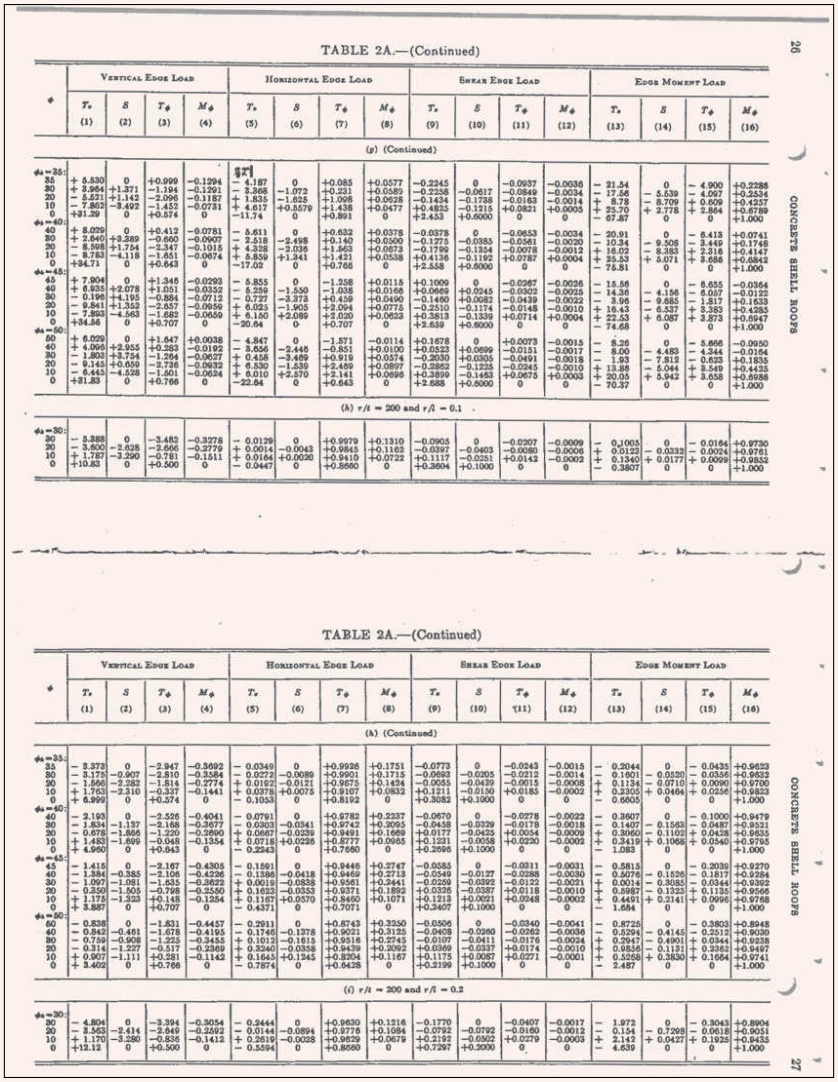


TABLE 2A.—(Continued)

φ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
							(p) (Continued)									
$\phi_0 = 25°$:																
35	+ 5.530	0	+0.999	−0.1294	− 4.187	0	+0.085	+0.0577	−0.2245	0	−0.0937	−0.0036	− 21.54	0	− 4.900	+0.2288
30	+ 3.964	+1.371	−1.194	−0.1291	− 3.368	−1.072	+0.231	+0.0589	−0.2238	−0.0617	−0.0849	−0.0034	− 17.56	− 5.539	− 4.097	+0.2534
20	− 5.521	+1.142	−2.096	−0.1167	+ 1.835	−1.625	+1.098	+0.0628	−0.1434	−0.1738	−0.0163	−0.0014	+ 8.78	+ 8.709	+ 0.509	+0.4257
10	− 7.862	−3.492	−1.452	−0.0731	+ 4.617	+0.5579	+1.438	+0.0477	+0.4825	−0.1215	+0.3821	+0.0005	+ 25.70	+ 2.778	+ 2.864	+0.6789
0	+21.29	0	+0.574	0	−11.74	0	+0.891	0	+2.453	+0.6000	0	0	− 67.87	0	0	+1.000
$\phi_0 = 40°$:																
40	+ 8.029	0	+0.412	−0.0781	− 5.611	0	+0.632	+0.0378	−0.0378	0	−0.0653	−0.0034	− 20.91	0	− 6.413	+0.0741
30	+ 2.940	+2.289	−0.660	−0.0907	− 2.518	−2.498	+0.140	+0.0509	−0.1275	−0.0385	−0.0561	−0.0020	− 10.34	− 9.508	− 3.449	+0.1748
20	− 8.598	+1.754	−2.347	−0.1015	+ 4.328	−2.036	+1.563	+0.0573	−0.1799	−0.1354	−0.0078	−0.0012	+ 16.02	+ 8.383	+ 2.316	+0.4147
10	− 8.783	−4.118	−1.851	−0.0674	+ 5.859	+1.341	+1.421	+0.0538	+0.4136	−0.1192	+0.0787	+0.0004	+ 25.53	+ 5.071	+ 3.686	+0.6842
0	+84.71	0	+0.643	0	−17.02	0	+0.766	0	+2.538	+0.6000	0	0	− 75.81	0	0	+1.000
$\phi_0 = 45°$:																
45	+ 7.904	0	+1.345	−0.0293	− 5.855	0	−1.358	+0.0115	+0.1009	0	−0.0267	−0.0026	− 15.56	0	− 8.655	−0.0364
40	+ 6.935	+2.078	+1.051	−0.0352	− 5.259	−1.550	−1.038	+0.0166	+0.0669	+0.0245	−0.0302	−0.0025	− 14.36	− 4.156	− 6.037	−0.0122
30	− 0.196	+4.195	−0.884	−0.0712	− 0.727	−3.373	+0.459	+0.0490	−0.1460	+0.0082	−0.0439	−0.0022	− 3.96	− 9.885	− 1.817	+0.1633
20	− 9.841	+1.352	−2.857	−0.0659	+ 5.023	−1.905	+2.094	+0.0775	−0.2510	−0.1174	−0.0148	−0.0010	+ 16.43	− 6.537	+ 3.383	+0.4285
10	− 7.893	−4.563	−1.682	−0.0659	+ 6.100	+2.089	+2.020	+0.0622	+0.3813	−0.1339	+0.0714	+0.0004	+ 22.53	+ 6.087	+ 3.873	+0.6947
0	+94.56	0	+0.707	0	−20.64	0	+0.707	0	+2.659	+0.6000	0	0	− 74.68	0	0	+1.000
$\phi_0 = 50°$:																
50	+ 6.029	0	+1.647	+0.0038	− 4.847	0	−1.371	−0.0114	+0.1678	0	+0.0073	−0.0015	− 8.26	0	− 5.866	−0.0950
40	+ 4.095	+2.955	+1.283	−0.0192	− 3.256	−2.445	−0.851	+0.0100	+0.0523	+0.0699	−0.0151	−0.0017	− 8.00	− 4.483	− 4.344	−0.0154
30	− 1.803	+3.754	−1.264	−0.0527	+ 0.458	−3.409	+0.919	+0.0574	−0.2030	+0.0305	−0.0491	−0.0018	− 1.93	− 7.812	− 0.523	+0.1835
20	− 9.143	+0.659	−2.738	−0.0933	+ 5.530	−1.539	+2.469	+0.0897	−0.2862	−0.1255	−0.0245	−0.0010	+ 13.86	+ 5.044	+ 3.549	+0.4425
10	− 6.445	−4.528	−1.501	−0.0624	+ 8.010	+2.570	+2.141	+0.0696	+0.3899	−0.1453	+0.0675	+0.0003	+ 20.05	+ 5.942	+ 3.658	+0.6686
0	+81.83	0	+0.766	0	−22.84	0	+0.643	0	+2.688	+0.6000	0	0	− 70.37	0	0	+1.000
							(h) $r/t = 200$ and $r/l = 0.1$									
$\phi_0 = 30°$:																
30	− 5.388	0	−3.483	−0.3278	− 0.0129	0	+0.9979	+0.1310	−0.0905	0	−0.0207	−0.0009	− 0.1005	0	− 0.0164	+0.9730
20	− 3.600	−2.628	−2.666	−0.2779	+ 0.0014	−0.0043	+0.9845	+0.1163	−0.0397	−0.0403	−0.0080	−0.0006	+ 0.0123	− 0.0335	+ 0.0024	+0.9781
10	+ 1.787	−3.290	−0.781	−0.1511	+ 0.0164	+0.0030	+0.9810	+0.0722	+0.1117	−0.0251	+0.0142	−0.0002	+ 0.1340	+ 0.0177	+ 0.0099	+0.9852
0	+10.83	0	+0.500	0	− 0.0447	0	+0.8580	0	+0.3604	+0.1000	0	0	− 0.3807	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

φ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
							(h) (Continued)									
$\phi_0 = 35°$:																
35	− 3.373	0	−2.947	−0.3692	− 0.0349	0	+0.9926	+0.1751	−0.0773	0	−0.0243	−0.0018	− 0.2044	0	− 0.0435	+0.9623
30	− 3.178	−0.907	−2.810	−0.3584	− 0.0272	−0.0089	+0.9901	+0.1715	−0.0693	−0.0205	−0.0212	−0.0014	− 0.1601	− 0.0520	− 0.0356	+0.9632
20	− 1.566	−2.382	−1.814	−0.2774	+ 0.0122	−0.0121	+0.9875	+0.1454	−0.0055	−0.0439	−0.0015	−0.0008	+ 0.1134	− 0.0710	+ 0.0090	+0.9700
10	+ 1.763	−2.310	−0.337	−0.1441	+ 0.0378	+0.0075	+0.9107	+0.0832	+0.1211	−0.0150	+0.0185	−0.0002	+ 0.2305	+ 0.0464	+ 0.0256	+0.9823
0	+ 6.999	0	+0.574	0	− 0.1053	0	+0.8192	0	+0.3082	+0.1000	0	0	− 0.6605	0	0	+1.000
$\phi_0 = 40°$:																
40	− 3.193	0	−2.526	−0.4041	− 0.0791	0	+0.9782	+0.2337	−0.0670	0	−0.0278	−0.0022	− 0.3607	0	− 0.1000	+0.9479
30	− 1.834	−1.137	−2.168	−0.3677	− 0.0303	−0.0341	+0.9742	+0.2093	−0.0458	−0.0329	−0.0178	−0.0018	− 0.1407	− 0.1563	− 0.0487	+0.9531
20	− 0.678	−1.866	−1.220	−0.2890	+ 0.0667	−0.0239	+0.9491	+0.1669	+0.0177	−0.0425	+0.0054	−0.0009	+ 0.3060	− 0.1102	+ 0.0428	+0.9535
10	+ 1.483	−1.899	−0.048	−0.1354	+ 0.0718	+0.0226	+0.8777	+0.0965	+0.1231	−0.0058	+0.0230	−0.0002	+ 0.3419	+ 0.1068	+ 0.0540	+0.9795
0	+ 4.960	0	+0.643	0	− 0.2343	0	+0.7660	0	+0.2695	+0.1000	0	0	− 1.083	0	0	+1.000
$\phi_0 = 45°$:																
45	− 1.415	0	−2.167	−0.4305	− 0.1591	0	+0.9446	+0.2747	−0.0585	0	−0.0311	−0.0031	− 0.5815	0	− 0.2039	+0.9270
40	− 1.384	−0.385	−2.106	−0.4226	− 0.1586	−0.0418	+0.9469	+0.2713	−0.0549	−0.0127	−0.0288	−0.0030	− 0.5076	− 0.1525	− 0.1817	+0.9284
30	− 1.097	−1.081	−1.635	−0.3622	− 0.0619	−0.0838	+0.9561	+0.2441	−0.0259	−0.0392	−0.0122	−0.0021	− 0.2014	− 0.3085	− 0.0344	+0.9362
20	− 0.250	−1.505	−0.798	−0.2550	+ 0.1623	−0.0353	+0.9371	+0.1892	+0.0326	−0.0387	+0.0118	−0.0010	+ 0.8987	− 0.1323	+ 0.1135	+0.9566
10	+ 1.178	−1.323	+0.148	−0.1254	+ 0.1167	+0.0570	+0.8450	+0.1071	+0.1213	+0.0021	+0.0048	−0.0002	+ 0.4491	+ 0.2141	+ 0.0996	+0.9768
0	+ 3.887	0	+0.707	0	− 0.4371	0	+0.7071	0	+0.2407	+0.1000	0	0	− 1.684	0	0	+1.000
$\phi_0 = 50°$:																
50	− 0.838	0	−1.831	−0.4457	− 0.2911	0	+0.8743	+0.3250	−0.0506	0	−0.0340	−0.0041	− 0.8725	0	− 0.3803	+0.8948
40	− 0.842	−0.461	−1.678	−0.4195	− 0.1746	−0.1378	+0.9021	+0.3125	−0.0408	−0.0260	−0.0262	−0.0036	− 0.5294	− 0.4145	− 0.2512	+0.9030
30	− 0.759	−0.908	−1.225	−0.3455	+ 0.1012	−0.1615	+0.9518	+0.2745	−0.0107	−0.0411	−0.0176	−0.0024	+ 0.2947	− 0.4901	+ 0.0344	+0.9238
20	− 0.314	−1.227	−0.517	−0.2369	+ 0.3240	−0.0358	+0.9439	+0.2092	+0.0369	−0.0337	+0.0174	−0.0010	+ 0.9856	− 0.1131	+ 0.2362	+0.9497
10	+ 0.907	−1.111	+0.281	−0.1142	+ 0.1643	+0.1345	+0.8204	+0.1167	+0.1175	+0.0087	+0.0271	−0.0001	+ 0.5268	+ 0.3830	+ 0.1664	+0.9741
0	+ 3.402	0	+0.766	0	− 0.7874	0	+0.6428	0	+0.2199	+0.1000	0	0	− 2.487	0	0	+1.000
							(i) $r/t = 200$ and $r/l = 0.2$									
$\phi_0 = 30°$:																
30	− 4.804	0	−3.394	−0.3054	− 0.3444	0	+0.9630	+0.1216	−0.1770	0	−0.0407	−0.0017	− 1.972	0	− 0.3043	+0.8904
20	− 3.563	−2.414	−2.649	−0.2592	− 0.0144	−0.0894	+0.9778	+0.1084	−0.0792	−0.0792	−0.0160	−0.0012	− 0.154	− 0.7295	− 0.0618	+0.9051
10	+ 1.170	−3.280	−0.936	−0.1412	+ 0.2619	−0.0028	+0.9579	+0.0679	+0.2197	−0.0522	+0.0279	−0.0003	+ 2.143	+ 0.0422	+ 0.1925	+0.9435
0	+12.12	0	+0.500	0	− 0.5594	0	+0.8569	0	+0.7297	+0.3000	0	0	− 4.639	0	0	+1.000

CONCRETE SHELL ROOFS

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

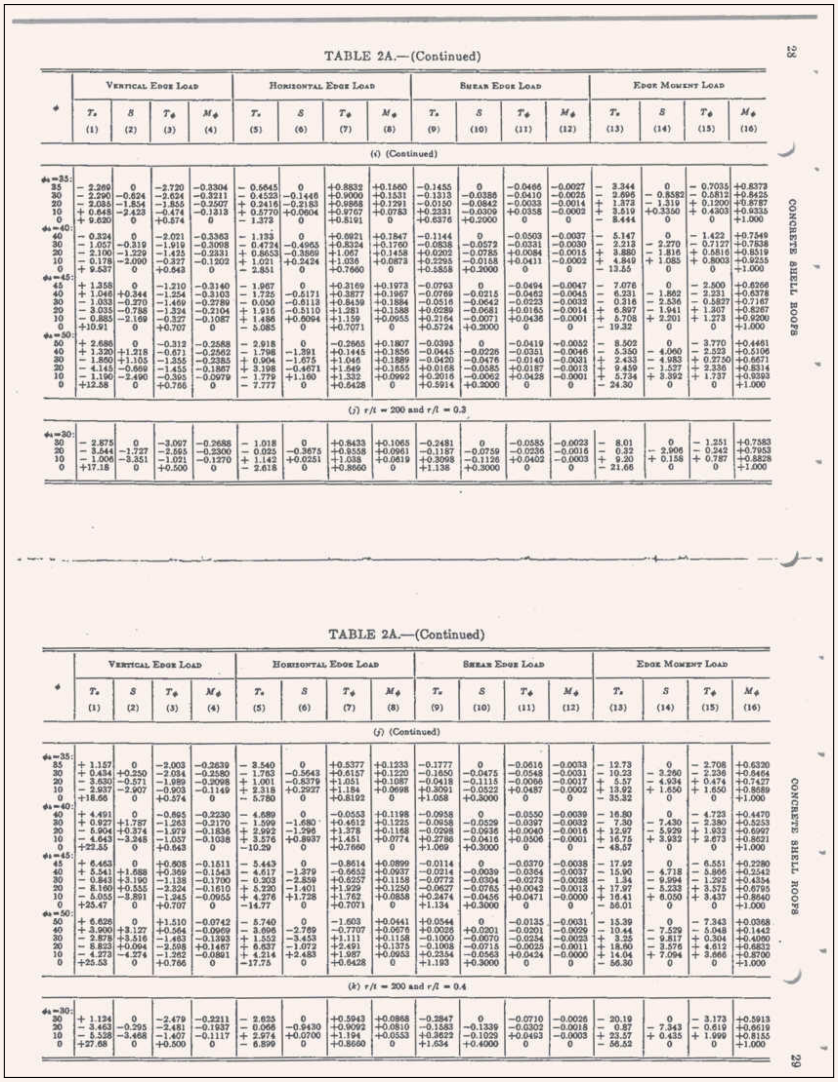


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(i) (Continued)																
$\phi_1=35°$																
35	− 2.269	0	−2.720	−0.3304	− 0.5645	0	+0.8832	+0.1580	−0.1455	0	−0.0466	−0.0027	− 3.344	0	− 0.7035	+0.8373
30	− 2.290	−0.624	−2.634	−0.3211	− 0.4523	−0.1448	+0.9000	+0.1531	−0.1313	−0.0386	−0.0410	−0.0025	− 2.695	− 0.8582	− 0.5812	+0.8425
20	− 2.035	−1.854	−1.855	−0.2507	+ 0.2416	−0.2183	+0.9868	+0.1291	−0.0150	−0.0842	−0.0033	−0.0014	+ 1.373	− 1.319	+ 0.1200	+0.8787
10	+ 0.648	−2.423	−0.474	−0.1313	+ 0.2770	+0.0604	+0.9767	+0.0783	+0.2331	−0.0309	+0.0358	−0.0003	+ 3.619	+0.3350	+ 0.4303	+0.9335
0	+ 9.620	0	+0.574	0	− 1.372	0	+0.8191	0	+0.6376	+0.2000	0	0	− 8.444	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$																
40	− 0.324	0	−2.021	−0.3363	− 1.133	0	+0.6921	+0.1847	−0.1144	0	−0.0503	−0.0037	− 5.147	0	− 1.422	+0.7549
30	− 1.057	−0.319	−1.919	−0.3098	− 0.4724	−0.4955	+0.8324	+0.1760	−0.0838	−0.0572	−0.0331	−0.0030	− 2.213	− 2.270	− 0.7127	+0.7538
20	− 2.100	−1.229	−1.425	−0.2331	+ 0.8653	−0.3898	+1.067	+0.1458	+0.0202	−0.0785	+0.0084	−0.0015	+ 3.880	− 1.816	+ 0.5816	+0.8519
10	− 0.178	−2.090	−0.327	−0.1202	+ 1.021	+0.2424	+1.038	+0.0873	+0.2295	−0.0158	+0.0411	−0.0002	+ 4.849	+ 1.085	+ 0.8003	+0.9255
0	+ 9.537	0	+0.543	0	− 2.851	0	+0.7660	0	+0.5858	+0.3000	0	0	− 13.55	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$																
45	+ 1.358	0	−1.210	−0.3140	− 1.967	0	+0.2169	+0.1973	−0.0763	0	−0.0494	−0.0047	− 7.078	0	− 2.500	+0.6266
40	+ 1.046	+0.344	−1.254	−0.3103	− 1.725	−0.6171	+0.3877	+0.1967	−0.0799	−0.0215	−0.0483	−0.0045	− 6.231	− 1.662	− 2.231	+0.6378
30	− 1.033	−0.370	−1.469	−0.2789	− 0.050	−0.5113	+0.8439	+0.1884	−0.0516	−0.0642	−0.0223	−0.0032	− 0.316	− 2.536	− 0.5827	+0.7167
20	− 3.035	−0.758	−1.324	−0.2104	+ 1.916	−0.5110	+1.281	+0.1588	+0.0289	−0.0681	+0.0185	−0.0014	+ 6.897	− 1.941	+ 1.207	+0.8267
10	− 0.885	−2.169	−0.327	−0.1087	+ 1.496	+0.3094	+1.159	+0.0955	+0.2164	−0.0071	+0.0436	−0.0001	+ 5.708	+ 2.201	+ 1.273	+0.9200
0	+10.91	0	+0.707	0	− 5.085	0	+0.7071	0	+0.5724	+0.3000	0	0	− 19.32	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$																
50	+ 2.686	0	−0.312	−0.2688	− 2.918	0	−0.2965	+0.1807	−0.0393	0	−0.0419	−0.0052	− 8.502	0	− 3.770	+0.4461
40	+ 1.320	+1.218	−0.671	−0.2562	− 1.798	−1.291	+0.1445	+0.1856	−0.0446	−0.0228	−0.0351	−0.0046	− 5.350	− 4.090	− 2.523	+0.5106
30	− 1.850	+1.105	−1.355	−0.2385	+ 0.904	−1.675	+1.046	+0.1589	−0.0420	−0.0476	−0.0140	−0.0031	+ 2.433	− 4.983	+ 0.2750	+0.6671
20	− 4.145	−0.669	−1.455	−0.1857	+ 3.198	−0.4671	+1.549	+0.1555	+0.0168	−0.0585	+0.0187	−0.0013	+ 9.459	− 1.537	+ 2.336	+0.8314
10	− 1.196	−2.490	−0.395	−0.0979	− 1.779	+1.160	+1.532	+0.0992	+0.2016	−0.0062	+0.0428	−0.0001	+ 5.734	+ 3.292	+ 1.737	+0.9393
0	+12.58	0	+0.766	0	− 7.777	0	+0.6428	0	+0.5914	+0.3000	0	0	− 24.30	0	0	+1.000
(j) $r/t = 200$ and $r/l = 0.3$																
$\phi_1=30°$																
30	− 2.575	0	−3.097	−0.2688	− 1.018	0	+0.8433	+0.1065	−0.2481	0	−0.0585	−0.0023	+ 8.01	0	− 1.251	+0.7383
20	− 3.544	−1.727	−2.595	−0.2300	+ 0.025	−0.3675	+0.8538	+0.0981	−0.1187	−0.0759	−0.0236	−0.0016	+ 0.32	− 2.908	− 0.242	+0.7953
10	− 1.006	−0.351	−1.071	−0.1270	+ 1.142	+0.0251	+1.038	+0.0619	+0.3098	−0.1126	+0.0402	−0.0003	+ 9.20	+ 0.158	+ 0.787	+0.8828
0	+17.18	0	+0.500	0	− 2.618	0	+0.8660	0	+1.138	+0.3000	0	0	− 21.66	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(j) (Continued)																
$\phi_1=35°$																
35	+ 1.157	0	−2.003	−0.2639	− 3.540	0	+0.5377	+0.1233	−0.1777	0	−0.0616	−0.0033	− 12.73	0	− 2.708	+0.6330
30	+ 0.434	+0.250	−2.034	−0.2580	− 1.763	−0.3543	+0.6157	+0.1220	−0.1650	−0.0475	−0.0543	−0.0031	− 10.23	− 3.290	− 2.236	+0.5464
20	− 3.630	−0.571	−1.999	−0.2098	+ 1.001	−0.5379	+1.051	+0.1087	−0.0418	−0.1118	−0.0096	−0.0017	+ 5.57	− 4.934	+ 0.474	+0.7427
10	− 2.937	−2.907	−0.903	−0.1149	+ 2.318	+0.2927	+1.184	+0.0698	+0.3091	−0.0522	+0.0487	−0.0002	+ 13.92	+ 1.650	+ 1.650	+0.8689
0	+18.56	0	+0.574	0	− 5.780	0	+0.8122	0	+1.058	+0.3000	0	0	− 35.32	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$																
40	+ 4.491	0	−0.895	−0.2230	− 4.589	0	−0.0553	+0.1198	−0.0958	0	−0.0550	−0.0039	+ 16.80	0	− 4.723	+0.4470
30	+ 0.927	+1.787	−1.263	−0.2170	− 1.599	−1.680	+0.4612	+0.1225	−0.0958	−0.0529	−0.0397	−0.0032	− 7.30	− 7.430	− 2.380	+0.5253
20	− 5.904	+0.374	−1.979	−0.1836	+ 2.992	−1.296	+1.378	+0.1158	−0.0298	−0.0936	+0.0040	−0.0016	+ 12.97	− 5.929	+ 1.932	+0.6997
10	− 4.643	−3.248	−1.057	−0.1038	+ 3.576	+0.8937	+1.451	+0.0774	+0.2786	−0.0416	+0.0506	−0.0001	+ 16.75	+ 3.933	+ 2.673	+0.8621
0	+22.55	0	+0.643	0	−10.29	0	+0.7660	0	+1.069	+0.3000	0	0	− 48.57	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$																
45	+ 5.463	0	+0.808	−0.1511	− 5.443	0	−0.8614	+0.0899	−0.0114	0	−0.0370	−0.0038	− 17.92	0	− 6.551	+0.2280
40	+ 4.541	+1.888	+0.369	−0.1543	− 4.617	−1.379	−0.6652	+0.0937	−0.0214	−0.0039	−0.0364	−0.0037	− 15.90	− 4.718	− 5.866	+0.2542
30	− 0.843	+3.190	−1.138	−0.1700	+ 0.303	−2.859	+0.6257	+0.1158	−0.0772	−0.0304	−0.0273	−0.0038	− 1.34	− 9.994	− 1.292	+0.4304
20	− 8.160	+0.555	−2.324	−0.1610	+ 5.220	−1.401	+1.929	+0.1250	−0.0627	−0.0765	+0.0042	−0.0013	+ 17.97	− 5.233	+ 3.575	+0.6795
10	− 5.055	−3.891	−1.245	−0.0955	+ 4.276	+1.728	+1.763	+0.0858	+0.2474	−0.0456	+0.0471	−0.0000	+ 16.41	+ 3.437	+ 3.437	+0.8640
0	+25.47	0	+0.707	0	−14.77	0	+0.7071	0	+1.134	+0.3000	0	0	− 56.01	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$																
50	+ 5.628	0	+1.510	−0.0742	− 5.740	0	−1.503	+0.0441	+0.0544	0	−0.0135	−0.0031	− 15.39	0	− 7.343	+0.0368
40	+ 3.900	+3.127	+0.564	−0.0969	− 3.696	−2.789	−0.7707	+0.0676	+0.0026	+0.0201	−0.0201	−0.0029	− 10.44	− 7.529	− 5.048	+0.1442
30	− 2.878	+3.516	−1.463	−0.1393	+ 1.553	−3.453	+0.111	+0.1168	−0.1000	−0.0670	−0.0234	−0.0023	+ 3.25	− 9.817	+ 0.304	+0.4090
20	− 8.823	+0.094	−2.598	−0.1467	+ 6.537	−1.072	+2.491	+0.1375	−0.1008	−0.0716	−0.0025	−0.0011	+ 18.80	− 5.474	+ 4.612	+0.6832
10	− 5.273	−4.274	−1.282	−0.0891	+ 4.214	+2.483	+1.982	+0.0953	+0.2254	−0.0563	+0.0424	−0.0000	+ 14.04	+ 3.666	+ 3.666	+0.8700
0	+25.53	0	+0.766	0	−17.75	0	+0.6428	0	+1.193	+0.3000	0	0	− 56.36	0	0	+1.000
(k) $r/t = 200$ and $r/l = 0.4$																
$\phi_1=30°$																
30	+ 1.134	0	−2.479	−0.2211	− 2.625	0	+0.5943	+0.0868	−0.2847	0	−0.0710	−0.0026	− 20.19	0	− 3.173	+0.5913
20	− 3.463	−0.295	−2.481	−0.1937	− 0.066	−0.9430	+0.9092	+0.0810	−0.1583	−0.1339	−0.0302	−0.0018	+ 0.87	− 7.343	− 0.619	+0.6619
10	− 5.538	−3.468	−1.407	−0.1117	+ 2.974	+0.0700	+1.194	+0.0553	+0.3622	−0.1029	+0.0493	−0.0003	+ 22.57	+ 0.435	+ 1.999	+0.8155
0	+27.68	0	+0.500	0	− 6.899	0	+0.8660	0	+1.534	+0.4000	0	0	− 56.52	0	0	+1.000

संरचनात्मक विश्लेषण

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

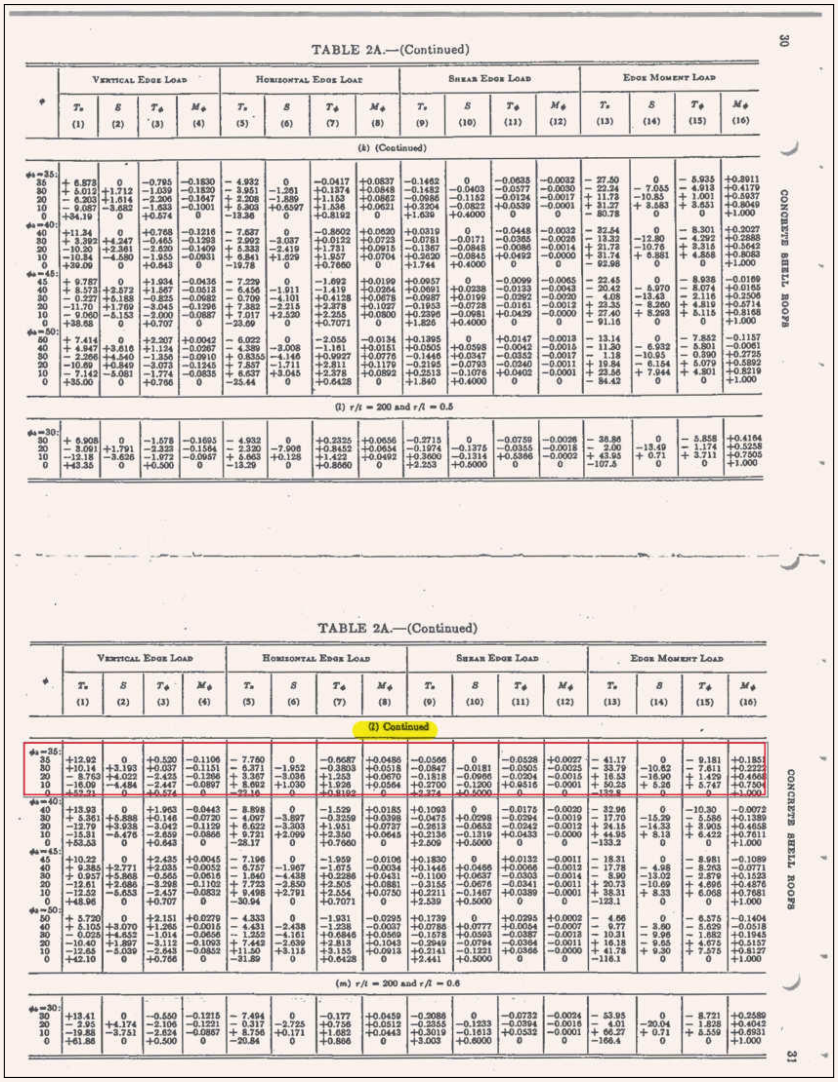


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_ϕ (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_ϕ (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_ϕ (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_ϕ (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(k) (Continued)																
$\phi_k=35°$																
35	+ 6.873	0	−0.795	−0.1830	− 4.932	0	−0.0417	+0.0837	−0.1462	0	−0.0635	−0.0032	− 27.50	0	− 5.935	+0.3911
30	+ 5.012	+1.712	−1.039	−0.1820	− 3.951	−1.261	+0.1374	+0.0848	−0.1482	−0.0403	−0.0577	−0.0030	− 22.24	− 7.055	− 4.913	+0.4179
20	− 6.203	+1.614	−2.206	−0.1647	+ 3.208	−1.839	+1.153	+0.0862	−0.0985	−0.1152	−0.0124	−0.0017	+ 11.72	−10.55	+ 1.001	+0.5937
10	− 9.087	−5.682	−1.633	−0.1001	+ 5.303	+0.6597	+1.536	+0.0621	+0.3204	−0.0822	+0.0539	−0.0001	+ 31.27	+ 3.583	+ 3.551	+0.8049
0	+34.19	0	+0.574	0	−13.36	0	+0.8192	0	+1.639	+0.4000	0	0	− 80.78	0	0	+1.000
$\phi_k=40°$																
40	+11.34	0	+0.768	−0.3216	− 7.637	0	−0.8502	+0.0620	+0.0319	0	−0.0448	−0.0032	− 32.54	0	− 8.301	+0.2027
30	+ 3.392	+4.247	−0.485	−0.1293	− 2.092	−2.037	+0.0152	+0.0723	−0.0781	−0.0171	−0.0365	−0.0028	− 13.32	−12.80	− 4.292	+0.2888
20	−10.30	+2.361	−2.620	−0.1409	+ 5.333	−2.419	+1.751	+0.0915	−0.1367	−0.0848	−0.0086	−0.0014	+ 21.72	−10.76	+ 3.315	+0.5642
10	−10.84	−4.580	−1.955	−0.0931	+ 6.841	+1.629	+1.957	+0.0704	+0.3620	−0.0845	+0.0492	−0.0000	+ 31.74	+ 6.881	+ 4.868	+0.8063
0	+39.09	0	+0.843	0	−19.78	0	+0.7660	0	+1.744	+0.4000	0	0	− 92.96	0	0	+1.000
$\phi_k=45°$																
45	+ 9.787	0	+1.934	−0.0436	− 7.229	0	−1.692	+0.0199	+0.0957	0	−0.0099	−0.0065	− 22.45	0	− 8.936	−0.0169
40	+ 8.573	+2.572	+1.567	−0.0513	− 6.456	−1.911	−1.419	+0.0264	+0.0691	+0.0238	−0.0133	−0.0043	− 20.42	− 5.970	− 8.074	+0.0165
30	− 0.227	+5.188	−0.825	−0.0982	− 0.709	−4.101	+0.4128	+0.0678	−0.0987	+0.0199	−0.0292	−0.0030	− 4.08	−13.43	− 2.116	+0.2506
20	−11.70	+1.769	−3.045	−0.1296	+ 7.382	−2.215	+2.378	+0.1027	−0.1953	−0.0728	−0.0161	−0.0012	+ 23.35	− 8.260	+ 4.819	+0.5714
10	− 9.060	−5.153	−2.000	−0.0887	+ 7.017	+2.520	+2.255	+0.0800	+0.2396	−0.0981	+0.0429	−0.0000	+ 27.40	+ 8.293	+ 5.115	+0.8168
0	+38.88	0	+0.707	0	−23.09	0	+0.7071	0	+1.826	+0.4000	0	0	− 91.16	0	0	+1.000
$\phi_k=50°$																
50	+ 7.414	0	+2.307	+0.0042	− 6.022	0	−2.055	−0.0134	+0.1395	0	+0.0147	−0.0013	− 13.14	0	− 7.852	−0.1157
40	+ 4.947	+3.616	+1.124	−0.0267	− 4.389	−3.008	−1.161	+0.0151	+0.0505	+0.0598	−0.0042	−0.0015	− 11.30	0	− 5.801	−0.0061
30	− 2.266	+4.540	−1.356	−0.0910	+ 0.8355	−4.146	+0.9927	+0.0776	−0.1445	+0.0347	−0.0352	−0.0017	+ 1.18	− 10.95	+ 0.390	+0.2725
20	−10.89	+0.849	−3.073	−0.1245	+ 7.857	−1.711	+2.811	+0.1179	−0.2195	−0.0793	−0.0240	−0.0011	+ 19.84	− 6.154	+ 5.079	+0.5892
10	− 7.142	−5.081	−1.774	−0.0835	+ 6.537	+3.045	+2.378	+0.0892	+0.2513	−0.1076	+0.0402	−0.0001	+ 22.56	+ 7.944	+ 4.801	+0.8219
0	+35.00	0	+0.766	0	−25.44	0	+0.6428	0	+1.840	+0.4000	0	0	− 84.42	0	0	+1.000
(l) $r/t = 200$ and $r/l = 0.5$																
$\phi_k=30°$																
30	+ 5.908	0	−1.578	−0.1695	− 4.932	0	+0.2355	+0.0656	−0.2715	0	−0.0759	−0.0026	− 38.86	0	− 5.858	+0.4164
20	− 3.061	+1.791	−2.223	−0.1564	+ 2.330	−7.908	+0.8452	+0.0634	−0.1974	−0.1375	−0.0355	−0.0018	+ 2.00	−13.49	− 1.174	+0.5238
10	−12.18	−3.626	−1.972	−0.0957	+ 5.663	+0.128	+1.422	+0.0492	+0.3600	−0.1314	+0.5386	−0.0002	+ 43.95	+ 0.71	+ 3.711	+0.7505
0	+43.35	0	+0.500	0	−13.29	0	+0.8660	0	+2.253	+0.5000	0	0	−107.5	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_ϕ (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_ϕ (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_ϕ (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_ϕ (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(l) Continued																
$\phi_k=35°$																
35	+12.92	0	+0.520	−0.1106	− 7.760	0	−0.6687	+0.0486	−0.0566	0	−0.0526	+0.0027	− 41.17	0	− 9.181	+0.1851
30	+10.14	+3.193	+0.037	−0.1151	− 5.371	−1.952	−0.3803	+0.0518	−0.0847	−0.0181	−0.0505	−0.0025	− 33.79	− 10.62	− 7.811	+0.2222
20	− 8.763	+4.022	−2.425	−0.1266	+ 3.367	−3.036	+1.253	+0.0670	−0.1818	−0.0966	−0.0204	−0.0015	+ 16.53	−16.90	+ 1.429	+0.4668
10	−16.09	−4.484	−2.447	−0.0897	+ 8.602	+1.030	+1.926	+0.0564	+0.2700	−0.1200	+0.0416	−0.0001	+ 50.25	+ 5.28	+ 5.747	+0.7504
0	+52.91	0	+0.574	0	−23.16	0	+0.8192	0	+2.374	+0.5000	0	0	−133.8	0	0	+1.000
$\phi_k=40°$																
40	+13.93	0	+1.963	−0.0443	− 8.898	0	−1.529	+0.0185	+0.1093	0	−0.0175	−0.0020	− 32.96	0	− 10.30	−0.0072
30	+ 5.361	+5.888	+0.146	−0.0720	− 4.097	−3.897	−0.3359	+0.0398	−0.0475	+0.0298	−0.0294	−0.0019	− 17.70	−15.29	− 5.586	+0.1389
20	−12.79	+3.938	−3.042	−0.1129	+ 6.622	−3.303	+1.931	+0.0727	−0.2613	−0.0652	−0.0242	−0.0012	+ 34.16	−14.53	+ 3.903	+0.4658
10	−15.31	−8.476	−2.839	−0.0866	+ 9.721	+2.099	+2.350	+0.0645	+0.2136	−0.1319	+0.0433	−0.0000	+ 44.95	+ 8.13	+ 6.422	+0.7611
0	+53.53	0	+0.843	0	−28.17	0	+0.7660	0	+2.509	+0.5000	0	0	−133.2	0	0	+1.000
$\phi_k=45°$																
45	+10.22	0	+2.435	+0.0045	− 7.196	0	−1.959	−0.0106	+0.1830	0	+0.0132	−0.0011	− 18.31	0	− 8.981	−0.1089
40	+ 9.385	+2.771	+2.035	−0.0052	− 6.757	−1.967	−1.675	−0.0034	+0.1446	+0.0466	+0.0066	−0.0013	− 17.78	− 4.98	− 8.263	−0.0771
30	+ 0.957	+5.868	−0.565	−0.0616	− 1.640	−4.438	+0.2286	+0.0431	−0.1100	+0.0637	−0.0303	−0.0014	− 8.90	−13.02	− 2.879	+0.1533
20	−12.61	+2.686	−3.298	−0.1102	+ 7.723	−2.850	+2.505	+0.0881	−0.2155	−0.0676	−0.0341	−0.0011	+ 20.73	−10.69	+ 4.896	+0.4376
10	−12.52	−8.653	−2.457	−0.0832	+ 9.498	+2.791	+2.554	+0.0750	+0.2211	−0.1467	+0.0389	−0.0001	+ 38.31	+ 8.33	+ 6.068	+0.7681
0	+48.96	0	+0.707	0	−30.94	0	+0.7071	0	+2.539	+0.5000	0	0	−123.1	0	0	+1.000
$\phi_k=50°$																
50	+ 5.720	0	+2.151	+0.0279	− 4.333	0	−1.931	−0.0295	+0.1739	0	+0.0295	+0.0002	− 4.66	0	− 6.575	−0.1404
40	+ 5.155	+3.070	+1.285	−0.0016	− 4.431	−2.438	−1.228	−0.0037	+0.0785	+0.0777	+0.0054	−0.0007	− 9.77	− 3.80	− 5.629	−0.0518
30	− 0.025	+4.452	−1.014	−0.0656	− 1.252	−4.161	+0.6846	+0.0569	−0.1578	+0.0593	−0.0387	−0.0013	− 10.31	− 9.96	− 1.682	+0.1945
20	−10.40	+1.897	−3.112	−0.1093	+ 7.442	−2.639	+2.813	+0.1043	−0.2949	−0.0794	−0.0364	−0.0011	+ 16.18	− 9.55	+ 4.675	+0.5157
10	−12.63	−5.039	−2.643	−0.0833	+11.50	+3.115	+3.155	+0.0913	+0.2141	−0.1221	+0.0366	−0.0000	+ 41.78	+ 8.30	+ 7.373	+0.8127
0	+42.10	0	+0.766	0	−31.89	0	+0.6428	0	+2.441	+0.5000	0	0	−116.1	0	0	+1.000
(m) $r/t = 200$ and $r/l = 0.6$																
$\phi_k=30°$																
30	+13.41	0	−0.550	−0.1215	− 7.494	0	−0.177	+0.0459	−0.3086	0	−0.0732	−0.0024	− 53.95	0	− 8.721	+0.2589
20	− 2.95	+4.174	−2.106	−0.1231	+ 0.317	−2.725	+0.7156	−0.0513	−0.2355	−0.1333	−0.0394	−0.0016	+ 4.01	−20.04	− 1.828	+0.4043
10	−19.88	−3.751	−2.624	−0.0887	+ 8.756	+0.171	+1.682	+0.0443	+0.3019	−0.1613	+0.0532	−0.0001	+ 66.27	+ 0.71	+ 8.559	+0.6931
0	+61.88	0	+0.500	0	−20.84	0	+0.866	0	+3.003	+0.6000	0	0	−166.4	0	0	+1.000

शर्मिष्ठा पुरी

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

TABLE 2A.—(Continued)

(m) (Continued)

φ	Vertical Edge Load			Horizontal Edge Load			Shear Edge Load			Edge Moment Load		
	T_r (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_r (4)	T_r (5)	S (6)	T_r (7)	M_ϕ (8)	T_r (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_r (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
4°–25°	+117.48	0	+1.241	−0.0076	+ 9.794	0	−1.155	+0.0231	+0.0614	0	−0.0363	−0.0020	48.68	0	−11.31	+0.0453
35	+113.67	+4.642	+1.201	−0.0074	+ 9.476	−1.200	−1.118	+0.0223	+0.0594	+0.113	−0.0351	−0.0019	47.11	−12.65	−10.94	+0.0437
30	+110.27	+8.000	+1.163	−0.0089	+ 4.010	−2.973	−1.111	+0.0331	+0.0719	+0.1943	−0.0294	−0.0012	17.11	−21.22	−3.173	+0.2710
20	−22.33	−5.060	−0.136	−0.0827	+11.70	+1.270	+2.252	+0.0533	+0.1859	−0.1613	−0.0454	−0.0000	68.22	+ 5.83	+ 7.238	+0.7029
10	+68.53	0	+0.374	0	−30.32	0	+0.819	0	+3.204	+0.6000	0	0	−180.9	0	0	+1.000
4°–40°	+14.46	0	+2.530	−0.0552	+ 8.900	0	−1.788	−0.0029	+0.2066	0	+0.0030	−0.0012	29.22	0	−10.53	−0.0830
40	+ 6.70	+0.504	+0.519	−0.0397	+ 4.840	−4.143	−0.357	+0.0213	+0.0157	+0.0719	−0.0224	−0.0013	20.21	−14.50	+ 6.191	+0.0578
30	−13.24	+4.922	−3.187	−0.0946	− 6.008	−3.889	+2.003	+0.0650	−0.3733	−0.0438	−0.0384	−0.0010	18.87	−18.27	+ 2.394	+0.3969
20	−19.32	−5.810	−1.114	−0.0812	+12.10	+ 0.231	+2.921	+0.0616	−0.1169	−0.1797	+0.0373	−0.0001	48.09	+ 7.26	+ 7.253	+0.7139
10	+68.23	0	+0.448	0	−30.19	0	+0.786	0	+3.207	+0.6000	0	0	−180.2	0	0	+1.000
4°–45°	+ 8.60	0	+2.397	+0.0217	+ 5.739	0	−1.538	−0.0205	+0.2347	0	+0.0256	−0.0004	8.38	0	7.554	−0.1241
40	+ 6.15	+2.310	+2.198	+0.0133	+ 5.022	−1.565	−1.616	−0.0140	+0.1924	+0.0015	+0.0199	−0.0005	10.38	−2.49	7.198	−0.0988
30	−11.68	+3.158	−3.104	−0.0948	− 6.784	−3.438	+2.416	+0.0759	−0.1435	−0.0044	−0.0478	−0.0011	12.49	−10.03	3.665	+0.4113
20	−16.02	−5.641	−2.752	−0.0772	+11.12	+ 2.709	+2.753	+0.0695	−0.4030	−0.0964	−0.1895	−0.0001	50.54	+ 6.80	6.668	+0.7190
10	+58.53	0	+0.707	0	−38.04	0	+0.643	0	+3.388	+0.6000	0	0	−183.3	0	0	+1.000
4°–50°	+ 3.09	0	+1.709	+0.0284	+ 1.816	0	−1.467	−0.0273	+0.1854	0	+0.0382	+0.0002	7.18	0	3.972	−0.1088
40	+ 4.42	+1.981	+1.179	+0.0063	+ 3.693	−1.374	−1.120	−0.0084	+0.1051	+0.0118	−0.0118	−0.0003	5.77	1.40	4.634	−0.0572
30	+ 2.57	+4.287	−0.638	−0.0476	+ 3.650	−3.722	+0.325	+0.0406	−0.1481	−0.0826	−0.0419	−0.0012	20.51	6.83	3.347	+0.1206
20	− 1.43	−2.920	−0.775	−0.0948	+ 1.372	−3.425	+2.461	+0.0662	−0.3819	−0.0757	−0.0497	−0.0012	7.78	12.83	3.041	+0.4149
10	− 1.14	−2.742	−0.706	−0.0772	+ 1.11	+ 0.07	+2.752	+0.07	−0.1908	−0.1895	−0.0361	−0.0001	51.00	6.80	6.671	+0.7134
0	+53.45	0	+0.765	0	−41.80	0	+0.643	0	+3.218	+0.6000	0	0	−156.9	0	0	+1.000

v = the tangential displacement of the shell, considered positive in the direction of increasing values of ϕ;

w = the radial displacement of the shell, considered positive in the outward direction; and,

θ = the rotation of the shell, considered positive when the section rotates clockwise.

The effect of line loads is most pronounced in the vicinity of the edge at which the line load is applied, with the intensity of the internal forces generally diminishing as the distance from the applied forces is increased. When the chord width of the shell is small compared to the longitudinal span, the internal resisting forces produced by line loads applied at one edge do not diminish

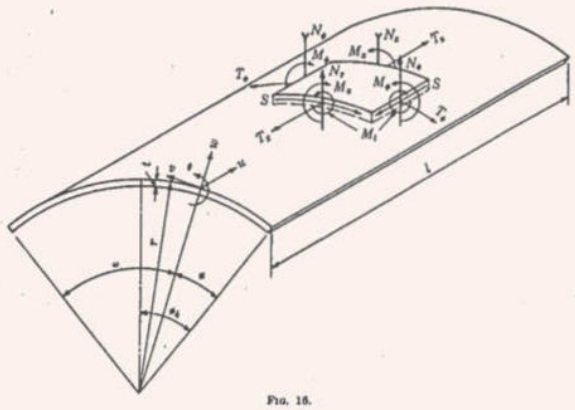


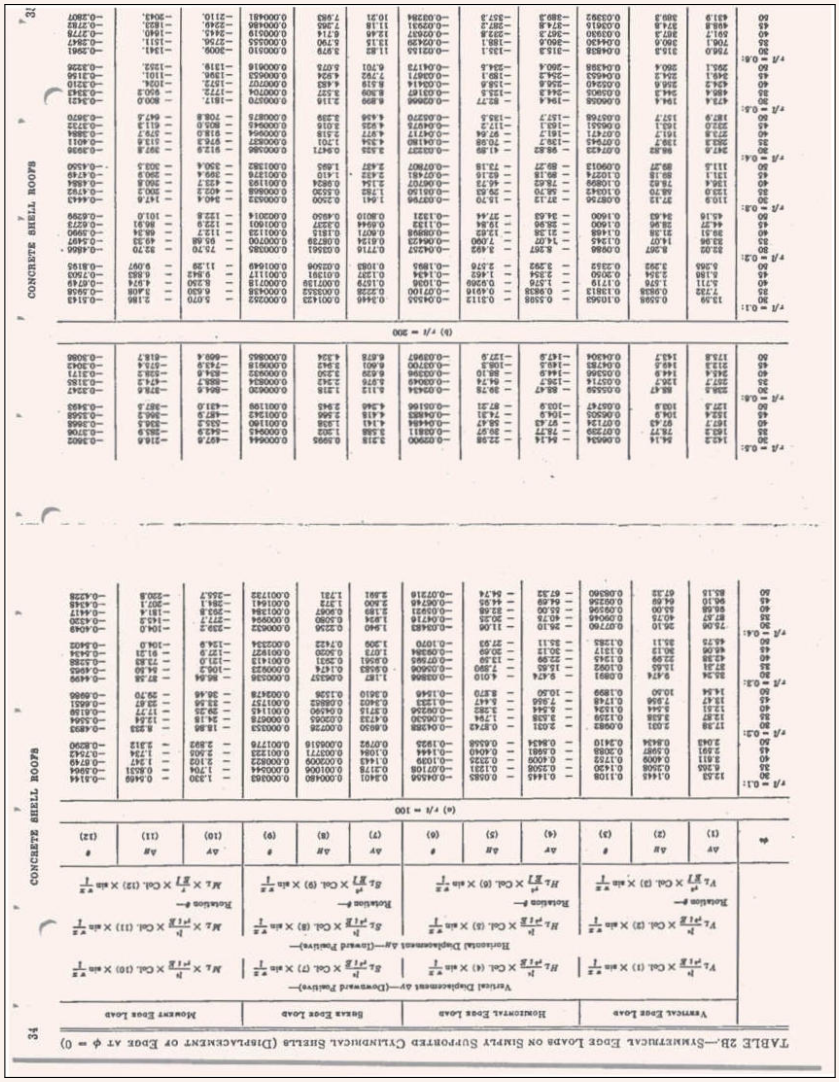
FIG. 18.

sufficiently fast so that the effect of a line load applied at one edge is felt at the farther edge. For this condition, the magnitude of angle subtended by the shell plays an important role in the distribution of the forces and must be considered; but, when the chord width is large compared with the longitudinal span, the effect of line loads on one edge is negligible on the other edge, and therefore line loads on each edge can be treated separately. There is no definite line of demarcation as to when the effect of line loads applied to one edge can be neglected at the other edge. However, computed values seem to indicate that, when r/l exceeds 0.6 with ϕ_1 more than 30°, each longitudinal edge can be treated individually.

Because of this indication, data showing the effect of line loads are presented in two groups of tables. The first group (Tables 2A and 2B) gives the force distribution and displacements at the edge in long barrels for symmetrical

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

F बैरल शेल छतों का अभिकल्प

. (Portland Cement Association, 1954 PDF) से लिया गया यह उदाहरण विशेष रुचि का है। यह न केवल शेल संरचना के विश्लेषण और अभिकल्प को स्पष्ट करता है, बल्कि एक स्थैतिकतः अनिर्धार्य स्थिति के निरूपण को भी दर्शाता है, जिसमें अध्याय 25 में पूर्वविवेचित नम्यता की संकल्पना प्रयुक्त होती है। संरचना को पहले दो भागों में विभाजित किया जाता है और प्रत्येक का स्वतंत्र रूप से विश्लेषण किया जाता है; फिर दोनों भागों को पुनः संयोजित करते समय विस्थापन-संगतता लागू करके अंतिम समाधान प्राप्त किया जाता है।

इस प्रक्रिया को प्रत्यास्थ स्प्रिंग आलंबों पर टिके बीम के अनुरूप समझा जा सकता है, जैसा कि 1028 में दर्शाया गया है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

CONCRETE INFORMATION
PORTLAND CEMENT ASSOCIATION

Design of Barrel Shell Roofs

Introduction

The roofing of large unobstructed areas with a minimum amount of material is a goal that has claimed the attention of engineers and architects for years. Of the various types of roof construction, the concrete shell offers the best possibility of attaining this desirable end. For example, shells only 2¼ in. thick spanning distances up to 150 ft. have been built. In Mexico a shell only 1½ in. thick cantilevers 36 ft. without the aid of any supporting members. In countries throughout the world, including the United States, Great Britain, Germany, Spain and India, there are examples of concrete shells having a smaller ratio of thickness to span than that provided by nature in its protective covering of an egg.

Although concrete shells are of relatively recent origin (the first experimental shell was built in 1920 at the Zeiss works in Germany while the first shell roof in the U.S. was constructed in 1933), the list of shell structures throughout the world is impressive. At least 500 such roofs of various shapes and sizes have been built. In the United States alone over 12 million sq.ft. of shell roofs have been constructed for structures varying from small industrial buildings to monumental buildings displaying new architectural forms.

Aware of the potentialities of this form of construction, the American Society of Civil Engineers in 1952 published Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*. By a series of comprehensive tables this manual greatly simplifies the design of shell roofs. The following article is intended to supplement the manual by presenting in detail the design of a concrete shell roof for a typical industrial building.

Structural Behavior

Although the analysis of a shell in a strict sense is a three-dimensional problem, structural behavior of a shell can best be understood by comparing its action to that of an ordinary beam. Consider the curved longitudinal shell in Fig. 1 to be a beam supported by two transverse supports. This beam differs from the ordinary concept of a beam only in that its cross-section is a thin curved slab.

The application of load on the shell induces longitudinal fiber stresses similar to those induced in any homogeneous beam under load, and if the longitudinal span l (Fig. 1) is large compared to the transverse chord width, the variation of fiber stresses across any section is the same as that created in a beam; that is, it is linear from top to bottom. These fiber stresses designated in shell terminology as T_x, the force per unit width, are comparable to the f_c-stresses of conventional reinforced concrete design.

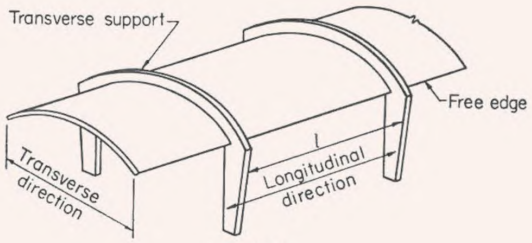


FIG. 1

As the ratio of chord width to span length increases, the variation of T_x-forces changes from straight-line to curvilinear. The extent of this change is shown in Fig. 2, where T_x-forces are plotted in the conventional manner. The ordinate represents vertical distance measured from the bottom of the shell in terms of $\frac{y}{h}$ and the abscissa indicates magnitude of T_x-forces. For convenience, curves are drawn for various values of $\frac{r}{l}$, the ratio of shell radius to span length, rather than for the previously discussed ratio of chord width to span length. Although the two ratios are interdependent, $\frac{r}{l}$ is a more suitable parameter since it includes the effect of shell rise as well as chord

The activities of the Portland Cement Association are limited to scientific research, the development of new or improved products and methods, technical service, promotion and educational effort (including safety work), and are primarily designed to improve and extend the uses of portland cement and concrete. The manifold program of the Association and its varied services to cement users are made possible by the financial support of its member companies in the United States and Canada, engaged in the manufacture and sale of a very large proportion of all portland cement used in these two countries. A current list of member companies will be furnished on request.

Printed in U.S.A.

COPYRIGHT 1954 BY PORTLAND CEMENT ASSOCIATION

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

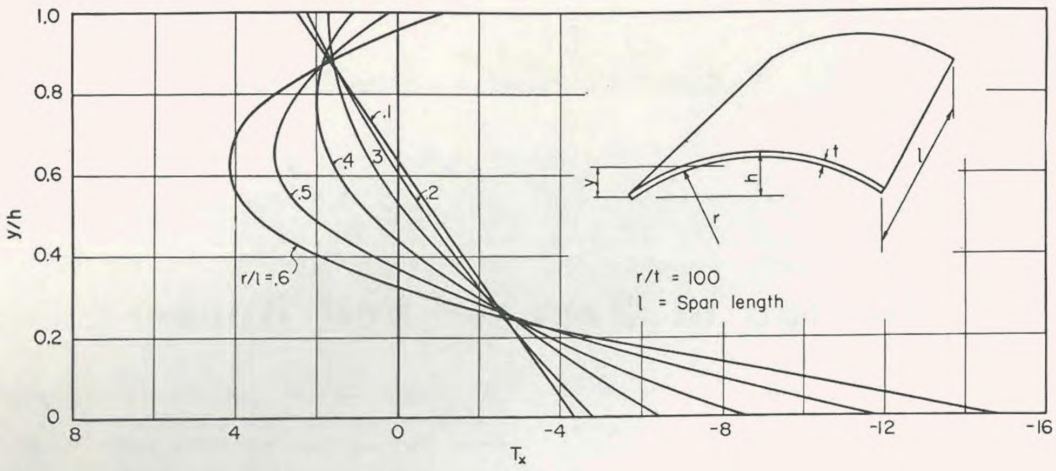


FIG. 2

width. Curves of Fig. 2 apply to a given load, the specific ratio of $\frac{r}{t} = 100$ in which t equals thickness, and a subtended angle of 80°. However, the trend shown is applicable to all shells. When $\frac{r}{l}$ is less than 0.2, the variation is almost linear, while for larger values of $\frac{r}{l}$, the force at the lower edge is greater than that given by ordinary beam theory.

The departure from ordinary flexural action is due basically to the presence of transverse bending in the shell. In the typical shell strip of unit width illustrated in Fig. 3a, moments of the external load and internal forces about any face such as AC must be in equilibrium. With face BD taken at the lower edge of the shell, moment M_ϕ must equal the difference between moment due to external load acting on the unit strip and that due to tangential shears S. These tangential shears are similar to the shearing stresses v in a beam.

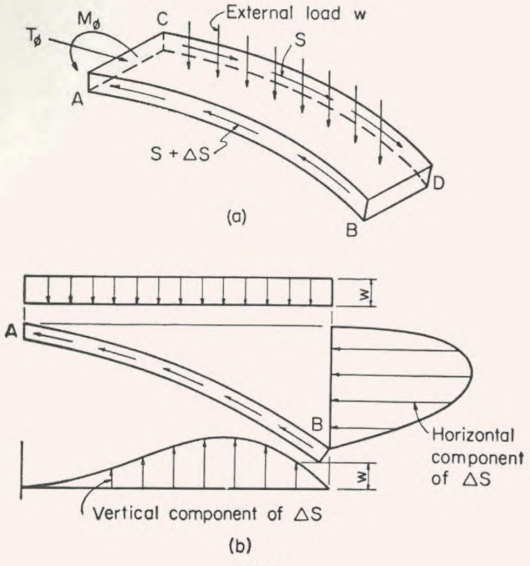


FIG. 3

For most distributed loads, moment produced by an external load and that produced by tangential shears are seldom equal. In fact, for usual distributed loads the moment M_ϕ is counterclockwise while the net moment of external load and tangential shears is clockwise. This can be inferred by inspecting Fig. 3b in which vertical and horizontal components of the difference in tangential shears acting on faces AB and CD have been plotted to the same scale as uniform external load. Statical moment of external load to the right of any point is clockwise. In contrast to this the vertical component of the tangential shears always produces a counterclockwise moment about that point. Throughout most of the shell this counterclockwise moment is larger than the statical moment of the external load, although the difference between the two is small since total upward and downward forces are of equal magnitude. As a result, addition of the clockwise moment due to the horizontal component always produces a clockwise final moment, and the resisting moment M_ϕ is counterclockwise. From this line of reasoning, it follows that uniformly distributed loads always produce tension in the upper fibers and compression in the lower fibers of a shell that is unrestrained along its edges.

Since transverse moment M_ϕ at any point is always counterclockwise or negative, point B (Fig. 3a) deflects down and inward relative to A. This differential deflection of point B induces longitudinal fiber stresses in the lower portion of the shell which are in excess of those given by ordinary beam theory. This condition forces a departure from straight-line stress variation.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

The increase in the tensile fiber stresses in the lower region of the shell cross-section, as shown in Fig. 2, must be accompanied by an increase in compressive stresses above the neutral axis so that the summation of forces in the longitudinal direction will be zero. Since moment produced by the longitudinal internal forces must still equal the external moment, this increase in magnitude of the internal forces is accompanied by a shortening of the moment arm between centroids of compressive and tensile forces. The effect of this action is to lower the position of the neutral axis.

If the curves in Fig. 2 are examined critically, it becomes apparent that as values of $\frac{r}{l}$ increase, the concentration of stresses in the vicinity of the lower edge indicates a decrease in the height of shell participating in beam action. In other words, for large values of $\frac{r}{l}$ the top or crown portion of the shell participates to only a minor extent in beam action. This action can be compared to the decreasing effectiveness of remote portions of a T-beam flange as the ratio of flange width to beam span increases.

Although the magnitude of tensile stress at the lower edge of the shell as indicated in Fig. 2 is sometimes quite sensitive to variations of $\frac{r}{l}$, total tensile area under these curves does not vary to the same degree. For example, the ratio of bottom fiber stresses for values of $\frac{r}{l}$ of 0.6 and 0.1 is 3.2 while the ratio of tensile areas below the neutral axis for these cases is only 1.4. Since reinforcement required depends essentially on total tensile area rather than maximum fiber stress, the design of a shell is not so sensitive a problem as the curves indicate. Moreover, curves of Fig. 2 are prepared for a single shell unrestrained at the lower edges. When these edges are restrained from deflecting down and inward by adjoining shells or edge beams, longitudinal stresses conform more closely to the straight-line variation.

Factors Affecting Shell Dimensions

An example is presented to illustrate the procedure involved in the analysis and design of a typical cylindrical concrete shell roof. A column spacing of 40x50 ft. is selected as being representative of the unobstructed floor area generally required for industrial buildings. A typical unit of the shell roof shown in Fig. 4 consists of three barrels, two exterior and one interior, spanning 50 ft. in the longitudinal direction. The barrels are supported by transverse frames spanning 40 ft. These dimensions result in a unit 100 ft. long and 120 ft. wide with shells continuous over alternate frames. Split frames are provided every 100 ft. This layout permits six re-uses of forms in a building 600 ft. long and limits the amount of concrete placed in one operation to about 200 cu.yd.

Shell thickness is taken as 4 in., which for most conditions is more than adequate to resist compressive forces and flexural moments induced in a shell. As a matter of fact, except in the vicinity of transverse frames, depth of

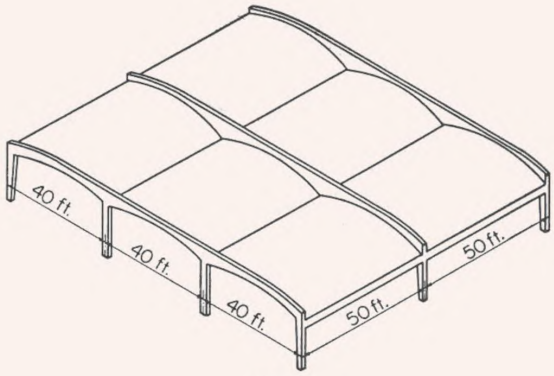


FIG. 4

the shell is controlled by requirements of adequate coverage for reinforcement. Usually, three to four layers of reinforcement are required, depending upon loading and type of shell; and with a minimum clear distance between reinforcement and shell surface of ¾ in., minimum depth is about 3 in. Many shells have been built abroad with a thickness of less than 3 in., such shells requiring close tolerance in the placement of reinforcement. While it might be argued that the increased labor involved in such circumstances is not justified by the reduction in concrete volume, a decrease in dead weight may be important since it is reflected almost directly in the amount of longitudinal and diagonal reinforcement required.

The relationship between dead weight and reinforcement follows from the fact that a shell acts essentially as a beam in the longitudinal direction with effective depth dependent upon the rise of the shell. For a given rise, the distance between centroids of tensile and compressive forces is almost unaffected by minor changes in shell thickness, and total longitudinal tension varies directly with the load. As a result, a reduction in dead load due to a decrease in shell thickness leads to a smaller total tension.

Transverse moment is also reduced in proportion to the load. However, this moment is resisted by the shell thickness itself so that a decrease in thickness allows little reduction in the amount of transverse reinforcement. In selecting shell thickness, its effect on reinforcement should be considered.

With shell thickness established, the next step involves the selection of rise (see Fig. 5), the distance from the lowest point of the structure (the bottom of the edge beams, if required) to mid-depth of the shell at the crown. For long-barrel, simply supported shells, a rise of one-tenth the longitudinal span generally gives sufficient curvature to produce a satisfactory stress condition and to avoid a large concentration of reinforcement in the valley. This ratio of one-tenth is simply a guide in preliminary layout work. For shells continuous in the longitudinal direction, rise can be less than one-tenth of the span.

In this example a rise of approximately 0.1 l is pro-

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

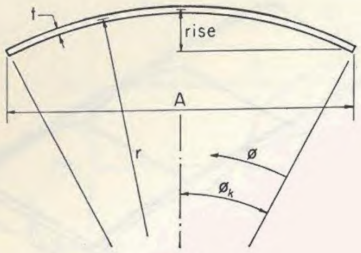


FIG. 5

duced by a shell radius of 45 ft. The rise of the interior barrel is determined by trigonometry from Fig. 5.

$$\text{rise} = r - \sqrt{r^2 - (0.5A)^2} = 45 - \sqrt{45^2 - 20^2} = 4.69 \text{ ft.}$$

The sine and cosine of one-half the angle subtended by the shell are:

$$\sin \phi_k = \frac{20}{45} = 0.4444$$

$$\cos \phi_k = \frac{(45 - 4.69)}{45} = 0.8958$$

Therefore ϕ_k, the angle from the crown to the edge of the shell, is equal to 26° 23′. Physical constants required in shell analysis are:

$$\frac{r}{l} = \frac{45}{50} = 0.9$$

$$\frac{rt}{l^2} = \frac{45 \times 4}{50^2 \times 12} = 0.006$$

Two separate analyses are required for the roof unit shown in Fig. 4 since support conditions at longitudinal edges of interior and exterior barrels are different. Edges of the interior barrel are restrained horizontally by adjoining exterior barrels, while outside edges of exterior barrels are restrained only by edge beams. The first analysis deals with the interior barrel and the second with exterior barrels.

Discussion of Tables in ASCE Manual No. 31

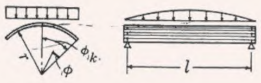
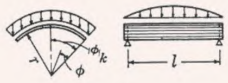
As discussed in ASCE Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*,* shell analysis resembles the analysis of indeterminate structures. The shell is first considered supported along both the transverse and longitudinal edges, a condition equivalent to assuming the shell determinate. Under this condition load is carried only by direct forces acting entirely in the plane of the shell, and reactions and displacements along the edges are inconsistent with actual end conditions. Therefore, corrective forces called edge or line loads are applied subsequently along the edges inducing bending moments as well as direct forces in the shell. Consequently, the analysis of a shell consists of two principal steps:

1. Determination of internal forces and edge reactions, assuming the shell to be statically determinate. This is called the "membrane analysis."

2. Determination of internal forces due to corrective loads applied along the edges of the shell, and the superposition of these forces on those resulting from the membrane analysis.

Table 1B and portions of Tables 3A and 3B reproduced from ASCE Manual No. 31 will be utilized. Table 1B deals with internal membrane forces and the displacements induced in a simply supported shell by sinusoidal surface loads. As shown in sketches at the top of the table, the load on the shell is assumed symmetrical about the crown. Coefficients in the left half are for a load uniform in the transverse direction, while coefficients in the right half are for a load varying as the weight of the shell. In both cases, load distribution in the longitudinal direction varies as $\sin \frac{\pi x}{l}$.

TABLE 1B.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING LONGITUDINALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM POSITIVE AT THE MIDDLE

	(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD	(b) DEAD WEIGHT LOAD
		
	Longitudinal Force T_x— $p_{ur}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_{ur}\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (2)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_{ur} \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Vertical Displacement Δ_V— $\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(1+\frac{1}{2}(\pi r/l)^2+\frac{1}{12}(\pi r/l)^4\right) \times \text{Col. (4)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Horizontal Displacement Δ_H— $+p_{ur}\frac{l^4}{r^3tE}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (5)} + \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \times \text{Col. (6)}\right\} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $p_{dr}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_{dr}\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_{dr} \times \text{Col. (9)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Vertical Displacement Δ_V— $\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(\frac{2r}{\pi l}\right)^2+\frac{2}{\pi^4}+\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (10)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Horizontal Displacement Δ_H— $+p_{dr}\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (11)}\right] \times \sin\frac{\pi x}{l}$

$\phi_k-\phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−0.3040	0	−1.0000	0.12319	0	0	−0.2026	0	−1.000	1.0000	0
5	−0.2993	−0.0829	−0.9924	0.12180	0.0872	−0.00009	−0.2019	−0.0555	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−0.2856	−0.1633	−0.9698	0.11766	0.1736	−0.00064	−0.1996	−0.1105	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−0.2623	−0.2387	−0.9330	0.11102	0.2588	−0.00213	−0.1975	−0.1648	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−0.2329	−0.3069	−0.8830	0.10222	0.3420	−0.00490	−0.1904	−0.2178	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.1954	−0.3658	−0.8214	0.09170	0.4226	−0.00930	−0.1837	−0.2690	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.1520	−0.4140	−0.7500	0.08001	0.5000	−0.01539	−0.1754	−0.3183	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.1040	−0.4487	−0.6710	0.06771	0.5736	−0.02325	−0.1660	−0.3652	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.0528	−0.4702	−0.5868	0.05537	0.6428	−0.03272	−0.1552	−0.4092	−0.7660	0.5868	0.4924

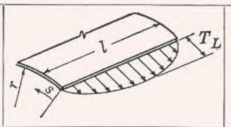
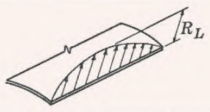
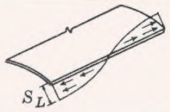
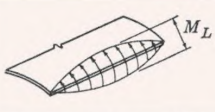
*Published by the American Society of Civil Engineers.

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

TABLE 3A.—Edge Loads on Simply Supported Cylindrical Shells

	Tangential Edge Load	Radial Edge Load	Shear Edge Load	Moment Edge Load
	(a) Basic Formulas for $n = 1$; for $n = 3$ Substitute $\frac{3\pi x}{l}$ Instead of $\frac{\pi x}{l}$			
	Longitudinal Force T_x— $T_L \times$ Col. (1) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $T_L \times$ Col. (2) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $T_L \times$ Col. (3) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $T_L \times t \times$ Col. (4) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (5) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (6) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $R_L \times \frac{t}{t} \times$ Col. (7) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $R_L \times l \times$ Col. (8) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $S_L \times$ Col. (9) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $S_L \times$ Col. (10) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $S_L \times$ Col. (11) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $S_L \times t \times$ Col. (12) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (13) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (14) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (15) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $M_L \times$ Col. (16) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$
	(b) $n = 1$			
				

$\frac{s}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
0.2	+ 8.039	−2.488	+0.769	+0.1217	−0.1224	+0.05501	+0.00539	+0.02779	+3.624	+0.169	+0.0851	+0.0378	−0.1135	+0.1348	+0.01418	+0.837
0.1	+15.393	−1.575	+0.933	+0.1301	−0.3353	+0.03740	+0.00163	+0.01407	+5.200	+0.515	+0.0589	+0.0227	−0.7959	+0.1008	+0.00452	+0.913
0.0	+24.846	0	+1.000	0	−0.6254	0	0	0	+7.129	+1.000	0	0	−1.8212	0	0	+1.000
$\frac{rt}{l^2}$=0.006:																
3.2	− 0.153	−0.209	+0.047	+0.1550	+0.0179	+0.00877	−0.00034	−0.00493	+0.017	−0.029	+0.0122	+0.0265	+0.0692	+0.0134	+0.00536	−0.002
1.6	− 0.103	+0.827	−0.230	−0.9042	−0.0591	−0.03918	+0.00239	+0.03457	−0.202	+0.094	−0.0522	−0.1554	−0.2359	−0.0467	−0.03216	+0.050
0.8	− 5.182	−1.161	−0.344	−0.8634	+0.1807	−0.00480	+0.02822	+0.07956	−0.481	−0.263	−0.0089	−0.0585	+0.3234	−0.0780	+0.03503	+0.417
0.4	− 1.030	−2.556	+0.347	−0.0900	+0.1227	+0.05977	+0.01810	+0.05372	+1.253	−0.197	+0.0890	+0.0380	+0.4651	+0.0860	+0.03538	+0.664
0.2	+ 6.371	−2.158	+0.778	+0.1355	−0.1270	+0.06253	+0.00677	+0.02870	+3.240	+0.182	+0.0955	+0.0382	−0.0872	+0.1294	+0.01514	+0.814
0.1	+12.071	−1.363	+0.936	+0.1232	−0.3444	+0.04246	+0.00205	+0.01463	+4.628	+0.523	+0.0655	+0.0224	−0.6882	+0.0975	+0.00484	+0.901
0.0	+19.407	0	+1.000	0	−0.6412	0	0	0	+6.328	+1.000	0	0	−1.6010	0	0	+1.000
$\frac{rt}{l^2}$=0.008:																
3.2	− 0.086	−0.178	+0.050	+0.1271	+0.0163	+0.00949	−0.00072	−0.00511	+0.022	−0.025	+0.0132	+0.0227	+0.0605	+0.0132	+0.00522	−0.002
1.6	− 0.131	+0.719	−0.240	−0.7409	−0.0562	−0.04265	+0.00383	+0.03459	−0.199	+0.084	−0.0567	−0.1360	−0.2087	−0.0432	−0.03372	+0.043
0.8	− 4.278	−1.094	−0.313	−0.6617	+0.1813	−0.00397	+0.03329	+0.07719	−0.414	−0.263	−0.0042	−0.0422	+0.2814	−0.0763	+0.03497	+0.385
0.4	− 0.770	−2.316	+0.367	−0.0315	+0.1217	+0.06531	+0.02116	+0.05188	+1.177	−0.187	+0.0988	+0.0410	+0.4211	+0.0803	+0.03618	+0.637

TABLE 3B.—Edge Displacements of Simply Supported Cylindrical Shells

	Tangential Edge Load	Radial Edge Load	Shear Edge Load	Moment Edge Load
	(a) Basic Formulas			
	Tangential Displacement v (Inward Positive)— $T_L \times \frac{l}{Et} \times$ Col. (1) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (4) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{l}{Et} \times$ Col. (7) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l}{Et^2} \times$ Col. (10) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$
	Radial Displacement w (Outward Positive)— $T_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (2) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^3}{Et^3} \times$ Col. (5) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (8) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l^2}{Et^3} \times$ Col. (11) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$
	Rotation θ (Counter Clockwise Positive)— $T_L \times \frac{lt}{EI} \times$ Col. (3) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^2}{EI} \times$ Col. (6) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{lt}{EI} \times$ Col. (9) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l}{EI} \times$ Col. (12) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$

$\frac{rt}{l^2}$	v (1)	w (2)	θ (3)	v (4)	w (5)	θ (6)	v (7)	w (8)	θ (9)	v (10)	w (11)	θ (12)
	(b) $n = 1$											
0.002	−77.30	−1.495	0.5712	1.495	0.03568	−0.01782	−11.91	−0.1861	0.05752	6.854	0.2138	−0.1710
0.003	−54.76	−1.409	0.4742	1.409	0.04535	−0.02027	− 9.393	−0.1943	0.05227	5.691	0.2433	−0.1795
0.004	−42.58	−1.342	0.4118	1.342	0.05332	−0.02206	− 7.909	−0.1990	0.04830	4.942	0.2648	−0.1851
0.006	−29.98	−1.243	0.3329	1.243	0.06635	−0.02459	− 6.176	−0.2041	0.04246	3.995	0.2951	−0.1920
0.008	−23.24	−1.169	0.2830	1.169	0.07690	−0.02634	− 5.164	−0.2062	0.03819	3.396	0.3161	−0.1962
0.010	−19.03	−1.110	0.2477	1.110	0.08582	−0.02764	− 4.485	−0.2069	0.03484	2.973	0.3317	−0.1990
0.015	−13.18	−1.000	0.1911	1.000	0.1036	−0.02983	− 3.452	−0.2058	0.02878	2.293	0.3580	−0.2032
0.020	−10.13	−0.9204	0.1565	0.9204	0.1174	−0.03120	− 2.853	−0.2029	0.02457	1.878	0.3744	−0.2055
0.025	− 8.241	−0.8582	0.1327	0.8582	0.1286	−0.03213	− 2.455	−0.1994	0.02142	1.593	0.3855	−0.2069
0.030	− 6.958	−0.8074	0.1152	0.8074	0.1381	−0.03279	− 2.168	−0.1956	0.01894	1.383	0.3935	−0.2078

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

An explanation of the reason for using a sinusoidal load instead of the actual uniform load on the shell is necessary. Although the membrane analysis could be made for a uniform load, the second principal step in shell analysis involving the application of corrective edge loads cannot be accomplished unless these edge loads are sinusoidal in shape. Therefore, to achieve compatibility of stresses produced by both edge and surface loads, the surface load is also assumed sinusoidal. While this sinusoidal load is different from the actual load, it can be made to approximate the effect of the uniform load.

To illustrate the similarity of flexural effects of both types of loads, a comparison is made of a simple beam supporting first a sinusoidal load (see Fig. 6) and then a uniform load.

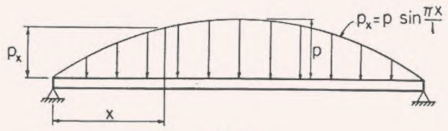


FIG. 6

Expressions for shear, moment, slope and deflection based on the sinusoidal loading of $p = 1$ are:

$$p_x = p \sin \frac{\pi x}{l} \tag{1}$$

$$V = \int p_x dx = p \int \sin \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{pl}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \tag{2}$$

$$M = \int V dx = p \int -\frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{pl^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{3}$$

$$\theta = \int \frac{M dx}{EI} = \frac{p}{EI} \int -\frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} dx = +\frac{pl^3}{EI\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} \tag{4}$$

$$\Delta = \int \theta dx = \frac{p}{EI} \int \frac{l^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{p}{EI} \frac{l^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{5}$$

Using these expressions, the following comparison is made with the uniform load condition:

℄ Moment (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi^2} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.128$
℄ Moment (uniform)	$\sim \frac{1}{8}$	$= 0.125$
℄ Deflection (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi^4} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.0130$
℄ Deflection (uniform)	$\sim \frac{5}{384}$	$= 0.0130$
Support Shear (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.405$
Support Shear (uniform)	$\sim \frac{1}{2}$	$= 0.500$

In this comparison, the centerline or maximum ordinate of the sinusoidal load equals $1.0 \times \frac{4}{\pi}$ while the uniform load has an intensity of 1.0. The maximum ordinate of the sinusoidal load must be of greater intensity than the uniform load if the stresses produced by the two loads are to be similar, and the factor $\frac{4}{\pi}$ used for this purpose is derived from a Fourier Analysis. Results of this comparison indicate that good agreement is obtained for moment and deflection of beams with only the first term of the Fourier Series. This same trend holds for the shell.

Several terms of the Fourier Series may be added to approximate the uniform longitudinal load. Each of these terms represents a partial load having an intensity varying as $\frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l}$ where $n = 1, 3, 5$, etc. Figs. 7a, 7b and 7c illustrate graphically the first three terms. Fig. 7d shows

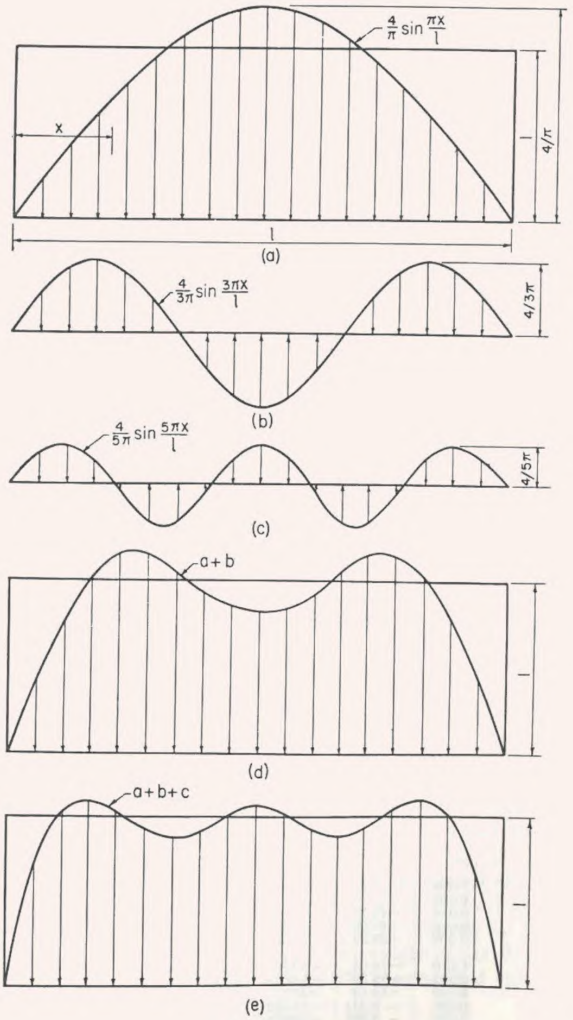


FIG. 7

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

the load resulting from the addition of the first two terms while Fig. 7e is the combination of the first three terms. The sum of all terms of the series would closely approximate the straight line $p = 1$. However, the preceding comparison indicates that the use of many terms is unnecessary and for clarity the computations for this example will be made in detail for only the first term where $n = 1$, as given in Table 1B.

Internal forces and displacements are defined as follows:

T_ϕ = Direct force component in the transverse direction, considered positive when tensile.
T_x = Direct force component in the longitudinal direction, considered positive when tensile.
S = Longitudinal shearing force, considered positive when creating tension in the direction of increasing values of x and ϕ.
$\triangle_V$ = Vertical displacement, considered positive when downward.
$\triangle_H$ = Horizontal displacement, considered positive when inward.

Transverse and longitudinal distribution of membrane forces created by a unit uniform transverse load or a unit dead load may be determined from Table 1B. Internal forces T_x, T_ϕ and S are obtained by means of formulas listed in the table heading in conjunction with tabulated coefficients. The transverse distribution of internal forces is given according to the column headed $\phi_k - \phi$, the central angle measured from the crown of the shell. ϕ_k is equal to one-half the angle subtended by the barrel while the angle ϕ is measured from the bottom edge as shown in Fig. 5. The angle $\phi_k - \phi$ is, therefore, the angle from the crown to any point designated by ϕ. For example, coefficients for values at the crown are taken at $\phi_k - \phi = 0°$.

The distribution of internal forces in the longitudinal direction varies according to trigonometric functions in formulas in the heading of Table 1B. For the sinusoidal surface load, forces T_ϕ and T_x vary as $\sin \frac{\pi x}{l}$ in which $\frac{\pi x}{l}$ is measured in radians. When $x = \frac{l}{2}$, $\sin \frac{\pi x}{l} = \sin \frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$. When $x = 0$ or l, $\sin \frac{\pi x}{l} = \sin 0°$ or $180°$ and is equal to zero. Values at intermediate points can be obtained from any trigonometric table, but values at $\frac{x}{l} = \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{3}$ are easily determined since they correspond to sin 30°, 45° and 60°, respectively, which have values of 0.50, 0.707 and 0.866.

As in a beam, shear is maximum at the support and zero at midspan, the shearing force varying as $\cos \frac{\pi x}{l}$. This function equals $+1$ and -1 at the supports and zero at midspan.

Two sets of coefficients and formulas are given in Table 1B, one for use with uniform live load p_u and one for dead load p_d. To obtain the magnitude of various membrane forces due to either load, coefficients must be multiplied by factors given in the formulas. For example, the coefficient of T_x selected for a specific value of $\phi_k - \phi$ must be multiplied by the load p_u or p_d, the constant $\left(\frac{l}{r}\right)^2$, the shell radius r, and the factor $\frac{4}{\pi}$. Coefficients in Table 1B are applicable to any shell irrespective of its proportions.

Coefficients for determining internal forces and moments due to line loads applied along one edge of a shell are given in Tables 3A and 3B, which are reproduced in part here. These tables are applicable to shells having a ratio $\frac{r}{l}$ exceeding 0.6 and are therefore appropriate for this example where $\frac{r}{l}$ equals 0.9. Another set of tables, 2A and 2B, presented in ASCE Manual No. 31 but not reproduced here, gives effects of symmetrical edge loads on barrel shells having $\frac{r}{l}$ less than 0.6.

This arbitrary division is one of convenience but does have a reasonable basis. It is only when $\frac{r}{l}$ is approximately 0.6 or less that line loads applied along one edge create significant stresses and displacements at the opposite edge. In this case, the arc length of the shell has an important influence on stress distribution but when $\frac{r}{l}$ is 0.6 or more, stresses are independent of arc length. For this reason coefficients of Tables 2A and 2B are given in terms of the subtended angle while those of Tables 3A and 3B are not.

When $\frac{r}{l}$ is less than 0.6, forces and displacements at the far edge of the shell produced by line loads at the near edge must be made to agree with actual boundary conditions. This could be done by applying another set of loads at the far edge, these loads in turn creating inconsistent forces at the near edge. However, the operation involving successive correction of these diminishing forces can be replaced by a single step if symmetrical loads are applied simultaneously at both longitudinal edges. Tables 2A and 2B are developed for this type of loading.

As $\frac{r}{l}$ increases beyond 0.6, the negligible far edge effects do not require correction and analysis requires only one application of line loads at each edge with final superposition of forces resulting from both loadings. For a symmetrically loaded shell computations are required for only one edge since results are applicable in reverse order for loads at the opposite edge. While Tables 3A and 3B covering the case of $\frac{r}{l} \geq 0.6$ could have been prepared for simultaneous application of symmetrical edge loads as in Tables 2A and 2B, their range or usefulness would have been limited by such an arrangement. These tables are therefore developed for loads applied at only one edge of the shell.

Coefficients in Table 3A are tabulated for the four different types of unit edge loads indicated by sketches in the table heading and give four effects of each load. These effects, which may be evaluated at the transverse locations indicated by the term $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$, include the bending moment M_ϕ and the three forces T_x, T_ϕ and S. A large range of shell proportions is included by means of the

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

term $\frac{rt}{l^2}$ varying from 0.002 to 0.1. Small values are applicable to shells with proportions in the vicinity of $\frac{r}{t} = 200$ and $\frac{r}{l} = 0.6$, i.e., $\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \frac{t}{r} = \frac{rt}{l^2} = 0.0018$, while large values correspond to short shells having a radius several times the longitudinal span. It should be noted that Tables 3A and 3B include two sinusoidal loadings, one with $n=1$ and one with $n=3$, since the second loading term becomes more important with increasing values of $\frac{r}{l}$.

Table 3B provides data for evaluating radial, tangential and rotational displacements due to four different edge loads. This and previously mentioned tables will be used in the design example that follows.

TABLE I—Internal Forces in an Interior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof

$\frac{rt}{l^2} = 0.006$ $\phi_k = 26° 23'$ $\frac{r}{l} = 0.90$

$\frac{s}{\sqrt{r\,t\,l^2}}$	3.2	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1	0		3.2	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1	0
s	44.5	22.3	11.1	5.6	2.8	1.4	0		44.5	22.3	11.1	5.6	2.8	1.4	0
ϕ	56° 40′	28° 20′	14° 10′	7° 5′	3° 30′	1° 45′	0°		56° 40′	28° 20′	14° 10′	7° 5′	3° 30′	1° 45′	0°
$\phi_k - \phi$		−2°	12°	19°	23°	25°	26° 23′			−2°	12°	19°	23°	25°	26° 23′
Load	Coefficients							Multipliers	Forces						
	T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)														
① p_u		−0.9970	−0.9551	−0.8930	−0.8460	− 0.8214	− 0.8017	1,720		− 1,720	− 1,640	− 1,540	− 1,460	− 1,410	− 1,380
② p_d		−0.9985	−0.9772	−0.9449	−0.9196	− 0.9063	− 0.8952	2,860		− 2,860	− 2,790	− 2,700	− 2,630	− 2,590	− 2,560
③ Σ										− 4,580	− 4,430	− 4,240	− 4,090	− 4,000	− 3,940
④ T_L	+0.047	−0.230	−0.344	+0.347	+0.778	+ 0.936	+ 1.000	5,760	+ 270	− 1,330	− 1,980	+ 2,000	+ 4,480	+ 5,390	+ 5,760
⑤ R_L	−0.00034	+0.00239	+0.02822	+0.01810	+0.00677	+ 0.00205	0	135,400	− 50	+ 320	+ 3,820	+ 2,450	+ 920	+ 280	0
⑥ S_L	+0.0122	−0.0522	−0.0089	+0.0890	+0.0955	+ 0.0655	0	1,620	+ 20	− 80	− 10	+ 140	+ 150	+ 110	0
⑦ M_L	+0.00536	−0.03216	+0.03503	+0.03538	+0.01514	+ 0.00484	0	−7,000	− 40	+ 220	− 250	− 250	− 110	− 30	0
⑧ Σ									+ 200	− 870	+ 1,580	+ 4,340	+ 5,440	+ 5,750	+ 5,760
⑨ Forces due to line loads at far edge									+ 5,760	− 760	− 360	+ 50	+ 150	+ 190	+ 200
⑩=③+⑧+⑨										− 6,210	− 3,210	+ 150	+ 1,500	+ 1,940	+ 2,020
	S at $x = 0$ (Lb. per ft.)														
① p_u		−0.0332	−0.1935	−0.2933	−0.3422	− 0.3658	− 0.3791	1,910		− 60	− 370	− 560	− 650	− 700	− 720
② p_d		−0.0222	−0.1322	−0.2072	−0.2485	− 0.2690	− 0.2826	3,170		− 70	− 420	− 660	− 790	− 850	− 900
③ Σ										− 130	− 790	− 1,220	− 1,440	− 1,550	− 1,620
④ T_L	−0.209	+0.827	−1.161	−2.556	−2.158	− 1.363	0	5,760	− 1,200	+ 4,760	− 6,690	−14,700	−12,400	− 7,850	0
⑤ R_L	+0.00877	−0.03918	−0.0048	+0.05977	+0.06253	+ 0.04246	0	135,400	+ 1,190	− 5,310	− 650	+ 8,100	+ 8,470	+ 5,750	0
⑥ S_L	−0.029	+0.094	−0.263	−0.197	+0.182	+ 0.523	+ 1.000	1,620	− 50	+ 150	− 430	− 320	+ 290	+ 850	+ 1,620
⑦ M_L	+0.0134	−0.0467	−0.0780	+0.0860	+0.1294	+ 0.0975	0	−7,000	− 90	+ 330	+ 550	− 600	− 910	− 680	0
⑧ Σ									− 150	− 70	− 7,210	− 7,520	− 4,550	− 1,930	+ 1,620
⑨ Forces due to line loads at far edge									− 1,620	+ 1,800	− 1,400	− 800	− 420	− 250	0
⑩=③+⑧+⑨										+ 1,600	− 9,400	− 9,540	− 6,410	− 3,730	0
	T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)														
① p_u		−0.3021	−0.2763	−0.2387	−0.2104	− 0.1954	− 0.1867	2,120		− 640	− 590	− 510	− 450	− 430	− 400
② p_d		−0.2023	−0.1987	−0.1918	−0.1863	− 0.1837	− 0.1771	3,520		− 710	− 700	− 680	− 660	− 650	− 620
③ Σ										− 1,350	− 1,290	− 1,190	− 1,110	− 1,080	− 1,020
④ T_L	−0.153	−0.103	−5.182	−1.030	+6.371	+12.071	+19.407	5,760	− 880	− 590	−29,800	− 5,930	+36,700	+69,500	+112,000
⑤ R_L	+0.0179	−0.0591	+0.1807	+0.1227	−0.1270	− 0.3444	− 0.6412	135,400	+ 2,420	− 8,000	+24,500	+16,600	−17,200	−46,600	− 86,800
⑥ S_L	+0.017	−0.202	−0.481	+1.253	+3.240	+ 4.628	+ 6.328	1,620	+ 30	− 330	− 780	+ 2,030	+ 5,250	+ 7,500	+ 10,300
⑦ M_L	+0.0692	−0.2359	+0.3234	+0.4651	−0.0872	− 0.6882	− 1.6010	−7,000	− 480	+ 1,650	− 2,260	− 3,260	− 610	+ 4,820	+ 11,200
⑧ Σ									+ 1,080	− 7,270	− 8,340	+ 9,440	+25,360	+35,220	+ 46,700
⑨ Forces due to line loads at far edge									+46,700	−10,400	+ 200	+ 1,900	+ 2,000	+ 2,000	+ 1,500
⑩=③+⑧+⑨										−19,020	− 9,430	+10,150	+26,250	+36,140	+ 47,180
	M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)														
④ T_L	+0.1550	−0.9042	−0.8634	−0.0900	+0.1355	+ 0.1232	0	1,920	+ 300	− 1,740	− 1,660	− 170	+ 260	+ 240	0
⑤ R_L	−0.00493	+0.03457	+0.07956	+0.05372	+0.02870	+ 0.01463	0	45,200	− 220	+ 1,560	+ 3,600	+ 2,430	+ 1,300	+ 660	0
⑥ S_L	+0.0265	−0.1554	−0.0585	+0.0380	+0.0382	+ 0.0224	0	540	+ 10	− 80	− 30	+ 20	+ 20	+ 10	0
⑦ M_L	−0.002	+0.050	+0.417	+0.664	+0.814	+ 0.901	+ 1.000	−2,330	+ 50	− 120	− 970	− 1,550	− 1,900	− 2,100	− 2,330
⑧ Σ									+ 90	− 380	+ 940	+ 730	− 320	− 1,190	− 2,330
⑨ Forces due to line loads at far edge									− 2,330	− 50	− 390	− 140	− 35	+ 15	+ 50
⑩=⑧+⑨										− 430	+ 550	+ 590	− 355	− 1,175	− 2,280

①②③ Surface loads
④⑤⑥⑦⑧ Line loads applied at near edge

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Analysis of Simply Supported Interior Barrel Shell

A—Membrane Analysis

Data necessary for this analysis are:

Live load p_u = 30 psf
Dead load p_d = 50 psf
Radius r = 45 ft.
$\frac{l}{r} = \frac{50}{45}$ = 1.11
$\left(\frac{l}{r}\right)^2$ = 1.238

In the membrane analysis external surface loads, dead and live, induce three forces throughout the shell: T_x, the force in the longitudinal direction; T_ϕ, the force in the transverse direction; and S, the tangential shearing force. For maximum values, T_x and T_ϕ are found at mid-span or at $x = \frac{l}{2}$, while S is found at the supports where $x = 0$ or $x = l$.

The magnitude of these internal forces is given in Table I (Roman numerals are used for the computed tables to differentiate them from Manual tables) at various transverse points, each location being expressed in four different terms. The first, $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$, is one of the parameters of Table 3A and values are selected to agree with those listed in Table 3A. Values of the other three terms s, ϕ and $\phi_k - \phi$ agree accordingly. For example, if $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.1$,

$$s = 0.1\sqrt[4]{rtl^2} = 0.1\sqrt[4]{(45)(0.333)(50^2)}$$

or s = 1.391 ft.

Also $\phi = \frac{s}{r}$ (in radians)

$$\phi = \frac{1.391}{45} \times \frac{180}{\pi} = 1.77°$$

The point indicated in Table I by s = 44.5 ft. and $\phi = 56°40'$ lies slightly beyond the far edge of the shell. Although forces determined at this point are meaningless for the shell under consideration, they are used for interpolation of forces at the far edge.

Membrane forces are determined by means of equations in the heading of Table 1B. The combination of all terms in any one equation with the exception of the coefficient is called the multiplier. Multipliers for this example are:

For live load:

(T_x) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 \times 1.238 = 2120$

(S) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 \times 1.11 = 1910$

(T_ϕ) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 = 1720$

For dead load:

(T_x) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 \times 1.238 = 3520$

(S) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 \times 1.11 = 3170$

(T_ϕ) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 = 2860$

Coefficients for these multipliers are taken from columns (1), (2), (3) and (7), (8), (9) for live and dead loads, respectively. For example, to find the live load coefficient for the force T_x at $\phi = 7°\,5'$ or $\phi_k - \phi = 19°\,18'$, enter column (1) of Table 1B. Sufficient accuracy is achieved by interpolating for an angle $\phi_k - \phi = 19°$ giving the coefficient -0.2387. Multiplying this coefficient by the multiplier 2120 gives a force T_x of 510 lb. per ft.

The same procedure is repeated at various locations across the shell to determine the forces T_ϕ, T_x and S induced by both dead and live loads. Results are tabulated in rows ① and ② of Table I, while rows ③ give a summation of ① and ②. Slide rule accuracy is sufficient in these computations.

B—Correction for Edge Loads

Complete shell analysis requires that final forces and displacements along all edges be consistent with actual boundary conditions. Since the membrane analysis assumes the existence of imaginary edge supports, membrane forces must be corrected. This correction constitutes the second principal step of shell analysis.

The sequence of operations involved in the second step requires determination of magnitude and direction of corrective line loads applied at the edges and then evaluation of the internal forces which they produce. For a single barrel shell without edge beams—that is, one in which longitudinal edges are free—the only condition to be satisfied is that the algebraic sum of corrective line loads and membrane forces at the edges equal zero. In other words, final corrective line loads T_L and S_L are equal and opposite to membrane forces T_ϕ and S and therefore are known upon completion of the membrane analysis.

In contrast to this simple analysis for a single barrel, determination of line loads for a multiple barrel roof is more complicated. Not only must membrane forces be satisfied but, in addition, displacements of common edges of adjacent barrels must coincide. For this reason final corrective line loads seldom equal membrane forces and a special notation T_{LM} and S_{LM} is introduced for line loads which satisfy only the edge forces of the membrane analysis. Final line loads T_L and S_L include T_{LM} and S_{LM} as well as loads effecting coincident edge displacements.

There are various ways of evaluating line loads for the multiple barrel roof and although the method presented here is not the most direct, it is considered the least complicated. Initially, each barrel is assumed separated from the rest of the structure and is treated as a single barrel. Following a membrane analysis, corrective line loads T_{LM} and S_{LM} producing zero reactions are applied along the longitudinal edges of each barrel. As previously mentioned, determination of these line loads does not require a separate computation and in this example values of 3940 lb. per ft. for T_{LM} and 1620 lb. per ft. for S_{LM} are taken directly from rows ③ of Table I at $\phi = 0°$. The interior barrel is in static equilibrium when these loads are applied. However, individual barrels still must be brought together in the multiple barrel system by additional line loads applied to each barrel. Internal forces produced by these additional loads then are super-

PAGE 9

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

imposed on the effects of T_{LM} and S_{LM}.

Consistency in displacements of adjacent edges is achieved by making longitudinal, vertical, horizontal and angular displacements of one edge equal to those of the other. Generally, longitudinal stresses T_x/t at common edges are made equal to each other instead of longitudinal displacements since edge displacements agree if corresponding stresses are identical. The remaining three displacement equations are established for each edge in terms of the unknown line loads T_L, R_L, S_L and M_L, coefficients taken from Table 2B or 3B and specified physical properties of the shell.

Equating like displacements of adjoining barrel edges yields four equations containing eight unknowns, these unknowns including four line loads applied to each adjacent edge. The eight unknowns can be reduced to four by statics. Because these line loads are internal, the algebraic sum of their components in any direction must equal zero. Moment and tangential shear acting on one edge must be equal and opposite to similar forces acting on the adjoining edge, and the sum of the vertical and horizontal components of radial and tangential line loads R_L and T_L applied to adjacent edges must equal zero. By inserting these conditions, the four equations can be expressed in terms of four unknowns and a simultaneous solution gives numerical values for the line loads.

The general procedure of establishing four displacement equations to determine the unknowns R_L, T_L, S_L and M_L is not always necessary. When adjacent barrels are symmetrical in shape and loading as in this design example, analysis can be simplified to a consideration of only one barrel. It should be understood that line loads applied to one barrel are applied in an opposite sense to the adjacent barrel. Agreement in displacement of common edges is obtained from four known conditions: that no horizontal or angular displacement of the edges takes place and that tangential and vertical shears along common edges are equal to zero.

The first two conditions are evident from symmetry in shape and loading. The latter two conditions also can be deduced from physical aspects of the problem. With adjacent barrels identical and equally loaded, variation of longitudinal stress is symmetrical about the common edge and tangential shear at the edge must equal zero. Vertical shear equal to the sum of the vertical components of line loads R_L and T_L, must also equal zero since its presence would indicate that load on one shell was being carried in part by the adjoining barrel, an impossible condition because of symmetry.

The four known conditions can be summarized as:

$$\begin{aligned} \triangle_H &= 0 \\ \theta &= 0 \\ S &= 0 \\ \Sigma V &= 0 \end{aligned}$$

Numerical expressions are derived for the design example from these conditions.

Expressing $\triangle_H = 0$ in terms of displacements given in Table 3B gives:

$$\triangle_H = 0 = v \cos \phi_k - w \sin \phi_k \qquad (6)$$

where v is the tangential displacement of the shell considered positive in the direction of increasing values of ϕ, and w the radial displacement considered positive when outward. Sign convention for this equation arbitrarily defines displacement to the left as positive. The trigonometric relationship is shown in Fig. 8.

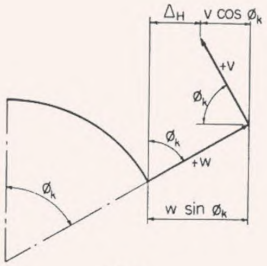


FIG. 8

Evaluation of v and w is made by combining displacement contributions of T_{LM} and S_{LM} with those of the four line loads which unite displaced edges of adjoining barrels. T_{LM} and S_{LM} are part of the final edge loads T_L and S_L, respectively, and are combined with them in equation (7). Tangential and radial displacements due to the four line loads T_L, R_L, S_L and M_L are given in the heading of Table 3B. Equation (7) is given at $x = \frac{l}{2}$ and for convenience is divided by the factor $\frac{l}{Et}$.

$$\begin{aligned} \triangle_H = 0 = \Big[&(T_L + 3940) \times \text{Col. (1)} + R_L \times \tfrac{l}{t} \times \\ &\text{Col. (4)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (7)} + M_L \times \tfrac{1}{t} \times \\ &\text{Col. (10)} \Big] \cos \phi_k - \Big[(T_L + 3940) \times \text{Col. (2)} + \\ &R_L \times \tfrac{l}{t} \times \text{Col. (5)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (8)} + \\ &M_L \times \tfrac{1}{t} \times \text{Col. (11)} \Big] \tfrac{l}{t} \sin \phi_k \end{aligned} \qquad (7)$$

Substituting coefficients of Table 3B given for $\frac{rt}{l^2} = 0.006$ and for the first sine loading ($n = 1$) together with dimensional and trigonometric values gives:

$$\begin{aligned} 0 = \Big[&(T_L + 3940)(-29.98) + (R_L)(150)(1.243) + \\ &(S_L + 1620)(-6.176) + \left(\frac{M_L}{t}\right)(3.995) \Big] 0.8958 - \\ \Big[&(T_L + 3940)(-1.243) + (R_L)(150)(0.06635) + \\ &(S_L + 1620)(-0.2041) + \left(\frac{M_L}{t}\right)(0.2951) \Big] (150)(0.4444) \end{aligned} \qquad (7a)$$

which reduces to:

$$0 = 233{,}700 + 56.00\, T_L - 496.4\, R_L + 8.073\, S_L - 16.09 \frac{M_L}{t} \qquad (7b)$$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

The term $\frac{M_L}{t}$ is kept separate for convenience in the use of Table 3A.

The condition of zero edge rotation for the interior barrel ($\theta = 0$) is expressed by combining rotational effects of edge loads T_L, R_L, S_L and M_L taken from the heading of Table 3B. Rotation is determined at midspan where $x = \frac{l}{2}$ and the entire equation is divided by $\frac{lt}{EI}$.

$$\theta = 0 = (T_L + 3940) \times \text{Col. (3)} + R_L \times \frac{l}{t} \times \text{Col. (6)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (9)} + M_L \times \frac{1}{t} \times \text{Col. (12)} \quad (8)$$

Substituting dimensions and coefficients from Table 3B gives:

$$0 = (T_L + 3940)(0.3329) + (R_L \times 150)(-0.02459) + (S_L + 1620) \times 0.04246 + \left(\frac{M_L}{t}\right)(-0.1920) \quad (8a)$$

which simplifies to:

$$1380 + 0.3329\,T_L - 3.689\,R_L + 0.04246\,S_L - 0.1920\,\frac{M_L}{t} = 0 \quad (8b)$$

Static equilibrium of the interior barrel was satisfied by application of loads T_{LM} and S_{LM}. To maintain this stability the summation of vertical components of line loads R_L and T_L must equal zero. The expression for $\Sigma V = 0$ at one edge is developed from the sketch of Fig. 9.

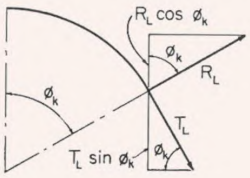


FIG. 9

Assuming the downward direction positive gives:

$$-R_L \cos \phi_k + T_L \sin \phi_k = 0 \quad (9)$$

$$-R_L \times 0.8958 + T_L \times 0.4444 = 0 \quad (9a)$$

$$T_L = 2.016\,R_L \quad (9b)$$

As previously discussed, shear is zero at the edges of the interior barrel in this example. Since shear equilibrium is produced by the load S_{LM} of 1620 lb. per ft. which resists shear resulting from the membrane analysis, the only other shearing force involved, line load S_L, along these edges must equal zero.

Substituting the value of T_L from equation (9b) and setting $S_L = 0$, equations (7b) and (8b) become:

$$233{,}700 - 383.5\,R_L - 16.09\,\frac{M_L}{t} = 0$$

$$1380 - 3.017\,R_L - 0.1920\,\frac{M_L}{t} = 0$$

Solving these simultaneously gives:

$$R_L = +903 \text{ lb. per ft.}$$

$$\frac{M_L}{t} = -7000 \text{ ft. lb. per ft.}^2$$

and from equation (9b):

$$T_L = 1820 \text{ lb. per ft.}$$

These line loads satisfy requirements of transverse continuity along longitudinal edges of the interior barrel. Since T_{LM} acts in the same direction as the force T_L these two forces are combined to form a final T_L of $+1820 + 3940 = +5760$ lb. per ft. Similarly, the value of S_L is added to S_{LM} to give a final S_L of $0 + 1620 = +1620$ lb. per ft. The sign convention for T_L and S_L is the same as that for T_ϕ and S, respectively. Positive R_L is in the outward direction while positive M_L produces compression at the upper surface of the shell.

Internal forces resulting from edge loads are determined by equations in the heading of Table 3A. In these equations the terms $\sin \frac{\pi x}{l}$ and $\cos \frac{\pi x}{l}$ equal 1.0 at $x = \frac{l}{2}$ and $x = 0$, respectively. As previously discussed, the multiplier is the combination of all terms in one equation with the exception of the coefficient. For example, the multiplier for computing internal forces T_ϕ, S and T_x resulting from line load T_L equals $T_L \times 1.0 = +5760$ lb. per ft. Similarly, the multiplier for these same forces due to R_L equals $R_L \times \frac{l}{t} \times 1.0 = +903 \times \frac{50}{0.333} \times 1.0 = +135{,}400$ lb. per ft., while the multiplier for moment M_ϕ due to the edge moment M_L is $M_L \times 1.0 = \frac{M_L}{t} \times t \times 1.0 = -7000 \times 0.333 \times 1.0 = -2330$ lb. per ft. All multipliers are tabulated in the center column of Table I.

Coefficients taken from Table 3A for $\frac{rt}{l^2} = 0.006$ are listed in rows ④ through ⑦ at the left side of Table I. These coefficients times appropriate multipliers give the forces T_ϕ, T_x, S and M_ϕ at the points indicated by $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$. These forces are listed at the right side of the table.

For illustration, the internal force T_ϕ produced by line load T_L at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.4$ is obtained by multiplying the coefficient $+0.347$ by the multiplier $+5760$ to give $+2000$ lb. per ft. Other values of T_ϕ at this location due to line loads R_L, S_L and M_L are determined in a similar manner and all are added algebraically in row ⑧ and plotted in Fig. 10 to show the variation of T_ϕ across the shell. Similar curves for T_x, S and M_ϕ are also included. Although values are not available for plotting between $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 1.6$ and 3.2, curves can be estimated with a satisfactory degree of accuracy since the magnitude of forces between these values becomes smaller and curvatures diminish.

PAGE 11

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

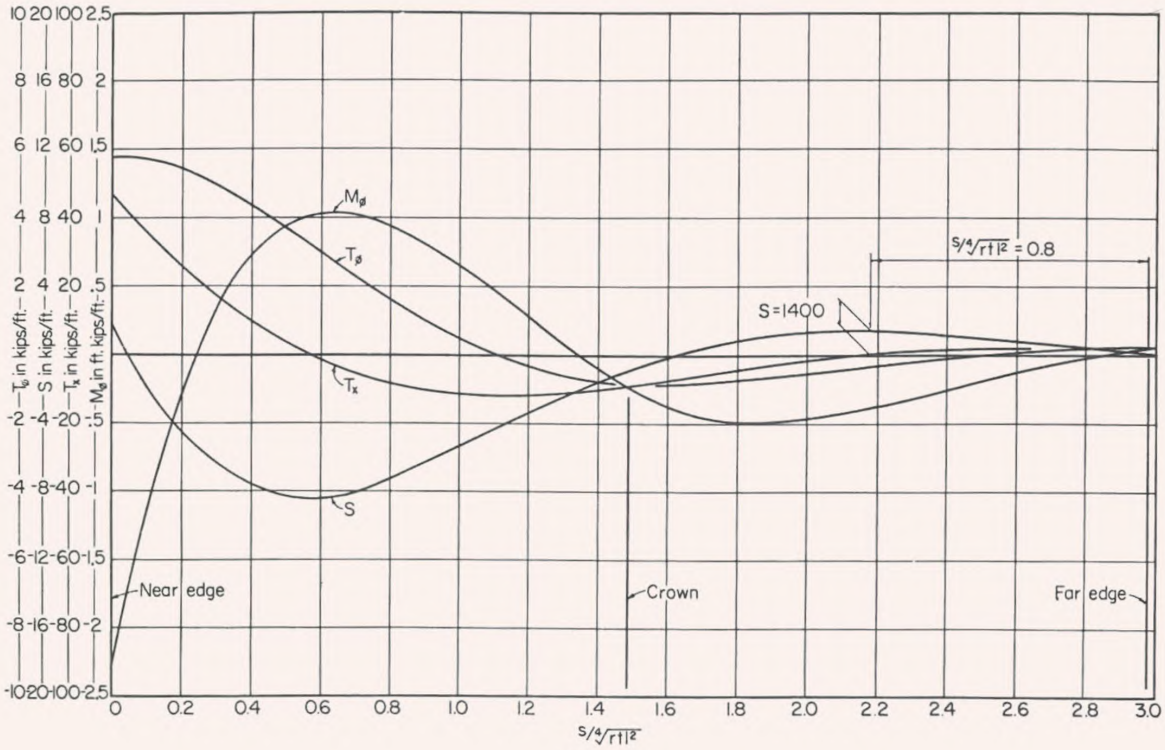


FIG. 10

The curves of Fig. 10 involve line loads applied only at the near edge. Symmetry of structure and loading allows the use of these same curves for determining forces resulting from line loads acting at the far edge. This is done by reversing the abscissa scale of Fig. 10 so that the right edge represents the near edge of the shell and then scaling directly from the curves. For example, the magnitude of force S at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.8$ (measured on the reversed scale) due to line loads at the far edge is scaled as 1400 lb. per ft. Forces determined in this manner are tabulated in rows ⑨ of Table I.

Although algebraic signs tabulated for shear in row ⑧ of Table I agree with those of the S curve in Fig. 10, signs in row ⑨ are opposite to those indicated by this curve. This is due to the fact that the shear sign convention defined on page 9 is related to the origin of the coordinate axes. The signs of coefficients for line loads are based on a coordinate system originating at the loaded edge. Therefore, line loads applied at near and far edges have different referent axes, and positive shears due to these two loads will be opposite in direction.

The difference between positive shear directions can be seen by reference to Fig. 11 in which face BB' is assumed to be parallel to and facing the near edge of the shell. Shear resulting from line loads acting at the near edge is referenced to the coordinate origin at the right and is positive as shown in conformance with the definition that it produce tension in the direction of increasing values of ϕ and x, or along diagonal AB. For this condition positive shear on face BB' acts toward the origin of x.

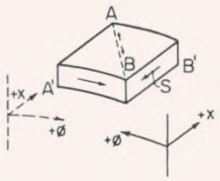


FIG. 11

Similarly, shear produced by line loads acting at the far edge is referenced to the origin at the left and when positive is directed toward the origin of x on face AA' which is nearest to the loaded edge. In this case shear on face BB' is opposite to that shown. Consequently, on a face such as BB', positive shear due to line loads at the far edge is opposite in direction to positive shear caused by line loads at the near edge. Direction is made consistent by changing signs.

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Rows ⑩ of Table I give final internal forces in the simply supported interior barrel. These are obtained by summation of membrane forces and effects of line loads applied at both longitudinal edges. Variation of these forces is shown graphically in Fig. 12.

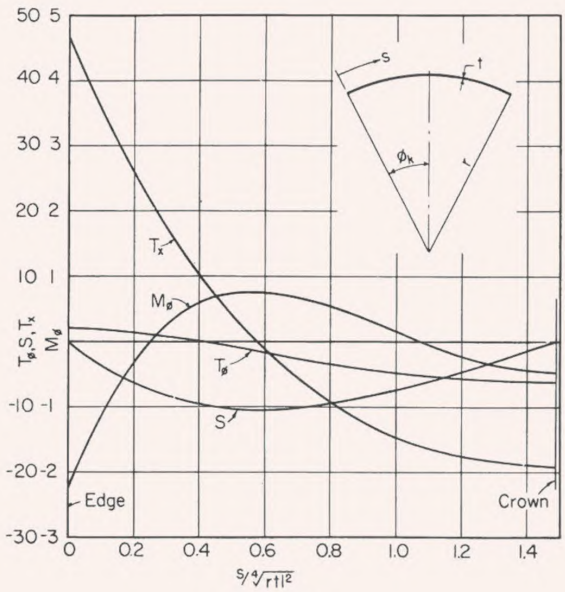


FIG. 12

Statical Check of Forces in Interior Barrel

A statical check of internal forces should be made as a precautionary measure against numerical errors. The sum of horizontal T_x-forces across a transverse section of the barrel must equal zero, the sum of vertical components of the shearing force S at each support must equal one-half the total load on the shell, and the total internal longitudinal moment at midspan due to the T_x-forces must equal the external moment.

The summation of horizontal forces at midspan is made by means of Simpson's rule. This method, useful in integrating non-linear functions, expresses area as:

$$\frac{\triangle L}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ldots + y_n)$$

in which y_o to y_n are equally spaced ordinates of the curve enclosing the area, n is an even number, and $\triangle L$ the distance between ordinates. In this example, the arc distance from shell edge to crown is divided into four equal parts. The angle ϕ_k was shown to be 26°23′ (26.38°) and its value in radians is obtained by multiplying by $\frac{\pi}{180}$.

Hence:

$$\triangle L = \frac{s}{4} = \frac{r\phi_k}{4} = \frac{45 \times 26.38 \times \pi}{4 \times 180} = 5.18 \text{ ft.}$$

The value of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ corresponding to this interval equals:

$$\frac{5.18}{\sqrt[4]{45 \times 0.333 \times 50^2}} = 0.372$$

Because values of internal forces tabulated in rows ⑩ of Table I occur at locations different from those required for ordinates in Simpson's rule, scaled values from Fig. 12 are used. With scaled values, the summation of longitudinal forces is:

$$\Sigma H = \frac{5.18}{3}[47{,}180 + 4 \times 13{,}800 + 2 \times (-7{,}200) + 4 \times (-16{,}300) + (-19{,}400)]$$

$$\Sigma H = +177{,}000 - 171{,}000 = +6000 \text{ lb.}$$

The difference between positive and negative values is less than 2 per cent of their arithmetic sum.

The internal moment produced by T_x-forces at any section is always the same regardless of where the axis is chosen. Here moment is computed about the bottom edge of the shell and Simpson's rule takes the form:

$$\text{Moment} = \frac{\triangle L}{3} \times 2\,[y_o h_o + 4\,y_1 h_1 + 2\,y_2 h_2 + 4\,y_3 h_3 \ldots + y_n h_n]$$

where the ordinate y with its subscript is again the magnitude of the force T_x at the same locations specified for the summation of horizontal forces and h is the companion moment arm measured from the lower edge of the shell. The moment arm equals $r\,[\cos(\phi_k - \phi) - \cos\phi_k]$. The summation is multiplied by 2 to include the moment at either side of the crown.

To illustrate computations used in the moment summation, the ordinate y_1 at the point $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.372$ was scaled previously from Fig. 12 as 13,800 lb. per ft. The angle ϕ subtended by this point equals 6°36′ and $\phi_k - \phi$ is approximately 19°50′. The moment arm therefore equals $45(0.9407 - 0.8958) = 2.02$ ft. The complete expression for moment is:

$$\Sigma M = \frac{5.18}{3} \times 2[0 + 4 \times 13{,}800 \times 2.02 + 2 \times (-7200) \times 3.51 + 4 \times (-16{,}300) \times 4.38 + (-19{,}400) \times 4.69]$$

from which:

$$M \text{ (internal)} = -1{,}077{,}000 \text{ ft. lb.}$$

Midspan moment due to external load is determined from equation (3), $M = -\frac{pl^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}$, as developed on page 8. With shell arc length equal to $8\triangle L = 8 \times 5.18 = 41.4$ ft. and $p_u = 30$ psf and $p_d = 50$ psf, external moment is:

$$M = -\frac{50^2}{\pi^2}\left[30 \times 40 \times \frac{4}{\pi} + 50 \times 41.4 \times \frac{4}{\pi}\right]$$
$$= -1{,}055{,}000 \text{ ft. lb.}$$

As previously discussed, dead and live loads are multiplied by $\frac{4}{\pi}$ in accordance with the Fourier Analysis. According to sign conventions adopted, both external and internal moments produce compression at the top of the shell and internal moment is only 2 per cent greater than the external.

Summation of vertical components of the shearing force S at one end of the barrel is:

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\Sigma V = \frac{\triangle L}{3} \times 2\,[y_o \sin(\phi_k - \phi_o) + 4\,y_1 \sin(\phi_k - \phi_1) + 2\,y_2 \sin(\phi_k - \phi_2) + \ldots y_n \sin(\phi_k - \phi_n)]$$

where y now represents ordinates of the shear curve of Fig. 12. For example, y_1 scales -9000 lb. per ft. For $\phi_k - \phi_1 = 19°50'$, $\sin(\phi_k - \phi_1)$ equals 0.3393 and the vertical component at this point is -9000×0.3393. Values at other points are obtained in a similar manner. Total upward force acting at the support is:

$$\Sigma V = \frac{5.18}{3} \times 2[0 + 4 \times (-9000) \times 0.3393 + 2 \times (-9750) \times 0.2278 + 4 \times (-5850) \times 0.1161 + 0]$$

$$\Sigma V = -66{,}800 \text{ lb.}$$

Equation (2) shows that total vertical shear due to a sinusoidal load is equal to $-p\frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l}$. At the support where $x = 0$, $\cos\frac{\pi x}{l} = 1$ and the reaction becomes $-p\frac{l}{\pi}$. Substituting for p the numerical values used in the moment expression, total shear is:

$$V = -\frac{50}{\pi}\left[30 \times 40 \times \frac{4}{\pi} + 50 \times 41.4 \times \frac{4}{\pi}\right] = -66{,}300 \text{ lb.}$$

In this example, good agreement is obtained between the summation of internal and external forces with a maximum difference of less than 2 per cent. Such a favorable comparison cannot always be expected. Scaled ordinates, approximate integration given by Simpson's rule and, to a minor extent, the incomplete satisfaction of edge conditions may result in differences amounting to as much as 10 per cent in exceptional cases.

Analysis of Simply Supported Exterior Barrel Shell

Geometrical properties of exterior and interior barrels of the roof in this example are similar except that a beam 24 in. deep and 9 in. wide is added at the outside edge of exterior shells. This vertical extension, defined as an edge beam, acts integrally with the shell and should not be considered a separate member.

Analysis of the exterior barrel follows almost the same procedure outlined for the interior barrel. The first step involves determination of membrane forces created by surface loads. Since identical loading is applied to all barrels, membrane forces for exterior and interior barrels are the same and their summation is taken directly from Table I or computed from Table 1B and tabulated in rows ③ of Table III on page 20. Effects of line loads at the inside edge of the exterior barrel also are similar to those previously determined for the interior barrel and these values are tabulated in rows ⑨ of Table III.

Restraint at the outside edge of the exterior barrel is quite different from that at the interior edge since displacement is resisted only by the edge beam. As a result, investigation of the exterior barrel chiefly concerns conditions at the outside edge.

It is first assumed that the exterior shell is detached temporarily from the adjoining barrel and edge beam as illustrated in Fig. 13. Line loads which re-establish unity of beam and shell can be determined in the manner shown for the interior barrel. However, to emphasize the pronounced effect of the edge beam on deflection, longitudinal stress and vertical displacement of the shell are computed without taking the edge beam into account. The force T_x created in the single barrel is:

$$T_x = (-1020 + 3940 \times 19.407 + 1620 \times 6.328) \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\text{or } T_x = 85{,}700 \sin\frac{\pi x}{l} \text{ lb. per ft.}$$

In the equation above, -1020 is the longitudinal force due to membrane forces and is taken directly from row ③ of Table I, while the two products constitute effects of line loads which counteract tangential and shear reactions at the edge resulting from the membrane analysis.

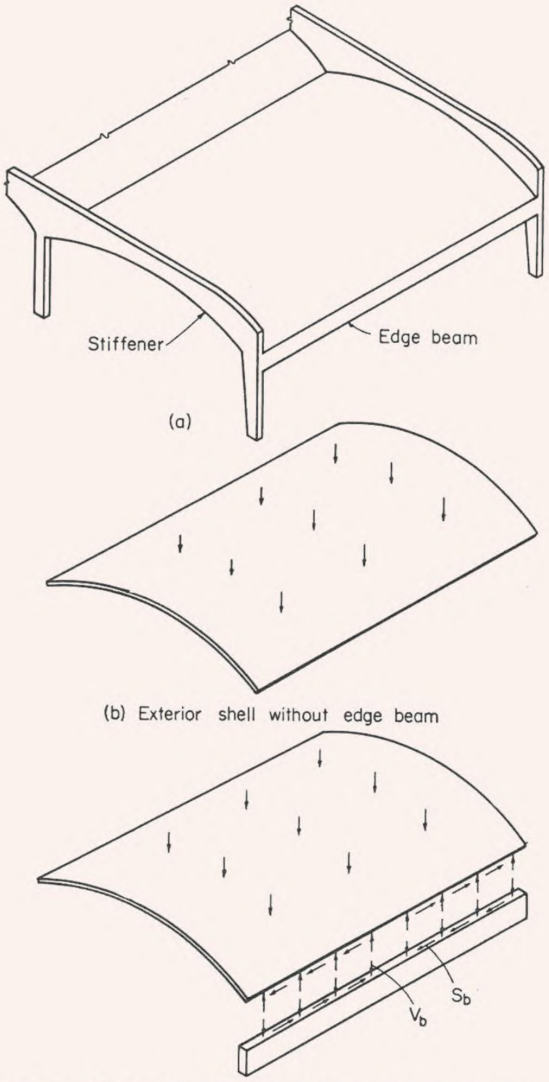


FIG. 13

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Coefficients are taken from Table 3A. The final value of 85,700 sin $\frac{\pi x}{l}$ lb. per ft. is the longitudinal edge force existing when the shell is independent of the edge beam.

Vertical displacement of the outside edge for this condition is computed by means of Table 3B by adding vertical components of tangential and radial displacements.

$$\Delta_V = \frac{l}{Et}\,[(-3940 \times 29.98 - 1620 \times 6.176)\ 0.4444 + 150 \times (-3940 \times 1.243 - 1620 \times 0.2041)\ 0.8958]\ \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\Delta_V = -759{,}000\ \frac{l}{Et}\ \sin\frac{\pi x}{l} = \frac{114 \times 10^6}{E}\ \sin\frac{\pi x}{l}$$

If E is assumed equal to 3,000,000 psi, dead load taken as 5/8 of the total load and long-time deflection assumed 3.8* times the instantaneous deflection, then:

$$\Delta_V = \frac{5 \times 114 \times 10^6 \times 3\ 8}{8 \times 3 \times 10^6 \times 144} + \frac{3 \times 114 \times 10^6}{8 \times 3 \times 10^6 \times 144} = 0.73 \text{ ft. or } 8\tfrac{3}{4} \text{ in.}$$

Although actual deflection would be approximately 1/4 to 1/5 of 0.73 ft. because of longitudinal continuity, edge deflection still would be excessive without an edge beam. Because of the nonlinear variation of the T_x-forces in all shell roofs except those having very large $\frac{l}{r}$ ratios, it is probable that the creep will be considerably less than that prevailing in ordinary beams. The factor 3.8 is used here only to indicate the maximum value.

The next step is to reunite common edges of barrel and beam by making vertical displacement and longitudinal strain coincident throughout their length. The other two requirements of continuity, that horizontal displacement and angular rotation of common edges agree, can be neglected since horizontal and rotational stiffnesses of the beam are slight as compared with those of the shell.

*See *Deflection of Reinforced Concrete Members*, p. 16, available free in U.S. and Canada on request to Portland Cement Association.

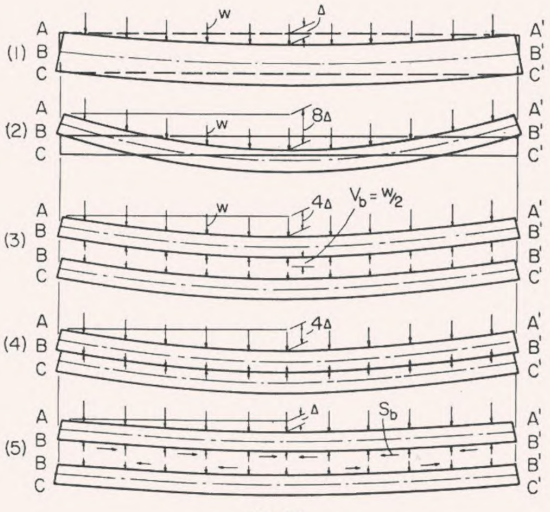


FIG. 14

Because two conditions of compatibility are to be satisfied, two types of forces must be applied at the junction of edge beam and shell. The necessity for considering two force conditions rather than one can be demonstrated easily for a simply supported rectangular beam carrying uniform load. As shown in Fig. 14 (1), deflection of the beam due to a uniform load w is designated as Δ. While impractical, analysis of this beam can be made by dividing it horizontally into two parts and then reuniting these parts by internal forces. In Fig. 14 (2), the beam is split and the entire load is assumed carried by the upper half, the deflection of this half becoming 8 Δ. The lower portion assumed unloaded remains in its undeflected position:

If equal and opposite loads of magnitude $\frac{w}{2}$ are added to both the upper and lower sections of the beam as shown in Fig. 14 (3), both parts are subjected to a net downward force of $\frac{w}{2}$ and the deflection of each becomes 4 Δ. However, strains of the common face BB' differ and can only be brought into agreement by equal and opposite shearing forces acting along this common surface. The shearing forces shorten bottom fibers of the upper beam and lengthen top fibers of the lower beam while maintaining the same relative deflection of both. Hence both displacement and strain requirements are satisfied. Final stresses and deflections obtained by this indirect procedure are identical to those obtained from a consideration of the beam as a unit.

As in this simple beam illustration, line loads acting on the edge of the exterior barrel must be equal and opposite to those carried by the edge beam. Since the edge beam is assumed to resist only vertical loads and horizontal shearing loads, forces acting on the shell must correspond to these two loads. Therefore, if forces acting on the beam are designated as V_b and S_b, shell line loads

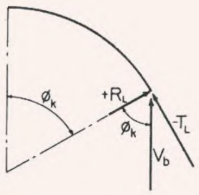


FIG. 15

are, from Fig. 15:

$$T_L = -V_b \sin\phi_k = -0.4444\ V_b \qquad (10a)$$

$$R_L = V_b \cos\phi_k = 0.8958\ V_b \qquad (10b)$$

$$S_L = S_b \qquad (10c)$$

The positive direction of V_b shown represents the reaction of the beam on the shell. The relationship expressed by equations (10a) and (10b) satisfies the condition that the horizontal edge force equals zero.

Longitudinal stress and vertical displacement at the edge are determined by superimposing effects of these line loads on those previously determined for the single barrel. With the influence of line loads applied at the far

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

edge neglected, $\frac{T_x}{t}$ and $\triangle_V$ are:

$$\frac{T_x}{t} = \frac{1}{t}\,(85{,}700 + 19.407\,T_L - 150 \times 0.6412\,R_L + 6.328\,S_L)\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{11a}$$

$$\triangle_V = -\frac{l}{Et}\Big[-759{,}000 + (-29.98\,T_L + 150 \times 1.243\,R_L - 6.176\,S_L)\,0.4444 + 150\,(-1.243\,T_L + 150 \times 0.06635\,R_L - 0.2041\,S_L)\,0.8958\Big]\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{11b}$$

Substituting in equations (11a) and (11b) the values of T_L, R_L, and S_L as expressed by equations (10) gives:

$$\frac{T_x}{t} = \frac{1}{t}\,(85{,}700 - 94.78\,V_b + 6.328\,S_b)\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12a}$$

$$\triangle_V = -\frac{l}{Et}\,(-759{,}000 + 1352\,V_b - 30.17\,S_b)\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12b}$$

Equations (12a) and (12b) express longitudinal stress and vertical displacement of the shell's edge in terms of internal forces acting on the beam. Numerical values of these unknown forces are determined by developing similar expressions for the beam based on its elastic behavior.

To maintain a constant relationship between T_L and V_b and between S_L and S_b over the entire length of shell, vertical loading V_b and shearing force S_b must vary respectively as $\sin\frac{\pi x}{l}$ and $\cos\frac{\pi x}{l}$. Effects of vertical and shear loads having these variations are obtained by the ordinary flexural theory for homogeneous beams. This theory is considered adequate because of the large length-to-depth ratio.

Expressions for moment and vertical displacement produced by a vertical sine load are given by equations (3) and (5). A rectangular homogeneous beam carrying this type of load is subjected to flexural action only and its fiber stresses are symmetrical about the centroidal axis. In contrast, a similar beam carrying only a shear load applied along one surface is subjected to both direct and bending stresses and extreme fiber stresses are not of equal magnitude. Axial thrust at any section is equal to the summation of shear from that section to the end of the beam, moment is equal to this thrust times its eccentricity about the centroidal axis, and vertical displacement is determined by conventional means from this induced moment.

In spite of the fact that vertical and shear loads are dissimilar in direction and distribution, fiber stresses and displacements resulting from each have the same longitudinal variation expressed in terms of $\sin\frac{\pi x}{l}$. Coefficients for fiber stress and displacement in a beam due to these loads are taken from ASCE Manual No. 31, page 59, equations (9f) and (10c).

Extreme fiber stress at the top of the beam is:

$$f = -\frac{l}{bh}\Big[0.60793 \times \frac{l}{h}(V_b + 286) + 1.2732\,S_b\Big]\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{13}$$

in which the sign convention for fiber stress conforms to that used in shell analysis; i.e., positive indicates tension. Positive directions of loads are as shown in Fig. 16. In equation (13), the value 286 accounts for the dead weight of the beam and is obtained by multiplying the actual weight of the beam, 225 lb. per ft., by $\frac{4}{\pi}$.

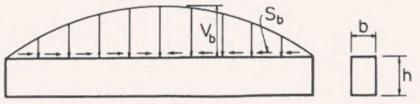


FIG. 16

From equations (9d) and (10e) of ASCE Manual No. 31, vertical displacement of the beam is:

$$\triangle_V = \frac{l^3}{bh^2E}\Big[0.12319\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 0.19351\,S_b\Big]\,\sin\frac{\pi x}{l} \tag{14}$$

Equating stresses and deflections given by equations (12) to those of equations (13) and (14) and multiplying by t and $\frac{Et}{l}$ respectively gives:

$$+85{,}700 - 94.78\,V_b + 6.328\,S_b = -\frac{lt}{hb}\Big[0.60793\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 1.2732\,S_b\Big] \tag{15a}$$

$$+759{,}000 - 1352\,V_b + 30.17\,S_b = \frac{l^2t}{h^2b}\Big[0.12319\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 0.19351\,S_b\Big] \tag{15b}$$

Substituting values of:

$$\frac{l}{h} \times \frac{t}{b} = \frac{50}{2} \times \frac{4}{9} = 11.11$$

$$\Big(\frac{l}{h}\Big)^2 \times \frac{t}{b} = 11.11 \times \frac{50}{2} = 277.7$$

and

$$\Big(\frac{l}{h}\Big)^3 \times \frac{t}{b} = 277.7 \times 25 = 6944$$

in equations (15) and simplifying gives:

$$74.04\,V_b + 20.47\,S_b = -134{,}000$$
$$-2207\,V_b - 23.57\,S_b = -514{,}000$$

from which a simultaneous solution results in:

$$V_b = +315 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_b = -7680 \text{ lb. per ft.}$$

Substitution of these values in equations (10) gives line loads which reunite common edges of barrel and beam:

$$T_L = -0.4444 \times 315 = -140 \text{ lb. per ft.}$$
$$R_L = +0.8958 \times 315 = +280 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_L = -7680 \text{ lb. per ft.}$$

Total line loads must include T_{LM} and S_{LM}, the reactions to membrane forces created by surface loads. Final line loads then are:

$$T_L = -140 + 3940 = +3800 \text{ lb. per ft.}$$
$$R_L = +280 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_L = -7680 + 1620 = -6060 \text{ lb. per ft.}$$

Effects of these three line loads on internal forces T_x, S, T_ϕ and M_ϕ are determined from formulas given at the

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

TABLE II—Internal Forces in an Exterior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof Due to Line Loads at Outside Edge

$\frac{rt}{l^2} = 0.006$ $\phi_k = 26° 23'$ $\frac{r}{l} = 0.90$

$\frac{s}{\sqrt{r\,t\,l^2}}$ s ϕ $\phi_k - \phi$	3.2 44.5 56° 40′	1.6 22.3 28° 20′ −2°	0.8 11.1 14° 10′ 12°	0.4 5.6 7° 5′ 19°	0.2 2.8 3° 30′ 23°	0.1 1.4 1° 45′ 25°	0 0 0° 26° 23′		3.2 44.5 56° 40′	1.6 22.3 28° 20′ −2°	0.8 11.1 14° 10′ 12°	0.4 5.6 7° 5′ 19°	0.2 2.8 3° 30′ 23°	0.1 1.4 1° 45′ 25°	0 0 0° 26° 23′
Load	Coefficients							Multipliers	Forces						
T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	+0.047	−0.230	−0.344	+0.347	+0.778	+ 0.936	+ 1.000	3,800	+ 180	− 870	− 1,310	+ 1,320	+ 2,960	+ 3,560	+ 3,800
⑤ R_L	−0.00034	+0.00239	+0.02822	+0.01810	+0.00677	+ 0.00205	0	42,000	− 10	+ 100	+ 1,190	+ 760	+ 280	+ 90	0
⑥ S_L	+0.0122	−0.0522	−0.0089	+0.0890	+0.0955	+ 0.0655	0	−6,060	− 70	+ 320	+ 50	− 540	− 580	− 400	0
⑧ Σ									+ 100	− 450	− 70	+ 1,540	+ 2,660	+ 3,250	+ 3,800
S at $x = 0$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	−0.209	+0.827	−1.161	−2.556	−2.158	− 1.363	0	3,800	− 790	+ 3,140	− 4,410	− 9,710	− 8,200	− 5,180	0
⑤ R_L	+0.00877	−0.03918	−0.0048	+0.05977	+0.06253	+ 0.04246	0	42,000	+ 370	− 1,650	− 200	+ 2,510	+ 2,630	+ 1,780	0
⑥ S_L	−0.029	+0.094	−0.263	−0.197	+0.182	+ 0.523	+ 1.000	−6,060	+ 180	− 570	+ 1,590	+ 1,190	− 1,100	− 3,170	− 6,060
⑧ Σ									− 240	+ 920	− 3,020	− 6,010	− 6,670	− 6,570	− 6,060
T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	−0.153	−0.103	−5.182	−1.030	+6.371	+12.071	+19.407	3,800	− 580	− 390	−19,700	− 3,910	+24,200	+45,900	+ 73,700
⑤ R_L	+0.0179	−0.0591	+0.1807	+0.1227	−0.1270	− 0.3444	− 0.6412	42,000	+ 750	− 2,480	+ 7,590	+ 5,150	− 5,330	−14,500	− 26,900
⑥ S_L	+0.017	−0.202	−0.481	+1.253	+3.240	+ 4.628	+ 6.328	−6,060	− 110	+ 1,220	+ 2,910	− 7,590	−19,600	−28,000	− 38,300
⑧ Σ									+ 60	− 1,650	− 9,200	− 6,350	− 730	+ 3,400	+ 8,500
M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)															
④ T_L	+0.1550	−0.9042	−0.8634	−0.0900	+0.1355	+ 0.1232	0	1,260	+ 200	− 1,140	− 1,090	− 110	+ 170	+ 160	0
⑤ R_L	−0.00493	+0.03457	+0.07956	+0.05372	+0.02870	+ 0.01463	0	14,000	− 70	+ 480	+ 1,110	+ 750	+ 400	+ 200	0
⑥ S_L	+0.0265	−0.1554	−0.0585	+0.0380	+0.0382	+ 0.0224	0	−2,020	− 50	+ 310	+ 120	− 80	− 80	− 50	0
⑧ Σ									+ 80	− 350	+ 140	+ 560	+ 490	+ 310	0

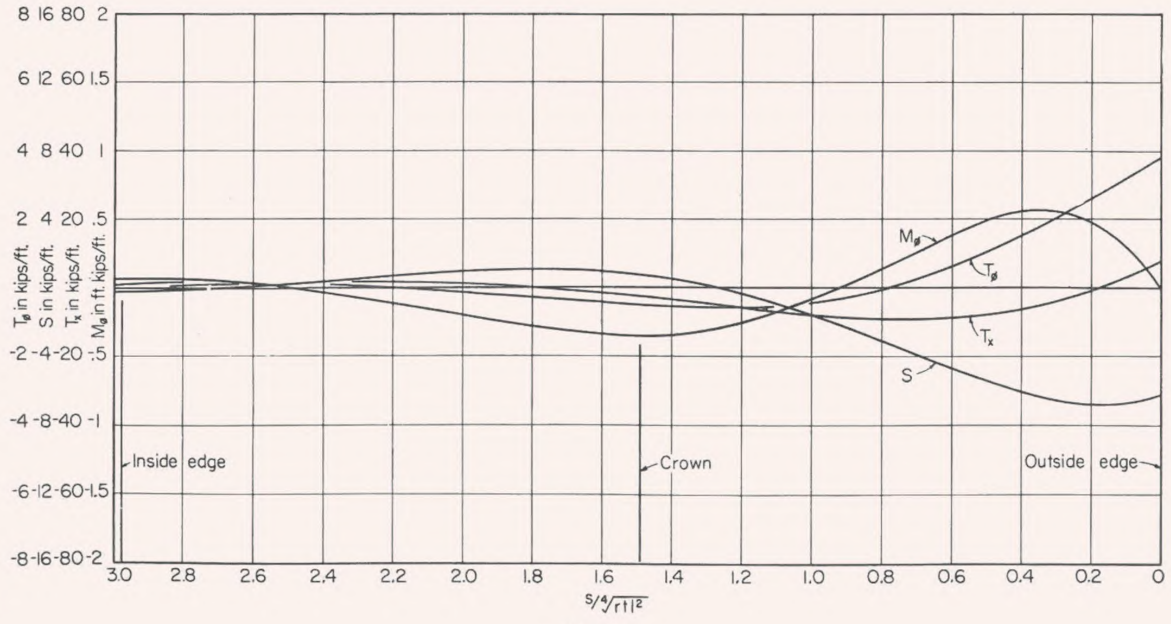


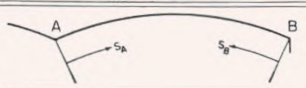
FIG. 17

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

TABLE III—Internal Forces in an Exterior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof



$\frac{s_B}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	2.98	2.88	2.78	2.58	2.18	1.78	1.49 Crown	1.2	0.8	0.4	0.2	0.1	0
$\frac{s_A}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	0	0.1	0.2	0.4	0.8	1.2	1.49	1.78	2.18	2.58	2.78	2.88	2.98
T_ϕ at $x=\frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	− 3,940	− 4,000	− 4,090	−4,240	−4,430	− 4,500	− 4,580	− 4,500	− 4,430	−4,240	−4,090	−4,000	−3,940
⑧ Line loads at B	+ 140	+ 150	+ 160	+ 150	0	− 300	− 520	− 610	− 70	+1,540	+2,660	+3,250	+3,800
⑨ Line loads at A	+ 5,760	+ 5,750	+ 5,440	+4,340	+1,580	− 310	− 880	− 750	− 360	+ 50	+ 150	+ 190	+ 200
⑩=③+⑧+⑨	+ 1,960	+ 1,900	+ 1,510	+ 250	−2,850	− 5,110	− 5,980	− 5,860	− 4,860	−2,650	−1,280	− 560	+ 60
S at $x=0$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	+ 1,620	+ 1,550	+ 1,440	+1,220	+ 790	+ 460	0	− 460	− 790	−1,220	−1,440	−1,550	−1,620
⑧ Line loads at B	− 200	− 150	− 50	+ 100	+ 700	+ 1,050	+ 750	− 310	− 3,020	−6,010	−6,670	−6,570	−6,060
⑨ Line loads at A	− 1,620	+ 1,930	+ 4,550	+7,520	+7,210	+ 3,400	+ 900	− 750	− 1,400	− 800	− 420	− 250	0
⑩=③+⑧+⑨	− 200	+ 3,330	+ 5,940	+8,840	+8,700	+ 4,910	+ 1,650	− 1,520	− 5,210	−8,030	−8,530	−8,370	−7,680
T_x at $x=\frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	− 1,020	− 1,080	− 1,110	−1,190	−1,290	− 1,320	− 1,350	− 1,320	− 1,290	−1,190	−1,110	−1,080	−1,020
⑧ Line loads at B	+ 300	+ 800	+ 900	+1,200	+1,500	− 300	− 2,500	− 5,770	− 9,200	−6,350	− 730	+3,400	+8,500
⑨ Line loads at A	+46,700	+35,220	+25,360	+9,440	−8,340	−11,400	− 9,000	− 4,800	+ 200	+1,900	+2,000	+2,000	+1,500
⑩=③+⑧+⑨	+45,980	+34,940	+25,150	+9,450	−8,130	−13,020	−12,850	−11,890	−10,290	−5,640	+ 160	+4,320	+8,980
M_ϕ at $x=\frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)													
⑧ Line loads at B	+ 70	+ 70	+ 60	+ 30	− 120	− 290	− 360	− 270	+ 140	+ 560	+ 490	+ 310	0
⑨ Line loads at A	− 2,330	− 1,190	− 320	+ 730	+ 940	+ 290	− 240	− 480	− 390	− 140	− 35	+ 15	+ 50
⑩=⑧+⑨	− 2,260	− 1,120	− 260	+ 760	+ 820	0	− 600	− 750	− 250	+ 420	+ 455	+ 325	+ 50

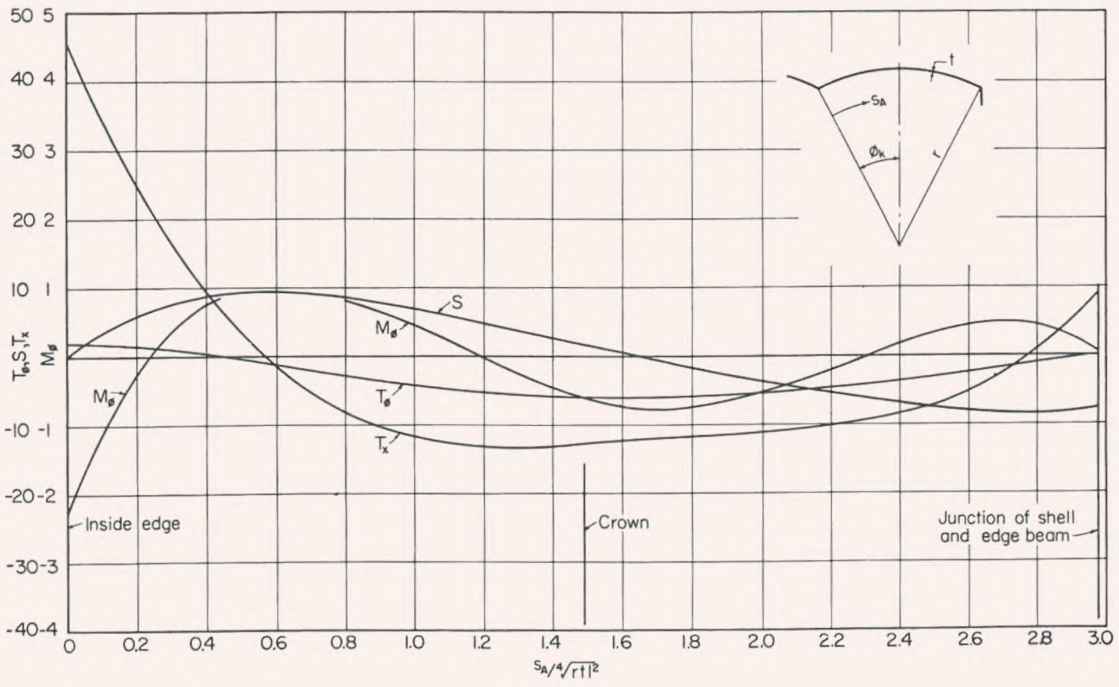


FIG. 18

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

top of Table 3A. The combination of all terms in one formula with the exception of the coefficient indicated by column number constitutes the multiplier. For example, the multipliers of the tangential and shear edge loads for forces T_x, S and T_ϕ are merely T_L and S_L while the multiplier of the radial edge load for these forces is $R_L \times \frac{l}{t}$ $= +280 \times 150 = 42{,}000$ lb. per ft. Multipliers for tangential, radial and shear edge loads for the transverse moment M_ϕ are respectively:

$$T_L \times t = +3800 \times \tfrac{1}{3} = +1260 \text{ ft. lb. per ft.}$$
$$R_L \times l = +280 \times 50 = +14{,}000 \text{ ft. lb. per ft.}$$
$$S_L \times t = -6060 \times \tfrac{1}{3} = -2020 \text{ ft. lb. per ft.}$$

Internal forces produced by line loads acting at the exterior edge are obtained as the products of coefficients and multipliers. These operations are given in rows ④, ⑤ and ⑥ of Table II. Since the curved shell portions of interior and exterior barrels are identical, coefficients in Table II are the same as those listed in Table I. Effects of the various line loads are combined in rows ⑧ of Table II and are plotted in Fig. 17.

Because restraint differs at the two longitudinal edges of the exterior barrel, internal forces are not symmetrical about the crown. Consequently, values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ in Table III are extended from one edge to the other with subscripts A and B designating the edge from which s is measured. The exterior edge is considered the near edge.

As in Table I, rows ③ in Table III represent membrane forces, and values given are taken directly from rows ③ of Table I or computed from Table 1B. Values in rows ⑧, Table III, from $\frac{s_B}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0$ to 0.8 are copied from rows ⑧ of Table II while values from 1.2 to 2.98 are scaled from curves in Fig. 17. Values in rows ⑨ represent effects of line loads at the interior edge and are obtained from rows ⑧ and ⑨ of Table I with the exception of values at $\frac{s_A}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 1.2$, 1.49 and 1.78 which are scaled from Fig. 10.

Algebraic sums of these individual effects are tabulated in rows ⑩ of Table III and are shown graphically in Fig. 18. Inspection of the curves indicates that the neutral axis is not horizontal but sloped and that shear is not zero at the crown.

Statical Check of Forces in Exterior Barrel

The accuracy of numerical calculations for the exterior barrel is checked in a manner similar to that used for the interior barrel with the provision that internal forces acting in the edge beam must be added to those in the shell. Internal stress at the top, midspan fibers of the edge beam is by equation (13):

$$f \text{ (top)} = -\frac{50}{0.75 \times 2}\left[0.60793 \times \frac{50}{2} \times (315+286) + 1.2732 \times (-7680)\right] = -304{,}500 + 325{,}900 = +21{,}400 \text{ psf.} \quad (16)$$

Equation (16) includes effects of vertical and shear loads. Top and bottom fiber stresses due to the vertical load are equal and opposite. Inspection of formulas (10c) and (10d) of ASCE Manual No. 31 indicates that bottom fiber stress resulting from a shear load acting at the top of the beam is one-half that at the top. Therefore, midspan bottom fiber stress in the edge beam is expressed simply as:

$$f \text{ (bottom)} = +304{,}500 - \frac{325{,}900}{2} = 141{,}500 \text{ psf} \quad (17)$$

The force per foot at top and bottom of beam is:

T_x (top) $= 21{,}400 \times 0.75 = 16{,}000$ lb. per ft.
T_x (bottom) $= 141{,}500 \times 0.75 = 106{,}000$ lb. per ft.

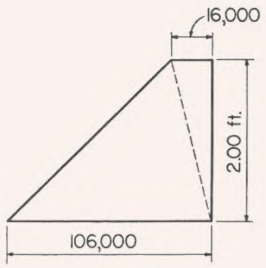


FIG. 19

The assumed straight line variation results in the T_x-force diagram of Fig. 19. Total horizontal force in the beam is $(106{,}000 + 16{,}000)\ 0.5 \times 2 = 122{,}000$ lb. and the moment of this force about the top of the beam is:

$$0.5 \times 2\left[16{,}000 \times \tfrac{2}{3} + 106{,}000 \times \tfrac{4}{3}\right] = 152{,}000 \text{ ft. lb.}$$

The complete summation of horizontal forces including those in the edge beam is:

$$\Sigma H = \frac{5.18}{3}[+45{,}980 + (4)(+11{,}200) + (2)(-6{,}500) + (4)(-12{,}600) + (2)(-12{,}850) + (4)(-11{,}550) + (2)(-10{,}000) + (4)(-5000) + 8980] + 122{,}000$$

from which $\Sigma H = -302{,}000 + 294{,}300 = -7{,}700$ lb.

In theory this summation should equal zero. Here the difference between positive and negative values is less than 2 per cent of their arithmetical sum.

In computing internal moment due to T_x, forces taken at points symmetrical about the crown have equal moment arms and therefore are grouped in parentheses. The resulting expression is:

$$\Sigma M = \frac{5.18}{3}[0 + 4\ (11{,}200-5{,}000)\ 2.02 + 2(-6{,}500-10{,}000) \times 3.51 + 4\ (-12{,}600-11{,}550)\ 4.38 + 2(-12{,}850)\ 4.69 + 0]\ -152{,}000$$

from which $\Sigma M = -1{,}204{,}000$ ft. lb.

External moment equals the sum of that already computed for the interior barrel (page 15) and the moment resulting from the weight of the edge beam. Though the

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

edge beam is of uniform cross-section throughout its length, its weight is expressed as a sinusoidal load for reasons discussed on page 8. This is done by multiplying the weight per foot by $\frac{4}{\pi}$ giving 286 lb. per ft. Midspan moment developed by this load is given by equation (3) as:

$$M = -\frac{pl^2}{\pi^2} = -286 \times \frac{50^2}{\pi^2} = -72{,}500 \text{ ft. lb.}$$

Total external moment then equals:

$$\Sigma M = -1{,}055{,}000 - 72{,}500 = -1{,}127{,}500 \text{ ft. lb.}$$

The difference between computed internal and external moments is 1,204,000 − 1,127,500 = 76,500. Internal moment is approximately 7 per cent greater than the external.

As previously explained, a percentage difference of this magnitude is not excessive but this discrepancy could be reduced by correcting for the residual T_ϕ edge forces of +140 and +200 lb. per ft. indicated in Table III. Line loads T_L of −140 and −200 lb. per ft. applied at the respective edges would decrease the internal moment. The effect of this correction can be estimated by computing the external moment which the residual forces produce. Edge forces of +140 and +200 lb. per ft. represent an additional downward load of (140+200) 0.4444 = 150 lb. per ft. assumed acting on the shell. The moment created by this load is equal to $\frac{150}{286} \times 72{,}500 = 38{,}000$ ft. lb. If this correction is applied to the internal moment, the corrected value would be −1,204,000 + 38,000 = −1,166,000 ft. lb., which exceeds the external moment by only 3.5 per cent.

A comparison of internal and external shear at the support must include forces within the edge beam which is subjected to its own dead weight and to forces V_b and S_b shown in Fig. 16. It should be noted that although the horizontal shearing force S_b produces vertical shearing stresses at any cross-section, a summation of these stresses equals zero. This is evident from the fact that S_b alone does not create external reactions. Hence, shear in the edge beam at the support is determined from equation (2) as:

$$V = -p\frac{l}{\pi}$$

where p is the sum of V_b and the dead weight of the beam or 315 + 286 = 601 lb. per ft. From this

$$V = -601 \times \frac{50}{\pi} = -9570 \text{ lb.}$$

The complete expression for internal shear is similar to that given on page 16 for the interior barrel. For values of ϕ greater than ϕ_k, sin $(\phi_k - \phi)$ is negative. Shear ordinates which are multiplied by common values of sin $(\phi_k - \phi)$ are combined in parentheses. The expression is:

$$\Sigma V = \frac{5.18}{3}[(-7680 + 200)\ 0.4444 + 4(-8150 - 8550)\ 0.3393 + 2(-5600 - 9000)\ 0.2278 + 4(-2500 - 5700)\ 0.1161] - 9570 = 72{,}600 \text{ lb.}$$

Reaction at the support is equal to the sum of that previously determined for the interior barrel and that due to the weight of the beam.

$$\Sigma V \text{ (external)} = -66{,}300 - 286 \times \frac{50}{\pi} = -70{,}850 \text{ lb.}$$

The percentage difference of 2.5 per cent can be reduced if the 150 lb. per ft. vertical load due to uncompensated T_ϕ forces is taken into account.

Modification of Internal Forces for Continuity

In preceding discussions force distribution has been obtained in terms of a simply supported barrel although the roof structure in Fig. 4 consists of two equal spans continuous over a center support. This force distribution now must be modified for continuity. As discussed in ASCE Manual No. 31, the effect of continuity on shells and conventional beams is similar since it affects only longitudinal variation of stress. Manual No. 31 points out that while forces in the continuous structure can be obtained by a rigorous satisfaction of boundary conditions, force distribution also may be determined by proportioning on the basis of the ratio of moments in a continuous beam to moment in a simply supported span. The second procedure is used in this design example. In order to evaluate the change in force distribution, the fixed end moment in a beam subject to sinusoidal loading is determined first.

Slopes of tangents at the ends of a simply supported beam carrying a sinusoidal load are given by equation (4) as:

$$\theta = \frac{pl^3}{EI\pi^3}$$

To produce a fixed end condition, end moments must be applied which rotate both ends of the beam through this angle. It is known that an end moment of $\frac{4EI}{l}$ will rotate the near end of a beam through a unit angle when the far end is fixed. Therefore, applying a moment of $\frac{4EI}{l} \times \frac{pl^3}{EI\pi^3}$ at each end and including the carryover moment, final fixed end moment is equal to:

$$M = \frac{pl^3}{EI\pi^3} \times \frac{4EI}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2pl^2}{\pi^3} \qquad (18)$$

If one end of the beam is hinged, moment at the fixed end by moment distribution is:

$$M = \frac{2pl^2}{\pi^3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3pl^2}{\pi^3} \qquad (19)$$

Final moment at any point in a beam having one end fixed and the other hinged is found by adding algebraically the simple span moment given by equation (3) and the effect of the end moment indicated by equation (19). These two moments are shown in Fig. 20. After superposition the resulting moment is:

$$M = \frac{3pl^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{pl^2}{\pi^2} \sin\frac{\pi x}{l}$$

Expressed in terms of the midspan moment $-\frac{pl^2}{\pi^2}$ of the

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

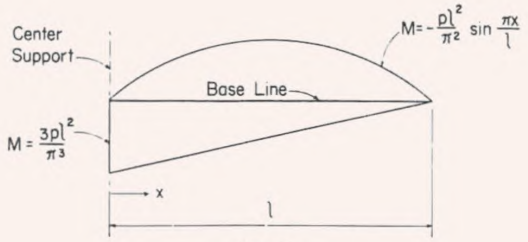


FIG. 20

simply supported span this becomes:

$$M = -\frac{pl^2}{\pi^2}\left[-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}\right]$$

Conditions of support for this beam are similar to those in the design example where, due to symmetry of structure and loading, a fixed end exists at the center cross frame with hinged supports at the far ends. A beam bearing such similarity to a shell structure may be used to proportion internal forces for continuity. For example, in a continuous shell of two equal spans l, longitudinal T_x-forces at any section are approximately equal to the midspan T_x-forces in a simply supported shell of span l times the ratio of moment at the same section in a continuous beam of two equal spans to the midspan moment of one simply supported span of the beam. From this, longitudinal force at any section in the continuous shell roof of this example is:

$$T_x \text{ (continuous)} = T_x^*\left[-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}\right] \quad (20)$$

Shear determined for the simply supported single span shell also is modified by the condition of continuity. Shear due to end restraint is equal to the fixed-end moment divided by span length while that due to the simply supported sinusoidal load is given by equation (2). The complete expression for shear is the sum of these effects or:

$$S = -\frac{3pl}{\pi^3} - \frac{pl}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l} \quad (21)$$

Expressed in terms of $-\frac{pl}{\pi}$, the shear at the support of the simple span, shear in the continuous structure is found from:

$$S = -\frac{pl}{\pi}\left[\frac{3}{\pi^2}+\cos\frac{\pi x}{l}\right] \quad (21a)$$

Modification of transverse moment M_ϕ for continuity is given by formula (236b) of ASCE Manual No. 31 as follows:

$$M_\phi \text{ (continuous)} = M_\phi^*\left\{\sin\frac{\pi x}{l} - 3\pi\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{x}{l}\right]\right\} \quad (22)$$

The effect of end restraint on T_ϕ-forces calculated previously for the simply supported shell is negligible.

*The superscript (*) indicates the force at the centerline of the simply supported shell span.

TABLE IV—INTERNAL FORCES IN THE INTERIOR BARREL OF THE CONTINUOUS SHELL ROOF

T_ϕ in lb. per ft.

$\frac{s}{\text{ft.}}$	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\sin\frac{\pi x}{l}$				
			0	0.707	0.953	0.707	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	−6,300	0	−4,450	−6,000	−4,450	0
16.8	1.2	−5,600	0	−3,960	−5,340	−3,960	0
11.1	0.8	−3,210	0	−2,270	−3,060	−2,270	0
5.6	0.4	+ 150	0	+ 110	+ 140	+ 110	0
2.8	0.2	+1,500	0	+1,060	+1,430	+1,060	0
1.4	0.1	+1,940	0	+1,370	+1,850	+1,370	0
0	0	+2,020	0	+1,430	+1,930	+1,430	0

S in lb. per ft.

$\frac{s}{\text{ft.}}$	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Forces at supports in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\frac{3}{\pi^2}+\cos\frac{\pi x}{l}$				
			+1.304	+1.011	0	−0.403	−0.696
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	0	0	0	0	0	0
16.8	1.2	−4,600	− 6,000	−4,700	0	+1,900	+3,200
11.1	0.8	−9,400	−12,300	−9,500	0	+3,800	+6,600
5.6	0.4	−9,540	−12,500	−9,700	0	+3,900	+6,700
2.8	0.2	−6,410	− 8,400	−6,500	0	+2,600	+4,500
1.4	0.1	−3,730	− 4,900	−3,800	0	+1,500	+2,600
0	0	0	0	0	0	0	0

T_x in lb. per ft.

$\frac{s}{\text{ft.}}$	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}$				
			−0.955	−0.009	+0.571	+0.468	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	−19,400	+18,500	+170	−11,100	− 9,100	0
16.8	1.2	−17,500	+16,700	+160	−10,000	− 8,200	0
11.1	0.8	− 9,430	+ 9,000	+ 80	− 5,400	− 4,400	0
5.6	0.4	+10,150	− 9,700	− 90	+ 5,800	+ 4,800	0
2.8	0.2	+26,250	−25,100	−240	+15,000	+12,300	0
1.4	0.1	+36,140	−34,500	−330	+20,600	+16,900	0
0	0	+47,180	−45,000	−420	+26,900	+22,100	0

M_ϕ in ft. lb. per ft.

$\frac{s}{\text{ft.}}$	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\sin\frac{\pi x}{l}-3\pi\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{x}{l}\right]$				
			0	0.192	0.425	0.339	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	− 480	0	− 90	−200	−160	0
16.8	1.2	− 190	0	− 40	− 80	− 60	0
11.1	0.8	+ 550	0	+110	+230	+190	0
5.6	0.4	+ 590	0	+110	+250	+200	0
2.8	0.2	− 355	0	− 70	−150	−120	0
1.4	0.1	−1,175	0	−230	−500	−400	0
0	0	−2,280	0	−440	−970	−770	0

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Table IV deals with evaluation of internal forces in the continuous interior barrel, these forces being symmetrical about the crown. Forces in the exterior barrel would be computed in a similar manner but are not symmetrical about the crown.

Since the longitudinal T_x-force is of considerable importance in determining reinforcement, it is desirable to compute maximum values. For this purpose equation (20) expressing the variation of T_x is differentiated with respect to x and set equal to zero to determine the location of maximum force. The first derivative of equation (20) is:

$$\frac{dT_x}{d_x} = T_x^* \left[\frac{3}{\pi} + \pi \cos \frac{\pi x}{l}\right] = 0$$

from which:

$$\cos \frac{\pi x}{l} = -\frac{3}{\pi^2} = -0.3039$$

and:

$$\frac{\pi x}{l} = 107° 42' \text{ or } 1.88 \text{ radians}$$

The negative sign indicates a second quadrant angle. Solving for $\frac{x}{l}$, the location of maximum T_x-force, gives:

$$\frac{x}{l} = \frac{1.88}{\pi} = 0.60$$

The four internal forces are computed at five sections: at supports where $\frac{x}{l} = 0$ and 1.0, and at $\frac{x}{l}$ equal to 0.25, 0.60 and 0.75. At each section forces are determined for the seven points indicated in columns ① and ② of Table IV.

Forces occurring in the simply supported interior barrel are tabulated in columns ③ of Table IV. Values given for T_ϕ, T_x and M_ϕ occur at midspan while those for shear S are at the support. For values of $\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$ from 0 through 0.8, these forces are taken directly from rows ⑩ of Table I while at $\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$ equal to 1.2 and at the crown forces are scaled from Fig. 12.

Multipliers are listed at the top of each table for various values of $\frac{x}{l}$. For forces M_ϕ, T_x and S these multipliers include corrections for continuity and are equal to the bracketed terms of equations (22), (20) and (21a), respectively. The multiplier for T_ϕ is equal merely to sin $\frac{\pi x}{l}$.

Values in columns ④ through ⑧ are final forces obtained by multiplying forces in columns ③ by appropriate multipliers. For example, force T_x at $\frac{x}{l}$ equal to 0.60 and $\frac{s}{\sqrt{rtl^2}} = 0.4$ is found by multiplying +10,150 found in column ③ by multiplier +0.571 to give +5,800 lb. per ft. It should be noted that since T_x-forces are maximum at $\frac{x}{l} = 0.6$, the moment they produce at this section is also maximum and, as with an ordinary beam, shear is zero.

*The superscript (*) indicates the force at the centerline of the simply supported shell span.

The horizontal neutral axis falls between values of $\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$ equal to 0.4 and 0.8 and is approximately 3 ft. above the lower edge of the shell.

Shell Reinforcement

Design of reinforcement for the interior barrel is based on final forces summarized in Table IV. In general, shell reinforcement is provided for three force conditions: tensile T_x-forces are resisted by horizontal steel; moment M_ϕ combined with the direct force T_ϕ is resisted by transverse reinforcement while shearing forces S are resisted primarily by diagonal reinforcement.

A major question arising in the design of shells is whether the stress assigned to the steel shall vary according to n times the computed concrete stress or whether an arbitrarily designated value of f_s such as 20,000 psi can be assumed disregarding concrete stress. Shell analysis has been based on the assumption of homogeneity of material. In other words, strains in the structure are proportional to induced concrete stresses. To be consistent, steel stresses should be based on steel strains that are equal to concrete strains. This condition requires the use of a constant percentage of steel throughout the tensile zone.

The same problem exists in detailing indeterminate structures such as rigid frames and arches. In this case it is customary to analyze the structure on the basis of the constant elastic property of the members and then determine required steel area on the assumption that reinforcement is stressed to an allowable design value. This same practice will be followed in shell design.

There are several methods of proportioning horizontal or longitudinal reinforcing steel. One method is to divide the external moment by the product of the allowable steel stress and the distance between centroids of reinforcement and compressive T_x-forces. A minimum amount of reinforcement is provided by this method since the bars generally are concentrated as far from the neutral axis as possible.

According to the method proposed in ASCE Manual No. 31, longitudinal steel stresses vary linearly from a maximum at the edge of the shell to zero at the neutral axis. Tensile reinforcement is distributed over the entire tension zone.

A third procedure is suggested in which the required steel area at any point is given by T_x at that point divided by a constant allowable stress. For example, from Table IV at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$ with $T_x = +26{,}900$ lb. per ft.,

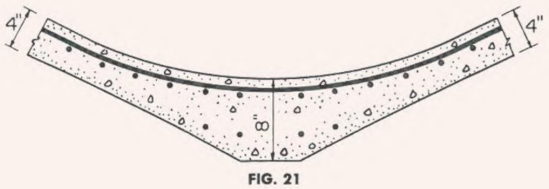


FIG. 21

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

required reinforcement is:

$$A_s = \frac{26{,}900}{20{,}000} = 1.4 \text{ sq. in. per ft.}$$

Five #5 bars providing an area of 1.55 sq. in. are placed as shown in Fig. 21 within the first foot at either side of the valley formed by the junction of adjacent barrels. At $s = 1.4$ and $\frac{x}{l} = 0.6$, a required steel area of $\frac{20{,}600}{20{,}000} =$ 1.03 sq. in. per ft. is supplied by #5 bars spaced at 3½ in., this spacing being continued to $s = 2.8$ ft. The procedure is repeated up to the neutral axis. In the compression zone reinforcement is theoretically unnecessary but minimum reinforcement equal to approximately 0.4 per cent is provided either by welded wire fabric or small diameter bars spaced at about 1-ft. intervals.

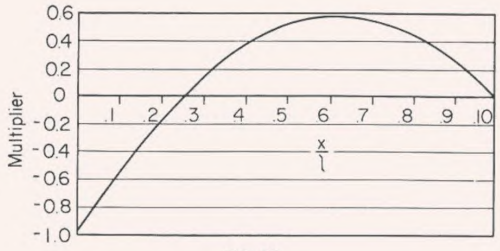


FIG. 22

Cut-off points for longitudinal bars are determined by means of Fig. 22, which shows a curve representing the multiplier in Table IV: $-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right) + \sin\frac{\pi x}{l}$. For illustration note in Fig. 22 that multipliers are -0.955 at $\frac{x}{l} = 0$ and $+0.571$ at $\frac{x}{l} = 0.6$. The use of this curve is illustrated by determining cut-off points for one of the five longitudinal #5 bars provided at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$. Four #5 bars resist a tensile force of $4 \times 0.31 \times 20{,}000 = 24{,}800$ lb. per ft. To obtain a force of 24,800 lb. per ft., the midspan T_x-force of 47,180 lb. per ft. in the simply supported shell must be multiplied by the factor:

$$\frac{24{,}800}{47{,}180} = 0.526$$

In Fig. 22 the multiplier 0.526 occurs at $\frac{x}{l}$ equal to 0.52 and 0.67, these being the points at which four #5 bars are sufficient. This illustration applies to all horizontal reinforcement.

Transverse reinforcement is computed for moment M_ϕ and direct force T_ϕ. The procedure is similar to that used for ordinary reinforced concrete beams subjected to combined stresses. In this example design is based on a rectangular section 12 in. wide and 4 in. deep except at the junction of adjacent barrels where depth is increased to provide a smooth transition from one barrel to the other.

Consider selecting transverse reinforcement at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$, where $M_\phi = -0.97$ ft. kips per ft. producing tension at the top surface and $T_\phi = 1.93$ kips per ft. in tension. A total depth of 8 in. is scaled from Fig. 21 and effective depth is taken as 7 in. Steel area is 0.15 sq. in. per ft. as determined according to Example 8 of the *Reinforced Concrete Design Handbook*.* For an allowable concrete stress of 1350 psi., compression reinforcement is not required. As shown in Fig. 21, transverse reinforcement at this location is placed near the top of the shell and is continuous from one barrel to the next. Transverse reinforcement required throughout the interior barrel is nominal in amount and may be evenly spaced as shown in Fig. 23.

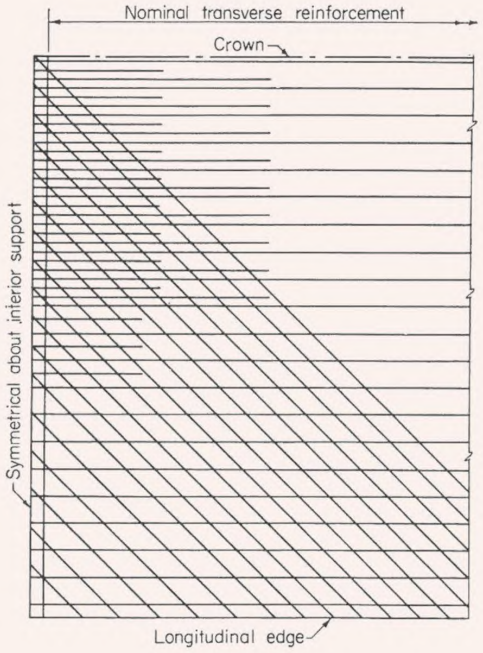


FIG. 23

Diagonal reinforcement shown in Fig. 23 may be designed by several methods. Reinforcement may be provided on the basis of principal stresses computed at various points. Such an approach implies the placement of bars parallel to stress trajectories.

In this example diagonal reinforcement is designed as for conventional reinforced concrete beams and is provided to resist shear in excess of $0.3 f'_c$. For example, from Table IV at $s = 5.6$ and $\frac{x}{l} = 0.25$, $S = -9700$ lb. per ft.

*Published by the American Concrete Institute, Detroit, Mich.

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

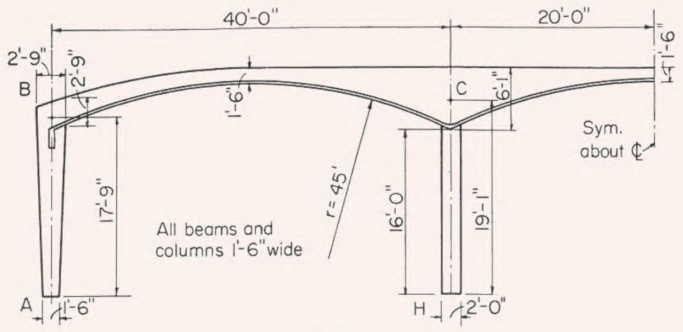


FIG. 24

Assuming 3000-lb. concrete, required diagonal steel is:

$$A_s = (9700 - 90 \times 4 \times 12) \div 20{,}000$$
$$= (9700 - 4300) \div 20{,}000 = 0.27 \text{ sq. in. per ft.}$$

Critical shear stress which determines spacing of diagonal bars does not necessarily occur at the supports and it may be desirable to compute shear at intermediate points.

Longitudinal and transverse reinforcement also may be used to resist diagonal tension if these bars are only lightly stressed by their primary loads. However, horizontal and vertical bars make an angle of 45° with the axis of diagonal tension and, as pointed out by formula (6d) of ASCE Manual No. 31, their effectiveness in the 45° direction is only one-half its normal value.

Shear is investigated at $s = 5.6$ and $\frac{x}{l} = 0.125$ to illustrate the distribution of diagonal tension over reinforcement extending in more than one direction. Since Table IV gives no values at $\frac{x}{l} = 0.125$, shear at this point must be computed. Substituting in the expression for the shear multiplier $\frac{3}{\pi^2} + \cos\frac{\pi x}{l}$ gives $+1.228$ which, when multiplied by -9540, the support shear in the simply supported barrel at $s = 5.6$, gives a total shear of $-11{,}700$ lb. per ft. This value then is reduced by 4300 lb. per ft., the previously determined allowable shear strength of the concrete, leaving 7400 lb. per ft. to be resisted by reinforcement. Required steel area is $\frac{7400}{20{,}000}$ or 0.37 sq. in. per ft.

Inspection of Table IV indicates that T_x-forces at $s = 5.6$ are compressive from the support to $\frac{x}{l} = 0.25$. Therefore, longitudinal steel at $\frac{x}{l} = 0.125$ carries no tensile stress and may be used to resist some diagonal tension. Effective area of these #5 bars spaced at 12 in. is reduced from 0.31 to 0.15 sq. in. per ft. because of the 45° displacement. Diagonal reinforcement is then supplied for 0.37 less 0.15 or 0.22 sq. in. per ft. Similar advantage can be taken of transverse steel when the stress produced by T_ϕ and M_ϕ is small.

Although not discussed here, design of reinforcement for the exterior barrel follows a procedure similar to that outlined for the interior barrel. The total tensile longitudinal force at midspan in the edge beam is found on page 21 to be 122,000 lb. To determine the companion force in the continuous structure at $\frac{x}{l} = 0.6$, this value is multiplied by the multiplier 0.571 in Table IV giving a final tensile force of 69,600 lb. The required steel area of 3.48 sq. in. should be located with its center of gravity at or below the center of gravity of the 122,000 lb. longitudinal force.

Frame Design

The analysis of any frame supporting a shell is similar to the analysis of a continuous bent supporting a conventional slab except that the shell induces a direct force in the frame. As explained in ASCE Manual No. 31, frames are designed for their own dead weight plus live and dead loads on the shell.

The 18-in. wide frame shown in Fig. 24 is selected to illustrate steps involved in the analysis of a frame. The choice of this shape with the shell at the bottom edge does not imply that this is the best or only solution. Under certain circumstances it may be desirable to have the shell at the top of the frame with the soffit straight. Also, economic considerations may favor the use of an arch following the curve of the shell.

The frame in Fig. 24 is the center frame of the roof unit shown in Fig. 4. It is symmetrical about the centerline of the interior bay and has a depth varying from 33 in. at the inner face of the exterior column to 18 in. at midspan. Depth at interior columns is 73 in. with the top surface of the frame horizontal between centerlines of exterior bays. Although depth at midspan may seem excessively shallow, it is shown subsequently that in this area the frame carries a large axial tensile force.

ASCE Manual No. 31 points out that the shell acts as a flange of the frame, the effective flange overhang at either side of a supporting rib in a shell roof continuous over its supports being $0.76\sqrt{rt}$. The overhang in this example is $0.76\sqrt{45 \times 0.33} = 2.94$ ft. Total overall flange width is $2 \times 2.94 + 1.50 = 7.38$ ft. In the analysis, cross sections are assumed T-shaped.

Frame analysis for loads is made by moment distribution with carry-over factors, distribution factors and fixed-end moments for horizontal members determined on the basis of parabolic haunches. (The use of parabolic haunches to approximate the circular curve of the soffit is considered sufficiently accurate.) These factors are extrapolated from values given in the *Handbook of Frame Constants.** It should be recognized that the use of these constants involves a slight inaccuracy since a horizontal centroidal axis is assumed while in reality this axis is curved. However, the effect of curvatures as large as

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

those encountered in this example may be neglected since the small error introduced is conservative.

To avoid lengthy computations in determining the moment of inertia I of the T-section, use is made of Fig. 5 in *Continuity in Concrete Building Frames** which gives I of a T-section as the I of its web times a coefficient C. This coefficient is a function of A, the ratio of flange to web widths and B, the ratio of flange to web depths. At interior columns these are:

$$A = \frac{7.38}{1.50} = 4.9$$

$$B = \frac{0.33}{6.10} = 0.054$$

From Fig. 5, $C = 1.50$. At midspan of each bay A has the same value but $B = \frac{0.33}{1.50} = 0.220$ and hence $C = 1.85$.

At exterior columns $C = 1.70$ since $B = \frac{0.33}{2.75} = 0.120$.

Constants in the *Handbook* are for rectangular sections and are given in terms of the ratio of centerline to haunch depths. Therefore, the I of the T-section must be expressed in terms of the depth of a rectangular section possessing the same moment of inertia as the T. Since $I = CI_{web}$, this equivalent depth is $d\sqrt[3]{C}$. Hence equivalent depths are:

at B $\quad h_B = 2.75\ \sqrt[3]{1.70} = 3.27$ ft.
at midspan $\quad h_{\text{℄}} = 1.50\ \sqrt[3]{1.85} = 1.85$ ft.
at C $\quad h_C = 6.10\ \sqrt[3]{1.50} = 7.06$ ft.

The various coefficients are tabulated in Table V for the exterior bay with:

$$r_B = \frac{3.27 - 1.85}{1.85} = 0.77$$

$$r_C = \frac{7.06 - 1.85}{1.85} = 2.81$$

and for the interior bay having:

$$r_C = r_D = 2.81$$

Carry-over and stiffness factors for the exterior column, assumed to have a straight haunch, are taken from Table 52 of the *Handbook* for $r_B = \frac{2.75 - 1.50}{1.50} = 0.833$:

$$C_{AB} = -0.78$$
$$C_{BA} = -0.32$$
$$k_{BA} = 16.20$$

Assuming columns to be hinged at the base, stiffnesses of members at various points are:

$$K_{BA} = \frac{16.20 \times 1.5^3\ (1 - 0.78 \times 0.32)}{17.75} = 2.31$$

$$K_{BC} = \frac{13.20 \times 1.85^3}{40} = 2.09$$

$$K_{CB} = \frac{21.7 \times 1.85^3}{40} = 3.43$$

$$K_{CH} = \frac{4 \times 2^3\ (1 - 0.5^2)}{19.1} = 1.26$$

$$K_{CD} = \frac{32.3 \times 1.85^3}{40} = 5.11$$

Distribution factors are therefore:

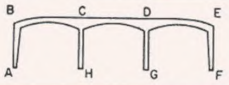
$$d_{BC} = \frac{2.09}{2.31 + 2.09} = 0.48$$

$$d_{CB} = \frac{3.43}{3.43 + 5.11 + 1.26} = 0.35$$

$$d_{CD} = \frac{5.11}{3.43 + 5.11 + 1.26} = 0.52$$

These values are tabulated in Table V to simplify the computations.

TABLE V—Moment Distribution For Dead and Live Loads



	B		C	D
Carry-over factor	− 0.95	− 0.58	− 0.82	− 0.82
Stiffness factor	13.2	21.7	32.3	32.3
M^F Uniform	− 0.0730	− 0.1470	− 0.1130	− 0.1130
M^F Right haunch	− 0.0012	− 0.0190	− 0.0018	− 0.0184
M^F Left haunch	− 0.0147	− 0.0050	− 0.0184	− 0.0018
Distribution factor	0.48	0.35	0.52	0.52
Fixed-end moments	−629	−1280	−993	−993
1st Distribution	+302	+ 100	−149	−149
Carry over	− 58	− 287	+122	+122
2nd Distribution	+ 28	+ 143	−213	−213
Carry over	− 83	− 27	+175	+175
3rd Distribution	+ 40	+ 71	−105	−105
Carry over	− 41	− 38	+ 86	+ 86
4th Distribution	+ 20	+ 43	− 65	− 65
End moment	−421	−1275	−1142	−1142

The load on the frame consists of its own weight and the shell reactions. As discussed in Manual No. 31, the effect of these reactions can be simulated by applying the shell load on the frame. Since the rise is small, dead weight of the shell can be assumed to be uniform in the transverse as well as the longitudinal direction. Uniform load carried by the center frame is:

Dead wt. of shell: $2 \times 0.625 \times 50 \times 0.050 = 3.1$ kips per ft.
Live load on shell: $2 \times 0.625 \times 50 \times 0.030 = 1.9$ kips per ft.
Partial wt. of frame: $1.5 \times 1.17 \times 0.150 = 0.3$ kips per ft.
Total uniform load $= \overline{5.3}$ kips per ft.

The value 0.625×50 gives the position of zero shear on either side of the center support in a uniformly loaded continuous beam of two 50-ft. spans. The load on this portion of each shell span is carried by the center frame. Haunch loads are:

at B: $\quad 1.5\ (2.75 - 1.5) \times 0.150 = 0.28$ kips per ft.
at C: $\quad 1.5\ (6.10 - 1.5) \times 0.150 = 1.04$ kips per ft.

Utilizing coefficients in Table V, the fixed-end moments are:

$$M^F_{BC} = -(5.3 \times 0.073 + 0.28 \times 0.0147 + 1.04 \times 0.0012)\ 40^2 = -629 \text{ ft. kips}$$

$$M^F_{CB} = -(5.3 \times 0.147 + 0.28 \times 0.0050 + 1.04 \times 0.0190)\ 40^2 = -1280 \text{ ft. kips}$$

$$M^F_{CD} = -[5.3 \times 0.1130 + 1.04\ (0.0184 + 0.0018)]\ 40^2 = -993 \text{ ft. kips}$$

Final moments as determined by moment distribution are tabulated in the last row of Table V.

In addition to these moments, there is induced in the frame a horizontal tensile force T which equals the sum of the horizontal components of the T_ϕ-forces acting between planes of zero shear as shown in Fig. 26. This force results from the satisfaction of internal equilibrium re-

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

quirements and should not be confused with thrust created by foundation restraint

To prove the existence of the force T, reference is made to Figs. 25 and 26. Internal forces in the typical rigid frame of Fig. 25(a) are equal to the sum of those present when the frame is made statically determinate by rollers at A' and those due to the final horizontal reaction $H_{A'}$. In the statically determinate condition there are no external horizontal reactions and as a result no thrust exists in member $B'C'$. However, in the indeterminate condition a thrust is induced in $B'C'$ equal to $H_{A'}$.

In a similar manner the frame of Fig. 25(b), assumed to support a thin shell roof, has no horizontal reaction at A when in the statically determinate state. However, an examination of part of the frame as the free body shown in Fig. 26 indicates that resistance must be given to the horizontal components of the T_ϕ-forces. Since there is no horizontal reaction, this resistance is supplied by the frame itself in the form of the internal force T acting in the same plane as the T_ϕ-forces. Since any indeterminate structure can be analyzed by first considering it to be statically determinate, it follows that all cross frames are subject to an internal force equal and opposite to the sum of the horizontal components of the T_ϕ-forces. This force, of course, is superimposed on the thrust produced by the external reactions in the final indeterminate condition.

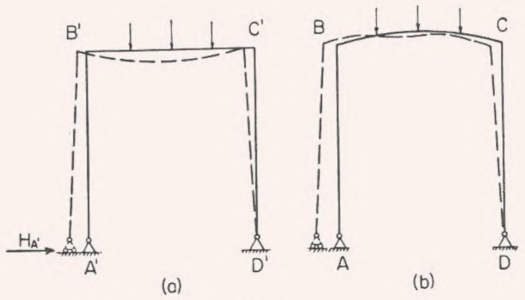


FIG. 25

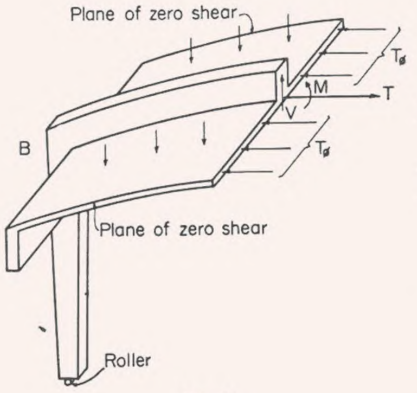


FIG. 26

When the force T acts with an eccentricity e from the centroidal axis of a member, a moment Te is produced in addition to the moment calculated for external loads. If the member is statically indeterminate the angular rotation caused by moment Te produces external reactions.

Computations for fixed-end moments in member BC resulting from the moment Te are tabulated in Table VI. The procedure is based on the method of elastic weights explained in *Analysis of Arches, Rigid Frames and Sewer Sections.** In Table VI, slide rule accuracy is sufficient since end moments produced by the T-force are small when compared with total moments. For practical purposes, fixed-end moments can be taken as being equal to the value of Te at midspan since at this point Te is relatively large and the member BC most flexible. Generally, fixed-end moments due to Te can be approximated in this manner. Table VI is included here only for completeness and as evidence of the validity of this suggested approximation. In the case of an arch rib having constant moment of inertia, fixed-end moments would be equal to the average value of the moment Te. The advisability of estimating fixed-end moments in this manner will depend upon the ratio of Te to the moment due to loads.

In Table VI depths h, Col. (1), of the frame at distances x, Col. (3), from point B are scaled from a drawing having a scale of approximately 1 in. = 3 ft. Col. (2) contains values of coefficient C interpolated linearly in proportion to the x distance from the centerline between 1.70 at B and 1.85 at centerline of span BC and between 1.85 and 1.50 at C. This coefficient when multiplied by I of the rectangular web gives the moment of inertia of the T-section. Instead of the absolute value of a, which is taken as $\frac{ds}{EI}$, Col. (4) gives relative values of $\frac{1}{Ch^3}$. Since ds is equal to zero at B, ℄ and C, no values are listed at these points.

Eccentricity e of the force T with respect to the centroidal axis is listed in Col. (7). With a frame width of 1.50 ft., overhanging flange width of 2.94 ft. and shell thickness of 0.33 ft., the distance y from bottom surface

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

TABLE VI—Determination of Fixed-End Moments Due to Moment Te in Exterior Bay

	h	C	x	$a=\frac{1}{Ch^3}$	ax	ax^2	e	T_ϕ	Cos $(\phi_k-\phi)$	$T=42T_\phi\times$ cos $(\phi_k-\phi)$	$m=-Te$	ma	max
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
B	2.75	1.70	0	—	—	—	0.82	—	0.90	—	—	—	—
1	2.5	1.71	2.0	0.037	0.07	0.2	0.71	−0.9	0.92	− 35	+ 25	+ 0.9	+ 2
2	2.1	1.74	6.0	0.062	0.37	2.2	0.55	−3.0	0.95	−120	+ 66	+ 4.1	+ 24
3	1.8	1.77	10.0	0.097	0.97	9.7	0.43	−4.6	0.98	−189	+ 81	+ 7.9	+ 79
4	1.6	1.80	14.0	0.136	1.90	26.7	0.35	−5.6	0.99	−233	+ 82	+11.1	+156
5	1.5	1.83	18.0	0.162	2.92	52.5	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78	+12.6	+228
℄	1.50	1.85	20.0	—	—	—	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78	—	—
6	1.5	1.81	22.0	0.164	3.61	79.4	0.31	−5.7	1.0	−239	+ 74	+12.1	+267
7	1.9	1.74	26.0	0.084	2.18	56.8	0.47	−4.4	0.99	−183	+ 86	+ 7.2	+187
8	2.6	1.67	30.0	0.034	1.02	30.6	0.76	−2.4	0.98	− 99	+ 75	+ 2.5	+ 77
9	3.8	1.60	34.0	0.011	0.37	12.7	1.29	−0.1	0.95	+ 4	− 5	− 0.1	− 2
10	5.3	1.53	38.0	0.004	0.15	5.7	2.00	+1.7	0.92	+ 66	−132	− 0.5	− 20
C	6.1	1.50	40.0	—	—	—	2.38	+2.0	0.90	+ 76	−181	—	—
			Σ	0.791	13.56	276.5						57.8	998

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

to centroidal axis is:

$$y = \frac{0.75h^2 + 2(2.94\times0.33\times0.167)}{1.5h + 2\times2.94\times0.33} = 0.5h - \frac{0.97h-0.324}{1.5h+1.94}$$

Since T is assumed to act at mid-depth of the flange:

$$e = 0.5h - \frac{0.97h-0.324}{1.5h+1.94} - 0.17$$

Values of T_ϕ in Col. (8) are scaled from Fig. 18. Total tension T is equal to the summation of the horizontal components of the T_ϕ-forces acting between planes of zero tangential shear previously found to be at $\frac{x}{l} = 0.6$. Integrating T_ϕ on both sides of the frame gives:

$$T = 2T_\phi \cos(\phi_k-\phi)\int_0^{30} \sin\frac{\pi x}{l}\,dx$$
$$= \frac{131}{\pi} T_\phi \cos(\phi_k-\phi) = 42\,T_\phi\cos(\phi_k-\phi)$$

Moment produced by this tensile force is equal to the product of T and $-e$ and is tabulated in Col. (11). Values in Cols. (12) and (13) are the products of those in Col. (11) and Cols. (4) and (5) respectively. The summation of these columns times $\frac{12\,ds}{E}$ represents the angular rotation and vertical displacement of joint B with respect to joint C, assuming that the member is free at B and fixed at C. Applying a moment M^F_{BC} and a vertical reaction V_B and setting angular rotation and vertical displacement at B equal to zero gives respectively:

$$0.791\,M^F_{BC} + 13.56\,V_B + 57.8 = 0$$
$$13.56\,M^F_{BC} + 276.5\,V_B + 998 = 0$$

The solution of these simultaneous equations gives:

$$M^F_{BC} = -70 \text{ ft. kips}$$
$$V_B = -0.17 \text{ kips}$$

and by statics:

$$M^F_{CB} = -70-(40\times0.17) = -77 \text{ ft. kips}$$

As stated earlier, an approximate value of -74 ft. kips, the midspan moment, could have been used. Therefore, for the interior bay fixed-end moments are taken as -82 ft. kips, the value of midspan moment given in Table VII. Thrust, eccentricity and moment of the force T at various points between joint C and the centerline of span CD are tabulated in Table VII. Eccentricity is taken directly from Table VI while values of T_ϕ are scaled from Fig. 12.

End moments resulting from the T-forces are computed by moment distribution as shown in Table VIII. Total moments equal to the sum of end moments due to vertical loads and T-forces are likewise included in Table VIII.

TABLE VII—T-FORCE IN INTERIOR BAY

x	e	T_ϕ	Cos $(\phi_k-\phi)$	$T=42T_\phi\times$ cos $(\phi_k-\phi)$	$m=-Te$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	2.38	+2.0	0.90	+ 76	−181
2	2.00	+1.7	0.92	+ 66	−132
6	1.29	−0.3	0.95	− 12	+ 16
10	0.76	−2.8	0.98	−115	+ 87
14	0.47	−4.9	0.99	−204	+ 96
18	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78
20	0.31	−6.3	1.0	−265	+ 82

TABLE VIII—MOMENT DISTRIBUTION DUE TO ECCENTRICITY OF T_ϕ-FORCES

	B	C		D
Carry-over factor	−0.95	−0.58	−0.82	−0.82
Distribution factor	0.48	0.35	0.52	0.52
Fixed-end moments	−70	−77	−82	−82
1st Distribution	+34	—	—	—
Carry over	—	−32	—	—
2nd Distribution		+11	−17	−17
End moment	− 36	− 98	− 99	− 99
End moment—Table V	−421	−1275	−1142	−1142
Total moment	−457	−1373	−1241	−1241

With end moments determined, moment at any other point in the frame is found by statics. For example, moment at midspan of the interior bay is:

$$M = -1241 + (5.3\times0.125 + 1.04\times0.0208)40^2 + 82$$
$$= -64 \text{ ft. kips}$$

in which 0.0208 is the simple beam centerline moment coefficient for parabolic haunch loads. In the above expression the moment +82 ft. kips due to the eccentric T-force is included. Because the distance center to center of columns is used, midspan moment should be modified to take into account the width of columns. Vertical reactions at columns CH and DG are equal to $\left(5.3 + \frac{1.04}{3}\right)\times 20 = 113$ kips. In accordance with recommendations in Section 13 of *Continuity in Concrete Building Frames* the modified moment is:

$$M = -64 - \frac{113\times2}{6} = -102 \text{ ft. kips}$$

Tensile thrust at the section is:

$$N = -265 + \frac{457}{17.8} + \frac{1373-1241}{19.1} = -232 \text{ kips}$$

Because of this large thrust, tension can be assumed to exist over the entire cross section and total required steel area is:

$$\frac{232{,}000}{20{,}000} = 11.6 \text{ sq.in.}$$

This total area is apportioned between top and bottom bars by making the centroid of reinforcement coincide with the line of action of thrust. Distance from bottom of the beam to lower reinforcement is assumed to be 1¼ in. or 0.10 ft. and to top reinforcement 1.22 ft. As shown in Fig. 27, eccentricity of thrust N measured from the centroid of bottom reinforcement is:

$$0.31 + 0.17 - 0.10 + \frac{102}{232} = 0.82 \text{ ft.}$$

Top reinforcement A^t_s is determined by taking moments of internal forces about the bottom layer:

$$0.82\,N = A^t_s \times 1.12 \times 20{,}000$$

from which:

$$A^t_s = \frac{11.6\times0.82}{1.12} = 8.5 \text{ sq.in.}$$
$$A^b_s = 11.6 - 8.5 = 3.1 \text{ sq.in.}$$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

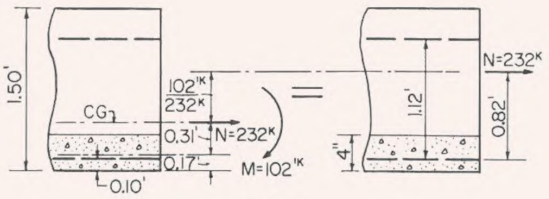


FIG. 27

In the exterior bay, vertical reaction at the face of column *CH* is:

$$V_C = \left(5.3+1.04\times\frac{7}{24}+0.28\times\frac{1}{24}\right)20+\frac{1373-457}{40}$$
$$= 112+23 = 135 \text{ kips}$$

In the above expression, reactions of the haunch loads of member *BC* are equal to $\frac{7}{24}$ and $\frac{1}{24}$ of $W\times\frac{l}{2}$. Taking into account the *T*-force and the reduction because of the use of the clear span, moment at the column face is:

$$M = -1373-157+\frac{135\times2}{3} = -1440 \text{ ft. kips}$$

Interpolating for the value of T at $x = 39$ ft., thrust at the section is:

$$N = 71+26 = 97 \text{ kips}$$

Reinforcement is determined for this moment and thrust as illustrated in Example 7 of the *Reinforced Concrete Design Handbook*. At midspan of exterior bay:

$$M = -(1373+457)0.5+[5.3\times0.125$$
$$+0.0104(1.04+0.28)]40^2+78-\frac{135\times2}{6}$$
$$= +200 \text{ ft. kips}$$
$$N = -252+26 = -226 \text{ kips}$$

Example 8 of the *Handbook* may be followed for design of reinforcement. The small amount of compression reinforcement required at midspan can be supplied by extending a few bars from the top negative reinforcement. It is desirable to have some of these bars continuous in any case since a large tensile force exists throughout most of the frame.

Moment and thrust at joint *B* are obtained in a conventional manner since *T* is zero at this point.

As pointed out in ASCE Manual No. 31, strains in a frame over which a shell is continuous induce a longitudinal moment M_x at the junction of shell and frame equal to:

$$M_x = -\frac{t^2}{3.56}f_c \qquad (23)$$

in which f_c is the stress in the frame considered to be a homogeneous section. For example, at midspan of the interior bay:

$h = 18$ in.
$b' = 18$ in.
$C = 1.85$
$b-b' = 2.94\times2\times12 = 70.6$ in.
$M = -102$ ft. kips
$N = -232$ kips

The distance y_b from centroid of section to middle of shell equals 0.31 ft. or 3.7 in. Therefore:

$$\frac{I}{y_b} = \frac{18^4\times1.85}{12\times(-3.7)} = -4380 \text{ in.}^3$$
$$A = 18^2+4\times70.6 = 606 \text{ in.}^2$$

and at mid-depth of the shell:

$$f_c = -\left(\frac{-102\times12000}{-4380}-\frac{232\times1000}{606}\right)$$
$$= +103 \text{ psi (tension)}$$

From equation (23):

$$M_x = -\frac{4^2\times103}{3.56} = -460 \text{ ft. lb. per ft.}$$

At the face of column *CH* with:

$h = 68$ in.
$b' = 18$ in.
$C = 1.50$
$b-b' = 70.6$ in.
$y_b = 2.17$ ft. or 26.0 in.
$M = -1440$ ft. kips
$N = +97$ kips

then:

$$\frac{I}{y_b} = \frac{68^3\times18\times1.50}{12\times(-26.0)} = -27{,}200 \text{ in.}^3$$
$$A = 68\times18+70.6\times4 = 1506 \text{ in.}^2$$
$$f_c = -\left(\frac{-1440\times12000}{-27{,}200}+\frac{97\times1000}{1506}\right)$$
$$= -700 \text{ psi}$$

and:

$$M_x = -\frac{4^2\times(-700)}{3.56} = +3{,}100 \text{ ft. lb. per ft.}$$

At crown of exterior bay:

$$\frac{I}{y_b} = -4{,}380 \text{ in.}^3$$
$A = 606$ in.^{2}
$M = +200$ ft. kips
$N = -226$ kips

Therefore:

$$f_c = -\left(\frac{200\times12000}{-4380}-\frac{226\times1000}{606}\right)$$
$$= +921 \text{ psi}$$

from which:

$$M_x = -\frac{4^2\times921}{3.56} = -4100 \text{ ft. lb. per ft.}$$

M_x is computed in a similar manner at other points.

M_x is a local moment and decreases rapidly. At a distance of $\frac{2.94}{2}$ ft. or about 1.5 ft. from the junction of shell and frame its value is reduced by 76 per cent and practically diminishes to zero at 4 ft. As a result, only short bars are needed to handle the induced stresses. In providing the required steel area it may be advantageous in some cases to utilize previously provided longitudinal reinforcement if it is not already stressed to its maximum value. Relatively large values of M_x at the crown of the exterior bay and at the face of interior columns indicate that the shell should be thickened to about 6 in. at the frame, tapering to 4 in. within a distance of 3 ft.

Portland Cement Association · 33 West Grand Avenue, Chicago, Illinois 60610

Printed in U.S.A.

R/C 30

ST 77

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

G अलामिलो सेतु का आँकड़ा-समुच्चय

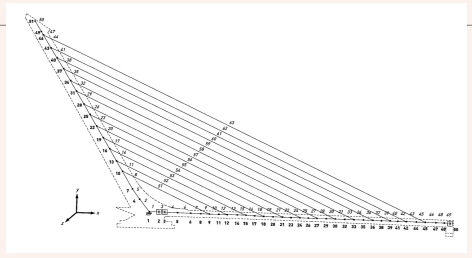
सारांश

Pollalis, 1999 ने कैलात्रावा द्वारा निर्मित अलामिलो सेतु (§15.6.1.3) की निर्माण-प्रक्रिया का विस्तृत वर्णन करने वाली एक उत्कृष्ट पुस्तक प्रकाशित की। उसमें लेखक ने सेतु के परिमित अवयव विश्लेषण के लिए आवश्यक आँकड़ा-समुच्चय प्रकाशित किया, विशेषतः: नोडीय निर्देशांक, अवयव संयोजकता और गुण, परिसीमा प्रतिबंध तथा भारण।

जो पाठक किसी सरल लिखित कोड (जैसे §I.2.7 में सूचीबद्ध कोड) से सेतु का प्रतिरूप बनाना चाहते हैं, उनके लिए ये आँकड़े यहाँ पुनः प्रस्तुत किए गए हैं।

भार स्थितियों की सूची (सारणी G.4) भी विशेष रुचि की है, क्योंकि पाठक संभवतः उन विभिन्न प्रकार के भारों से पूरी तरह परिचित न हों जिनका प्रतिरोध किसी संरचना को करना चाहिए।





प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका G.1: अलामिलो के नोडीय निर्देशांक (Pollalis, 1999)

#	X	y	z	नोड	x	y	z
1	1.00	13.50	0.00	27	113.60	12.12	0.00
2	7.61	13.30	0.00	28	-44.95	84.33	0.00
3	11.65	13.18	0.00	29	119.57	12.06	0.00
4	-5.58	21.57	0.00	30	125.54	12.00	0.00
5	19.72	12.94	0.00	31	-49.47	91.73	0.00
6	28.43	12.68	0.00	32	131.53	11.93	0.00
7	-10.28	28.29	0.00	33	137.52	11.87	0.00
8	35.64	12.50	0.00	34	-54.00	99.12	0.00
9	42.85	12.32	0.00	35	143.49	11.80	0.00
10	-17.55	39.82	0.00	36	149.45	11.74	0.00
11	48.99	12.20	0.00	37	-58.52	106.52	0.00
12	55.15	12.09	0.00	38	155.41	11.68	0.00
13	-22.10	47.23	0.00	39	161.37	11.62	0.00
14	60.86	12.15	0.00	40	-63.04	113.92	0.00
15	66.58	12.22	0.00	41	167.33	11.56	0.00
16	-26.65	54.65	0.00	42	173.30	11.49	0.00
17	72.21	12.33	0.00	43	-67.56	121.32	0.00
18	77.83	12.43	0.00	44	179.30	11.43	0.00
19	-31.19	62.04	0.00	45	185.31	11.36	0.00
20	83.79	12.38	0.00	46	-72.10	128.76	0.00
21	89.75	12.33	0.00	47	191.70	11.29	0.00
22	-35.75	69.46	0.00	48	197.70	11.23	0.00
23	95.71	12.28	0.00	49	-73.43	130.94	0.00
24	101.67	12.22	0.00	50	201.00	11.20	0.00
25	-40.34	76.89	0.00	51	-78.21	138.75	0.00
26	107.64	12.17	0.00				

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका G.2: अलामिलो के सदस्य-गुण (Pollalis, 1999)

#	i	j	A mm^2	I_Z m^4	I_Y m^4	J m^4	#	i	j	A mm^2	I_Z m^4	I_Y m^4	J m^4
तोरण							पुल-पट्ट						
2	1	4	86.06	1048.40	524.44	721.30	1	1	2	82.24	672.00	946.30	92.90
5	4	7	68.33	625.90	423.43	424.70	3	2	3	60.99	327.80	724.50	92.90
8	7	10	62.90	512.70	374.38	321.83	4	3	5	40.30	95.92	572.90	92.90
11	10	13	56.80	428.90	354.31	293.87	6	5	6	33.29	61.03	449.80	89.93
14	13	16	54.15	393.20	334.82	267.32	7	6	8	33.37	68.44	371.83	69.83
17	16	19	51.71	361.73	315.92	242.20	9	8	9	26.22	61.60	304.29	49.74
20	19	22	48.95	327.90	297.58	218.45	10	9	11	17.02	41.47	248.56	39.64
23	22	25	46.57	300.05	279.78	196.11	12	11	12	14.22	33.91	233.18	34.90
26	25	28	53.29	278.64	268.43	175.12	13	12	14	12.84	31.61	232.17	32.50
29	28	31	50.96	253.40	257.61	155.49	15	14	15	11.70	29.69	220.82	31.60
32	31	34	48.65	229.90	241.41	137.19	16	15	17	10.70	26.91	219.00	31.60
35	34	37	46.04	205.01	225.72	120.20	18	17	18	9.46	21.67	217.51	31.60
38	37	40	43.78	184.90	210.54	104.51	19	18	20	9.46	21.67	217.51	31.60
41	40	43	41.23	163.75	195.85	90.07	21	20	21	9.13	21.12	216.04	28.80
44	43	46	39.02	146.72	181.63	76.89	22	21	23	8.79	20.57	214.57	26.10
47	46	49	37.46	135.37	167.89	64.91	24	23	24	8.79	20.57	214.57	26.10
50	49	51	37.46	135.37	167.89	64.91	25	24	26	8.93	21.04	214.70	26.50
केबल							27	26	27	8.93	21.04	214.70	26.50
51	9	10	0.00	0.00	0.00	0.00	28	27	29	8.93	21.04	214.70	26.50
52	12	13	0.00	0.00	0.00	0.00	30	29	30	8.93	21.04	214.70	26.50
53	15	16	0.00	0.00	0.00	0.00	31	30	32	8.93	21.04	214.70	26.50
54	18	19	0.00	0.00	0.00	0.00	33	32	33	9.26	21.63	216.17	29.30
55	21	22	0.00	0.00	0.00	0.00	34	33	35	9.60	22.15	217.64	32.20
56	24	25	0.00	0.00	0.00	0.00	36	35	36	9.60	22.15	217.64	32.20
57	27	28	0.00	0.00	0.00	0.00	37	36	38	9.60	22.15	217.64	32.20
58	30	31	0.00	0.00	0.00	0.00	39	38	39	9.60	22.15	217.64	32.20
59	33	34	0.00	0.00	0.00	0.00	40	39	41	9.60	22.15	217.64	32.20
60	36	37	0.00	0.00	0.00	0.00	42	41	42	9.60	22.15	217.64	32.20
61	39	40	0.00	0.00	0.00	0.00	43	42	44	9.46	21.67	217.51	31.60
62	42	43	0.00	0.00	0.00	0.00	45	44	45	9.46	21.67	217.51	31.60
63	45	46	0.00	0.00	0.00	0.00	46	45	47	9.46	21.67	217.51	31.60
							48	47	48	9.46	21.67	217.51	31.60
							49	48	50	9.46	21.67	217.51	31.60

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका G.3: अलामिलो के परिसीमा प्रतिबंध (Pollalis, 1999)

	विस्थापन			घूर्णन		
#	X	Y	Z	X	Y	Z
1	स्थिर	स्थिर	स्थिर	स्थिर	स्थिर	स्थिर
2	मुक्त	स्थिर	स्थिर	स्थिर	मुक्त	मुक्त
3	मुक्त	स्थिर	स्थिर	स्थिर	मुक्त	मुक्त
50	मुक्त	स्थिर	स्थिर	स्थिर	मुक्त	मुक्त

प्रति प्रकाशन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका G.4: अलामिलो के भार-संयोजन (Pollalis, 1999)

	1. मृत और स्थायी भार
1.1	तोरण के मृत और स्थायी भार, W_{pylon}
1.2	पुल-पट्ट के मृत और स्थायी भार, W_{deck}
1.3	तन्य केबलों का पश्च-तनन, T_{cable}
	2. चल भार
2.1	पूरे पुल-पट्ट और पैदल-पथ पर 4 KPa का समान भार
2.2	इस्पाती पेटी में अधिकतम मरोड़ उत्पन्न करने के लिए आधे पुल-पट्ट और आधे पैदल-पथ पर 4 KPa का समान भार
2.3	नोड 6 पर 600 kN ट्रक भार [अक्ष 44; पूर्वी अंत्याधार से 172 m], उत्केंद्रता 13.30 m
2.4	नोड 9 पर 600 kN ट्रक भार [अक्ष 41; पूर्वी अंत्याधार से 160 m], उत्केंद्रता 13.30 m
2.5	नोड 15 पर 600 kN ट्रक भार [अक्ष 35; पूर्वी अंत्याधार से 136 m], उत्केंद्रता 13.30 m
2.6	नोड 21 पर 600 kN ट्रक भार [अक्ष 29; पूर्वी अंत्याधार से 104 m], उत्केंद्रता 13.30 m
2.7	नोड 27 पर 600 kN ट्रक भार [अक्ष 23; पूर्वी अंत्याधार से 88 m], उत्केंद्रता 13 .30 m
2.8	नोड 33 पर 600 kN ट्रक भार [अक्ष 17; पूर्वी अंत्याधार से 64 m], उत्केंद्रता 13 .30 m
2.9	नोड 39 पर 600 kN ट्रक भार [अक्ष 11; पूर्वी अंत्याधार से 40 m], उत्केंद्रता 13.30 m
2.10	नोड 45 पर 600 kN ट्रक भार [अक्ष 5; पूर्वी अंत्याधार से 16 m], उत्केंद्रता 13.30 m
	3. तापीय भार
3.1	केबलों के तापमान में 26°C का समान परिवर्तन
3.2	तोरण के तापमान में 13.5°C का समान परिवर्तन
3.3	पुल-पट्ट के तापमान में 23.3°C का समान परिवर्तन
3.4	पुल-पट्ट में तापमान का 21°C रैखिक परिवर्तन [निचली से ऊपरी सतह]
3.5	तोरण में तापमान का 4.5°C रैखिक अनुदैर्ध्य परिवर्तन
3.6	तोरण में तापमान का 5.1°C रैखिक अनुप्रस्थ परिवर्तन
	4. स्थैतिक पवन भार
4.1	अनुदैर्ध्य पवन भार
4.2	अनुप्रस्थ पवन भार
	5. तोरण की नींव का घूर्णन
5.1	अनुदैर्ध्य दिशा में 0.25% (0.225°) घूर्णन; अधिकतम पूर्वानुमानित घूर्णन 0.06°
5.2	अनुप्रस्थ दिशा में 0.10% (0.090°) घूर्णन; अधिकतम पूर्वानुमानित घूर्णन 0.026°
	6. स्थैतिक भूकंपीय भार
6.1	तोरण पर अनुदैर्ध्य भूकंपीय भार (मृत भार का 3%)
6.2	तोरण पर अनुप्रस्थ भूकंपीय भार (मृत भार का 3%)

प्रति प्रकाशन

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

H आइडेंटिकॉन: दृश्य हैशिंग

यह परिशिष्ट तथा इससे संबद्ध MATLAB®(§I.8.1) कोड पूर्णतः एक AI उपकरण (Anthropic, 2025) द्वारा उत्पन्न किए गए हैं।

सारांश

यह दस्तावेज़ आइडेंटिकॉन की व्यापक व्याख्या प्रस्तुत करता है। आइडेंटिकॉन हैश मानों के ऐसे दृश्य निरूपण हैं जो अद्वितीय और सहज रूप से पहचाने जा सकने वाले प्रतिरूप निर्मित करते हैं। इसमें आइडेंटिकॉन-निर्माण कलनविधियों के सैद्धांतिक आधार तथा हमारे MATLAB प्रोग्राम के विशिष्ट कार्यान्वयन-विवरण दोनों सम्मिलित हैं। यह भी बताया गया है कि पुस्तक के अध्यायों को दृश्य रूप में निरूपित करने के लिए आइडेंटिकॉन का उपयोग कैसे किया जा सकता है, जिससे अध्याय-चिह्नक अथवा पहचानकर्ता के रूप में विशिष्ट दृश्य "अंगुलिचिह्न" प्राप्त होते हैं। गणितीय सिद्धांतों और व्यावहारिक कार्यान्वयन, दोनों पक्षों की चर्चा द्वारा आइडेंटिकॉन-निर्माण प्रक्रिया की संपूर्ण समझ प्रदान की गई है।

H.1 आइडेंटिकॉन का परिचय 2502
H.2 आइडेंटिकॉन-निर्माण कलनविधियाँ 2503
H.3 GitHub और Stack Exchange के आइडेंटिकॉन कार्यान्वयनों की तुलना 2505
H.4 हमारा MATLAB कार्यान्वयन 2505
H.5 मूल कोड खंड 2508
H.6 प्रोग्राम का उपयोग 2509
H.7 लाभ और अनुप्रयोग 2509
H.8 निष्कर्ष 2510

भाग 3: कोड कार्यान्वयन

H.1 आइडेंटिकॉन का परिचय

आइडेंटिकॉन हैश मानों के दृश्य निरूपण हैं। सामान्यतः इनका उपयोग ऐसी अद्वितीय और पहचाने जा सकने वाली छवियाँ बनाने के लिए किया जाता है जिनके लिए हस्तचालित छवि-निर्माण या भंडारण आवश्यक नहीं होता। आरंभ में ऑनलाइन समुदायों में उपयोगकर्ता-अवतारों के लिए विकसित आइडेंटिकॉन अब उन विविध संदर्भों में प्रयुक्त होते हैं जहाँ पाठ्य आँकड़ों का दृश्य "अंगुलिचिह्न" उपयोगी हो।

आइडेंटिकॉन की प्रमुख विशेषताएँ हैं:

- **नियतात्मक निर्माण**: समान निवेश-पाठ सदैव समान प्रतिरूप उत्पन्न करता है
- **दृश्य विशिष्टता**: भिन्न निवेश दृश्यतः भिन्न प्रतिरूप उत्पन्न करते हैं
- **स्वचालित निर्माण**: मानव द्वारा अभिकल्पन-हस्तक्षेप आवश्यक नहीं है
- **न्यूनतम भंडारण**: केवल स्रोत-पाठ को भंडारित करना होता है, छवि को नहीं

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

लोकप्रिय कार्यान्वयनों में GitHub के उपयोगकर्ता-अवतार और Stack Exchange के उपयोगकर्ता-पहचानकर्ता सम्मिलित हैं, जो उपयोगकर्ता-नाम अथवा ईमेल पते के आधार पर विशिष्ट प्रतिरूप उत्पन्न करते हैं।

पुस्तक-प्रकाशन में अनुप्रयोग

पुस्तक-प्रकाशन के संदर्भ में आइडेंटिकॉन निम्न भूमिकाएँ निभा सकते हैं:

- दृश्य अध्याय-चिह्नक
- समान विषयों को दृश्यतः अलग करने वाले विषय-वस्तु अंगुलिचिह्न
- विषय-वस्तु का सूक्ष्म संकेत देने वाले अलंकरणात्मक अवयव
- अध्यायों को दृश्य रूप से पहचानने में पाठकों की सहायता करने वाले मार्गदर्शक संकेत

प्रत्येक अध्याय-शीर्षक से एक आइडेंटिकॉन उत्पन्न करने पर उस अध्याय की विषय-वस्तु से संबद्ध अद्वितीय दृश्य हस्ताक्षर प्राप्त होता है। इससे पुस्तक में दृश्य रुचि बढ़ने के साथ पहचान और मार्गदर्शन भी सुगम होते हैं।

H.2 आइडेंटिकॉन-निर्माण कलनविधियाँ

मूल कलनविधि का अवलोकन

आइडेंटिकॉन-निर्माण की मूल प्रक्रिया में नियतात्मक चरणों की एक शृंखला द्वारा पाठ्य निवेश को दृश्य प्रतिरूप में परिवर्तित किया जाता है:

Algorithm 1 Identicon Generation Algorithm

Require: Text string (chapter title, identifier)
Ensure: Visual pattern (identicon)
Generate a cryptographic hash of the input text
Define a grid (typically 5×5)
Use segments of the hash to determine cell patterns:
    a. Which cells contain shapes (on/off state)
    b. What shapes to use in active cells
    c. What colors to apply to the shapes
Apply symmetry (usually by mirroring half the grid)
Render the resulting pattern as an image

हैश फलन

हैश फलन आइडेंटिकॉन-निर्माण का आधार है; यह परिवर्ती लंबाई के पाठ को निश्चित लंबाई के मान-अनुक्रम में परिवर्तित करता है। आइडेंटिकॉन के लिए प्रभावी हैश फलन में निम्न गुण होने चाहिए:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **नियतात्मकता**: समान निवेश सदैव समान निर्गम उत्पन्न करता है
- **हिमस्खलन प्रभाव**: निवेश में छोटे परिवर्तन निर्गम में बड़े परिवर्तन उत्पन्न करते हैं
- **एकसमान वितरण**: निर्गम मान संभावित परिसर में समान रूप से वितरित होते हैं

व्यावसायिक कार्यान्वयनों में MD5, SHA-1 या SHA-256 जैसे क्रिप्टोग्राफिक हैश फलन सामान्यतः प्रयुक्त होते हैं; शैक्षिक प्रयोजन के लिए हमारा MATLAB प्रोग्राम अपेक्षाकृत सरल स्वनिर्मित हैश फलन का उपयोग करता है:

```
function hash_values = simpleHash(str)
    % Sum ASCII values with position weighting
    hash_values = zeros(1, 32);
    for i = 1:length(str)
        char_code = double(str(i));
        for j = 1:min(32, length(str))
            position_factor = mod(i*j, 32) + 1;
            hash_values(position_factor) = mod(hash_values(position_factor) + char_code
    * i, 256);
        end
    end
end
```

Listing H.1: Simple Hash Function

यह फलन 0 और 255 के बीच मानों वाला 32-अवयवी सरणी बनाता है, जिसमें निवेश स्ट्रिंग के वर्ण-कूट और उनकी स्थितिगत सूचना दोनों समाहित रहते हैं।

प्रतिरूप मानचित्रण

प्रतिरूप-मानचित्रण प्रक्रिया हैश मानों को सामान्यतः 5×5 के दृश्य जाल में परिवर्तित करती है। इसमें निम्न चरण सम्मिलित हैं:

1. **जाल आरंभीकरण**: वांछित आकार का रिक्त जाल बनाना
2. **कोष्ठिका-मान नियतन**: हैश मानों को जाल-कोष्ठिका मानों में मानचित्रित करना
3. **सममिति का प्रयोग**: दृश्य संतुलन के लिए जाल के एक भाग का प्रतिबिंब बनाना

GitHub जैसे कार्यान्वयनों में प्रत्येक कोष्ठिका केवल “चालू” अथवा “बंद” (द्विआधारी) होती है। हमारे जैसे अधिक परिष्कृत संस्करणों में प्रत्येक कोष्ठिका में उसके अनुरूप हैश मान के आधार पर भिन्न आकृतियाँ हो सकती हैं।

दृश्य प्रतिपादन

अंतिम चरण अमूर्त प्रतिरूप को दृश्य निरूपण में परिवर्तित करता है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **आकृति चयन**: कोष्ठिका मानों को विशिष्ट आकृतियों में परिवर्तित करना
- **रंग का प्रयोग**: हैश से व्युत्पन्न रंग लागू करना
- **माप और रिक्ति**: स्पष्टता के लिए दृश्य गुणों को समायोजित करना

H.3 GitHub और Stack Exchange के आइडेंटिकॉन कार्यान्वयनों की तुलना

विभिन्न मंच आइडेंटिकॉन को सूक्ष्म भिन्नताओं के साथ कार्यान्वित करते हैं:

GitHub का कार्यान्वयन

GitHub एक सरल किंतु प्रभावी विधि अपनाता है:

- 5×5 जाल (25 कोष्ठिकाएँ)
- द्विआधारी प्रतिरूप (प्रत्येक कोष्ठिका भरी या रिक्त)
- कृषैतिज सममिति (बाएँ आधे का दाएँ आधे में प्रतिबिंब)
- हैश से व्युत्पन्न एकल रंग तथा श्वेत पृष्ठभूमि

इसके लिए केवल 15 बिट सूचना (आधा जाल और मध्य स्तंभ) तथा रंग-संबंधी आँकड़े आवश्यक होते हैं।

Stack Exchange का कार्यान्वयन

Stack Exchange (जिसमें Stack Overflow भी सम्मिलित है) अधिक विविध विधि अपनाता है:

- प्रत्येक कोष्ठिका में अनेक संभावित आकृतियाँ (वर्ग, त्रिभुज)
- एकल रंग-योजना
- रंगीन आकृतियों सहित हल्की पृष्ठभूमि
- कृषैतिज सममिति

हमारा कार्यान्वयन दोनों विधियों से प्रेरणा लेकर अतिरिक्त सुविधाएँ जोड़ता है।

H.4 हमारा MATLAB कार्यान्वयन

हमारा MATLAB प्रोग्राम निम्न सुविधाओं सहित आइडेंटिकॉन उत्पन्न करता है:

प्रोग्राम का अवलोकन

प्रोग्राम दो निवेश ग्रहण करता है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- निर्गम PDF के लिए एक फ़ाइल-नाम
- आइडेंटिकॉन उत्पन्न करने के लिए प्रयुक्त अध्याय-शीर्षक

यह दो फलकों वाली छवि उत्पन्न करता है, जिसमें:

- रंगीन आकृतियों वाला प्रतिपादित आइडेंटिकॉन (बाईं ओर)
- अंतर्निहित मान दर्शाने वाला संख्यात्मक प्रतिरूप आव्यूह (दाईं ओर)

शीर्षक में अध्याय-शीर्षक और उसके हैश का एक भाग दोनों प्रदर्शित होते हैं, जिससे निर्माण-प्रक्रिया की अनुरेखणीयता बनी रहती है।

प्रोग्राम की प्रमुख सुविधाएँ

1. **अनेक आकृति-प्रकार**: सरल कार्यान्वयनों के विपरीत, हमारा प्रोग्राम प्रत्येक कोष्ठिका के लिए पाँच भिन्न अवस्थाओं का उपयोग करता है:
    - 0: रिक्त कोष्ठिका (कोई आकृति नहीं)
    - 1: गोल कोनों वाला वर्ग
    - 2: त्रिभुज (ऊपरी-बाएँ से निचले-दाएँ)
    - 3: त्रिभुज (ऊपरी-दाएँ से निचले-बाएँ)
    - 4: वृत्त
2. **पूरक रंग-योजना**: एकल रंग के स्थान पर हैश के आधार पर अनेक पूरक रंग उत्पन्न किए जाते हैं, जिससे प्रतिरूप अधिक आकर्षक और विशिष्ट बनते हैं।
3. **पारदर्शी पृष्ठभूमि**: निर्गम में पारदर्शी पृष्ठभूमि प्रयुक्त होती है, अतः वह विभिन्न दस्तावेज़-शैलियों में समेकन के लिए उपयुक्त है।
4. **द्वैध दृश्यांकन**: दृश्य आइडेंटिकॉन और उसके संख्यात्मक निरूपण का साथ-साथ प्रदर्शन मानचित्रण प्रक्रिया को प्रत्यक्ष बनाकर शैक्षिक उपयोगिता प्रदान करता है।
5. **PDF निर्गम**: प्रोग्राम आइडेंटिकॉन को प्रथम निवेश प्राचल के अनुसार नामित PDF फ़ाइल में सीधे सहेजता है।

विस्तृत कार्यान्वयन प्रक्रिया

हैश-निर्माण और प्रतिरूप-मानचित्रण

हैश और जाल-मानों के बीच संबंध निम्न विशिष्ट प्रक्रिया का अनुसरण करता है:

1. **हैश निर्माण**:
    - `simpleHash` फलन अध्याय-शीर्षक को 32-अवयवी सरणी में परिवर्तित करता है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- वर्ण-कूट और स्थितियों पर आधारित मान 0 से 255 तक होते हैं

2. **प्रतिरूप आव्यूह का निर्माण**:
   - 5×5 आव्यूह को शून्यों से आरंभ किया जाता है
   - बाएँ आधे की प्रत्येक कोष्ठिका (और आकार विषम होने पर मध्य स्तंभ) के लिए:

     ```
     hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1
     pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5)
     ```

   - मापांक का उपयोग कर प्रत्येक मान को 0–4 के परिसर में मानचित्रित किया जाता है
   - दायाँ आधा बाएँ आधे का प्रतिबिंब होता है

कोष्ठिका-मानचित्रण का उदाहरण

स्थिति (i,j) पर किसी विशिष्ट कोष्ठिका के लिए:

1. हैश सूचकांक की गणना करें:
   $hash_idx = mod((i-1) \times size_matrix + j, 32) + 1$
2. उदाहरणार्थ, 5×5 जाल में कोष्ठिका (2,3) के लिए:
   $hash_idx = mod((2-1) \times 5 + 3, 32) + 1 = 8$
3. उस सूचकांक पर हैश मान प्राप्त करें:
   $hash_value = hash_values(hash_idx)$
4. यदि $hash_values(8) = 173$ है, तो 173 का उपयोग किया जाता है
5. मापांक द्वारा आकृति-प्रकार में मानचित्रित करें:
   $pattern(i,j) = mod(hash_value, 5) = mod(173, 5) = 3$
6. कोष्ठिका (2,3) को आकृति-प्रकार 3 (ऊपरी-दाएँ से निचले-बाएँ त्रिभुज) प्राप्त होता है

रंग-निर्माण

रंग भी हैश से व्युत्पन्न होते हैं:

1. प्रथम कुछ हैश मानों से आधार वर्ण की गणना करें:
   $base_hue = mod(sum(hash_values(1:3)), 360)/360$
2. वर्ण को स्थानांतरित कर पूरक रंग उत्पन्न करें:

```
colors = [
    hsv2rgb([mod(base_hue, 1), 0.8, 0.9]);          % Primary
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.25, 1), 0.7, 0.9]);  % Complement 1
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.5, 1), 0.8, 0.8]);   % Complement 2
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.75, 1), 0.7, 0.85])  % Complement 3
];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. स्थिति और मान के आधार पर कोष्ठिकाओं को रंग नियत करें:
   $color_idx = mod(i \times j + value, 4) + 1$

H.5 मूल कोड खंड

निम्न कोड खंड हमारे कार्यान्वयन के प्रमुख भागों को दर्शाते हैं:

प्रतिरूप-निर्माण

```
% Fill half the pattern with values from the hash
for i = 1:size_matrix
    for j = 1:floor(size_matrix/2)
        hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);

        % Mirror for symmetry
        pattern(i, size_matrix-j+1) = pattern(i,j);
    end

    % Middle column for odd-sized grid
    if mod(size_matrix, 2) == 1
        j = ceil(size_matrix/2);
        hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);
    end
end
```

Listing H.2: Pattern Generation from Hash

आकृति प्रतिपादन

```
case 4 % Circle
    center_r = (row_start + row_end) / 2;
    center_c = (col_start + col_end) / 2;
    radius = (row_end - row_start) / 2 * 0.9; % 90% of half cell size

    for r = row_start:row_end
        for c = col_start:col_end
            distance = sqrt((r - center_r)^2 + (c - center_c)^2);
            if distance <= radius
                identicon(r, c, :) = color;
            end
        end
    end
```

Listing H.3: Shape Rendering Example (Circle)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

H.6 प्रोग्राम का उपयोग

स्क्रिप्ट चलाना

प्रोग्राम का उपयोग करने के लिए:

1. MATLAB स्क्रिप्ट को `generateIdenticon.m` नाम से सहेजें
2. MATLAB खोलें और स्क्रिप्ट वाली निर्देशिका में जाएँ
3. MATLAB कमांड विंडो में `generateIdenticon` लिखकर स्क्रिप्ट चलाएँ
4. संकेत मिलने पर वांछित फ़ाइल-नाम प्रविष्ट करें (उदाहरणार्थ, “C-14”)
5. संकेत मिलने पर अध्याय-शीर्षक प्रविष्ट करें (उदाहरणार्थ, “Performance Based Earthquake Engineering”)
6. प्रोग्राम आइडेंटिकॉन उत्पन्न कर उसे PDF के रूप में सहेजेगा (उदाहरणार्थ, “C-14.pdf”)

निर्गम को समझना

उत्पन्न PDF में निम्न सामग्री होती है:

- अध्याय-नाम और उसके हैश मान का एक भाग दर्शाने वाला शीर्षक
- बायाँ फलक: रंगीन आकृतियों वाला दृश्य आइडेंटिकॉन
- दायाँ फलक: यह दर्शाने वाला संख्यात्मक आवृयूह (0–4) कि किन मानों से कौन-सी आकृतियाँ बनीं

यह द्वैध निरूपण यह समझने में सहायक है कि अध्याय-शीर्षक किस प्रकार अद्वितीय दृश्य प्रतिरूप में परिवर्तित होता है।

H.7 लाभ और अनुप्रयोग

आइडेंटिकॉन के लाभ

- **अद्वितीयता**: भिन्न अध्याय-शीर्षक दृश्यतः विशिष्ट प्रतिरूप उत्पन्न करते हैं
- **पुनरुत्पादकता**: समान शीर्षक सदैव समान प्रतिरूप उत्पन्न करता है
- **दक्षता**: छवियों को हस्तचालित रूप से बनाने या भंडारित करने की आवश्यकता नहीं होती
- **मापनीयता**: अध्यायों की किसी भी संख्या के लिए अद्वितीय आइडेंटिकॉन उत्पन्न किए जा सकते हैं

पुस्तक-प्रकाशन में अनुप्रयोग

आइडेंटिकॉन अनेक प्रकार से पुस्तकों को उन्नत कर सकते हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **अध्याय-पहचान**: पाठकों को अध्याय पहचानने और स्मरण रखने में सहायक दृश्य चिह्नक
- **मार्गदर्शन संकेत**: पुस्तक में शीघ्र मार्गदर्शन के लिए दृश्य संकेत
- **अभिकल्पन-संगति**: संपूर्ण पुस्तक में एकीकृत दृश्य भाषा
- **विषय-वस्तु अंगुलिचिह्नन**: विषय-वस्तु के "सार" का दृश्य निरूपण

H.8 निष्कर्ष

आइडेंटिकॉन पाठ्य विषय-वस्तु के अद्वितीय दृश्य निरूपण बनाने का सुरुचिपूर्ण समाधान प्रदान करते हैं। अध्याय-शीर्षकों से विशिष्ट प्रतिरूप उत्पन्न करके वे पुस्तक-अभिकल्पन में कार्यात्मक मार्गदर्शन संकेत और सौंदर्यात्मक अवयव, दोनों की भूमिका निभाते हैं।

हमारा MATLAB कार्यान्वयन विभिन्न आइडेंटिकॉन विधियों की विशेषताओं को संयोजित करता है। यह नियतात्मकता और अद्वितीयता के मूल गुणों को बनाए रखते हुए अनेक आकृतियों और रंगों वाले आकर्षक प्रतिरूप उत्पन्न करता है। दृश्य प्रतिरूप और उसके अंतर्निहित संख्यात्मक मानों का द्वैध प्रदर्शन निर्माण-प्रक्रिया की शैक्षिक अंतर्दृष्टि देता है।

अध्याय-पहचान की यह विधि दर्शाती है कि पारंपरिक पुस्तक-अभिकल्पन को कलनविधीय तकनीकों द्वारा किस प्रकार उन्नत किया जा सकता है। पाठ्य विषय-वस्तु और दृश्य पहचान के बीच यह सेतु पाठकों को बेहतर मार्गदर्शन और स्मरणीयता प्रदान करता है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I MATLAB®, Mathematica Codes

The MATLAB® codes presented in this appendix were originally written by the author. They were subsequently refactored by Claude (Anthropic, Sonnet 4.6, 2026) for clarity, documentation, and pedagogical accessibility — with improved variable naming, inline explanations of the underlying theory, and correction of minor bugs where identified. The algorithms and numerical logic are entirely those of the original author; Claude's contribution was strictly editorial. For this reason, and to avoid any risk of corrupting the code during automated translation, this appendix is presented in English only.

Les codes MATLAB® présentés dans cette annexe ont été écrits à l'origine par l'auteur. Ils ont ensuite été remaniés par Claude (Anthropic, Sonnet 4.6, 2026) dans un souci de clarté, de documentation et d'accessibilité pédagogique — avec une amélioration des noms de variables, des explications intégrées de la théorie sous-jacente, et la correction de bogues mineurs identifiés au fil du travail. Les algorithmes et la logique numérique sont entièrement ceux de l'auteur original ; la contribution de Claude a été strictement éditoriale. Pour cette raison, et afin d'éviter tout risque d'altération du code lors d'une traduction automatique, cette annexe est présentée en anglais uniquement.

Los códigos de MATLAB® presentados en este apéndice fueron escritos originalmente por el autor. Posteriormente fueron refactorizados por Claude (Anthropic, Sonnet 4.6, 2026) con el fin de mejorar la claridad, la documentación y la accesibilidad pedagógica — con una nomenclatura de variables más descriptiva, explicaciones integradas de la teoría subyacente, y la corrección de errores menores identificados durante el proceso. Los algoritmos y la lógica numérica son íntegramente los del autor original; la contribución de Claude fue estrictamente editorial. Por esta razón, y para evitar cualquier riesgo de alteración del código durante una traducción automática, este apéndice se presenta únicamente en inglés.

सारांश

This appendix presents a comprehensive collection of MATLAB and Mathematica codes implementing the fundamental and advanced computational methods described throughout the book. The codes cover foundational structural mechanics (statics, matrix methods for trusses and beams), classical and advanced analysis techniques (variational methods, isoparametric finite elements), and numerical simulation algorithms (Monte Carlo sampling, uncertainty propagation). Each code is documented with variable naming conventions, inline theoretical explanations, and worked examples to support both learning and practical application. The software implementations translate the mathematical frameworks and algorithms presented in the main chapters into executable computational tools suitable for structural analysis, parameter identification, and reliability assessment. This appendix is presented in English only to preserve code integrity across editions.

 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.1 Part I: Fundamental and Computational Analysis Methods 2512
I.1.1 Statics matrix of a truss B . 2513
I.1.2 St louis arch shape 2515
I.1.3 Arbitrary three hinged circular arch; mathematica . . . 2516
I.1.4 Collapse of masonry arches 2527
I.1.5 Main 2527
I.1.6 Large deflection of a beam 2538
I.2 Part II: Structural Design and Analysis 2542
I.2.1 Design of cylindrical shells 2542
I.2.2 Approximate frame analysis; cantilever method 2555
I.2.3 Non uniform torsion 2566
I.2.4 Orthogonal frame 2569
I.2.5 Hybrid orthogonal frame . 2572
I.2.6 Frame; hard-wired 2576
I.2.7 Direct stiffness method; frame 2580
I.2.8 Main code 2580
I.2.9 Stiffness matrix of non-prismatic members 2592
I.2.10 Isostatic lines 2598
I.2.11 Evolutionary design 2604
I.2.12 Main 2604
I.2.13 Column interaction diagram 2609
I.2.14 Variational methods; mathematica 2612
I.2.15 Monte Carlo simulation of a building's linear elastic response to lateral load . . 2623
I.2.16 Isoparametric elements . . . 2625
I.3 Part III: Material Modeling and Constitutive Behavior 2637
I.3.1 Incremental plasticity 2637
I.3.2 Constitutive models 2641
I.3.3 Bilinear model 2642
I.3.4 Hardening 2645
I.3.5 Hysteresis 2649
I.3.6 Modified giuffre monegotto pinto 2668
I.3.7 Modified kent park 2673
I.3.8 Ibarra 2677
I.3.9 Limit state shear 2717
I.4 Part IV: Data-Driven Methods and Parameter Identification 2739
I.4.1 Parameter Identification Program 2739
I.4.2 Main Program and Core Orchestration 2739
I.4.3 Data I/O and Spreadsheet Integration 2749
I.4.4 Optimization Workflow and Auxiliary Functions 2759
I.5 Part V: Numerical and Statistical Foundations 2772
I.5.1 Levenberg-Marquardt . . 2772
I.5.2 Numerical techniques . . . 2773
I.5.3 FFT and butterworth filters 2773
I.5.4 Singular value decomposition 2776
I.5.5 Preconditioning 2778
I.5.6 Random Sampling Consensus (RANSAC) 2779
I.5.7 Latin Hypercube 2784
I.5.8 Bayesian regression with a quadratic basis 2789
I.5.9 Markov chain Monte Carlo Simulation 2796
I.6 Part VI: Optimization and Parameter Fitting 2798
I.6.1 Levenberg-Marquardt . . 2798
I.6.2 Custom Implementation . 2798
I.6.3 Using Built-in Function . . 2801
I.7 Part VII: Seismic Reliability and Uncertainty 2803
I.7.1 Seismic hazard analysis 2803
I.7.2 Performance Based Earthquake Engineering . . . 2805
I.8 Part VIII: Utility 2810
I.8.1 Identicon 2810

भाग 4: संख्यात्मक एवं सांख्यिकीय विधियाँ

I.1 Part I: Fundamental and Computational Analysis Methods

This section covers both foundational structural mechanics and advanced computational techniques for analysis, including statics, arches, beams, variational methods, Monte Carlo simulation, and isoparametric elements.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.1.1 Statics matrix of a truss B

As discussed in

```
%  Initialize the statics matrix
% ========================================================================
% STATICS MATRIX OF A TRUSS
% ========================================================================
% Builds the statics matrix B, which relates internal bar forces (and
% support reactions) to external nodal loads via:
%
%                        B * q = f
%
% where:
%   B  : statics matrix          [2*npoin x (nelem + nbc)]
%   q  : generalized forces      [bar forces | reaction forces]
%   f  : external nodal loads    [Fx1, Fy1, Fx2, Fy2, ...]
%
% Each bar contributes two columns (its direction cosines) to B.
% Each restrained DOF contributes one additional column (a unit reaction).
%
% Inputs assumed to exist in the workspace:
%   npoin        : number of nodes
%   nelem        : number of bar elements
%   coord(i,1:2) : x,y coordinates of node i
%   lnods(e,1:2) : global node numbers of element e  [node_i, node_j]
%   id(i,1:2)    : boundary condition flag for node i, DOF 1(x) and 2(y)
%                  id = 1 means the DOF is restrained (support reaction)
% ========================================================================

%------------------------------------------------------------------------
% Step 1 -- Allocate the statics matrix
%------------------------------------------------------------------------
% The matrix has one row per DOF (2 per node: x and y)
% and one column per unknown force (bar forces + support reactions).
% We don't know nbc yet, so we allocate a square upper-bound and trim later.

nDOF = 2 * npoin;                  % total degrees of freedom
B    = zeros(nDOF, nDOF);          % over-allocated; will trim after BCs

%------------------------------------------------------------------------
% Step 2 -- Fill columns corresponding to bar forces (direction cosines)
%------------------------------------------------------------------------
% For each bar element, project the unit bar force onto the global x and y
% axes at both end nodes.  For bar e connecting nodes i and j:
%
%   At node i:  contribution is [ cos(theta);  sin(theta) ]   (tension +ve)
%   At node j:  contribution is [-cos(theta); -sin(theta) ]   (equal & opposite)
%
% where theta is the angle the bar makes with the global x-axis, and
%   cos(theta) = lx / L,   sin(theta) = ly / L
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%
% These are stored in rows (2*node-1) and (2*node) of column e.

l_elem = zeros(nelem, 1);          % pre-allocate element length vector

for e = 1:nelem

    % --- Retrieve the two end nodes of this element ---
    node_i = lnods(e, 1);
    node_j = lnods(e, 2);

    % --- Compute the projection of the bar onto x and y ---
    lx = coord(node_j, 1) - coord(node_i, 1);   % x-component of bar vector
    ly = coord(node_j, 2) - coord(node_i, 2);   % y-component of bar vector

    % --- Bar length (Pythagorean theorem) ---
    l_elem(e) = sqrt(lx^2 + ly^2);

    % --- Direction cosines (unit vector along the bar) ---
    cos_theta =  lx / l_elem(e);   % = cos(theta)
    sin_theta =  ly / l_elem(e);   % = sin(theta)

    % --- Insert at node i (rows 2*node_i-1 and 2*node_i, column e) ---
    % A tensile force in the bar pulls node i toward node j
    B(2*node_i - 1, e) =  cos_theta;   % x-equilibrium at node i
    B(2*node_i,     e) =  sin_theta;   % y-equilibrium at node i

    % --- Insert at node j (equal and opposite by Newton's third law) ---
    B(2*node_j - 1, e) = -cos_theta;   % x-equilibrium at node j
    B(2*node_j,     e) = -sin_theta;   % y-equilibrium at node j

end

%-------------------------------------------------------------------------
% Step 3 -- Append columns corresponding to support reactions
%-------------------------------------------------------------------------
% Each restrained DOF introduces one unknown reaction force.
% Its contribution to equilibrium is simply +1 in the corresponding row
% (a unit force in the restrained direction).
% These reactions occupy columns (nelem+1) through (nelem+nbc) of B.

nbc = 0;   % reaction counter (incremented each time a restrained DOF is found)

for inode = 1:npoin
    for iDOF = 1:2            % iDOF = 1 -> x-direction,  iDOF = 2 -> y-direction

        if id(inode, iDOF) == 1    % this DOF is restrained -> there is a reaction

            nbc = nbc + 1;         % one more reaction unknown

            % Global row index for this DOF
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            row = 2*(inode - 1) + iDOF;

            % Place a unit entry in the next available reaction column
            B(row, nelem + nbc) = 1.0;

        end
    end
end

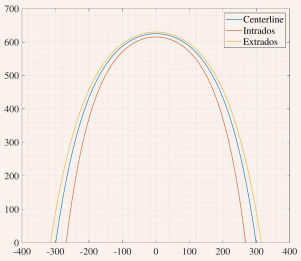
%--------------------------------------------------------------------------
% Step 4 -- Trim B to its actual size
%--------------------------------------------------------------------------
% Now that we know nbc, discard the unused trailing columns.

B = B(:, 1 : nelem + nbc);

% B is now [2*npoin  x  (nelem + nbc)] -- ready for use.
```

I.1.2 St louis arch shape

This code, based on the actual geometry of the arch, generates Fig. 15.30b




```
clear;close;clc;opengl software
% From http://www.jug.net/wt/archcgs.htm
%=================
% Graphics stuff
%=================
scrsz = get(0,'ScreenSize');GS = 'gswin64.exe';opengl software
fs=18;
font='Times New Roman';
%===============
% Initialize
%===============
L=299.2239;% half widdth
Ab=1262.6651;% max x section bottom ft^2
At=125.1406;% max x section top ft^2
x=(299.2239:-0.001:0);
%=================
% Some Constants
%=================
C=acosh(Ab/At);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
h=625.0925;% maximum height
A=h/((Ab/At)-1);
%============
% centroid
%============
y=693.8597-A*(cosh(C*x/L));% CHECKED
yp=interp1(x,y,118.4123);
%======================
% slope of the normal
%======================
m=1.44935529./sinh(0.0100333*x);% CHECKED
mp=interp1(x,m,118.4123);
%======================
% Cross sectional area
%======================
Q=((At-Ab)/h).*y+Ab;%cross section linearly varying
%======================
% height of section
%======================
h=sqrt(cotd(30)*Q);
hi=2*h/3;ho=h/3;
%==============================
% Intrados and extrados curves
%==============================
xi=x-hi./sqrt(1+m.^2);yi=y-m.*hi./sqrt(1+m.^2);
ypi=interp1(xi,yi,108.9984);
xo=x+ho./sqrt(1+m.^2);yo=y+m.*ho./sqrt(1+m.^2);
ypo=interp1(xo,yo,123.1192);
%======================================
% take mirrors for the -ve side & merge
%======================================
rx=-flip(x);xx=cat(2,x,rx);
rxi=-flip(xi);xxi=cat(2,xi,rxi);
rxo=-flip(xo);xxo=cat(2,xo,rxo);
ry=flip(y);yy=cat(2,y,ry);
ryi=flip(yi);yyi=cat(2,yi,ryi);
ryo=flip(yo);yyo=cat(2,yo,ryo);
%===============
% plot curves
%===============
hf1 = figure('Position',[1 scrsz(4)/4.5 scrsz(3)/3 scrsz(4)/2]);
plot(xx,yy,xxi,yyi,xxo,yyo,'linewidth',1);
lgd=legend('Centerline','Intrados','Extrados','location','NorthEast');
lgd.FontSize=fs;
grid minor; grid;
ylim([0 700]);daspect([1 1 1]);
```

I.1.3 Arbitrary three hinged circular arch; mathematica

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Circular Three Hinged Arch self weight

Determine Reactions

In[1]:=
```
Sol1 = Solve[-2 R Cy +
       Integrate[w R^2 (1 + Cos[theta]), {theta, Pi / 2 - alpha, Pi / 2 + alpha}] == 0, Cy][[1]];
```

In[2]:=
```
Cy = Cy /. Sol1
```

Out[2]=
```
alpha R w
```

In[3]:=
```
Sol2 =
  Simplify[Solve[-R Cx + R Cy - Integrate[w R^2 Cos[theta], {theta, Pi / 2 - alpha, Pi / 2}] ==
      0, Cx]][[1]] /. Sol1;
```

In[4]:=
```
Cx = Cx /. Sol2
```

Out[4]=
```
R w (-1 + alpha + Cos[alpha])
```

In[5]:=
```
alpha = 2 ArcTan[2 h / s]
```

Out[5]=
$$2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]$$

In[6]:=
```
w = 1;
```

In[7]:=
```
Cxs = FullSimplify[Cx / s]
```

Out[7]=
$$\frac{R\left(-1+2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]+\text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\right)}{s}$$

In[8]:=
```
TeXForm[Cxs]
```

Out[8]//TeXForm=
```
\frac{R \left(2 \tan ^{-1}\left(\frac{2 h}{s}\right)+\cos \left(2 \tan ^{-1}\left(\fr
   h}{s}\right)\right)-1\right)}{s}
```

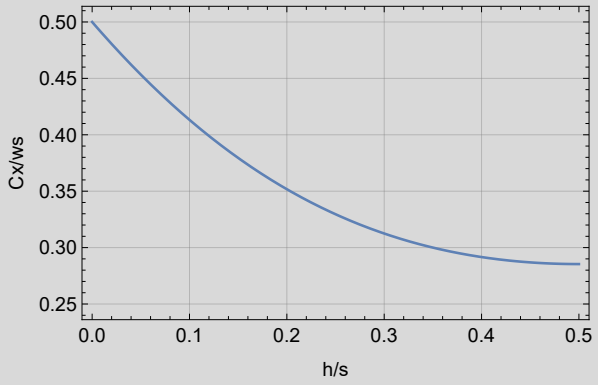
In[9]:=
```
Cxs = Cx / s /. R / s → 1 / (2 Sin[alpha]) /. h / s → hs
```

Out[9]=
$$\frac{1}{2}\times(-1+2\,\text{ArcTan}[2\,hs]+\text{Cos}[2\,\text{ArcTan}[2\,hs]])\,\text{Csc}[2\,\text{ArcTan}[2\,hs]]$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

In[10]:=
```
CxsPlot =
 Plot[Cxs, {hs, 0., 0.5}, AxesOrigin → {0, 0.25}, LabelStyle → Directive[Black, Medium],
  Frame → True, FrameLabel → {"h/s", "Cx/ws"}, GridLines → Automatic]
```

Out[10]=



In[11]:=
```
Export["CxsPlot.pdf", CxsPlot]
```

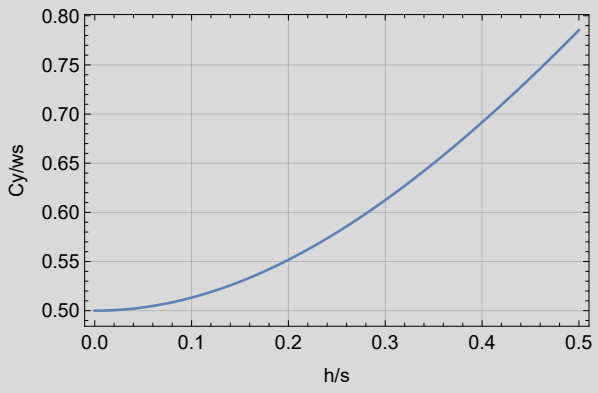
Out[11]=
```
CxsPlot.pdf
```

In[12]:=
```
Cys = Cy / s /. R / s → 1 / (2 Sin[alpha]) /. h / s → hs
```

Out[12]=
```
ArcTan[2 hs] Csc[2 ArcTan[2 hs]]
```

In[13]:=
```
CysPlot =
 Plot[Cys, {hs, 0., 0.5}, AxesOrigin → {0, 0.5}, LabelStyle → Directive[Black, Medium],
  Frame → True, FrameLabel → {"h/s", "Cy/ws"}, GridLines → Automatic]
```

Out[13]=



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

In[14]:=
```
Export["CysPlot.pdf", CysPlot]
```
Out[14]=
```
CysPlot.pdf
```

Determine Internal Forces Arbitrary Case

Shear

In[15]:=
```
Sol6 = FullSimplify[Solve[-Cx Cos[theta] + Cy Sin[theta] -
       Integrate[w R Sin [theta], {beta, 0, theta}] + V == 0, V]][[1]]
```
Out[15]=
$$\left\{V \to R \left(\text{Cos}[\text{theta}] \left(-1+\text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\right)+ 2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right](\text{Cos}[\text{theta}]-\text{Sin}[\text{theta}])+\text{theta}\,\text{Sin}[\text{theta}]\right)\right\}$$

In[16]:=
```
V[theta_] := R (Cos[theta] (-1 + Cos[2 ArcTan[2 h / s]]) +
     2 ArcTan[2 h / s] (Cos[theta] - Sin[theta]) + theta Sin[theta])
```

Axial

In[17]:=
```
Sol7 = FullSimplify[Solve[Cx Sin[theta] + Cy Cos[theta] -
       Integrate[w R Cos [theta], {beta, 0, theta}] + NN == 0, NN]][[1]]
```
Out[17]=
$$\left\{NN \to R \left(\text{theta}\,\text{Cos}[\text{theta}]+\text{Sin}[\text{theta}]- \text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\text{Sin}[\text{theta}]-2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right](\text{Cos}[\text{theta}]+\text{Sin}[\text{theta}])\right)\right\}$$

In[18]:=
```
NN[theta_] := R (theta Cos[theta] + Sin[theta] - Cos[2 ArcTan[2 h / s]] Sin[theta] -
     2 ArcTan[2 h / s] (Cos[theta] + Sin[theta])) /. h / s → 1 / 2;
```

In[19]:=
```
NN[x]
```
Out[19]=
$$R\left(x\,\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x]-\frac{1}{2}\pi\,(\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x])\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Moment

In[20]:=
```
Sol8 = FullSimplify[Solve[Cx R Sin[theta] - Cy R (1 - Cos[theta]) +
      Integrate[w R R (Cos[beta] - Cos[theta]), {beta, 0, theta}] + M == 0, M][[1]]]
```

Out[20]=
$$\left\{M \to R^2 \left(\text{theta} \cos[\text{theta}] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[\text{theta}] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[\text{theta}] + \sin[\text{theta}])\right)\right\}$$

In[21]:=
```
M[theta_] := R^2 (theta Cos[theta] -
     Cos[2 ArcTan[2 h/s]] Sin[theta] - 2 ArcTan[2 h/s] (-1 + Cos[theta] + Sin[theta]))
```

In[22]:=
```
NN[x]
```

Out[22]=
$$R\left(x \cos[x] + \sin[x] - \frac{1}{2}\pi (\cos[x] + \sin[x])\right)$$

In[23]:=
```
V[x]
```

Out[23]=
$$R\left(\cos[x]\left(-1 + \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right]\right) + 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (\cos[x] - \sin[x]) + x \sin[x]\right)$$

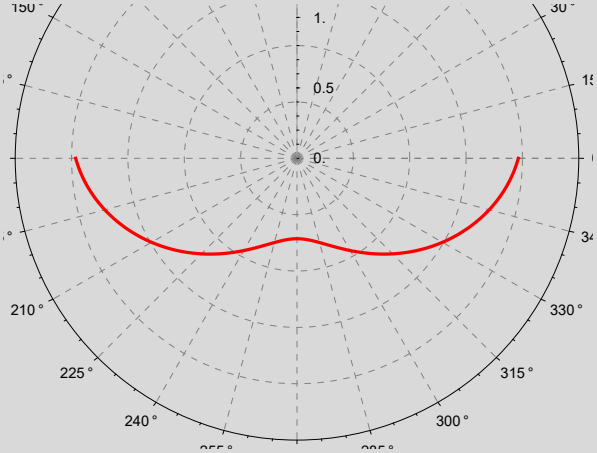
In[24]:=
```
M[x]
```

Out[24]=
$$R^2\left(x \cos[x] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[x] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[x] + \sin[x])\right)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

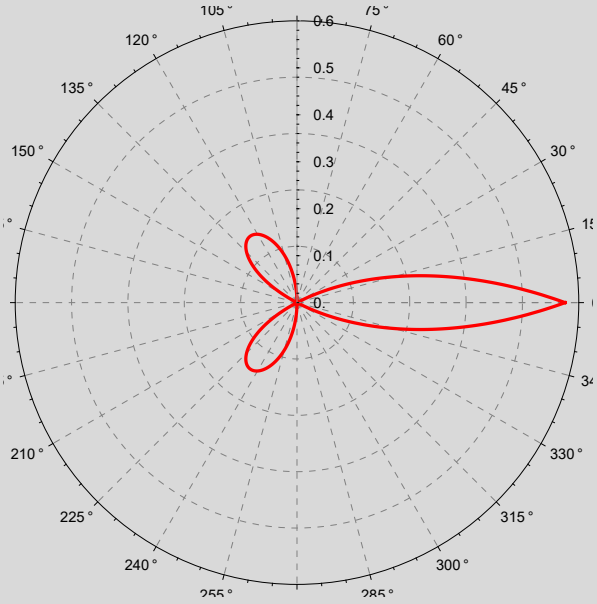
In[25]:=
```
P1 = PolarPlot[NN[x] / R, {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[25]=



In[26]:=
```
P2 = PolarPlot[V[x] / R /. h / s → 1 / 2, {x, 0, Pi},
  PlotStyle → {Red, Thick}, PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[26]=



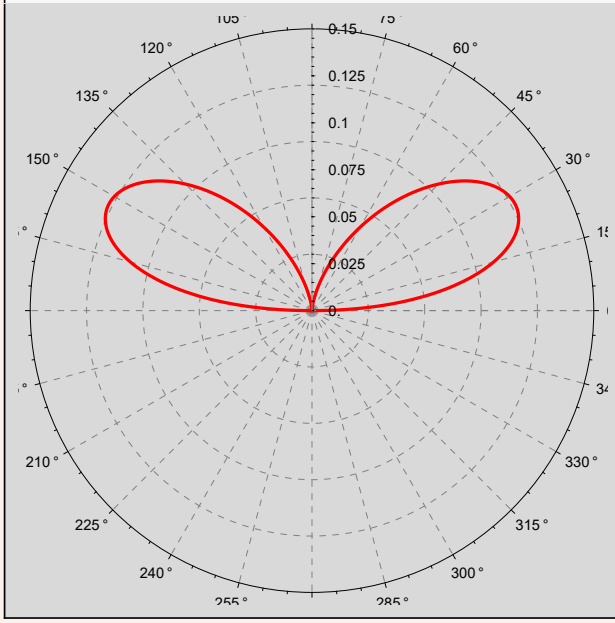
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

In[27]:=
```
M[x]
```

Out[27]=
$$R^2 \left(x \cos[x] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[x] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[x] + \sin[x])\right)$$

In[28]:=
```
P6 = PolarPlot[-M[x] / R^2 /. h / s → 1 / 2, {x, 0, Pi},
  PlotStyle → {Red, Thick}, PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[28]=



Determine Internal Forces Semi-Circular Case

In[29]:=
```
Clear[alpha];
```

Shear

In[30]:=
```
Sol3 = FullSimplify[Solve[-Cx Cos[theta] + Cy Sin[theta] -
       Integrate[w R Sin [theta], {alpha, 0, theta}] + V == 0, V]][[1]]
```

Out[30]=
$$\{V \to R\,((-1 + \text{alpha} + \cos[\text{alpha}])\cos[\text{theta}] + (-\text{alpha} + \text{theta})\sin[\text{theta}])\}$$

In[31]:=
```
V[theta_] := 1/2 R w ((-2 + π) Cos[theta] - (π - 2 theta) Sin[theta])
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Axial

In[32]:=
```
Sol4 = FullSimplify[Solve[Cx Sin[theta] + Cy Cos[theta] -
       Integrate[w R Cos [theta], {alpha, 0, theta}] + NN == 0, NN]][[1]]
```

Out[32]=
```
{NN → R ((-alpha + theta) Cos[theta] - (-1 + alpha + Cos[alpha]) Sin[theta])}
```

In[33]:=
```
NN[theta_] := -1/2 R w ((π - 2 theta) Cos[theta] + (-2 + π) Sin[theta]);
```

Moment

In[34]:=
```
Sol5 = FullSimplify[Solve[Cx R Sin[theta] - Cy R (1 - Cos[theta]) +
       Integrate[w R R (Cos[alpha] - Cos[theta]), {alpha, 0, theta}] + M == 0, M]][[1]]
```

Out[34]=
```
{M → R^2 (alpha + (-alpha + theta) Cos[theta] - (alpha + Cos[alpha]) Sin[theta])}
```

In[35]:=
```
M[theta_] := -1/2 R^2 w ((π - 2 theta) Cos[theta] + π (-1 + Sin[theta]))
```

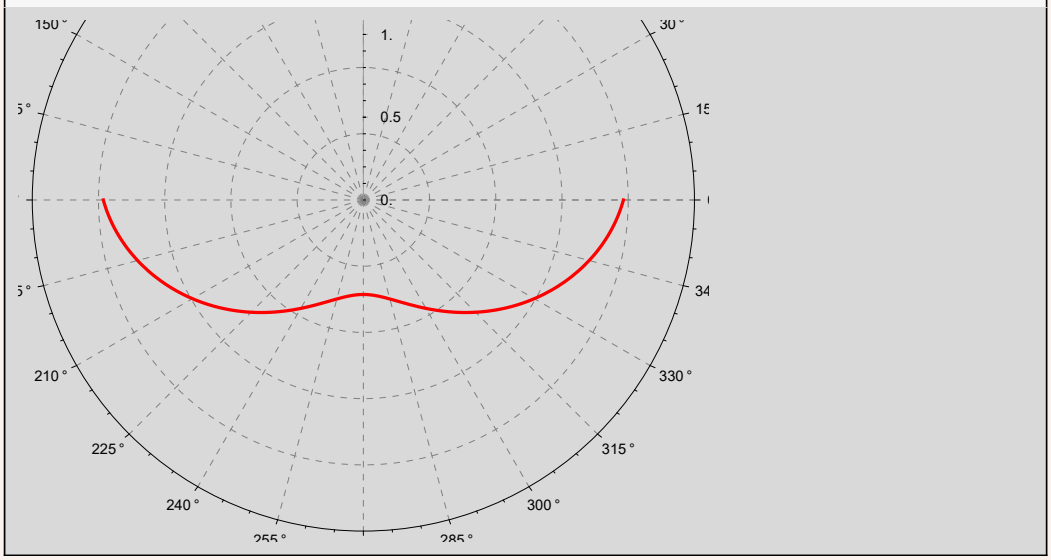
Plot Internal Forces

In[36]:=
```
w = 1; R = 1;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

In[37]:=
```
P4 = PolarPlot[NN[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[37]=



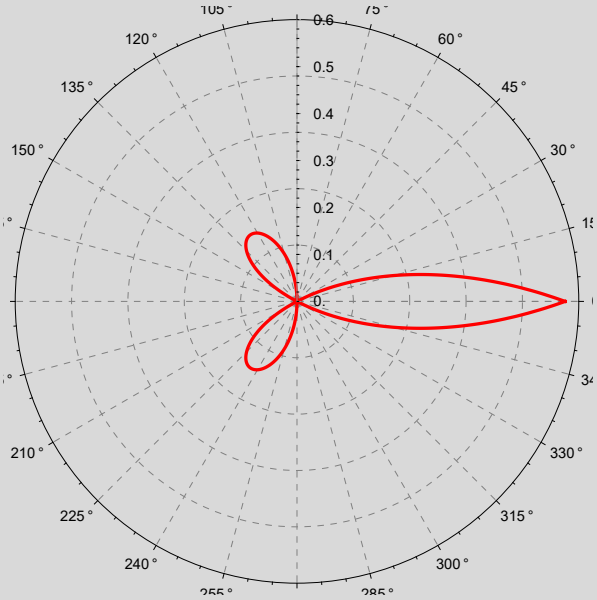
In[38]:=
```
Export["NxPlot.pdf", P1]
```

Out[38]=
```
NxPlot.pdf
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

In[39]:=
```
P5 = PolarPlot[V[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[39]=



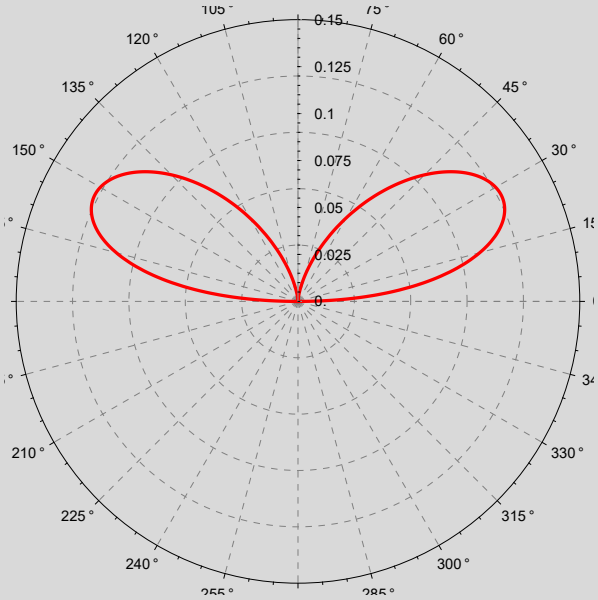
In[40]:=
```
Export["VxPlot.pdf", P2]
```

Out[40]=
```
VxPlot.pdf
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

In[41]:=
```
P6 = PolarPlot[-M[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[41]=



In[42]:=
```
Export["MxPlot.pdf", P6]
```

Out[42]=
```
MxPlot.pdf
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.1.4 Collapse of masonry arches

Code written by Pierre Mars in Octave, reprogrammed in MATLAB®by the author.

I.1.5 Main

```
% ======================================================================
% COLLAPSE ANALYSIS OF A MASONRY ARCH -- THRUST LINE METHOD
% ======================================================================
% This code determines the minimum and maximum thrust states of a circular
% masonry arch using the "line of resistance" (thrust line) approach.
%
% THEORY:
%   A masonry arch can carry load as long as the thrust line -- the locus
%   of the resultant compressive force -- remains within the arch thickness
%   at every cross-section.  Collapse occurs when the thrust line touches
%   the boundary (intrados or extrados) at enough sections to form a
%   mechanism (typically 4 hinges for a symmetric arch).
%
%   The thrust line position is controlled by three "points of passage":
%   sections n1, n2, n3 where the normalised eccentricities e1, e2, e3
%   are prescribed.  The algorithm iteratively relocates these points
%   until the thrust line just touches the arch boundary -- the limit state.
%
% SIGN CONVENTION FOR ECCENTRICITY:
%   e = +1  ->  point on extrados  (outer face)
%   e = -1  ->  point on intrados  (inner face)
%   e =  0  ->  centroid of section (centerline)
%
% TWO LIMIT STATES COMPUTED:
%   Minimum thrust : thrust line hugs intrados at supports, extrados at crown
%   Maximum thrust : opposite -- extrados at supports, intrados at crown
%
% FILE STRUCTURE (all functions at bottom, MATLAB convention):
%   Part 1  --  Main script: parameters, calls min_thrust then max_thrust
%   Part 2  --  min_thrust  : iterative minimum thrust algorithm
%   Part 3  --  max_thrust  : iterative maximum thrust algorithm
%   Part 4  --  resistance_line : plots thrust line, voussoirs, N and V diagrams
%   Part 5  --  face_points : (x,y) of a point at given eccentricity on each face
%   Part 6  --  faces_wrenches : self-weight wrench at each section face  *** STUB ***
%   Part 7  --  faces_efforts : internal N, V, eccentricity at every face
%   Part 8  --  three_points : force on first face to pass thrust line through 3 points
%
% Original code: Pierre Smars (smars@yuntech.edu.tw), ver. 2022-12-02
% License: GNU GPL v2 or later -- https://www.gnu.org/licenses/
% Reprogrammed in MATLAB from Octave by V.E. Saouma
% ======================================================================

% ======================================================================
% PART 1 -- MAIN SCRIPT
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% ========================================================================
% Sets all parameters, runs both limit-state analyses, then cleans up.
%
% NOTE ON GLOBAL VARIABLES:
%   All geometry and state are stored in globals so that helper functions
%   can access them without long argument lists.  For a production code
%   one would pass a parameter struct instead, but globals are clearer
%   for a teaching context of this size.

clear; close all; clc;

global n radius_cst density_cst thickness_cst g aperture ...
       maximum_eccentricity small x y xe ye xi yi density angles radius ...
       thickness iter fn LimitState

% --- Execution control ---
% iWait = 1 : pause at every iteration with a dialog box  (useful for demos)
% iWait = 0 : run silently to completion                  (normal use)
iWait = 0;

% --- Output file base name (used in figure titles and saved EPS/PDF) ---
fn = 'arch-1';

% --- Arch geometry ---
n             = 40;    % number of voussoir blocks
radius_cst    = 5;     % centerline radius of the arch          [m]
thickness_cst = 1;     % uniform voussoir thickness             [m]
aperture      = 90;    % half-opening angle                     [deg]
                       % 90 deg -> semicircular arch

% --- Material and physical constants ---
density_cst = 2500;    % masonry density                        [kg/m^3]
g           = 9.81;    % gravitational acceleration             [m/s^2]

% --- Algorithm parameters ---
maximum_eccentricity = 1;      % |e| <= 1 defines the admissible zone
small                = 1e-6;   % convergence tolerance on eccentricity

% --- Run both limit-state analyses ---
if iWait == 1
    waitfor(warndlg('Starting with Minimum thrust'));
    close;
end
min_thrust;

if iWait == 1
    waitfor(warndlg('Next: Maximum thrust'));
    close;
end
max_thrust;

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% Clean up EPS files generated during iterations
delete('*.eps');


% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: min_thrust
% ========================================================================
% Finds the minimum thrust state by iteratively adjusting the three points
% of passage until the thrust line just fits inside the arch.
%
% MINIMUM THRUST PATTERN:
%   The thrust line touches the intrados at both supports (e = -1)
%   and the extrados at the crown (e = +1).
%
% ALGORITHM (iterative heuristic):
%   1. Start with passage points at supports (n1, n3) and crown (n2).
%   2. Compute internal forces and eccentricity profile.
%   3. Find the section r0 with the largest eccentricity violation.
%   4. Move the nearest passage point to r0.
%   5. Repeat until max|ex| <= maximum_eccentricity + small.
%
% WARNING: the while condition  (ok==0)||(iter>10)  is logically
%   questionable -- the ||iter>10 clause keeps looping even after
%   convergence when iter>10.  Preserved faithfully from the original.

function min_thrust

global n maximum_eccentricity small iter iWait fn LimitState

% --- Initial guess for the three passage points ---
e1 = -maximum_eccentricity;   % intrados at left support
e2 =  maximum_eccentricity;   % extrados at crown
e3 = -maximum_eccentricity;   % intrados at right support
n1 = 1;
n2 = round(n/2) + 1;          % section closest to the crown
n3 = n + 1;

iter           = 0;
LimitState     = 'min';
ok_eccentricity = 0;

while ok_eccentricity == 0 || (iter > 10)   % see WARNING above

    iter = iter + 1;

    % Compute internal forces N, V and eccentricity profile ex
    [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);  %#ok<ASGLU>

    % Plot the current thrust line at this iteration
    Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    if iWait == 1
        waitfor(warndlg(['Iteration: ' int2str(iter)], 'Warning'));
        close;
    end

    % --- Find the most violated section ---
    % r0 is the index of the section where |eccentricity| is maximum
    [~, r0] = max(abs(ex));

    % --- Relocate the nearest passage point to the offending section ---
    % Intrados violation (ex < 0): move whichever support point is closer
    % Extrados violation (ex > 0): move the crown point
    if ex(r0) < 0
        if abs(r0 - n1) < abs(r0 - n3)
            n1 = r0;
        else
            n3 = r0;
        end
    else
        n2 = r0;
    end

    % --- Check convergence ---
    if max(abs(ex)) - maximum_eccentricity < small
        ok_eccentricity = 1;
    else
        ok_eccentricity = 0;
    end

end

% Plot the final (converged or last-iteration) thrust line
Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

end   % min_thrust


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: max_thrust
% ========================================================================
% Finds the maximum thrust state.  Mirror image of min_thrust:
%
% MAXIMUM THRUST PATTERN:
%   The thrust line touches the extrados at both supports (e = +1)
%   and the intrados at the crown (e = -1).
%
% The relocation logic is the reverse of min_thrust:
%   Extrados violation -> move a support point
%   Intrados violation -> move the crown point

function max_thrust
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```

global n maximum_eccentricity small iter iWait fn LimitState

% --- Initial guess (reversed signs relative to min_thrust) ---
e1 =  maximum_eccentricity;   % extrados at left support
e2 = -maximum_eccentricity;   % intrados at crown
e3 =  maximum_eccentricity;   % extrados at right support
n1 = 1;
n2 = round(n/2) + 1;
n3 = n + 1;

iter            = 0;
LimitState      = 'max';
ok_eccentricity = 0;

while ok_eccentricity == 0 || (iter > 10)   % see WARNING in min_thrust

    iter = iter + 1;

    [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);  %#ok<ASGLU>
    Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

    if iWait == 1
        waitfor(warndlg(['Iteration: ' int2str(iter)], 'Warning'));
        close;
    end

    [~, r0] = max(abs(ex));

    % Reversed logic relative to min_thrust
    if ex(r0) < 0
        % Intrados violation: move the crown point
        n2 = r0;
    else
        % Extrados violation: move the nearer support point
        if abs(r0 - n1) < abs(r0 - n3)
            n1 = r0;
        else
            n3 = r0;
        end
    end

    if max(abs(ex)) - maximum_eccentricity < small
        ok_eccentricity = 1;
    else
        ok_eccentricity = 0;
    end

end

Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
249
250 end   % max_thrust
251
252
253 % ========================================================================
254 % PART 4 -- FUNCTION: resistance_line
255 % ========================================================================
256 % Produces the final result figure for a converged limit state showing:
257 %
258 %   (a) Arch geometry: voussoir blocks drawn as alternating grey/white
259 %       patches ("Alhambra style"), with centroids marked
260 %   (b) Thrust line: dashed red curve
261 %   (c) Three passage points: filled red circles
262 %   (d) Internal force diagrams: axial N (red sticks) and shear V (blue sticks)
263 %       drawn as scaled arrows at each section face
264 %
265 % Output: EPS file, converted to PDF via Ghostscript (eps2pdf).
266
267 function resistance_line(n1, e1, n2, e2, n3, e3)
268
269 global n x y xe ye xi yi angles radius thickness iter fn LimitState
270
271 fs    = 16;
272 font  = 'Times New Roman';
273 GS    = 'gswin64.exe';    % path to Ghostscript executable
274
275 % --- Compute converged internal forces ---
276 [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
277
278 % --- Thrust line coordinates ---
279 % The thrust line at section i is offset from the centerline by
280 %   ex(i) * thickness(i)/2  in the radial direction
281 xz = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* ex);
282 yz = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* ex);
283
284 % --- Draw voussoir blocks ---
285 for i = 1:n
286
287     % Four corners of voussoir i (two intrados + two extrados nodes)
288     xp = [xi(i), xi(i+1), xe(i+1), xe(i)];
289     yp = [yi(i), yi(i+1), ye(i+1), ye(i)];
290
291     % Alternating grey / white shading
292     if rem(i, 2) == 1
293         C = [0.5, 0.5, 0.5];   % grey
294     else
295         C = 'White';
296     end
297
298     patch(xp, yp, C);
299     hold on;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
300
301     % Centroid of each voussoir (for verification)
302     poly_i        = polyshape(xp, yp);
303     [x0(i), y0(i)] = centroid(poly_i);
304
305 end
306
307 plot(x0, y0, 'k.');   % centroid markers
308
309 % --- Thrust line and passage points ---
310 plot(xz, yz, '--r', 'LineWidth', 2);
311 xzz = [xz(n1), xz(n2), xz(n3)];
312 yzz = [yz(n1), yz(n2), yz(n3)];
313 scatter(xzz, yzz, 80, 'red', 'filled');
314
315 axis('equal', 'tight');
316 grid minor; grid on;
317 title([fn ' - ' LimitState ' - iter ' num2str(iter)]);
318
319 % --- Axial (N) and shear (V) force diagrams ---
320 % Each stick starts at the thrust line point and extends in the direction
321 % normal (N) or tangential (V) to the section face.
322 % Scale: alpha chosen so the largest N fills 80% of the arch thickness.
323 alpha = 0.8 * thickness(1) / max(N);
324
325 for i = 1:n
326
327     % Base point at the thrust line location for section i
328     xBase = x(i) + ex(i) * thickness(i) * cosd(90 - angles(i)) / 2;
329     yBase = y(i) + ex(i) * thickness(i) * sind(90 + angles(i)) / 2;
330
331     % Axial force stick (red) -- along the arch axis
332     xN = [xBase,  xBase + alpha * N(i) * sind(90 - angles(i))];
333     yN = [yBase,  yBase - alpha * N(i) * cosd(90 - angles(i))];
334     plot(xN, yN, '-r', 'LineWidth', 1);
335
336     % Shear force stick (blue) -- perpendicular to arch axis
337     xV = [xBase,  xBase + alpha * V(i) * cosd(90 - angles(i))];
338     yV = [yBase,  yBase + alpha * V(i) * sind(90 - angles(i))];
339     plot(xV, yV, '-b', 'LineWidth', 1);
340
341 end
342
343 % --- Export ---
344 FileName = [fn '-' LimitState '-Iter-' num2str(iter) '.eps'];
345 set(gca, 'FontSize', 0.8*fs, 'FontName', font);
346 set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
347 print(FileName, '-depsc');
348 eps2pdf(FileName, GS, 0);
349 close all;
350
```

प्रारूप प्रकृतिसर

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
end   % resistance_line


% ========================================================================
% PART 5 -- FUNCTION: face_points
% ========================================================================
% Returns the (x,y) coordinates of the point on each section face at a
% prescribed normalised eccentricity.
%
%   eccentricity = +1  ->  extrados
%   eccentricity = -1  ->  intrados
%   eccentricity =  0  ->  centroid (centerline)
%
% NOTE: this function calls angles() and radius(), thickness() as
% functions -- in the original Octave code these were functions returning
% the global arrays.  In MATLAB with globals they resolve to the global
% variables directly; the call syntax is preserved from the original.

function [x, y] = face_points(eccentricity)

global n aperture

a = angles();

x = sin(a) .* (radius(a) + thickness(a)/2 .* eccentricity);
y = cos(a) .* (radius(a) + thickness(a)/2 .* eccentricity);

end   % face_points


% ========================================================================
% PART 6 -- FUNCTION: faces_wrenches  *** STUB -- BODY NOT PROVIDED ***
% ========================================================================
% PURPOSE:
%   Computes the resultant force wrench (Fx, Fy, M) acting on each section
%   face due to the cumulative self-weight of all voussoirs above that face.
%
% EXPECTED OUTPUTS  (each an (n+1) x 1 vector):
%   Fx(i) : horizontal force resultant at face i due to blocks above   [N]
%   Fy(i) : vertical   force resultant at face i due to blocks above   [N]
%   M(i)  : moment resultant at face i about the centerline point      [N.m]
%
% EXPECTED ALGORITHM (not provided in original source):
%   For each block j above face i:
%     weight_j = density(j) * g * volume_j
%     volume_j = area of trapezoidal block j * thickness_cst  (unit depth)
%     Add weight_j to Fy(i) and compute its moment arm about x(i),y(i)
%
% *** This function must be completed before the code will run. ***

function [Fx, Fy, M] = faces_wrenches
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
402
403 global n x y density g angles radius thickness  %#ok<NUSED>
404
405 % TODO: implement self-weight accumulation loop here
406 error('faces_wrenches: function body not provided in original source -- must be
    implemented.');
407
408 end   % faces_wrenches
409
410
411 % ========================================================================
412 % PART 7 -- FUNCTION: faces_efforts
413 % ========================================================================
414 % Computes the internal stress resultants at every section face:
415 %
416 %   N(i)  : normal (axial compressive) force at face i        [N]
417 %   V(i)  : shear force at face i                             [N]
418 %   ex(i) : normalised eccentricity of thrust line at face i  [-1 .. +1]
419 %
420 % ALGORITHM:
421 %   1. Find the boundary force (Fx1,Fy1,M1) on the first face that makes
422 %      the thrust line pass through the three prescribed points
423 %      -> calls three_points()
424 %   2. Get the self-weight wrench at every face
425 %      -> calls faces_wrenches()
426 %   3. Superpose: total wrench = self-weight + boundary force
427 %      (the boundary force contributes a linearly growing moment)
428 %   4. Rotate from global (x,y) axes to local (normal, tangential) frame
429 %      using the section face angle
430 %   5. Compute eccentricity from bending moment and axial force
431
432 function [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3)
433
434 global x y angles thickness
435
436 % Step 1 -- Boundary force on the first face
437 [Fx1, Fy1, M1] = three_points(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
438
439 % Step 2 -- Self-weight wrench at every face
440 [Fx, Fy, M] = faces_wrenches();
441
442 % Step 3 -- Superpose contributions
443 % The moment arm of (Fx1,Fy1) grows linearly from the first face
444 Fx = Fx + Fx1;
445 Fy = Fy + Fy1;
446 M  = M  + M1 + (x - x(1)) .* Fy1 - (y - y(1)) .* Fx1;
447
448 % Step 4 -- Rotate to local section frame
449 % angles(i) is measured from the vertical [deg]
450 % Convention: N positive in compression (masonry standard)
451 N  = -cosd(angles) .* Fx + sind(angles) .* Fy;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
V  =  sind(angles) .* Fx + cosd(angles) .* Fy;

% Step 5 -- Eccentricity: e = M / (N * t/2)
% Normalised by half-thickness so |e| = 1 at the face boundary
ex = -2 .* M ./ (N .* thickness);

end   % faces_efforts


% ========================================================================
% PART 8 -- FUNCTION: three_points
% ========================================================================
% Determines the force (Fx1, Fy1, M1) that must act on the FIRST section
% face in order to make the thrust line pass through three prescribed points.
%
% METHOD -- moment equilibrium at each passage point:
%   For the thrust line to pass through point (xa,ya) on face n1, the
%   total moment about that point must be zero.  This gives one linear
%   equation in (Fx1, Fy1, M1).  Writing it for all three points:
%
%       A * [Fx1; Fy1; M1] = Mp
%
%   where A is 3x3 and Mp contains the self-weight moments at the
%   passage points.  Solved by Gaussian elimination (A\Mp).
%
% SIDE EFFECT: this function also initialises all arch geometry globals
%   (angles, thickness, radius, x, y, xe, ye, xi, yi, density)
%   because it is the deepest call in the chain.

function [Fx1, Fy1, M1] = three_points(n1, e1, n2, e2, n3, e3)

global n radius_cst density_cst thickness_cst g aperture ...
       x y xe ye xi yi density angles radius thickness

% --- Build arch geometry ---
% Section face angles uniformly distributed over the full arch opening
a      = aperture;
da     = 2*a / n;
angles = (-a : da : a)';          % (n+1) x 1  [deg]

% Constant thickness and radius for all faces (could be made variable)
thickness = ones(n+1, 1) * thickness_cst;
radius    = ones(n+1, 1) * radius_cst;

% --- Extrados coordinates  (e = +1) ---
xe = sind(angles) .* (radius + thickness/2);
ye = cosd(angles) .* (radius + thickness/2);

% --- Intrados coordinates  (e = -1) ---
xi = sind(angles) .* (radius - thickness/2);
yi = cosd(angles) .* (radius - thickness/2);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

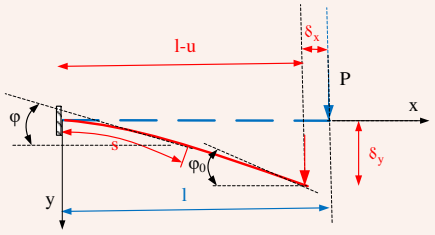
```
503
504 % --- Voussoir density (one value per block, not per face) ---
505 density = ones(n, 1) * density_cst;
506
507 % --- Centerline coordinates  (e = 0) ---
508 x = sind(angles) .* radius;
509 y = cosd(angles) .* radius;
510
511 % Reference point: centre of the first section face
512 xr = x(1);
513 yr = y(1);
514
515 % --- Coordinates of the three passage points ---
516 % Each lies at its prescribed eccentricity on its respective face
517 x1 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e1);
518 y1 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e1);
519
520 x2 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e2);
521 y2 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e2);
522
523 x3 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e3);
524 y3 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e3);
525
526 xa = x1(n1);  ya = y1(n1);
527 xb = x2(n2);  yb = y2(n2);
528 xc = x3(n3);  yc = y3(n3);
529
530 % --- Moment-equilibrium matrix A ---
531 % Row i: moment of (Fx1,Fy1,M1) about passage point i = 0
532 %   (y_pt - yr)*Fx1 - (x_pt - xr)*Fy1 - M1 = -M_selfweight(ni)
533 A = [ ya-yr,  -(xa-xr),  -1 ;
534       yb-yr,  -(xb-xr),  -1 ;
535       yc-yr,  -(xc-xr),  -1 ];
536
537 % --- Self-weight wrench ---
538 [Fx, Fy, M] = faces_wrenches();
539
540 % --- Shift moment to the passage points ---
541 % Subtract lever arm from section centroid to passage point
542 xa = xa - x(n1);  ya = ya - y(n1);
543 xb = xb - x(n2);  yb = yb - y(n2);
544 xc = xc - x(n3);  yc = yc - y(n3);
545
546 % Moment at each passage point = face moment + transport term
547 Ma = M(n1) - Fx(n1)*ya + Fy(n1)*xa;
548 Mb = M(n2) - Fx(n2)*yb + Fy(n2)*xb;
549 Mc = M(n3) - Fx(n3)*yc + Fy(n3)*xc;
550
551 Mp = [Ma; Mb; Mc];
552
553 % --- Solve for the unknown boundary force ---
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
W   = A \ Mp;
Fx1 = W(1);
Fy1 = W(2);
M1  = W(3);

end   % three_points
```

I.1.6 Large deflection of a beam



Solution of problem in §29.2.3

Note: only `Sol=1` works, the other two fail to give right answer. Up to the reader to debug.

```
% ========================================================================
% LARGE DEFLECTION ANALYSIS OF A CANTILEVER BEAM UNDER END LOAD
% ========================================================================
% A cantilever beam of length L carries a tip load P (vertical).
% For large deflections, the classical Euler-Bernoulli linear theory
% (delta = PL^3/3EI) is no longer accurate. The exact solution requires
% solving a nonlinear boundary value problem based on the elastica equation:
%
%         d^2 phi / ds^2 = -P*cos(phi) / EI
%
% where phi(s) is the rotation at arc-length s from the fixed end.
%
% This script compares three solution methods for the tip displacement:
%   Sol = 1 : Direct numerical integration (RECOMMENDED -- others are buggy)
%   Sol = 2 : Elliptic integral form (incomplete -- currently incorrect)
%   Sol = 3 : Complete elliptic integral of the 2nd kind
%
% Outputs: plot of phi_0 and normalised displacements vs load parameter PL^2/EI
% ========================================================================

clear; clc; close all;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Beam properties
% ------------------------------------------------------------------------
L  = 4;                  % Length [m]
A  = 50e-6;              % Cross-sectional area [m^2]  (not used here)
I  = 1e7 * 1e-12;        % Second moment of area [m^4]
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
E  = 800e9;              % Young's modulus [Pa]
EI = E * I;              % Bending stiffness [N.m^2]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Load stepping
% ------------------------------------------------------------------------
% We sweep P from dP to P_max in equal increments.
% The load parameter x = P*L^2/EI is dimensionless -- it is the natural
% variable for the elastica problem.

dP     = 1000;                  % Load increment [N]
P_max  = 5000000;               % Maximum load   [N]
nSteps = P_max / dP;            % Number of load steps

% Pre-allocate result arrays (faster than growing inside the loop)
PP     = zeros(1, nSteps);      % Applied load at each step
x      = zeros(1, nSteps);      % Dimensionless load PL^2/EI
y0     = zeros(1, nSteps);      % Linear (small-deflection) tip displacement / L
phi    = zeros(1, nSteps);      % Tip rotation phi_0 [rad]
yv     = zeros(1, nSteps);      % Vertical tip displacement / L  (nonlinear)
yh     = zeros(1, nSteps);      % Horizontal tip displacement / L (nonlinear)

% Choose solution method (only Sol=1 is currently verified)
sol = 1;

% fsolve options -- suppress iteration output; tight tolerance
fsolve_opts = optimset('TolFun', 1e-6, 'Display', 'off');

% Initial guess for phi_0 (tip rotation).
% pi/4 works well for moderate loads; may need adjustment at very large P.
phi0_guess = pi / 4;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Main loop over load steps
% ------------------------------------------------------------------------
for i = 1 : nSteps

    % Current load and dimensionless load parameter
    P     = i * dP;
    PP(i) = P;
    x(i)  = P * L^2 / EI;          % PL^2/EI  (horizontal axis of final plot)

    % Linear (Euler-Bernoulli) tip deflection, normalised by L
    % Valid only for small deflections; included for comparison
    y0(i) = (P * L^3 / (3*EI)) / L;

    % alpha appears repeatedly: alpha = sqrt(P/EI)  [1/m]
    alpha = sqrt(P / EI);

    % --------------------------------------------------------------------
    % Step 3a -- Solve for phi_0 (rotation at the free tip)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    % ------------------------------------------------------------------
    % The exact arc-length condition gives an implicit equation for phi_0:
    %
    %   (1/sqrt(2)*alpha) * integral_0^phi0 [ 1/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi = L
    %
    % We solve this numerically with fsolve.
    % FuncPhi0 (defined at the bottom) returns the residual of this equation.

    [phi0, ~, exitflag] = fsolve( ...
        @(phi0) FuncPhi0(phi0, alpha, L), ...
        phi0_guess, fsolve_opts);

    if exitflag <= 0
        warning('Step %d: fsolve did not converge. phi0 may be unreliable.', i);
    end

    phi(i) = phi0;    % Store converged tip rotation

    % ------------------------------------------------------------------
    % Step 3b -- Compute tip displacements using the chosen method
    % ------------------------------------------------------------------

    beta = alpha * L;    % dimensionless load parameter (= sqrt(PL^2/EI))

    if sol == 1
        % --- Method 1: Direct numerical integration ---
        % Vertical displacement (normalised by L):
        %   delta_y/L = (sqrt(2)/(2*beta)) * integral_0^phi0 [ sin(phi)/sqrt(sin(phi0)-
    sin(phi)) ] dphi
        %
        % Horizontal shortening (normalised by L):
        %   delta_x/L = (sqrt(2)/(alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1

        integrand_v = @(phi) sin(phi) ./ sqrt( max(eps, sin(phi0) - sin(phi)) );
        integral_v  = integral(integrand_v, 0, phi0);

        yv(i) = (sqrt(2) / (2*beta)) * integral_v;
        yh(i) = (sqrt(2) / (alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1;

    elseif sol == 2
        % --- Method 2: Elliptic integral formulation (CURRENTLY INCORRECT) ---
        % The substitution k = sqrt((1+sin(phi0))/2) transforms the integral
        % into a standard elliptic form.  This branch has a known bug -- left
        % as an exercise for the reader.

        k = sqrt( (1 + sin(phi0)) / 2 );

        integrand_v = @(theta) (2*k^2*sin(theta).^2 - 1) ...
                               ./ sqrt(1 - k^2*sin(theta).^2);
        integral_v  = integral(integrand_v, 0, pi/2);

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        yv(i) = (1 / beta) * integral_v;
        % yh not computed in this branch

    elseif sol == 3
        % --- Method 3: Complete and incomplete elliptic integrals of 2nd kind ---
        % Uses MATLAB's built-in ellipticE.
        % delta_y/L = 1 - (2/beta) * [ E(k) - E(phi0, k) ]
        % where E(k) is the complete and E(phi0,k) the incomplete elliptic integral.

        k        = sqrt( (1 + sin(phi0)) / 2 );
        E_k      = ellipticE(k);                        % complete
        E_k_phi0 = ellipticE(asin(sin(phi0)), k);       % incomplete

        yv(i) = 1 - (2/beta) * (E_k - E_k_phi0);
        yh(i) = (sqrt(2) / (alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1;

    end

end   % end load-step loop

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Plot results
% ------------------------------------------------------------------------
scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;   % font size

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);

% --- Upper panel: tip rotation vs load parameter ---
subplot(2, 1, 1)
plot(x, phi, 'k', 'LineWidth', 2)
set(gca, 'XLim', [0 10], 'XTick', 0:1:10)
set(gca, 'YLim', [0 1.6], 'YTick', 0:0.2:1.6)
grid on
xlabel('PL^2 / EI',  'FontSize', fs)
ylabel('\phi_0  [rad]', 'FontSize', fs)
title('Tip rotation', 'FontSize', fs)
set(gca, 'FontSize', fs, 'Color', 'none')

% --- Lower panel: normalised tip displacements vs load parameter ---
subplot(2, 1, 2)
plot(x, yv, 'r', x, yh, 'b', 'LineWidth', 2)
set(gca, 'XLim', [0 10], 'XTick', 0:1:10)
set(gca, 'YLim', [-0.6 1.0], 'YTick', -0.6:0.2:1.0)
grid on
xlabel('PL^2 / EI', 'FontSize', fs)
ylabel('Normalised displacement', 'FontSize', fs)
title('Tip displacements (normalised by L)', 'FontSize', fs)
lgnd = legend('\delta_y / L', '\delta_x / L', 'Location', 'best');
set(lgnd, 'Color', 'none')
set(gca, 'FontSize', fs, 'Color', 'none')
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```

exportgraphics(hf1, 'Displ-Load-Anal.pdf', 'BackgroundColor', 'none')

% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: FuncPhi0
% ========================================================================
function residual = FuncPhi0(phi0, alpha, L)
% FuncPhi0  Residual of the arc-length constraint for the elastica problem.
%
%   The exact arc-length condition for a cantilever under tip load P is:
%
%     (1 / (sqrt(2)*alpha)) * integral_0^phi0 [ 1/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi = L
%
%   Rearranging, the residual (which fsolve drives to zero) is:
%
%     residual = (1/(sqrt(2)*alpha)) * integral(...) - L
%
%   Inputs:
%     phi0     : current guess for tip rotation [rad]
%     alpha    : sqrt(P/EI)  [1/m]
%     L        : beam length [m]
%
%   Output:
%     residual : how far the arc-length condition is from being satisfied

    % The integrand has a square-root singularity at phi = phi0.
    % max(eps, ...) prevents division by exactly zero at the upper limit.
    integrand = @(phi) 1 ./ sqrt( max(eps, sin(phi0) - sin(phi)) );

    % Numerical integration from 0 to phi0
    integralValue = integral(integrand, 0, phi0, 'RelTol', 1e-6, 'AbsTol', 1e-9);

    % Residual: left-hand side minus right-hand side of the arc-length equation
    residual = (1 / (sqrt(2) * alpha)) * integralValue - L;

end
```

I.2 Part II: Structural Design and Analysis

This section addresses detailed structural design and frame analysis including shell design, frame analysis methods, torsion, and optimization.

I.2.1 Design of cylindrical shells

Code written by Georg, R., 2014; Needs verification.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

The following code is developed for the design of the shell portion of the simply supported cylindrical shell. The code follows the design procedure outlined by the theory of shallow shells and is discussed in §34.2.3.2.2. The purpose of the design tool is to determine the internal forces and displacements within the shell.The shell design code consists of the basic inputs and formulations the the shell dimensioning. The shell coefficient function produces the simultaneous equations required to solve for the arbitrary constants. With known constant values, the shell forces function determines the internal forces and displacement of the shell. The code is presented as follows:

```
% ========================================================================
% DESIGN OF CYLINDRICAL BARREL VAULT SHELLS
% ========================================================================
% Analyzes a cylindrical concrete shell roof using the Beam-Arch (Schorer)
% method, which decomposes the shell response into:
%
%   (a) MEMBRANE (PARTICULAR) SOLUTION:
%       The shell carries load by in-plane membrane forces only.
%       Valid in the interior, away from edges.
%
%   (b) BENDING (HOMOGENEOUS) SOLUTION:
%       Edge disturbances decay inward from the free longitudinal edges.
%       Governed by a 4th-order ODE whose characteristic roots involve
%       mixed trig/hyperbolic functions.
%
%   (c) EDGE BEAM COMPATIBILITY:
%       The shell edge and the stiffening edge beam must deform together.
%       A 2x2 compatibility system is solved for the edge forces.
%
% GEOMETRY (single barrel vault):
%   x   : longitudinal axis  (0 to L)
%   phi: circumferential angle from crown  (0 at crown, phi_k at edge)
%   r   : radius of curvature
%   h   : shell thickness
%
% LOAD: uniform dead/live load q [ksf] on the projected plan area
%
% SIGN CONVENTION: forces per unit length [kip/ft], moments [kip.ft/ft]
%   N_phi  : circumferential membrane force
%   N_x    : longitudinal membrane force
%   N_xphi : in-plane shear
%   M_phi  : circumferential bending moment
%   M_x    : longitudinal bending moment
%   Q_phi  : circumferential transverse shear
%   Q_x    : longitudinal transverse shear
%
% UNITS: kip, ft throughout (E in ksf, q in ksf, dimensions in ft)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Shell analysis (membrane + bending solution)
%   Part 2  -- Edge beam compatibility analysis
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   Part 3  -- function shell_coefficients  (coefficient matrix rows)
%   Part 4  -- function shell_forces        (force/displacement evaluation)
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- SHELL ANALYSIS
% ========================================================================

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Geometry and loading
% ------------------------------------------------------------------------
L     = 66.5;           % shell span (longitudinal)            [ft]
r     = 26.6;           % radius of curvature                  [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                      [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % half-angle of shell (edge angle)     [rad]
phi   = 0;              % current evaluation angle from edge   [rad]
q     = 0.080;          % uniform surface load                 [ksf]

% phit: angle measured from the crown (phi=0 at crown, phi_k at edge)
% Note: phi is measured FROM the edge, so phit = phi - phi_k
phit = phi - phi_k;
Phi  = phi_k - phi;     % complementary angle (from crown)     [rad]

% Pack geometry into struct for reference
dimload.Length  = L;
dimload.Radius  = r;
dimload.Height  = h;
dimload.Phi_k   = phi_k;
dimload.Phi     = phi;
dimload.Pd      = q;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Shell bending stiffness constants
% ------------------------------------------------------------------------
% The Fourier series representation uses a single half-wave (n=1).
% k = n*pi/L is the longitudinal wave number.

n_fourier = 1;              % Fourier harmonic number (single half-wave)
k         = n_fourier * pi / L;   % longitudinal wave number        [1/ft]

% Bending rigidity of the shell plate
E = 4.32e5;             % Young's modulus of concrete           [ksf]
D = E * h^3 / 12;       % flexural rigidity                     [kip.ft]

% Shell bending parameter (Schorer theory)
% gamma combines the wave number, radius, and thickness
gamma = r * k / 3^(1/4) * sqrt(h/r);

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% Q: combined shell parameter used in the characteristic equation
Q = 3^(1/8) * (r/h)^(1/4) * sqrt(r*k);

% Evaluation point: midspan (where Fourier sin/cos terms are maximum)
x = L/2;

Shell.k     = k;
Shell.gamma = gamma;
Shell.Q     = Q;
Shell.x     = x;
Shell.E     = E;
Shell.D     = D;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.3 -- Characteristic roots of the bending equation
% ------------------------------------------------------------------------
% The homogeneous bending solution involves four complex characteristic
% roots.  Their real and imaginary parts m1,n1,m2,n2 are computed from
% Eq. 4.54 of the reference text:
%
%   roots involve  sqrt( sqrt((1+/-gamma)^2 + 1)  +/-  (1+/-gamma) ) / 2

m1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) + (1+gamma) ) / 2 );
n1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) - (1+gamma) ) / 2 );
m2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) - (1-gamma) ) / 2 );
n2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) + (1-gamma) ) / 2 );

mn = [m1, n1, m2, n2];   % collect for passing to sub-functions

% Root powers (Eq. 4.55): scale m,n by the shell parameter Q
% These appear as arguments of the trig/hyperbolic functions in the solution
alpha1  = Q * m1;    % decay/oscillation rate, first root pair
beta1   = Q * n1;
alpha1p = Q * m2;    % decay/oscillation rate, second root pair
beta1p  = Q * n2;

rp = [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p];   % collect for sub-functions

Roots.M1     = m1;       Roots.N1     = n1;
Roots.M2     = m2;       Roots.N2     = n2;
Roots.Alpha1 = alpha1;   Roots.Alpha2 = alpha1p;
Roots.Beta1  = beta1;    Roots.Beta2  = beta1p;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.4 -- Edge loading (Fourier coefficients)
% ------------------------------------------------------------------------
% The boundary conditions at the free edge (phi = phi_k) are expressed
% as Fourier series.  For a single half-wave the coefficients are:
%
%   TL  : tangential load resultant at the edge
%   SL  : shear load resultant at the edge
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
144
145 TL       =  4/pi * q * r * cos(phi_k - phi) * sin(k*x);
146 SL       =  4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k - phi) * cos(k*x);
147
148 M_phi_edge   = 0;          % free edge: no moment applied
149 Np_phi_edge  = -TL;        % normal membrane force at edge
150 Qp_phi_edge  = 0;          % free edge: no transverse shear
151 Np_xphi_edge = -SL;        % in-plane shear at edge
152
153 EdgeLoad.M_phi   = M_phi_edge;
154 EdgeLoad.N_phi   = Np_phi_edge;
155 EdgeLoad.Qp_phi  = Qp_phi_edge;
156 EdgeLoad.N_xphi  = Np_xphi_edge;
157
158 % Assemble right-hand side vector for the 4x4 coefficient system
159 f = [M_phi_edge; Np_phi_edge; Qp_phi_edge; Np_xphi_edge];
160
161 % ------------------------------------------------------------------------
162 % Section 1.5 -- Assemble the 4x4 coefficient matrix and solve
163 % ------------------------------------------------------------------------
164 % The bending solution has 4 unknown constants (a,b,c,d).
165 % We enforce the 4 edge boundary conditions, each yielding one row of F.
166 % shell_coefficients(SC,...) returns the row of F corresponding to
167 % stress resultant type SC evaluated at the edge.
168 %
169 % SC index map:
170 %   1=M_phi  2=M_x   3=Q_x   4=N_phi  5=N_x    6=u
171 %   7=w      8=Q_phi 9=N_xphi 10=v   11=M_xphi 12=Q_phip
172
173 F1 = shell_coefficients(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % M_phi
174 F2 = shell_coefficients(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_phi
175 F3 = shell_coefficients(12, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % Q_phip
176 F4 = shell_coefficients(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_xphi
177
178 F = [F1; F2; F3; F4];   % 4x4 coefficient matrix
179
180 ShellCoef.M_phi  = F1;
181 ShellCoef.N_phi  = F2;
182 ShellCoef.Qp_phi = F3;
183 ShellCoef.N_xphi = F4;
184
185 % Solve for the 4 integration constants: F * constants = -f
186 constants = -F \ f;     % [a; b; c; d]
187
188 % ------------------------------------------------------------------------
189 % Section 1.6 -- Evaluate total forces (membrane + bending) at midspan
190 % ------------------------------------------------------------------------
191 % Reset evaluation point to midspan, crown (phi=0)
192 phi  = 0;
193 phit = phi - phi_k;
194 x    = L/2;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
195
196 % --- Membrane (particular) solution at midspan, crown ---
197 Np_x     = -4/pi * 2*q/(r*k^2)       * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
198 Np_phi   = -4/pi * q*r                * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
199 Np_xphi  = -4/pi * q*r * 2/(r*k)     * sin(phi_k-phi) * cos(k*x);
200 up       =  2*q/(E*h*r*k^3)          * cos(phi_k-phi) * cos(k*x);
201 vp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2) * sin(phi_k-phi) * sin(k*x);
202 wp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2 + r^4*k^4/2) * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
203
204 % --- Total forces = bending (homogeneous) + membrane (particular) ---
205 % shell_forces evaluates the homogeneous part; membrane part added here
206
207 M_phi  = shell_forces(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
208 M_x    = shell_forces(2,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
209 M_xphi = shell_forces(11, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
210 Q_phi  = shell_forces(8,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
211 Q_x    = shell_forces(3,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
212 N_phi  = shell_forces(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_phi;
213 N_x    = shell_forces(5,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_x;
214 N_xphi = shell_forces(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_xphi;
215 u      = shell_forces(6,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + up;
216 v      = shell_forces(10, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + vp;
217 w      = shell_forces(7,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + wp;
218
219 % --- Resolve displacements into vertical and horizontal components ---
220 DV = -v * sin(phi_k-phi) + w * cos(phi_k-phi);   % vertical displacement
221 DH =  v * cos(phi_k-phi) + w * sin(phi_k-phi);   % horizontal displacement
222
223 % --- Store results ---
224 Forces.M_phi    = M_phi;     Forces.N_phi  = N_phi;
225 Forces.N_x      = N_x;       Forces.N_xphi = N_xphi;
226 Displacement.u = u;          Displacement.v = v;     Displacement.w = w;
227 Displacement.up = up;        Displacement.vp = vp;   Displacement.wp = wp;
228
229
230 % ========================================================================
231 % PART 2 -- EDGE BEAM COMPATIBILITY ANALYSIS
232 % ========================================================================
233 % The shell free edge is stiffened by a rectangular edge beam.
234 % At the shell-beam interface, vertical displacement and rotation must
235 % be compatible.  This gives a 2x2 linear system for the unknown
236 % edge forces: vertical edge load Vb and in-plane shear SB.
237 %
238 % The approach follows ASCE Manual 31 (Cylindrical Shell Roofs).
239
240 close all; fclose all; clear all; clc;
241
242 % ------------------------------------------------------------------------
243 % Section 2.1 -- Inputs
244 % ------------------------------------------------------------------------
245 b     = 1;              % edge beam width                        [ft]
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
d_eb  = 2.25;           % edge beam depth                        [ft]
L     = 66.5;           % span                                   [ft]
r     = 26.6;           % shell radius                           [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                        [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % shell edge angle                       [rad]
phi   = 0 * pi/180;     % evaluation angle from edge             [rad]
q     = 0.080;          % shell surface load                     [ksf]
rho   = 0.150;          % concrete unit weight                   [kcf]
w_eb  = b * d_eb * rho; % edge beam self-weight per unit length [klf]

n_fourier = 1;
k = n_fourier * pi / L;
x = L/2;
E = 4.32e5;             % Young's modulus                        [ksf]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.2 -- Known shell force at edge (from Part 1)
% ------------------------------------------------------------------------
N_x_shell = 99.03;      % longitudinal membrane force from shell analysis [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.3 -- ASCE Manual 31 influence coefficients
% ------------------------------------------------------------------------
% These coefficients relate unit edge loads (vertical V, shear S) to
% shell displacements and forces at the edge.
% Table 2B: deformation coefficients (delta_v)
C1 =  96.10;    % vertical edge load  -> vertical displacement
C2 = -64.69;    % horizontal edge load -> vertical displacement
C3 =   2.500;   % shear edge load     -> vertical displacement

% Table 2A: force coefficients (T_x)
C4 =  19.64;    % vertical edge load  -> N_x
C5 =   1.388;   % shear edge load     -> N_x

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.4 -- Membrane forces and edge load resultants
% ------------------------------------------------------------------------
Np_phi  = -4/pi * q * r * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi = -4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k-phi) * cos(0);

% Resolve membrane force at the edge into vertical, horizontal, shear
VL =  -Np_phi  * sin(phi_k);   % vertical component of N_phi at edge
HL =  -Np_phi  * cos(phi_k);   % horizontal component
SL =  -Np_xphi;                % shear component

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.5 -- Compatibility matrix and right-hand side
% ------------------------------------------------------------------------
% The shell and beam flexibility matrices S and B are assembled.
% NS, NB: normalisation factors (flexibility denominators)

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
NS = L^4 / (r^3 * h * E);   % shell flexibility normalisation
NB = L^4 / (d_eb^3 * b * E); % beam flexibility normalisation

% Shell flexibility matrix and fixed-end load vector
% Row 1: vertical displacement compatibility
% Row 2: N_x compatibility
FS(1,1) = NS * (q*r * (((2*r)/(pi*L))^2 + 2/pi^4 + (r/L)^4 * cos(phi_k-phi)^2) ...
               + C1*VL + C2*HL + C3*SL) * sin(k*x);
FS(2,1) = N_x_shell / h;

S(1,1) = NS * C1 * sin(k*x);
S(1,2) = NS * C3 * sin(k*x);
S(2,1) = NS * E*r/L^2 * C4 * sin(k*x);
S(2,2) = NS * E*r/L^2 * C5 * sin(k*x);

% Beam flexibility matrix and fixed-end load vector
FB(1,1) = NB * (-4/pi) * w_eb * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
FB(2,1) = NB * E*d_eb/L^2 * 4/pi * w_eb * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);

B(1,1) =  NB * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
B(1,2) = -NB * d_eb/L * 6/(pi*n_fourier)^3 * sin(k*x);
B(2,1) = -NB * E*d_eb/L^2 * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);
B(2,2) =  L/(b*d_eb) * 4/(pi*n_fourier) * sin(k*x);

% Combined system: (S + B) * X = -(FS + FB)
BS = S + B;
F  = FS + FB;
X  = BS \ (-F);

Vb = X(1);   % vertical edge force solution   [kip/ft]
SB = X(2);   % in-plane shear edge force       [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.6 -- Final internal forces including edge beam correction
% ------------------------------------------------------------------------
% The ASCE Manual 31 influence coefficients translate the solved edge
% forces back into increments of each stress resultant.

% N_x: longitudinal force
N_x = N_x_shell + Vb*C4 + SB*C5;

% N_xphi: in-plane shear (C4=0 for shear, C5=0.4)
N_xphi = 0 + Vb*0 + SB*0.4;

% N_phi: circumferential force (C4=0.707 for vertical, C5=0 for shear)
N_phi = 0 + Vb*0.707 + SB*0;

% M_phi: bending moment (no correction from edge beam for this case)
M_phi = 0;

Forces.N_x     = N_x;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Forces.N_xphi  = N_xphi;
Forces.N_phi   = N_phi;
Forces.M_phi   = M_phi;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.7 -- Reinforcement design (ACI working stress)
% ------------------------------------------------------------------------
fs = 20;    % allowable steel stress                          [ksi]
ds = 2;     % effective depth of shell reinforcement          [in]

% Principal membrane forces from Mohr's circle for membrane forces
N1 = (N_x + N_phi)/2 + sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % max principal
N2 = (N_x + N_phi)/2 - sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % min principal

% Shell reinforcement: tension governed by N1
As_shell = N1 / fs;                          % [in^2/ft] -- tension steel in shell

% Bending reinforcement (if M_phi produces tension)
As_bend  = M_phi * 12 / (fs * 7/8 * ds);    % [in^2/ft] -- bending steel

% Edge beam reinforcement: tension from arch action
T        = ((N1 + 8.32)/2 - 8.32) * d_eb;
As_beam  = T / fs;                           % [in^2] -- beam longitudinal steel

% Minimum reinforcement per ACI (temperature and shrinkage)
Amin1 = 0.0035 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- each direction (deformed bars)
Amin2 = 0.0018 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- welded wire fabric

fprintf('\n--- Reinforcement Summary ---\n');
fprintf('  Shell tension steel  As_shell = %.4f in^2/ft\n', As_shell);
fprintf('  Shell bending steel  As_bend  = %.4f in^2/ft\n', As_bend);
fprintf('  Edge beam steel      As_beam  = %.4f in^2\n',    As_beam);
fprintf('  Min steel (bars)     Amin1    = %.4f in^2/ft\n', Amin1);
fprintf('  Min steel (WWF)      Amin2    = %.4f in^2/ft\n', Amin2);


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: shell_coefficients
% ========================================================================
% Builds one row of the 4x4 coefficient matrix F used to enforce the
% edge boundary conditions on the bending (homogeneous) solution.
%
% Each stress resultant SC has the form:
%
%   F_SC = 2 * R(SC) * [ B1*T1 - B2*T2,  -B2*T1 - B1*T2,
%                        B3*T3 - B4*T4,  -B4*T3 - B3*T4 ]
%
% where T1..T8 are trig/hyperbolic combinations evaluated at the edge,
% and B1..B4 are dimensionless coefficients specific to each resultant.
%
% The distinction SC<8 / SC>=8 selects between two sets of T functions
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% (T1..T4 for moments/axial; T5..T8 for shears/twists).
%
% INPUT:
%   SC      : stress resultant selector (1..12, see index map in Part 1)
%   k       : longitudinal wave number [1/ft]
%   r       : shell radius [ft]
%   phit    : angle from crown to evaluation point [rad]
%   rp      : [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p] root parameters
%   mn      : [m1, n1, m2, n2] root components
%   Q       : shell parameter
%   gamma   : shell bending parameter
%   h       : thickness [ft]
%   x       : longitudinal evaluation point [ft]
%
% OUTPUT:
%   Shell   : 1x4 row vector -- one row of the coefficient matrix

function Shell = shell_coefficients(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x)

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Trig/hyperbolic basis functions evaluated at phit ---
% Set 1 (for SC < 8: moments, axial forces, displacements u, w)
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
% Set 2 (for SC >= 8: shears, twists, displacement v)
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Material and bending stiffness ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

% --- Scaling factor R(SC) and shape coefficients B1..B4 for each SC ---
% R: the 'particular solution' scale factor  (depends on x via sin/cos)
% B1..B4: dimensionless coefficients from the theory (Eq. 4.5x)
R  = zeros(1,12);
B1 = zeros(1,12);
B2 = zeros(1,12);
B3 = zeros(1,12);
B4 = zeros(1,12);

R(1)  = -2*D/r^2          * sin(k*x);   % M_phi
B1(1) = Q^2*(1+gamma);   B2(1) = Q^2;   B3(1) = Q^2*(gamma-1); B4(1) = Q^2;

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
R(2)  =  2*D*k^2           * sin(k*x);   % M_x
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma     * cos(k*x);   % Q_x
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1; B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2 * sin(k*x);   % N_phi
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3 * sin(k*x);   % N_x
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);   % u
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                 * sin(k*x);   % w
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phi
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2); B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);   % N_xphi
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);   % v
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r           * cos(k*x);   % M_xphi
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

R(12) = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phip
B1(12) = m1*(1-gamma)-n1;    B2(12) = m1+n1*(1-gamma);
B3(12) = -m2*(1+gamma)-n2;   B4(12) = m2-n2*(1+gamma);

% --- Assemble the row vector for stress resultant SC ---
% SC < 8: use T1..T4 (moments, axial, u, w)
% SC >= 8: use T5..T8 (shears, twists, v)
if SC < 8
    A_col = ( B1(SC)*T1 - B2(SC)*T2);
    B_col = (-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_col = ( B3(SC)*T3 - B4(SC)*T4);
    D_col = (-B4(SC)*T3 - B3(SC)*T4);
else
    A_col = ( B1(SC)*T5 - B2(SC)*T6);
    B_col = (-B2(SC)*T5 - B1(SC)*T6);
    C_col = ( B3(SC)*T7 - B4(SC)*T8);
    D_col = (-B4(SC)*T7 - B3(SC)*T8);
end

Shell = [A_col, B_col, C_col, D_col] * 2 * R(SC);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
501
502 end   % shell_coefficients
503
504
505 % =========================================================================
506 % PART 4 -- FUNCTION: shell_forces
507 % =========================================================================
508 % Evaluates a single stress resultant or displacement at a given point
509 % using the four known integration constants (a, b, c, d).
510 %
511 % This is the same basis as shell_coefficients, but now the constants
512 % are known and we compute the scalar force value rather than a matrix row.
513 %
514 % INPUT:
515 %   SC        : stress resultant selector (same index as shell_coefficients)
516 %   constants : [a; b; c; d] -- solved integration constants
517 %   (remaining arguments same as shell_coefficients)
518 %
519 % OUTPUT:
520 %   F  : scalar value of the requested stress resultant or displacement
521
522 function F = shell_forces(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
523
524 a = constants(1);  b = constants(2);
525 c = constants(3);  d = constants(4);
526
527 alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
528 alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
529 m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);
530
531 % --- Same trig/hyperbolic basis functions as shell_coefficients ---
532 T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
533 T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
534 T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
535 T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
536 T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
537 T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
538 T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
539 T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
540
541 % --- Same R and B coefficient tables ---
542 E_mod = 4.32e5;
543 D     = E_mod * h^3 / 12;
544
545 R  = zeros(1,11);   % only SC 1..11 used in shell_forces (no SC=12 here)
546 B1 = zeros(1,11);
547 B2 = zeros(1,11);
548 B3 = zeros(1,11);
549 B4 = zeros(1,11);
550
551 R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
B1(1) = Q^2*(1+gamma);  B2(1) = Q^2;  B3(1) = Q^2*(gamma-1);  B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2             * sin(k*x);
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma       * cos(k*x);
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1;  B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2   * sin(k*x);
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3   * sin(k*x);
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                   * sin(k*x);
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2);  B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r             * cos(k*x);
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

% --- Evaluate with known constants a, b, c, d ---
if SC < 8
    A_val = a*B1(SC)*T1 - a*B2(SC)*T2;
    B_val = b*(-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_val = c*(B3(SC)*T3 - c*B4(SC)*T4);
    D_val = d*(-B4(SC)*T3 - d*B3(SC)*T4);
else
    A_val = a*B1(SC)*T5 - a*B2(SC)*T6;
    B_val = b*(-B2(SC)*T5 - b*B1(SC)*T6);
    C_val = c*B3(SC)*T7 - c*B4(SC)*T8;
    D_val = d*(-B4(SC)*T7 - d*B3(SC)*T8);
end

F = 2 * R(SC) * (A_val + B_val + C_val + D_val);

end   % shell_forces
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.2.2 Approximate frame analysis; cantilever method

```
% ========================================================================
% DESIGN OF CYLINDRICAL BARREL VAULT SHELLS
% ========================================================================
% Analyzes a cylindrical concrete shell roof using the Beam-Arch (Schorer)
% method, which decomposes the shell response into:
%
%   (a) MEMBRANE (PARTICULAR) SOLUTION:
%       The shell carries load by in-plane membrane forces only.
%       Valid in the interior, away from edges.
%
%   (b) BENDING (HOMOGENEOUS) SOLUTION:
%       Edge disturbances decay inward from the free longitudinal edges.
%       Governed by a 4th-order ODE whose characteristic roots involve
%       mixed trig/hyperbolic functions.
%
%   (c) EDGE BEAM COMPATIBILITY:
%       The shell edge and the stiffening edge beam must deform together.
%       A 2x2 compatibility system is solved for the edge forces.
%
% GEOMETRY (single barrel vault):
%   x   : longitudinal axis  (0 to L)
%   phi: circumferential angle from crown  (0 at crown, phi_k at edge)
%   r   : radius of curvature
%   h   : shell thickness
%
% LOAD: uniform dead/live load q [ksf] on the projected plan area
%
% SIGN CONVENTION: forces per unit length [kip/ft], moments [kip.ft/ft]
%   N_phi  : circumferential membrane force
%   N_x    : longitudinal membrane force
%   N_xphi : in-plane shear
%   M_phi  : circumferential bending moment
%   M_x    : longitudinal bending moment
%   Q_phi  : circumferential transverse shear
%   Q_x    : longitudinal transverse shear
%
% UNITS: kip, ft throughout (E in ksf, q in ksf, dimensions in ft)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Shell analysis (membrane + bending solution)
%   Part 2  -- Edge beam compatibility analysis
%   Part 3  -- function shell_coefficients  (coefficient matrix rows)
%   Part 4  -- function shell_forces        (force/displacement evaluation)
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- SHELL ANALYSIS
% ========================================================================
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Geometry and loading
% ------------------------------------------------------------------------
L     = 66.5;           % shell span (longitudinal)            [ft]
r     = 26.6;           % radius of curvature                  [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                      [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % half-angle of shell (edge angle)     [rad]
phi   = 0;              % current evaluation angle from edge   [rad]
q     = 0.080;          % uniform surface load                 [ksf]

% phit: angle measured from the crown (phi=0 at crown, phi_k at edge)
% Note: phi is measured FROM the edge, so phit = phi - phi_k
phit = phi - phi_k;
Phi  = phi_k - phi;     % complementary angle (from crown)     [rad]

% Pack geometry into struct for reference
dimload.Length  = L;
dimload.Radius  = r;
dimload.Height  = h;
dimload.Phi_k   = phi_k;
dimload.Phi     = phi;
dimload.Pd      = q;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Shell bending stiffness constants
% ------------------------------------------------------------------------
% The Fourier series representation uses a single half-wave (n=1).
% k = n*pi/L is the longitudinal wave number.

n_fourier = 1;              % Fourier harmonic number (single half-wave)
k         = n_fourier * pi / L;   % longitudinal wave number        [1/ft]

% Bending rigidity of the shell plate
E = 4.32e5;             % Young's modulus of concrete          [ksf]
D = E * h^3 / 12;       % flexural rigidity                    [kip.ft]

% Shell bending parameter (Schorer theory)
% gamma combines the wave number, radius, and thickness
gamma = r * k / 3^(1/4) * sqrt(h/r);

% Q: combined shell parameter used in the characteristic equation
Q = 3^(1/8) * (r/h)^(1/4) * sqrt(r*k);

% Evaluation point: midspan (where Fourier sin/cos terms are maximum)
x = L/2;

Shell.k     = k;
Shell.gamma = gamma;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Shell.Q     = Q;
Shell.x     = x;
Shell.E     = E;
Shell.D     = D;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.3 -- Characteristic roots of the bending equation
% ------------------------------------------------------------------------
% The homogeneous bending solution involves four complex characteristic
% roots.  Their real and imaginary parts m1,n1,m2,n2 are computed from
% Eq. 4.54 of the reference text:
%
%   roots involve  sqrt( sqrt((1+/-gamma)^2 + 1)  +/-  (1+/-gamma) ) / 2

m1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) + (1+gamma) ) / 2 );
n1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) - (1+gamma) ) / 2 );
m2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) - (1-gamma) ) / 2 );
n2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) + (1-gamma) ) / 2 );

mn = [m1, n1, m2, n2];   % collect for passing to sub-functions

% Root powers (Eq. 4.55): scale m,n by the shell parameter Q
% These appear as arguments of the trig/hyperbolic functions in the solution
alpha1  = Q * m1;    % decay/oscillation rate, first root pair
beta1   = Q * n1;
alpha1p = Q * m2;    % decay/oscillation rate, second root pair
beta1p  = Q * n2;

rp = [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p];   % collect for sub-functions

Roots.M1     = m1;       Roots.N1     = n1;
Roots.M2     = m2;       Roots.N2     = n2;
Roots.Alpha1 = alpha1;   Roots.Alpha2 = alpha1p;
Roots.Beta1  = beta1;    Roots.Beta2  = beta1p;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.4 -- Edge loading (Fourier coefficients)
% ------------------------------------------------------------------------
% The boundary conditions at the free edge (phi = phi_k) are expressed
% as Fourier series.  For a single half-wave the coefficients are:
%
%   TL  : tangential load resultant at the edge
%   SL  : shear load resultant at the edge

TL       =  4/pi * q * r * cos(phi_k - phi) * sin(k*x);
SL       =  4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k - phi) * cos(k*x);

M_phi_edge   = 0;         % free edge: no moment applied
Np_phi_edge  = -TL;       % normal membrane force at edge
Qp_phi_edge  = 0;         % free edge: no transverse shear
Np_xphi_edge = -SL;       % in-plane shear at edge
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
152
153 EdgeLoad.M_phi   = M_phi_edge;
154 EdgeLoad.N_phi   = Np_phi_edge;
155 EdgeLoad.Qp_phi  = Qp_phi_edge;
156 EdgeLoad.N_xphi  = Np_xphi_edge;
157
158 % Assemble right-hand side vector for the 4x4 coefficient system
159 f = [M_phi_edge; Np_phi_edge; Qp_phi_edge; Np_xphi_edge];
160
161 % ------------------------------------------------------------------------
162 % Section 1.5 -- Assemble the 4x4 coefficient matrix and solve
163 % ------------------------------------------------------------------------
164 % The bending solution has 4 unknown constants (a,b,c,d).
165 % We enforce the 4 edge boundary conditions, each yielding one row of F.
166 % shell_coefficients(SC,...) returns the row of F corresponding to
167 % stress resultant type SC evaluated at the edge.
168 %
169 % SC index map:
170 %   1=M_phi  2=M_x   3=Q_x   4=N_phi  5=N_x    6=u
171 %   7=w      8=Q_phi 9=N_xphi 10=v   11=M_xphi 12=Q_phip
172
173 F1 = shell_coefficients(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % M_phi
174 F2 = shell_coefficients(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_phi
175 F3 = shell_coefficients(12, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % Q_phip
176 F4 = shell_coefficients(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_xphi
177
178 F = [F1; F2; F3; F4];   % 4x4 coefficient matrix
179
180 ShellCoef.M_phi  = F1;
181 ShellCoef.N_phi  = F2;
182 ShellCoef.Qp_phi = F3;
183 ShellCoef.N_xphi = F4;
184
185 % Solve for the 4 integration constants: F * constants = -f
186 constants = -F \ f;     % [a; b; c; d]
187
188 % ------------------------------------------------------------------------
189 % Section 1.6 -- Evaluate total forces (membrane + bending) at midspan
190 % ------------------------------------------------------------------------
191 % Reset evaluation point to midspan, crown (phi=0)
192 phi  = 0;
193 phit = phi - phi_k;
194 x    = L/2;
195
196 % --- Membrane (particular) solution at midspan, crown ---
197 Np_x     = -4/pi * 2*q/(r*k^2)       * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
198 Np_phi   = -4/pi * q*r                * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
199 Np_xphi  = -4/pi * q*r * 2/(r*k)     * sin(phi_k-phi) * cos(k*x);
200 up       =  2*q/(E*h*r*k^3)           * cos(phi_k-phi) * cos(k*x);
201 vp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2) * sin(phi_k-phi) * sin(k*x);
202 wp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2 + r^4*k^4/2) * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```

% --- Total forces = bending (homogeneous) + membrane (particular) ---
% shell_forces evaluates the homogeneous part; membrane part added here

M_phi  = shell_forces(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_x    = shell_forces(2,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_xphi = shell_forces(11, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_phi  = shell_forces(8,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_x    = shell_forces(3,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
N_phi  = shell_forces(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_phi;
N_x    = shell_forces(5,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_x;
N_xphi = shell_forces(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_xphi;
u      = shell_forces(6,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + up;
v      = shell_forces(10, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + vp;
w      = shell_forces(7,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + wp;

% --- Resolve displacements into vertical and horizontal components ---
DV = -v * sin(phi_k-phi) + w * cos(phi_k-phi);   % vertical displacement
DH =  v * cos(phi_k-phi) + w * sin(phi_k-phi);   % horizontal displacement

% --- Store results ---
Forces.M_phi    = M_phi;     Forces.N_phi  = N_phi;
Forces.N_x      = N_x;       Forces.N_xphi = N_xphi;
Displacement.u = u;          Displacement.v = v;     Displacement.w = w;
Displacement.up = up;        Displacement.vp = vp;   Displacement.wp = wp;


% ========================================================================
% PART 2 -- EDGE BEAM COMPATIBILITY ANALYSIS
% ========================================================================
% The shell free edge is stiffened by a rectangular edge beam.
% At the shell-beam interface, vertical displacement and rotation must
% be compatible.  This gives a 2x2 linear system for the unknown
% edge forces: vertical edge load Vb and in-plane shear SB.
%
% The approach follows ASCE Manual 31 (Cylindrical Shell Roofs).

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.1 -- Inputs
% ------------------------------------------------------------------------
b     = 1;              % edge beam width                    [ft]
d_eb  = 2.25;           % edge beam depth                    [ft]
L     = 66.5;           % span                               [ft]
r     = 26.6;           % shell radius                       [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                    [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % shell edge angle                   [rad]
phi   = 0 * pi/180;     % evaluation angle from edge         [rad]
q     = 0.080;          % shell surface load                 [ksf]
rho   = 0.150;          % concrete unit weight               [kcf]
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
w_eb  = b * d_eb * rho; % edge beam self-weight per unit length [klf]

n_fourier = 1;
k = n_fourier * pi / L;
x = L/2;
E = 4.32e5;             % Young's modulus                       [ksf]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.2 -- Known shell force at edge (from Part 1)
% ------------------------------------------------------------------------
N_x_shell = 99.03;      % longitudinal membrane force from shell analysis [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.3 -- ASCE Manual 31 influence coefficients
% ------------------------------------------------------------------------
% These coefficients relate unit edge loads (vertical V, shear S) to
% shell displacements and forces at the edge.
% Table 2B: deformation coefficients (delta_v)
C1 =  96.10;    % vertical edge load  -> vertical displacement
C2 = -64.69;    % horizontal edge load -> vertical displacement
C3 =   2.500;   % shear edge load     -> vertical displacement

% Table 2A: force coefficients (T_x)
C4 =  19.64;    % vertical edge load  -> N_x
C5 =   1.388;   % shear edge load     -> N_x

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.4 -- Membrane forces and edge load resultants
% ------------------------------------------------------------------------
Np_phi  = -4/pi * q * r * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi = -4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k-phi) * cos(0);

% Resolve membrane force at the edge into vertical, horizontal, shear
VL =  -Np_phi  * sin(phi_k);   % vertical component of N_phi at edge
HL =  -Np_phi  * cos(phi_k);   % horizontal component
SL =  -Np_xphi;                % shear component

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.5 -- Compatibility matrix and right-hand side
% ------------------------------------------------------------------------
% The shell and beam flexibility matrices S and B are assembled.
% NS, NB: normalisation factors (flexibility denominators)

NS = L^4 / (r^3 * h * E);   % shell flexibility normalisation
NB = L^4 / (d_eb^3 * b * E); % beam flexibility normalisation

% Shell flexibility matrix and fixed-end load vector
% Row 1: vertical displacement compatibility
% Row 2: N_x compatibility
FS(1,1) = NS * (q*r * (((2*r)/(pi*L))^2 + 2/pi^4 + (r/L)^4 * cos(phi_k-phi)^2) ...
               + C1*VL + C2*HL + C3*SL) * sin(k*x);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
FS(2,1) = N_x_shell / h;

S(1,1) = NS * C1 * sin(k*x);
S(1,2) = NS * C3 * sin(k*x);
S(2,1) = NS * E*r/L^2 * C4 * sin(k*x);
S(2,2) = NS * E*r/L^2 * C5 * sin(k*x);

% Beam flexibility matrix and fixed-end load vector
FB(1,1) = NB * (-4/pi) * w_eb * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
FB(2,1) = NB * E*d_eb/L^2 * 4/pi * w_eb * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);

B(1,1) =  NB * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
B(1,2) = -NB * d_eb/L * 6/(pi*n_fourier)^3 * sin(k*x);
B(2,1) = -NB * E*d_eb/L^2 * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);
B(2,2) =  L/(b*d_eb) * 4/(pi*n_fourier) * sin(k*x);

% Combined system: (S + B) * X = -(FS + FB)
BS = S + B;
F  = FS + FB;
X  = BS \ (-F);

Vb = X(1);   % vertical edge force solution   [kip/ft]
SB = X(2);   % in-plane shear edge force       [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.6 -- Final internal forces including edge beam correction
% ------------------------------------------------------------------------
% The ASCE Manual 31 influence coefficients translate the solved edge
% forces back into increments of each stress resultant.

% N_x: longitudinal force
N_x = N_x_shell + Vb*C4 + SB*C5;

% N_xphi: in-plane shear (C4=0 for shear, C5=0.4)
N_xphi = 0 + Vb*0 + SB*0.4;

% N_phi: circumferential force (C4=0.707 for vertical, C5=0 for shear)
N_phi = 0 + Vb*0.707 + SB*0;

% M_phi: bending moment (no correction from edge beam for this case)
M_phi = 0;

Forces.N_x     = N_x;
Forces.N_xphi  = N_xphi;
Forces.N_phi   = N_phi;
Forces.M_phi   = M_phi;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.7 -- Reinforcement design (ACI working stress)
% ------------------------------------------------------------------------
fs = 20;    % allowable steel stress                          [ksi]
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
ds = 2;     % effective depth of shell reinforcement           [in]

% Principal membrane forces from Mohr's circle for membrane forces
N1 = (N_x + N_phi)/2 + sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % max principal
N2 = (N_x + N_phi)/2 - sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % min principal

% Shell reinforcement: tension governed by N1
As_shell = N1 / fs;                          % [in^2/ft] -- tension steel in shell

% Bending reinforcement (if M_phi produces tension)
As_bend  = M_phi * 12 / (fs * 7/8 * ds);    % [in^2/ft] -- bending steel

% Edge beam reinforcement: tension from arch action
T        = ((N1 + 8.32)/2 - 8.32) * d_eb;
As_beam  = T / fs;                           % [in^2] -- beam longitudinal steel

% Minimum reinforcement per ACI (temperature and shrinkage)
Amin1 = 0.0035 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- each direction (deformed bars)
Amin2 = 0.0018 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- welded wire fabric

fprintf('\n--- Reinforcement Summary ---\n');
fprintf('  Shell tension steel  As_shell = %.4f in^2/ft\n', As_shell);
fprintf('  Shell bending steel  As_bend  = %.4f in^2/ft\n', As_bend);
fprintf('  Edge beam steel      As_beam  = %.4f in^2\n',    As_beam);
fprintf('  Min steel (bars)     Amin1    = %.4f in^2/ft\n', Amin1);
fprintf('  Min steel (WWF)      Amin2    = %.4f in^2/ft\n', Amin2);


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: shell_coefficients
% ========================================================================
% Builds one row of the 4x4 coefficient matrix F used to enforce the
% edge boundary conditions on the bending (homogeneous) solution.
%
% Each stress resultant SC has the form:
%
%   F_SC = 2 * R(SC) * [ B1*T1 - B2*T2,  -B2*T1 - B1*T2,
%                        B3*T3 - B4*T4,  -B4*T3 - B3*T4 ]
%
% where T1..T8 are trig/hyperbolic combinations evaluated at the edge,
% and B1..B4 are dimensionless coefficients specific to each resultant.
%
% The distinction SC<8 / SC>=8 selects between two sets of T functions
% (T1..T4 for moments/axial; T5..T8 for shears/twists).
%
% INPUT:
%   SC      : stress resultant selector (1..12, see index map in Part 1)
%   k       : longitudinal wave number [1/ft]
%   r       : shell radius [ft]
%   phit    : angle from crown to evaluation point [rad]
%   rp      : [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p] root parameters
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   mn      : [m1, n1, m2, n2] root components
%   Q       : shell parameter
%   gamma   : shell bending parameter
%   h       : thickness [ft]
%   x       : longitudinal evaluation point [ft]
%
% OUTPUT:
%   Shell   : 1x4 row vector -- one row of the coefficient matrix

function Shell = shell_coefficients(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x)

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Trig/hyperbolic basis functions evaluated at phit ---
% Set 1 (for SC < 8: moments, axial forces, displacements u, w)
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
% Set 2 (for SC >= 8: shears, twists, displacement v)
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Material and bending stiffness ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

% --- Scaling factor R(SC) and shape coefficients B1..B4 for each SC ---
% R: the 'particular solution' scale factor  (depends on x via sin/cos)
% B1..B4: dimensionless coefficients from the theory (Eq. 4.5x)
R  = zeros(1,12);
B1 = zeros(1,12);
B2 = zeros(1,12);
B3 = zeros(1,12);
B4 = zeros(1,12);

R(1)  = -2*D/r^2          * sin(k*x);   % M_phi
B1(1) = Q^2*(1+gamma);   B2(1) = Q^2;   B3(1) = Q^2*(gamma-1); B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2          * sin(k*x);   % M_x
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma    * cos(k*x);   % Q_x
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1; B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2 * sin(k*x);   % N_phi
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
458
459 R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3 * sin(k*x);   % N_x
460 B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;
461
462 R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);   % u
463 B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;
464
465 R(7)  =  2                  * sin(k*x);   % w
466 B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;
467
468 R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phi
469 B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2); B4(8) = m2-n2;
470
471 R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);   % N_xphi
472 B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;
473
474 R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);   % v
475 B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
476 B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);
477
478 R(11) =  2*D*k/r            * cos(k*x);   % M_xphi
479 B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;
480
481 R(12) = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phip
482 B1(12) = m1*(1-gamma)-n1;    B2(12) = m1+n1*(1-gamma);
483 B3(12) = -m2*(1+gamma)-n2;   B4(12) = m2-n2*(1+gamma);
484
485 % --- Assemble the row vector for stress resultant SC ---
486 % SC < 8: use T1..T4 (moments, axial, u, w)
487 % SC >= 8: use T5..T8 (shears, twists, v)
488 if SC < 8
489     A_col = ( B1(SC)*T1 - B2(SC)*T2);
490     B_col = (-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
491     C_col = ( B3(SC)*T3 - B4(SC)*T4);
492     D_col = (-B4(SC)*T3 - B3(SC)*T4);
493 else
494     A_col = ( B1(SC)*T5 - B2(SC)*T6);
495     B_col = (-B2(SC)*T5 - B1(SC)*T6);
496     C_col = ( B3(SC)*T7 - B4(SC)*T8);
497     D_col = (-B4(SC)*T7 - B3(SC)*T8);
498 end
499
500 Shell = [A_col, B_col, C_col, D_col] * 2 * R(SC);
501
502 end   % shell_coefficients
503
504
505 % ======================================================================
506 % PART 4 -- FUNCTION: shell_forces
507 % ======================================================================
508 % Evaluates a single stress resultant or displacement at a given point
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% using the four known integration constants (a, b, c, d).
%
% This is the same basis as shell_coefficients, but now the constants
% are known and we compute the scalar force value rather than a matrix row.
%
% INPUT:
%   SC        : stress resultant selector (same index as shell_coefficients)
%   constants : [a; b; c; d] -- solved integration constants
%   (remaining arguments same as shell_coefficients)
%
% OUTPUT:
%   F  : scalar value of the requested stress resultant or displacement

function F = shell_forces(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)

a = constants(1);  b = constants(2);
c = constants(3);  d = constants(4);

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Same trig/hyperbolic basis functions as shell_coefficients ---
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Same R and B coefficient tables ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

R  = zeros(1,11);   % only SC 1..11 used in shell_forces (no SC=12 here)
B1 = zeros(1,11);
B2 = zeros(1,11);
B3 = zeros(1,11);
B4 = zeros(1,11);

R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);
B1(1) = Q^2*(1+gamma);  B2(1) = Q^2;  B3(1) = Q^2*(gamma-1);  B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2           * sin(k*x);
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma     * cos(k*x);
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1;  B4(3) = 1;

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2  * sin(k*x);
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3  * sin(k*x);
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                   * sin(k*x);
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2);  B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r             * cos(k*x);
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

% --- Evaluate with known constants a, b, c, d ---
if SC < 8
    A_val = a*B1(SC)*T1 - a*B2(SC)*T2;
    B_val = b*(-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_val = c*(B3(SC)*T3 - c*B4(SC)*T4);
    D_val = d*(-B4(SC)*T3 - d*B3(SC)*T4);
else
    A_val = a*B1(SC)*T5 - a*B2(SC)*T6;
    B_val = b*(-B2(SC)*T5 - b*B1(SC)*T6);
    C_val = c*B3(SC)*T7 - c*B4(SC)*T8;
    D_val = d*(-B4(SC)*T7 - d*B3(SC)*T8);
end

F = 2 * R(SC) * (A_val + B_val + C_val + D_val);

end   % shell_forces
```

I.2.3 Non uniform torsion

```
% ========================================================================
% NON-UNIFORM (WARPING) TORSION -- DISTRIBUTION OF TORQUE COMPONENTS
% ========================================================================
% When a thin-walled open section (e.g. I-beam, channel) is twisted, the
% total applied torque T is resisted by TWO mechanisms:
%
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   1. ST. VENANT TORSION (T_SV):
%      Pure shear flow around the cross-section.  Dominates in short
%      members and near free ends where warping is unrestrained.
%
%   2. WARPING TORSION (T_V):
%      Bending of the flanges in opposite directions (bimoment).
%      Dominates near fixed ends where warping is fully restrained.
%
% The governing ODE for a member fixed at the base (x=0) and free at
% the top (x=L), carrying a concentrated torque T at the free end, gives:
%
%   T_V(x)  = T * cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda)
%   T_SV(x) = T * [ 1 - cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda) ]
%
% where:
%   lambda = sqrt(E*C_w / G*J)   [length]  -- torsional characteristic length
%
% For this W-section example lambda = 65.9 in (= 5.49 ft).
%
% AT THE FIXED END (x=0):
%   T_V   = T / cosh(L/lambda)   -> small for long members (SV dominates)
%   T_SV  = T * [1 - 1/cosh(L/lambda)]
%
% AT THE FREE END (x=L):
%   T_V   = T   (all torque is warping torsion at the point of application)
%   T_SV  = 0
%
% This script plots the distribution of both torque components over the
% member height for four different member lengths, illustrating how the
% relative importance of warping vs. St. Venant torsion varies with L/lambda.
%
% REFERENCE SECTION: W-shape with lambda = 65.9 in
% Units: inches for internal calculation, feet for plotting
% ========================================================================

clear; clc; close all;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Display settings
% ------------------------------------------------------------------------
fs   = 16;
font = 'Times New Roman';
scrsz = get(0, 'ScreenSize');

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/1.5, scrsz(4)/2]);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Problem parameters
% ------------------------------------------------------------------------
T      = 1;              % applied torque (normalised)        [kip.in]
lambda = 65.9;           % torsional characteristic length    [in]
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                        % lambda = sqrt(E*Cw / G*J) for the section

L_ft   = [10, 20, 25, 30]; % member lengths to compare          [ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Plot torque distributions for each member length
% ------------------------------------------------------------------------
% Four subplots, one per length.
% x runs from 0 (fixed base) to L (free top where torque is applied).
% Torques are normalised by T so the plots show fractions [0..1].
% Height axis is plotted in feet (x/12) for readability.

for i = 1 : 4

    L_in = L_ft(i) * 12;           % member length in inches
    x    = (0 : L_in);             % position vector, inch increments

    % --- Warping torsion component ---
    % T_V = T * cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda)
    % Maximum at the free end (x=L), minimum at the fixed end (x=0)
    T_V  = T * cosh((L_in - x) / lambda) / cosh(L_in / lambda);

    % --- St. Venant torsion component ---
    % T_SV = T - T_V  (the two must sum to T at every section)
    % Maximum at the fixed end, zero at the free end
    T_SV = T * (1 - cosh((L_in - x) / lambda) / cosh(L_in / lambda));

    % --- Plot: torque on horizontal axis, height on vertical axis ---
    % (vertical axis matches the physical orientation of the member)
    subplot(2, 2, i);
    plot(T_V,  x/12, 'b', ...
         T_SV, x/12, 'r', ...
         'LineWidth', 1.5);

    % Axes: normalised torque 0->1, height 0->30 ft
    xlim([0  1]);
    ylim([0  30]);
    set(gca, 'XTick', 0 : 0.2 : 1.0);
    set(gca, 'YTick', 0 : 5  : 30  );

    grid on;
    xlabel('T / T_{total}  (normalised)',        'FontSize', fs);
    ylabel('Height  [ft]',                       'FontSize', fs);
    title( ['Member length  L = ' num2str(L_ft(i)) ' ft  ' ...
            '(L/\lambda = ' num2str(L_in/lambda,'%.1f') ')'], ...
           'FontSize', fs);

    lgd = legend('T_V  (warping)', 'T_{SV}  (St. Venant)', ...
                 'Location', 'North');
    lgd.FontSize = fs - 2;

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

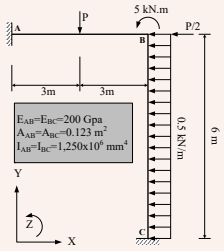
```
    set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

end

sgtitle(['Non-Uniform Torsion:  \lambda = ' num2str(lambda) ' in'], ...
        'FontSize', fs + 2);
```

I.2.4 Orthogonal frame

Analysis of the following orthogonal frame, §42.3.2




```
% ========================================================================
% DIRECT STIFFNESS METHOD -- ORTHOGONAL FRAME (L-SHAPED)
% ========================================================================
% Analyzes a two-element frame with members oriented perpendicular to each
% other (one horizontal, one vertical), meeting at a common node B.
%
% GEOMETRY:
%
%        C (pin -- vertical reaction only)
%        |
%        | Element BC (vertical, length L2)
%        |
%   A ---B   (B = free node: DOFs u_B, v_B, theta_B)
%   Element AB (horizontal, length L1)
%   A is fully fixed.
%
% Both elements are aligned with global axes -> no coordinate transform needed.
%
% FREE DOFs AT NODE B:
%   DOF 1: horizontal displacement u_B
%   DOF 2: vertical displacement   v_B
%   DOF 3: rotation                theta_B
%
% Original code courtesy of Xiao Fu.
% ========================================================================

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Element properties  (SI: kN, m)
% ------------------------------------------------------------------------
L = [6.0;  6.0];          % element lengths            [m]      index: (AB, BC)
A = [0.123; 0.123];       % cross-sectional areas      [m^2]
E = [200e6; 200e6];       % Young's moduli             [kN/m^2]
I = [1250e-6; 1250e-6];   % second moments of area     [m^4]

EA = E .* A;              % axial stiffnesses          [kN]
EI = E .* I;              % bending stiffnesses        [kN.m^2]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Applied loads
% ------------------------------------------------------------------------
P = 1;    % concentrated horizontal force at B    [kN]
M = 5;    % concentrated moment at B              [kN.m]
w = 0.5;  % uniform distributed load on BC        [kN/m]  (transverse on BC)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Reduced global stiffness matrix K (free DOFs at B)
% ------------------------------------------------------------------------
% Assembled by superposing contributions from AB and BC:
%
%   K(1,1): axial  AB  +  bending BC  (u_B direction)
%   K(2,2): bending AB +  axial  BC   (v_B direction)
%   K(3,3): bending AB +  bending BC  (theta_B)
%   K(1,3): coupling from BC (6EI2/L2^2)
%   K(2,3): coupling from AB (-6EI1/L1^2)

K = [ EA(1)/L(1) + 12*EI(2)/L(2)^3,                          0,    6*EI(2)/L(2)^2
          ;
                            0,   EA(2)/L(2) + 12*EI(1)/L(1)^3,  -6*EI(1)/L(1)^2
           ;
               6*EI(2)/L(2)^2,             -6*EI(1)/L(1)^2,    4*EI(1)/L(1) + 4*EI(2)/
    L(2)   ]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Equivalent nodal load vector
% ------------------------------------------------------------------------
% Distributed and element loads -> fixed-end reactions (sign-reversed at B)
% plus directly applied nodal loads.
%
%   AB carries midpoint load P (vertical):
%     fixed-end shear = P/2, fixed-end moment = +/-P*L1/8
%
%   BC carries uniform load w (transverse = horizontal on vertical member):
%     fixed-end shear = w*L2/2, fixed-end moment = +/-w*L2^2/12

NEL = [ -w*L(2)/2                  ;   % DOF 1: fixed-end shear from BC
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        -P/2                          ;   % DOF 2: fixed-end shear from AB
         P*L(1)/8 - w*L(2)^2/12    ];  % DOF 3: fixed-end moments from AB and BC

F   = [ -P/2 ;   % DOF 1: applied horizontal force (half at B)
         0   ;   % DOF 2: no direct vertical force
         M   ];  % DOF 3: applied moment

F_ext = NEL + F;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Solve for displacements at B
% ------------------------------------------------------------------------
Disp = K \ F_ext

% Disp = [u_B [m];  v_B [m];  theta_B [rad]]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Internal forces in element AB
% ------------------------------------------------------------------------
% End A fixed (zero displacements); end B has solved Disp values.
% F_int = k * d - NEL_elem

k_AB   = stiff(E(1), I(1), L(1), A(1));
NEL_AB = [0; -P/2; -P*L(1)/8; 0; -P/2; P*L(1)/8];
d_AB   = [0; 0; 0; Disp(1); Disp(2); Disp(3)];

F_AB = k_AB * d_AB - NEL_AB   % [N_A, V_A, M_A, N_B, V_B, M_B] in LCS

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 -- Internal forces in element BC
% ------------------------------------------------------------------------
% BC is vertical: local axial = global y, local transverse = global x.
% LCS displacements at B:  u_local = -v_B,  v_local = +u_B

k_BC   = stiff(E(2), I(2), L(2), A(2));
NEL_BC = [0; -w*L(2)/2; -w*L(2)^2/12; 0; -w*L(2)/2; w*L(2)^2/12];
d_BC   = [-Disp(2); Disp(1); Disp(3); 0; 0; 0];

F_BC = k_BC * d_BC - NEL_BC   % [N_B, V_B, M_B, N_C, V_C, M_C] in LCS

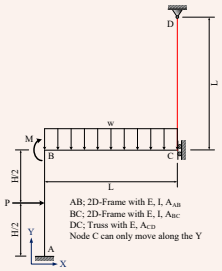

% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% 6x6 Euler-Bernoulli beam-column stiffness matrix in LCS.
%
% DOF order: [u1, v1, theta1, u2, v2, theta2]
%   u     : axial displacement
%   v     : transverse displacement
%   theta : rotation
%   1, 2  : near and far end nodes
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
126
127 function k = stiff(E, I, L, A)
128
129 EA = E * A;
130 EI = E * I;
131
132 k = [ EA/L,           0,           0,  -EA/L,           0,           0 ;
133           0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,       0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
134           0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,       0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
135      -EA/L,           0,           0,   EA/L,           0,           0 ;
136           0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,       0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
137           0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,       0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];
138
139 end
```

I.2.5 Hybrid orthogonal frame

Orthogonal frame solved in §42.3.4




```
1  % ========================================================================
2  % DIRECT STIFFNESS METHOD -- HYBRID ORTHOGONAL FRAME
3  % ========================================================================
4  % Three-element frame: vertical beam-column AB, horizontal beam BC,
5  % and a vertical axial bar DC connecting node C to a fixed support D.
6  %
7  % GEOMETRY:
8  %   A (fixed wall)
9  %   |
10 %   | AB (vertical beam-column, length Lab)
11 %   |
12 %   B ------------------------- C (roller: horizontal DOF only)
13 %         BC (horizontal beam, length Lbc)
14 %                  |
15 %                  | DC (axial bar only, length Ldc)
16 %                  |
17 %                 D (fixed)
18 %
19 % FREE DOFs (4 total at nodes B and C):
20 %   DOF 1: horizontal displacement of B  (Delta_1)
21 %   DOF 2: vertical   displacement of B  (Delta_2)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   DOF 3: rotation at B                (theta_3)
%   DOF 4: horizontal displacement of C  (Delta_4)
%
% LOADING:
%   P : concentrated transverse load at midspan of AB
%   w : uniform distributed load along BC (transverse = vertical)
%   Applied moment -P*Lbc at node B (in NF vector)
%
% UNITS: GPa, kN, mm (consistent throughout)
% =========================================================================

clear; clc;

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Structural properties
% -------------------------------------------------------------------------
E   = 200;          % Young's modulus                   [kN/mm^2 = GPa]
I   = 200e6;        % second moment of area (beams)     [mm^4]

Lab = 8000;         % length of AB                      [mm]
Lbc = 10000;        % length of BC                      [mm]
Ldc = 10000;        % length of DC                      [mm]

Aab = 5000;         % area of AB                        [mm^2]
Abc = 5000;         % area of BC                        [mm^2]
Adc = 100;          % area of DC (axial bar only)       [mm^2]

P   = 10;           % midspan load on AB                [kN]
w   = 1e-3;         % uniform load on BC                [kN/mm]

EI   = E * I;
EAab = E * Aab;
EAbc = E * Abc;
EAdc = E * Adc;

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Nodal force vectors
% -------------------------------------------------------------------------
% NF : forces/moments applied directly at free DOFs
NF = [  0      ;   % DOF 1
        0      ;   % DOF 2
       -P*Lbc  ;   % DOF 3: applied moment at B
        0      ];  % DOF 4

% NEF : equivalent nodal forces from element loads (fixed-end reactions
%       carried to the free DOFs, sign reversed)
%   AB: midpoint load P -> shear P/2 at B, moment P*Lab/8 at B
%   BC: uniform load w  -> shear w*Lbc/2 at B and C, moment w*Lbc^2/12 at B
NEF = [  P/2                    ;   % DOF 1: from AB
        -w*Lbc/2                ;   % DOF 2: from BC
         P*Lab/8 - w*Lbc^2/12   ;   % DOF 3: from AB and BC
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        -w*Lbc/2                ];  % DOF 4: from BC at C

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Reduced global stiffness matrix (4 x 4)
% ------------------------------------------------------------------------
% Superposition of AB (vertical beam), BC (horizontal beam), DC (axial bar)
Ktt = [ 12*EI/Lab^3 + EAbc/Lbc,                    0,         6*EI/Lab^2,
    0        ;
                              0,  EAab/Lab + 12*EI/Lbc^3,  6*EI/Lbc^2,       -12*EI/Lbc
    ^3        ;
                   6*EI/Lab^2,            6*EI/Lbc^2,  4*EI/Lab + 4*EI/Lbc,   -6*EI/Lbc^2
            ;
                              0,          -12*EI/Lbc^3,     -6*EI/Lbc^2,   12*EI/Lbc^3 +
     EAdc/Ldc ];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Solve for displacements
% ------------------------------------------------------------------------
Delta = Ktt \ (NF + NEF);

Delta_1 = Delta(1);   % horizontal displacement of B   [mm]
Delta_2 = Delta(2);   % vertical   displacement of B   [mm]
theta_3 = Delta(3);   % rotation at B                  [rad]
Delta_4 = Delta(4);   % horizontal displacement of C   [mm]

fprintf('Node B:  u = %+.6f mm   v = %+.6f mm   theta = %+.4e rad\n', ...
        Delta_1, Delta_2, theta_3);
fprintf('Node C:  u = %+.6f mm\n', Delta_4);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Internal forces in element AB (vertical beam-column)
% ------------------------------------------------------------------------
% LCS: local x points up (A->B).
%   Local axial at B  =  global vertical   =  Delta_2
%   Local transverse  = -global horizontal = -Delta_1

k_ab   = beam_stiff(E, I, Lab, Aab);
nef_ab = [0; -P/2; -P*Lab/8; 0; -P/2; P*Lab/8];
d_ab   = [0; 0; 0; Delta_2; -Delta_1; theta_3];

F_int_ab = k_ab * d_ab - nef_ab   % [N_A, V_A, M_A, N_B, V_B, M_B]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Internal forces in element BC (horizontal beam)
% ------------------------------------------------------------------------
% LCS = GCS (BC is horizontal, no transformation needed).
% C: roller -> v_C = 0, pin -> theta_C = 0; only u_C = Delta_4 is free.

k_bc   = beam_stiff(E, I, Lbc, Abc);
nef_bc = [0; -w*Lbc/2; -w*Lbc^2/12; 0; -w*Lbc/2; w*Lbc^2/12];
d_bc   = [Delta_1; Delta_2; theta_3; 0; Delta_4; 0];
```

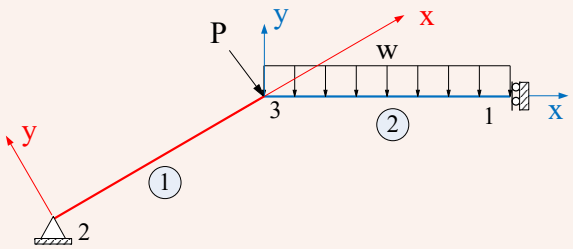

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
120
121 F_int_bc = k_bc * d_bc - nef_bc   % [N_B, V_B, M_B, N_C, V_C, M_C]
122
123 % ------------------------------------------------------------------------
124 % Section 7 -- Internal forces in element DC (axial bar)
125 % ------------------------------------------------------------------------
126 % Pin-ended bar: 2x2 stiffness, axial only.
127 % D is fixed; C moves horizontally by Delta_4.
128 % DC is vertical so local axial of C = -Delta_4.
129
130 k_dc  = EAdc/Ldc * [1, -1; -1, 1];
131 d_dc  = [0; -Delta_4];
132
133 F_int_dc = k_dc * d_dc   % [N_D, N_C] axial forces
134
135
136 % ========================================================================
137 % LOCAL FUNCTION: beam_stiff
138 % ========================================================================
139 % 6x6 Euler-Bernoulli beam-column stiffness matrix in LCS.
140 % DOF order: [u1, v1, theta1, u2, v2, theta2]
141
142 function k = beam_stiff(E, I, L, A)
143
144 EA = E * A;
145 EI = E * I;
146
147 k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
148         0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
149         0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
150     -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
151         0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
152         0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];
153
154 end
```

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.2.6 Frame; hard-wired




```
clc; clear;

% ========================================================================
% DIRECT STIFFNESS METHOD -- INCLINED FRAME (HARD-WIRED)
% ========================================================================
% Analyzes a two-element plane frame where both elements are inclined,
% requiring coordinate transformation between LCS and GCS.
%
% GEOMETRY (coordinates in meters):
%   Node 1: (0,     0)     fixed support  (restrained DOFs 4, 5, 6)
%   Node 2: (7.416, 3)     free node      (free DOFs 1, 2, 3)
%   Node 3: (15.416,3)     fixed support  (restrained DOFs 7, 8, 9)
%
%   Element 1: Node 1 to Node 2  (inclined)
%   Element 2: Node 2 to Node 3  (horizontal at y = 3 m)
%
% FREE DOFs AT NODE 2:
%   DOF 1: horizontal displacement u
%   DOF 2: vertical   displacement v
%   DOF 3: rotation theta
%
% LOADING:
%   Element 2: uniform distributed load 4 kN/m (transverse)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   Node 2:    concentrated 50 kN load (components resolved into DOFs 1,2,3)
%
% KEY STEPS:
%   1. stiff() builds k (LCS), K (GCS), Gamma for each inclined element
%   2. Augmented 9x9 stiffness matrix assembled via LM connectivity
%   3. Ktt (3x3 free-DOF block) solved for Node 2 displacements
%   4. Reactions recovered from Kut partition + fixed-end corrections
%   5. Internal forces recovered in LCS for each element
%
% UNITS: kN, m, kPa  (converted from mm^2, mm^4, GPa at input)
% =========================================================================

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 1 - Structural properties (input in mm/GPa, converted to m/kPa)
% -------------------------------------------------------------------------
A  = 6000  / 1e6;    % cross-sectional area  [mm^2 -> m^2]
II = 200e6 / 1e12;   % second moment         [mm^4 -> m^4]
EE = 200   * 1e6;    % Young's modulus       [GPa  -> kPa]

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2 - Element stiffness matrices
% -------------------------------------------------------------------------
k_loc = zeros(6,6,2);   % LCS stiffness
K_glo = zeros(6,6,2);   % GCS stiffness
Gamma = zeros(6,6,2);   % rotation matrices

% Element 1: Node1(0,0) to Node2(7.416,3)
[k_loc(:,:,1), K_glo(:,:,1), Gamma(:,:,1)] = stiff(EE, II, A, [0,0],     [7.416,3]);

% Element 2: Node2(7.416,3) to Node3(15.416,3)
[k_loc(:,:,2), K_glo(:,:,2), Gamma(:,:,2)] = stiff(EE, II, A, [7.416,3], [15.416,3]);

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 3 - Location matrix (connectivity)
% -------------------------------------------------------------------------
% LM(elem, 1:6) maps local DOFs 1-6 to global DOF numbers.
% Rows = elements; columns = [near-end DOFs, far-end DOFs].
%
%   Element 1: near=Node1 (global 4,5,6), far=Node2 (global 1,2,3)
%   Element 2: near=Node2 (global 1,2,3), far=Node3 (global 7,8,9)

LM = [ 4, 5, 6, 1, 2, 3 ;
       1, 2, 3, 7, 8, 9 ];

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 - Assemble augmented global stiffness matrix (9x9)
% -------------------------------------------------------------------------
Kaug = zeros(9);
for elem = 1:2
    for r = 1:6
        lr = abs(LM(elem,r));
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        for c = 1:6
            lc = abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc) = Kaug(lr,lc) + K_glo(r,c,elem);
        end
    end
end

Ktt = Kaug(1:3, 1:3);   % free-DOF partition (Node 2)
Kut = Kaug(4:9, 1:3);   % restrained-free coupling (for reactions)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 - Fixed-end actions (FEA) from distributed load on Element 2
% ------------------------------------------------------------------------
% Element 2 carries w = 4 kN/m uniform transverse load.
% Fixed-end reactions in LCS (Euler-Bernoulli, both ends clamped):
%   Shear at each end:    w*L/2
%   Moment at near end:  +w*L^2/12
%   Moment at far  end:  -w*L^2/12

w   = 4;     % distributed load on element 2   [kN/m]
L2  = sqrt((15.416-7.416)^2 + (3-3)^2);        % = 8 m

fea = zeros(6,2);
fea(:,2) = [0; w*L2/2; w*L2^2/12; 0; w*L2/2; -w*L2^2/12];

% Transform FEA to GCS
FEA_glo = zeros(6,2);
for elem = 1:2
    FEA_glo(:,elem) = Gamma(:,:,elem) * fea(:,elem);
end

% Fixed-end actions at restrained DOFs (for reaction correction)
FEA_Rest = [0, 0, 0, FEA_glo(4:6,2)'];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 - Applied load vector at free DOFs
% ------------------------------------------------------------------------
% 50 kN concentrated load on element 2; position gives reaction fractions.
% Negative of near-end FEA is added to account for element loading.

P = zeros(3,1);
P(1) =  50 * 3/8;
P(2) = -50 * 7.416/8 - fea(2,2);
P(3) = -fea(3,2);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 - Solve for displacements at Node 2
% ------------------------------------------------------------------------
Displacements = Ktt \ P

% ------------------------------------------------------------------------
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% Section 8 - Support reactions
% ------------------------------------------------------------------------
Reactions = Kut * Displacements + FEA_Rest'

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 9 - Internal forces in LCS for each element
% ------------------------------------------------------------------------
d_global        = zeros(6,1,2);
d_global(:,:,1) = [0;0;0; Displacements(1:3)];
d_global(:,:,2) = [Displacements(1:3); 0;0;0];

fprintf('\n--- Internal Forces in LCS ---\n');
fprintf('%-12s %8s %8s %8s %8s %8s %8s\n', 'Element','N_i','V_i','M_i','N_j','V_j','M_j'
    );
for elem = 1:2
    d_local = Gamma(:,:,elem) * d_global(:,:,elem);
    f_int   = k_loc(:,:,elem) * d_local + fea(:,elem);
    fprintf('Element %-4d %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f\n', ...
            elem, f_int(1),f_int(2),f_int(3),f_int(4),f_int(5),f_int(6));
end


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% Computes LCS stiffness k, GCS stiffness K, and rotation matrix Gamma
% for an inclined 2D Euler-Bernoulli beam-column.
%
% alpha = atan2(dy,dx) is the element inclination angle.
% Gamma rotates a GCS 6-DOF vector into LCS.
% K = Gamma' * k * Gamma

function [k, K, Gamma] = stiff(EE, II, A, i, j)

dx    = j(1) - i(1);
dy    = j(2) - i(2);
L     = sqrt(dx^2 + dy^2);
alpha = atan2(dy, dx);
c     = cos(alpha);
s     = sin(alpha);

Gamma = [ c,  s,  0,  0,  0,  0 ;
         -s,  c,  0,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  1,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  0,  c,  s,  0 ;
          0,  0,  0, -s,  c,  0 ;
          0,  0,  0,  0,  0,  1 ];

EI = EE * II;
EA = EE * A;

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
          0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
      -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
          0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

K = Gamma' * k * Gamma;

end
```

I.2.7 Direct stiffness method; frame

I.2.8 Main code

```
% ========================================================================
% GENERAL 2D FRAME ANALYSIS -- DIRECT STIFFNESS METHOD
% ========================================================================
% A general-purpose program for linear elastic analysis of 2D frames
% (beam-columns with axial, shear, and bending DOFs).
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Main driver script
%   Part 2  -- Input data (problem definition): prob_1 (inline)
%   Part 3  -- function stiff        : element k, K, Gamma
%   Part 4  -- function plot_frame   : geometry and support visualisation
%   Part 5  -- function print1       : echo input to output file
%   Part 6  -- function print2       : write results to output file
%
% THEORY SUMMARY:
%   Each 2D beam-column element has 6 DOFs: [u_i, v_i, theta_i, u_j, v_j, theta_j]
%   The element stiffness is formed in the Local Coordinate System (LCS)
%   and rotated to the Global Coordinate System (GCS) via:
%       K_global = Gamma^T * k_local * Gamma
%
%   The augmented system (free + restrained DOFs) is assembled and
%   partitioned:
%       [ K_tt  K_tu ] { Delta_t }   { P_t }
%       [ K_ut  K_uu ] { Delta_u } = { R   }
%   where t = free (unknown) DOFs, u = restrained (known = 0) DOFs.
%   Solving the top partition: Delta_t = K_tt^-1 * P_t
%   Reactions from the bottom: R = K_ut * Delta_t - FEA_restrained
%
% ID MATRIX CONVENTION:
%   ID(node, dof) = 0 -> DOF is FREE    (will be numbered first)
%   ID(node, dof) = 1 -> DOF is FIXED   (will be numbered after free DOFs)
%   After renumbering, ID holds the global equation number for each DOF.
%
% INPUT DATA ARRAYS (defined in prob_1 section below):
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   coord(n,2)          : nodal x,y coordinates
%   lnods(e,2)          : element connectivity [near_node, far_node]
%   ID(n,3)             : boundary condition flags (0=free, 1=fixed)
%   E(e), A(e), Iz(e)   : element material and section properties
%   NodalLoad(i,4)      : [node, Fx, Fy, Mz] for each applied nodal load
%   ElementLoad(e,2)    : [element, w] for each distributed load
%
% OUTPUT: text file 'my_output.dat' with full analysis results
% ======================================================================

clear;
fid = fopen('my_output.dat', 'w');
ndofpn = 3;   % degrees of freedom per node (u, v, theta)

% ======================================================================
% PART 1 -- PROBLEM DEFINITION  (inline replacement for prob_1.m)
% ======================================================================
% 5-node, 5-element portal frame with two fixed supports.
% Units: mm, kN  (E in kN/mm^2, A in mm^2, Iz in mm^4)
%
% NODE LAYOUT:
%   Node 1: (0,    0)     fixed base left
%   Node 2: (9000, 0)     fixed base right
%   Node 3: (0,    6000)  left knee (free)
%   Node 4: (9000, 6000)  right knee (free)
%   Node 5: (0,   12000)  top left (free)
%
% ELEMENT CONNECTIVITY:
%   Elem 1: Node 1 -> Node 3  (left column, lower)
%   Elem 2: Node 2 -> Node 4  (right column)
%   Elem 3: Node 3 -> Node 5  (left column, upper)
%   Elem 4: Node 3 -> Node 4  (beam at mid-height)
%   Elem 5: Node 4 -> Node 5  (diagonal or upper beam)

Nnodes = 5;
Nelem  = 5;

% ID matrix: 0 = free DOF, 1 = restrained DOF
% Rows = nodes, columns = [u, v, theta]
ID = [ 1, 1, 1 ;    % Node 1: fully fixed
       1, 1, 1 ;    % Node 2: fully fixed
       0, 0, 0 ;    % Node 3: free
       0, 0, 0 ;    % Node 4: free
       0, 0, 0 ];   % Node 5: free

coord = [      0,     0 ;
            9000,     0 ;
               0,  6000 ;
            9000,  6000 ;
               0, 12000 ];

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
lnods = [ 1, 3 ;
          2, 4 ;
          3, 5 ;
          3, 4 ;
          4, 5 ];

% Section and material properties (uniform for all elements)
E  = 30e6  * ones(1, Nelem);   % Young's modulus      [kN/mm^2]
A  = 75000 * ones(1, Nelem);   % cross-section area   [mm^2]
Iz = 4.8e8 * ones(1, Nelem);   % second moment        [mm^4]

% Nodal loads: [node, Fx, Fy, Mz]
Nnodal_load = 2;
NodalLoad = [ 3,  80,  0,  0 ;   % 80 kN horizontal at Node 3
              5,  40,  0,  0 ];   % 40 kN horizontal at Node 5

% Element loads: [element, w (transverse distributed load)]
Nelement_load = 1;
ElementLoad   = [ 4,  1e-3 ];    % w = 0.001 kN/mm on element 4

% ========================================================================
% PART 2 -- VISUALISE FRAME GEOMETRY
% ========================================================================
plot_frame(coord, lnods, ID);

% ========================================================================
% PART 3 -- ELEMENT STIFFNESS MATRICES
% ========================================================================
% For each element, compute:
%   k_loc : stiffness in Local Coordinate System  (6x6)
%   K_glo : stiffness in Global Coordinate System (6x6) = Gamma^T k Gamma
%   Gamma : rotation matrix from GCS to LCS       (6x6)

k_loc = zeros(6, 6, Nelem);
K_glo = zeros(6, 6, Nelem);
Gamma = zeros(6, 6, Nelem);

for e = 1 : Nelem
    n1 = lnods(e,1);
    n2 = lnods(e,2);
    xy1 = coord(n1, :);
    xy2 = coord(n2, :);
    [k_loc(:,:,e), K_glo(:,:,e), Gamma(:,:,e)] = stiff(E(e), Iz(e), A(e), xy1, xy2);
end

% ========================================================================
% PART 4 -- DOF NUMBERING: update ID matrix
% ========================================================================
% Free DOFs are numbered first (1 .. size_K_tt),
% then restrained DOFs (size_K_tt+1 .. size_K_aug).
% This ensures the free-DOF partition occupies the top-left of K_aug.
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
137
138 orig_ID = ID;
139 eq_num  = 0;
140
141 % Pass 1: number free DOFs
142 for i = 1 : Nnodes
143     for j = 1 : ndofpn
144         if orig_ID(i,j) == 0
145             eq_num      = eq_num + 1;
146             ID(i,j) = eq_num;
147         end
148     end
149 end
150 size_K_tt = eq_num;   % number of free DOFs (= size of K_tt)
151
152 % Pass 2: number restrained DOFs
153 for i = 1 : Nnodes
154     for j = 1 : ndofpn
155         if orig_ID(i,j) == 1
156             eq_num      = eq_num + 1;
157             ID(i,j) = eq_num;
158         end
159     end
160 end
161 size_K_aug = eq_num;  % total DOFs (free + restrained)
162
163 print1(fid, Nnodes, Nelem, size_K_tt, size_K_aug, coord, ID, lnods, E, A, Iz);
164
165 % ========================================================================
166 % PART 5 -- LOCATION MATRIX (LM)
167 % ========================================================================
168 % LM(e, 1:6) maps local DOF indices 1..6 of element e
169 % to global equation numbers using the updated ID matrix.
170 % Local DOFs 1-3 = near-end node; 4-6 = far-end node.
171
172 LM = zeros(Nelem, 6);
173 for e = 1 : Nelem
174     LM(e,:) = [ ID(lnods(e,1), :),  ID(lnods(e,2), :) ];
175 end
176
177 % ========================================================================
178 % PART 6 -- ASSEMBLE AUGMENTED GLOBAL STIFFNESS MATRIX
179 % ========================================================================
180 % The augmented matrix K_aug includes all DOFs (free + restrained).
181 % Each element's GCS stiffness is scattered into K_aug via LM.
182
183 K_aug = zeros(size_K_aug);
184
185 for e = 1 : Nelem
186     for r = 1 : 6
187         lr = LM(e, r);      % global row
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        for c = 1 : 6
            lc = LM(e, c);  % global column
            K_aug(lr, lc) = K_aug(lr, lc) + K_glo(r, c, e);
        end
    end
end

% Extract the free-DOF partition (top-left block)
K_tt = K_aug(1:size_K_tt, 1:size_K_tt);

% Extract the coupling partition (needed for reaction recovery)
K_ut = K_aug(size_K_tt+1 : size_K_aug,  1:size_K_tt);

% ======================================================================
% PART 7 -- LOAD VECTOR ASSEMBLY
% ======================================================================
% The total load vector P_tt combines:
%   (a) Directly applied nodal forces/moments
%   (b) Equivalent nodal forces (fixed-end reactions) from element loads,
%       transformed to GCS and added at the free DOFs with reversed sign

P_tt = zeros(size_K_tt, 1);

% --- (a) Directly applied nodal loads ---
for i = 1 : Nnodal_load
    node = NodalLoad(i, 1);
    for j = 1 : ndofpn
        eq = ID(node, j);
        if eq <= size_K_tt
            P_tt(eq) = P_tt(eq) + NodalLoad(i, j+1);
        end
    end
end

% --- (b) Equivalent nodal forces from distributed element loads ---
% Fixed-end reactions in LCS for uniform transverse load w over length L:
%   Near end: [ 0,  w*L/2,  w*L^2/12,  0,  w*L/2,  -w*L^2/12 ]
%
% These are transformed to GCS and subtracted from the load vector
% at free DOFs (and stored for reaction correction at restrained DOFs).

NEF_local  = zeros(Nelement_load, 6);
NEF_global = zeros(Nelement_load, 6);
R_nef      = zeros(size_K_aug - size_K_tt, 1);  % FEA at restrained DOFs

for e = 1 : Nelement_load
    elem = ElementLoad(e, 1);
    w    = ElementLoad(e, 2);
    n1   = lnods(elem, 1);
    n2   = lnods(elem, 2);
    xy1  = coord(n1, :);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    xy2  = coord(n2, :);
    L    = sqrt((xy2(2)-xy1(2))^2 + (xy2(1)-xy1(1))^2);

    % Fixed-end reactions in LCS (uniform transverse load, both ends fixed)
    NEF_local(e,:)  = [0,  w*L/2,  w*L^2/12,  0,  w*L/2,  -w*L^2/12];

    % Transform to GCS using Gamma^T (Gamma maps GCS->LCS, so Gamma^T maps LCS->GCS)
    NEF_global(e,:) = (Gamma(:,:,elem)' * NEF_local(e,:)')';
end

% Scatter NEF into load vector (free DOFs) or reaction correction (fixed DOFs)
for e = 1 : Nelement_load
    elem = ElementLoad(e, 1);
    for i = 1 : 6
        eq = LM(elem, i);
        if eq <= size_K_tt
            P_tt(eq) = P_tt(eq) + NEF_global(e, i);
        else
            R_nef(eq - size_K_tt) = R_nef(eq - size_K_tt) + NEF_global(e, i);
        end
    end
end

% ======================================================================
% PART 8 -- SOLVE FOR DISPLACEMENTS
% ======================================================================
Displacements = K_tt \ P_tt;

% ======================================================================
% PART 9 -- RECOVER SUPPORT REACTIONS
% ======================================================================
% Reactions = K_ut * Delta_t - FEA_restrained
% The FEA term corrects for the equivalent loads that were applied at
% restrained nodes due to element distributed loads.

Reactions = K_ut * Displacements - R_nef;

% ======================================================================
% PART 10 -- RECOVER ELEMENT INTERNAL FORCES (in LCS)
% ======================================================================
% For each element:
%   1. Extract global displacements at both end nodes from Displacements
%      (restrained DOFs have zero displacement)
%   2. Rotate to LCS:  d_local = Gamma * d_global
%   3. Compute internal forces:  f = k_loc * d_local
%   4. Subtract fixed-end actions for loaded elements (equilibrium correction)

int_forces = zeros(6, Nelem);

for e = 1 : Nelem
    % Assemble the 6x1 global displacement vector for this element
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    d_global = zeros(6, 1);
    for i = 1 : 6
        eq = LM(e, i);
        if eq <= size_K_tt
            d_global(i) = Displacements(eq);
        else
            d_global(i) = 0;   % restrained DOF
        end
    end

    % Rotate to LCS and compute internal forces
    d_local        = Gamma(:,:,e) * d_global;
    int_forces(:,e) = k_loc(:,:,e) * d_local;

    % Subtract fixed-end actions for distributed loads on this element
    for j = 1 : Nelement_load
        if ElementLoad(j,1) == e
            int_forces(:,e) = int_forces(:,e) - NEF_local(j,:)';
        end
    end
end

% Write all results to output file
print2(fid, size_K_tt, size_K_aug, ID, Displacements, Reactions, ...
       Nelem, lnods, int_forces, Nnodal_load, NodalLoad, ...
       Nelement_load, ElementLoad);

fclose(fid);
fprintf('Analysis complete. Results written to my_output.dat\n');


% =========================================================================
% FUNCTION: stiff
% =========================================================================
% Computes element stiffness for an arbitrarily inclined 2D beam-column.
%
% INPUTS:
%   EE, II, A  : Young's modulus, second moment, cross-section area
%   xy_1, xy_2 : [x,y] coordinates of near and far end nodes
%
% OUTPUTS:
%   k     : 6x6 stiffness matrix in LCS
%   K     : 6x6 stiffness matrix in GCS  (= Gamma^T k Gamma)
%   Gamma : 6x6 rotation matrix (GCS vector -> LCS vector)
%
% SPECIAL CASE: vertical elements (dx approx 0) are detected explicitly
% to avoid numerical issues with atan2 near +/-pi/2.

function [k, K, Gamma] = stiff(EE, II, A, xy_1, xy_2)

dx = xy_2(1) - xy_1(1);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
dy = xy_2(2) - xy_1(2);
L  = sqrt(dx^2 + dy^2);

% Inclination angle -- handle near-vertical elements explicitly
if abs(dx) > max(abs(xy_2(1)), abs(xy_1(1))) * 1e-6
    alpha = atan2(dy, dx);
else
    alpha = (dy > 0) * pi/2 + (dy <= 0) * (-pi/2);
end

c = cos(alpha);
s = sin(alpha);

% Rotation matrix: transforms a GCS 6-DOF vector to LCS
Gamma = [ c,  s,  0,  0,  0,  0 ;
         -s,  c,  0,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  1,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  0,  c,  s,  0 ;
          0,  0,  0, -s,  c,  0 ;
          0,  0,  0,  0,  0,  1 ];

% Element stiffness in LCS (Euler-Bernoulli beam-column)
EI = EE * II;
EA = EE * A;

k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
          0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
      -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
          0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

K = Gamma' * k * Gamma;

end   % stiff


% ======================================================================
% FUNCTION: plot_frame
% ======================================================================
% Draws the frame geometry: elements (blue), free nodes (magenta circles),
% support symbols (red), element numbers, and node numbers.
%
% Support type is inferred from the ID row for each node:
%   [1,1,1] -> fixed wall     (hatched bar)
%   [1,1,0] -> pin support    (triangle)
%   [0,1,0] -> horizontal roller
%   [1,0,0] -> vertical roller
%   [0,1,1] -> horizontal roller with rotation fixed
%   [1,0,1] -> vertical roller with rotation fixed

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
function plot_frame(coord, lnods, ID)

x = coord(:,1);
y = coord(:,2);

figure;
margin      = max(max(x)-min(x), max(y)-min(y)) / 10;
ax          = [min(x)-margin, max(x)+margin, min(y)-margin, max(y)+margin];
axis(ax);  axis('equal');  hold on;

n_nodes    = size(coord,  1);
n_elements = size(lnods,  1);
n_nodes_id = size(ID,     1);   % may differ from n_nodes if ID is larger
axlim      = axis;
cs         = max(axlim(2)-axlim(1), axlim(4)-axlim(3)) / 40;  % circle size

% --- Draw support symbols ---
for i = 1 : n_nodes_id
    bc = ID(i,:);
    xi = x(i);  yi = y(i);
    theta_circle = 0 : 0.1 : 2*pi;

    % Roller symbols (circles)
    if isequal(bc, [0,1,0]) || isequal(bc, [1,1,0]) || isequal(bc, [0,1,1])
        plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi, ...
             cos(theta_circle)*cs/2 - cs/2 + yi, 'r');
    end
    if isequal(bc, [1,0,0]) || isequal(bc, [1,0,1])
        plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi - cs*0.5, ...
             cos(theta_circle)*cs/2, 'r');
    end

    % Triangle for pin
    if isequal(bc, [1,1,0])
        plot([xi, xi-cs, xi+cs, xi], [yi, yi-cs, yi-cs, yi], 'r');
    end

    % Horizontal platform (hatching) -- for horizontal rollers, pins, fixed
    if any([isequal(bc,[0,1,0]), isequal(bc,[1,1,0]), isequal(bc,[0,1,1]), isequal(bc
    ,[1,1,1])])
        ybase = yi - cs + cs * isequal(bc,[1,1,1]);
        plot([xi-2*cs, xi+2*cs], [ybase, ybase], 'r');
        for hx = -2:0.5:2
            plot([xi+hx*cs, xi+(hx-0.5)*cs], [ybase, ybase-cs*0.5], 'r');
        end
    end

    % Vertical platform -- for vertical rollers
    if any([isequal(bc,[1,0,0]), isequal(bc,[1,0,1])])
        xbase = xi - cs;
        plot([xbase, xbase], [yi-2*cs, yi+2*cs], 'r');
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        for vy = -1.5:0.5:2
            plot([xbase, xbase-cs], [yi+vy*cs, yi+(vy-0.5)*cs], 'r');
        end
    end

    % Extra rollers for multi-roller supports
    if isequal(bc, [0,1,1])
        for dx = [-1, 0, 1]
            plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi + dx*cs, ...
                 cos(theta_circle)*cs/2 - cs/2 + yi, 'r');
        end
    end
    if isequal(bc, [1,0,1])
        for dy = [-1, 0, 1]
            plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi - cs*0.5, ...
                 cos(theta_circle)*cs/2 + dy*cs, 'r');
        end
    end
end

% --- Draw elements ---
for i = 1 : n_elements
    plot([x(lnods(i,1)), x(lnods(i,2))], ...
         [y(lnods(i,1)), y(lnods(i,2))], 'b', 'LineWidth', 1.5);
end

% --- Draw free nodes ---
for i = 1 : n_nodes
    if ~max(ID(i,:))
        plot(x(i), y(i), 'mo', 'MarkerSize', 6);
    end
end

% --- Element numbers (blue, at midpoint) ---
set(gca, 'DefaultTextColor', 'blue');
for i = 1 : n_elements
    xm = (x(lnods(i,1)) + x(lnods(i,2)))/2 + cs;
    ym = (y(lnods(i,1)) + y(lnods(i,2)))/2 + cs;
    text(xm, ym, int2str(i), 'Color', 'blue');
end

% --- Node numbers (magenta, offset) ---
for i = 1 : n_nodes
    text(x(i)+cs, y(i)+cs, int2str(i), 'Color', 'magenta');
end

hold off;  grid on;
title('Frame Geometry');

end   % plot_frame

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
493
494 % ======================================================================
495 % FUNCTION: print1  (echo input data to output file)
496 % ======================================================================
497 function print1(fid, Nnodes, Nelem, size_K_tt, size_K_aug, coord, ID, ...
498                 lnods, E, A, Iz)
499
500 fprintf(fid, '      ******************************************\n');
501 fprintf(fid, '      *  Computer Program for 2D Frame Analysis  *\n');
502 fprintf(fid, '      ******************************************\n');
503 fprintf(fid, '\nNumber of Nodes:              %d\n', Nnodes);
504 fprintf(fid, 'Number of Elements:          %d\n', Nelem);
505 fprintf(fid, 'Number of Free DOFs:         %d\n', size_K_tt);
506 fprintf(fid, 'Number of Restrained DOFs:   %d\n', size_K_aug - size_K_tt);
507
508 fprintf(fid, '\nNodal Information:\n');
509 for inode = 1 : Nnodes
510     fprintf(fid, '  Node %d  (x=%9.3e, y=%9.3e)\n', ...
511             inode, coord(inode,1), coord(inode,2));
512     dof_str = '';
513     labels  = {'  u (X)', '  v (Y)', '  theta'};
514     for j = 1 : 3
515         if ID(inode,j) <= size_K_tt && ID(inode,j) > 0
516             dof_str = [dof_str, labels{j}];
517         end
518     end
519     if isempty(dof_str)
520         dof_str = '  none (fully fixed)';
521     end
522     fprintf(fid, '    Free DOFs:%s\n', dof_str);
523 end
524
525 fprintf(fid, '\nElement Information:\n');
526 for ielem = 1 : Nelem
527     fprintf(fid, '  Element %d  (%d -> %d)', ielem, lnods(ielem,1), lnods(ielem,2));
528     fprintf(fid, '   E=%9.3e  A=%9.3e  Iz=%9.3e\n', E(ielem), A(ielem), Iz(ielem));
529 end
530
531 end   % print1
532
533
534 % ======================================================================
535 % FUNCTION: print2  (write results to output file)
536 % ======================================================================
537 function print2(fid, size_K_tt, size_K_aug, ID, Displacements, Reactions, ...
538                 Nelem, lnods, int_forces, Nnodal_load, NodalLoad, ...
539                 Nelement_load, ElementLoad)
540
541 dof_names = {'delta_X', 'delta_Y', 'rot_Z  '};
542
543 % --- Applied loads ---
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
fprintf(fid, '\n\nApplied Nodal Loads:\n');
for i = 1 : Nnodal_load
    fprintf(fid, '  Node %d:  Fx=%9.3e  Fy=%9.3e  Mz=%9.3e\n', ...
            NodalLoad(i,1), NodalLoad(i,2), NodalLoad(i,3), NodalLoad(i,4));
end

fprintf(fid, '\nApplied Element Loads:\n');
for i = 1 : Nelement_load
    fprintf(fid, '  Element %d:  distributed w = %9.3e\n', ...
            ElementLoad(i,1), ElementLoad(i,2));
end

% --- Displacements ---
fprintf(fid, '\n\nNodal Displacements:\n');
for eq = 1 : size_K_tt
    [node, dof] = find(ID == eq);
    fprintf(fid, '  Node %2d  %-9s  %+12.5e\n', ...
            node, dof_names{dof}, Displacements(eq));
end

% --- Reactions ---
fprintf(fid, '\n\nSupport Reactions:\n');
for eq = 1 : size_K_aug - size_K_tt
    [node, dof] = find(ID == size_K_tt + eq);
    fprintf(fid, '  Node %2d  %-9s  %+12.5e\n', ...
            node, dof_names{dof}, Reactions(eq));
end

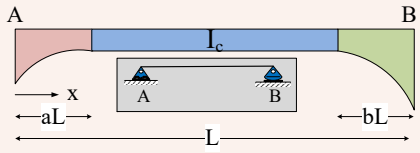
% --- Internal forces ---
fprintf(fid, '\n\nElement Internal Forces (Local Coordinate System):\n');
force_labels = {'N  (axial)', 'V  (shear)', 'M  (moment)', ...
                'N  (axial)', 'V  (shear)', 'M  (moment)'};
for ielem = 1 : Nelem
    fprintf(fid, '\n  Element %d\n', ielem);
    for idof = 1 : 6
        if idof == 1
            fprintf(fid, '    Near-end node %d:\n', lnods(ielem,1));
        end
        if idof == 4
            fprintf(fid, '    Far-end  node %d:\n', lnods(ielem,2));
        end
        fprintf(fid, '      %-12s  %+12.5e\n', ...
                force_labels{idof}, int_forces(idof,ielem));
    end
end

end   % print2
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.2.9 Stiffness matrix of non-prismatic members

Listing of the Matlab code that generates plots in Fig. 46.11, and generate the stiffness matrix of non-prismatic members. This is based on (Portland Cement Association, 1947).




```
% ========================================================================
% STIFFNESS MATRIX AND FIXED-END MOMENTS FOR NON-PRISMATIC BEAM MEMBERS
% ========================================================================
% Computes the exact stiffness matrix and fixed-end moments (FEM) for a
% beam with variable cross-section -- specifically a member with haunches
% (tapered ends) and a prismatic central segment.
%
% MEMBER PROFILE:
%
%   |<-- a*L -->|<------ (1-a-b)*L ------>|<-- b*L -->|
%   A           |                          |           B
%   [left haunch]   [prismatic centre]      [right haunch]
%
%   Moment of inertia profile:
%     Left haunch  (0 <= x <= a*L):        I(x) = Ic * (1 + ra*(1 - x/(a*L))^n)^3
%     Centre segment (a*L <= x <= (1-b)*L): I(x) = Ic  (constant)
%     Right haunch ((1-b)*L <= x <= L):    I(x) = Ic * (1 + rb*(1 - (L-x)/(b*L))^n)^3
%
%   where ra, rb are the haunch depth ratios (0 = no haunch, prismatic)
%   and n is the haunch shape exponent (n=1: linear, n=2: parabolic).
%
% METHOD -- FLEXIBILITY APPROACH:
%   The 2x2 flexibility matrix d is built by numerical integration of the
%   virtual work integrals (unit moment diagrams x 1/EI).
%   The stiffness matrix is then obtained by inversion and static
%   condensation, following the force method:
%       k_tt = d^-1
%       k = B^T * d^-1 * B  (after condensation and permutation)
%
% FIXED-END MOMENTS (FEM) for uniform transverse load w:
%   Computed from the compatibility equations for a fixed-fixed beam,
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   integrating the particular solution against the flexibility kernel.
%   Output FEM = [M_A; M_B] normalised so that w=1 gives actual moments.
%
% DOF ORDER IN OUTPUT STIFFNESS MATRIX k (4x4):
%   [v_A, theta_A, v_B, theta_B]   (transverse displacements and rotations)
%
% PARAMETRIC STUDY (driver script below):
%   Plots surfaces of k(2,2) and FEM(1) as functions of haunch geometry
%   to visualise sensitivity of stiffness and fixed-end moments to
%   haunch length (a,b) and depth ratio (r).
%
% INPUTS TO NonPrismatic():
%   a   : left  haunch length as fraction of L    [0..0.5]
%   b   : right haunch length as fraction of L    [0..0.5]  (a+b <= 1)
%   L   : member length                           [any consistent unit]
%   Ic  : moment of inertia of prismatic centre   [length^4]
%   ra  : left  haunch depth ratio                [>= 0]
%   rb  : right haunch depth ratio                [>= 0]
%   n   : haunch shape exponent (1=linear,2=parabolic)
%
% OUTPUTS:
%   k   : 4x4 stiffness matrix  [force/length units consistent with input]
%   FEM : [M_A; M_B] fixed-end moments for w=1 uniform load
% ========================================================================



% ========================================================================
% DRIVER SCRIPT -- parametric surfaces
% ========================================================================

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;
font  = 'Times New Roman';

% Fixed parameters for the parametric study
Ic = 1;    % normalised (results are per unit Ic)
n  = 2;    % parabolic haunches
L  = 1;    % normalised length

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.5]);

% ------------------------------------------------------------------------
% Plot 1 & 3: symmetric haunches (a=b, ra=rb)
% Vary haunch length a in [0.2, 0.4] and depth ratio r in [0, 4]
% ------------------------------------------------------------------------
[A_grid, R_grid] = meshgrid(0.2:0.01:0.4,  0:0.2:4);
K_surf   = zeros(size(A_grid));
FEM_surf = zeros(size(A_grid));

for i = 1 : size(A_grid, 1)
    for j = 1 : size(A_grid, 2)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        a = A_grid(i,j);
        r = R_grid(i,j);
        [k_ij, fem_ij] = NonPrismatic(a, a, L, Ic, r, r, n);
        K_surf(i,j)   = k_ij(2,2) / 4;    % normalised bending stiffness
        FEM_surf(i,j) = fem_ij(1) * 12;   % normalised fixed-end moment
    end
end

subplot(2,2,1);
surf(A_grid, R_grid, K_surf);
xlabel('a');  ylabel('r');  zlabel('k_{22}/4');
title('Stiffness: a=b, r_a=r_b');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0 1 2 3 4]);
zticks([0 2 4 6 8]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

subplot(2,2,3);
surf(A_grid, R_grid, FEM_surf);
xlabel('a');  ylabel('r');  zlabel('FEM');
title('Fixed-End Moment: a=b, r_a=r_b');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0 1 2 3 4]);
zticks([1 1.1 1.2 1.3 1.4]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

% ------------------------------------------------------------------------
% Plot 2 & 4: asymmetric haunches (a ~= b, fixed r=0.2)
% Vary both haunch lengths independently
% ------------------------------------------------------------------------
r_fixed = 0.2;
[A_grid2, B_grid2] = meshgrid(0.2:0.01:0.4,  0.1:0.01:0.4);
K_ratio   = zeros(size(A_grid2));
FEM_ratio = zeros(size(A_grid2));

for i = 1 : size(A_grid2, 1)
    for j = 1 : size(A_grid2, 2)
        a = A_grid2(i,j);
        b = B_grid2(i,j);
        % WARNING: no check that a+b <= 1; caller must ensure valid geometry
        [k_ij, fem_ij] = NonPrismatic(a, b, L, Ic, r_fixed, r_fixed, n);
        K_ratio(i,j)   = k_ij(2,2) / k_ij(4,4);   % ratio of end stiffnesses
        FEM_ratio(i,j) = fem_ij(1) / fem_ij(2);    % ratio of end moments
    end
end

subplot(2,2,2);
surf(A_grid2, B_grid2, K_ratio);
xlabel('a');  ylabel('b');  zlabel('k_{11}/k_{12}');
title('Stiffness ratio: r_a=r_b=0.2');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
yticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
zticks([0.9 0.95 1 1.05 1.1]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

subplot(2,2,4);
surf(A_grid2, B_grid2, FEM_ratio);
xlabel('a');  ylabel('b');  zlabel('FEM_A / FEM_B');
title('FEM ratio: r_a=r_b=0.2');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
zticks([0.9 0.95 1 1.05 1.1]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

% Export figure
if n == 2
    FileName = 'Haunches-Parab.eps';
else
    FileName = 'Haunches-Straight.eps';
end
% print(FileName, '-depsc');   % uncomment to save


% ========================================================================
% FUNCTION: NonPrismatic
% ========================================================================
% Computes the 4x4 stiffness matrix and fixed-end moments for a
% non-prismatic beam with left and right haunches and a prismatic centre.
%
% The flexibility approach is used:
%   Step 1: Build 2x2 flexibility matrix d by numerical integration
%   Step 2: Invert to get the 2x2 rotational stiffness k_tt
%   Step 3: Expand to 4x4 using statics matrix B (static condensation)
%   Step 4: Permute rows/columns to standard DOF order
%   Step 5: Integrate compatibility equations for FEM under uniform load

function [k, FEM] = NonPrismatic(a, b, L, Ic, ra, rb, n)

% ------------------------------------------------------------------------
% Step 1 -- Build the 2x2 flexibility matrix d
% ------------------------------------------------------------------------
% d(i,j) = integral of (m_i(x) * m_j(x) / (E*I(x))) dx   over [0, L]
%
% where m_1(x) = (x/L - 1) and m_2(x) = (x/L) are the unit moment
% diagrams for unit end moments at A and B respectively.
%
% The integral is split into three segments matching the I(x) profile.
% Each segment uses MATLAB's adaptive quadrature (integral()).

% --- Left haunch  (0 <= x <= a*L) ---
% I(x) = Ic * (1 + ra*(1 - x/(a*L))^n)^3
I_L  = @(x) Ic .* (1 + ra .* (1 - x./(a*L)).^n).^3;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
185
186 d11_L = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ I_L(x), 0,   a*L);
187 d12_L = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ I_L(x), 0,   a*L);
188 d22_L = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ I_L(x), 0,   a*L);
189
190 % --- Prismatic centre  (a*L <= x <= (1-b)*L) ---
191 d11_C = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ Ic,     a*L, (1-b)*L);
192 d12_C = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ Ic, a*L, (1-b)*L);
193 d22_C = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ Ic,     a*L, (1-b)*L);
194
195 % --- Right haunch  ((1-b)*L <= x <= L) ---
196 % I(x) = Ic * (1 + rb*(1 - (L-x)/(b*L))^n)^3
197 I_R  = @(x) Ic .* (1 + rb .* (1 - (L-x)./(b*L)).^n).^3;
198
199 d11_R = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L);
200 d12_R = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ I_R(x), (1-b)*L, L);
201 d22_R = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L);
202
203 % Assemble full 2x2 flexibility matrix (sum of three segments)
204 d = [ d11_L+d11_C+d11_R,  d12_L+d12_C+d12_R ;
205       d12_L+d12_C+d12_R,  d22_L+d22_C+d22_R ];
206
207 % ------------------------------------------------------------------------
208 % Step 2 -- Build stiffness sub-matrices via inversion
209 % ------------------------------------------------------------------------
210 % The statics matrix B relates the two redundant moments (M_A, M_B)
211 % to the four end forces via equilibrium:
212 %   B = [1/L, 1/L; -1/L, -1/L]  (shear equilibrium)
213
214 B_stat = [1, 1; -1, -1] / L;
215
216 d_inv = inv(d);              % 2x2 rotational stiffness
217
218 k_tt  = d_inv;               % rotational DOFs (2x2)
219 k_ut  = B_stat * d_inv;      % coupling: translational from rotational (2x2)
220 k_tu  = d_inv * B_stat';     % coupling: rotational from translational (2x2)
221 k_uu  = B_stat * d_inv * B_stat';  % translational stiffness (2x2)
222
223 % Assemble full 4x4 in order [theta_A, theta_B, v_A, v_B]
224 k_full = [ k_tt,  k_tu ;
225            k_ut,  k_uu ];
226
227 % ------------------------------------------------------------------------
228 % Step 3 -- Permute to standard DOF order [v_A, theta_A, v_B, theta_B]
229 % ------------------------------------------------------------------------
230 idx = [3, 2, 4, 1];
231 k   = k_full(idx, idx);
232
233 % ------------------------------------------------------------------------
234 % Step 4 -- Fixed-end moments for uniform transverse load (w = 1)
235 % ------------------------------------------------------------------------
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% For a fixed-fixed beam under uniform load w, the FEM are found by
% solving the compatibility equations:
%
%   [d11, d12] [M_A]   [integral of x^2*(L-x)/I dx / 2     ]
%   [d21, d22] [M_B] = [integral of x*(L-x)^2/I dx / 2     ]
%
% (These are the particular-solution integrals for w=1.)
% The factor /2 comes from the parabolic bending moment diagram m_p(x)
% for a simply-supported beam under uniform load: m_p = w*x*(L-x)/2.

% Numerator integral 1: integral of x^2 * m_unit_1 / I dx  = integral of x^2*(L-x) / (2*I) dx
% Split into three segments as before

eq11_L = integral(@(x) (x.^2)        ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq11_C = integral(@(x) (x.^2)        ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq11_R = integral(@(x) (x.^2)        ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq11   = eq11_L + eq11_C + eq11_R;

eq12_L = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq12_C = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq12_R = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq12   = eq12_L + eq12_C + eq12_R;

% Right-hand side: particular moment integral for m_1 = (x/L - 1)
eq13_L = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq13_C = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq13_R = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq13   = eq13_L + eq13_C + eq13_R;

% Numerator integral 2: for m_unit_2 = (x/L)
eq22_L = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq22_C = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq22_R = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq22   = eq22_L + eq22_C + eq22_R;

% Right-hand side: particular moment integral for m_2 = (x/L)
eq23_L = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq23_C = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq23_R = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq23   = eq23_L + eq23_C + eq23_R;

% Solve the 2x2 compatibility system for the unknown FEM
% NOTE: eq21 = eq12 by symmetry of the flexibility matrix (Maxwell's theorem)
A_fem = [ eq11,  eq12 ;
          eq12,  eq22 ];    % eq21 == eq12 by reciprocity
B_fem = [ eq13 ;
          eq23 ] / 2;       % divide by 2 for the w*x*(L-x)/2 moment diagram

FEM = A_fem \ B_fem;        % [M_A; M_B]

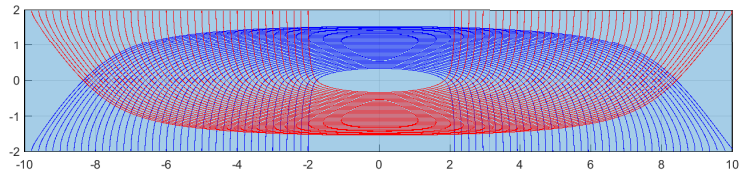
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
end    % NonPrismatic
```

I.2.10 Isostatic lines

Code to plot isostatic lines as shown in §15.4.7




```
% ========================================================================
% ISOSTATIC LINES (STRESS TRAJECTORIES) IN A SIMPLY-SUPPORTED BEAM
% ========================================================================
% Isostatic lines (also called stress trajectories or principal stress
% lines) are curves that are everywhere tangent to a principal stress
% direction.  They reveal the internal "flow" of compression and tension
% through a structural member.
%
% THEORY:
%   At any point (x,y) in the beam, the stress state under bending and
%   shear is:
%       [sigma,  tau ]
%       [tau,    0   ]
%
%   where sigma = -M(x)*y/I  (bending stress, zero at neutral axis)
%   and   tau   = V(x)*(h^2/4 - y^2)*A_eff  (parabolic shear stress)
%
%   The principal stress directions are the eigenvectors of this tensor.
%   Two families of isostatic lines exist:
%     Family 1 (blue):  major principal stress direction (compression or tension)
%     Family 2 (red):   minor principal stress direction (orthogonal to family 1)
%
% TRACING ALGORITHM:
%   Each isostatic line is traced by a simple Euler integration:
%     x(k+1) = x(k) +/- step * eigenvector_component_x
%     y(k+1) = y(k) +/- step * eigenvector_component_y
%
%   The sign of the step is chosen based on the quadrant of (x,y) to
%   keep the tracing moving in a consistent direction (see inline notes).
%
%   WARNING: the sign logic in both tracing loops is heuristic and was
%   tuned for this specific beam geometry.  It may not generalise to
%   other load cases or starting points without adjustment.
%
% LOADS SUPPORTED:
%   Load = 1 : uniformly distributed load w on a simply-supported beam
%   Load = 2 : midspan point load W on a simply-supported beam
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%
% BEAM GEOMETRY:
%   Origin at the beam centroid (x=0, y=0 at mid-span, mid-height).
%   x in [-L/2, L/2],  y in [-h/2, h/2]
%
% OUTPUT:
%   Figure with beam outline, blue compression trajectories (Family 1),
%   and red tension trajectories (Family 2).
%   Exported to EPS and converted to PDF via Ghostscript.
% ========================================================================

clear; clc; close all;

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 16;
font  = 'Times New Roman';
GS    = 'gswin64.exe';   % Ghostscript executable for EPS->PDF

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Problem parameters
% ------------------------------------------------------------------------
Load   = 1;      % 1 = uniform load;  2 = midspan point load
nlines = 40;     % number of isostatic lines per family
delta  = 100;    % spacing denominator: starting x = -L/2 + i*L/delta

w    = 1;        % load intensity (normalised)
L    = 20;       % beam span                          [length units]
h    = L/5;      % beam depth                         [length units]
B    = 1;        % beam width                         [length units]
A    = 4;        % cross-sectional area               [length^2]
Inrt = B*h^3/12; % second moment of area              [length^4]

% Reference stress values (for context, not used in tracing)
Mmax   = w*L^2/8;
sigmax = Mmax * (h/2) / Inrt;     % maximum bending stress at extreme fibre
taumax = 1.5 * w*L / (2*A);       % maximum shear stress at neutral axis

step = h/100;    % integration step size for Euler tracing

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Draw beam outline
% ------------------------------------------------------------------------
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/4]);

pgon = polyshape([-L/2, L/2, L/2, -L/2], [-h/2, -h/2, h/2, h/2]);
plot(pgon);
hold on;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Family 1: traces along the FIRST eigenvector (column 1)
% ------------------------------------------------------------------------
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% Starting points: bottom fibre (y approx -h/2), evenly spaced along the span.
% Traces upward through the beam following the compression arch.
%
% Sign convention for step direction (heuristic, tuned for this geometry):
%   y > 0 (upper half):  move right in x, downward in y
%   y < 0 & x < 0:       move left  in x, upward   in y
%   y < 0 & x > 0:       move right in x, downward in y
%
% WARNING: this quadrant-based sign logic is geometry-specific.

for i = 1 : nlines
    x0 = -L/2 + i * L/delta;   % starting x position
    y0 = -0.99 * h/2;          % start near (but inside) bottom fibre

    xv = zeros(1, 1000);  yv = zeros(1, 1000);
    xv(1) = x0;  yv(1) = y0;

    for k = 1 : 999
        % Compute stress tensor at current point
        sig = Sigma(xv(k), yv(k), w, L, Inrt, Load);
        tau = Tau(xv(k), yv(k), w, A, h, Load);
        T   = [sig, tau; tau, 0];

        % Eigenvectors give principal stress directions
        [Ve, D]    = eig(T);
        [~, idx]   = sort(diag(D));   % sort by ascending eigenvalue
        Vect       = Ve(:, idx);
        Vect       = -Vect / norm(Vect);   % normalise (sign absorbed below)

        % Step in the direction of eigenvector 1 (column 1 after sorting)
        if yv(k) > 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,1);
        elseif yv(k) < 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) - step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) + step * Vect(2,1);
        else   % y < 0 and x >= 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,1);
        end

        % Terminate if the line exits through the bottom fibre
        if yv(k+1) < -h/2
            xv(k+1) = NaN;  yv(k+1) = NaN;
            xv = xv(1:k+1);  yv = yv(1:k+1);
            break
        end
    end

    plot(xv, yv, 'b-');
    hold on;
```

पुराने पेपरबैक

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Family 2: traces along the SECOND eigenvector (column 2)
% ------------------------------------------------------------------------
% Starting points: top fibre (y approx +h/2), same x spacing.
% Traces downward following the tension arch (orthogonal to Family 1).
%
% Sign convention (heuristic):
%   y > 0 & x < 0:  move right, downward
%   y > 0 & x > 0:  move left,  upward    (note: reversed direction)
%   y < 0:          move right, downward  (both half-planes)
%
% WARNING: the y>0 & x>0 branch has a two-step logic in the original
% that sets (x,y) to the current value then immediately overwrites it.
% The first assignment is dead code -- preserved here as a no-op comment.

for i = 1 : nlines
    x0 = -L/2 + i * L/delta;
    y0 =  0.99 * h/2;   % start near (but inside) top fibre

    xv = zeros(1, 1000);  yv = zeros(1, 1000);
    xv(1) = x0;  yv(1) = y0;

    for k = 1 : 999
        sig = Sigma(xv(k), yv(k), w, L, Inrt, Load);
        tau = Tau(xv(k), yv(k), w, A, h, Load);
        T   = [sig, tau; tau, 0];

        [Ve, D]  = eig(T);
        [~, idx] = sort(diag(D));
        Vect     = Ve(:, idx);
        Vect     = -Vect / norm(Vect);

        % Step in the direction of eigenvector 2 (column 2 after sorting)
        if yv(k) > 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        elseif yv(k) > 0 && xv(k) >= 0
            % BUG FIX: original had a dead assignment (x,y)=(x,y) before
            % this step -- removed; only the active step is kept.
            xv(k+1) = xv(k) - step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) + step * Vect(2,2);
        elseif yv(k) < 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        else   % y < 0 and x >= 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        end

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        % Terminate if the line exits through the top fibre
        if yv(k+1) > h/2
            xv(k+1) = NaN;  yv(k+1) = NaN;
            xv = xv(1:k+1);  yv = yv(1:k+1);
            break
        end
    end

    plot(xv, yv, 'r-');
    hold on;
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Formatting and export
% ------------------------------------------------------------------------
grid on;
daspect([1 1 1]);
xlim([-L/2, L/2]);
ylim([-h/2,  h/2]);
xlabel('x', 'FontSize', fs);
ylabel('y', 'FontSize', fs);
title(['Isostatic Lines -- Load type ' num2str(Load) ...
       '  (blue = Family 1,  red = Family 2)'], 'FontSize', fs);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

FileName = ['Stress-Flow-' num2str(Load) '.eps'];
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);


% ========================================================================
% FUNCTION: Tau  -- shear stress at point (x,y)
% ========================================================================
% Parabolic shear stress distribution (Jourawski formula):
%   tau(y) = V(x) * (h^2/4 - y^2) * (B/2) / I
%          = V(x) * (1.5/A) * (1 - (2y/h)^2)
%
% INPUTS:
%   x, y  : coordinates (origin at centroid)
%   w     : load intensity
%   A     : cross-sectional area
%   h     : section depth
%   Load  : 1 = uniform load,  2 = point load at midspan
%
% OUTPUT:
%   tau   : shear stress at (x,y)

function tau = Tau(x, y, w, A, h, Load)

% Shear force at section x
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
if Load == 1   % uniform load: V(x) = -w*x  (reactions at +/-L/2 = +w*L/2)
    V = -w * x;
else           % midspan point load W=w: V = +/-w/2
    if x > 0
        V = -w/2;
    else
        V =  w/2;
    end
end

% Parabolic distribution (zero at extreme fibres, max at neutral axis)
tau = -6*V*y^2 / (A*h^2) + 1.5*V/A;

end   % Tau


% ========================================================================
% FUNCTION: Sigma  -- bending stress at point (x,y)
% ========================================================================
% Linear bending stress (Navier formula):
%   sigma(x,y) = -M(x) * y / I
%
% INPUTS:
%   x, y  : coordinates (origin at centroid)
%   w     : load intensity
%   L     : beam span
%   Inrt  : second moment of area
%   Load  : 1 = uniform load,  2 = point load at midspan
%
% OUTPUT:
%   sigma : bending stress at (x,y)

function sigma = Sigma(x, y, w, L, Inrt, Load)

% Bending moment at section x
if Load == 1   % uniform load: M(x) = w*L^2/8 - w*x^2/2
    M = -w*x^2/2 + w*L^2/8;
else           % midspan point load W=w
    if x >= 0
        M = w*L/2 - w*x/2;   % right half
    else
        M = w*L/2 + w*x/2;   % left half (x is negative here)
    end
end

sigma = -M * y / Inrt;

end   % Sigma
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.2.11 Evolutionary design

I.2.12 Main

```
% ========================================================================
% EVOLUTIONARY STRUCTURAL DESIGN -- RANDOM ELEMENT REMOVAL
% ========================================================================
% Demonstrates the concept of evolutionary structural optimization (ESO):
% a fully-connected 3D truss is progressively simplified by removing one
% element at a time, while checking that no node becomes under-connected.
%
% CONCEPT:
%   In a real ESO implementation, elements are removed based on a stress
%   or strain energy criterion (least-stressed elements removed first).
%   Here, removal is RANDOM -- this is a demonstration scaffold showing
%   the bookkeeping, visualization, and termination logic that a full
%   optimizer would use.
%
% ALGORITHM:
%   1. Generate a node grid (regular or random)
%   2. Connect ALL pairs of nodes -> fully-connected truss (Hankel indexing)
%   3. Loop:
%      a. Select an element to remove (here: random; replace with criterion)
%      b. Highlight it, remove it from the connectivity list
%      c. Check that both end nodes still have >= min_elem connections
%      d. If a node drops below the minimum, stop and report
%      e. Re-plot the updated mesh and write a video frame
%   4. Stop after MaxSteps or if a termination condition is met
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Main driver script
%   Part 2  -- function Node_Generation   : create node coordinates
%   Part 3  -- function Check_Lonely      : verify node connectivity
%   Part 4  -- function PlotMesh          : draw 3D truss and export frame
%
% NOTE: In a production ESO code, the line:
%   ElemOut = randi([1 nelem], 1, 1);
% would be replaced by a finite element analysis call that returns the
% index of the least-stressed (or lowest strain-energy) element.
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- MAIN DRIVER
% ========================================================================

clear; close all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Control parameters
% ------------------------------------------------------------------------
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
Random    = 1;       % 0 = 8 random nodes;  1 = regular grid of nodes
MaxSteps = 30;       % maximum number of element removals

% ---------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Generate nodes
% ---------------------------------------------------------------------
[x, y, z, N] = Node_Generation(Random);

% ---------------------------------------------------------------------
% Section 1.3 -- Generate fully-connected element list
% ---------------------------------------------------------------------
% Every unique pair of nodes (i,j) with i < j forms one element.
% The Hankel matrix trick generates all such pairs without duplication.
%
% hankel(2:N) produces a matrix whose (r,c) entry is r+c (shifted),
% and find() returns the row/column indices of all non-zero entries.
% The result is a 2 x nelem matrix of [node_i; node_j] pairs.

[r, c, ~]  = find(hankel(2:N));
index      = [c, r]';        % each column is one element: [near_node; far_node]
nelem      = size(index, 2);
lnods      = index';         % nelem x 2: each row = [node_i, node_j]

step = 0;
OK   = 0;

% ---------------------------------------------------------------------
% Section 1.4 -- Set up video writer
% ---------------------------------------------------------------------
vid           = VideoWriter('Design_Opti.avi');
vid.FrameRate = 1;   % 1 frame per second (slow enough to follow visually)
open(vid);

% Draw and record the initial fully-connected mesh
PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step);
frame = getframe(gcf);
writeVideo(vid, frame);

% ---------------------------------------------------------------------
% Section 1.5 -- Evolutionary removal loop
% ---------------------------------------------------------------------
while OK == 0 && step < MaxSteps

    % --- Select element to remove ---
    % NOTE: in a real ESO, replace this random selection with:
    %   ElemOut = index_of_least_stressed_element_from_FEA;
    ElemOut = randi([1, nelem], 1, 1);

    % --- Highlight the element being removed (red, thick) ---
    X  = [x(lnods(ElemOut,1)),  x(lnods(ElemOut,2))];
    Y  = [y(lnods(ElemOut,1)),  y(lnods(ElemOut,2))];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    Z  = [z(lnods(ElemOut,1)),  z(lnods(ElemOut,2))];
    plot3(X, Y, Z, 'LineWidth', 3, 'Color', 'r');
    hold on;
    frame = getframe(gcf);
    writeVideo(vid, frame);

    % --- Record which nodes this element connected ---
    NodesOut = lnods(ElemOut, 1:2);

    % --- Remove element from connectivity list ---
    % Compact the lnods array by shifting rows up from ElemOut onward.
    % WARNING: for large meshes this in-place shift is O(nelem) per step.
    %          A more efficient approach would use logical indexing:
    %          lnods = lnods([1:ElemOut-1, ElemOut+1:end], :);
    for i = ElemOut : nelem-1
        lnods(i, 1:2) = lnods(i+1, 1:2);
    end
    lnods = lnods(1:nelem-1, :);   % trim the now-redundant last row
    nelem = nelem - 1;
    step  = step  + 1;

    % --- Re-plot the updated mesh ---
    PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step);

    % --- Check that neither end node has become under-connected ---
    min_elem = 2;   % minimum number of elements required at any node
    Del_Nodes = Check_Lonely(NodesOut, lnods, min_elem, vid);

    frame = getframe(gcf);
    writeVideo(vid, frame);

end   % evolutionary loop

close(vid);
fprintf('Evolutionary design complete after %d steps.\n', step);


% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: Node_Generation
% ========================================================================
% Generates the node coordinate arrays x, y, z.
%
% If Random == 0: generates 8 nodes at random positions in [0,1]^3.
%                 (despite the name 'Random==0', these ARE random -- the
%                 flag controls grid vs random, but the naming is inverted
%                 from what one would expect)
%
% If Random == 1: generates a regular rectangular grid of nodes with
%                 specified range and spacing in each direction.
%
% WARNING: the grid generation uses Rx/Deltaz (not Rz/Deltaz) for nz.
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%          This is preserved from the original -- verify if Rz was intended.
%
% OUTPUTS:
%   x, y, z : 1 x N coordinate arrays
%   N       : total number of nodes

function [x, y, z, N] = Node_Generation(Random)

if Random == 0
    % 8 random nodes in the unit cube
    N = 8;
    x = rand(1, N);
    y = rand(1, N);
    z = rand(1, N);

else
    % Regular grid
    Rx = 20;  Ry = 20;  RZ = 60;    % grid extents in x, y, z   [units]
    Dx = 20;  Dy = 20;  Dz = 30;    % grid spacing in x, y, z   [units]

    xmin = 0;  ymin = 0;  zmin = 0;

    nx = round(Rx/Dx) + 1;   % number of nodes in x
    ny = round(Ry/Dy) + 1;   % number of nodes in y
    % WARNING: original uses Rx/Dz (not RZ/Dz) for nz -- may be a typo.
    %          If the z-extent should be RZ=60 with spacing Dz=30, nz=3.
    %          Currently nz = round(Rx/Dz)+1 = round(20/30)+1 = 2.
    nz = round(Rx/Dz) + 1;

    N = 0;
    x = zeros(1, nx*ny*nz);
    y = zeros(1, nx*ny*nz);
    z = zeros(1, nx*ny*nz);

    for ix = 1 : nx
        for iy = 1 : ny
            for iz = 1 : nz
                N      = N + 1;
                x(N)   = xmin + (ix-1) * Dx;
                y(N)   = ymin + (iy-1) * Dy;
                z(N)   = zmin + (iz-1) * Dz;
            end
        end
    end

    % Trim to actual size
    x = x(1:N);
    y = y(1:N);
    z = z(1:N);
end

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
end   % Node_Generation


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: Check_Lonely
% ========================================================================
% After removing an element, checks that both of its end nodes still have
% at least min_elem elements connected to them.  If either node drops
% below the minimum, an error dialog is shown and execution stops.
%
% INPUTS:
%   NodesOut : 1x2 vector of the two node indices of the removed element
%   lnods    : current (reduced) connectivity array  [nelem x 2]
%   min_elem : minimum acceptable element count per node
%   v        : VideoWriter object (passed in but not used -- legacy arg)
%
% OUTPUT:
%   Del_Nodes : 0 if both nodes are adequately connected;
%               otherwise the count of the under-connected node

function Del_Nodes = Check_Lonely(NodesOut, lnods, min_elem, v) %#ok<INUSD>

Del_Nodes = 0;

for i = 1 : 2
    % Count how many rows in lnods contain this node number
    % (checking both columns: lnods(:,1) and lnods(:,2))
    matches  = (lnods == NodesOut(i));   % logical array, same size as lnods
    n_connected = sum(matches(:));       % total occurrences = number of connected
    elements

    if n_connected < min_elem
        msg = ['Number of elements connected to node ' num2str(NodesOut(i)) ...
               ' dropped below minimum (' num2str(min_elem) ')'];
        errordlg(msg, 'END EXECUTION');
        Del_Nodes = n_connected;
        error('Evolutionary design terminated: node %d under-connected.', NodesOut(i));
    end
end

end   % Check_Lonely


% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: PlotMesh
% ========================================================================
% Draws the current 3D truss in a new figure window:
%   - node positions as red asterisks with node number labels
%   - elements as lines with element number labels at midpoints
%   - title showing the current step number
% Exports to EPS and converts to PDF.
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%
% INPUTS:
%   x, y, z  : node coordinate arrays
%   lnods    : connectivity array  [nelem x 2]
%   nelem    : number of active elements
%   step     : current removal step (used in title and filename)

function PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step)

figure;
plot3(x, y, z, '*');
hold on;

N = length(x);

% Node labels (red numbers at node positions)
for i = 1 : N
    text(x(i), y(i), z(i), num2str(i), 'Color', 'red', 'FontSize', 14);
end

% Elements (lines with element number at midpoint)
for ie = 1 : nelem
    X  = [x(lnods(ie,1)),  x(lnods(ie,2))];
    Y  = [y(lnods(ie,1)),  y(lnods(ie,2))];
    Z  = [z(lnods(ie,1)),  z(lnods(ie,2))];
    Xc = mean(X);  Yc = mean(Y);  Zc = mean(Z);

    plot3(X, Y, Z);
    text(Xc, Yc, Zc, num2str(ie), 'FontSize', 10);
end

title(['Step: ' num2str(step)]);
pbaspect([1 1 1]);
grid minor;
view(-36, 24);

% Export frame
GS       = 'c:/Program Files/gs/gs9.10/bin/gswin64.exe';
FileName = ['./Figs/Mesh-No-' num2str(step) '.eps'];
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);

end   % PlotMesh
```

I.2.13 Column interaction diagram

```
% ========================================================================
% RECTANGULAR RC COLUMN -- NOMINAL INTERACTION DIAGRAM (P-M)
% ========================================================================
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% Constructs the nominal axial force - bending moment (P_n vs M_n)
% interaction diagram for a doubly-reinforced rectangular concrete column
% using ACI 318 rectangular stress block assumptions.
%
% THEORY:
%   The interaction diagram is the locus of (M_n, P_n) pairs at which the
%   column reaches its nominal strength.  Each point corresponds to a
%   specific neutral axis depth c (measured from the compression face).
%
%   ACI rectangular stress block:
%     Compression force in concrete: C_c = 0.85 * f'c * a * b
%     where  a = Beta1 * c  (depth of equivalent stress block)
%     Beta1 = 0.85 for f'c <= 4 ksi, reduced 0.05 per 1 ksi above 4,
%     minimum Beta1 = 0.65
%
%   Steel strains (linear strain compatibility):
%     eps_s  = eps_cu * (d  - c) / c   (tension steel at depth d)
%     eps_s' = eps_cu * (c  - d') / c  (compression steel at depth d')
%
%   Steel stresses capped at f_y (elastic-perfectly-plastic model).
%
% TWO BRANCHES:
%   Tension failure  (c < c_b): steel yields before concrete crushes
%   Compression failure (c > c_b): concrete crushes before steel yields
%   Balanced point  (c = c_b): both occur simultaneously
%
% UNITS: kips, inches (moments converted to k-ft for output)
% =========================================================================

close all; clear; clc;

fss    = 24;
scrsz  = get(0, 'ScreenSize');
figpos = [2, 2, scrsz(3)/3, scrsz(4)/2];

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 1 - Material properties
% -------------------------------------------------------------------------
E_s    = 29000;   % steel Young's modulus          [ksi]
eps_cu = 0.003;   % ACI ultimate concrete strain   [in/in]

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2 - Section geometry and reinforcement
% -------------------------------------------------------------------------
h    = 20;     % section depth (in bending direction)  [in]
b    = 12;     % section width                          [in]
dp   = 2.5;    % cover to compression steel centroid   [in]
d    = h - dp; % effective depth to tension steel      [in]

f_y  = 50;     % steel yield strength                  [ksi]
f_c  = 3.5;    % concrete compressive strength         [ksi]
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
A_s  = 2;      % tension steel area                    [in^2]
Ap_s = 2;      % compression steel area                [in^2]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 - ACI Beta1 factor
% ------------------------------------------------------------------------
if f_c <= 4
    Beta1 = 0.85;
else
    Beta1 = max(0.85 - 0.05*(f_c - 4), 0.65);
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 - Balanced failure point
% ------------------------------------------------------------------------
% Strain compatibility at balanced condition:
%   c_b/d = eps_cu / (eps_cu + eps_y)

eps_y  = f_y / E_s;
c_b    = eps_cu * d / (eps_cu + eps_y);
a_b    = Beta1 * c_b;

fp_s_b = min(E_s * eps_cu * (c_b - dp) / c_b, f_y);
C_c_b  = 0.85 * f_c * a_b * b;
Pn_b   = C_c_b + Ap_s * fp_s_b - A_s * f_y;
Mn_b   = C_c_b * (d - a_b/2) + Ap_s * fp_s_b * (d - dp);
e_b    = Mn_b / Pn_b;   % balanced eccentricity [in]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 - Tension failure branch  (c_min to c_b)
% ------------------------------------------------------------------------
% Tension steel has yielded (f_s = f_y).
% Compression steel stress varies with c; capped at f_y.

n     = 400;
cmin  = h / n;   % avoid c=0 singularity
c_vec = linspace(cmin, c_b, n+1);
PT    = zeros(1, n+1);
MT    = zeros(1, n+1);

for i = 1 : n+1
    c     = c_vec(i);
    a     = Beta1 * c;
    fp_s  = min(E_s * eps_cu * (c - dp) / c, f_y);
    C_c   = 0.85 * f_c * a * b;
    PT(i) = C_c + Ap_s * fp_s - A_s * f_y;
    MT(i) = (C_c * (d - a/2) + Ap_s * fp_s * (d - dp)) / 12;
end

figure('Position', figpos);
set(gca, 'FontSize', fss);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
plot(MT, PT, 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 - Compression failure branch  (c_b to c_max)
% ------------------------------------------------------------------------
% Both steel stresses vary with c; each capped at f_y.

cmax    = 50;
c_vec2  = linspace(c_b, cmax, n);
PC      = zeros(1, n);
MC      = zeros(1, n);

for i = 1 : n
    c     = c_vec2(i);
    a     = Beta1 * c;
    f_s   = min(E_s * eps_cu * (d  - c) / c, f_y);
    fp_s  = min(E_s * eps_cu * (c  - dp) / c, f_y);
    C_c   = 0.85 * f_c * a * b;
    PC(i) = C_c + Ap_s * fp_s - A_s * f_s;
    MC(i) = (C_c * (d - a/2) + Ap_s * fp_s * (d - dp)) / 12;
end

plot(MC, PC, 'r', 'LineWidth', 2);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 - Format and export
% ------------------------------------------------------------------------
lgd = legend('Tension Failure', 'Compression Failure');
set(lgd, 'Color', 'none');
xlim([0, inf]);  ylim([0, inf]);
grid on;
xlabel('Nominal Moment  M_n  [k-ft]', 'FontSize', fss);
ylabel('Nominal Load  P_n  [kips]',  'FontSize', fss);
title('RC Column P-M Interaction Diagram', 'FontSize', fss);
set(gca, 'FontSize', fss, 'Color', 'none');
exportgraphics(gca, 'Interaction-Diagram-Matlab.pdf', 'BackgroundColor', 'none');
```

I.2.14 Variational methods; mathematica

Though Mathematica can save a file as `.tex`, a script was written to convert that file into a more readable one that quasi-emulate the notebook feel.

This is the solution of the problem solved in §48.6.1.2.

Virtual Displacement

Define function v

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3
```

Solve for a and b in terms of v_2 and v_3

```
solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]
```

$$\left\{\left\{\text{a1} \to -\frac{-8\text{v2}+\text{v3}}{L^2},\text{a2} \to -\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

Update expression of v

```
v=v1[x]/.solution
```

$$\left\{-\frac{(-8\text{v2}+\text{v3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

```
delv=v/.{v2 → delv2,v3 → delv3}
```

$$\left\{-\frac{(-8\text{delv2}+\text{delv3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{delv2}-\text{delv3})x^3}{L^3}\right\}$$

Second derivative of v

```
d2v=D[v,{x,2}]
```

$$\left\{-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right\}$$

Second derivative of virtual displacement

```
d2delv=d2v/.{v2 → delv2,v3 → delv3}
```

$$\left\{-\frac{2(-8\text{delv2}+\text{delv3})}{L^2}-\frac{12(4\text{delv2}-\text{delv3})x}{L^3}\right\}$$

Virtual strain energy

```
delU=Integrate[d2vd2delvEI,{x,0,L},Assumptions → L > 0]
```

$$\left\{\frac{256\text{delv2EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv3EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv2EIv3}}{L^3}+\frac{28\text{delv3EIv3}}{L^3}\right\}$$

Virtual external work

```
delW=Integrate[q0(1 - x/L)delv,{x,0,L},Assumptions → L > 0]
```

$$\left\{\frac{4\text{delv2}Lq0}{15}+\frac{\text{delv3}Lq0}{60}\right\}$$

Set $\delta U - \delta W = 0$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

UW=delU − delW

$$\left\{-\frac{4}{15}\text{delv2Lq0}-\frac{\text{delv3Lq0}}{60}+\frac{256\text{delv2EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv3EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv2EIv3}}{L^3}+\frac{28\text{delv3EIv3}}{L^3}\right\}$$

A=Coefficient[UW,delv2]

$$\left\{-\frac{4\text{Lq0}}{15}+\frac{256\text{EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{EIv3}}{L^3}\right\}$$

B=Coefficient[UW,delv3]

$$\left\{-\frac{\text{Lq0}}{60}-\frac{80\text{EIv2}}{L^3}+\frac{28\text{EIv3}}{L^3}\right\}$$

solution2=Solve[{*A*==**0**,*B*==**0**},{v2,v3}]

$$\left\{\left\{\text{v2}\to\frac{11L^4\text{q0}}{960\text{EI}},\text{v3}\to\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}\right\}\right\}$$

v2=*N*[v2/.solution2]

$$\left\{\frac{0.0114583L^4\text{q0}}{\text{EI}}\right\}$$

v3=*N*[v3/.solution2]

$$\left\{\frac{0.0333333L^4\text{q0}}{\text{EI}}\right\}$$

Determine the moment from the displacement field

M=Simplify[d2vEI]

$$\{\{\text{Lq0}(0.116667L-0.15x)\}\}$$

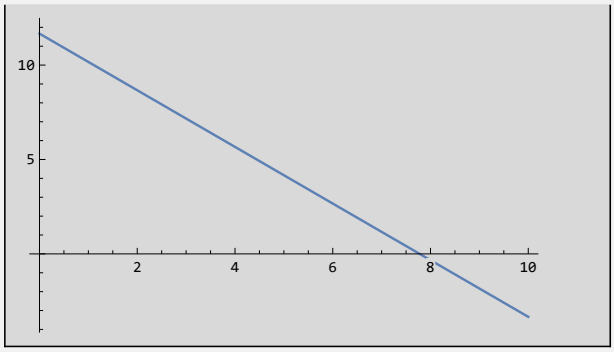
Determine the shear as derivaitve of the moment

V=*D*[*M*,{*x*,**1**}]

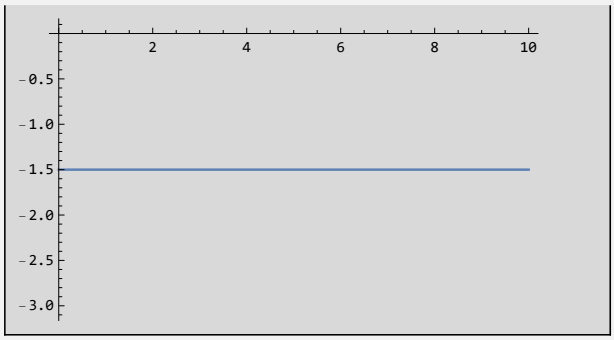
$$\{\{-0.15\text{Lq0}\}\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

q0=1; L=10; Plot[M,{x,0,10}]



Plot[V,{x,0,10}]



Exact shear and moment diagrams

Clear[L,q0];

w[x_]:=q0(1 − x/L)

Vsup= − Integrate[w[x],{x,0,L}]

$$-\frac{Lq0}{2}$$

Msup=Integrate[w[x]x,{x,0,L}]

$$\frac{L^2 q0}{6}$$

Vexact=Integrate[w[x],x] + Vsup

$$-\frac{Lq0}{2} + q0x - \frac{q0x^2}{2L}$$

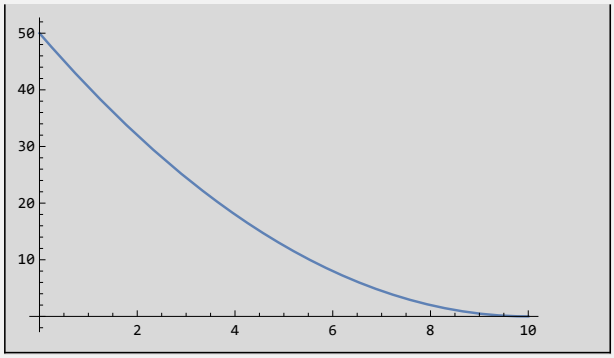
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Mexact=Integrate[Vexact,x] + Msup

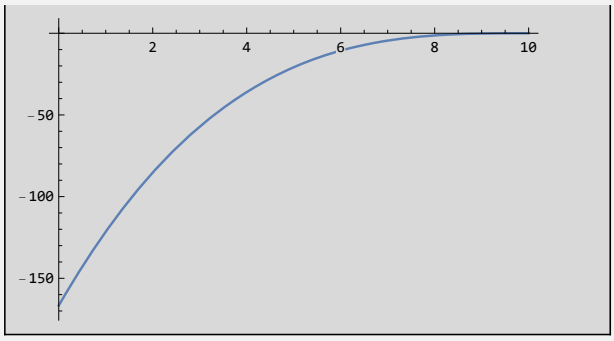
$$\frac{L^2 \text{q0}}{6} - \frac{L \text{q0} x}{2} + \frac{\text{q0} x^2}{2} - \frac{\text{q0} x^3}{6L}$$

q0= − 10; L=10;

Plot[Vexact,{x,0,L}]



Plot[Mexact,{x,0,L}]



Clear[L,q0,v,V,M,v2,v3,solution,v,delv,del2v,d2v,d2delv,delU,delW,UW,A,B,solution2]

Virtual Force

Define distributed load (note chnage of direction of x axis)

q=q0x1/L

$$\frac{\text{q0x1}}{L}$$

Moment due to real load

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
M=Integrate[q(x - x1),{x1,0,x}]
```

$$\frac{\text{q0}x^3}{6L}$$

Moment due to virtual load

```
delM=x
```

$$x$$

Virtual internal strain energy and external virtual work

```
delU=Integrate[M delM/EI,{x,0,L}]
```

$$\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}$$

```
delW=1v
```

$$v$$

Solve for $\delta U - \delta W = 0$

```
Solve[delU==delW,v]
```

$$\left\{\left\{v \to \frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}\right\}\right\}$$

```
Clear[v,q,M,delV,delU,delM]
```

Potential Energy

Define function v and load q

```
v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3
```

```
q=qo(1 - x/L)
```

$$\text{qo}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Solve for a and b in terms of v_2 and v_3

```
solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]
```

$$\left\{\left\{\text{a1} \to -\frac{-8\text{v2} + \text{v3}}{L^2},\text{a2} \to -\frac{2(4\text{v2} - \text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

Update expression of v

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

v=v1[x]/.solution

$$\left\{-\frac{(-8\text{v2}+\text{v3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

Internal strain energy

d2v=Simplify[D[v,{x,2}]]

$$\left\{\frac{2(L(8\text{v2}-\text{v3})+6(-4\text{v2}+\text{v3})x)}{L^3}\right\}$$

M=EId2v

$$\left\{\frac{2\text{EI}(L(8\text{v2}-\text{v3})+6(-4\text{v2}+\text{v3})x)}{L^3}\right\}$$

U=Integrate[M^2/(2EI),{x,0,L}]

$$\left\{\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14\text{EIv3}^2}{L^3}\right\}$$

Potential external work

W=Integrate[qv,{x,0,L},Assumptions → L > 0]

$$\left\{\frac{4L\text{qov2}}{15}+\frac{L\text{qov3}}{60}\right\}$$

Potential energy

PE=Simplify[U − W]

$$\left\{-\frac{1}{60}L\text{qo}(16\text{v2}+\text{v3})+\frac{2\text{EI}\left(64\text{v2}^2-40\text{v2v3}+7\text{v3}^2\right)}{L^3}\right\}$$

eq1=D[PE,v2]

$$\left\{-\frac{4L\text{qo}}{15}+\frac{2\text{EI}(128\text{v2}-40\text{v3})}{L^3}\right\}$$

eq2=D[PE,v3]

$$\left\{-\frac{L\text{qo}}{60}+\frac{2\text{EI}(-40\text{v2}+14\text{v3})}{L^3}\right\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

solution=*N*[Solve[{eq1==**0**,eq2==**0**},{v2,v3}]]

$$\left\{\left\{\text{v2} \to \frac{0.0114583L^4\text{qo}}{\text{EI}},\text{v3} \to \frac{0.0333333L^4\text{qo}}{\text{EI}}\right\}\right\}$$

Clear[solution,eq2,eq1,PE,*W*,*U*,*M*,d2v,v1,*v*,solution,*q*]

Rayleigh Ritz Method

Define the displacement

v=a1*x*^**2** + a2*x*^**3**

$$\text{a1}x^2 + \text{a2}x^3$$

Take second derivative, and determine the moment

d2v=*D*[*v*,{*x*,**2**}]

$$2\text{a1} + 6\text{a2}x$$

M=Simplify[d2vEI]

$$2\text{EI}(\text{a1} + 3\text{a2}x)$$

Strain energy, work, and potential energy

U=**1**/(**2**EI)Integrate[*M*^**2**,{*x*,**0**,*L*}]

$$\frac{4\text{a1}^2\text{EI}^2L + 12\text{a1a2EI}^2L^2 + 12\text{a2}^2\text{EI}^2L^3}{2\text{EI}}$$

W=Integrate[q0(**1** − *x*/*L*)*v*,{*x*,**0**,*L*}]

$$\frac{1}{12}\text{a1}L^3\text{q0} + \frac{1}{20}\text{a2}L^4\text{q0}$$

PE=*U* − *W*

$$\frac{4\text{a1}^2\text{EI}^2L + 12\text{a1a2EI}^2L^2 + 12\text{a2}^2\text{EI}^2L^3}{2\text{EI}} - \frac{1}{12}\text{a1}L^3\text{q0} - \frac{1}{20}\text{a2}L^4\text{q0}$$

Partial derivative of the potentialenergy wrt a_1 and a_2

A=*D*[PE,a1]

$$\frac{8\text{a1EI}^2L + 12\text{a2EI}^2L^2}{2\text{EI}} - \frac{L^3\text{q0}}{12}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

B=*D*[PE,a2]

$$\frac{12\text{a1EI}^2L^2+24\text{a2EI}^2L^3}{2\text{EI}}-\frac{L^4\text{q0}}{20}$$

solution=Solve[{*A*==**0**,*B*==**0**},{a1,a2}]

$$\left\{\left\{\text{a1}\to\frac{7L^2\text{q0}}{120\text{EI}},\text{a2}\to-\frac{L\text{q0}}{40\text{EI}}\right\}\right\}$$

N[%]

$$\left\{\left\{\text{a1}\to\frac{0.0583333L^2\text{q0}}{\text{EI}},\text{a2}\to-\frac{0.025L\text{q0}}{\text{EI}}\right\}\right\}$$

v/.solution

$$\left\{\frac{7L^2\text{q0}x^2}{120\text{EI}}-\frac{L\text{q0}x^3}{40\text{EI}}\right\}$$

Maximum displacement

v/.solution/.*x* → *L*

$$\left\{\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}\right\}$$

Clear[*v*,d2v,*M*,*U*,*W*,PE,*A*,*B*,solution]

Complementary Potential Energy

Distributed load

q=q0x1/*L*

$$\frac{\text{q0x1}}{L}$$

Moment is caused by actual load plus fictitious point load P at end of cantilever

M=Integrate[*q*(*x* − x1),{x1,**0**,*x*}] + *Px*

$$Px+\frac{\text{q0}x^3}{6L}$$

Internal strain energy

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
U=1/2Integrate[M^2/EI,{x,0,L}]
```

$$\frac{1}{2}\left(\frac{L^3P^2}{3EI}+\frac{L^4Pq0}{15EI}+\frac{L^5q0^2}{252EI}\right)$$

Displacement

```
solution=DSolve[{v''[x]==M/EI,v'[L]==0,v[L]==0},v[x],x]
```

$$\left\{\left\{v[x]\to\frac{40L^4P+4L^5q0-60L^3Px-5L^4q0x+20LPx^3+q0x^5}{120EIL}\right\}\right\}$$

```
vmax=v[x]/.solution/.x->0
```

$$\left\{\frac{40L^4P+4L^5q0}{120EIL}\right\}$$

Potential of external work

```
q=q0x/L
```

$$\frac{q0x}{L}$$

```
W=Pvmax+Integrate[qv[x],{x,0,L}]/.solution
```

$$\left\{\left\{\frac{L^4Pq0}{30EI}+\frac{L^5q0^2}{252EI}+\frac{P\left(40L^4P+4L^5q0\right)}{120EIL}\right\}\right\}$$

```
CPE=W-U
```

$$\left\{\left\{\frac{L^4Pq0}{30EI}+\frac{L^5q0^2}{252EI}+\frac{P\left(40L^4P+4L^5q0\right)}{120EIL}+\frac{1}{2}\left(-\frac{L^3P^2}{3EI}-\frac{L^4Pq0}{15EI}-\frac{L^5q0^2}{252EI}\right)\right\}\right\}$$

```
D[CPE,P]/.P->0
```

$$\left\{\left\{\frac{L^4q0}{30EI}\right\}\right\}$$

```
Clear[U,W,M,q,CPE,vmax,solution]
```

Castigliano Second Theorem

Distributed load

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

q=q0x1/L
$\frac{\text{q0x1}}{L}$

Moment is caused by actual load plus a fictitious point load P at end of cantilever

M=Integrate[$q(x-$x1),{x1,0,x}] + Px
$Px+\frac{\text{q0}x^3}{6L}$

Internal strain energy

U=1/2Integrate[M^2/EI,{x,0,L}]
$\frac{1}{2}\left(\frac{L^3P^2}{3\text{EI}}+\frac{L^4P\text{q0}}{15\text{EI}}+\frac{L^5\text{q0}^2}{252\text{EI}}\right)$

Take derivative of stain energy

v=D[U,P]/.P → 0
$\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}$

Clear[U,M,q,v]

Castigliano's First Theorem

Define function v and q

v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3

q=qo(1 − x/L)
$\text{qo}\left(1-\frac{x}{L}\right)$

Solve for a and b in terms of v_2 and v_3

solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]
$\left\{\left\{\text{a1}\to-\frac{-8\text{v2}+\text{v3}}{L^2},\text{a2}\to-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$

Update expression of v

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

v=v1[x]/.solution
$\left\{-\frac{(-8\text{v2}+\text{v3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})x^3}{L^3}\right\}$

vmax=v1[L]
$\text{a1}L^2+\text{a2}L^3$

Internal strain energy

d2v=D[v,{x,2}]
$\left\{-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right\}$

M=EId2v + Pvmax
$\left\{\left(\text{a1}L^2+\text{a2}L^3\right)P+\text{EI}\left(-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right)\right\}$

U=Integrate[M^2/(2EI),{x,0,L},Assumptions → L > 0]
$\left\{\frac{\text{a1}^2L^5P^2}{2\text{EI}}+\frac{\text{a1a2}L^6P^2}{\text{EI}}+\frac{\text{a2}^2L^7P^2}{2\text{EI}}-8\text{a1}LP\text{v2}-8\text{a2}L^2P\text{v2}+\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}+4\text{a1}LP\text{v3}+4\text{a2}L^2P\text{v3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14\text{EIv3}^2}{L^3}\right\}$

Simplify[U]
$\left\{\frac{\text{a1}^2L^8P^2+\text{a2}^2L^{10}P^2+8\text{a2EI}L^5P(-2\text{v2}+\text{v3})+4\text{EI}^2\left(64\text{v2}^2-40\text{v2v3}+7\text{v3}^2\right)+2\text{a1}L^4P\left(\text{a2}L^5P+4\text{EI}(-2\text{v2}+\text{v3})\right)}{2\text{EI}L^3}\right\}$

D[U,vmax]
$\partial_{\text{a1}L^2+\text{a2}L^3}\left\{\frac{\text{a1}^2L^5P^2}{2\text{EI}}+\frac{\text{a1a2}L^6P^2}{\text{EI}}+\frac{\text{a2}^2L^7P^2}{2\text{EI}}-8\text{a1}LP\text{v2}-8\text{a2}L^2P\text{v2}+\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}+4\text{a1}LP\text{v3}+4\text{a2}L^2P\text{v3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14}{}\right.$

I.2.15 Monte Carlo simulation of a building's linear elastic response to lateral load

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

Listing for Example in §53.2.2.1.

```
% ========================================================================
% MONTE CARLO SIMULATION -- LATERAL DRIFT OF A 4-STORY SHEAR BUILDING
% ========================================================================
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% Estimates the probability of exceeding a drift limit for a linear
% elastic shear-frame building under random lateral loads and random
% member stiffnesses.
%
% STRUCTURAL MODEL:
%   A 4-story shear building where each story lateral drift is:
%       delta_i = V_i / k_i = V_i * H^3 / (12 * sum(EI_i))
%   where V_i = cumulative shear at story i (sum of loads above),
%   k_i = 12*EI/H^3 = lateral stiffness (fixed-fixed column formula),
%   and two columns contribute per story.
%
%   Total roof drift = u1 + u2 + u3 + u4.
%
% RANDOM VARIABLES (all independent Gaussian):
%   F1..F4   : lateral floor loads       mean=Fbar,  CoV=40%
%   EI1..EI8 : column bending stiffness  mean=EIbar, CoV=20%
%
% NOTE: Normal distributions can produce negative F and EI values
%   (~0.6% probability at CoV=0.4). For a rigorous study use lognormal.
%
% UNITS: any consistent set (e.g. kN,m or kip,in).
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 - Parameters
% ------------------------------------------------------------------------
Fbar    = 20;           % mean lateral floor load      [force]
sigmaF  = Fbar * 0.4;   % std dev of load  (CoV=40%)

EIbar   = 10000;        % mean column bending stiffness [force.length^2]
sigmaEI = EIbar * 0.2;  % std dev of EI    (CoV=20%)

H    = 4;      % story height                  [length]
ULIM = 0.1;    % drift limit (failure threshold) [length]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 - Monte Carlo sampling
% ------------------------------------------------------------------------
NSIM = 1000000;   % 1e6 simulations: reliable for PF down to ~1e-4

F1 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
F2 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
F3 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
F4 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);

EI1 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 1 columns
EI2 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
EI3 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 2 columns
EI4 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
EI5 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 3 columns
EI6 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
EI7 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 4 columns
EI8 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 - Story drifts (vectorised over all simulations)
% ------------------------------------------------------------------------
u4 =  F4                 ./ (EI7 + EI8) / 12 * H^3;
u3 = (F3 + F4)           ./ (EI5 + EI6) / 12 * H^3;
u2 = (F2 + F3 + F4)      ./ (EI3 + EI4) / 12 * H^3;
u1 = (F1 + F2 + F3 + F4) ./ (EI1 + EI2) / 12 * H^3;

u = u1 + u2 + u3 + u4;   % total roof drift

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 - Statistics and failure probability
% ------------------------------------------------------------------------
UM  = mean(u);
US  = std(u);
COV = US / UM;

indic = (u > ULIM);   % 1 = failure (drift exceeds limit), 0 = safe
PF    = mean(indic);  % fraction of simulations in failure = P(u > ULIM)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 - Report
% ------------------------------------------------------------------------
fprintf('=== Monte Carlo Results (%d simulations) ===\n', NSIM);
fprintf('  Mean drift          UM  = %.5f\n', UM);
fprintf('  Std deviation       US  = %.5f\n', US);
fprintf('  Coeff of variation  COV = %.4f  (%.1f%%)\n', COV, COV*100);
fprintf('  Drift limit         ULIM = %.4f\n', ULIM);
fprintf('  Failure probability  PF = %.2e\n', PF);
fprintf('  Std error on PF        = %.2e\n', sqrt(PF*(1-PF)/NSIM));
```

I.2.16 Isoparametric elements

The following section is reproduced from Hinton and Owen, 1977 *Finite Element Programming*.

The computer implementation of a numerically integrated isoparametric element is summarized as follows.

But first, it is assumed that this operation is to be performed in a function called `stiff` and it takes as input arguments `elcod`, `young`, `poiss`, `type`, `ndime`, `ndofn`, `ngaus`. In turn it will compute the stiffness matrix `KELEM` of element `ielem`.

1. Retrieve element geometry and material properties for the current element
2. Zero the stiffness matrix

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. Call function `dmat` to set the constitutive matrix $\mathbf{D}^e$ of the element
4. Enter (nested) loop covering all integration points
   (a) Look up the sampling position of the current point (ξ_p, η_q) (`s`, `t`) and their weights (`weigp`)
   (b) Call shape function routine `sfr` given ξ_p, η_q which will return the shape function N_i^e (`sfr`) and the derivatives $\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$ and $\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}$ (`deriv`) at the point ξ_p, η_q
   (c) Call another subroutine (`jacob`), given N_i^e, $\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$ and $\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}$ at point ξ_p, η_q will return cartesian shape function derivatives $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ and $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$ (`cartd`), the Jacobian matrix $\mathbf{J}^e$ (`jacm`), its inverse $\mathbf{J}^{e-1}$ (`jaci`), its determinant det $\mathbf{J}^e$ (`djac`) and the x and y coordinates all at the point ξ_p, η_q
   (d) Call strain matrix (`bmatps`) routine, given N_i^e, $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$, at ξ_p, η_q will return the strain matrix $\mathbf{B}_i^e$ (`bmat`)
   (e) Call a routine (`dbmat`) to evaluate $\mathbf{D}^e\mathbf{B}_i^e$ (`dbmat`)
   (f) Evaluate $\mathbf{B}_i^{eT}\mathbf{D}^e\mathbf{B}_j^e \det\mathbf{J}^e \times$ integration weights and assemble them into the element stiffness matrix $\mathbf{K}_{ij}^e$
   (g) Assemble $\mathbf{D}^e\mathbf{B}^e$ (`smat` into a stress array for later evaluation of stresses from the nodal displacements.
5. Write Stiffness matrix

Suggested list of variables:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

`idime, ndime`	Index, Number of dimensions (2 for 2D)
`idofn,ndofn`	Index, Number of degree of freedom per node
`ielem,nelem`	Index, number of elements
`igaus,jgaus,ngaus`	Index, Index, Number of Gauss rule adopted
`inode, nnode`	Index, number of nodes per element
`kgasp,ngasp`	Kounter, number of Gauss points used
`type`	1 for plane stress; 2 for plane strain
`poiss`	Poisson's ratio
`young`	Young's modulus
`elcod(ndime,nnode)`	Local array of nodal cartesian coordinates of the element currently under consideration $\begin{bmatrix} x(\xi_1,\eta_1) & \cdots & x(\xi_8,\eta_8) \\ y(\xi_1,\eta_1) & \cdots & y(\xi_8,\eta_8) \end{bmatrix}$
`s`	ξ coordinate of sampling point
`t`	η coordinate of sampling point
`gpcod(ndime,ngasp)`	Local array of cartesian coordinates of the Gauss points for element currently under consideration $\begin{bmatrix} x(\xi_{G_1},\eta_{G_1} & \cdots & x(\xi_{G_5},\eta_{G_5}) & \cdots \\ y(\xi_{G_1},\eta_{G_1} & \cdots & y(\xi_{G_5},\eta_{G_5}) & \cdots \end{bmatrix}$
`posgp(mgaus)`	ξ coordinates of Gauss point
`weigp(mgaus)`	Weight factor for Gauss point
`shape(nnode)`	Shape function associated with each node of current element at (ξ_p,η_p) $\begin{bmatrix} N_1(\xi_p,\eta_p) \\ \vdots N_8(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
`deriv(ndime,nnode)`	Shape function derivative at sampling point (ξ_p,η_p) within the element $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi}(\xi_p,\eta_p) \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta}(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
`cartd(ndime,nnode)`	Cartesian shape function derivatives associated with the nodes of the current element sampled at any point (ξ_p,η_p) within the element $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x}(\xi_p,\eta_p) \\ \frac{\partial N_1}{\partial y}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial y}(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
`djacb`	Determinant of the Jacobian matrix sampled at any point (ξ_p,η_p) within the element
`jacm(ndime,ndime)`	Jacobian matrix at sampling point
`jaci(ndime,ndime)`	Inverse of Jacobian matrix at sampling point
`bmat(nstre,nevab)`	Element strain matrix at any point within the element $\mathbf{B} = [\ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_8\ ]$ where $\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$
`dbmat(istre,ievab)`	stores **DB**

```
% ========================================================================
% ISOPARAMETRIC FINITE ELEMENTS -- Q4, Q8, Q9 PLANE ELEMENTS
% ========================================================================
% A library of functions implementing Gaussian quadrature-based stiffness
% matrix assembly for 2D isoparametric elements under plane stress or
% plane strain conditions.
%
% SUPPORTED ELEMENT TYPES:
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   Q4  : 4-node bilinear quadrilateral        (nnode = 4)
%   Q8  : 8-node serendipity quadrilateral      (nnode = 8)
%   Q9  : 9-node Lagrangian quadrilateral       (nnode = 9)
%
% ISOPARAMETRIC CONCEPT:
%   The same shape functions N_i(s,t) are used to interpolate both the
%   geometry and the displacement field:
%
%     x(s,t) = sum_i N_i(s,t) * x_i    (geometry mapping)
%     u(s,t) = sum_i N_i(s,t) * u_i    (displacement interpolation)
%
%   where (s,t) are natural coordinates in [-1,1]^2.
%
% STIFFNESS MATRIX:
%   K_e = integral_(-1)^(1) integral_(-1)^(1) B^T * D * B * |J| ds dt
%
%   approximated by Gauss quadrature:
%   K_e approx sum_i sum_j w_i * w_j * B^T(s_i,t_j) * D * B(s_i,t_j) * |J(s_i,t_j)|
%
% NATURAL COORDINATE NODE ORDERING (counter-clockwise):
%
%   Q4:           Q8/Q9:
%   4---3         4--7--3
%   |   |         8  9  6
%   1---2         1--5--2
%
%   (s increases right, t increases upward)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Script: plot Q8/Q9 shape functions over the reference element
%   Part 2  -- function stiff    : assemble element stiffness matrices
%   Part 3  -- function dmat     : constitutive matrix D (plane stress/strain)
%   Part 4  -- function sfr      : shape functions and derivatives N, dN/ds, dN/dt
%   Part 5  -- function jacob    : Jacobian J, J^-1, |J|, Cartesian derivatives
%   Part 6  -- function bmatps   : strain-displacement matrix B and D*B
%
% LNODS ARRAY FORMAT (input to stiff):
%   lnods(e, 1)       : element number
%   lnods(e, 2)       : Young's modulus E for element e
%   lnods(e, 3)       : Poisson's ratio nu for element e
%   lnods(e, 4:3+nnode): global node numbers of element e
%
% COORD ARRAY FORMAT:
%   coord(n, 1)       : global node number
%   coord(n, 2:3)     : x, y coordinates of node n
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- SCRIPT: Plot Q8 and Q9 shape functions
% ========================================================================
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% Plots surface and contour views of selected shape functions over the
% reference element [-1,1]^2 for visual verification.
%
% Node 1 (corner) and Node 8 (midside) are shown for both Q8 and Q9
% to illustrate how the bubble function N9 modifies the corner shapes.

xi  = -1 : 1/20 : 1;    % natural coordinate xi  (horizontal)
eta = -1 : 1/20 : 1;    % natural coordinate eta (vertical)

% Column vectors for outer products
XI  = xi';
ETA = eta';

% --- Q8/Q9 intermediate (midside/bubble) shape functions ---
% These are computed first because the corner functions depend on them.
N9 = (1 - ETA.^2) * (1 - xi.^2);            % bubble (centre node, Q9 only)
N8 = 0.5*(1 - ETA.^2) * (1 - xi);           % midside: left edge
N7 = 0.5*(1 - XI.^2)  * (1 + eta);          % midside: top edge
N6 = 0.5*(1 - ETA.^2) * (1 + xi);           % midside: right edge
N5 = 0.5*(1 - XI.^2)  * (1 - eta);          % midside: bottom edge

% --- Q8 corner shape functions (no bubble term) ---
N4_Q8 = 0.25*(1 - XI)*(1 + eta) - 0.5*(N7 + N8);
N3_Q8 = 0.25*(1 + XI)*(1 + eta) - 0.5*(N6 + N7);
N2_Q8 = 0.25*(1 + XI)*(1 - eta) - 0.5*(N5 + N6);
N1_Q8 = 0.25*(1 - XI)*(1 - eta) - 0.5*(N8 + N5);

% Plot Q8 corner node 1
figure('Name', 'Q8 Shape Functions');
subplot(2,2,1);
meshc(xi, eta, N1_Q8);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_1');
title('Q8 -- Node 1 (corner): surface');

subplot(2,2,2);
[C, h] = contour(xi, eta, N1_Q8);
clabel(C, h);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');
title('Q8 -- Node 1 (corner): contour');

% Plot Q8 midside node 8
subplot(2,2,3);
meshc(xi, eta, N8);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_8');
title('Q8 -- Node 8 (midside): surface');

subplot(2,2,4);
[C, h] = contour(xi, eta, N8);
clabel(C, h);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');
title('Q8 -- Node 8 (midside): contour');
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```

% --- Q9 shape functions: subtract bubble contribution from Q8 shapes ---
N1_Q9 = N1_Q8 - 0.25*N9;
N8_Q9 = N8    - 0.50*N9;

figure('Name', 'Q9 Shape Functions');
subplot(2,3,1);
meshc(xi, eta, N1_Q9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_1');
title('Q9 -- Node 1 (corner): surface');

subplot(2,3,2);
[C, h] = contour(xi, eta, N1_Q9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 1 (corner): contour');

subplot(2,3,3);
meshc(xi, eta, N8_Q9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_8');
title('Q9 -- Node 8 (midside): surface');

subplot(2,3,4);
[C, h] = contour(xi, eta, N8_Q9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 8 (midside): contour');

subplot(2,3,5);
meshc(xi, eta, N9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_9');
title('Q9 -- Node 9 (centre bubble): surface');

subplot(2,3,6);
[C, h] = contour(xi, eta, N9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 9 (centre bubble): contour');


% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% Assembles element stiffness matrices for all elements using Gauss
% quadrature.  Returns all element matrices stacked in a single array.
%
% INPUTS:
%   ngaus  : number of Gauss points per direction
%   posgp  : Gauss point positions  (1 x ngaus)
%   weigp  : Gauss point weights    (1 x ngaus)
%   type   : problem type  (1 = plane stress,  2 = plane strain)
%   nelem  : number of elements
%   lnods  : connectivity + material array  [nelem x (3+nnode)]
%   coord  : node coordinates  [nnodes x 3]  (col1=node#, col2=x, col3=y)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   nnode  : nodes per element  (4, 8, or 9)
%
% OUTPUT:
%   KELEM  : stacked element stiffness matrices  [nelem*2*nnode x 2*nnode]
%            Row block ielem: KELEM(2*nnode*(ielem-1)+1 : 2*nnode*ielem, :)

function KELEM = stiff(ngaus, posgp, weigp, type, nelem, lnods, coord, nnode)

fprintf('Assembling element stiffness matrices...\n');
tic;

stifsize  = 2 * nnode;        % DOFs per element (2 per node: u and v)
KELEM     = zeros(stifsize * nelem, stifsize);

for ielem = 1 : nelem

    % --- Extract material properties from lnods ---
    young = lnods(ielem, 2);
    poiss = lnods(ielem, 3);

    % --- Extract element node coordinates ---
    % elcod: 2 x nnode matrix  [x; y] for each node in order
    elcod = zeros(2, nnode);
    for inode = 1 : nnode
        global_node = lnods(ielem, inode+3);
        row         = find(coord(:,1) == global_node);
        elcod(:, inode) = coord(row, 2:3)';
    end

    % --- Constitutive matrix ---
    D = dmat(young, poiss, type);

    % --- Gauss quadrature over the reference element ---
    kelem = zeros(stifsize);
    for igaus = 1 : ngaus
        for jgaus = 1 : ngaus
            s = posgp(igaus);
            t = posgp(jgaus);
            W = weigp(igaus) * weigp(jgaus);

            [shape, deriv]            = sfr(s, t, nnode);
            [cartd, ~, ~, djac, ~]    = jacob(shape, deriv, elcod);
            [bmat, dbmat]             = bmatps(shape, cartd, D);

            % Accumulate:  K += w * B^T * D * B * |J|
            kelem = kelem + W * bmat' * dbmat * djac;
        end
    end

    % --- Store in stacked output array ---
    startrow = stifsize * (ielem-1) + 1;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    endrow   = stifsize * ielem;
    KELEM(startrow:endrow, :) = kelem;

end

fprintf('Done. Elapsed: %.4f sec\n\n', toc);

end   % stiff


% ======================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: dmat
% ======================================================================
% Returns the 3x3 constitutive matrix D for isotropic linear elasticity
% under either plane stress or plane strain assumptions.
%
% PLANE STRESS (type=1): thin plate, sigma_zz = 0
%   D = E/(1-v^2) * [1, v,      0     ]
%                   [v, 1,      0     ]
%                   [0, 0, (1-v)/2    ]
%
% PLANE STRAIN (type=2): thick body constrained in z, eps_zz = 0
%   D = E/((1+v)(1-2v)) * [1-v,  v,       0    ]
%                         [ v,  1-v,      0    ]
%                         [ 0,   0,  (1-2v)/2  ]
%
% Strain vector convention: [eps_xx; eps_yy; gamma_xy]

function D = dmat(young, poiss, type)

E = young;
v = poiss;

if type == 1
    % Plane stress
    D = E/(1-v^2) * [ 1,    v,       0    ;
                      v,    1,       0    ;
                      0,    0,  (1-v)/2   ];
else
    % Plane strain
    D = E/((1+v)*(1-2*v)) * [ 1-v,   v,       0      ;
                              v,   1-v,       0      ;
                              0,    0,   (1-2*v)/2   ];
end

end   % dmat


% ======================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: sfr  (Shape Function Routine)
% ======================================================================
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% Computes shape functions N_i(s,t) and their natural-coordinate
% derivatives dN_i/ds, dN_i/dt at a single Gauss point (s,t).
%
% The Q8 and Q9 shape functions are built hierarchically:
%   - Midside nodes are constructed from bilinear products
%   - Corner nodes are the bilinear shapes minus contributions of
%     adjacent midside nodes (to enforce partition of unity)
%   - Q9 adds the bubble function N9 and subtracts its contribution
%     from all other nodes
%
% INPUTS:
%   s, t    : natural coordinates of the evaluation point  [-1,1]
%   nnode   : 4 (Q4), 8 (Q8), or 9 (Q9)
%
% OUTPUTS:
%   shape   : nnode x 1 vector of shape function values
%   deriv   : 2 x nnode matrix of derivatives  [dN/ds; dN/dt]

function [shape, deriv] = sfr(s, t, nnode)

if nnode == 9
    % --- Q9: 9-node Lagrangian element ---
    % Node 9 is the interior bubble: N9 = (1-s^2)*(1-t^2)
    N9 = (1-s^2)*(1-t^2);

    % Midside nodes (edges)
    N8 = 0.5*(1-s)*(1-t^2) - 0.5*N9;    % left midside
    N7 = 0.5*(1-s^2)*(1+t) - 0.5*N9;    % top midside
    N6 = 0.5*(1+s)*(1-t^2) - 0.5*N9;    % right midside
    N5 = 0.5*(1-s^2)*(1-t) - 0.5*N9;    % bottom midside

    % Corner nodes
    N4 = 0.25*(1-s)*(1+t) - 0.5*N7 - 0.5*N8 - 0.25*N9;
    N3 = 0.25*(1+s)*(1+t) - 0.5*N6 - 0.5*N7 - 0.25*N9;
    N2 = 0.25*(1+s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N6 - 0.25*N9;
    N1 = 0.25*(1-s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N8 - 0.25*N9;

    shape = [N1; N2; N3; N4; N5; N6; N7; N8; N9];

    % Derivatives of N9
    dN9ds = -2*s*(1-t^2);
    dN9dt = -2*t*(1-s^2);

    % Derivatives of midside nodes
    dN8ds = -0.5*(1-t^2) - 0.5*dN9ds;
    dN8dt = -t*(1-s)     - 0.5*dN9dt;
    dN7ds = -s*(1+t)     - 0.5*dN9ds;
    dN7dt =  0.5*(1-s^2) - 0.5*dN9dt;
    dN6ds =  0.5*(1-t^2) - 0.5*dN9ds;
    dN6dt = -t*(1+s)     - 0.5*dN9dt;
    dN5ds = -s*(1-t)     - 0.5*dN9ds;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    dN5dt = -0.5*(1-s^2) - 0.5*dN9dt;

    % Derivatives of corner nodes
    dN4ds = -0.25*(1+t) - 0.5*dN7ds - 0.5*dN8ds - 0.25*dN9ds;
    dN4dt =  0.25*(1-s) - 0.5*dN7dt - 0.5*dN8dt - 0.25*dN9dt;
    dN3ds =  0.25*(1+t) - 0.5*dN6ds - 0.5*dN7ds - 0.25*dN9ds;
    dN3dt =  0.25*(1+s) - 0.5*dN6dt - 0.5*dN7dt - 0.25*dN9dt;
    dN2ds =  0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN6ds - 0.25*dN9ds;
    dN2dt = -0.25*(1+s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN6dt - 0.25*dN9dt;
    dN1ds = -0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN8ds - 0.25*dN9ds;
    dN1dt = -0.25*(1-s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN8dt - 0.25*dN9dt;

    deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds, dN5ds, dN6ds, dN7ds, dN8ds, dN9ds ;
             dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt, dN5dt, dN6dt, dN7dt, dN8dt, dN9dt ];

elseif nnode == 8
    % --- Q8: 8-node serendipity element (no interior node) ---

    % Midside nodes
    N8 = 0.5*(1-s)*(1-t^2);
    N7 = 0.5*(1-s^2)*(1+t);
    N6 = 0.5*(1+s)*(1-t^2);
    N5 = 0.5*(1-s^2)*(1-t);

    % Corner nodes
    N4 = 0.25*(1-s)*(1+t) - 0.5*N7 - 0.5*N8;
    N3 = 0.25*(1+s)*(1+t) - 0.5*N6 - 0.5*N7;
    N2 = 0.25*(1+s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N6;
    N1 = 0.25*(1-s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N8;

    shape = [N1; N2; N3; N4; N5; N6; N7; N8];

    dN8ds = -0.5*(1-t^2);   dN8dt = -t*(1-s);
    dN7ds = -s*(1+t);        dN7dt =  0.5*(1-s^2);
    dN6ds =  0.5*(1-t^2);   dN6dt = -t*(1+s);
    dN5ds = -s*(1-t);        dN5dt = -0.5*(1-s^2);

    dN4ds = -0.25*(1+t) - 0.5*dN7ds - 0.5*dN8ds;
    dN4dt =  0.25*(1-s) - 0.5*dN7dt - 0.5*dN8dt;
    dN3ds =  0.25*(1+t) - 0.5*dN6ds - 0.5*dN7ds;
    dN3dt =  0.25*(1+s) - 0.5*dN6dt - 0.5*dN7dt;
    dN2ds =  0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN6ds;
    dN2dt = -0.25*(1+s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN6dt;
    dN1ds = -0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN8ds;
    dN1dt = -0.25*(1-s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN8dt;

    deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds, dN5ds, dN6ds, dN7ds, dN8ds ;
             dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt, dN5dt, dN6dt, dN7dt, dN8dt ];

else
    % --- Q4: 4-node bilinear element ---
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    N4 = 0.25*(1-s)*(1+t);
    N3 = 0.25*(1+s)*(1+t);
    N2 = 0.25*(1+s)*(1-t);
    N1 = 0.25*(1-s)*(1-t);

    shape = [N1; N2; N3; N4];

    dN4ds = -0.25*(1+t);  dN4dt =  0.25*(1-s);
    dN3ds =  0.25*(1+t);  dN3dt =  0.25*(1+s);
    dN2ds =  0.25*(1-t);  dN2dt = -0.25*(1+s);
    dN1ds = -0.25*(1-t);  dN1dt = -0.25*(1-s);

    deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds ;
             dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt ];
end

end   % sfr


% ========================================================================
% PART 5 -- FUNCTION: jacob
% ========================================================================
% Computes the Jacobian matrix and related quantities needed to transform
% shape function derivatives from natural to Cartesian coordinates.
%
% JACOBIAN MATRIX:
%   J = deriv * elcod^T    (2x2 matrix)
%
%   [dX/ds  dY/ds]   [dN/ds] * [x_1 y_1]
%   [dX/dt  dY/dt] = [dN/dt]   [x_2 y_2]
%                              [  ...   ]
%
% CARTESIAN DERIVATIVES:
%   [dN/dx]        [dN/ds]
%   [dN/dy] = J^-1 [dN/dt]
%
% WARNING: if |J| <= 0 the element is distorted (inverted or collapsed).
%   This function does not check for this condition -- the caller should
%   verify djac > 0 for all Gauss points.
%
% INPUTS:
%   shape  : nnode x 1 shape function values (used for xy interpolation)
%   deriv  : 2 x nnode natural-coordinate derivatives
%   elcod  : 2 x nnode element node coordinates  [x; y]
%
% OUTPUTS:
%   cartd  : 2 x nnode Cartesian shape function derivatives
%   jacm   : 2x2 Jacobian matrix J
%   jaci   : 2x2 Jacobian inverse J^-1
%   djac   : scalar determinant |J|
%   xy     : 2x1 physical coordinates at the Gauss point
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
417
418 function [cartd, jacm, jaci, djac, xy] = jacob(shape, deriv, elcod)
419
420 jacm  = deriv * elcod';   % J = dN/ds * [x; y]^T
421 jaci  = inv(jacm);        % J^-1
422 djac  = det(jacm);        % |J| (must be > 0 for valid element)
423 cartd = jaci * deriv;     % Cartesian derivatives: J^-1 * dN/d(s,t)
424 xy    = elcod * shape;    % Physical coordinates at Gauss point
425
426 end   % jacob
427
428
429 % ========================================================================
430 % PART 6 -- FUNCTION: bmatps  (B matrix for plane stress/strain)
431 % ========================================================================
432 % Assembles the strain-displacement matrix B and the product D*B.
433 %
434 % For 2D plane problems the strain vector is:
435 %   eps = [eps_xx; eps_yy; gamma_xy]
436 %
437 % The B matrix maps nodal displacements to strains:
438 %   eps = B * u_e
439 %
440 % For node i the 3x2 sub-block of B is:
441 %   [dN_i/dx,      0    ]
442 %   [    0,    dN_i/dy  ]
443 %   [dN_i/dy,  dN_i/dx  ]
444 %
445 % These sub-blocks are assembled column-pair by column-pair.
446 %
447 % INPUTS:
448 %   shape  : shape function values (not used directly here but available)
449 %   cartd  : 2 x nnode Cartesian shape function derivatives
450 %   D      : 3x3 constitutive matrix
451 %
452 % OUTPUTS:
453 %   bmat   : 3 x 2*nnode strain-displacement matrix B
454 %   dbmat  : 3 x 2*nnode product D*B
455
456 function [bmat, dbmat] = bmatps(shape, cartd, D) %#ok<INUSL>
457
458 nnode   = size(cartd, 2);
459 numcols = 2 * nnode;          % total DOF columns (u and v for each node)
460 bmat    = zeros(3, numcols);
461
462 for inode = 1 : nnode
463     col = 2*inode - 1;        % column pair: [col, col+1] for node inode
464     bmat(:, col:col+1) = [ cartd(1,inode),       0          ;
465                               0,          cartd(2,inode)  ;
466                            cartd(2,inode),  cartd(1,inode)  ];
467 end
```

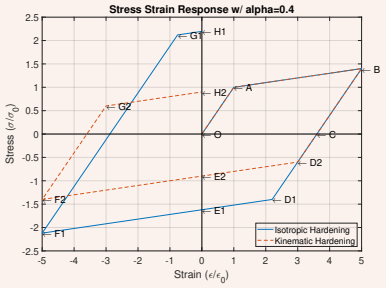

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
468
469 dbmat = D * bmat;
470
471 end    % bmatps
```

I.3 Part III: Material Modeling and Constitutive Behavior

This section addresses material behavior including plasticity, damping, and nonlinear constitutive models for different material types.

I.3.1 Incremental plasticity



Written by Ben Gallagher

```
1  % ========================================================================
2  % INCREMENTAL PLASTICITY -- STRESS-STRAIN RESPONSE COMPARISON
3  % ========================================================================
4  % Plots the normalised stress-strain response of an elastic-plastic
5  % material under cyclic loading for two hardening rules:
6  %
7  %   1. ISOTROPIC HARDENING:
8  %      The yield surface expands uniformly in all directions as plastic
9  %      strain accumulates.  Both tensile and compressive yield stresses
10 %      increase equally.  This captures strain hardening but not the
11 %      Bauschinger effect.
12 %
13 %   2. KINEMATIC HARDENING (Prager):
14 %      The yield surface translates in stress space without changing size.
15 %      After tensile yielding, the compressive yield stress decreases by
16 %      the same amount as the tensile yield stress increased.  This
17 %      captures the Bauschinger effect observed in metals.
18 %
19 % NORMALISATION:
20 %   All stresses normalised by the initial yield stress sigma_0 (s_not).
21 %   All strains normalised by the initial yield strain epsilon_0 (e_not).
22 %
23 % LOADING PATH (points A through H):
24 %   O -> A : elastic loading to initial yield
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   A -> B : plastic loading (hardening)
%   B -> C : elastic unloading, zero stress
%   C -> D : continued unloading to reverse yield
%   D -> E : reverse plastic flow, zero strain
%   E -> F : continued reverse plastic loading
%   F -> G : elastic reloading
%   G -> H : plastic reloading, zero strain
%
% HARDENING PARAMETER:
%   alpha (a) controls the plastic modulus relative to elastic modulus.
%   For a = 0: perfectly plastic (no hardening).
%   For a = 0.4: moderate hardening (used here).
%
% The two hardening rules give identical paths O->A->B->C but diverge
% from point D onward, reflecting their different treatment of the
% back-stress and yield surface evolution.
% ========================================================================

close all; clear; clc;

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 18;
GS    = 'c:/Program Files/gs/gs9.53.3/bin/gswin64.exe';

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Material parameters
% ------------------------------------------------------------------------
s_not = 1;    % initial yield stress    (normalised: sigma_0 = 1)
e_not = 1;    % initial yield strain    (normalised: epsilon_0 = 1)
a     = 0.4;  % hardening parameter     (plastic modulus ratio)

% ========================================================================
% Section 2 -- Isotropic hardening: key points
% ========================================================================
% Under isotropic hardening the current yield stress after loading to
% point B is (1+a)*s_not.  On reverse loading, yielding occurs when
% the stress has decreased by 2*(1+a)*s_not from the peak.
%
% The slope of each loading segment is E (elastic) or E*a/(1+a) (plastic).
% All coordinates are derived analytically from these assumptions.

% Point A: initial yield (start of plastic flow)
sa = s_not;
ea = e_not;

% Point B: end of forward plastic loading
sb = (1 + a) * s_not;
eb = (1 + 10*a) * e_not;

% Point C: elastic unload to zero stress
sc = 0;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
ec = 9*a * e_not;

% Point D: reverse yield (isotropic -- yield surface has expanded)
sd = -(1 + a) * s_not;
ed = (8*a - 1) * e_not;

% Point E: reverse plastic flow to zero strain
se = -9/10 * (1 + 2*a) * s_not;
ee = 0;

% Point F: end of reverse plastic loading
sf = -(1 + 14/5*a) * s_not;
ef = -(1 + 10*a) * e_not;

% Point G: re-load to forward yield
sg = (1 + 14/5*a) * s_not;
eg = (1 - 22/5*a) * e_not;

% Point H: re-load to zero strain
sh = (9/10 + 81/25*a) * s_not;
eh = 0;

% ========================================================================
% Section 3 -- Kinematic hardening: key points
% ========================================================================
% Under kinematic hardening the yield surface translates but does not
% grow.  The yield surface half-width remains s_not throughout.
% Reverse yielding occurs at a lower stress than under isotropic hardening,
% capturing the Bauschinger effect.

% Points A and B: same as isotropic (first loading)
sak = s_not;          eak = e_not;
sbk = (1 + a) * s_not; ebk = (1 + 10*a) * e_not;

% Point C: elastic unload to zero stress
sck = 0;
eck = 9*a * e_not;

% Point D: reverse yield (kinematic -- yield surface has only translated)
sdk = (a - 1) * s_not;
edk = (10*a - 1) * e_not;

% Point E: reverse plastic flow to zero strain
sek = -9/10 * s_not;
eek = 0;

% Point F: end of reverse plastic loading
sfk = -(a + 1) * s_not;
efk = -(1 + 10*a) * e_not;

% Point G: re-load to forward yield
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
sgk = (1 - a) * s_not;
egk = (1 - 10*a) * e_not;

% Point H: re-load to zero strain
shk = 9/10 * s_not;
ehk = 0;

% ========================================================================
% Section 4 -- Assemble path vectors (origin + A through H)
% ========================================================================
x_iso  = [0; ea;  eb;  ec;  ed;  ee;  ef;  eg;  eh ];
y_iso  = [0; sa;  sb;  sc;  sd;  se;  sf;  sg;  sh ];

x_kin  = [0; eak; ebk; eck; edk; eek; efk; egk; ehk];
y_kin  = [0; sak; sbk; sck; sdk; sek; sfk; sgk; shk];

% Axes lines
x_axis = [-5, 5];   y_zero = [0,  0];
y_axis = [0,  0];   x_zero = [-2.5, 2.5];

% ========================================================================
% Section 5 -- Plot
% ========================================================================
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);
set(gca, 'FontSize', fs);

plot(x_iso, y_iso,  'b-',  'LineWidth', 1.5);   hold on;
plot(x_kin, y_kin,  'r--', 'LineWidth', 1.5);
plot(x_axis, y_zero, 'k');
plot(y_axis, x_zero, 'k');

% --- Point labels ---
% Subscript 1 = isotropic,  subscript 2 = kinematic
lbl = @(x,y,s) text(x, y, ['\leftarrow ' s], ...
                    'HorizontalAlignment', 'left', 'FontSize', fs);

lbl(0,   0,    'O');
lbl(ea,  sa,   'A');
lbl(eb,  sb,   'B');
lbl(ec,  sc,   'C');

% Isotropic points (suffix 1)
lbl(ed,  sd,   'D_1');
lbl(ee,  se,   'E_1');
lbl(ef,  sf,   'F_1');
lbl(eg,  sg,   'G_1');
lbl(eh,  sh,   'H_1');

% Kinematic points (suffix 2)
lbl(edk, sdk,  'D_2');
lbl(eek, sek,  'E_2');
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
lbl(efk, sfk,  'F_2');
lbl(egk, sgk,  'G_2');
lbl(ehk, shk,  'H_2');

% --- Formatting ---
title(['Stress-Strain Response  (\alpha = ' num2str(a) ')'], 'FontSize', fs);
xlabel('Strain  (\epsilon / \epsilon_0)',  'FontSize', fs);
ylabel('Stress  (\sigma / \sigma_0)',      'FontSize', fs);
legend('Isotropic Hardening', 'Kinematic Hardening', 'Location', 'southeast');
grid on;
axis on;
set(gca, 'FontSize', fs);

% ========================================================================
% Section 6 -- Export
% ========================================================================
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
FileName = 'Prob-1.eps';
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);
```

I.3.2 Constitutive models

For five years, the University of Colorado Boulder was part of the NEES consortium and focused on real time hybrid simulation (Saouma and Sivaselvan, 2014).

As the site was being closed (prematurely) due to a lack of research interest by the community at large (RTHS are notoriously challenging, far more than "mundane" shake table tests), the author decided to develop his own software as OpenSees was not particularly suited for such an endeavor.

The developed software (aptly called) Mercury (Saouma, Kang, and Haussmann, 2012) was first written in Object Oriented MATLAB®by Kang, 2010 and then rewritten in c++ by Dr Gary Haussman.

To this day, and to the best of the author's knowledge (and bias) the real time hybrid simulation of the the 400+ degrees of freedom in a highly nonlinear reinforced concrete frame (previously tested on a shake table) has not only not been surpassed, but is possibly one of the most complex structural tests ever performed (Saouma et al., 2013).

A constitutive driver was later written by Segura, 2011 who added the Ibarra model for lumped plasticity as well as the limit state shear model. This came to be called Mercury++.

Note that the code is written in Object Oriented Matlab.

This section will thus list the constitutive drivers available in Mercury++.

प्रारूप प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

From the PhD theses “An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation” by Kang, 2010 and the M.S. theses “Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code” by Segura, 2011.

I.3.3 Bilinear model

```
%% -------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program     : Mercury v.2.01
% Email       : kkd0724@hanafos.com
% Revision    : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% -------------------------------------------------------------
classdef Bilinear < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial modulus
        sy0;                    % initial yielding stress
        b;                      % strain-hardening coefficient
        a1;                     % isotropic hardening parameter which reflect an
    increase of the compression yield envelope through a fraction of the yield strength
    after a plastic strain a2*sy0/InitialE
        a2;                     % isotropic hardening parameter with respcect to a1
        a3;                     % isotropic hardening parameter which reflect an
    increase of the tension yield envelope through a fraction of the yield strength after
     a plastic strain a4*sy0/InitialE
        a4;                     % isotropic hardening parameter with respcect to a3
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comStrain_max;          % committed Strain_max from previous step
        comShift_Pos;           % committed Shift_Pos from previous step
        comShift_Neg;           % committed Shift_Neg from previous step
        comflag;                % committed flag from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        Strain_min;             % minimum strain in analysis of constitutive model
        Strain_max;             % maximum strain in analysis of constitutive model
        Shift_Pos;              % positive shift for isotropic hardening
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        Shift_Neg;              % negative shift for isotropic hardening
        flag;                   % flag for load status
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Bilinear(material)
            mat.Tag      = material.Tag;
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.b        = material.b;
            mat.a1       = material.a1;
            mat.a2       = material.a2;
            mat.a3       = material.a3;
            mat.a4       = material.a4;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress     = 0;
            mat.TangentE   = mat.InitialE;
            mat.Strain     = 0;
            mat.Strain_min = 0;
            mat.Strain_max = 0;
            mat.Shift_Pos  = 1;
            mat.Shift_Neg  = 1;
            mat.flag       = 0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
            mat.comStress     = mat.Stress;
            mat.comTangentE   = mat.TangentE;
            mat.comStrain     = mat.Strain;
            mat.comStrain_min = mat.Strain_min;
            mat.comStrain_max = mat.Strain_max;
            mat.comShift_Pos  = mat.Shift_Pos;
            mat.comShift_Neg  = mat.Shift_Neg;
            mat.comflag       = mat.flag;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain     = mat.comStrain;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Shift_Pos  = mat.comShift_Pos;
            mat.Shift_Neg  = mat.comShift_Neg;
            mat.flag       = mat.comflag;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Shift_Pos  = mat.comShift_Pos;
            mat.Shift_Neg  = mat.comShift_Neg;
            mat.flag       = mat.comflag;

            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;

            if ( abs(del_eps) > 2.2204460492503131e-016 )
                Esh  = mat.b * mat.InitialE;
                epsy = mat.sy0/mat.InitialE;
                c1   = Esh * mat.Strain;
                c2   = mat.Shift_Neg * mat.sy0 * ( 1 - mat.b );
                c3   = mat.Shift_Pos * mat.sy0 * ( 1 - mat.b );
                c    = mat.comStress + mat.InitialE * del_eps;
                mat.Stress = max( (c1-c2), min( (c1+c3), c ) );
                if ( abs(mat.Stress - c) < 2.2204460492503131e-016 )
                    mat.TangentE = mat.InitialE;
                else
                    mat.TangentE = Esh;
                end

                if (mat.flag == 0)
                    if (del_eps > 0.0)
                        mat.flag = 1;
                    else
                        mat.flag = -1;
                    end
                end

                if ( (mat.flag == 1) && (del_eps < 0.0) )
                    % loading reverstal( + -> - )
                    mat.flag = -1;
                    mat.Strain_max = max(mat.comStrain, mat.Strain_max);
                    mat.Shift_Neg  = 1 + mat.a1 * ( (mat.Strain_max - mat.Strain_min) /
(2.0 * mat.a2 * epsy) )^0.8;
                end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
137
138                 if ( (mat.flag == -1) && (del_eps > 0.0) )
139                     % loading reverstal( - -> + )
140                     mat.flag = 1;
141                     mat.Strain_min = min(mat.comStrain, mat.Strain_min);
142                     mat.Shift_Pos  = 1 + mat.a3 * ( (mat.Strain_max - mat.Strain_min) /
    (2.0 * mat.a4 * epsy) )^0.8;
143                 end
144             end
145         end
146
147         function getStress(mat)
148             mat.Stress = mat.Stress;
149         end
150
151         function allocateMemory(mat,totStep)
152             mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
153         end
154
155         function write2file(mat, fid)
156             fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
157         end
158
159          function write2mat(mat, fid)
160              uni_e_s = mat.uni_e_s;
161              save(fid, 'uni_e_s');
162          end
163
164         function getPlot(mat,num)
165             figure(num);
166             plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
167             hold on;grid on;box on;
168             xlabel('Strain');
169             ylabel('Stress');
170         end
171
172         function finalPlot(mat,num)
173             figure(num);
174             plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
175             grid on;box on;
176             title('Strain-Stress relationship');
177             xlabel('Strain');
178             ylabel('Stress');
179         end
180
181     end
182 end
```

I.3.4 Hardening

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program     : Mercury v.2.01
% Email       : kkd0724@hanafos.com
% Revision    : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hardening < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial modulus
        sy0;                    % initial yielding stress
        Hiso;                   % isotropic hardening modulus
        Hkin;                   % kinematic hardening modulus
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comPlasticStrain;       % committed PlasticStrain from previous step
        comBackStress;          % committed BackStress from previous step
        comsy;                  % committed sy from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        PlasticStrain;          % uniaxial plastic strain
        BackStress;             % uniaxial back stress
        sy;                     % yield stress
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Hardening(material)
            mat.Tag      = material.Tag;
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.Hiso     = material.Hiso;
            mat.Hkin     = material.Hkin;
            mat.rho      = material.rho;
        end

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        function Initialization(mat)
            mat.Stress           = 0;
            mat.TangentE         = mat.InitialE;
            mat.Strain           = 0;
            mat.PlasticStrain    = 0;
            mat.BackStress       = 0;
            mat.sy               = mat.sy0;
            mat.comPlasticStrain = 0;
            mat.comBackStress    = 0;
            mat.comsy            = mat.sy0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
            mat.comStress        = mat.Stress;
            mat.comTangentE      = mat.TangentE;
            mat.comStrain        = mat.Strain;
            mat.comPlasticStrain = mat.PlasticStrain;
            mat.comBackStress    = mat.BackStress;
            mat.comsy            = mat.sy;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
            mat.Stress        = mat.comStress;
            mat.TangentE      = mat.comTangentE;
            mat.Strain        = mat.comStrain;
            mat.PlasticStrain = mat.comPlasticStrain;
            mat.BackStress    = mat.comBackStress;
            mat.sy            = mat.comsy;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
            % Material constitutive law
            eps_p_tr     = mat.comPlasticStrain;   % trial plastic strain
            back_sig_tr  = mat.comBackStress;      % trial back stress
            sy_tr        = mat.comsy;              % trial evoluted yielding stress
            sig_tr       = mat.InitialE * ( mat.Strain - eps_p_tr);  % trial stress
            %-------------------------------------------------------------------------
            Mark = sig_tr - back_sig_tr;        % Sign operator
            %-------------------------------------------------------------------------
            func = abs(Mark) - sy_tr;           % Yielding function
            %-------------------------------------------------------------------------
            if (func <= 0)                      % Elastic
                mat.PlasticStrain = eps_p_tr;       % updated plastic strain
                mat.BackStress    = back_sig_tr;    % updated back stress
                mat.sy            = sy_tr;          % evoluted yielding stress
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                mat.Stress        = sig_tr;          % updated uniaxial stress
                mat.TangentE      = mat.InitialE;    % updated tangent modulus
            elseif (func > 0)                    % Plastic
                del_gamma  = func / ( mat.InitialE + mat.Hiso + mat.Hkin );
                mat.PlasticStrain = eps_p_tr + del_gamma * sign(Mark);
                mat.BackStress    = back_sig_tr + del_gamma * mat.Hkin * sign(Mark);
                mat.sy            = sy_tr + mat.Hiso * del_gamma;
                mat.Stress        = sig_tr - del_gamma * mat.InitialE * sign(Mark);
                mat.TangentE      = mat.InitialE * ( mat.Hiso + mat.Hkin ) / ( mat.
    InitialE + mat.Hiso + mat.Hkin );
            end
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.3.5 Hysteresis

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program     : Mercury v.2.11
% Email       : christopherlsegura@gmail.com
% Revision    : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename    : Hysteresis.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hysteresis < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;         % material Tag
        Type;        % material Type
        sy_pos0;     % positive yield Stress
        epsy_pos0;   % positive yield Strain
        sy_neg0;     % negative yield Stress
        epsy_neg0;   % negative yield Strain
        cap_pos0;    % positive capping Stress
        ecap_pos0;   % positive capping Strain
        cap_neg0;    % negative capping Stress
        ecap_neg0;   % negative capping Strain
        res_pos;     % positive residual Stress
        eres_pos0;   % positive residual Strain
        res_neg;     % negative residual Stress
        eres_neg0;   % negative residual Strain
        lamda_hys;   % hysteretic disipation constant
        det_rate;    % hysteresis deterioration exponent "c"
        rho;         % density
        %% commit variables
        comStress;      % committed Stress from previous step
        comInitialE;        % committed InitialE from previous step
        comStrain;      % committed Strain from previous step
        comsy_pos;      % committed yeild Stress
        comsy_neg;      % committed yeild Stress
        comcap_pos;
        comcap_neg;
        comepsy_pos;    % positive yield Strain
        comepsy_neg;    % negative yield Strain
        comecap_pos;    % positive cap Strain
        comecap_neg;    % negative cap Strain
        comeres_pos;    % positive residual Strain
        comeres_neg;    % negative residual Strain
        comhys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        coms_ref_pos;  % positive refenerence Stress
        coms_ref_neg;  % negative refenerence Stress
        coms_tar_pos;   % positive target Stress
        comeps_tar_pos; % positive target Strain
        coms_tar_neg;   % negative target Stress
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        comeps_tar_neg; % negative target Strain
        comstate_flag;  % loading branch
        comupdate_flag; % update loading branch
        comreversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        comenrgy_step;  % step i energy dissipated
        comenrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        comE_unld;      % unloading stiffness
        comE_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        comE_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        comeps_pt5;     % positive unloading inflection Strain
        comeps_pt10;    % negative unloading inflection Strain
        comBeta;
        comBeta_Unld;
        comnorm_hys;
        comn_exc;
        %% update variables
        Stress;     % uniaxial Stress
        InitialE;       % tangent modulus
        Strain;     % uniaxial Strain
        iniE;       % initial modulus
        E_hrd;      % hardening modulus
        E_sof;      % softening modulus
        sy_pos;     % positive yield Stress
        sy_neg;     % negative yield Stress
        cap_pos;    % positive capping Stress
        cap_neg;    % negative capping Stress
        %
        epsy_pos;   % positive yield Strain
        epsy_neg;   % negative yield Strain
        ecap_pos;   % positive cap Strain
        ecap_neg;   % negative cap Strain
        eres_pos;   % positive residual Strain
        eres_neg;   % negative residual Strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;  % positive refenerence Stress
        s_ref_neg;  % negative refenerence Stress
        %
        s_tar_pos;   % positive target Stress
        eps_tar_pos; % positive target Strain
        s_tar_neg;   % negative target Stress
        eps_tar_neg; % negative target Strain
        state_flag;  % loading branch
        update_flag; % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;  % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;      % unloading stiffness
        E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        eps_pt5;     % positive unloading inflection Strain
        eps_pt10;    % negative unloading inflection Strain
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        Beta;         % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;    % unloading modulus dissipation parameter
        norm_hys;     % normalized hysteretic energy
        n_exc;        % number excursions/cycles

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Hysteresis(material)
            mat.Tag          = material.Tag;
            mat.Type         = material.Type;
            mat.sy_pos0      = material.sy_pos0;
            mat.epsy_pos0    = material.epsy_pos0;
            mat.sy_neg0      = material.sy_neg0;
            mat.epsy_neg0    = material.epsy_neg0;
            mat.cap_pos0     = material.cap_pos0;
            mat.ecap_pos0    = material.ecap_pos0;
            mat.cap_neg0     = material.cap_neg0;
            mat.ecap_neg0    = material.ecap_neg0;
            mat.res_pos      = material.res_pos;
            mat.eres_pos0    = material.eres_pos0;
            mat.res_neg      = material.res_neg;
            mat.eres_neg0    = material.eres_neg0;
            mat.lamda_hys    = material.lamda_hys;
            mat.det_rate     = material.det_rate;
            mat.rho          = material.rho;
        end % function Hysteresis

        function Initialization(mat)
            mat.Stress      = 0;
            mat.Strain      = 0;
            mat.sy_pos      = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos    = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE        = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.InitialE        = mat.iniE;
            mat.sy_neg      = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg    = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos     = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos    = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd       = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat.epsy_pos0
);
            mat.cap_neg     = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg    = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos    = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg    = mat.eres_neg0;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.E_sof      = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat.ecap_pos0
    );
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; % hysteretic
    dissipation capacity
            mat.s_ref_pos = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag = 1;
            mat.update_flag = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag = 1;
            mat.enrgy_step = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i-1)
            mat.E_unld = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5    = 0;
            mat.eps_pt10   = 0;
            mat.norm_hys   = 0;
            mat.n_exc      = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
            mat.comStress      = mat.Stress;
            mat.comInitialE        = mat.InitialE;
            mat.comStrain      = mat.Strain;
            mat.comsy_pos      = mat.sy_pos;
            mat.comsy_neg      = mat.sy_neg;
            mat.comcap_pos     = mat.cap_pos;
            mat.comcap_neg     = mat.cap_neg;
            mat.comepsy_pos    = mat.epsy_pos;
            mat.comepsy_neg    = mat.epsy_neg;
            mat.comecap_pos    = mat.ecap_pos;
            mat.comecap_neg    = mat.ecap_neg;
            mat.comeres_pos    = mat.eres_pos;
            mat.comeres_neg    = mat.eres_neg;
            mat.comhys_dis_cap = mat.hys_dis_cap;
            mat.coms_ref_pos   = mat.s_ref_pos;
            mat.coms_ref_neg   = mat.s_ref_neg;
            mat.coms_tar_pos   = mat.s_tar_pos;
            mat.comeps_tar_pos = mat.eps_tar_pos;
            mat.coms_tar_neg   = mat.s_tar_neg;
            mat.comeps_tar_neg = mat.eps_tar_neg;
            mat.comstate_flag  = mat.state_flag;
            mat.comupdate_flag = mat.update_flag;
            mat.comreversal_flag = mat.reversal_flag;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.comenrgy_step  = mat.enrgy_step;
            mat.comenrgy_prvs  = mat.enrgy_prvs;
            mat.comE_unld      = mat.E_unld;
            mat.comE_hrd_pos   = mat.E_hrd_pos;
            mat.comE_hrd_neg   = mat.E_hrd_neg;
            mat.comeps_pt5     = mat.eps_pt5;
            mat.comeps_pt10    = mat.eps_pt10;
            mat.comnorm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.comn_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values when failing at current step
            mat.Stress      = mat.comStress;
            mat.InitialE        = mat.comInitialE;
            mat.Strain      = mat.comStrain;
            mat.sy_pos      = mat.comsy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.comsy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.comcap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.comcap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.comepsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.comepsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.comecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.comecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.comeres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.comeres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.comhys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.coms_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.coms_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.coms_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.comeps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.coms_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.comeps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.comstate_flag;
            mat.update_flag = mat.comupdate_flag;
            mat.reversal_flag = mat.comreversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.comenrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.comenrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.comE_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.comE_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.comE_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.comeps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.comeps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.comnorm_hys;
            mat.n_exc       = mat.comn_exc;
        end % function revert

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
248
249         function getTangentE(mat)
250 %             mat.Strain     = mat.comStrain;
251             mat.Stress     = mat.comStress;
252             mat.InitialE       = mat.comInitialE;
253             mat.state_flag = mat.comupdate_flag;
254             mat.update_flag = mat.comupdate_flag;
255             mat.reversal_flag = mat.comreversal_flag;
256             mat.enrgy_step  = mat.comenrgy_step;
257             mat.enrgy_prvs  = mat.comenrgy_prvs;
258             mat.sy_pos      = mat.comsy_pos;
259             mat.sy_neg      = mat.comsy_neg;
260             mat.cap_pos     = mat.comcap_pos;
261             mat.cap_neg     = mat.comcap_neg;
262             mat.epsy_pos    = mat.comepsy_pos;
263             mat.epsy_neg    = mat.comepsy_neg;
264             mat.ecap_pos    = mat.comecap_pos;
265             mat.ecap_neg    = mat.comecap_neg;
266             mat.eres_pos    = mat.comeres_pos;
267             mat.eres_neg    = mat.comeres_neg;
268             mat.s_ref_pos   = mat.coms_ref_pos;
269             mat.s_ref_neg   = mat.coms_ref_neg;
270             mat.s_tar_pos   = mat.coms_tar_pos;
271             mat.eps_tar_pos = mat.comeps_tar_pos;
272             mat.s_tar_neg   = mat.coms_tar_neg;
273             mat.eps_tar_neg = mat.comeps_tar_neg;
274             mat.E_unld      = mat.comE_unld;
275             mat.E_hrd_pos   = mat.comE_hrd_pos;
276             mat.E_hrd_neg   = mat.comE_hrd_neg;
277             mat.eps_pt5     = mat.comeps_pt5;
278             mat.eps_pt10    = mat.comeps_pt10;
279             mat.norm_hys    = mat.comnorm_hys;
280             mat.n_exc       = mat.comn_exc;
281             %-------------------------------------------------------------
282             del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;
283             %-------------------------------------------------------------
284       if (del_eps >= 0) && (mat.Stress >= 0) % positive loading
285                 if (mat.state_flag == 4) % residual
286                     ref_Stress = mat.res_pos;
287                     ref_Strain = mat.eres_pos;
288                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
289                 else
290                     [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
291                 end
292             elseif (del_eps < 0) && (mat.Stress > 0) % positive unloading
293                 [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PosUnloading(mat);
294             elseif (del_eps <= 0) && (mat.Stress <= 0) % negative loading
295                 if (mat.state_flag == 9) % residual
296                     ref_Stress = mat.res_neg;
297                     ref_Strain = mat.eres_neg;
298                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                else
                    [ ref_Stress , ref_Strain , mat ] = NegativeLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps > 0) && (mat.Stress < 0) % negative loading
                [ ref_Stress , ref_Strain , mat ] = NegUnloading(mat);
            end

            mat.Stress = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain - ref_Strain);

            if (mat.comStress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.comStress/mat.Stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.comStress + 0.5*(mat.Stress - mat.comStress));
                else % reloading
                    if (mat.Stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.Strain - mat.eps_pt10)*mat.Stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.Strain - mat.eps_pt5)*mat.Stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.comStress + 0.5*(mat.Stress - mat.comStress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function [ ref_Stress , ref_Strain , mat ] = PositiveLoading(mat)
            switch mat.state_flag
                case -1
                    if (mat.Strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                end
            case 1
                if (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            case 2
                if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            case 3
                if (mat.Strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            case 4
                mat.update_flag = 4;
            case 9
                mat.update_flag = 9;

            otherwise
                if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                    mat.update_flag = 11;
                else
                    if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                end
        end


        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_Stress = mat.sy_neg;
                ref_Strain = mat.epsy_neg;
                mat.InitialE   = mat.iniE;
            case 1 % elastic
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = 0;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_Stress = mat.cap_pos;
                    ref_Strain = mat.ecap_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 11
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_Strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.Strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                end
%             elseif (mat.state_flag == 4)
%                 mat.update_flag = 4;
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.comStrain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.comStrain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.comStress;
                    end
                end
                % determine Strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = 0;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_Stress = mat.sy_pos;
                    ref_Strain = mat.epsy_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_Stress = mat.cap_neg;
                    ref_Strain = mat.ecap_neg;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    mat.InitialE    = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE    = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE    = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = mat.eps_pt5;
                    mat.InitialE    = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_Strain);
            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    4) && (mat.update_flag ~= 9)
                % estimate energy in step
                Stress_new = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain - ref_Strain);
                enrgy_step = abs((mat.Strain - mat.comStrain)*(mat.comStress + 0.5*(
    Stress_new - mat.comStress)));
                if (mat.comreversal_flag == 1)
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine Strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on negative side
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.7172e-26,(mat.s_ref_neg - mat.sy_neg + (mat
    .E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
                    mat.cap_neg     = min(-1.2971e-24, mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    =  min(-1.0922e-24,(mat.res_neg - mat.s_ref_neg)/mat
    .E_sof);
                    Stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.eps_tar_neg -
    mat.epsy_neg);
                else
                    mat.s_tar_neg = Stress_tar_chk;
                end
                if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                    mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                    mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                end

                if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                elseif (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end

                if (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case 7
                    ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_Stress = mat.cap_neg;
                    ref_Strain = mat.ecap_neg;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 12
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = mat.eps_pt5;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_Strain);
            end
        end
    end % function PosUnloading


    function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

        switch mat.state_flag
            case 1
                if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            case -1
                if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            case 4
                mat.update_flag = 4;
            case 7
                if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            case 8
                if (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                end
            case 9
                mat.update_flag = 9;

            otherwise
                if (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13;
                else
                    if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                end
        end

        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_Stress = 0;
                ref_Strain = 0;
                mat.InitialE   = mat.iniE;
            case 4
                ref_Stress = mat.res_pos;
                ref_Strain = mat.eres_pos;
                mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
            case 7
                ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
                mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
            case 8
                ref_Stress = mat.cap_neg;
                ref_Strain = mat.ecap_neg;
                mat.InitialE   = mat.E_sof;
            case 9
                ref_Stress = mat.res_neg;
                ref_Strain = mat.eres_neg;
                mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
            case 13
                ref_Stress = mat.comStress;
                ref_Strain = mat.comStrain;
                mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_Strain);
        end
    end % function NegativeLoading


    function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegUnloading( mat )

        if (mat.state_flag == -1)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                if (mat.Strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.Strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
%             elseif (mat.state_flag == 9)
%                 mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.comStrain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.comStrain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.comStress;
                    end
                end
                % determine Strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
747             end
748 
749             switch mat.update_flag
750                 case -1
751                     ref_Stress = mat.sy_neg;
752                     ref_Strain = mat.epsy_neg;
753                     mat.InitialE   = mat.iniE;
754                 case 1
755                     ref_Stress = 0;
756                     ref_Strain = 0;
757                     mat.InitialE   = mat.iniE;
758                 case 2
759                     ref_Stress = mat.s_tar_pos;
760                     ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
761                     mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
762                 case 3
763                     ref_Stress = mat.cap_pos;
764                     ref_Strain = mat.ecap_pos;
765                     mat.InitialE   = mat.E_sof;
766                 case 4
767                     ref_Stress = mat.res_pos;
768                     ref_Strain = mat.eres_pos;
769                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
770                 case 9
771                     ref_Stress = mat.res_neg;
772                     ref_Strain = mat.eres_neg;
773                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
774                 case 10
775                     ref_Stress = mat.comStress;
776                     ref_Strain = mat.comStrain;
777                     mat.InitialE   = mat.E_unld;
778                 case 11
779                     ref_Stress = 0;
780                     ref_Strain = mat.eps_pt10;
781                     mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_Strain);
782 
783             end
784 
785             % update unloading modulus
786             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    4) && (mat.update_flag ~= 9)
787                 % estimate energy in step
788                 Stress_new = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain - ref_Strain);
789                 enrgy_step = abs((mat.Strain - mat.comStrain)*(mat.comStress + 0.5*(
    Stress_new - mat.comStress)));
790                 if (mat.comreversal_flag == 1)
791                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
792                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
793                 end
794                 % determine Strain at pt 10
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                mat.eps_pt10 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on positive side
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.12961e-26,(mat.s_ref_pos - mat.sy_pos + (mat
    .E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos     = max(1.09123e-26, mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.95315e-24,(mat.res_pos - mat.s_ref_pos)/mat.
    E_sof);
                    Stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.eps_tar_pos -
    mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = Stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end

                    if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                        mat.update_flag = 10; % unloading
                    elseif (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end

                    if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3; % softening
                    else
                        mat.update_flag = 4; % residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case 2
                    ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_Stress = mat.cap_pos;
                    ref_Strain = mat.ecap_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = mat.E_unld;
                case 11
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = mat.eps_pt10;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_Strain);
            end
        end
    end % function NegUnloading


    function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

        % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
        E_t     = mat.hys_dis_cap;
        E_step  = enrgy_step;
        c       = mat.det_rate;
        E_pre   = mat.enrgy_prvs;

        mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
        mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

        if (mat.Beta > 1)
            mat.Beta = 0.999;
            display('**************************')
            display('Hysteretic Energy Exhausted')
            display('**************************')
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

        function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    end % methods

end % classdef
```

I.3.6 Modified giuffre monegotto pinto

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program     : Mercury v.2.01
% Email       : kkd0724@hanafos.com
% Revision    : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% ---------------------------------------------------------------
classdef ModifiedGiuffreMonegottoPinto < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial moduous
        sy0;                    % initial yielding stress
        b;                      % strain-hardening coefficient
        R0;                     % during first loading, R0 is the value of the parameter R which is dependent on the absolute strain
        cR1;                    % Experimentally determined parameters to be defined together with R0
        cR2;                    % Experimentally determined parameters to be defined together with R0
        a1;                     % isotropic hardening parameter which reflect an increase of the compression yield envelope through a fraction of the yield strength after a plastic strain a2*sy0/InitialE
        a2;                     % isotropic hardening parameter with respcect to a1
        a3;                     % isotropic hardening parameter which reflect an increase of the tension yield envelope through a fraction of the yield strength after a plastic strain a4*sy0/InitialE
        a4;                     % isotropic hardening parameter with respcect to a3
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStress_r;            % committed Stress_r from previous step
        comStrain_r;            % committed Strain_r from previous step
        comStress_o;            % committed Stress_o from previous step
        comStrain_o;            % committed Strain_o from previous step
        comStrain_max;          % committed Strain_max from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comStrain_m;            % committed Strain_p from previous step
        comflag;                % committed flag from previous step
        % update variables
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        Stress_r;               % stress at the point of strain reversal
        Strain_r;               % strain at the point of strain reversal
        Stress_o;               % stress at the point of intersection of the two
    asymptotes
        Strain_o;               % strain at the point of intersection of the two
    asymptotes
        Strain_max;             % maximum strain in analysis of constitutive model
        Strain_min;             % minimum strain in analysis of constitutive model
        Strain_m;               % strain at the previous maximum or minimum strain
    reversal point
        flag;                   %
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = ModifiedGiuffreMonegottoPinto(material)
            mat.Tag      = material.Tag;
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.b        = material.b;
            mat.R0       = material.R0;
            mat.cR1      = material.cR1;
            mat.cR2      = material.cR2;
            mat.a1       = material.a1;
            mat.a2       = material.a2;
            mat.a3       = material.a3;
            mat.a4       = material.a4;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress     = 0;
            mat.TangentE   = mat.InitialE;
            mat.Strain     = 0;
            mat.Stress_r   = 0;
            mat.Strain_r   = 0;
            mat.Stress_o   = 0;
            mat.Strain_o   = 0;
            mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
            mat.Strain_min = -mat.sy0/mat.InitialE;
            mat.Strain_m   = 0;
            mat.flag       = 0;
        end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
86
87          function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
        constitutive model
88              mat.comStress     = mat.Stress;
89              mat.comTangentE   = mat.TangentE;
90              mat.comStrain     = mat.Strain;
91              mat.comStress_r   = mat.Stress_r;
92              mat.comStrain_r   = mat.Strain_r;
93              mat.comStress_o   = mat.Stress_o;
94              mat.comStrain_o   = mat.Strain_o;
95              mat.comStrain_max = mat.Strain_max;
96              mat.comStrain_min = mat.Strain_min;
97              mat.comStrain_m   = mat.Strain_m;
98              mat.comflag       = mat.flag;
99          end
100
101         function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
        when failing at current step
102             mat.Stress     = mat.comStress;
103             mat.TangentE   = mat.comTangentE;
104             mat.Strain     = mat.comStrain;
105             mat.Stress_r   = mat.comStress_r;
106             mat.Strain_r   = mat.comStrain_r;
107             mat.Stress_o   = mat.comStress_o;
108             mat.Strain_o   = mat.comStrain_o;
109             mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
110             mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
111             mat.Strain_m   = mat.comStrain_m;
112             mat.flag       = mat.comflag;
113         end
114
115         function getStrain(mat, TrialStrain)
116             mat.Strain = TrialStrain;
117         end
118
119         function getTangentE(mat)
120             mat.Stress     = mat.comStress;
121             mat.TangentE   = mat.comTangentE;
122             mat.Stress_r   = mat.comStress_r;
123             mat.Strain_r   = mat.comStrain_r;
124             mat.Stress_o   = mat.comStress_o;
125             mat.Strain_o   = mat.comStrain_o;
126             mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
127             mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
128             mat.Strain_m   = mat.comStrain_m;
129             mat.flag       = mat.comflag;
130
131             Esh   = mat.b * mat.InitialE;
132             eps_y = mat.sy0/mat.InitialE;
133
134             del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
135
136             if (mat.flag == 0)
137                 if ( del_eps == 0 ) mat.flag  = 0;
138                 elseif ( del_eps > 0 )
139                     mat.flag       = 1;
140                     mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
141                     mat.Strain_min = -mat.Strain_max;
142                     mat.Strain_o   =  mat.Strain_max;
143                     mat.Stress_o   =  mat.sy0;
144                     mat.Strain_m   =  mat.Strain_max;
145                     mat.common(eps_y);
146                 elseif ( del_eps < 0 )
147                     mat.flag       = -1;
148                     mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
149                     mat.Strain_min = -mat.Strain_max;
150                     mat.Strain_o   =  mat.Strain_min;
151                     mat.Stress_o   = -mat.sy0;
152                     mat.Strain_m   =  mat.Strain_min;
153                     mat.common(eps_y);
154                 end
155             elseif (mat.flag == 1)
156                 if ( del_eps > 0 )
157                     mat.flag = 1;
158                     mat.common(eps_y);
159                 elseif ( del_eps < 0 )
160                     % reversal ( + -> - )
161                     mat.flag       = -1;
162                     mat.Strain_r   = mat.comStrain;
163                     mat.Stress_r   = mat.comStress;
164                     mat.Strain_max = max(mat.Strain_max, mat.comStrain);
165                     shift          = 1 + mat.a1 * ( (mat.Strain_max - mat.Strain_min)
    /(2.0*mat.a2*eps_y) )^0.8;
166                     mat.Strain_o   = (-mat.sy0 * shift + Esh * eps_y * shift - mat.
    Stress_r + mat.InitialE * mat.Strain_r) / (mat.InitialE - Esh);
167                     mat.Stress_o   = -mat.sy0 * shift + Esh * (mat.Strain_o + eps_y *
    shift);
168                     mat.Strain_m   = mat.Strain_min;
169                     mat.common(eps_y);
170                 end
171             elseif (mat.flag == -1)
172                 if ( del_eps < 0 )
173                     mat.flag = -1;
174                     mat.common(eps_y);
175                 elseif ( del_eps > 0 )
176                     mat.flag       = 1;
177                     mat.Strain_r   = mat.comStrain;
178                     mat.Stress_r   = mat.comStress;
179                     mat.Strain_min = min(mat.Strain_min, mat.comStrain);
180                     shift          = 1 + mat.a3 * ( (mat.Strain_max-mat.Strain_min)
    /(2.0*mat.a4*eps_y) )^0.8;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    mat.Strain_o    = (mat.sy0 * shift - Esh * eps_y * shift - mat.
    Stress_r + mat.InitialE * mat.Strain_r) / (mat.InitialE - Esh);
                    mat.Stress_o    = mat.sy0 * shift + Esh * (mat.Strain_o - eps_y *
    shift);
                    mat.Strain_m    = mat.Strain_max;
                    mat.common(eps_y);
                end
            end
        end

        function common(mat,eps_y)
            xi      = abs( (mat.Strain_m - mat.Strain_o)/ eps_y );
            R       = mat.R0 - mat.R0*mat.cR1*xi/(mat.cR2+xi);
            e_rate = (mat.Strain - mat.Strain_r)/(mat.Strain_o - mat.Strain_r);
            dummy1 = 1.0 + abs(e_rate)^R;
            dummy2 = dummy1^(1/R);
            mat.Stress    = mat.b * e_rate + (1.0 - mat.b) * e_rate/dummy2;
            mat.Stress    = mat.Stress * (mat.Stress_o - mat.Stress_r) + mat.Stress_r;
            mat.TangentE = mat.b + (1.0 - mat.b)/(dummy1 * dummy2);
            mat.TangentE = mat.TangentE * (mat.Stress_o - mat.Stress_r)/(mat.Strain_o -
    mat.Strain_r);
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)     = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

I.3.7 Modified kent park

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.01
% Email      : kkd0724@hanafos.com
% Revision   : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% ---------------------------------------------------------------
classdef ModifiedKentPark < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        sc;                     % maximum compressive concrete stress
        ec;                     % compressive strain when compressive stress reaches
    maximum compressive one
        scu;                    % compressive stress at 20 % of maximum compressive one
        ecu;                    % compressive strain with respect to compressive stress
    at 20 % of maximum compressive stress
        lambda;                 % historical factor
        st;                     % maximum tensile concrete stress
        Ets;                    % tensile concrete modulus
        rho;                    % density
        % Computed variable with input variables
        InitialEc;              % Initial compressive concrete modulus
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comdelta_Strain_pt;     % committed delta_Strain_pt from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial stress
        Strain_min;             % minimum stress in analysis of constitutive model
        delta_Strain_pt;        % strain with respect to incremental strain at previous
    step
    end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
37
38      properties (SetAccess=public)
39          uni_e_s
40          uni_tangentE
41      end
42
43      methods
44          function mat = ModifiedKentPark(material)
45              mat.Tag    = material.Tag;
46              mat.Type   = material.Type;
47              mat.sc     = material.sc;
48              mat.ec     = material.ec;
49              mat.scu    = material.scu;
50              mat.ecu    = material.ecu;
51              mat.lambda = material.lambda;
52              mat.st     = material.st;
53              mat.Ets    = material.Ets;
54              mat.rho    = material.rho;
55          end
56
57          function Initialization(mat)
58              mat.Stress          = 0;
59              mat.InitialEc       = 2*mat.sc/mat.ec;
60              mat.TangentE        = mat.InitialEc;
61              mat.Strain          = 0;
62              mat.Strain_min      = 0;
63              mat.delta_Strain_pt = 0;
64          end
65
66          function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
67              mat.comStress          = mat.Stress;
68              mat.comTangentE        = mat.TangentE;
69              mat.comStrain          = mat.Strain;
70              mat.comStrain_min      = mat.Strain_min;
71              mat.comdelta_Strain_pt = mat.delta_Strain_pt;
72          end
73
74          function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
75              mat.Stress          = mat.comStress;
76              mat.TangentE        = mat.comTangentE;
77              mat.Strain          = mat.comStrain;
78              mat.Strain_min      = mat.comStrain_min;
79              mat.delta_Strain_pt = mat.comdelta_Strain_pt;
80          end
81
82          function getStrain(mat, TrialStrain)
83              mat.Strain = TrialStrain;
84          end
85
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        function getTangentE(mat)
            mat.Stress          = mat.comStress;
            mat.TangentE        = mat.TangentE;
            mat.Strain_min      = mat.comStrain_min;
            mat.delta_Strain_pt = mat.comdelta_Strain_pt;

            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;

            if ( abs(del_eps) > 2.2204460492503131e-016 )
                if (mat.Strain < mat.Strain_min)
                    [mat.Stress,mat.TangentE] = mat.compression(mat.Strain);
                    mat.Strain_min = mat.Strain;
                else
                    eps_R = (mat.scu-mat.lambda*mat.InitialEc*mat.ecu)/(mat.InitialEc
    *(1.0-mat.lambda));
                    sig_R = mat.InitialEc * eps_R;
                    [sig_p_min, dummy] = mat.compression(mat.Strain_min);
                    E_R    = (sig_p_min - sig_R)/(mat.Strain_min - eps_R);
                    eps_pt = mat.Strain_min - sig_p_min/E_R;
                    if (mat.Strain < eps_pt)
                        sig_min      = sig_p_min + E_R * (mat.Strain - mat.Strain_min);
                        sig_max      = E_R * 0.5 * (mat.Strain - eps_pt);
                        mat.Stress   = mat.comStress + mat.InitialEc * del_eps;
                        mat.TangentE = mat.InitialEc;
                        if (mat.Stress < sig_min)
                            mat.Stress   = sig_min;
                            mat.TangentE = E_R;
                        end
                        if (mat.Stress >= sig_max)
                            mat.Stress = sig_max;
                            mat.TangentE = 0.5*E_R;
                        end
                    else
                        eps_pn = eps_pt + mat.delta_Strain_pt;
                        if (mat.Strain <= eps_pn)
                            [sig_cn, mat.TangentE] = mat.tension(mat.delta_Strain_pt);
                            if (mat.delta_Strain_pt ~= 0.0)
                                mat.TangentE = sig_cn/mat.delta_Strain_pt;
                            else
                                mat.TangentE = mat.InitialEc;
                            end
                            mat.Stress = mat.TangentE * (mat.Strain - eps_pt);
                        else
                            del_eps = mat.Strain - eps_pt;
                            [mat.Stress, mat.TangentE] = mat.tension(del_eps);
                            mat.delta_Strain_pt = del_eps;
                        end
                    end
                end
            end
        end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
136
137         function [sigma, modulus]=compression(mat, epsilon)
138             ratLocal = epsilon/mat.ec;
139             if (epsilon >= mat.ec)
140                 sigma   = mat.sc * ratLocal * (2.0 - ratLocal);
141                 modulus = mat.InitialEc * (1.0 - ratLocal);
142             else
143                 if (epsilon > mat.ecu)
144                     sigma   = (mat.scu - mat.sc) * (epsilon - mat.ec) / (mat.ecu - mat.
    ec) + mat.sc;
145                     modulus = (mat.scu - mat.sc) / (mat.ecu - mat.ec);
146                 else
147                     sigma   = mat.scu;
148                     modulus = 2.2204460492503131e-016;
149                 end
150             end
151         end
152
153         function [sigma, modulus]=tension(mat, delta_epsilon)
154             eps0 = mat.st/mat.InitialEc;
155             epsu = mat.st * (1.0/mat.Ets + 1.0/mat.InitialEc);
156             if (delta_epsilon <= eps0)
157                 sigma = delta_epsilon * mat.InitialEc;
158                 modulus = mat.InitialEc;
159             else
160                 if (delta_epsilon<=epsu)
161                     sigma   = mat.st - mat.Ets * (delta_epsilon-eps0);
162                     modulus = -mat.Ets;
163                 else
164                     sigma   = 0.0;
165                     modulus = 2.2204460492503131e-016;
166                 end
167             end
168         end
169
170         function getStress(mat)
171             mat.Stress = mat.Stress;
172         end
173
174         function allocateMemory(mat,totStep)
175             mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
176         end
177
178         function write2file(mat, fid)
179             fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
180         end
181
182          function write2mat(mat, fid)
183              uni_e_s = mat.uni_e_s;
184              save(fid, 'uni_e_s');
185          end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
186
187         function getPlot(mat,num)
188             figure(num);
189             plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
190             hold on;grid on;box on;
191             title('Strain-Stress relationship');
192             xlabel('Strain');
193             ylabel('Stress');
194         end
195
196         function finalPlot(mat,num)
197             figure(num);
198             plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
199             grid on;box on;
200             title('Strain-Stress relationship');
201             xlabel('Strain');
202             ylabel('Stress');
203         end
204
205     end
206 end
```

I.3.8 Ibarra

I.3.8.1 Hysteresis

```
1  %% ---------------------------------------------------------------
2  % Copyright 2010 All rights reserved.
3  % Program     : Mercury v.2.11
4  % Email       : christopherlsegura@gmail.com
5  % Revision    : May 10, 2011
6  % Written by : Christopher Segura
7  % Filename    : Hysteresis.m
8  %% ---------------------------------------------------------------
9  classdef Hysteresis < handle
10
11     properties (SetAccess=protected,Hidden)
12         % Input variables
13         tag;        % material tag
14         type;       % material type
15         sy_pos0;    % positive yield stress
16         epsy_pos0;  % positive yield strain
17         sy_neg0;    % negative yield stress
18         epsy_neg0;  % negative yield strain
19         cap_pos0;   % positive capping stress
20         ecap_pos0;  % positive capping strain
21         cap_neg0;   % negative capping stress
22         ecap_neg0;  % negative capping strain
23         res_pos;    % positive residual stress
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        eres_pos0;  % positive residual strain
        res_neg;    % negative residual stress
        eres_neg0;  % negative residual strain
        lamda_hys;  % hysteretic disipation constant
        det_rate;   % hysteresis deterioration exponent "c"
        rho;        % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;     % uniaxial stress
        tanE;       % tangent modulus
        strain;     % uniaxial strain
        iniE;       % initial modulus
        E_hrd;      % hardening modulus
        E_sof;      % softening modulus
        sy_pos;     % positive yield stress
        sy_neg;     % negative yield stress
        cap_pos;    % positive capping stress
        cap_neg;    % negative capping stress
        %
        epsy_pos;   % positive yield strain
        epsy_neg;   % negative yield strain
        ecap_pos;   % positive cap strain
        ecap_neg;   % negative cap strain
        eres_pos;   % positive residual strain
        eres_neg;   % negative residual strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        %
        s_tar_pos;   % positive target stress
        eps_tar_pos; % positive target strain
        s_tar_neg;   % negative target stress
        eps_tar_neg; % negative target strain
        state_flag;  % loading branch
        update_flag; % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;  % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;      % unloading stiffness
        E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        Beta;         % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;    % unloading modulus dissipation parameter
        norm_hys;     % normalized hysteretic energy
        n_exc;        % number excursions/cycles

        %% commit variables
        com_stress;      % committed stress from previous step
        com_tanE;        % committed tanE from previous step
        com_strain;      % committed strain from previous step
        com_sy_pos;      % committed yeild stress
        com_sy_neg;      % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;    % positive yield strain
        com_epsy_neg;    % negative yield strain
        com_ecap_pos;    % positive cap strain
        com_ecap_neg;    % negative cap strain
        com_eres_pos;    % positive residual strain
        com_eres_neg;    % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;

    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = Hysteresis(info)
            mat.tag          = info{1};
            mat.type         = info{2};
            mat.sy_pos0      = info{3};
            mat.epsy_pos0    = info{4};
            mat.sy_neg0      = info{5};
            mat.epsy_neg0    = info{6};
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.cap_pos0    = info{7};
            mat.ecap_pos0   = info{8};
            mat.cap_neg0    = info{9};
            mat.ecap_neg0   = info{10};
            mat.res_pos     = info{11};
            mat.eres_pos0   = info{12};
            mat.res_neg     = info{13};
            mat.eres_neg0   = info{14};
            mat.lamda_hys   = info{15};
            mat.det_rate    = info{16};
            mat.rho         = info{17};
            mat.Initialization();

        end % function Hysteresis

        function Initialization(mat)
            mat.stress     = 0;
            mat.strain     = 0;
            mat.sy_pos     = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos   = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE       = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.tanE       = mat.iniE;
            mat.sy_neg     = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg   = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos    = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos   = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd      = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat.epsy_pos0
    );
            mat.cap_neg    = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg   = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos   = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg   = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof      = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat.ecap_pos0
    );
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; % hysteretic
    dissipation capacity
            mat.s_ref_pos = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag = 1;
            mat.update_flag = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag = 1;
            mat.enrgy_step = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i-1)
            mat.E_unld = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg = mat.E_hrd;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.eps_pt5    = 0;
            mat.eps_pt10   = 0;
            mat.norm_hys   = 0;
            mat.n_exc      = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
            mat.com_stress      = mat.stress;
            mat.com_tanE        = mat.tanE;
            mat.com_strain      = mat.strain;
            mat.com_sy_pos      = mat.sy_pos;
            mat.com_sy_neg      = mat.sy_neg;
            mat.com_cap_pos     = mat.cap_pos;
            mat.com_cap_neg     = mat.cap_neg;
            mat.com_epsy_pos    = mat.epsy_pos;
            mat.com_epsy_neg    = mat.epsy_neg;
            mat.com_ecap_pos    = mat.ecap_pos;
            mat.com_ecap_neg    = mat.ecap_neg;
            mat.com_eres_pos    = mat.eres_pos;
            mat.com_eres_neg    = mat.eres_neg;
            mat.com_hys_dis_cap = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos   = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg   = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos   = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg   = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag  = mat.state_flag;
            mat.com_update_flag = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step  = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs  = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld      = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos   = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg   = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5     = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10    = mat.eps_pt10;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain     = TrialStrain;
            mat.stress     = mat.com_stress;
            mat.tanE       = mat.com_tanE;
            mat.state_flag = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
```

प्रारूप प्रतिलिपि

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
            %-------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-------------------------------------------------------------
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4) % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);
            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9) % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);
            end

            mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);

            if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
                else % reloading
                    if (mat.stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            else
                step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

        end % function materialStateDetermination


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
            switch mat.state_flag
                case -1
                    if (mat.strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 1
                    if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end


            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
426
427
428         function [ ref_stress , ref_strain , mat ] = PosUnloading( mat )
429
430             if (mat.state_flag == 1)
431                 if (mat.strain > 0)
432                     mat.update_flag = 1;
433                 elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
434                     mat.update_flag = -1;
435                 elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
436                     mat.update_flag = 7;
437                 elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
438                     mat.update_flag = 8;
439                 else
440                     mat.update_flag = 9;
441                 end
442             elseif (mat.state_flag == -1)
443                 if (mat.strain > mat.epsy_neg)
444                     mat.update_flag = -1;
445                 elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
446                     mat.update_flag = 7;
447                 elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
448                     mat.update_flag = 8;
449                 else
450                     mat.update_flag = 9;
451                 end
452             elseif (mat.state_flag == 9)
453                 mat.update_flag = 9;
454             else
455                 % update target state
456                 if (mat.reversal_flag == 1)
457                     if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
458                         mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
459                         mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
460                     end
461                 end
462                 % determine strain at pt 5
463                 mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
464
465                 if (mat.strain > mat.eps_pt5)
466                     mat.update_flag = 12; % unloading
467                 elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
468                     mat.update_flag = 13; % reloading to target
469                 else
470                     if (mat.strain > mat.ecap_neg)
471                         mat.update_flag = 7; % neg hardening
472                     elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
473                         mat.update_flag = 8; % neg softening
474                     else
475                         mat.update_flag = 9; % neg residual
476                     end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            end
        end

        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_stress = 0;
                ref_strain = 0;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 1
                ref_stress = mat.sy_pos;
                ref_strain = mat.epsy_pos;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 4
                ref_stress = mat.res_pos;
                ref_strain = mat.eres_pos;
                mat.tanE   = mat.iniE/100000;
            case 7
                ref_stress = mat.s_tar_neg;
                ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
            case 8
                ref_stress = mat.cap_neg;
                ref_strain = mat.ecap_neg;
                mat.tanE   = mat.E_sof;
            case 9
                ref_stress = mat.res_neg;
                ref_strain = mat.eres_neg;
                mat.tanE   = mat.iniE/100000;
            case 12
                ref_stress = mat.com_stress;
                ref_strain = mat.com_strain;
                mat.tanE   = mat.E_unld;
            case 13
                ref_stress = 0;
                ref_strain = mat.eps_pt5;
                mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
        end

        % update unloading modulus
        if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    9)

            if (mat.com_reversal_flag == 1)
                % estimate energy in step
                stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
                enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
     - mat.com_stress));
                [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
            end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on negative side
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.7172e-26,(mat.s_ref_neg - mat.sy_neg + (mat
.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
                    mat.cap_neg     = min(-1.2971e-24, mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    =  min(-1.0922e-24,(mat.res_neg - mat.s_ref_neg)/mat
.E_sof);
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.eps_tar_neg -
mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end

                    if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                        mat.update_flag = 12; %unloading
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end

                    if (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 7
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 11
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);

            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    4)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on positive side
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.12961e-26,(mat.s_ref_pos - mat.sy_pos + (mat
    .E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos     = max(1.09123e-26, mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.95315e-24,(mat.res_pos - mat.s_ref_pos)/mat.
    E_sof);
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.eps_tar_pos -
    mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                end
                if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                    mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                    mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                end

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                    mat.update_flag = 11; % reloading to target
                else
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2; % hardening
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3; % softening
                    else
                        mat.update_flag = 4; % residual
                    end
                end

                if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                    mat.update_flag = 11; % reloading to target
                else
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2; % hardening
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3; % softening
                    else
                        mat.update_flag = 4; % residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 11
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('****************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('****************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('****************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('****************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('****************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('****************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('****************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('****************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
        end % function allocateMemory

        function write2storage(mat,istep)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot

    end % methods

end % classdef
```

I.3.8.2 Hysteresis pinch

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program     : Mercury v.2.11
% Email       : christopherlsegura@gmail.com
% Revision    : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename    : HysteresisPinch.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef HysteresisPinch < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;            % material tag
        type;           % material type
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        sy_pos0;        % positive yield stress
        epsy_pos0;      % positive yield strain
        sy_neg0;        % negative yield stress
        epsy_neg0;      % negative yield strain
        cap_pos0;       % positive capping stress
        ecap_pos0;      % positive capping strain
        cap_neg0;       % negative capping stress
        ecap_neg0;      % negative capping strain
        res_pos;        % positive residual stress
        eres_pos0;      % positive residual strain
        res_neg;        % negative residual stress
        eres_neg0;      % negative residual strain
        lamda_hys;      % hysteretic disipation constant
        det_rate;       % hysteresis deterioration exponent "c"
        kappa_f;        % stress pinching break point factor
        kappa_d;        % strain pinching break point factor
        rho;            % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;         % uniaxial stress
        tanE;           % tangent modulus
        strain;         % uniaxial strain
        iniE;           % initial modulus
        E_hrd;          % hardening modulus
        E_sof;          % softening modulus
        sy_pos;         % positive yield stress
        sy_neg;         % negative yield stress
        cap_pos;        % positive capping stress
        cap_neg;        % negative capping stress
        epsy_pos;       % positive yield strain
        epsy_neg;       % negative yield strain
        ecap_pos;       % positive cap strain
        ecap_neg;       % negative cap strain
        eres_pos;       % positive residual strain
        eres_neg;       % negative residual strain
        hys_dis_cap;    % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;      % positive refenerence stress
        s_ref_neg;      % negative refenerence stress
        s_tar_pos;      % positive target stress
        eps_tar_pos;    % positive target strain
        s_tar_neg;      % negative target stress
        eps_tar_neg;    % negative target strain
        state_flag;     % loading branch
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        update_flag;    % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;     % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;     % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;         % unloading stiffness
        E_hrd_pos;      % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;      % negative hardening stiffness
        eps_pt5;        % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;       % negative unloading inflection strain
        Beta;           % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;      % unloading modulus dissipation parameter
        s_bpref_pos;    % positive break point reference stress
        s_bpref_neg;    % negative break point reference stress
        eps_bp_pos;     % positive break point strain
        eps_bp_neg;     % negative break point strain
        s_bp_pos;       % positive break point stress
        s_bp_neg;       % negative break point stress
        norm_hys;       % normalized hysteretic energy
        n_exc;          % number excursions/cycles
        %% commit variables
        % inputs
        com_stress;     % committed stress from previous step
        com_tanE;       % committed tanE from previous step
        com_strain;     % committed strain from previous step
        com_sy_pos;     % committed yeild stress
        com_sy_neg;     % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;   % positive yield strain
        com_epsy_neg;   % negative yield strain
        com_ecap_pos;   % positive cap strain
        com_ecap_neg;   % negative cap strain
        com_eres_pos;   % positive residual strain
        com_eres_neg;   % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_s_bpref_pos;
        com_s_bpref_neg;
        com_eps_bp_pos;
        com_eps_bp_neg;
        com_s_bp_pos;
        com_s_bp_neg;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;
    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = HysteresisPinch(info)
            mat.tag          = info{1};
            mat.type         = info{2};
            mat.sy_pos0      = info{3};
            mat.epsy_pos0    = info{4};
            mat.sy_neg0      = info{5};
            mat.epsy_neg0    = info{6};
            mat.cap_pos0     = info{7};
            mat.ecap_pos0    = info{8};
            mat.cap_neg0     = info{9};
            mat.ecap_neg0    = info{10};
            mat.res_pos      = info{11};
            mat.eres_pos0    = info{12};
            mat.res_neg      = info{13};
            mat.eres_neg0    = info{14};
            mat.lamda_hys    = info{15};
            mat.det_rate     = info{16};
            mat.kappa_f      = info{17};
            mat.kappa_d      = info{18};
            mat.rho          = info{19};
            mat.Initialization();

        end % function HysteresisPinch

        function Initialization(mat)
            mat.stress       = 0;
            mat.strain       = 0;
            mat.sy_pos       = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos     = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE         = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.tanE         = mat.iniE;
            mat.sy_neg       = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg     = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos      = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos     = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd        = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat.
epsy_pos0);
            mat.cap_neg      = mat.cap_neg0;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.ecap_neg    = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos    = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg    = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof       = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat.
    ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; % hysteretic
    dissipation capacity
            mat.s_ref_pos   = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg   = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos       = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag      = 1;
            mat.update_flag     = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag   = 1;
            mat.enrgy_step      = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs      = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i-1)
            mat.E_unld          = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos       = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg       = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5         = 0;
            mat.eps_pt10        = 0;
            mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
            mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
            mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
            mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.eps_tar_pos -
    mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
            mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.eps_tar_neg - mat
    .eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
            mat.norm_hys        = 0;
            mat.n_exc           = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
            mat.com_stress          = mat.stress;
            mat.com_tanE            = mat.tanE;
            mat.com_strain          = mat.strain;
            mat.com_sy_pos          = mat.sy_pos;
            mat.com_sy_neg          = mat.sy_neg;
            mat.com_cap_pos         = mat.cap_pos;
            mat.com_cap_neg         = mat.cap_neg;
            mat.com_epsy_pos        = mat.epsy_pos;
            mat.com_epsy_neg        = mat.epsy_neg;
            mat.com_ecap_pos        = mat.ecap_pos;
            mat.com_ecap_neg        = mat.ecap_neg;
            mat.com_eres_pos        = mat.eres_pos;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.com_eres_neg        = mat.eres_neg;
            mat.com_hys_dis_cap     = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos       = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg       = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos       = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos     = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg       = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg     = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag      = mat.state_flag;
            mat.com_update_flag     = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag   = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step      = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs      = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld          = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos       = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg       = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5         = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10        = mat.eps_pt10;
            mat.com_s_bpref_pos     = mat.s_bpref_pos;
            mat.com_s_bpref_neg     = mat.s_bpref_neg;
            mat.com_eps_bp_pos      = mat.eps_bp_pos;
            mat.com_eps_bp_neg      = mat.eps_bp_neg;
            mat.com_s_bp_pos        = mat.s_bp_pos;
            mat.com_s_bp_neg        = mat.s_bp_neg;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
```

प्रारूप प्रतिलिपि

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.state_flag   = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag  = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step   = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs   = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld       = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos    = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg    = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5      = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10     = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos    = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg    = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos     = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg     = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos       = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg       = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys     = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc        = mat.com_n_exc;

        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain           = TrialStrain;
            mat.stress           = mat.com_stress;
            mat.tanE             = mat.com_tanE;
            mat.state_flag       = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag      = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag    = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_prvs       = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld           = mat.com_E_unld;
            mat.sy_pos           = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg           = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos          = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg          = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos         = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg         = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos         = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg         = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos         = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg         = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos        = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg        = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos        = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos      = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg        = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg      = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.enrgy_step       = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld           = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos        = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg        = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5          = mat.com_eps_pt5;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.eps_pt10        = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos     = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos      = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg      = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos        = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg        = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
            %-------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-------------------------------------------------------------
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4)
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);

            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9)
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);

            end

            mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);

            if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
                else % reloading
                    if (mat.stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                end
            end
        else
            step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
        end
        % update energy in excursions
        mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
        mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
        % normalized hysteretic energy
        mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

    end % function materialStateDetermination


    function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)

        switch mat.state_flag
            case -1
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            case 1
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            case 2
                if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            case 3
                if (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1 % elastic
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11 % loading to target state
                    ref_stress = mat.com_stress;
```

प्रारूप प्रतिलिपि

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
                case 21 % loading to break point
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state if reversal
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                elseif (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
                    mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = mat.sy_pos;
                    ref_strain = mat.epsy_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = mat.s_bp_neg;
                    ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = 0;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    9)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
     - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    % update flag
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    % update reversal flag
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update flag to signal initial directional loadin
                    if (mat.eps_tar_neg == mat.epsy_neg)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on negative side
                    % Note: values must remain negative although exhaustion
                    % of hysteretic energy may make them positive
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
     - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.8912e-26,(mat.s_ref_neg - mat.sy_neg + (mat
    .E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
                    mat.cap_neg     = min(-1.1272e-24,mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    = min(-1.8912e-24,(mat.res_neg - mat.s_ref_neg)/mat.
    E_sof);
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.eps_tar_neg;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.eps_tar_neg -
    mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_neg      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
                    mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.
    eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;

                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    case 13
                        ref_stress = mat.s_bp_neg;
                        ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
                    case 23
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 7
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23;
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                end
            end
        end

        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_stress = mat.sy_neg;
                ref_strain = mat.epsy_neg;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 1
                ref_stress = 0;
                ref_strain = 0;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 2
                ref_stress = mat.s_tar_pos;
                ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
            case 3
                ref_stress = mat.cap_pos;
                ref_strain = mat.ecap_pos;
                mat.tanE   = mat.E_sof;
            case 4
                ref_stress = mat.res_pos;
                ref_strain = mat.eres_pos;
                mat.tanE   = mat.iniE/100000;
            case 9
                ref_stress = mat.res_neg;
                ref_strain = mat.eres_neg;
                mat.tanE   = mat.iniE/100000;
            case 10
                ref_stress = mat.com_stress;
                ref_strain = mat.com_strain;
                mat.tanE   = mat.E_unld;
            case 11
                if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                    ref_stress = mat.s_bp_pos;
                    ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                else
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                end
                mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
            case 21
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);

            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    4)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % set flag to signal initial directional loading for bp
                    if (mat.eps_tar_pos == mat.epsy_pos)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on positive side
                    % Note: values must remain positive althought they may
                    % become negative as hysteretic energy is exhausted
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.912361e-26,(mat.s_ref_pos - mat.sy_pos + (
    mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos     = max(1.02391e-26,mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.35915e-24,(mat.res_pos - mat.s_ref_pos)/mat.
    E_sof);
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.eps_tar_pos;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.eps_tar_pos -
    mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_pos      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
                    mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.
    eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;

                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 2
                        ref_stress = mat.s_tar_pos;
                        ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                    case 3
                        ref_stress = mat.cap_pos;
                        ref_strain = mat.ecap_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 4
                        ref_stress = mat.res_pos;
                        ref_strain = mat.eres_pos;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 10
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    case 11
                        if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                            ref_stress = mat.s_bp_pos;
                            ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                        else
                            ref_stress = 0;
                            ref_strain = mat.eps_pt10;
                        end
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
                    case 21
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('****************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('****************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('****************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('****************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('****************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('****************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('****************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                display('***************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
        end % function allocateMemory

        function write2storage(mat,istep)
            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot

    end % methods

end % classdef
```

I.3.9 Limit state shear

```
%% ----------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : HysteresisPinch.m
%% ------------------------------------------------------------
classdef HysteresisPinch < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;            % material tag
        type;           % material type
        sy_pos0;        % positive yield stress
        epsy_pos0;      % positive yield strain
        sy_neg0;        % negative yield stress
        epsy_neg0;      % negative yield strain
        cap_pos0;       % positive capping stress
        ecap_pos0;      % positive capping strain
        cap_neg0;       % negative capping stress
        ecap_neg0;      % negative capping strain
        res_pos;        % positive residual stress
        eres_pos0;      % positive residual strain
        res_neg;        % negative residual stress
        eres_neg0;      % negative residual strain
        lamda_hys;      % hysteretic disipation constant
        det_rate;       % hysteresis deterioration exponent "c"
        kappa_f;        % stress pinching break point factor
        kappa_d;        % strain pinching break point factor
        rho;            % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;         % uniaxial stress
        tanE;           % tangent modulus
        strain;         % uniaxial strain
        iniE;           % initial modulus
        E_hrd;          % hardening modulus
        E_sof;          % softening modulus
        sy_pos;         % positive yield stress
        sy_neg;         % negative yield stress
        cap_pos;        % positive capping stress
        cap_neg;        % negative capping stress
        epsy_pos;       % positive yield strain
        epsy_neg;       % negative yield strain
        ecap_pos;       % positive cap strain
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        ecap_neg;       % negative cap strain
        eres_pos;       % positive residual strain
        eres_neg;       % negative residual strain
        hys_dis_cap;    % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;      % positive refeneference stress
        s_ref_neg;      % negative refeneference stress
        s_tar_pos;      % positive target stress
        eps_tar_pos;    % positive target strain
        s_tar_neg;      % negative target stress
        eps_tar_neg;    % negative target strain
        state_flag;     % loading branch
        update_flag;    % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;     % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;     % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;         % unloading stiffness
        E_hrd_pos;      % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;      % negative hardening stiffness
        eps_pt5;        % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;       % negative unloading inflection strain
        Beta;           % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;      % unloading modulus dissipation parameter
        s_bpref_pos;    % positive break point reference stress
        s_bpref_neg;    % negative break point reference stress
        eps_bp_pos;     % positive break point strain
        eps_bp_neg;     % negative break point strain
        s_bp_pos;       % positive break point stress
        s_bp_neg;       % negative break point stress
        norm_hys;       % normalized hysteretic energy
        n_exc;          % number excursions/cycles
        %% commit variables
        % inputs
        com_stress;     % committed stress from previous step
        com_tanE;       % committed tanE from previous step
        com_strain;     % committed strain from previous step
        com_sy_pos;     % committed yeild stress
        com_sy_neg;     % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;   % positive yield strain
        com_epsy_neg;   % negative yield strain
        com_ecap_pos;   % positive cap strain
        com_ecap_neg;   % negative cap strain
        com_eres_pos;   % positive residual strain
        com_eres_neg;   % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refeneference stress
        com_s_ref_neg;  % negative refeneference stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_s_bpref_pos;
        com_s_bpref_neg;
        com_eps_bp_pos;
        com_eps_bp_neg;
        com_s_bp_pos;
        com_s_bp_neg;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;
    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = HysteresisPinch(info)
            mat.tag          = info{1};
            mat.type         = info{2};
            mat.sy_pos0      = info{3};
            mat.epsy_pos0    = info{4};
            mat.sy_neg0      = info{5};
            mat.epsy_neg0    = info{6};
            mat.cap_pos0     = info{7};
            mat.ecap_pos0    = info{8};
            mat.cap_neg0     = info{9};
            mat.ecap_neg0    = info{10};
            mat.res_pos      = info{11};
            mat.eres_pos0    = info{12};
            mat.res_neg      = info{13};
            mat.eres_neg0    = info{14};
            mat.lamda_hys    = info{15};
            mat.det_rate     = info{16};
            mat.kappa_f      = info{17};
            mat.kappa_d      = info{18};
            mat.rho          = info{19};
            mat.Initialization();

        end % function HysteresisPinch

        function Initialization(mat)
            mat.stress       = 0;
            mat.strain       = 0;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.sy_pos      = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos    = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE        = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.tanE        = mat.iniE;
            mat.sy_neg      = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg    = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos     = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos    = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd       = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat.
    epsy_pos0);
            mat.cap_neg     = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg    = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos    = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg    = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof       = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat.
    ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; % hysteretic
    dissipation capacity
            mat.s_ref_pos   = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg   = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos       = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag      = 1;
            mat.update_flag     = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag   = 1;
            mat.enrgy_step      = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs      = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i-1)
            mat.E_unld          = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos       = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg       = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5         = 0;
            mat.eps_pt10        = 0;
            mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
            mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
            mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
            mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.eps_tar_pos -
    mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
            mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.eps_tar_neg - mat
    .eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
            mat.norm_hys        = 0;
            mat.n_exc           = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
            mat.com_stress          = mat.stress;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.com_tanE            = mat.tanE;
            mat.com_strain          = mat.strain;
            mat.com_sy_pos          = mat.sy_pos;
            mat.com_sy_neg          = mat.sy_neg;
            mat.com_cap_pos         = mat.cap_pos;
            mat.com_cap_neg         = mat.cap_neg;
            mat.com_epsy_pos        = mat.epsy_pos;
            mat.com_epsy_neg        = mat.epsy_neg;
            mat.com_ecap_pos        = mat.ecap_pos;
            mat.com_ecap_neg        = mat.ecap_neg;
            mat.com_eres_pos        = mat.eres_pos;
            mat.com_eres_neg        = mat.eres_neg;
            mat.com_hys_dis_cap     = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos       = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg       = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos       = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos     = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg       = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg     = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag      = mat.state_flag;
            mat.com_update_flag     = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag   = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step      = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs      = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld          = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos       = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg       = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5         = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10        = mat.eps_pt10;
            mat.com_s_bpref_pos     = mat.s_bpref_pos;
            mat.com_s_bpref_neg     = mat.s_bpref_neg;
            mat.com_eps_bp_pos      = mat.eps_bp_pos;
            mat.com_eps_bp_neg      = mat.eps_bp_neg;
            mat.com_s_bp_pos        = mat.s_bp_pos;
            mat.com_s_bp_neg        = mat.s_bp_neg;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.ecap_pos     = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg     = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos     = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg     = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap  = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos    = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg    = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos    = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos  = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg    = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg  = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag   = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag  = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step   = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs   = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld       = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos    = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg    = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5      = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10     = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos    = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg    = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos     = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg     = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos       = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg       = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys     = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc        = mat.com_n_exc;

        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain          = TrialStrain;
            mat.stress          = mat.com_stress;
            mat.tanE            = mat.com_tanE;
            mat.state_flag      = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag     = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag   = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_prvs      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.sy_pos          = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg          = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos         = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg         = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos        = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg        = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos        = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg        = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos        = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg        = mat.com_eres_neg;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            mat.s_ref_pos       = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg       = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos       = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.enrgy_step      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos       = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg       = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5         = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10        = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos     = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos      = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg      = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos        = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg        = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
            %-------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-------------------------------------------------------------
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4)
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);

            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9)
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);

            end

            mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
                else % reloading
                    if (mat.stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

        end % function materialStateDetermination


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)

            switch mat.state_flag
                case -1
                    if (mat.strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 1
                    if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                case 2
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1 % elastic
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11 % loading to target state
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
                case 21 % loading to break point
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state if reversal
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
                    mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = mat.sy_pos;
                    ref_strain = mat.epsy_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = mat.s_bp_neg;
                    ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    9)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
     - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    % update flag
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    % update reversal flag
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update flag to signal initial directional loadin
                    if (mat.eps_tar_neg == mat.epsy_neg)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on negative side
                    % Note: values must remain negative although exhaustion
                    % of hysteretic energy may make them positive
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
     - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.8912e-26,(mat.s_ref_neg - mat.sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
                    mat.cap_neg     = min(-1.1272e-24,mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    = min(-1.8912e-24,(mat.res_neg - mat.s_ref_neg)/mat.E_sof);
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_neg      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
                    mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;

                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_stress = mat.s_bp_neg;
                        ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
                    case 23
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                case 7
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23;
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                case 11
                    if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        ref_stress = mat.s_bp_pos;
                        ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                    else
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                    end
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
                case 21
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);

            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    4)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % set flag to signal initial directional loading for bp
                    if (mat.eps_tar_pos == mat.epsy_pos)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on positive side
                    % Note: values must remain positive althought they may
                    % become negative as hysteretic energy is exhausted
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                    mat.epsy_pos     = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos    = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos     = max(1.912361e-26,(mat.s_ref_pos - mat.sy_pos + (
    mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos      = max(1.02391e-26,mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos     = max(1.35915e-24,(mat.res_pos - mat.s_ref_pos)/mat.
    E_sof);
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.eps_tar_pos -
    mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos    = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_pos       = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_pos       = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_pos      = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
                    mat.s_bp_pos         = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.
    eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;

                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 2
                        ref_stress = mat.s_tar_pos;
                        ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                    case 3
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                        ref_stress = mat.cap_pos;
                        ref_strain = mat.ecap_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 4
                        ref_stress = mat.res_pos;
                        ref_strain = mat.eres_pos;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 10
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 11
                        if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                            ref_stress = mat.s_bp_pos;
                            ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                        else
                            ref_stress = 0;
                            ref_strain = mat.eps_pt10;
                        end
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
                    case 21
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                display('**************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
        end % function allocateMemory

        function write2storage(mat,istep)
            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
1040
1041     end % methods
1042
1043 end % classdef
```

I.4 Part IV: Data-Driven Methods and Parameter Identification

This section covers automated parameter identification and model calibration techniques using MATLAB®optimization and data analysis.

I.4.1 Parameter Identification Program

This appendix lists the complete MATLAB source code described in §65.6for a nonlinear least-squares parameter identification program that couples MATLAB's `lsqnonlin` optimizer with an external finite element solver (ATENA). The program is data-driven: all configuration is read from an Excel spreadsheet (`Log.xlsx`), allowing the optimization problem to be changed without modifying the code. The program executes at each function evaluation by (1) updating model parameters in a temporary input file, (2) launching the external solver, (3) reading and aggregating the solver's predictions, (4) computing residuals, and (5) updating a real-time dashboard. A persistent log records all iterations to the Excel file.

I.4.2 Main Program and Core Orchestration

The orchestration begins at the entry point `Main.m`, which simply adds the functions folder to the path and calls `ParIdentification()`. The main function `ParIdentification.m` reads configuration from the spreadsheet, initializes all data structures, runs a diagnostic dry run at the initial guess x_0, and then launches the `lsqnonlin` optimizer. The nested function `minfunc` is called at every function evaluation and implements the full chain: parameter update, solver launch, output parsing, residual computation, and dashboard update. Local helper functions log evaluation data to a CSV file and manage a small progress window.

```
clear;close all;clc
addpath(fullfile(fileparts(mfilename('fullpath')), 'functions'));

ParIdentification();
```

Listing I.1: Main.m – Entry point

```
function ParIdentification()
%PARIDENTIFICATION Main function for parameter identification using lsqnonlin.
%
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   Reads control data from Log.xlsx, initializes the optimization,
%   and runs lsqnonlin with ATENA as the external solver.
%   minfunc is a nested function with direct access to all shared variables.

%---------------------------------
% Read control data from spreadsheet
%---------------------------------
S = readInputSheet('Log.xlsx', 'Input');

%-----------------------------------------------
% Read initial values, lower and upper bounds
%-----------------------------------------------
[x0, lb, ub] = extractEvaluateValues(S.inpFile, S.modelPar);
S.lb = lb;
S.ub = ub;

%-----------------------------------------------
% Create temp file for optimization
%-----------------------------------------------
inpFileTemp = createTempInputFile(S.inpFile);

%-----------------------------------------------
% Initialize PI sheet in log file (row-wise)
%-----------------------------------------------
piSheetName = initPISheet('Log.xlsx', S, x0);

%-------------------------------------------
% Initialize counters and dashboard handles
%-------------------------------------------
nFnEval      = 0;
nIter        = 0;
X            = x0;
hDashboard   = [];
hProgress    = [];
isDryRunCall = false;
lastIterTic  = tic;

%-----------------------------------------------
% Keep last successful dry-run results
%-----------------------------------------------
predictedLast = [];
resLast       = [];

%-----------------------------------------------
% Open persistent CSV log for all evaluations
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%-------------------------------------------
logFID = fopen('minfunc_log.csv', 'w');
fprintf(logFID, 'call,%s,residual_norm,status\n', strjoin(S.modelPar, ','));

%============================================================
% PRE-OPTIMIZATION DIAGNOSTICS
%============================================================
fprintf('\n=== PRE-OPTIMIZATION DIAGNOSTICS ===\n');
fprintf('x0 : '); fprintf('%10.4f ', x0);   fprintf('\n');
fprintf('lb : '); fprintf('%10.4f ', S.lb); fprintf('\n');
fprintf('ub : '); fprintf('%10.4f ', S.ub); fprintf('\n');

inBounds = all(x0 >= S.lb & x0 <= S.ub);
fprintf('x0 within bounds: %s\n', mat2str(inBounds));
if ~inBounds
    fclose(logFID);
    error('ParIdentification:boundsViolation', ...
          'x0 violates bounds - fix extractEvaluateValues before continuing.');
end

fprintf('\nCalling minfunc(x0) as dry run...\n');
isDryRunCall = true;
try
    r_test = minfunc(x0);
    fprintf('Residuals : '); fprintf('%12.6f ', r_test); fprintf('\n');
    fprintf('Any NaN   : %d\n', any(isnan(r_test)));
    fprintf('Any Inf   : %d\n', any(isinf(r_test)));
catch ME
    fprintf('minfunc THREW AN ERROR:\n  %s\n', ME.message);
    fclose(logFID);
    rethrow(ME);
end
isDryRunCall = false;
fprintf('====================================\n\n');

%------------------------------------------------------------
% Keep the existing dashboard windows, but clear the dry-run
% history so it does not count as part of the optimization.
% Then replot the dry run as iteration 0 at Fn eval = 0.
%------------------------------------------------------------
if ~isempty(hDashboard) && isstruct(hDashboard) && ...
   isfield(hDashboard, 'res') && ishghandle(hDashboard.res)

    ud = get(hDashboard.res, 'UserData');
    if isstruct(ud)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        if isfield(ud, 'relErrHist'), ud.relErrHist(:) = nan; end
        if isfield(ud, 'absResHist'), ud.absResHist(:) = nan; end
        if isfield(ud, 'xHist'),      ud.xHist(:)      = nan; end
        if isfield(ud, 'fEvalVec'),   ud.fEvalVec(:)   = nan; end
        ud.nE = 0;
        set(hDashboard.res, 'UserData', ud);
    end
end

% Reset counters so the dry run does not count
nFnEval = 0;
nIter   = 0;
X       = x0;

% Replot dry run as iteration 0 at function evaluation 0
if ~isempty(predictedLast) && ~isempty(resLast)
    hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, x0, predictedLast, resLast, ...
                             0, false, true);
end

% Reset again so the actual optimization starts clean
nFnEval = 0;
nIter   = 0;
X       = x0;

% Start timing from the first true iteration of the real run
lastIterTic = tic;

% Save checkpoint for crash recovery / re-diagnostics
save('debug_checkpoint.mat', 'S', 'x0');
fprintf('Checkpoint saved to debug_checkpoint.mat\n\n');

%=================================================================
% RUN OPTIMIZATION
%=================================================================
[x, resnorm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0, @minfunc);

%-----------------------------------------------
% Close log and report results
%-----------------------------------------------
fclose(logFID);

fprintf('\n=== Optimization completed ===\n');
fprintf('Exit flag : %d\n',   exitflag);
fprintf('Iterations: %d\n',   output.iterations);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
fprintf('Func evals: %d\n',   output.funcCount);
fprintf('Norm resid: %.6e\n', resnorm);
fprintf('Identified parameters:\n');
for k = 1:numel(S.modelPar)
    fprintf('   %s = %.6g\n', S.modelPar{k}, x(k));
end

% Timestamped save of final result
resultFile = sprintf('result_%s.mat', datestr(now, 'yyyymmdd_HHMMSS'));
save(resultFile, 'x', 'resnorm', 'res', 'exitflag', 'output', 'S', 'x0');
fprintf('Results saved to %s\n', resultFile);
```

Listing I.2: ParIdentification.m – Main function and nested objective function (part 1 of 2)

```
%=============================================================
% NESTED OBJECTIVE FUNCTION
%=============================================================
    function res = minfunc(x)
    %MINFUNC Objective function called by lsqnonlin at every function evaluation.

        nFnEval = nFnEval + 1;
        nPar    = numel(S.modelPar);

        %----------------------------------------
        % Determine if this is a true optimization iteration.
        % Important: the diagnostic dry run must NOT be logged
        % as a real iteration.
        %----------------------------------------
        isIteration = ~isDryRunCall && ...
                      ((mod(nFnEval, nPar + 1) == 0) || (nFnEval == 1));

        %----------------------------------------
        % Update progress window
        %----------------------------------------
        hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, x,
    S.modelPar);
        fprintf('   Function evaluation #%d\n', nFnEval);

        %----------------------------------------
        % Write current parameters to temp input file
        %----------------------------------------
        updateEvaluateValues(inpFileTemp, S.modelPar, x, ~isDryRunCall);

        %----------------------------------------
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        % Run ATENA
        %----------------------------------------
        fprintf('%s  Launching ATENA...\n', datestr(now));
        [status, cmdout] = runAnalysis(S.exeName, inpFileTemp, ...
                                       S.AtenaOut, S.AtenaMsg, S.AtenaErr);

        if status ~= 0
            warning('ATENA failed at evaluation #%d:\n%s', nFnEval, cmdout);
            res = ones(size(S.fieldAggValues));
            predictedLast = nan(size(S.fieldAggValues));
            resLast       = res;

            if ~isDryRunCall
                logEval(logFID, nFnEval, x, NaN, 'ATENA_FAIL');
            end

            return
        end

        %----------------------------------------
        % Preserve a copy of the ATENA output file
        % after each successful true optimization run.
        % The dry run is deliberately skipped to avoid
        % overwriting out-1.out before the real run starts.
        %----------------------------------------
        if ~isDryRunCall
            [pth, nam, ext] = fileparts(S.outFile);
            outCopy = fullfile(pth, sprintf('%s-%d%s', nam, nFnEval, ext));

            if isfile(S.outFile)
                [copyOK, copyMsg] = copyfile(S.outFile, outCopy);
                if ~copyOK
                    warning('Could not copy ATENA output file at evaluation
#%d:\n%s', ...
                            nFnEval, copyMsg);
                else
                    fprintf('   Copied ATENA output to %s\n', outCopy);
                end
            else
                warning('Expected ATENA output file not found at evaluation
#%d:\n%s', ...
                        nFnEval, S.outFile);
            end
        end

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        %----------------------------------------
        % Read model predictions
        %----------------------------------------
        ModelPredValues = readModelPredValues(S.outFile, S.modelPred);

        %----------------------------------------
        % Compute aggregated predictions
        %----------------------------------------
        predicted = cellfun(@(f) f(ModelPredValues), S.fieldAggFcn);

        %----------------------------------------
        % Compute residuals
        %----------------------------------------
        res      = predicted - S.fieldAggValues;
        norm_res = norm(res);

        predictedLast = predicted;
        resLast       = res;

        %----------------------------------------
        % Guard against NaN/Inf from bad ATENA output
        %----------------------------------------
        if any(~isfinite(res))
            warning('NaN/Inf in residuals at eval #%d - substituting 1e6',
    nFnEval);
            res(~isfinite(res)) = 1e6;
            norm_res = norm(res);
            resLast  = res;

            if ~isDryRunCall
                logEval(logFID, nFnEval, x, norm_res, 'NAN_IN_RES');
            end
        else
            if ~isDryRunCall
                logEval(logFID, nFnEval, x, norm_res, 'OK');
            end
        end

        fprintf('   Norm of residual: %.6e\n', norm_res);

        %----------------------------------------
        % Update progress window with norm
        %----------------------------------------
        hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, x,
    S.modelPar, norm_res);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
269
270         %----------------------------------------
271         % Update dashboard
272         %----------------------------------------
273         hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, x, predictedLast, resLast, ...
274                                  nFnEval, isIteration, isDryRunCall);
275
276         %----------------------------------------
277         % Log true iterations to Excel and save snapshot
278         %----------------------------------------
279         if isIteration
280             nIter = nIter + 1;
281             fprintf('   === Iteration #%d completed, norm = %.6e ===\n', nIter,
    norm_res);
282
283             X = [X; x(:)'];
284
285             iterTime_hr = toc(lastIterTic) / 3600;
286             lastIterTic = tic;
287
288             predOverTarget = nan(size(predictedLast));
289             mask = isfinite(predictedLast) & ...
290                    isfinite(S.fieldAggValues) & ...
291                    (S.fieldAggValues ~= 0);
292
293             predOverTarget(mask) = predictedLast(mask) ./ S.fieldAggValues(mask);
294
295             logIterationToSheet('Log.xlsx', piSheetName, nIter, x, ...
296                                 predOverTarget, resLast, iterTime_hr);
297
298             save(sprintf('iter_%03d.mat', nIter), ...
299                  'x', 'norm_res', 'res', 'nIter', 'nFnEval', ...
300                  'predictedLast', 'predOverTarget', 'iterTime_hr');
301         end
302
303     end % minfunc
304
305 end % ParIdentification
306
307
308 %=============================================================
309 % LOCAL HELPER: write one line to the CSV evaluation log
310 %=============================================================
311 function logEval(fid, callNum, x, normVal, status)
312     if isnan(normVal)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        normStr = 'NaN';
    else
        normStr = sprintf('%.8f', normVal);
    end
    xStr = strjoin(arrayfun(@(v) sprintf('%.6f', v), x(:)', 'UniformOutput', false), ',');
    fprintf(fid, '%d,%s,%s,%s\n', callNum, xStr, normStr, status);
end


%=========================================================
% LOCAL FUNCTION: progress window
%=========================================================
function hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, x, parNames, normRes)
%UPDATEPROGRESSWINDOW Create or update a small progress window.

    if isempty(hProgress) || ~ishandle(hProgress)
        hProgress = figure('Name',        'Optimization Progress', ...
                           'NumberTitle', 'off', ...
                           'MenuBar',     'none', ...
                           'ToolBar',     'none', ...
                           'Resize',      'off', ...
                           'Position',    [20 20 320 400], ...
                           'Color',       [0.95 0.95 0.95]);

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblFnEval', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 360 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblIter', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 330 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblNorm', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 300 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        nPar = numel(parNames);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        for k = 1:nPar
            yPos = 270 - (k - 1) * 25;
            uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', ...
                'Tag', sprintf('lblPar%d', k), ...
                'Units', 'pixels', ...
                'Position', [10 yPos 300 22], ...
                'FontSize', 9, ...
                'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
                'HorizontalAlignment', 'left');
        end
    end

    setfield_text(hProgress, 'lblFnEval', sprintf('Function evaluations: %d', nFnEval));
    setfield_text(hProgress, 'lblIter',   sprintf('Iterations completed: %d', nIter));

    if nargin >= 6 && ~isempty(normRes)
        setfield_text(hProgress, 'lblNorm', sprintf('Norm of residual: %.4e', normRes));
    else
        setfield_text(hProgress, 'lblNorm', 'Norm of residual:      ...');
    end

    for k = 1:numel(x)
        setfield_text(hProgress, sprintf('lblPar%d', k), ...
            sprintf('  %s = %.6g', parNames{k}, x(k)));
    end

    drawnow;
end


function setfield_text(hFig, tag, str)
    h = findobj(hFig, 'Tag', tag);
    if ~isempty(h)
        set(h, 'String', str);
    end
end
```

Listing I.3: ParIdentification.m – Nested objective function and local helpers (part 2 of 2)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.4.3 Data I/O and Spreadsheet Integration

This subsection contains all functions responsible for reading configuration from the Excel control sheet, extracting model parameters and bounds from the ATENA input file, and managing the iteration log. The `readInputSheet` function reads all solver options, parameter names, prediction names, and aggregation expressions from the spreadsheet using a keyword-based search pattern. The `extractEvaluateValues` and `updateEvaluateValues` functions respectively parse and modify EVALUATE lines in the input file. The model prediction output is parsed by `readModelPredValues`, which blocks of data from the ATENA output file and extracts the final monitored value for each requested quantity. Finally, the `initPISheet` and `logIterationToSheet` functions manage the row-wise iteration log in the Excel file, recording iteration number, timestamp, elapsed time, parameter values, prediction-to-target ratios, and residuals.

```
function S = readInputSheet(filename, sheetName)
%READINPUTSHEET Read optimization input data from Excel sheet.
if nargin < 1 || isempty(filename);  filename  = 'Log.xlsx'; end
if nargin < 2 || isempty(sheetName); sheetName = 'Input';    end
    raw = readcell(filename, 'Sheet', sheetName);
    S.exeName        = readScalarByKey(raw, 'exeName');
    S.inpFile        = readScalarByKey(raw, 'inpFile');
    S.outFile        = readScalarByKey(raw, 'outFile');
    S.modelPar       = readTextVectorByKey(raw, 'modelPar');
    S.modelPred      = readTextVectorByKey(raw, 'modelPred');
    S.fieldAggExpr   = readTextVectorByKey(raw, 'fieldAggExp');
    S.fieldAggValues = readNumericVectorByKey(raw, 'fieldAggValues');
    S.fieldAggFcn    = buildFieldAggFunctions(S.fieldAggExpr, S.modelPred);
    S.maxFunEval     = str2double(readScalarByKey(raw, 'maxFunEval'));
    S.maxIter        = str2double(readScalarByKey(raw, 'maxIter'));
    S.tolFun         = str2double(readScalarByKey(raw, 'tolFun'));
    S.tolX = str2double(readScalarByKey(raw, 'StepTol'));
    S.algorithm      = readScalarByKey(raw, 'algorithm');
    S.display        = readScalarByKey(raw, 'display');
    S.fdStepSize     = str2double(readScalarByKey(raw,
   'FiniteDifferenceStepSize'));
    S.fdType         = readScalarByKey(raw, 'FiniteDifferenceType');

    S.AtenaOut=[S.inpFile '.out'];
    S.AtenaErr=[S.inpFile '.err'];
    S.AtenaMsg=[S.inpFile '.msg'];
    S.inpFile=[S.inpFile '.inp'];
end
```

Listing I.4: readInputSheet.m – Read all configuration from Excel

```
function [x, lb, ub] = extractEvaluateValues(filename, names)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%EXTRACTEVALUATEVALUES Extract EVALUATE values and bounds from input file.
%
%   Reads each EVALUATE line of the form:
%       EVALUATE "Name = /*# Name */ value"   // Recommended range lb - ub
%   and returns the current values, lower bounds, and upper bounds for the
%   requested parameter names. Bounds are set to NaN if not present on the line.
%
%   Inputs:
%       filename - path to the input file (e.g. S.inpFile)
%       names    - cell array of parameter names (e.g. S.modelPar)
%
%   Outputs:
%       x  - current parameter values  [1 x n]
%       lb - lower bounds              [1 x n]
%       ub - upper bounds              [1 x n]
%
%   Example:
%       [x0, lb, ub] = extractEvaluateValues(S.inpFile, S.modelPar);
    if ischar(names) || isstring(names); names = cellstr(names); end
    txt   = fileread(filename);
    lines = regexp(txt, '\r\n|\n|\r', 'split');
    lookupX  = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    lookupLB = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    lookupUB = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    numPat = '([-+]?\d*\.?\d+(?:[eEdD][+-]?\d+)?)';
    for i = 1:numel(lines)
        line = strtrim(lines{i});
        if ~strncmpi(line, 'EVALUATE', 8); continue; end
        tok = regexp(line, ...
            ['EVALUATE\s+"([A-Za-z0-9_]+)\s*=\s*/\*#\s*[A-Za-z0-9_]+\s*\*/\s*' numPat], ...
            'tokens', 'once');
        if isempty(tok); continue; end
        varName = strtrim(tok{1});
        varVal  = str2double(tok{2});
        lookupX(varName) = varVal;
        tokBounds = regexp(line, ...
            ['Recommended\s+range\s+' numPat '\s*-\s*' numPat], ...
            'tokens', 'once');
        if ~isempty(tokBounds)
            lookupLB(varName) = str2double(tokBounds{1});
            lookupUB(varName) = str2double(tokBounds{2});
        else
            lookupLB(varName) = NaN;
            lookupUB(varName) = NaN;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        end
    end
    x  = NaN(1, numel(names));
    lb = NaN(1, numel(names));
    ub = NaN(1, numel(names));
    for i = 1:numel(names)
        key = char(names{i});
        if isKey(lookupX,  key); x(i)  = lookupX(key);  end
        if isKey(lookupLB, key); lb(i) = lookupLB(key); end
        if isKey(lookupUB, key); ub(i) = lookupUB(key); end
    end
end
```

Listing I.5: extractEvaluateValues.m – Parse EVALUATE lines from input file

```
function inpFileTemp = createTempInputFile(inpFile)
%CREATETEMPINPUTFILE Create a temporary copy of the input file for optimization.
%
%   Creates a working copy of the input file that will be continuously
%   overwritten during the optimization iterations, leaving the original
%   input file untouched.
%
%   Input:
%       inpFile     - path to the original input file (e.g. S.inpFile)
%
%   Output:
%       inpFileTemp - path to the temporary copy (e.g. 'input_temp.dat')
%
%   Example:
%       inpFileTemp = createTempInputFile(S.inpFile);
    [folder, name, ext] = fileparts(inpFile);
    inpFileTemp = fullfile(folder, [name '_temp' ext]);
    [ok, msg]   = copyfile(inpFile, inpFileTemp);
    if ~ok; error('Could not copy %s to %s: %s', inpFile, inpFileTemp, msg); end
end
```

Listing I.6: createTempInputFile.m – Create working copy of input file

```
function updateEvaluateValues(filename, names, Xnew, verbose)
    if nargin < 4
        verbose = true;
    end
%UPDATEEVALUATEVALUES Overwrite EVALUATE values in input file with new values.
%
%   Reopens the input file and replaces the numeric values associated with
%   each parameter name in 'names' with the corresponding new values in
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   Xnew. The file format expected is:
%       EVALUATE "ParName = /*# ParName */ oldvalue"

    if numel(names) ~= numel(Xnew)
        error('names and Xnew must have the same number of elements.');
    end

    txt = fileread(filename);

    for k = 1:numel(names)
        name     = char(names{k});
        valueStr = num2str(Xnew(k), '%.15g');

        pattern = ['(EVALUATE\s+"', regexptranslate('escape', name), ...
                   '\s*=\s*/\*#\s*', regexptranslate('escape', name), ...
                   '\s*\*/\s*)([-+]?\d*\.?\d+(?:[eEdD][-+]?\d+)?)(\")'];

        % Check whether the parameter line is found
        tok = regexp(txt, pattern, 'tokens', 'once');

        if isempty(tok)
            warning('Parameter %s not found in file %s.', name, filename);
            continue
        end

        oldValueStr = tok{2};

        repl   = ['$1' valueStr '$3'];
        txtNew = regexprep(txt, pattern, repl, 'once');

        if strcmp(strtrim(oldValueStr), strtrim(valueStr))
            if verbose
                fprintf('Parameter %s matched; value unchanged (%s)\n', name,
    valueStr);
            end
        else
            if verbose
                fprintf('Parameter %s updated: %s -> %s\n', name, oldValueStr,
    valueStr);
            end
        end

        txt = txtNew;
    end

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    fid = fopen(filename, 'w');
    if fid == -1
        error('Could not open %s for writing.', filename);
    end
    cleaner = onCleanup(@() fclose(fid));
    fwrite(fid, txt, 'char');
end
```

Listing I.7: updateEvaluateValues.m – Overwrite parameters in input file

```
function ModelPredValues = readModelPredValues(outFile, modelPred)
%READMODELPREDVALUES  Read the last monitored value for each modelPred string
%                     from an ATENA output file (monitors.csv / output.dat).
%
%  Each block in the file has the structure:
%
%    Output data for request ; MONITOR_SET_2_SAB_86M_X_|108309|_DISPLACEMENTS
   #100000 ;
%    Data for the monitored output: ...
%    ; Step ; 5 ; Iteration ; 60 ; at Time ; 5 ;
%    ----...---- ;
%    Id ;  Time ;  Step ;  X(1) ;            <- header  (skipped)
%    Units ;  day ;  None ;  m ;             <- units   (skipped)
%    1 ;  0. ;  0. ;  0. ;                  <- data rows
%    ...
%    6 ;  5. ;  5. ;  0.0013112 ;           <- LAST data row -> value kept
%
%  The value of interest is the LAST numeric token on the LAST data row
%  (i.e. the last non-empty field before the trailing ";").  This handles
%  blocks with 1 output column (X(1) only) as well as blocks with 3 columns
%  (X(1), X(2), X(3)), where the relevant displacement has been pre-selected
%  by the monitor definition.
%
%  Matching is case-insensitive: modelPred = 'SAB_86m_X' matches
%  'MONITOR_SET_2_SAB_86M_X_|108309|_DISPLACEMENTS #100000'.
%
%  INPUT
%    outFile   - path to the ATENA output file
%    modelPred - char, string, or cell array of strings to look up
%
%  OUTPUT
%    ModelPredValues - 1 x numel(modelPred) double (NaN if not found)

% --- normalise modelPred to a cell array of char --------------------------
if ischar(modelPred) || isstring(modelPred)
    modelPred = cellstr(modelPred);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
end
nPred = numel(modelPred);

% --- read file ------------------------------------------------------------
txt   = fileread(outFile);
lines = regexp(txt, '\r\n|\n|\r', 'split');

% --- initialise state machine ---------------------------------------------
lookup     = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
currentKey = '';   % modelPred entry currently being accumulated
lastVal    = NaN;  % last valid numeric value seen in current block

% --- pattern for the block-header line ------------------------------------
headerPat = 'Output\s+data\s+for\s+request\s*;\s*([^;]+)\s*;';

for i = 1:numel(lines)
    line = strtrim(lines{i});

    % ---- detect a new block header ------------------------------------
    tok = regexp(line, headerPat, 'tokens', 'once');
    if ~isempty(tok)
        % save whatever we accumulated for the previous block
        if ~isempty(currentKey)
            lookup(currentKey) = lastVal;
        end

        requestName = upper(strtrim(tok{1}));
        currentKey  = '';
        lastVal     = NaN;

        % find which modelPred (if any) this block belongs to
        for j = 1:nPred
            candidate = char(modelPred{j});
            if contains(requestName, upper(candidate))
                currentKey = candidate;   % keep original spelling as key
                break
            end
        end
        continue
    end

    % ---- only process data lines when inside a matching block -------
    if isempty(currentKey)
        continue
    end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
81
82      % skip separator, header, and units lines
83      if isempty(line) ...
84              || startsWith(line, '-') ...
85              || startsWith(line, 'Id') ...
86              || startsWith(line, 'Units') ...
87              || startsWith(line, 'Data') ...
88              || startsWith(line, ';')          % summary line "  ; Step ; 5 ..."
89          continue
90      end
91
92      % ---- parse a data row ------------------------------------------------
93      % Data rows look like:  "    6 ;         5. ;         5. ;  0.0013112 ;"
94      % Split on ";", strip whitespace, drop empty tokens.
95      cols = strsplit(line, ';');
96      cols = strtrim(cols);
97      cols = cols(~cellfun(@isempty, cols));   % remove trailing empty field
98
99      % A valid data row must start with an integer Id (first field is a
100     % non-negative integer or a number with a trailing dot like "6.").
101     if isempty(cols)
102         continue
103     end
104     firstNum = str2double(cols{1});
105     if isnan(firstNum) || firstNum < 0 || firstNum ~= floor(firstNum)
106         % not a numeric data row (e.g. a stray text line)
107         % allow "6." style (floor(6.) == 6)
108         if ~(~isnan(firstNum) && firstNum == floor(firstNum))
109             continue
110         end
111     end
112
113     % The value of interest is the LAST numeric token in the row.
114     % (For a 3-component block the monitor definition selects one direction,
115     %  which happens to be the last populated column.)
116     v = NaN;
117     for k = numel(cols):-1:1
118         candidate_v = str2double(cols{k});
119         if ~isnan(candidate_v)
120             v = candidate_v;
121             break
122         end
123     end
124     if ~isnan(v)
125         lastVal = v;   % keep updating; loop ends on the last row
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    end
end

% --- save the final block ------------------------------------------------
if ~isempty(currentKey)
    lookup(currentKey) = lastVal;
end

% --- assemble output vector ----------------------------------------------
ModelPredValues = NaN(1, nPred);
for i = 1:nPred
    key = char(modelPred{i});
    if isKey(lookup, key)
        ModelPredValues(i) = lookup(key);
    end
end

end
```

Listing I.8: readModelPredValues.m – Extract monitored outputs from ATENA output

```
function piSheetName = initPISheet(logFile, S, x0)
%INITPISHEET Create a new PI #n sheet in row-wise format.
%
%   piSheetName = initPISheet(logFile, S, x0)
%
%   Creates the next available sheet named PI #1, PI #2, ...
%   and writes:
%     - row 1: headers
%     - row 2: iteration 0 (initial guess x0)
%
%   Columns are:
%     Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> | <Pred/Target...> |
    <Residual...>

    %-------------------------------------------------------------
    % Determine next available PI sheet name
    %-------------------------------------------------------------
    [~, sheetNames] = xlsfinfo(logFile);
    if isempty(sheetNames)
        sheetNames = {};
    end

    n = 1;
    while any(strcmp(sheetNames, sprintf('PI #%d', n)))
        n = n + 1;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    end
    piSheetName = sprintf('PI #%d', n);

    nPar = numel(S.modelPar);
    nAgg = numel(S.fieldAggExpr);

    %-------------------------------------------------------------
    % Build header row
    %-------------------------------------------------------------
    headers = cell(1, 3 + nPar + nAgg + nAgg);
    c = 1;

    headers{c} = 'Iter';          c = c + 1;
    headers{c} = 'Timestamp';     c = c + 1;
    headers{c} = 'IterTime_hr';   c = c + 1;

    for k = 1:nPar
        headers{c} = S.modelPar{k};
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:nAgg
        headers{c} = sprintf('PredTarget_%02d', k);
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:nAgg
        headers{c} = sprintf('Residual_%02d', k);
        c = c + 1;
    end

    %-------------------------------------------------------------
    % Build iteration-0 row
    %-------------------------------------------------------------
    row0 = cell(1, numel(headers));
    c = 1;

    row0{c} = 0;                                        c = c + 1;
    row0{c} = datestr(now, 'dd-mmm-yyyy HH:MM:SS'); c = c + 1;
    row0{c} = 0;                                        c = c + 1;

    for k = 1:nPar
        row0{c} = x0(k);
        c = c + 1;
    end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    % Leave blank for Pred/Target and Residual columns
    for k = 1:(2*nAgg)
        row0{c} = [];
        c = c + 1;
    end

    %-------------------------------------------------------------
    % Write to Excel
    %-------------------------------------------------------------
    warning('off', 'MATLAB:xlswrite:AddSheet');
    xlswrite(logFile, headers, piSheetName, 'A1');
    xlswrite(logFile, row0,    piSheetName, 'A2');
    warning('on',  'MATLAB:xlswrite:AddSheet');
end
```

Listing I.9: initPISheet.m – Create new PI log sheet with headers

```
function logIterationToSheet(logFile, sheetName, nIter, x, predOverTarget, res, iterTime_hr)
%LOGITERATIONTOSHEET Append one iteration as one row to the PI sheet.
%
%   logIterationToSheet(logFile, sheetName, nIter, x, predOverTarget, res, iterTime_hr)
%
%   Appends a new row with:
%     Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> | <Pred/Target...> | <Residual...>

    if nargin < 7
        error('logIterationToSheet requires 7 inputs.');
    end

    x = x(:).';
    predOverTarget = predOverTarget(:).';
    res = res(:).';

    [~, ~, raw] = xlsread(logFile, sheetName);

    if isempty(raw)
        nextRow = 1;
    else
        nextRow = size(raw, 1) + 1;
    end

    row = cell(1, 3 + numel(x) + numel(predOverTarget) + numel(res));
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    c = 1;

    row{c} = nIter;                                    c = c + 1;
    row{c} = datestr(now, 'dd-mmm-yyyy HH:MM:SS');     c = c + 1;
    row{c} = iterTime_hr;                              c = c + 1;

    for k = 1:numel(x)
        row{c} = x(k);
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:numel(predOverTarget)
        if isfinite(predOverTarget(k))
            row{c} = predOverTarget(k);
        elseif isnan(predOverTarget(k))
            row{c} = 'NaN';
        else
            row{c} = 'Inf';
        end
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:numel(res)
        if isfinite(res(k))
            row{c} = res(k);
        elseif isnan(res(k))
            row{c} = 'NaN';
        else
            row{c} = 'Inf';
        end
        c = c + 1;
    end

    range = sprintf('A%d', nextRow);
    xlswrite(logFile, row, sheetName, range);
end
```

Listing I.10: logIterationToSheet.m – Append iteration row to PI log

I.4.4 Optimization Workflow and Auxiliary Functions

This subsection contains the remaining public functions that implement the optimization loop and real-time dashboard, along with all private helper functions. The `runAnalysis` function launches the external ATENA solver as a background process

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

and captures its console output. The `runLSQnonlin` function wraps MATLAB's native `lsqnonlin` optimizer, applying the solver options read from the control sheet and computing adaptive tolerances based on the parameter bounds. The `updatePlots` function maintains two live dashboard figures: one showing residuals (predicted vs. target and absolute residual on a log scale) and the other tracking parameter evolution across all function evaluations, with distinction between probe evaluations and true iterations. The private helpers in the `functions/private/` folder provide low-level utilities for reading configuration data from the spreadsheet, building aggregation functions from user-defined expressions, and normalizing text during lookups.

```
function [status, cmdout] = runAnalysis(exeName, inpFile, outFile, msgFile,
    errFile)
    % Kill any lingering ATENA processes before starting
    [~, exeOnly, ext] = fileparts(exeName);
    system(sprintf('taskkill /F /IM "%s%s" /T 2>nul', exeOnly, ext));
    pause(3); % give OS time to release file locks

    cmd = sprintf('""%s" /O "%s" "%s" "%s" "%s" /num_unused_threads=2', ...
        exeName, inpFile, outFile, msgFile, errFile);
    [status, cmdout] = system(cmd, '-echo');
end
```

Listing I.11: runAnalysis.m – Launch external ATENA solver

```
function [x, norm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0, minfunc)
%RUNLSQNONLIN Set up and run lsqnonlin using solver options from Log.xlsx.
%
%   Tunable options (read from Excel):  Display, MaxFunEvals, MaxIter,
%                                       TolFun, TolX (dimensionless,
%                                       scaled internally by mean(lb+ub)/2),
%                                       Algorithm, FiniteDifferenceStepSize,
%                                       FiniteDifferenceType
%   Hardwired options:                  TypicalX=mean(lb,ub)
%
%   Example:
%       [x, norm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0, lb, ub, @minfunc);
    lb       = S.lb;
    ub       = S.ub;
    typicalX = (ub - lb) ./ 2;
    TolX     = S.tolX .* mean(typicalX);

    options = optimoptions('lsqnonlin', ...
        'Algorithm',               S.algorithm, ...
        'Display',                 S.display, ...
        'MaxFunctionEvaluations',  S.maxFunEval, ...
        'MaxIterations',           S.maxIter, ...
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        'FunctionTolerance',        S.tolFun, ...
        'StepTolerance',            TolX, ...
        'FiniteDifferenceStepSize', S.fdStepSize, ...
        'FiniteDifferenceType',     S.fdType, ...
        'TypicalX',                 typicalX)

    [x, norm, res, exitflag, output] = lsqnonlin(minfunc, x0, lb, ub, options);
end
```

Listing I.12: runLSQnonlin.m – Configure and run optimizer

```
function hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, xCur, predicted, res,
    nFnEval, isIteration, isIterZero)
%UPDATEPLOTS  Real-time dashboard, two separate figures.
%
%  Figure 1 "Residuals"  -- 2 rows x nAgg cols
%    Row 1 : predicted / target  (reference line at 1)
%    Row 2 : |residual| on log scale
%
%  Figure 2 "Parameters" -- 2 rows x ceil(nPar/2) cols
%    Row 1 : first  half of modelPar
%    Row 2 : second half of modelPar
%    Both  : grey probe dots (every fnEval), filled blue at true iterations,
%            dashed red lb / green ub lines.
%
%  X-axis everywhere: function-evaluation number.
%  True iterations fall at eval numbers nPar+1, 2*(nPar+1), ...
%
%  hDashboard is a struct with fields .res and .par; pass [] on first call.

    if nargin < 9
        isIterZero = false;
    end

    nAgg   = numel(S.fieldAggExpr);
    nPar   = numel(S.modelPar);
    nHalf  = ceil(nPar / 2);
    nHalf2 = nPar - nHalf;

    % ------------------------------------------------------------------
    % Build compact aggregate labels for titles
    % ------------------------------------------------------------------
    aggLabels = S.fieldAggExpr;
    for k = 1:nAgg
        lbl = aggLabels{k};
        lbl = regexprep(lbl, '^S([A-Z]{2}_)', '$1');
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        aggLabels{k} = lbl;
    end

    % ------------------------------------------------------------------
    % Create figures on first call
    % ------------------------------------------------------------------
    needCreate = isempty(hDashboard) || ~isstruct(hDashboard) || ...
                 ~isfield(hDashboard,'res') || ~ishandle(hDashboard.res) || ...
                 ~isfield(hDashboard,'par') || ~ishandle(hDashboard.par);

    if ~needCreate
        ud_check = get(hDashboard.res, 'UserData');
        if ~isstruct(ud_check) || ~isfield(ud_check, 'relErrHist') || ...
           ~isfield(ud_check, 'xHist') || ...
           size(ud_check.relErrHist, 2) ~= nAgg || ...
           size(ud_check.xHist, 2) ~= nPar
            try, close(hDashboard.res); end %#ok<TRYNC>
            try, close(hDashboard.par); end %#ok<TRYNC>
            needCreate = true;
        end
    end

    if needCreate
        scr = get(0, 'ScreenSize');

        % Figure 1: residuals -- upper half of screen
        fw1 = min(scr(3) * 0.98, nAgg * 220 + 120);
        fh1 = min(scr(4) * 0.48, 520);
        hDashboard.res = figure( ...
            'Name',        'Optimization -- Residuals', ...
            'NumberTitle', 'off', ...
            'Position',    [4, scr(4)*0.48, fw1, fh1]);

        % Figure 2: parameters -- lower half of screen
        parCols = max(nHalf, nHalf2);
        fw2 = min(scr(3) * 0.60, parCols * 230 + 100);
        fh2 = min(scr(4) * 0.44, 460);
        hDashboard.par = figure( ...
            'Name',        'Optimization -- Parameters', ...
            'NumberTitle', 'off', ...
            'Position',    [4, 30, fw2, fh2]);

        % History stored in Figure 1 UserData
        MAXEVAL = 10000;
        ud.relErrHist = nan(MAXEVAL, nAgg);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        ud.absResHist = nan(MAXEVAL, nAgg);
        ud.xHist      = nan(MAXEVAL, nPar);
        ud.fEvalVec   = nan(1, MAXEVAL);
        ud.nE         = 0;
        set(hDashboard.res, 'UserData', ud);
    end

    % ---------------------------------------------------------------
    % Append current evaluation to history
    % ---------------------------------------------------------------
    ud    = get(hDashboard.res, 'UserData');
    nE    = ud.nE + 1;
    ud.nE = nE;

    if nE > size(ud.relErrHist, 1)
        growBy = 10000;
        ud.relErrHist(end+growBy, nAgg) = nan;
        ud.absResHist(end+growBy, nAgg) = nan;
        ud.xHist(end+growBy, nPar)      = nan;
        ud.fEvalVec(end+growBy)         = nan;
    end

    ud.fEvalVec(nE) = nFnEval;
    ud.xHist(nE, :) = xCur(:)';

    for k = 1:nAgg
        if S.fieldAggValues(k) == 0
            ud.relErrHist(nE, k) = nan;
        else
            ud.relErrHist(nE, k) = predicted(k) / S.fieldAggValues(k);
        end
        ud.absResHist(nE, k) = abs(res(k));
    end
    set(hDashboard.res, 'UserData', ud);

    ev = ud.fEvalVec(1:nE);

    % True-iteration eval numbers
    nIterSoFar  = size(X, 1);
    iterEvalNos = (nPar + 1) * (1:nIterSoFar);
    iterEvalNos(iterEvalNos > nFnEval) = [];
    nIterPlot   = numel(iterEvalNos);

    % Keep eval 0 visible when present
    xMin = min([0 ev]);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    xMax = max([5 nFnEval + ceil(0.05 * max(nFnEval,1) + 1)]);
    xlimVec = [xMin, xMax];

    % ------------------------------------------------------------------
    % Global y-limits for residual row on log scale
    % ------------------------------------------------------------------
    absRaw   = ud.absResHist(1:nE, :);
    absClean = absRaw(~isnan(absRaw) & isfinite(absRaw) & absRaw > 0);

    if isempty(absClean)
        absMin = 1e-12;
        absMax = 1;
    else
        absMin = min(absClean);
        absMax = max(absClean);

        if absMin <= 0 || ~isfinite(absMin)
            absMin = 1e-12;
        end
        if absMax <= absMin || ~isfinite(absMax)
            absMax = 10 * absMin;
        end

        absMin = 10^(floor(log10(absMin)));
        absMax = 10^(ceil(log10(absMax)));
    end
```

Listing I.13: updatePlots.m – Real-time dashboard figures (part 1 of 4)

```
    % ==================================================================
    % FIGURE 1 -- Residuals
    % ==================================================================
    figure(hDashboard.res);

    for k = 1:nAgg

        % ---- Row 1: relative error ----
        ax = subplot(2, nAgg, k);
        cla(ax); hold(ax, 'on');
        grid(ax, 'on');
        set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

        plot(ax, ev, ud.relErrHist(1:nE, k), '-', ...
             'Color', [0.72 0.72 0.72], 'LineWidth', 0.7);
        plot(ax, ev, ud.relErrHist(1:nE, k), 'o', ...
             'MarkerSize', 3.5, 'Color', [0.30 0.30 0.30], ...
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);
        yline(ax, 1, '--r', 'LineWidth', 1.4);

        if isIterZero && nE > 0
            scatter(ax, ev(nE), ud.relErrHist(nE, k), 44, 's', ...
                    'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'k');
        elseif isIteration && nE > 0
            scatter(ax, ev(nE), ud.relErrHist(nE, k), 36, 'r', 'filled');
        end

        title(ax, makeTwoLineTitle(aggLabels{k}), ...
              'Interpreter', 'none', ...
              'FontSize', 8, 'FontWeight', 'normal');

        if k == 1
            ylabel(ax, 'Pred / Target');
        end

        xlabel(ax, 'Fn eval');
        xlim(ax, xlimVec);

        ydata = ud.relErrHist(1:nE, k);
        ydata = ydata(~isnan(ydata) & isfinite(ydata));
        if isempty(ydata)
            ylim(ax, [0, 2]);
        elseif all(ydata >= 0) && all(ydata <= 2)
            ylim(ax, [0, 2]);
        else
            yMin = min(ydata);
            yMax = max(ydata);
            if yMin == yMax
                pad = max(0.1 * max(abs(yMax),1), 0.1);
            else
                pad = 0.10 * (yMax - yMin);
            end
            ylim(ax, [yMin - pad, yMax + pad]);
        end

        applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);
        hold(ax, 'off');

        % ---- Row 2: absolute residual on log scale ----
        ax = subplot(2, nAgg, nAgg + k);
        cla(ax); hold(ax, 'on');
        grid(ax, 'on');
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

        absPlot = ud.absResHist(1:nE, k);
        absPlot(~isfinite(absPlot)) = nan;
        absPlot(absPlot <= 0) = 1e-12;

        plot(ax, ev, absPlot, '-', ...
             'Color', [0.72 0.72 0.72], 'LineWidth', 0.7);
        plot(ax, ev, absPlot, 'o', ...
             'MarkerSize', 3.5, 'Color', [0.15 0.15 0.15], ...
             'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);

        if isIterZero && nE > 0
            y0 = ud.absResHist(nE, k);
            if ~isfinite(y0) || y0 <= 0
                y0 = 1e-12;
            end
            scatter(ax, ev(nE), y0, 44, 's', ...
                    'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'k');
        elseif isIteration && nE > 0
            y0 = ud.absResHist(nE, k);
            if ~isfinite(y0) || y0 <= 0
                y0 = 1e-12;
            end
            scatter(ax, ev(nE), y0, 36, 'r', 'filled');
        end

        if k == 1
            ylabel(ax, '|Residual|');
        end
        xlabel(ax, 'Fn eval');
        xlim(ax, xlimVec);
        set(ax, 'YScale', 'log');
        ylim(ax, [absMin, absMax]);
        applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);
        hold(ax, 'off');
    end
```

Listing I.14: updatePlots.m – Residuals figure (part 2 of 4)

```
    % ================================================================
    % FIGURE 2 -- Parameters
    % ================================================================
    figure(hDashboard.par);

    parCols = max(nHalf, nHalf2);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    for row = 1:2
        if row == 1
            idxList = 1:nHalf;
        else
            idxList = nHalf + (1:nHalf2);
        end

        for col = 1:numel(idxList)
            k  = idxList(col);
            ax = subplot(2, parCols, (row - 1) * parCols + col);
            cla(ax); hold(ax, 'on');
            grid(ax, 'on');
            set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

            % All probes -- grey line + open circles
            plot(ax, ev, ud.xHist(1:nE, k), '-', ...
                 'Color', [0.78 0.78 0.78], 'LineWidth', 0.7);
            plot(ax, ev, ud.xHist(1:nE, k), 'o', ...
                 'MarkerSize', 4, 'Color', [0.50 0.50 0.50], ...
                 'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);

            % True iterations -- filled blue
            if nIterPlot > 0
                scatter(ax, iterEvalNos(1:nIterPlot), X(1:nIterPlot, k)', ...
                        50, [0.12 0.47 0.71], 'filled', ...
                        'MarkerEdgeColor', 'none');
            end

            % Iteration 0 -- filled black square
            if isIterZero && nE > 0
                scatter(ax, ev(nE), ud.xHist(nE, k), 48, 's', ...
                        'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'k');
            end

            % Current probe -- bold open black circle
            plot(ax, ev(nE), ud.xHist(nE, k), 'o', ...
                 'MarkerSize', 7, 'Color', [0 0 0], ...
                 'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 1.3);

            % Bounds
            yline(ax, S.lb(k), '--r', 'LineWidth', 1.1, ...
                  'Label', 'lb', 'LabelHorizontalAlignment', 'left', ...
                  'FontSize', 8, 'FontWeight', 'bold');
            yline(ax, S.ub(k), '--', 'Color', [0.13 0.55 0.13], ...
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

```
                    'LineWidth', 1.1, ...
                    'Label', 'ub', 'LabelHorizontalAlignment', 'left', ...
                    'FontSize', 8, 'FontWeight', 'bold');

            title(ax, S.modelPar{k}, 'Interpreter', 'none', ...
                    'FontSize', 9, 'FontWeight', 'bold');
            xlabel(ax, 'Fn eval');
            if col == 1
                ylabel(ax, 'Value');
            end
            xlim(ax, xlimVec);
            applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);

            span = S.ub(k) - S.lb(k);
            if span <= 0
                span = max(abs(S.ub(k)), 1);
            end
            margin = 0.12 * span;
            ylim(ax, [S.lb(k) - margin, S.ub(k) + margin]);

            hold(ax, 'off');
        end
    end

    drawnow limitrate;
end
```

Listing I.15: updatePlots.m – Parameters figure (part 3 of 4)

```
% ========================================================================
function out = makeTwoLineTitle(in)
% Try to insert one sensible line break for long aggregate expressions.

    out = strtrim(in);

    if numel(out) <= 16
        return
    end

    % Prefer to break after the last '+' before midpoint
    mid = floor(numel(out) / 2);
    idx = find(out(1:mid) == '+', 1, 'last');

    % If none, break after the first '+' after midpoint
    if isempty(idx)
        idx2 = find(out(mid+1:end) == '+', 1, 'first');
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        if ~isempty(idx2)
            idx = mid + idx2;
        end
    end

    % If still none, try '/'
    if isempty(idx)
        idx = find(out(1:mid) == '/', 1, 'last');
        if isempty(idx)
            idx2 = find(out(mid+1:end) == '/', 1, 'first');
            if ~isempty(idx2)
                idx = mid + idx2;
            end
        end
    end

    % If still none, try a blank near midpoint
    if isempty(idx)
        leftBlank  = find(out(1:mid) == ' ', 1, 'last');
        rightBlank = find(out(mid+1:end) == ' ', 1, 'first');
        if ~isempty(leftBlank)
            idx = leftBlank;
        elseif ~isempty(rightBlank)
            idx = mid + rightBlank;
        end
    end

    if isempty(idx)
        return
    end

    if idx < numel(out)
        out = [strtrim(out(1:idx)) sprintf('\n') strtrim(out(idx+1:end))];
    end
end

% ========================================================================
function applyIntegerXTicks(ax, xlimVec)
% Use integer ticks when the range is small, otherwise use a reasonable set.

    x0 = floor(xlimVec(1));
    x1 = ceil(xlimVec(2));
    span = x1 - x0;

    if span <= 10
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        xticks(ax, x0:x1);
    elseif span <= 20
        xticks(ax, x0:2:x1);
    else
        step = max(5, ceil(span / 6));
        xticks(ax, x0:step:x1);
    end
end
```

Listing I.16: updatePlots.m – Local helper functions (part 4 of 4)

```
function fcns = buildFieldAggFunctions(exprs, predNames)
    fcns = cell(size(exprs));
    for i = 1:numel(exprs)
        expr = exprs{i};
        [~,idx] = sort(cellfun(@length, predNames), 'descend');
        predNamesSorted = predNames(idx);
        for k = 1:numel(predNamesSorted)
            name = predNamesSorted{k};
            j    = find(strcmp(predNames, name), 1, 'first');
            pattern = ['(?<![A-Za-z0-9_])' regexptranslate('escape', name)
    '(?![A-Za-z0-9_])'];
            expr = regexprep(expr, pattern, sprintf('x(%d)', j));
        end
        fcns{i} = str2func(sprintf('@(x) (%s)', expr));
    end
end
```

Listing I.17: Private helpers – buildFieldAggFunctions.m

```
function [r,c] = findKey(raw, key)
    r   = [];
    c   = [];
    key = normalizeText(key);
    for i = 1:size(raw,1)
        x = raw{i,2};
        if isMissingLike(x); continue; end
        if strcmpi(normalizeText(x), key); r = i; c = 2; return; end
    end
end

function tf = isMissingLike(x)
    tf = false;
    if isempty(x);                                  tf = true; return; end
    if iscell(x);                                   tf = true; return; end
    if isnumeric(x) && isscalar(x) && isnan(x); tf = true; return; end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    if ischar(x) && isempty(strtrim(x));          tf = true; return; end
    try; if any(ismissing(x)); tf = true; return; end; catch; end
end

function s = normalizeText(x)
    s = toText(x);
    s = strrep(s, char(160), ' ');
    s = strtrim(s);
end
```

Listing I.18: Private helpers – findKey.m, isMissingLike.m, normalizeText.m

```
function val = readScalarByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    val = '';
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x); val = toText(x); return; end
    end
end

function vals = readTextVectorByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    vals = {};
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x); vals{end+1} = toText(x); end %#ok<AGROW>
    end
end

function vals = readNumericVectorByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    vals = [];
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x)
            if isnumeric(x); vals(end+1) = x; %#ok<AGROW>
            else;            vals(end+1) = str2double(toText(x)); end %#ok<AGROW>
        end
    end
end
```

Listing I.19: Private helpers – read*ByKey functions

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
function s = toText(x)
    if isempty(x); s = ''; return; end
    try; if any(ismissing(x)); s = ''; return; end; catch; end
    if isstring(x);      s = char(x);
    elseif ischar(x);    s = x;
    elseif isnumeric(x); s = num2str(x);
    else;                s = char(x);
    end
    s = strtrim(s);
end

function letter = xlsColLetter(n)
%XLSCOLLETTER Convert column number to Excel column letter (1=A, 2=B, ...).
    letter = '';
    while n > 0
        rem    = mod(n-1, 26);
        letter = [char(65+rem) letter];
        n      = floor((n-1) / 26);
    end
end
```

Listing I.20: Private helpers – toText.m, xlsColLetter.m

I.5 Part V: Numerical and Statistical Foundations

This section covers foundational numerical techniques and statistical sampling methods for chap:trustregion quantification and robust model estimation.

I.5.1 Levenberg-Marquardt

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

This script supports the numerical example in 65.6. It reproduces the iteration table. It uses the same residual convention, scaling matrix, and damping rule as the derivation above.

```
x = (0:4)';
y = 6 ./ (2 + x);

theta  = [4; 1];
lambda = 1.0e-2;

phi = @(th) 0.5 * sum((th(1) ./ (th(2) + x) - y).^2);
fprintf('%2d  %11s  %12.6f  %12.6f  %14.6e\n', ...
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        0, '--', theta(1), theta(2), phi(theta));

accepted = 0;
while accepted < 5
    a = theta(1);
    b = theta(2);

    g = a ./ (b + x);
    r = g - y;
    J = [1 ./ (b + x), -a ./ (b + x).^2];

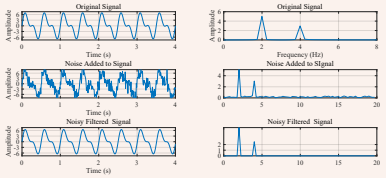
    A = J' * J;
    D = diag(diag(A));
    delta = (A + lambda * D) \ (-J' * r);

    trial = theta + delta;
    phiCurrent = 0.5 * (r' * r);
    phiTrial   = phi(trial);

    if phiTrial < phiCurrent
        theta = trial;
        accepted = accepted + 1;
        fprintf('%2d  %11.1e  %12.6f  %12.6f  %14.6e\n', ...
                accepted, lambda, theta(1), theta(2), phiTrial);
        lambda = lambda / 10;
    else
        lambda = lambda * 10;
    end
end
```

I.5.2 Numerical techniques

I.5.3 FFT and butterworth filters




```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)
% ========================================================================
% Demonstrates the DFT/FFT for signal analysis and noise filtering.
%
% THEORY:
%   The Discrete Fourier Transform decomposes a time-domain signal into
%   its constituent frequency components.  For a signal sampled at rate
%   fs = 1/dt over N samples, the DFT output Y = fft(y) gives:
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%     Y(k)      : complex amplitude at frequency k/(N*dt)  [Hz]
%     |Y(k)|/N  : one-sided amplitude spectrum (for k = 0..N/2)
%   The second half of Y (k > N/2) are complex conjugates of the first.
%
% FILTERING APPROACH (hard threshold):
%   Fourier coefficients with |Y(k)| < threshold are zeroed out.
%   fix(Y/500)*500 rounds each coefficient down to the nearest multiple
%   of 500, effectively zeroing those with |Y| < 500.
%   This removes broadband noise while preserving dominant frequency peaks.
%   The threshold (500) is chosen empirically -- examine the amplitude
%   spectrum to select an appropriate value for a given signal.
%
% SIGNAL:  y(t) = 3*sin(4*2pi*t) + 5*sin(2*2pi*t)
%   Two sinusoids: 4 Hz (amplitude 3) and 2 Hz (amplitude 5).
%   Both peaks should be clearly visible in the amplitude spectrum.
% ========================================================================

clear; close all; clc;

GS    = 'c:/Program Files/gs/gs9.53.3/bin/gswin64.exe';
scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Verify FFT round-trip on a random signal
% ------------------------------------------------------------------------
x_rand  = rand(1, 10);
Y_rand  = fft(x_rand);
x_recov = real(ifft(Y_rand));   % imaginary part is ~machine epsilon
fprintf('FFT round-trip error (should be ~0): %.2e\n', norm(x_rand - x_recov));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Construct the test signal
% ------------------------------------------------------------------------
dt = 1/100;          % sampling interval [s]  (sampling rate = 100 Hz)
et = 4;              % signal duration   [s]
t  = 0 : dt : et;   % time vector
N  = length(t);

y = 3*sin(4*2*pi*t) + 5*sin(2*2*pi*t);   % two-frequency signal

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- FFT of the clean signal
% ------------------------------------------------------------------------
Y        = fft(y);
n_half   = floor(N/2);
amp_spec = abs(Y) / n_half;

freq = (0:79) / (2 * n_half * dt);   % frequency axis for first 80 bins [Hz]

% ------------------------------------------------------------------------
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% Section 4 -- Add noise and compute spectrum
% ------------------------------------------------------------------------
noise = randn(1, N);
ey    = y + 2*noise;       % corrupted signal (noise amplitude = 2)
eY    = fft(ey);
e_amp = abs(eY) / n_half;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Filter: zero Fourier coefficients below threshold
% ------------------------------------------------------------------------
threshold = 500;
fY        = fix(eY / threshold) * threshold;   % zero small coefficients
cy        = real(ifft(fY));                     % filtered time-domain signal
cY        = fft(cy);
c_amp     = abs(cY) / n_half;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Plot: 3 rows x 2 columns (time | frequency domain)
% ------------------------------------------------------------------------
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);

subplot(3,2,1);
plot(t, y, 'b', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Clean signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,2);
plot(freq, amp_spec(1:80), 'b', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Clean signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,3);
plot(t, ey, 'r', 'LineWidth', 1);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Noisy signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,4);
plot(freq, e_amp(1:80), 'r', 'LineWidth', 1);  grid on;
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Noisy signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,5);
plot(t, cy, 'g', 'LineWidth', 2);  grid on;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Filtered signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,6);
plot(freq, c_amp(1:80), 'g', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Filtered signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print('fft-example.eps', '-depsc');
eps2pdf('fft-example.eps', GS, 0);
```

I.5.4 Singular value decomposition

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम सूवीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- SVD FOR ILL-CONDITIONED SYSTEMS
% ========================================================================
% Demonstrates the use of Singular Value Decomposition to solve a severely
% ill-conditioned linear system where the standard backslash operator
% gives unreliable results due to near-singularity.
%
% THEORY:
%   Any mxn matrix A decomposes as  A = U * S * V^T
%   where U (mxm) and V (nxn) are orthogonal, and S (mxn) is diagonal
%   with non-negative singular values sigma_1 >= sigma_2 >= ... >= 0.
%
%   The Moore-Penrose pseudo-inverse is:
%       A^+ = V * S^+ * U^T
%   where  S^+(i,i) = 1/sigma_i  if sigma_i > threshold,  else 0.
%
%   Setting near-zero singular values to zero (Tikhonov regularisation)
%   prevents amplification of numerical noise in near-null directions.
%
% ILL-CONDITIONING:
%   The matrix A below has one near-zero singular value (~1e-15).
%   Condition number kappa(A) = sigma_max/sigma_min approx 1e15, meaning round-off
    errors
%   of order epsilon_machine approx 1e-16 are amplified to O(1) in the solution.
%   The SVD solution discards the near-zero singular value and returns
%   the minimum-norm least-squares solution instead.
% ========================================================================

clc; clear;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Define the ill-conditioned system
% ------------------------------------------------------------------------
% Rows of A are nearly identical -> A is nearly singular.
A = [1,  1        ;
     1,  1 + 1e-15];
b = [2;  2 + 1e-15];

fprintf('Condition number of A: %.2e\n', cond(A));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Direct solution (unreliable for near-singular systems)
% ------------------------------------------------------------------------
direct_solution = A \ b;
fprintf('\nDirect solution (A \\ b):\n');
disp(direct_solution);
fprintf('Residual ||A*x - b||: %.2e\n', norm(A*direct_solution - b));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- SVD decomposition
% ------------------------------------------------------------------------
[U, S, V] = svd(A);

fprintf('\nSingular values:\n');
disp(diag(S)');

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Regularised pseudo-inverse
% ------------------------------------------------------------------------
% Threshold: singular values below this are treated as zero.
% Choosing threshold = 1e-6 discards the ~1e-15 singular value
% while keeping the O(1) singular value intact.
threshold = 1e-6;

S_plus = zeros(size(S'));       % pseudo-inverse of S (note: transposed size)
for i = 1 : min(size(S))
    if S(i,i) > threshold
        S_plus(i,i) = 1 / S(i,i);
    end
    % values below threshold remain zero (regularised)
end

A_plus       = V * S_plus * U';    % Moore-Penrose pseudo-inverse
svd_solution = A_plus * b;

fprintf('SVD regularised solution:\n');
disp(svd_solution);
fprintf('Residual ||A*x - b||: %.2e\n', norm(A*svd_solution - b));
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.5.5 Preconditioning

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- CHOLESKY PRECONDITIONING
% ========================================================================
% Demonstrates how preconditioning reduces the condition number of a
% symmetric positive definite (SPD) linear system, which accelerates
% convergence of iterative solvers such as PCG (preconditioned conjugate
% gradient).
%
% THEORY:
%   For an SPD matrix A, the Cholesky decomposition gives A = L * L^T.
%   Using M = L * L^T (= A) as the preconditioner:
%
%   LEFT preconditioning:   solve  (M^{-1} A) x = M^{-1} b
%   RIGHT preconditioning:  solve  (A M^{-1}) y = b,  then x = M^{-1} y
%
%   When M = A exactly, M^{-1}A = I and the condition number drops to 1.
%   This is pedagogically illustrative but practically useless -- the cost
%   of applying M^{-1} = A^{-1} is the same as solving the original system.
%
%   In practice, an INCOMPLETE Cholesky factorisation (ichol in MATLAB)
%   is used as a cheaper approximation to A, giving a useful preconditioner.
%
% NOTE ON inv():
%   Using inv(M) explicitly is numerically inferior to the backslash
%   operator (M\b).  Here inv() is replaced by M\ for correctness.
%   The original used inv(M)*A -- replaced with M\A throughout.
%
% MATRIX CONSTRUCTION:
%   A = Q * D * Q^T  where D = diag([1, 0.1, 0.01]) and Q is orthogonal.
%   This guarantees A is SPD with eigenvalues {1, 0.1, 0.01} and
%   condition number kappa(A) = 1/0.01 = 100.
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Construct a symmetric positive definite matrix
% ------------------------------------------------------------------------
D = diag([1, 0.1, 0.01]);    % prescribed eigenvalues -> kappa(A) = 100

rng(1, 'twister');           % fixed seed for reproducibility
[Q, ~] = qr(rand(3));        % random orthogonal matrix via QR
A = Q * D * Q';              % SPD matrix with known eigenstructure
b = ones(3, 1);

fprintf('Matrix A:\n');  disp(A);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
fprintf('Eigenvalues of A:    '); fprintf('%.4f  ', eig(A)'); fprintf('\n');
fprintf('Condition number of A: %.4e\n\n', cond(A));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Cholesky decomposition
% ------------------------------------------------------------------------
L = chol(A, 'lower');   % A = L * L^T  (lower triangular factor)
M = L * L';             % preconditioning matrix (= A here)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Left preconditioning:  (M^{-1} A) x = M^{-1} b
% ------------------------------------------------------------------------
A_left = (M\A + (M\A)') / 2;   % enforce symmetry after solve
b_left = M \ b;
x_left = A_left \ b_left;

kappa_left = cond(A_left);
fprintf('Left preconditioning:\n');
fprintf('  Eigenvalues:       '); fprintf('%.4f  ', eig(A_left)'); fprintf('\n');
fprintf('  Condition number:  %.4e\n', kappa_left);
fprintf('  Ratio (orig/precond): %.4e\n\n', cond(A)/kappa_left);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Right preconditioning:  (A M^{-1}) y = b
% ------------------------------------------------------------------------
A_right = (A/M + (A/M)') / 2;
x_right = A_right \ b;

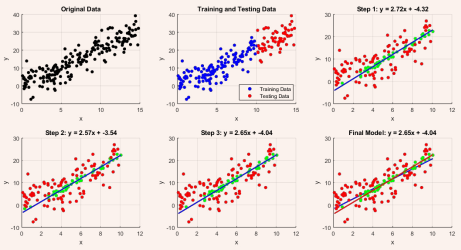
kappa_right = cond(A_right);
fprintf('Right preconditioning:\n');
fprintf('  Eigenvalues:       '); fprintf('%.4f  ', eig(A_right)'); fprintf('\n');
fprintf('  Condition number:  %.4e\n', kappa_right);
fprintf('  Ratio (orig/precond): %.4e\n\n', cond(A)/kappa_right);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Summary
% ------------------------------------------------------------------------
fprintf('--- Summary ---\n');
fprintf('  Original matrix:            kappa = %.4e\n', cond(A));
fprintf('  Left  preconditioned:       kappa = %.4e\n', kappa_left);
fprintf('  Right preconditioned:       kappa = %.4e\n', kappa_right);
fprintf('  (kappa = 1 is expected when M = A exactly)\n');
fprintf('  In practice use ichol() for an approximate, cheaper M.\n');
```

I.5.6 Random Sampling Consensus (RANSAC)

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



Program to perform random sampling consensus, §65.3.2.

```
% ========================================================================
% RANDOM SAMPLE CONSENSUS (RANSAC) -- ROBUST LINE FITTING
% ========================================================================
% RANSAC is a robust estimation algorithm that fits a model to data
% containing a large fraction of outliers.  Unlike least squares, which
% minimises the sum of all residuals (making it sensitive to outliers),
% RANSAC iteratively finds the model supported by the most inliers.
%
% ALGORITHM:
%   Repeat n_iterations times:
%     1. Randomly select the minimum number of points needed to define
%        the model (2 points for a line).
%     2. Fit the model to these points.
%     3. Count how many other data points are within distance threshold
%        of the fitted model -> these are the "inliers".
%     4. If this inlier count is the best so far, save this model.
%   Return the model with the most inliers.
%
% DISTANCE METRIC:
%   For a line  y = m*x + c  (or equivalently  m*x - y + c = 0),
%   the perpendicular distance from point (x_i, y_i) to the line is:
%       d_i = |m*x_i - y_i + c| / sqrt(m^2 + 1)
%   A point is an inlier if d_i < threshold.
%
% NUMBER OF ITERATIONS:
%   The theoretical number of iterations needed to find at least one
%   outlier-free sample with probability p is:
%       n_iter = log(1-p) / log(1 - (1-e)^s)
%   where e = outlier ratio, s = sample size (2 for a line), p = 0.99.
%   For e=0.4, s=2: n_iter approx 11.  Using 1000 iterations is very conservative.
%
% STRUCTURE:
%   The script runs RANSAC 'visualize_steps' independent times on the
%   training set, showing the best model found at each run.  The final
%   panel shows the best model across all runs.
%
% UNITS: dimensionless (synthetic data).
% ========================================================================

clear; close all; clc;

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Parameters
% ------------------------------------------------------------------------
n_points       = 200;     % total number of data points
outlier_ratio  = 0.4;     % fraction of points that are outliers
threshold      = 0.5;     % inlier distance threshold (perpendicular)
n_iterations   = 1000;    % RANSAC iterations per run
visualize_steps = 4;      % number of independent RANSAC runs to display

rng('shuffle');            % non-reproducible seed (use rng(42) for reproducibility)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Generate synthetic data
% ------------------------------------------------------------------------
% True model: y = true_slope * x + true_intercept + Gaussian noise
% Outliers are added by shifting a random subset by a large random amount.

x              = sort(rand(1, n_points) * 15);   % x values in [0, 15]
true_slope     = 2.0;
true_intercept = 0.5;

y = true_slope * x + true_intercept + randn(1, n_points) * 3;  % noisy inliers

% Add outliers: shift selected points by up to +/-10 in y
n_outliers      = round(outlier_ratio * n_points);
outlier_indices = randperm(n_points, n_outliers);
y(outlier_indices) = y(outlier_indices) + (rand(1, n_outliers) - 0.5) * 20;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Train / test split
% ------------------------------------------------------------------------
% RANSAC is applied only to the training set.
% The test set is shown for visual reference but not used in fitting.

train_ratio = 0.7;
n_train     = round(train_ratio * n_points);
x_train     = x(1 : n_train);
y_train     = y(1 : n_train);
x_test      = x(n_train+1 : end);
y_test      = y(n_train+1 : end);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Plot original data and train/test split
% ------------------------------------------------------------------------
figure('Position', [100, 100, 1200, 600]);

subplot(2, 3, 1);
scatter(x, y, 30, 'k', 'filled');
title('Original Data  (inliers + outliers)');
xlabel('x');  ylabel('y');
grid on;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
93
94  subplot(2, 3, 2);
95  scatter(x_train, y_train, 30, 'b', 'filled');
96  hold on;
97  scatter(x_test,  y_test,  30, 'r', 'filled');
98  title('Train / Test Split');
99  xlabel('x');  ylabel('y');
100 legend('Training (70%)', 'Testing (30%)', 'Location', 'best');
101 grid on;
102
103 % ------------------------------------------------------------------------
104 % Section 5 -- RANSAC: run visualize_steps independent trials
105 % ------------------------------------------------------------------------
106 % Each trial runs the full RANSAC loop and finds the best model for that run.
107 % Results are stored for comparison and final selection.
108
109 models         = cell(1, visualize_steps);   % best [slope, intercept] per run
110 inliers_count  = zeros(1, visualize_steps);  % number of inliers per run
111
112 for step = 1 : visualize_steps
113
114     best_inliers = [];
115     best_model   = [];
116
117     for iter = 1 : n_iterations
118
119         % --- Sample 2 points at random ---
120         idx      = randperm(length(x_train), 2);
121         x_samp   = x_train(idx);
122         y_samp   = y_train(idx);
123
124         % Skip degenerate case (two identical x values -> vertical line)
125         if x_samp(1) == x_samp(2)
126             continue;
127         end
128
129         % --- Fit line through the 2 sample points ---
130         slope     = diff(y_samp) / diff(x_samp);
131         intercept = y_samp(1) - slope * x_samp(1);
132
133         % --- Compute perpendicular distances from all training points ---
134         % Line equation:  slope*x - y + intercept = 0
135         distances = abs(slope * x_train - y_train + intercept) / sqrt(slope^2 + 1);
136
137         % --- Count inliers (points within distance threshold) ---
138         inliers = find(distances < threshold);
139
140         % --- Update best model if this has more inliers ---
141         if length(inliers) > length(best_inliers)
142             best_inliers = inliers;
143             best_model   = [slope, intercept];
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        end

    end   % RANSAC iteration loop

    % Store results for this run
    models{step}        = best_model;
    inliers_count(step) = length(best_inliers);

    % --- Plot this run ---
    outlier_idx = setdiff(1:length(x_train), best_inliers);

    subplot(2, 3, step + 2);
    scatter(x_train, y_train, 30, [0.7 0.7 0.7], 'filled');   % all points (grey)
    hold on;
    scatter(x_train(best_inliers), y_train(best_inliers), 30, 'g', 'filled'); % inliers
    scatter(x_train(outlier_idx),  y_train(outlier_idx),  30, 'r', 'filled'); %
    outliers

    plot_x = linspace(min(x_train), max(x_train), 100);
    plot(plot_x, best_model(1)*plot_x + best_model(2), 'b-', 'LineWidth', 2);

    title(sprintf('Run %d:  y = %.2fx + %.2f  (%d inliers)', ...
                  step, best_model(1), best_model(2), length(best_inliers)));
    xlabel('x');  ylabel('y');
    legend('All', 'Inliers', 'Outliers', 'Model', 'Location', 'best');
    grid on;

end   % step loop

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Final model: best across all runs
% ------------------------------------------------------------------------
[~, best_step]  = max(inliers_count);
final_model     = models{best_step};

% Re-identify inliers for the final model
final_distances = abs(final_model(1)*x_train - y_train + final_model(2)) ...
                  / sqrt(final_model(1)^2 + 1);
final_inliers   = find(final_distances < threshold);
final_outliers  = setdiff(1:length(x_train), final_inliers);

subplot(2, 3, 6);
scatter(x_train, y_train, 30, [0.7 0.7 0.7], 'filled');
hold on;
scatter(x_train(final_inliers), y_train(final_inliers), 30, 'g', 'filled');
scatter(x_train(final_outliers), y_train(final_outliers), 30, 'r', 'filled');

plot_x = linspace(min(x_train), max(x_train), 100);
plot(plot_x, final_model(1)*plot_x + final_model(2), 'r-', 'LineWidth', 2);

title(sprintf('Best Model:  y = %.2fx + %.2f  (%d inliers)', ...
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
            final_model(1), final_model(2), length(final_inliers)));
xlabel('x');  ylabel('y');
legend('All', 'Inliers', 'Outliers', 'Best Model', 'Location', 'best');
grid on;

fprintf('\n--- RANSAC Results ---\n');
fprintf('True model:  slope = %.2f,  intercept = %.2f\n', true_slope, true_intercept);
fprintf('RANSAC best: slope = %.2f,  intercept = %.2f\n', final_model(1), final_model(2)
    );
fprintf('Inliers: %d / %d training points\n', length(final_inliers), n_train);
```

I.5.7 Latin Hypercube

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

Covered in §64.3.3.2.

```
%% Latin Hypercube Sampling (LHS) vs. Monte Carlo Sampling
% Demonstration and comparison of LHS with classical Monte Carlo sampling.
% The code uses only ASCII characters so that it is safe inside lstlisting.
% It also avoids norminv, so no Statistics and Machine Learning Toolbox
% is required.

clearvars; close all; clc;

%% Parameters
N = 100;          % Number of samples used in the main comparison
n_vars = 2;       % Number of input variables
seed = 42;        % Random seed for reproducibility
n_rep = 200;      % Replications used for the convergence comparison

rng(seed, 'twister');

%% 1. LATIN HYPERCUBE SAMPLING (LHS)
% ==================================

% Generate an N-by-n_vars Latin hypercube design in [0,1].
lhs_samples = lhs_design(N, n_vars);

% Transform the two columns to the desired marginal distributions.
% Variable 1: Uniform [10,20]
lhs_var1 = 10 + 10 * lhs_samples(:, 1);

% Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)
lhs_var2 = normal_icdf(lhs_samples(:, 2), 15, 3);

lhs_all = [lhs_var1, lhs_var2];

%% 2. MONTE CARLO SAMPLING (MCS)
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% ================================

% Mixed-distribution Monte Carlo sample.
mcs_var1 = 10 + 10 * rand(N, 1);      % Uniform [10,20]
mcs_var2 = 15 + 3 * randn(N, 1);      % Normal (mu=15, sigma=3)

mcs_all = [mcs_var1, mcs_var2];

% A second uniform variable is needed for the uniform-uniform comparison.
mcs_uniform_var2 = 10 + 10 * rand(N, 1);
lhs_uniform_var2 = 10 + 10 * lhs_samples(:, 2);

%% 3. VISUALIZATION: TWO-DIMENSIONAL COMPARISON
% ================================================

figure('Position', [100, 100, 1200, 500]);

% Uniform distributions - Monte Carlo
subplot(2, 2, 1);
scatter(mcs_var1, mcs_uniform_var2, 25, 'b', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Uniform [10,20]');
title('Monte Carlo Sampling: Uniform Marginals');
grid on; axis square;
xlim([8, 22]); ylim([8, 22]);

% Uniform distributions - Latin hypercube
subplot(2, 2, 2);
scatter(lhs_var1, lhs_uniform_var2, 25, 'r', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Uniform [10,20]');
title('Latin Hypercube Sampling: Uniform Marginals');
grid on; axis square;
xlim([8, 22]); ylim([8, 22]);

% Mixed distributions - Monte Carlo
subplot(2, 2, 3);
scatter(mcs_all(:, 1), mcs_all(:, 2), 25, 'b', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)');
title('Monte Carlo Sampling: Mixed Marginals');
grid on;
xlim([8, 22]); ylim([6, 24]);

% Mixed distributions - Latin hypercube
subplot(2, 2, 4);
scatter(lhs_all(:, 1), lhs_all(:, 2), 25, 'r', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)');
title('Latin Hypercube Sampling: Mixed Marginals');
grid on;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
xlim([8, 22]); ylim([6, 24]);

sgtitle(sprintf('LHS vs. MCS Comparison (N = %d)', N), ...
'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');

%% 4. STATISTICAL COMPARISON OF MEAN ESTIMATION
% ================================================

% Model response:
%     Y = X1 + 0.5*X2
%
% The theoretical mean is:
%     E[Y] = E[X1] + 0.5*E[X2] = 15 + 0.5*15 = 22.5

true_mean = 22.5;
sample_sizes = 10:5:N;

mean_lhs_conv = zeros(length(sample_sizes), 1);
mean_mcs_conv = zeros(length(sample_sizes), 1);
rmse_lhs = zeros(length(sample_sizes), 1);
rmse_mcs = zeros(length(sample_sizes), 1);

for i = 1:length(sample_sizes)
n_samp = sample_sizes(i);

lhs_estimates = zeros(n_rep, 1);
mcs_estimates = zeros(n_rep, 1);

for rep = 1:n_rep
% Fresh LHS design of size n_samp.
u_lhs = lhs_design(n_samp, n_vars);
x1_lhs = 10 + 10 * u_lhs(:, 1);
x2_lhs = normal_icdf(u_lhs(:, 2), 15, 3);
y_lhs_rep = x1_lhs + 0.5 * x2_lhs;
lhs_estimates(rep) = mean(y_lhs_rep);

% Fresh classical Monte Carlo sample of the same size.
x1_mcs = 10 + 10 * rand(n_samp, 1);
x2_mcs = 15 + 3 * randn(n_samp, 1);
y_mcs_rep = x1_mcs + 0.5 * x2_mcs;
mcs_estimates(rep) = mean(y_mcs_rep);
end

mean_lhs_conv(i) = mean(lhs_estimates);
mean_mcs_conv(i) = mean(mcs_estimates);

rmse_lhs(i) = sqrt(mean((lhs_estimates - true_mean).^2));
rmse_mcs(i) = sqrt(mean((mcs_estimates - true_mean).^2));
end

figure('Position', [100, 100, 1000, 400]);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
135
136 % Average estimated mean over repeated designs
137 subplot(1, 2, 1);
138 plot(sample_sizes, mean_lhs_conv, 'o-', ...
139 'Color', 'r', 'LineWidth', 2, ...
140 'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'LHS');
141 hold on;
142 plot(sample_sizes, mean_mcs_conv, 's-', ...
143 'Color', 'b', 'LineWidth', 2, ...
144 'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'MCS');
145 plot([min(sample_sizes), max(sample_sizes)], ...
146 [true_mean, true_mean], '--k', ...
147 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'True Mean');
148 xlabel('Number of Samples');
149 ylabel('Mean of Estimated Means');
150 title(sprintf('Mean Estimate over %d Replications', n_rep));
151 legend('Location', 'best');
152 grid on;
153
154 % Root-mean-square error of the mean estimator
155 subplot(1, 2, 2);
156 semilogy(sample_sizes, rmse_lhs, 'o-', ...
157 'Color', 'r', 'LineWidth', 2, ...
158 'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'LHS');
159 hold on;
160 semilogy(sample_sizes, rmse_mcs, 's-', ...
161 'Color', 'b', 'LineWidth', 2, ...
162 'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'MCS');
163 xlabel('Number of Samples');
164 ylabel('RMSE of Estimated Mean');
165 title('Convergence of Mean-Estimation Error');
166 legend('Location', 'best');
167 grid on;
168
169 sgtitle('Convergence Analysis: LHS vs. MCS', ...
170 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
171
172 %% 5. SUMMARY STATISTICS FOR THE MAIN N-SAMPLE DESIGNS
173 % ======================================================
174
175 y_lhs = lhs_all(:, 1) + 0.5 * lhs_all(:, 2);
176 y_mcs = mcs_all(:, 1) + 0.5 * mcs_all(:, 2);
177
178 lhs_error = abs(mean(y_lhs) - true_mean);
179 mcs_error = abs(mean(y_mcs) - true_mean);
180
181 fprintf('\n========== SUMMARY (N = %d) ==========\n\n', N);
182 fprintf('TRUE MEAN: %.4f\n\n', true_mean);
183
184 fprintf('LHS RESULTS:\n');
185 fprintf('  Estimated Mean: %.4f\n', mean(y_lhs));
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
fprintf('  Std. Dev.:      %.4f\n', std(y_lhs));
fprintf('  Absolute Error: %.4f\n\n', lhs_error);

fprintf('MCS RESULTS:\n');
fprintf('  Estimated Mean: %.4f\n', mean(y_mcs));
fprintf('  Std. Dev.:      %.4f\n', std(y_mcs));
fprintf('  Absolute Error: %.4f\n\n', mcs_error);

fprintf('REPLICATED CONVERGENCE RESULTS AT N = %d:\n', N);
fprintf('  LHS RMSE: %.6f\n', rmse_lhs(end));
fprintf('  MCS RMSE: %.6f\n', rmse_mcs(end));

if rmse_mcs(end) > 0
fprintf('  LHS RMSE is %.2f%% of MCS RMSE.\n', ...
100 * rmse_lhs(end) / rmse_mcs(end));
end

%% LOCAL FUNCTIONS
% =================

function samples = lhs_design(n_samples, n_variables)
%LHS_DESIGN Generate an n_samples-by-n_variables LHS design in [0,1].

samples = zeros(n_samples, n_variables);

for j = 1:n_variables
% One random point inside each of the n_samples strata.
within_stratum = rand(n_samples, 1);

% Randomly permute the strata independently for each variable.
ranks = randperm(n_samples)';

samples(:, j) = ...
(ranks - 1 + within_stratum) / n_samples;
end
end

function x = normal_icdf(u, mu, sigma)
%NORMAL_ICDF Inverse CDF of a normal distribution without norminv.

% Guard against exact endpoints before applying erfinv.
u = min(max(u, eps), 1 - eps);

x = mu + sigma * sqrt(2) .* erfinv(2 .* u - 1);
end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.5.8 Bayesian regression with a quadratic basis

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

Code for the example in § 65.5.4.

```
%% Bayesian Regression with a Quadratic Basis
% Metropolis--Hastings sampling for
%   y = theta_1*x1^2 + theta_2*x2 + epsilon,
%   epsilon ~ N(0,sigma^2).
%
% The model is quadratic in predictor x1 but linear in the unknown
% parameters theta_1 and theta_2. With Gaussian priors and known sigma,
% the posterior is Gaussian and can be computed analytically. This provides
% an independent audit of the MCMC results.

clear; close all; clc;

%% 1. Generate synthetic data

rng(42,'twister');

n = 50;
x1 = rand(n,1);
x2 = rand(n,1);
theta_true = [2;3];
sigma = 1;

X = [x1.^2, x2];
y = X*theta_true + sigma*randn(n,1);

fprintf('\n=== Synthetic Data Generated ===\n');
fprintf('Number of observations: %d\n',n);
fprintf('True theta_1 (coefficient of x1^2): %.4f\n',theta_true(1));
fprintf('True theta_2 (coefficient of x2):   %.4f\n',theta_true(2));
fprintf('Known noise standard deviation:     %.4f\n',sigma);

%% 2. Define independent Gaussian priors

mu_prior = [0;0];
sigma_prior = [10;10];
prior_precision = diag(1./sigma_prior.^2);

fprintf('\n=== Prior Distributions ===\n');
fprintf('theta_j ~ N(0,10^2), j = 1,2\n');

%% 3. Exact posterior for independent verification
% For this linear-Gaussian example,
%   Sigma_post^{-1} = X''X/sigma^2 + Sigma_prior^{-1},
%   mu_post = Sigma_post*(X''y/sigma^2 + Sigma_prior^{-1}*mu_prior).

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
post_precision = (X.'*X)/sigma^2 + prior_precision;
post_cov_exact = post_precision\eye(2);
post_mean_exact = post_precision\((X.'*y)/sigma^2 + ...
    prior_precision*mu_prior);
post_sd_exact = sqrt(diag(post_cov_exact));

fprintf('\n=== Exact Gaussian Posterior ===\n');
fprintf('Exact posterior mean theta_1: %.6f\n',post_mean_exact(1));
fprintf('Exact posterior mean theta_2: %.6f\n',post_mean_exact(2));
fprintf('Exact posterior SD theta_1:   %.6f\n',post_sd_exact(1));
fprintf('Exact posterior SD theta_2:   %.6f\n',post_sd_exact(2));

%% 4. Metropolis--Hastings MCMC
% A symmetric Gaussian random-walk proposal is used, so proposal-density
% terms cancel from the Metropolis--Hastings acceptance ratio.

fprintf('\n=== Metropolis--Hastings MCMC Sampling ===\n');

n_iterations = 10000;
burn_in = 2000;
proposal_sd = [0.5;0.5];

theta_samples = zeros(n_iterations,2);
theta_current = [0;0];
logposterior_current = compute_logposterior( ...
    y,X,theta_current,sigma,mu_prior,sigma_prior);
n_accepted = 0;

fprintf('Running %d MCMC iterations...\n',n_iterations);
fprintf('Proposal standard deviations: [%.3f, %.3f]\n', ...
    proposal_sd(1),proposal_sd(2));

for iter = 1:n_iterations
    theta_proposal = theta_current + proposal_sd.*randn(2,1);
    logposterior_proposal = compute_logposterior( ...
        y,X,theta_proposal,sigma,mu_prior,sigma_prior);

    log_alpha = logposterior_proposal - logposterior_current;

    if log(rand) < min(0,log_alpha)
        theta_current = theta_proposal;
        logposterior_current = logposterior_proposal;
        n_accepted = n_accepted + 1;
    end

    theta_samples(iter,:) = theta_current.';

    if mod(iter,1000) == 0
        fprintf('Iteration %d/%d (acceptance rate: %.1f%%)\n', ...
            iter,n_iterations,100*n_accepted/iter);
    end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
end

acceptance_rate = n_accepted/n_iterations;
fprintf('\nFinal acceptance rate: %.1f%%\n',100*acceptance_rate);

%% 5. Remove burn-in and compute posterior summaries

theta_samples_post = theta_samples(burn_in+1:end,:);
n_samples_final = size(theta_samples_post,1);

theta1_samples = theta_samples_post(:,1);
theta2_samples = theta_samples_post(:,2);

theta_mean = mean(theta_samples_post,1).';
theta_sd = std(theta_samples_post,0,1).';
theta1_ci = empirical_percentile(theta1_samples,[2.5,97.5]);
theta2_ci = empirical_percentile(theta2_samples,[2.5,97.5]);

C = corrcoef(theta1_samples,theta2_samples);
posterior_correlation = C(1,2);

fprintf('\n=== MCMC Posterior Summary ===\n');
fprintf('Post-burn-in samples: %d\n',n_samples_final);
fprintf('Burn-in:              %d\n',burn_in);

fprintf('\nParameter theta_1:\n');
fprintf('  True value:          %.6f\n',theta_true(1));
fprintf('  MCMC posterior mean: %.6f\n',theta_mean(1));
fprintf('  Exact posterior mean:%.6f\n',post_mean_exact(1));
fprintf('  MCMC posterior SD:   %.6f\n',theta_sd(1));
fprintf('  Exact posterior SD:  %.6f\n',post_sd_exact(1));
fprintf('  95%% credible interval:[%.6f, %.6f]\n', ...
    theta1_ci(1),theta1_ci(2));

fprintf('\nParameter theta_2:\n');
fprintf('  True value:          %.6f\n',theta_true(2));
fprintf('  MCMC posterior mean: %.6f\n',theta_mean(2));
fprintf('  Exact posterior mean:%.6f\n',post_mean_exact(2));
fprintf('  MCMC posterior SD:   %.6f\n',theta_sd(2));
fprintf('  Exact posterior SD:  %.6f\n',post_sd_exact(2));
fprintf('  95%% credible interval:[%.6f, %.6f]\n', ...
    theta2_ci(1),theta2_ci(2));

fprintf('\nPosterior correlation theta_1/theta_2: %.6f\n', ...
    posterior_correlation);

%% 6. Least-squares comparison

theta_ls = X\y;

fprintf('\n=== Least-Squares Comparison ===\n');
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
fprintf('Least-squares theta_1: %.6f\n',theta_ls(1));
fprintf('Least-squares theta_2: %.6f\n',theta_ls(2));
fprintf('Difference LS - MCMC mean: [%.6f, %.6f]\n', ...
    theta_ls(1)-theta_mean(1),theta_ls(2)-theta_mean(2));

%% 7. Elementary single-chain diagnostics
% This compact example uses one chain. For production analyses, use multiple
% dispersed chains and report R-hat and effective sample size.

max_lag = 50;
acf_theta1 = compute_acf_manual(theta1_samples,max_lag);
acf_theta2 = compute_acf_manual(theta2_samples,max_lag);
acf_bound = 1.96/sqrt(n_samples_final);

thin_factor = 10;
iter_post = (burn_in+1):n_iterations;
iter_thin = iter_post(1:thin_factor:end);
theta1_thin = theta1_samples(1:thin_factor:end);
theta2_thin = theta2_samples(1:thin_factor:end);

%% 8. Posterior-predictive samples
% Future observation noise is included. If the noise term is omitted, the
% band represents uncertainty in the posterior mean response, not the full
% posterior-predictive distribution.

x1_pred = linspace(0,1,20).';
x2_pred = 0.5*ones(size(x1_pred));
X_pred = [x1_pred.^2,x2_pred];

n_samples_pred = 1000;
y_pred_samples = zeros(numel(x1_pred),n_samples_pred);

for i = 1:n_samples_pred
    idx = randi(n_samples_final);
    theta_draw = theta_samples_post(idx,:).';
    y_pred_samples(:,i) = X_pred*theta_draw + ...
        sigma*randn(size(x1_pred));
end

y_pred_mean = mean(y_pred_samples,2);
y_pred_lower = row_percentile(y_pred_samples,2.5);
y_pred_upper = row_percentile(y_pred_samples,97.5);

%% 9. Visualization

fig = figure('Position',[100,100,1350,900],'Color','w');

% Panel 1: trace plot theta_1
subplot(3,3,1);
plot(iter_thin,theta1_thin,'b-','LineWidth',0.6);
xlabel('Iteration');
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
ylabel('\theta_1');
title('Trace plot: \theta_1');
grid on;

% Panel 2: trace plot theta_2
subplot(3,3,2);
plot(iter_thin,theta2_thin,'r-','LineWidth',0.6);
xlabel('Iteration');
ylabel('\theta_2');
title('Trace plot: \theta_2');
grid on;

% Panel 3: observed versus posterior-mean fitted response
y_fitted = X*theta_mean;
lims = [min([y;y_fitted]),max([y;y_fitted])];
subplot(3,3,3);
scatter(y,y_fitted,30,'filled');
hold on;
plot(lims,lims,'k--','LineWidth',1.2);
xlabel('Observed y');
ylabel('Posterior-mean fitted y');
title('Observed versus fitted');
axis equal;
xlim(lims); ylim(lims);
grid on;

% Panel 4: posterior density theta_1
subplot(3,3,4);
histogram(theta1_samples,40,'Normalization','pdf', ...
    'FaceColor','b','EdgeColor','k');
hold on;
ylims = ylim;
plot([theta_true(1),theta_true(1)],ylims,'g--','LineWidth',2);
plot([theta_mean(1),theta_mean(1)],ylims,'r-','LineWidth',2);
xlabel('\theta_1');
ylabel('Posterior density');
title(sprintf('\theta_1: mean=%.3f, SD=%.3f', ...
    theta_mean(1),theta_sd(1)));
grid on;

% Panel 5: posterior density theta_2
subplot(3,3,5);
histogram(theta2_samples,40,'Normalization','pdf', ...
    'FaceColor','r','EdgeColor','k');
hold on;
ylims = ylim;
plot([theta_true(2),theta_true(2)],ylims,'g--','LineWidth',2);
plot([theta_mean(2),theta_mean(2)],ylims,'b-','LineWidth',2);
xlabel('\theta_2');
ylabel('Posterior density');
title(sprintf('\theta_2: mean=%.3f, SD=%.3f', ...
```

पुराने पाठ्यक्रम

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    theta_mean(2),theta_sd(2)));
grid on;

% Panel 6: joint posterior
subplot(3,3,6);
scatter(theta1_samples(1:10:end),theta2_samples(1:10:end), ...
    10,'b','filled');
hold on;
plot(theta_true(1),theta_true(2),'go','MarkerSize',10,'LineWidth',2);
plot(theta_mean(1),theta_mean(2),'r*','MarkerSize',12,'LineWidth',2);
xlabel('\theta_1');
ylabel('\theta_2');
title(sprintf('Joint posterior (corr.=%.3f)',posterior_correlation));
grid on;

% Panel 7: ACF theta_1
subplot(3,3,7);
stem(0:max_lag,acf_theta1,'b','Marker','none','LineWidth',1.2);
hold on;
plot([0,max_lag],[acf_bound,acf_bound],'r--','LineWidth',1);
plot([0,max_lag],[-acf_bound,-acf_bound],'r--','LineWidth',1);
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');
title('ACF: \theta_1');
grid on;

% Panel 8: ACF theta_2
subplot(3,3,8);
stem(0:max_lag,acf_theta2,'r','Marker','none','LineWidth',1.2);
hold on;
plot([0,max_lag],[acf_bound,acf_bound],'b--','LineWidth',1);
plot([0,max_lag],[-acf_bound,-acf_bound],'b--','LineWidth',1);
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');
title('ACF: \theta_2');
grid on;

% Panel 9: posterior-predictive distribution
subplot(3,3,9);
fill([x1_pred;flipud(x1_pred)], ...
    [y_pred_upper;flipud(y_pred_lower)], ...
    'b','FaceAlpha',0.20,'EdgeColor','none');
hold on;
plot(x1_pred,y_pred_mean,'b-','LineWidth',2);
xlabel('x_1, with x_2=0.5');
ylabel('Future y');
title('Posterior-predictive distribution');
grid on;

sgtitle('Bayesian Regression with a Quadratic Basis: MCMC Results');

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
fprintf('\n=== Diagnostic Summary ===\n');
fprintf(['Acceptance rate: %.1f%% ', ...
    '(20-50%% is a useful heuristic here)\n'],100*acceptance_rate);
if acceptance_rate < 0.20
    fprintf('Acceptance is low: decrease proposal_sd.\n');
elseif acceptance_rate > 0.50
    fprintf('Acceptance is high: increase proposal_sd.\n');
else
    fprintf('Acceptance rate is in the intended heuristic range.\n');
end
fprintf('Inspect trace plots and ACF decay.\n');
fprintf(['This single-chain example does not compute R-hat; ', ...
    'use multiple chains for production work.\n']);
fprintf(['Credible intervals account for measurement noise and prior ', ...
    'information under the assumed model; they do not automatically ', ...
    'account for model discrepancy.\n']);

fprintf('\n=== ANALYSIS COMPLETE ===\n');

% Optional export:
% exportgraphics(fig,'Bayesian_quadratic_basis_MCMC.pdf', ...
%     'ContentType','vector');

%% Local functions
% Local functions in MATLAB scripts require MATLAB R2016b or later.

function loglik = compute_loglikelihood(y,X,theta,sigma)
    residuals = y-X*theta;
    n = numel(y);
    loglik = -0.5*(residuals.'*residuals)/sigma^2 ...
        - n*log(sigma) - 0.5*n*log(2*pi);
end

function logprior = compute_logprior(theta,mu_prior,sigma_prior)
    z = (theta-mu_prior)./sigma_prior;
    logprior = -0.5*(z.'*z) ...
        - sum(log(sigma_prior)) ...
        - 0.5*numel(theta)*log(2*pi);
end

function logposterior = compute_logposterior( ...
        y,X,theta,sigma,mu_prior,sigma_prior)
    logposterior = compute_loglikelihood(y,X,theta,sigma) ...
        + compute_logprior(theta,mu_prior,sigma_prior);
end

function acf = compute_acf_manual(x,max_lag)
    x = x(:)-mean(x);
    denominator = sum(x.^2);
    acf = zeros(max_lag+1,1);
    acf(1) = 1;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
352
353     for lag = 1:max_lag
354         acf(lag+1) = ...
355             sum(x(1:end-lag).*x(1+lag:end))/denominator;
356     end
357 end
358
359 function q = empirical_percentile(x,p)
360     x = sort(x(:));
361     n = numel(x);
362     h = 1+(n-1)*(p(:)/100);
363     lo = floor(h);
364     hi = ceil(h);
365     w = h-lo;
366     q = ((1-w).*x(lo)+w.*x(hi)).';
367 end
368
369 function q = row_percentile(A,p)
370     q = zeros(size(A,1),1);
371     for i = 1:size(A,1)
372         qi = empirical_percentile(A(i,:),p);
373         q(i) = qi(1);
374     end
375 end
```

I.5.9 Markov chain Monte Carlo Simulation

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

Code for the example shown in §65.5.4.

```
% Generate synthetic data
n = 50; % Number of data points
x1 = rand(n, 1); % Random values for x1
x2 = rand(n, 1); % Random values for x2
theta_true = [2; 3]; % True parameter values
sigma = 1; % Standard deviation of noise
y = theta_true(1) * x1.^2 + theta_true(2) * x2 + sigma * randn(n, 1); % Generate data
    with noise

% Define prior and likelihood
log_prior = @(theta) -0.5 * sum(theta.^2 / 10^2); % Gaussian prior with mean 0 and
    variance 10^2
log_likelihood = @(theta) -0.5 * sum((y - theta(1) * x1.^2 - theta(2) * x2).^2 / sigma
    ^2); % Likelihood function

% MCMC sampling parameters
num_samples = 10000; % Number of MCMC samples
theta_samples = zeros(num_samples, 2); % Storage for parameter samples
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
theta_current = [0; 0]; % Initial guess for parameters

% MCMC sampling loop
for i = 1:num_samples
% Propose new parameters
theta_proposal = theta_current + randn(2, 1) * 0.1; % Gaussian proposal distribution

% Compute log acceptance ratio
log_acceptance_ratio = ...
log_likelihood(theta_proposal) + log_prior(theta_proposal) ...
- log_likelihood(theta_current) - log_prior(theta_current);

% Accept or reject the proposal
if log(rand) < log_acceptance_ratio
theta_current = theta_proposal; % Accept the proposal
end

% Store the current sample
theta_samples(i, :) = theta_current;
end

% Analyze the results
theta_mean = mean(theta_samples, 1); % Posterior mean of parameters
theta_ci = quantile(theta_samples, [0.025, 0.975]); % 95% credible intervals

% Display results
fprintf('Estimated theta: [%f, %f]\n', theta_mean(1), theta_mean(2));
fprintf('95%% CI for theta1: [%f, %f]\n', theta_ci(1, 1), theta_ci(2, 1));
fprintf('95%% CI for theta2: [%f, %f]\n', theta_ci(1, 2), theta_ci(2, 2));

% Plot posterior distributions
figure;
subplot(1, 2, 1);
histogram(theta_samples(:, 1), 30, 'Normalization', 'pdf');
title('\theta_1 Posterior');
xlabel('\theta_1');
ylabel('Density');
grid on;

subplot(1, 2, 2);
histogram(theta_samples(:, 2), 30, 'Normalization', 'pdf');
title('\theta_2 Posterior');
xlabel('\theta_2');
ylabel('Density');
grid on;
```

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

I.6 Part VI: Optimization and Parameter Fitting

This section addresses nonlinear least-squares optimization and curve fitting using the Levenberg-Marquardt algorithm.

I.6.1 Levenberg-Marquardt

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

Refer to §65.4.

I.6.2 Custom Implementation

```
% ========================================================================
% LEVENBERG-MARQUARDT ALGORITHM -- CUSTOM IMPLEMENTATION
% ========================================================================
% Fits a nonlinear model to noisy data using the Levenberg-Marquardt (LM)
% algorithm, implemented from scratch (not using MATLAB's lsqnonlin).
%
% MODEL:  y(x) = beta_1 * exp(beta_2 * x)
%
% ALGORITHM:
%   LM is a trust-region method that interpolates between two extremes:
%     - Gauss-Newton (lambda -> 0):  fast quadratic convergence near solution
%     - Gradient descent (lambda -> infinity): robust far from solution
%
%   At each iteration, the parameter update solves:
%       (J^T J + lambda * I) * delta = J^T * r
%
%   where:
%     J     : Jacobian matrix  [n x p]  (partial derivatives of residuals)
%     r     : residual vector  [n x 1]  (y_observed - y_model)
%     lambda: damping parameter (controls interpolation between GN and GD)
%     delta : parameter update  [p x 1]
%
%   If the update reduces the cost, accept it and decrease lambda (-> GN).
%   If not, reject it and increase lambda (-> GD).
%
% JACOBIAN (analytical, for this model):
%   dr_i/d(beta_1) = -exp(beta_2 * x_i)
%   dr_i/d(beta_2) = -beta_1 * x_i * exp(beta_2 * x_i)
%
%   NOTE: this code uses the Jacobian of the MODEL (not the residuals),
%   so J here has the opposite sign from the Jacobian of the residuals.
%   The normal equations J^T J delta = J^T r remain correct as written.
%
% NOTE ON LAMBDA ADAPTATION:
%   This implementation uses a FIXED lambda throughout all iterations.
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   A proper LM implementation adapts lambda based on whether the update
%   improves the cost (reduce lambda) or worsens it (increase lambda).
%   Fixed lambda works here because the problem is well-conditioned and
%   the initial guess is close to the solution, but it is not general.
%
% EXPECTED RESULT: beta approx [1.0, 1.0]
% ========================================================================

clear; close all; clc;

rng(0);   % fixed seed for reproducibility

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Generate synthetic data
% ------------------------------------------------------------------------
x           = linspace(0, 2, 20);     % 20 equally spaced points in [0, 2]
true_params = [1.0; 1.0];             % true beta_1 and beta_2

y_true = true_params(1) * exp(true_params(2) * x);
y      = y_true + 0.1 * randn(size(y_true));   % add Gaussian noise (std = 0.1)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Model and algorithm parameters
% ------------------------------------------------------------------------
model    = @(beta, x) beta(1) * exp(beta(2) * x);

beta     = [0.5; 0.5];   % initial guess (deliberately away from truth)
lambda   = 0.01;          % damping parameter (fixed -- see NOTE above)
tol      = 1e-6;          % convergence threshold on ||delta_beta||
max_iter = 100;           % maximum number of iterations

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Levenberg-Marquardt iteration
% ------------------------------------------------------------------------
fprintf('%-8s  %-12s  %-10s  %-10s  %-12s\n', ...
        'Iter', 'Cost', 'beta_1', 'beta_2', '||delta||');

for iter = 1 : max_iter

    % --- Model predictions at current parameters ---
    f = model(beta, x);

    % --- Residuals: r = y_observed - y_model  (column vector) ---
    r = (y - f)';

    % --- Jacobian of the model output w.r.t. parameters ---
    % J(i,1) = d(model)/d(beta_1) at x_i = exp(beta_2 * x_i)
    % J(i,2) = d(model)/d(beta_2) at x_i = beta_1 * x_i * exp(beta_2 * x_i)
    J = [ exp(beta(2) * x)',  ...
          beta(1) * x' .* exp(beta(2) * x)' ];

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    % --- Normal equations with damping: (J^T J + lambda*I) delta = J^T r ---
    JTJ        = J' * J;
    JTr        = J' * r;
    delta_beta = (JTJ + lambda * eye(2)) \ JTr;

    % --- Update parameters ---
    beta = beta + delta_beta;

    % --- Report progress ---
    cost = 0.5 * sum(r.^2);
    fprintf('%-8d  %-12.6f  %-10.6f  %-10.6f  %-12.2e\n', ...
            iter, cost, beta(1), beta(2), norm(delta_beta));

    % --- Check convergence ---
    if norm(delta_beta) < tol
        fprintf('\nConverged after %d iterations.\n', iter);
        break;
    end

    if iter == max_iter
        fprintf('\nWARNING: maximum iterations reached without convergence.\n');
    end

end

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Results
% -------------------------------------------------------------------------
fprintf('\n--- Summary ---\n');
fprintf('True parameters:  beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', true_params(1), true_params
    (2));
fprintf('Fitted parameters: beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', beta(1), beta(2));

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Plot
% -------------------------------------------------------------------------
x_fit = linspace(min(x), max(x), 200);
y_fit = model(beta, x_fit);

figure;
scatter(x, y, 60, 'ro', 'filled', 'DisplayName', 'Observed data');
hold on;
plot(x_fit, y_fit,   'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'LM fitted model');
plot(x_fit, true_params(1)*exp(true_params(2)*x_fit), ...
     'k--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'True model');
hold off;

xlabel('x');
ylabel('y');
title(sprintf('Levenberg-Marquardt:  \\beta_1=%.3f, \\beta_2=%.3f', beta(1), beta(2)));
legend('Location', 'northwest');
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
grid on;
```

I.6.3 Using Built-in Function

```
% ========================================================================
% LEVENBERG-MARQUARDT FITTING -- MATLAB BUILT-IN (lsqcurvefit)
% ========================================================================
% Fits the same exponential model as the custom LM implementation using
% MATLAB's lsqcurvefit, which provides a production-quality Levenberg-
% Marquardt solver with adaptive damping, convergence diagnostics, and
% confidence interval estimation.
%
% MODEL:  y(x) = beta_1 * exp(beta_2 * x)
%
% COMPARISON WITH CUSTOM IMPLEMENTATION:
%   The previous script (levenberg_marquardt.m) built LM from scratch
%   with a FIXED damping parameter lambda.  lsqcurvefit uses an ADAPTIVE
%   lambda strategy: lambda decreases when updates improve the cost
%   (accelerating convergence near the solution) and increases when they
%   don't (recovering robustness far from it).  This is the correct
%   implementation of the Levenberg-Marquardt trust-region method.
%
% lsqcurvefit INTERFACE:
%   [beta, resnorm, residual, exitflag, output, lambda, jacobian]
%       = lsqcurvefit(model, beta0, x, y, lb, ub, options)
%
%   model    : function handle @(beta,x) returning model predictions
%   beta0    : initial parameter guess
%   x, y     : observed data
%   lb, ub   : lower/upper bounds ([] = none)
%   resnorm  : sum of squared residuals at the solution
%   jacobian : Jacobian at the solution (used for confidence intervals)
%
% CONFIDENCE INTERVALS:
%   nlparci(beta, residual, 'Jacobian', jacobian) returns approximate
%   95% confidence intervals based on the linearised model at the solution.
%
% EXPECTED RESULT: beta approx [1.0, 1.0]
% ========================================================================

clear; close all; clc;

rng(0);   % same seed as custom implementation for direct comparison

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Generate synthetic data  (identical to custom LM script)
% ------------------------------------------------------------------------
x           = linspace(0, 2, 20);
true_params = [1.0, 1.0];

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
y_true = true_params(1) * exp(true_params(2) * x);
y      = y_true + 0.1 * randn(size(y_true));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Model and solver setup
% ------------------------------------------------------------------------
model = @(beta, x) beta(1) * exp(beta(2) * x);

beta0 = [0.5, 0.5];   % initial guess (same as custom implementation)

options = optimoptions('lsqcurvefit',                ...
    'Algorithm',    'levenberg-marquardt',            ...  % LM with adaptive lambda
    'Display',      'iter',                           ...  % show iteration history
    'TolFun',       1e-10,                            ...  % function tolerance
    'TolX',         1e-10,                            ...  % parameter tolerance
    'MaxIterations', 400);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Fit the model
% ------------------------------------------------------------------------
[beta_opt, resnorm, residual, exitflag, output, ~, jacobian] = ...
    lsqcurvefit(model, beta0, x, y, [], [], options);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Results and confidence intervals
% ------------------------------------------------------------------------
ci = nlparci(beta_opt, residual, 'Jacobian', full(jacobian));

fprintf('\n--- Results ---\n');
fprintf('True parameters:   beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', true_params(1),
    true_params(2));
fprintf('Fitted parameters: beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', beta_opt(1), beta_opt(2));
fprintf('Residual norm (sum of squared residuals): %.6e\n', resnorm);
fprintf('\n95%% Confidence Intervals:\n');
fprintf('  beta_1: [%.4f, %.4f]\n', ci(1,1), ci(1,2));
fprintf('  beta_2: [%.4f, %.4f]\n', ci(2,1), ci(2,2));
fprintf('\nSolver exit flag: %d  (%s)\n', exitflag, output.message);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Plot
% ------------------------------------------------------------------------
x_fit = linspace(min(x), max(x), 200);
y_fit = model(beta_opt, x_fit);

figure;
scatter(x, y, 60, 'ro', 'filled', 'DisplayName', 'Observed data');
hold on;
plot(x_fit, y_fit, 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'LM fitted model');
plot(x_fit, true_params(1)*exp(true_params(2)*x_fit), ...
     'k--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'True model');
hold off;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```

xlabel('x');
ylabel('y');
title(sprintf('lsqcurvefit LM:  \\beta_1=%.3f, \\beta_2=%.3f', ...
              beta_opt(1), beta_opt(2)));
legend('Location', 'northwest');
grid on;
```

I.7 Part VII: Seismic Reliability and Uncertainty

This section applies the methods developed above to seismic engineering, including probabilistic hazard analysis and performance-based design.

I.7.1 Seismic hazard analysis

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

Code for §67.13.

```
% ========================================================================
% SEISMIC HAZARD ANALYSIS AND DEAGGREGATION
% ========================================================================
% Demonstrates two core products of Probabilistic Seismic Hazard Analysis
% (PSHA) for a site:
%
% PART 1 -- SEISMIC HAZARD CURVE:
%   Plots the annual probability of exceeding a given ground motion
%   intensity level (here: Peak Ground Acceleration, PGA in units of g).
%
%   The hazard curve is the fundamental output of PSHA.  For a given
%   intensity measure IM:
%       lambda(IM > x) = annual rate of exceedance of level x
%
%   A common design target:
%     lambda = 0.002/year (2% probability in 50 years) -> "2/50" level
%     lambda = 0.02/year  (10% probability in 50 years) -> "10/50" level
%
%   Here the hazard curve is modelled by a simple exponential decay:
%       lambda(PGA) = lambda_0 * exp(-decay_rate * PGA)
%   This is synthetic -- a real hazard curve is computed by integrating
%   over all earthquake sources, magnitudes, and distances.
%
% PART 2 -- SEISMIC HAZARD DEAGGREGATION:
%   For a given hazard level (e.g. Sa(T=1s) = 0.8g), deaggregation
%   identifies which (magnitude, distance) scenarios contribute most
%   to the hazard at that level.
%
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   The scatter plot shows:
%     - x-axis: source-to-site distance R [km]
%     - y-axis: earthquake magnitude M
%     - marker size: proportional to fractional contribution to hazard
%     - marker color: same contribution scale
%
%   The dominant scenario (largest marker) defines the "controlling
%   earthquake" used for ground motion selection in structural analysis.
%
% NOTE: Both the hazard curve and deaggregation data here are SYNTHETIC.
%   In practice these are computed using software such as OpenSHA, HAZUS,
%   or the USGS Unified Hazard Tool, integrating over catalogued faults
%   and ground motion prediction equations (GMPEs).
% ========================================================================

clc; clear; close all;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Seismic hazard curve
% ------------------------------------------------------------------------
% PGA levels at which the annual exceedance rate is evaluated
pga_values = linspace(0.05, 0.5, 10);   % PGA in units of g

% Synthetic hazard model: lambda = lambda_0 * exp(-decay_rate * PGA)
lambda_0   = 0.15;   % exceedance rate at PGA = 0 (extrapolated)  [1/year]
decay_rate = 5;      % steepness of the hazard curve               [1/g]

exceedance_probs = lambda_0 * exp(-decay_rate * pga_values);

% Reference hazard levels (horizontal lines on the plot)
lambda_2_50  = 1 - (1-0.02)^(1/50);   % 2% in 50 years  approx 0.000404/year
lambda_10_50 = 1 - (1-0.10)^(1/50);   % 10% in 50 years approx 0.002107/year

figure;
semilogy(pga_values, exceedance_probs, 'b-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6);
hold on;
yline(lambda_2_50,  'r--', '2% in 50 yr', 'LineWidth', 1.5, ...
      'LabelHorizontalAlignment', 'left');
yline(lambda_10_50, 'k--', '10% in 50 yr', 'LineWidth', 1.5, ...
      'LabelHorizontalAlignment', 'left');

xlabel('Peak Ground Acceleration  (g)',          'FontSize', 12);
ylabel('Annual Probability of Exceedance',       'FontSize', 12);
title('Seismic Hazard Curve',                    'FontSize', 13);
grid on;
set(gca, 'YScale', 'log');
set(gca, 'YTick', [1e-3, 5e-3, 1e-2, 5e-2, 1e-1, 5e-1, 1]);
ylim([1e-3, 1]);

saveas(gcf, 'hazard_curve.png');

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Seismic hazard deaggregation
% ------------------------------------------------------------------------
% Each entry represents a (magnitude, distance) scenario and its
% fractional contribution to the hazard at Sa(T=1s) = 0.8g.
% Contributions must sum to 1.0 for a complete deaggregation.

magnitudes    = [6.0,  6.5,  7.0,  7.3,  7.5,  7.8];   % moment magnitude Mw
distances     = [15,   20,   30,   35,   40,   50  ];    % closest distance [km]
contributions = [0.10, 0.20, 0.25, 0.30, 0.10, 0.05];   % fractional contributions

fprintf('Total contribution (should sum to 1.0): %.2f\n', sum(contributions));

% Identify the controlling (dominant) scenario
[~, ctrl_idx] = max(contributions);
fprintf('Controlling scenario: M=%.1f, R=%d km (contribution=%.0f%%)\n', ...
        magnitudes(ctrl_idx), distances(ctrl_idx), contributions(ctrl_idx)*100);

figure;
scatter(distances, magnitudes, 300 * contributions, contributions, 'filled');
hold on;
% Highlight the controlling earthquake
scatter(distances(ctrl_idx), magnitudes(ctrl_idx), ...
        300 * contributions(ctrl_idx), 'k', 'LineWidth', 2);
text(distances(ctrl_idx)+1, magnitudes(ctrl_idx), ...
     sprintf('  Controlling\n  M=%.1f, R=%dkm', magnitudes(ctrl_idx), distances(ctrl_idx
    )), ...
      'FontSize', 10);

cb = colorbar;
cb.Label.String = 'Fractional contribution to hazard';
clim([0, 0.5]);

xlabel('Closest Source-to-Site Distance  (km)', 'FontSize', 12);
ylabel('Moment Magnitude  M_w',                 'FontSize', 12);
title('Seismic Hazard Deaggregation  at  S_a(T=1.0 s) = 0.8g', 'FontSize', 13);
grid on;
set(gca, 'YTick', [6.0, 6.2, 6.5, 6.8, 7.0, 7.2, 7.3, 7.5, 7.8]);
xlim([0, 60]);  ylim([5.5, 8.5]);

saveas(gcf, 'deaggregation_plot.png');
```

I.7.2 Performance Based Earthquake Engineering

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

Code corresponding to example in §72.4.

```
% ========================================================================
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
% PERFORMANCE-BASED EARTHQUAKE ENGINEERING (PBEE) -- NUMERICAL EXAMPLE
% ========================================================================
% Implements the four-step PBEE framework (PEER methodology) relating
% ground shaking intensity to structural response, damage, and loss.
%
% THE PBEE FRAMEWORK (Pacific Earthquake Engineering Research Center):
%   The total loss lambda(DV) is computed by integrating over all
%   intermediate variables via the triple integral:
%
%   lambda(DV > dv) = int int int  P(DV>dv|DM) |dP(DM|EDP)| |dP(EDP|IM)| |dlambda(IM)|
%
%   where:
%     IM  : Intensity Measure      (e.g. spectral acceleration Sa)
%     EDP : Engineering Demand Parameter  (e.g. interstory drift ratio theta)
%     DM  : Damage Measure         (damage state: None/Slight/Moderate/...)
%     DV  : Decision Variable      (repair cost, downtime, casualties)
%
% THE FOUR STEPS IMPLEMENTED HERE:
%
%   Step 1 -- Seismic hazard curve: lambda(Sa)
%     Annual rate of exceeding each Sa level at the site.
%     Synthetic exponential model; in practice from PSHA.
%
%   Step 2 -- IDA curve: theta = f(Sa)
%     Maps Sa to peak interstory drift via a power-law fit to
%     Incremental Dynamic Analysis results.
%
%   Step 3 -- Fragility curves: P(DM >= ds | theta)
%     Lognormal cumulative distribution functions giving probability of
%     reaching or exceeding each damage state as a function of drift.
%     Parameters: median theta_m (drift at 50% probability) and dispersion beta.
%
%   Step 4 -- Loss analysis: E[DV]
%     (a) Deterministic: E[DV] = sum_i P(DS=i) * consequence_i
%     (b) Monte Carlo: sample damage states and accumulate loss statistics
%
% NOTE ON MONTE CARLO DAMAGE STATE SAMPLING:
%   The cumulative probability vector is used to assign damage states via
%   inverse CDF sampling:  state = find(U < cumsum(P), 1, 'first').
%   The vectorised implementation below replaces the original scalar loop.
% ========================================================================

clc; clear; close all;

% ========================================================================
% STEP 1 -- SEISMIC HAZARD CURVE:  lambda(Sa)
% ========================================================================
% Annual exceedance rate as a function of spectral acceleration.
% Model: lambda(Sa) = A * exp(-B * Sa)   (synthetic exponential decay)

A          = 0.5;   % rate at Sa=0  [exceedances/year]
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
B          = 2.0;   % decay rate    [1/g]
Sa_values  = linspace(0, 1.5, 100);   % Sa range  [g]

lambda_values = A * exp(-B * Sa_values);

% Reference hazard levels
lambda_2_50  = 1 - (1-0.02)^(1/50);   % 2% in 50 yr  approx 4.0e-4 /yr
lambda_10_50 = 1 - (1-0.10)^(1/50);   % 10% in 50 yr approx 2.1e-3 /yr

figure('Name', 'PBEE Step 1: Hazard Curve');
semilogy(Sa_values, lambda_values, 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
yline(lambda_2_50,  'r--', '2% in 50 yr',  'LabelHorizontalAlignment','left');
yline(lambda_10_50, 'k--', '10% in 50 yr', 'LabelHorizontalAlignment','left');
xlabel('Spectral Acceleration  S_a  (g)');
ylabel('Annual Rate of Exceedance  \lambda');
title('Step 1 -- Seismic Hazard Curve');
grid on;

% ========================================================================
% STEP 2 -- IDA CURVE:  theta = f(Sa)
% ========================================================================
% Interstory drift ratio (EDP) as a function of Sa (IM).
% Power-law model fit to Incremental Dynamic Analysis:
%   theta(Sa) = C1 * Sa^C2

C1 = 0.02;   % scaling constant
C2 = 0.9;    % exponent (< 1: slightly concave, typical of ductile systems)

theta_values = C1 * Sa_values.^C2;

figure('Name', 'PBEE Step 2: IDA Curve');
plot(Sa_values, theta_values, 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Spectral Acceleration  S_a  (g)');
ylabel('Interstory Drift Ratio  \theta');
title('Step 2 -- Incremental Dynamic Analysis (IDA) Curve');
grid on;

% ========================================================================
% STEP 3 -- FRAGILITY CURVES:  P(DS >= ds | theta)
% ========================================================================
% Lognormal fragility functions for four damage states.
% P(DS >= ds | theta) = Phi( [ln(theta) - ln(theta_m)] / beta )
%
% Parameters:
%   theta_m : median drift (50% probability of reaching this DS)
%   beta    : lognormal dispersion (total {chap:trustregion} in capacity)

beta             = 0.4;
fragility_medians = [0.005, 0.010, 0.020, 0.050];   % median drifts [rad]
fragility_labels  = {'Light', 'Moderate', 'Severe', 'Collapse'};
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
theta_range       = linspace(0.001, 0.1, 200);

figure('Name', 'PBEE Step 3: Fragility Curves');
hold on;
colors = {'b', 'g', 'r', 'k'};
for i = 1 : length(fragility_medians)
    P = normcdf((log(theta_range) - log(fragility_medians(i))) / beta);
    plot(theta_range, P, colors{i}, 'LineWidth', 2, 'DisplayName', fragility_labels{i});
end
xlabel('Interstory Drift Ratio  \theta  (rad)');
ylabel('Probability  P(DS \geq ds | \theta)');
title('Step 3 -- Fragility Curves');
legend('Location', 'east');
grid on;

% ========================================================================
% STEP 4a -- DETERMINISTIC LOSS ANALYSIS:  E[DV]
% ========================================================================
% Expected consequences given probabilities from fragility analysis
% at a specific hazard level.
%
% NOTE: probabilities here are P(DS = ds_i) at a given drift level,
% not P(DS >= ds_i).  They should sum to 1.0 for a complete loss model.

ds_probs     = [0.9, 0.6, 0.1, 0.0];   % P(DS = ds_i) -- NOTE: sums to 1.6,
                                       % suggesting these are P(DS>=ds_i)
                                       % not exclusive probabilities.
                                       % Preserved from original.
repair_costs_det = [0.1,   0.5,    2.0,   10.0];   % repair cost  [$M]
downtime_det     = [2,     14,     60,    300 ];    % downtime     [days]
casualties_det   = [0.0,   0.01,   0.1,     5.0]; % casualties   [%]

E_loss       = sum(ds_probs .* repair_costs_det);
E_downtime   = sum(ds_probs .* downtime_det);
E_casualties = sum(ds_probs .* casualties_det);

fprintf('\n--- Step 4a: Deterministic Loss ---\n');
fprintf('Expected repair cost: $%.2f M\n',    E_loss);
fprintf('Expected downtime:    %.1f days\n',  E_downtime);
fprintf('Expected casualties:  %.3f%%\n',     E_casualties);

% ========================================================================
% STEP 4b -- MONTE CARLO LOSS ESTIMATION
% ========================================================================
% Sample damage states using exclusive probabilities (sum to 1.0) and
% accumulate repair cost, downtime, and casualty statistics.
%
% DAMAGE STATES: None, Slight, Moderate, Extensive, Complete
%
% VECTORISED SAMPLING:
%   For each sample U ~ Uniform[0,1], the damage state is the first
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   state for which cumsum(P) > U.  Equivalent to inverse CDF sampling.

num_samples = 100000;

% Exclusive probabilities (sum to 1.0)
ds_probs_mc  = [0.60, 0.25, 0.10, 0.04, 0.01];
cum_probs    = cumsum(ds_probs_mc);

% Consequences per damage state
rc_mc  = [0,    0.03,  0.15,  0.50,  2.00];   % repair cost [M$]
dt_mc  = [0,    1,     7,     21,    60  ];    % downtime    [days]
cas_mc = [0,    0.005, 0.02,  0.10,  0.50];   % casualties  [%]

% Vectorised inverse CDF sampling (replaces scalar loop)
U             = rand(num_samples, 1);
damage_states = sum(U >= cum_probs, 2) + 1;   % state index 1..5

rc_results  = rc_mc(damage_states);
dt_results  = dt_mc(damage_states);
cas_results = cas_mc(damage_states);

% Statistics
E_rc   = mean(rc_results);   SD_rc  = std(rc_results);
E_dt   = mean(dt_results);   SD_dt  = std(dt_results);
E_cas  = mean(cas_results);  SD_cas = std(cas_results);

fprintf('\n--- Step 4b: Monte Carlo Loss (%d samples) ---\n', num_samples);
fprintf('Repair cost: $%.3f M  (SD: $%.3f M,  CV: %.2f)\n', E_rc,  SD_rc,  SD_rc/E_rc);
fprintf('Downtime:    %.2f days (SD: %.2f days, CV: %.2f)\n', E_dt,  SD_dt,  SD_dt/E_dt)
    ;
fprintf('Casualties:  %.4f%% (SD: %.4f%%,  CV: %.2f)\n',  E_cas, SD_cas, SD_cas/E_cas
    );

% ========================================================================
% STEP 4b -- PLOTS: Loss distributions
% ========================================================================
figure('Name', 'PBEE Step 4b: Loss Distributions');

subplot(1,3,1);
histogram(rc_results, 'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'b');
xlabel('Repair Cost ($M)'); ylabel('Probability');
title('Repair Cost Distribution');
xline(E_rc, 'r--', sprintf('E=\\$%.2fM', E_rc), 'LineWidth', 1.5);
grid on;

subplot(1,3,2);
histogram(dt_results, 'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'r');
xlabel('Downtime (days)'); ylabel('Probability');
title('Downtime Distribution');
xline(E_dt, 'b--', sprintf('E=%.1f d', E_dt), 'LineWidth', 1.5);
grid on;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
204
205 subplot(1,3,3);
206 histogram(cas_results, 'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'g');
207 xlabel('Casualties (%)'); ylabel('Probability');
208 title('Casualty Distribution');
209 xline(E_cas, 'k--', sprintf('E=%.3f%%', E_cas), 'LineWidth', 1.5);
210 grid on;
211
212 sgtitle('Step 4b -- Monte Carlo Loss Distributions');
213
214 saveas(gcf, 'loss_distributions.png');
```

I.8 Part VIII: Utility

Miscellaneous utility functions and tools.

I.8.1 Identicon

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

Code that creates identicons as described in chapter H

```
% Book Chapter Identicon Generator with separate filename and title
% ================================================================
% ========================================================================
% BOOK CHAPTER IDENTICON GENERATOR
% ========================================================================
% Generates a unique visual "identicon" -- a small symmetric icon derived
% deterministically from a chapter title -- for use as a chapter header
% or visual identifier in the book.
%
% HOW IT WORKS:
%   1. The chapter title string is hashed into a 32-element integer array
%      using a simple position-weighted ASCII accumulation (simpleHash).
%   2. The hash values are mapped onto a 5x5 grid, with the left half
%      mirrored to the right for left-right symmetry.
%   3. Each non-zero cell is assigned a shape type (1=rounded square,
%      2=triangle-left, 3=triangle-right, 4=circle) and a color drawn
%      from a hue-shifted palette derived from the hash.
%   4. The result is rendered as a pixel image (300x300) alongside a
%      colour-mapped view of the raw pattern matrix.
%
% INPUTS (prompted interactively):
%   filename_input : base name for the output PDF  (e.g. 'C-14')
%   title_input    : chapter title string used to generate the hash
%
% OUTPUT:
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
%   <filename_input>.pdf  -- figure saved as PDF
%
% NOTE ON HASH QUALITY:
%   simpleHash() is intentionally simple (not cryptographic).  Its purpose
%   is only to produce visually distinct patterns for different chapter
%   titles, not to be collision-resistant.  Titles that differ by only
%   one character will produce clearly different icons in practice.
%
% NOTE ON PERFORMANCE:
%   The shape-drawing loops iterate over individual pixels (up to 60x60
%   per cell).  For cell_size=60 and a 5x5 grid this is 90,000 pixels --
%   fast enough interactively.  Increasing cell_size will slow rendering
%   quadratically.  Vectorised alternatives using meshgrid exist but
%   are left as-is for readability.
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- User inputs
% ------------------------------------------------------------------------
filename_input = input('Enter filename for PDF (e.g., C-14): ', 's');
if isempty(filename_input)
    filename_input = 'C-14';
end

title_input = input('Enter chapter title (e.g., Performance Based Earthquake Engineering
    ): ', 's');
if isempty(title_input)
    title_input = 'Performance Based Earthquake Engineering';
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Generate hash from chapter title
% ------------------------------------------------------------------------
hash_values = simpleHash(title_input);
hash_str    = num2str(hash_values);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Build the 5x5 pattern matrix
% ------------------------------------------------------------------------
% Each cell is assigned an integer 0..4:
%   0 = empty (white)
%   1 = rounded square
%   2 = triangle (lower-left fill)
%   3 = triangle (lower-right fill)
%   4 = circle
%
% Only the left half + centre column are computed from the hash;
% the right half is mirrored for symmetry.

```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
grid_size = 5;
pattern   = zeros(grid_size);

for i = 1 : grid_size
    % Left half (columns 1 .. floor(n/2))
    for j = 1 : floor(grid_size/2)
        hash_idx        = mod((i-1)*grid_size + j - 1, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j)    = mod(hash_values(hash_idx), 5);
        pattern(i, grid_size-j+1) = pattern(i,j);   % mirror
    end
    % Centre column (for odd grid size)
    if mod(grid_size, 2) == 1
        j        = ceil(grid_size/2);
        hash_idx = mod((i-1)*grid_size + j - 1, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);
    end
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Build colour palette from hash
% ------------------------------------------------------------------------
% Base hue derived from first three hash values; four colours at 90-degree
% hue intervals for variety.

base_hue = mod(sum(hash_values(1:3)), 360) / 360;
colors   = [ hsv2rgb([mod(base_hue,        1), 0.8, 0.9]) ;   % primary
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.25, 1), 0.7, 0.9]) ;   % complementary 1
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.50, 1), 0.8, 0.8]) ;   % complementary 2
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.75, 1), 0.7, 0.85]) ]; % complementary 3

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Render pixel image
% ------------------------------------------------------------------------
cell_size = 60;                                  % pixels per grid cell
img_size  = grid_size * cell_size;
identicon = ones(img_size, img_size, 3);         % white RGB background

for i = 1 : grid_size
    for j = 1 : grid_size

        value = pattern(i,j);
        if value == 0, continue; end   % empty cell

        % Pixel bounding box for this cell (with padding)
        padding   = ceil(cell_size * 0.05);
        row_start = (i-1)*cell_size + 1 + padding;
        row_end   =  i   *cell_size     - padding;
        col_start = (j-1)*cell_size + 1 + padding;
        col_end   =  j   *cell_size     - padding;

        % Colour selection based on position and value
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
        color_idx = mod(i*j + value, 4) + 1;
        color     = colors(color_idx, :);

        switch value

            case 1  % Rounded square
                % Pixels near the four corners are masked out to create
                % the rounded effect.
                corner_r = ceil(cell_size * 0.15);
                for r = row_start : row_end
                    for c = col_start : col_end
                        tl = (r-row_start)^2 + (c-col_start)^2;
                        tr = (r-row_start)^2 + (c-col_end  )^2;
                        bl = (r-row_end  )^2 + (c-col_start)^2;
                        br = (r-row_end  )^2 + (c-col_end  )^2;
                        in_corner = ...
                            (r < row_start+corner_r && c < col_start+corner_r && tl > corner_r^2) || ...
                            (r < row_start+corner_r && c > col_end  -corner_r && tr > corner_r^2) || ...
                            (r > row_end  -corner_r && c < col_start+corner_r && bl > corner_r^2) || ...
                            (r > row_end  -corner_r && c > col_end  -corner_r && br > corner_r^2);
                        if ~in_corner
                            identicon(r, c, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 2  % Triangle: lower-left fill (hypotenuse from top-left to bottom-right)
                h = row_end - row_start;
                w = col_end - col_start;
                for r = 0 : h
                    fill_width = ceil((r/h) * w);
                    for c = 0 : fill_width
                        if row_start+r <= img_size && col_start+c <= img_size
                            identicon(row_start+r, col_start+c, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 3  % Triangle: lower-right fill (hypotenuse from top-right to bottom-left)
                h = row_end - row_start;
                w = col_end - col_start;
                for r = 0 : h
                    fill_width = ceil((r/h) * w);
                    for c = 0 : fill_width
                        cc = col_end - c;
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
                        if row_start+r <= img_size && cc > 0 && cc <= img_size
                            identicon(row_start+r, cc, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 4  % Circle: filled disk within the padded cell
                cr     = (row_start + row_end) / 2;
                cc_ctr = (col_start + col_end) / 2;
                radius = (row_end - row_start) / 2 * 0.9;
                for r = row_start : row_end
                    for c = col_start : col_end
                        if sqrt((r-cr)^2 + (c-cc_ctr)^2) <= radius
                            identicon(r, c, :) = color;
                        end
                    end
                end

        end   % switch
    end
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Compose figure
% ------------------------------------------------------------------------
fig = figure('Position', [100, 100, 800, 400], 'Color', 'none');

% Left panel: rendered identicon with grid lines
subplot('Position', [0.05, 0.12, 0.45, 0.75]);
imshow(identicon);
hold on;
for k = 1 : grid_size-1
    line([0, img_size], [k*cell_size, k*cell_size], 'Color', [0.6,0.6,0.6], 'LineWidth',
     1);
    line([k*cell_size, k*cell_size], [0, img_size], 'Color', [0.6,0.6,0.6], 'LineWidth',
     1);
end
hold off;

% Right panel: colour-mapped pattern matrix with value labels
subplot('Position', [0.52, 0.12, 0.45, 0.75]);
imagesc(pattern);
colormap(hsv(5));
axis square;  grid on;
set(gca, 'Color', 'none');
for i = 1 : grid_size
    for j = 1 : grid_size
        text(j, i, num2str(pattern(i,j)), ...
             'HorizontalAlignment', 'center', ...
             'Color', 'w', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 14, ...
             'EdgeColor', 'k', 'Margin', 1);
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

```
    end
end

% Top annotation: chapter title + first 16 hash digits
title_text = [title_input, '  |  Hash: ', hash_str(1:min(16,length(hash_str))), '...'];
annotation('textbox', [0.1, 0.91, 0.8, 0.07], ...
           'String', title_text, 'EdgeColor', 'none', ...
           'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 14, ...
           'FontWeight', 'bold', 'Color', [0.2, 0.2, 0.2]);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 -- Export
% ------------------------------------------------------------------------
output_filename = [filename_input, '.pdf'];
print(fig, '-dpdf', output_filename);
fprintf('Saved to: %s\n', output_filename);


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: simpleHash
% ========================================================================
% Produces a 32-element integer array from a string by accumulating
% position-weighted ASCII values modulo 256.
%
% This is NOT a cryptographic hash -- it is designed only to produce
% visually distinct patterns for different chapter titles.
%
% For each character str(i) and each output slot j:
%   hash(position_factor) += char_code(i) * i   (mod 256)
%
% where position_factor = mod(i*j, 32) + 1 distributes contributions
% across all 32 output slots.

function hash_values = simpleHash(str)

hash_values = zeros(1, 32);

for i = 1 : length(str)
    char_code = double(str(i));
    for j = 1 : min(32, length(str))
        slot             = mod(i*j, 32) + 1;
        hash_values(slot) = mod(hash_values(slot) + char_code * i, 256);
    end
end

end   % simpleHash
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

J Mathcad के उदाहरण

निम्न पृष्ठों में मेरे संरचनात्मक विश्लेषण का परिचय (3525) पाठ्यक्रम के हल किए हुए गृहकार्य दिए गए हैं। इनमें से अनेक समस्याएँ पुस्तक में भी हल किए हुए उदाहरणों के रूप में प्रस्तुत हैं; तथापि पाठ्यपुस्तक के हलों और आगे दिए गए उनके संगत हलों के बीच हाइपरलिंक बनाना संभव नहीं था।

ये हल—जो आवश्यक रूप से पूर्ण अथवा इष्टतम नहीं हैं—श्री Christopher Segura द्वारा तैयार किए गए थे।

सभी समस्याएँ Mathcad का उपयोग करके हल की गईं। मैं विद्यार्थियों से सभी गृहकार्यों में इसका उपयोग अपेक्षित करता था, क्योंकि इसे सीखना और इसके साथ कार्य आरंभ करना सरल है।

यहाँ Mathcad का उपयोग विश्लेषणात्मक तर्क के स्थानापन्न के रूप में नहीं, बल्कि संगणकीय सहायक के रूप में किया गया है। समीकरण स्वाभाविक गणितीय संकेतन में प्रविष्ट किए जाते हैं और लिखे गए रूप में ही उनका मूल्यांकन होता है; इकाइयों को स्पष्ट और सुसंगत रूप से सँभाला जाता है; तथा परिवर्तन संपूर्ण कार्यपत्र में स्वतः प्रसारित होते हैं, जिससे मान्यताएँ, गणनाएँ और परिणाम एक ही दस्तावेज़ में साथ रह सकते हैं। साथ ही, प्रतीकात्मक अमूर्तन और कलनविधीय नियंत्रण की इसकी सीमित क्षमता का अर्थ है कि इसे हस्त-व्युत्पत्तियों और संकल्पनात्मक समझ का पूरक होना चाहिए—प्रतिस्थापक नहीं। विवेकपूर्ण उपयोग संरचनात्मक तर्क को स्पष्ट कर सकता है; अविवेकपूर्ण उपयोग उसे अस्पष्ट कर सकता है। विडंबना यह भी है कि Mathcad में प्रस्तुत कार्य से शैक्षणिक दुराचार की पहचान अपेक्षाकृत सरल हुई, क्योंकि नकल किए गए हल प्रायः समान संरचना, संकेतन और त्रुटियाँ पुनरुत्पादित करते थे।

पुरुष विक्रमस

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Structural Analysis Example Problems

Victor E. Saouma

Prepared by Christopher Segura
Summer 2011

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पुराने पन्ने

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

List of Examples

2.1 Stress Vectors
2.2 Stress Vectors 2
2.3 Principal Stresses
2.4 Stress Tensor Operations
2.5 Stress Transformation
2.6 Stress Transformation 2
2.7 Strain Invariants & Principal Strains
2.8 Equilibrium Equation
2.9 Stress-Strain
2.10 Stress-Strain 2
3.1 Displacement by Double Integration
4.1 Live Load Reduction
4.2 Wind Load
4.3 Earthquake Load on a Frame
4.4 Earthquake Load on a Tall Building
4.5 Hysdrostatic Load
4.6 Thermal Expansion/Stress
5.1 Statically Indeterminate Cable Structure
5.2 Simply Supported Beam
5.3 Parabolic Load
5.4 Three Span Beam
5.5 Three Hinged Gable Frame
5.6 Inclined Supports
7.1 Truss, Method of Joints
7.2 3D Truss
7.3 Truss I, Matrix Method
7.4 Truss II, Matrix Method
7.5 Truss, Method of Sections
8.1 Funicular Cable Structure
8.2 Design of Suspension Bridge
10.1 Simple Shear and Moment Diagram
10.2 Frame Shear and Moment Diagram
10.3 Frame Shear and Moment Diagram: Hydrostatic Load
10.4 Shear and Moment Diagrams for Frame
10.5 Shear and Moment Diagrams for Inclined Frame
10.6 3D Frame
11.1 Three Hinged Arch, Point Loads
11.2 Semi-Circular Arch
11.3 Statically Indeterminate Arch
11.4 Semi-circular Box Girder
11.5 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Point Load
11.6 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Uniform Load
12.1 Moment Area, Cantilevered Beam
12.2 Moment Area, Simply Supported Beam
12.3 Maximum Deflection
12.4 Frame Deflection
12.5 Frame Subjected to Temperature Loading
12.6 Conjugate Beam
12.7 Conjugate Beam 2
13.1 Deflection of a Cantilever Beam

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.2 Beam Deflection
13.3 Deflection of a Frame
13.4 Rotation of a Frame

13.5 Truss Deflection
13.6 Torsional and Flexural Deformation
13.7 Flexural and Shear Deformation in a Beam
13.8 Thermal Effects in a Beam
13.9 Deflection of a Truss
13.10 Thermal Deflection of a Truss: I
13.11 Thermal Deflection of a Truss: II
13.12 Truss with Initial Camber
13.13 Prestressed Concrete Beam with Continuously Variable I
14.1 Steel Building Frame Analysis
14.2 Analysis of Irregular Building Frame
14.3 Redundant Truss Analysis
14.4 Truss with Two Redundants
14.5 Analysis of Nonprismatic Members
14.6 Fixed End Moments for Nonprismatic Beams
14.7 Rectangular Frame, External Load
14.8 Frame with Temperature and Support Displacements
14.9 Braced Bent with Loads and Temperature Change
15.1 Approximate Analysis of a Frame Subjected to Vertical and Horizontal Loads
16.1 Propped Cantilever Beam
16.2 Two-Span Beam, Slope Deflection
16.3 Two-Span Beam, Slope Deflection, Initial Deflection
16.4 Frames, Slope Deflection
16.5 Box Culvert, Slope Deflection
16.6 Continuous Beam
16.7 Continuous Beam, Simplified Method
16.8 Continuous Beam, Inintial Settlement
16.9 Frame
16.10 Frame with Side Load
17.1 Beam
17.2 Frame

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.1 Stress Vectors

For the following stress tensor at point P

$$\sigma := \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} := \sigma = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine the traction (or stress vector) **t** passing through P and parallel to the plane ABC where A(4,0,0), B(0,2,0) and C(0,0,6)

Solution:

The vector normal to the plane can be found by taking the cross products of vectors AB and AC

$$\mathbf{N} = AB \times AC = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 12\,e_1 + 24\,e_2 + 8\,e_3$$

The unit normal of N is given by

$$\mathbf{n} = \frac{3}{7}e_1 + \frac{6}{7}e_2 + \frac{2}{7}e_3$$

$$n := \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Hence the stress vector traction will be

$$t := n \cdot \sigma = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & \frac{5}{7} & \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

and thus

$$\mathbf{t} = -\frac{9}{7}e_1 + \frac{5}{7}e_2 + \frac{10}{7}e_3$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.2 Stress Vectors 2

The state of stress through a continuum is given with respect to the cartesian axes by

$$\sigma(x) := \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5(x_2)^2 & 0 \\ 5(x_2)^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot MPa$$

Determine the stress vector at $P(1,1,\sqrt{3})$ of the plane that is normal to the tangent to the cylindrical surface $(x_2)^2 + (x_3)^2 = 4$ at P

Solution:

Vector Equation

$$v(x) := (x_2)^2 + (x_3)^2 - 4$$

Gradient

$$Vect1(x) := \nabla_x v(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot x_2 \\ 2\cdot x_3 \end{pmatrix}$$

For $x_2 := 1$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

$x_3 := \sqrt{4 - (x_2)^2} = 1.732$

Normalized Vector

$$n := \frac{x}{|x|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.866 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(x)\cdot n = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 1.732 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.3 Principal Stresses

The stress tensor is given at a point by point P

$$\sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine the principal stress values and the corresponding directions

Solution:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Simplifying the determinant

$$\left|\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \text{ simplify } \rightarrow -(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-4) = 0$$

thus the roots are

$$\lambda := -(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-4) = 0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Note that those are the three eigenvalues of the stress vector. If we let the x_1 axis be the one corresponding to the direction of λ_2 and n_i^2 be the direction cosines of this axis, then we have

$$(3-\lambda_2)n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0 \rightarrow 5\cdot n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0$$

$$n_1^2 + (0-\lambda_2)\cdot n_2^2 + 2n_3^2 = 0 \rightarrow n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + 2\cdot n_3^2 = 0 \qquad n_1^2 = 0 \qquad n_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad n_3^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + (0-\lambda_2)n_3^2 = 0 \rightarrow n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + 2\cdot n_3^2 = 0$$

Similarly, if we let x_2 be the one corresponding to the direction of λ_1 and n_i^1 be the direction cosines of this axis,

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\left(3-\lambda_1\right)n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0 \rightarrow 2\cdot n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+\left(0-\lambda_1\right)\cdot n_2^{\,2}+2n_3^{\,2}=0 \rightarrow n_1^{\,2}-n_2^{\,2}+2\cdot n_3^{\,2}=0 \qquad n_1^{\,1}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad n_2^{\,1}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad n_3^{\,1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}+\left(0-\lambda_1\right)n_3^{\,2}=0 \rightarrow n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}-n_3^{\,2}=0$$

Finally, if we let x_3 be the one corresponding to the direction of λ_3 and n_i^3 be the direction cosines of this axis,

$$\left(3-\lambda_3\right)n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0 \rightarrow -n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+\left(0-\lambda_3\right)\cdot n_2^{\,2}+2n_3^{\,2}=0 \rightarrow n_1^{\,2}-4\cdot n_2^{\,2}+2\cdot n_3^{\,2}=0 \qquad n_1^{\,3}=-\frac{2}{\sqrt{6}} \quad n_2^{\,3}=-\frac{1}{\sqrt{6}} \quad n_3^{\,3}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}+\left(0-\lambda_3\right)n_3^{\,2}=0 \rightarrow n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}-4\cdot n_3^{\,2}=0$$

$$n_{pd}:=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.4 Stress Tensor Operations

For the following stress tensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Determine directly the three Invariants I_σ, II_σ and III_σ
b) Determine the principal stresses and principal stress directions
c) Show that the transformation tensor of direction cosines transforms the original stress tensor into the diaganol axes stress tensor
d) Recompute the three invariants from the principal stresses
e) Split the stress tensor into its spherical and deviator parts
f) Show that the first invariant of the deviator is zero

Solution:

a) $I_\sigma := \sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3} = 20$

$II_\sigma := \sigma_{1,1}\cdot\sigma_{2,2} + \sigma_{2,2}\cdot\sigma_{3,3} + \sigma_{3,3}\cdot\sigma_{1,1} - \sigma_{1,2}\cdot\sigma_{2,1} = 123$

$III_\sigma := |\sigma| = 216$

b) $\sigma_p := \text{eigenvals}(\sigma) = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$n_p := \text{eigenvecs}(\sigma) = \begin{pmatrix} -0.707 & 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $n_p^{\,T}\cdot\sigma\cdot n_p = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

d) $I_{\sigma pd} := \sigma_{p_1} + \sigma_{p_2} + \sigma_{p_3} = 20$

Victor E. Saouma
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$II_{\sigma pd} := \sigma_{p_1}\cdot\sigma_{p_2} + \sigma_{p_2}\cdot\sigma_{p_3} + \sigma_{p_3}\cdot\sigma_{p_1} = 123$$

$$III_{\sigma pd} := \sigma_{p_1}\cdot\sigma_{p_2}\cdot\sigma_{p_3} = 216$$

e) $\sigma_{mean} := \frac{I_{\sigma pd}}{3} = 6.667$

$$\sigma_{sperical} := \begin{pmatrix} \sigma_{mean} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{mean} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{mean} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 \\ 0 & 0 & 6.667 \end{pmatrix}$$

f) $$\sigma_{deviator} := \sigma - \sigma_{sperical} = \begin{pmatrix} -0.667 & -3 & 0 \\ -3 & -0.667 & 0 \\ 0 & 0 & 1.333 \end{pmatrix}$$

2.5 Stress Transformation

Show that the transformation tensor of direction cosines for the stress tensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

transforms the original stress tensor into the diaganol principal axes stress tensor

Solution:

$$n_{pd} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\sigma} := n_{pd}\cdot\sigma\cdot n_{pd}^{T} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रारूप प्रक्रिया

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.6 Stress Transformation 2

The octahedral plane is the plane which makes equal angles with the principal stress directions. Show that the shear stress on this plane, the so-called octahedral shear stress, is given by

$$\sigma_{oct}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(\sigma_I-\sigma_{II})^2+(\sigma_{II}-\sigma_{III})^2+(\sigma_{III}-\sigma_I)^2}$$

Solution:

$$v := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$n := \left(\frac{v}{|v|}\right)^T = (0.577 \quad 0.577 \quad 0.577)$$

$$\sigma(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \begin{pmatrix}\sigma_I & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{II} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{III}\end{pmatrix}$$

$$t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := n\cdot\sigma(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) \rightarrow (0.577\cdot\sigma_I \quad 0.577\cdot\sigma_{II} \quad 0.577\cdot\sigma_{III})$$

$$tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := n\cdot t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})^T \rightarrow 0.333\cdot\sigma_I + 0.333\cdot\sigma_{II} + 0.333\cdot\sigma_{III}$$

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \sqrt{t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})\cdot t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})^T - tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})\cdot tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})}$$

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) \text{ simplify } \rightarrow \sqrt{0.222\cdot\sigma_I^2 - 0.222\cdot\sigma_I\cdot\sigma_{II} - 0.222\cdot\sigma_I\cdot\sigma_{III} + 0.222\cdot\sigma_{II}^2 - 0.222\cdot\sigma_{II}\cdot\sigma_{III} + 0.222\cdot\sigma_{III}^2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) - \sigma_{oct}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) = 0$

2.7 Strain Invariants & Principal Strains

Determine the planes of principal strains for the following strain tensor

$$E := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:

The strain invariants are given by

$$I_E = E_{ii} = 2$$

$$II_E = \frac{1}{2}\cdot\left(E_{ij}\cdot E_{ij} - E_{ii}\cdot E_{jj}\right) = -1 + 3 = 2$$

$$III_E = \left|E_{ij}\right| = -3$$

The principal strains by

$$E_{ij} - \lambda\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\left(\lambda - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$E_1 = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = 2.3$$

$$E_2 = \lambda_2 = 1$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रारूप प्रति

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$E_3 = \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} = -1.3$$

The eigenvectors for $E_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ give the principal directions n^1

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1+\sqrt{13}}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-\frac{1+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1,1} \\ n_{2,1} \\ n_{3,1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -n_{1,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{2,1} \\ -n_{2,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,1} \\ -n_{3,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -n_{1,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{2,1} \\ -n_{2,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,1} \\ -n_{3,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_{1,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot n_{2,1}$$

$$n_{3,1} = 0$$

$$n^1 \cdot n^1 = 1$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{13}+13}{12}+1\right)\cdot\left(n_{2,1}\right)^2 = 1$$

$$n_{2,1} = 0.6$$

$$n_{1,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot n_{2,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot 0.6 = 0.8$$

$$n^1 = (0.8 \quad 0.6 \quad 0)$$

For the second eigenvector λ_2=1

$$\begin{pmatrix} 1-1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1,2} \\ n_{2,2} \\ n_{3,2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3}\cdot n_{2,2} \\ -\left(n_{2,2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रारूप पूर्वावलोकन

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}\cdot n_{2,2} \\ -(n_{2,2}) + \sqrt{3}\cdot n_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n^2 = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Finally, the third eigenvector can be obtained by the same manner, but more easily from

$$n^3 = n^1 \times n^2 = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.6e_1 - 0.8e_2$$

Therefore

$$a_i^j = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} \qquad a := \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a\cdot E\cdot a^T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3 \end{pmatrix}$$

2.8 Equilibrium Equations

In the absence of body forces, does the following stress distribution

$$T(x,\nu) = \begin{bmatrix} (x_2)^2 + \nu\left[(x_1)^2 - (x_2)^2\right] & -2\cdot\nu\cdot x_1\cdot x_2 & 0 \\ -2\nu\cdot x_1\cdot x_2 & (x_1)^2 + \nu\left[(x_2)^2 - (x_1)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & \nu\left[(x_1)^2 + (x_2)^2\right] \end{bmatrix}$$

where v is a constant, satisfy equilibrium?

Solution:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}T_{1j} = \frac{\partial}{\partial x_1}T_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{12} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{13} = 2\cdot\nu\cdot x_1 - 2\cdot\nu\cdot x_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}T_{2j} = \frac{\partial}{\partial x_1}T_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{22} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{23} = -2\cdot\nu\cdot x_2 + 2\cdot\nu\cdot x_2 = 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रारूप

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{3j} = \frac{\partial}{\partial x_1} T_{31} + \frac{\partial}{\partial x_2} T_{32} + \frac{\partial}{\partial x_3} T_{33} = 0$$

Therefore, equilibrium is satisfied.

2.9 Stress-Strain

Determine the stress tensor at a point where the Lagrangian strain tensor is given by

$$E := \begin{pmatrix} 30 & 50 & 20 \\ 50 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & 30 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

and the material is steel with $\lambda := 119.2\text{GPa}$ and $\mu := 79.2\text{GPa}$

Solution:

$$C := \begin{pmatrix} \lambda + 2\cdot\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\cdot\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\cdot\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 277.6\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 119.2\cdot\text{GPa} & 277.6\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 119.2\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 277.6\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} \end{pmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\gamma := \begin{pmatrix} E_{1,1} \\ E_{2,2} \\ E_{3,3} \\ E_{1,2} \\ E_{1,3} \\ E_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 10^{-5} \\ 4 \times 10^{-5} \\ 3 \times 10^{-5} \\ 5 \times 10^{-5} \\ 2 \times 10^{-5} \\ 0 \times 10^{0} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\sigma} := C \cdot \gamma = \begin{pmatrix} 0.01667 \\ 0.01826 \\ 0.01667 \\ 0.00792 \\ 0.00317 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{GPa}$$

2.10 Stress-Strain

Determine the stress tensor at a point where the Cauchy stress tensor is given by

$$\underset{\sim}{\sigma} := \begin{pmatrix} 100 & 42 & 6 \\ 42 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot \text{MPa}$$

with $\underset{\sim}{E} := 207\text{GPa}$, $\underset{\sim}{\mu} := 79.2\text{GPa}$, and $\nu := 0.3$

Solution:

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{207 \cdot GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.001}{GPa} & \frac{1}{207 \cdot GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.001}{GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & \frac{1}{207 \cdot GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} \end{pmatrix}$$

$$s := \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} \\ \sigma_{2,2} \\ \sigma_{3,3} \\ \sigma_{1,2} \\ \sigma_{1,3} \\ \sigma_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -2 \\ 15 \\ 42 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

$$\gamma := S \cdot s = \begin{pmatrix} 4.643 \times 10^{-4} \\ -1.763 \times 10^{-4} \\ -6.957 \times 10^{-5} \\ 5.303 \times 10^{-4} \\ 7.576 \times 10^{-5} \\ 0 \times 10^{0} \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} \gamma_1 & \frac{\gamma_4}{2} & \frac{\gamma_5}{2} \\ \frac{\gamma_4}{2} & \gamma_2 & \frac{\gamma_6}{2} \\ \frac{\gamma_5}{2} & \frac{\gamma_6}{2} & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.643 \times 10^{-4} & 2.652 \times 10^{-4} & 3.788 \times 10^{-5} \\ 2.652 \times 10^{-4} & -1.763 \times 10^{-4} & 0 \times 10^{0} \\ 3.788 \times 10^{-5} & 0 \times 10^{0} & -6.957 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3.1 Displacement by Double Integration

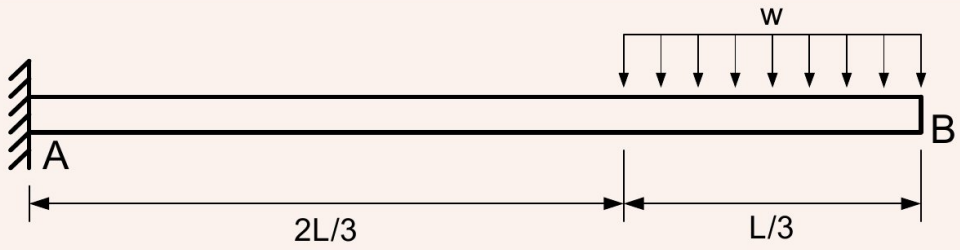
Determine the deflection at B for the following cantilevered beam.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

मसौदा प्रति

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

At $0 \le x \le \frac{2L}{3}$

1. Moment Equation

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = M_x = \frac{w\cdot L}{3}\cdot x - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2$$

2. Integrate Once

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial}{\partial x}y = \frac{w\cdot L}{6}\cdot x^2 - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2\cdot x + C_1$$

However we have at x=0, dy/dx=0, C_1=0

3. Integrate Twice

$$E\cdot I\cdot y = \frac{w\cdot L}{18}\cdot x^3 - \frac{5\cdot w\cdot L^2}{36}\cdot x^2 + C_2$$

Again we have at x=0, y=0, C_2=0

At $\frac{2L}{3} \le x \le L$

1. Moment Equation

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = M_x = \frac{w\cdot L}{3}\cdot x - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2 - w\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)\cdot\left(\frac{x - \frac{2L}{3}}{2}\right)$$

2. Integrate Once

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial}{\partial x}y = \frac{w\cdot L}{6}\cdot x^2 - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2\cdot x - \frac{w}{6}\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)^3 + C_3$$

Applying the boundary condition at $x = \frac{2L}{3}$, we must have $\frac{dy}{dx}$ equal to the value coming frmo the left C_3=0

3. Integrate Twice

$$E\cdot I\cdot y = \frac{w\cdot L}{18}\cdot x^3 - \frac{5\cdot w\cdot L^2}{36}\cdot x^2 - \frac{w}{24}\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)^4 + C_4$$

Again following the same argument as above, C_4=0

Substituting for x=L we obtain

$$y = \frac{163}{1944}\cdot\frac{wL^4}{E\cdot I}$$

4.1 Live Load Reduction

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

A four storey office building has interior columns spaced 30ft apart in the two directions. If the flat roof loading is 50 lb/ft^2, determine the reduced live load supported by a typical interior column located on the ground level

Solution:

$L_0 := 50psf$

$A_T := 30ft \cdot 30ft = 900 \cdot ft^2$

$K_{LL} := 4$

$L_{floor}(L_0, A_T, K_{LL}) := L_0 \cdot \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{K_{LL} \cdot A_T}}\right) \cdot psf$

$L_{floor} := L_{floor}\left(\frac{L_0}{psf}, \frac{A_T}{ft^2}, K_{LL}\right) = 25 \cdot psf$

$Reduction := \frac{L_{floor}}{L_0} = 50 \cdot \%$

$L_{roof} := 0.6 \cdot L_0 = 30 \cdot psf$

$F_1 := \left(3 \cdot L_{floor} \cdot A_T + L_{roof} \cdot A_T\right) = 94.5 \cdot kip$

Note that without reduction the total load woul dhave been

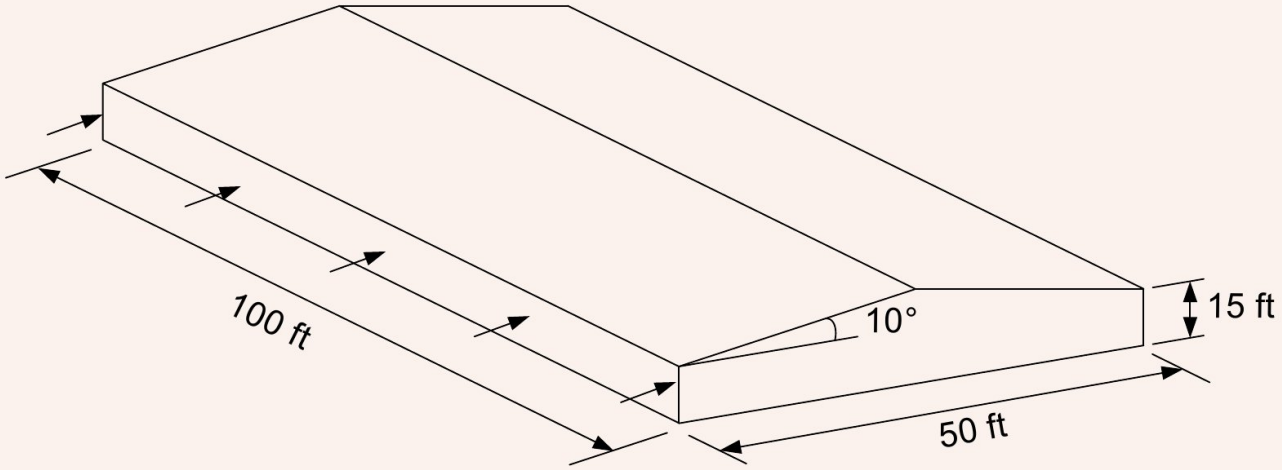
$F_2 := 4 \cdot L_0 \cdot A_T = 180 \cdot kip$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.2 Wind Load

Wind blows on the side of the fully enclosed agricultural building located on open flat terrain in Oklahoma. Determine the external pressure acting on the roof. Also, what is the internal pressure in the building which acts on the roof? Use linear interpolation to determine q_h and C_p.



Solution:

$$q_z\left(K_z, K_{Zt}, K_d, V, I\right) := 0.00256 \cdot K_z \cdot K_{Zt} \cdot K_d \cdot V^2 \cdot I \cdot psf$$

$K_{Zt} := 1$

$K_d := 1$

$V := 90mph$

$I := 0.87$

$$q_z\left(K_z, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) \rightarrow 18.04 \cdot K_z \cdot psf$$

$K_{z15} := 0.85$

$$q_{z15} := q_z\left(K_{z15}, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) = 15.334 \cdot psf$$

$K_{z20} := 0.9$

$$q_{z20} := q_z\left(K_{z20}, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) = 16.236 \cdot psf$$

$$h := 15ft + \frac{1}{2} \cdot 25ft \cdot \tan(10deg) = 17.204 \cdot ft$$

$$\frac{q_h - q_{z15}}{h - 15ft} = \frac{q_{z20} - q_{z15}}{20ft - 15ft}$$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$q_h := \left(\frac{q_{z20} - q_{z15}}{20ft - 15ft}\right)\cdot(h - 15ft) + q_{z15}$$

$$q_h = 15.732\cdot psf$$

External pressure on windward side of roof

$$p(q_h, G, C_p) := q_h\cdot G\cdot C_p\cdot psf$$

$$G := 0.85$$

$$L := 50ft$$

$$\frac{h}{L} = 0.344$$

$$\frac{-0.9 - -0.7}{0.5 - 0.25} = \frac{-0.9 - C_p}{0.5 - \frac{h}{L}}$$

$$C_p := -0.9 - \frac{-0.9 - -0.7}{0.5 - 0.25}\cdot\left(0.5 - \frac{h}{L}\right)$$

$$C_p = -0.775$$

$$p_{Windward} := p\left(\frac{q_h}{psf}, G, C_p\right) = -10.367\cdot psf$$

External pressure on leeward side of roof

$$\frac{-0.5 - -0.3}{0.5 - 0.25} = \frac{-0.5 - C_p}{0.5 - \frac{h}{L}}$$

$$C_p := -0.5 - \frac{-0.5 - -0.3}{0.5 - 0.25}\cdot\left(0.5 - \frac{h}{L}\right)$$

$$C_p = -0.375$$

$$p_{Leeward} := p\left(\frac{q_h}{psf}, G, C_p\right) = -5.018\cdot psf$$

Internal pressure

$$p_{int}(q_h, G, C_{pi}) := -q_h\cdot G\cdot C_{pi}$$

$$C_{pi1} := 0.18$$

$$C_{pi2} := -0.18$$

$$p_{int1} := p_{int}(q_h, G, C_{pi1}) = -2.407\cdot psf$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

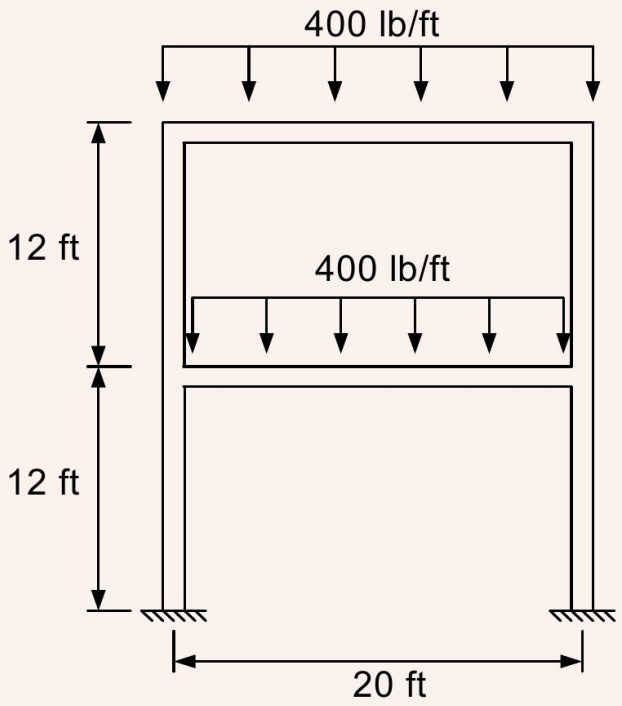
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$p_{int2} := p_{int}(q_h, G, C_{pi2}) = 2.407 \cdot psf$

4.3 Earthquake Load on a Frame

Determine the approximate earthquake forces for the ductile hospital frame structure shown below. The dead load for each floor is $DL := 200 \frac{lbf}{ft}$ and the live load is $LL := 400 \frac{lbf}{ft}$. The structure is built on soft clay. Use DL+0.5LL as the weight of each floor. The building is in seismic zone 3.



Solution:

1. The fundamental period of vibration is

$$T(C_t, h_n) := C_t \cdot h_n^{\frac{3}{4}} \cdot sec$$

$C_t := 0.03$

$h := 24ft$

$T := T\left(C_t, \frac{h}{ft}\right) = 0.325\ s$

2. The C coefficient is

$$C(S,T) := \frac{1.25 \cdot S}{T^{\frac{2}{3}}}$$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$S := 2.0$

$C := C\left(S, \frac{T}{sec}\right) = 5.286 > 2.75$

Use $C := 2.75$

3. The other coefficients are $Z := 0.3,\ I := 1.25,\ R_W := 12$

4. Check

$$\frac{C}{R_W} = \frac{2.75}{12} = 0.23 > 0.075 \quad \text{OK!}$$

5. The total vertical load is

$L := 20ft$ frame width

$W := 2 \cdot (DL + 0.5 \cdot LL) \cdot L = 16000 \cdot lbf$

6. The total seismic base shear is

$$V := \frac{Z \cdot I \cdot C}{R_W} \cdot W = 1375 \cdot lbf$$

7. Since T < 0.7sec, there is no whiplash
8. The toal load on each floor is given by

$h_1 := 12ft$

$h_2 := 24ft$

$$F_2 := \frac{V \cdot h_2}{h_1 + h_2} = 916.7 \cdot lbf$$

$$F_1 := \frac{V \cdot h_1}{h_1 + h_2} = 458.3 \cdot lbf$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.4 Earthquake Load on a Tall Building

Determine the approximate critical lateral loading for a 25 storey, ductile, rigid space frame concrete structure in the short direction. The rigid frames are spaced 25 ft apart in the cross section and 20 ft in the longitudinal direction. The plan dimension of the building is 175x100 ft, and the structure is 25(12ft)=300 ft high. This office building is located in an urban environment with a wind velocity of $V := 70\text{mph}$ and in seismic zone 4. For this investigation, an average building total dead load of $DL := 192\text{psf}$ is used. Soil conditions are unknown.

Solution:

1. The total building weight is

$L := 100\text{ft}$

$B := 175\text{ft}$

$W := DL \cdot L \cdot B \cdot 25 = 84000 \cdot \text{kip}$

2. The fundamental period of vibration for a rigid frame is

$$T(C_t, h_n) := C_t \cdot h_n^{\frac{3}{4}} \cdot \text{sec}$$

$C_t := 0.03$

$h := 25 \cdot 12\text{ft} = 300 \cdot \text{ft}$

$T := T\left(C_t, \frac{h}{\text{ft}}\right) = 2.16\,\text{s}$ > 0.7s OK!

3. The C coefficient is

$$C(S, T) := \frac{1.25 \cdot S}{T^{\frac{2}{3}}}$$

$S := 1.5$

$C := C\left(S, \frac{T}{\text{sec}}\right) = 1.12$ < 2.75

4. The other coefficients are $Z := 0.4$, $I := 1$, $R_W := 12$

5. Check

$$\frac{C}{R_W} = \frac{1.12}{12} = 0.093 > 0.075 \text{ OK!}$$

6. The total seismic base shear along the critical short direction is

$$V := \frac{Z \cdot I \cdot C}{R_W} \cdot W = 3139 \cdot \text{kip}$$

7. Since T > 0.7sec, the whiplash effect must be considered

$$F_t := 0.07 \cdot \frac{T}{\text{sec}} \cdot V = 475 \cdot \text{kip}$$

Hence the total triangular load is

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$F_{tot} := V - F_t = 2664 \cdot kip$

8. Let us check if wind load governs. From table xx we conservatively assume a uniform wind pressure of 29 psf resulting in a total lateral force of

$p := 29psf$

$P_w := p \cdot h \cdot B = 1522.5 \cdot kip$ < 3108 kip

The magnitude of the total seismic load is clearly larger than the totoal wind force

4.5 Hydrostatic Load

The basement of a building is 12 ft below grade. Ground water is located 9 ft below grade. What thickness concrete slab is required to exactly balance the hydrostatic uplift?

Solution:

The hydrostatic pressure must be countered by the pressure caused by the weight of the concrete. Since p=γh we equate the two pressures and solve for h, the height of the concrete slab.

$h := 12ft$

$h_{water} := 9ft$

$d := h - h_{water} = 3 \cdot ft$

$\gamma_{water} := 62.4 \frac{lbf}{ft^2}$

$\gamma_{concrete} := 150 \frac{lbf}{ft^2}$

$\gamma_{water} \cdot d = \gamma_{concrete} \cdot h$

$h := \frac{\gamma_{water} \cdot d}{\gamma_{concrete}} = 15 \cdot in$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.6 Thermal Expansion/Stress

A low-rise building is enclosed along one side by a 100 ft-long clay masonry ($\alpha := 3.6\cdot10^{-6}\frac{in}{in\cdot\Delta°F}$, $E := 2400000psi$)bearing wall.

The structure was built at a temperature of $T := 60\Delta°F$ and is located in the northern part of the United States where the temperature range is between $T_{low} := -20\cdot\Delta°F$ and $T_{high} := 120\cdot\Delta°F$.

Solution:

1. Assume that the wall can move freely with no restraint from cross-walls and foundations. The wall expansion and contraction (summer and winter) are given by

$$\Delta L = \alpha\cdot\Delta T\cdot L$$

$$\Delta L_{Summer} := \alpha\cdot(T_{high} - T)\cdot 100ft = 0.26\cdot in$$

$$\Delta L_{Winter} := \alpha\cdot(T_{low} - T)\cdot 100ft = -0.35\cdot in$$

2. We now assume (conservatively) that the free movement cannot occur (ΔL=0) hence the resulting stress would be equal to

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = E\cdot\frac{\Delta L}{L} = E\cdot\frac{\alpha\cdot\Delta T\cdot L}{L} = E\cdot\alpha\cdot\Delta T$$

$$\sigma = E\cdot\alpha\cdot\Delta T$$

$$\sigma_{Summer} := E\cdot\alpha\cdot(T_{high} - T) = 518\cdot psi$$

$$\sigma_{Winter} := E\cdot\alpha\cdot(T_{low} - T) = -691\cdot psi$$

Note the tensile stress being beyond the masonry capacity. Cracking will occur.

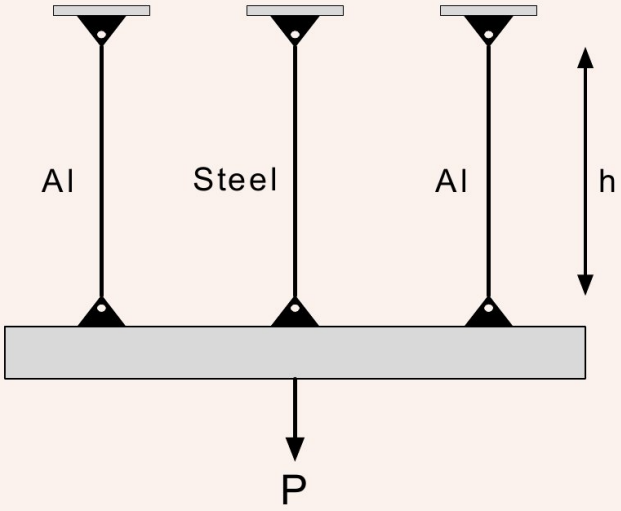
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.1 Statically Indeterminate Cable Structures

A rigid plate is supported by two aluminum cables and a steel one. Determine the force in each cable.



If the rigid plate supports a load P, determine the stress in each of the three cables.

Solution:

1. We have three unknowns and only two independent equations of equilibrium. Hence the problem is statically indeterminate to the first degree.

$$\sum M_z = 0 \quad P_{Al}^{left} = P_{Al}^{right}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 2P_{Al} + P_{St} = P$$

Thus we effectively have two unknowns and one equation

2. We need to have a third equation to solve for the three unknowns. This will be derived from the compatability of the displacements in all three cables i.e. all three displacements must be equal:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

displacements in all three cables for all three displacements must be equal.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Combine to obtain

$$\Delta L = \frac{PL}{AE}$$

$$\frac{P_{Al}\cdot L}{E_{Al}\cdot A_{Al}} = \frac{P_{St}\cdot L}{E_{St}\cdot A_{St}} \quad \frac{P_{Al}}{P_{St}} = \frac{(EA)_{Al}}{(EA)_{St}}$$

or $-(EA)_{St}\cdot P_{Al} + (EA)_{Al}\cdot P_{St} = 0$

3. Solution of this system of two equations with two unknowns yield:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cdot(EA)_{Al} + (EA)_{St}} \cdot \begin{bmatrix} (EA)_{Al} & -1 \\ (EA)_{St} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

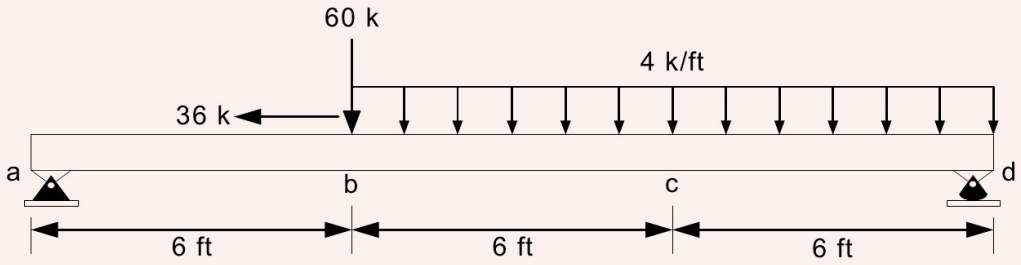
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.2 Simply Supported Beam

Determine the reactions of the simply supported beam shown below.



The beam has 3 reactions. We have 3 equations of static equilibrium. Hence it is statically determinate.

Solution:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\sum F_x = 0 \quad R_{ax} - 36\text{kip} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_{ay} + R_{dy} - 60\text{kip} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$\sum M_z^{\,c} = 0 \quad 12\cdot R_{ay} - 6\cdot R_{dy} - 60\text{kip}\cdot 6\text{ft} = 0$$

or

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36\text{kip} \\ 108\text{kip} \\ 360\text{kip} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36\text{kip} \\ 56\text{kip} \\ 52\text{kip} \end{pmatrix}$$

Alternatively we could have used another set of equations:

$$\sum M_z^{\,a} = 0 \quad 60\text{kip}\cdot 6\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 12\text{ft} - R_{dy}\cdot 18\text{ft} = 0 \quad R_{dy} = 52\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,d} = 0 \quad R_{ay}\cdot 18\text{ft} - 60\text{kip}\cdot 12\text{ft} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 12\text{ft} = 0 \quad R_{ay} = 56\text{kip}$$

Check:

$$\sum F_y = 0 \quad 56\text{kip} + 52\text{kip} - 60\text{kip} - 48\text{kip} = -0\cdot\text{kip}$$

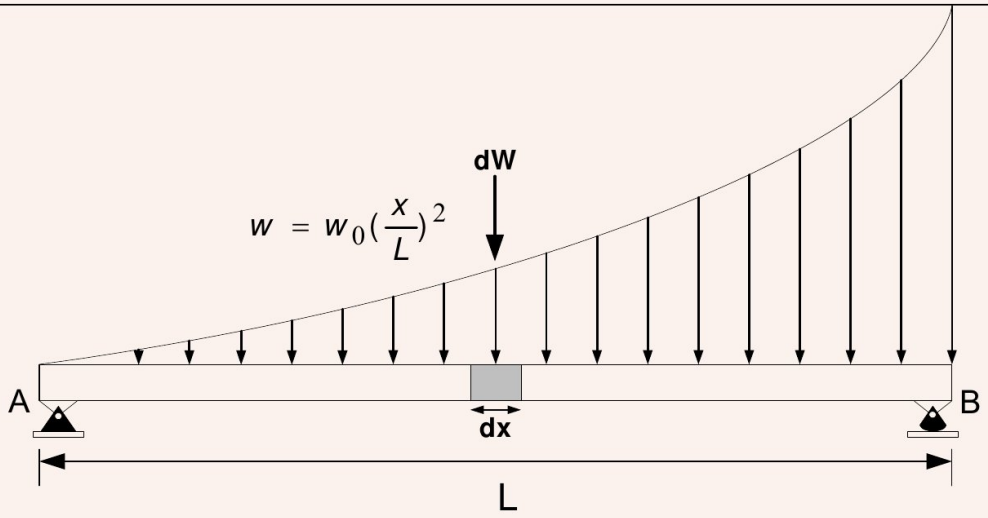
5.3 Parabolic Load

Determine the reactions of the simply supported beam of length L subjected to a parabolic load $w = w_0\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

Since there are no axial forces, there are two unknowns and two equations of equilibrium. We have two equations of equilibrium ($\sum F_y$ and $\sum M$), we judiciously start with the second one, as it would directly give us the reaction at B. Considering an infinitesimal element of length dx, weight dW, an moment dM:

$$\sum M_z{}^A = 0 \qquad \int_{x=0}^{x=L} w_0 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \times x - R_B \cdot L = 0$$

$$R_B = \frac{1}{L} \cdot w_0 \cdot \left(\frac{L^4}{4L^2}\right) = \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L$$

With R_B determined, we solve for R_A from

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L - \int_{x=0}^{x=L} w_0 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

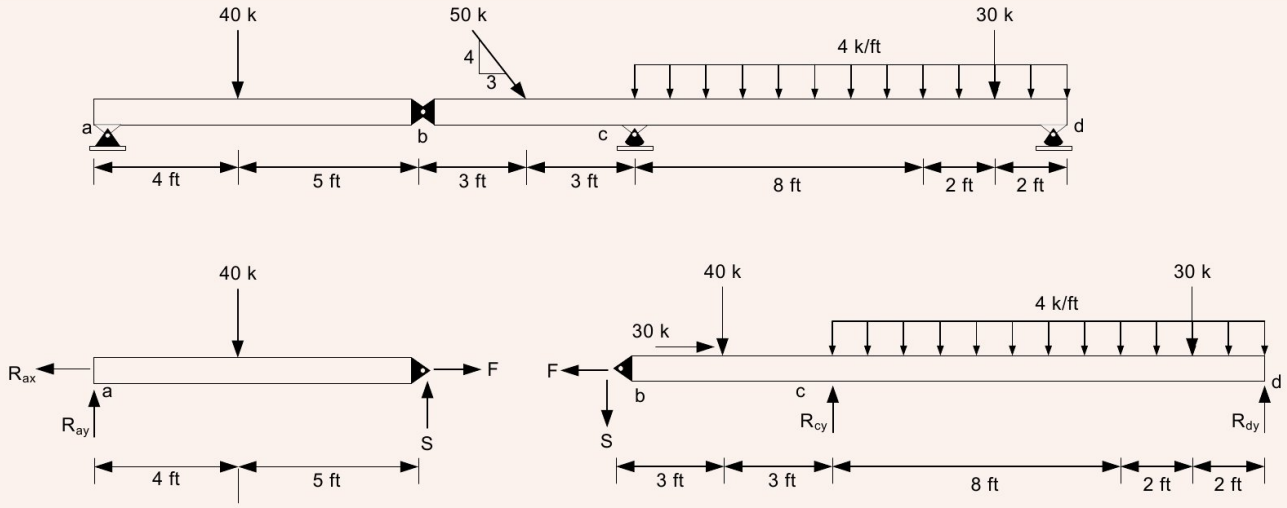
$$R_A = \frac{w_0}{L^2} \cdot \frac{L^3}{3} - \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L = \frac{1}{12} \cdot w_0 \cdot L$$

5.4 Three Span Beam

Determine the reactions of the following three span beam

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

We have 4 unknowns (R_{ax},R_{ay},R_{cy}, and R_{dy}), three equations of equilibrium and one equation of condition ($\sum M_b = 0$), thus the structure is statically determinate. Though there are many approaches to solve for those four unknowns (all of them correct), a few are simpler to pursue. In this case, it is easiest to "break" the structure into substructures and examine the free body diagram of each one of them separately.

1. Isolating ab:

$$\sum M_z^{\,b} = 0 \qquad 9\text{ft}\cdot R_{ay} - 40\text{kip}\cdot 5\text{ft} = 0 \qquad R_{ay} := \frac{40\text{kip}\cdot 5\text{ft}}{9\text{ft}} = 22.2\cdot\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,a} = 0 \qquad 40\text{kip}\cdot 4\text{ft} - S\cdot 9\text{ft} = 0 \qquad S := \frac{40\text{kip}\cdot 4\text{ft}}{9\text{ft}} = 17.8\cdot\text{kip}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{ax} := 30\text{kip}$$

2. Isolating bd:

$$\sum M_z^{\,d} = 0 \qquad -S\cdot 18\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 15\text{ft} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} - 30\text{kip}\cdot 2\text{ft} + R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{cy} := \frac{S\cdot 18\text{ft} + 40\text{kip}\cdot 15\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 2\text{ft}}{12\text{ft}} = 105.7\cdot\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,c} = 0 \qquad -S\cdot 6\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 3\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 10\text{ft} - R_{dy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{dy} := \frac{-S\cdot 6\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 3\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{12\text{ft}} = 30.1\cdot\text{kip}$$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. Check

$$\sum F_y = 0 \qquad R_{ay} - 40\text{kip} - 40\text{kip} + R_{cy} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft} - 30\text{kip} + R_{dy} = -0\cdot\text{kip} \qquad \text{OK!}$$

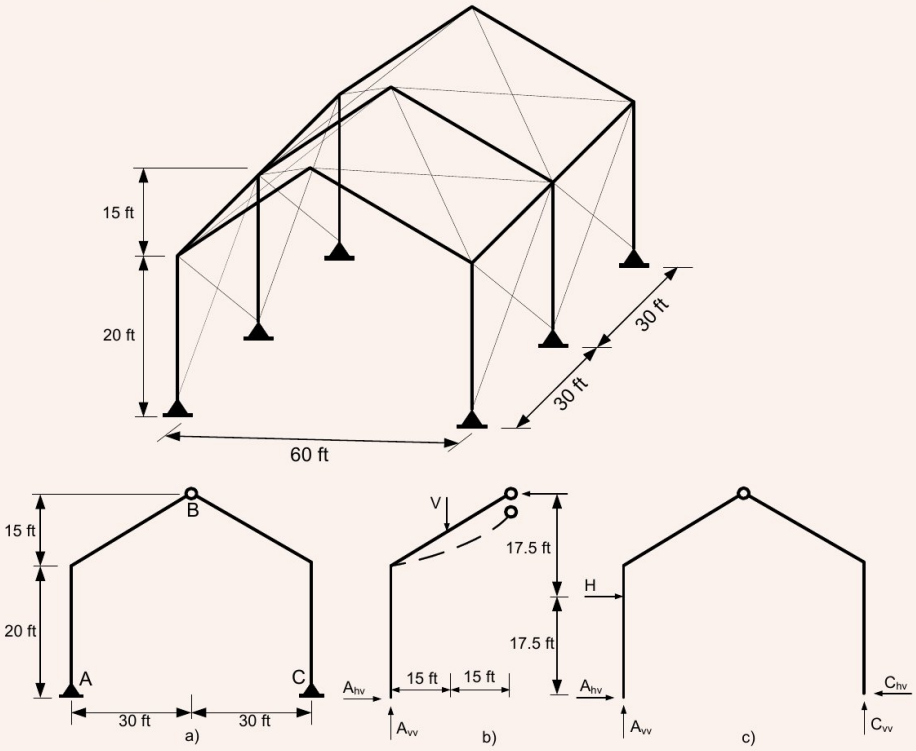
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.5 Three Hinged Gable Frame

The three-hinged gable frames are spaced at 30 ft on center. Determine the reactions components on the frame due to: 1) Roof dead load of 20 psf of roof area; 2) Snow load of 30 psf of horizontal projection; 3) Wind load of 15 psf of vertical projection. Determine the critical design values for the horizontal and vertical reactions.



Solution:

1. Due to smmetry, there is no vertical force transmitted by the hinge for snow and dead load, and thus we can consider only the left (or right) side of the frame.
2. Point equivalent loads:
   a) Roof dead load per one side of frame is

$$DL := 20psf \cdot 30ft \cdot \sqrt{(30ft)^2 + (15ft)^2} = 20.12 \cdot kip$$

   b) Snow load per one side of frame is

$$SL := 30psf \cdot 30ft \cdot 30ft = 27 \cdot kip$$

   c) Wind load per per frame (ignoring the suction) is

$$WL := 15psf \cdot 30ft \cdot 35ft = 15.75 \cdot kip$$

3. There are 4 reactions, 3 equations of equilibrium and one equation of condition; therefore, statically determinate. Alternatively, by symmetry there is no shear at the hinge, and we would have for the substructure two reactions at the support and one (horizontal) at the hinge.
4. The relationship between the horizontal and vertical reactions at A due to a centered vertical load, A_{hv} and A_{vv} respectively is determined by taking the moment with respect to the hinge (b):

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum M_z^B = 0 \qquad 15 \cdot V - 30 \cdot A_{vv} + 35 \cdot A_{hv} = 0$

$\sum F_y = 0 \qquad A_{vv} - V = 0$

$A_{hv} = \frac{15 A_{vv}}{35}$

Substituting for roof dead and snow load we obtain:

$A_{vvDL} := DL = 20.12 \cdot kip \qquad B_{vvDL} := A_{vvDL} = 20.12 \cdot kip$

$A_{hvDL} := \frac{15 A_{vvDL}}{35} = 8.62 \cdot kip \qquad B_{hvDL} := A_{hvDL} = 8.62 \cdot kip$

$A_{vvSL} := SL = 27 \cdot kip \qquad B_{vvSL} := A_{vvSL} = 27 \cdot kip$

$A_{hvSL} := \frac{15 A_{vvSL}}{35} = 11.57 \cdot kip \qquad B_{hvSL} := A_{hvSL} = 11.57 \cdot kip$

5. The reactions due to wind load (blowing from left) are determined as follows:
   a) Vertical reaction at A is determined by considering the entire structure and taking the moment with respect to C (c)

$\sum M_z^C = 0 \qquad 15.75 kip \cdot \left(\frac{20ft + 15ft}{2} \right) - 60ft \cdot A_{vh} = 0$

$A_{vh} := \frac{WL \cdot \left(\frac{20ft + 15ft}{2} \right)}{60ft} = 4.59 \cdot kip$

A_{vh} is the vertical reaction at A due to the horizontal load, and from equilibrium of forces in the y-direction, we have

$C_{vh} := -A_{vh} = -4.59 \cdot kip$

(note that wind load does not have any vertical component)

   b) The horizontal reaction at B is determined by considering the right substructure and taking the moment with respect to the internal hinge at B

$\sum M_z^B = 0 \qquad 35ft \cdot C_{hh} - C_{vh} \cdot 30ft = 0$

$C_{hh} := \frac{C_{vh} \cdot 30ft}{35ft} = -3.94 \cdot kip$

   c) Horizontal reactino at A is taken by considering the entire structure and summing forces in the x-direction

$\sum F_x = 0 \qquad WL + C_{hh} - A_{hh} = 0$

$A_{hh} := WL + C_{hh} = 11.81 \cdot kip$

   and note that A carries most of the horizontal load.

6. Finally, the supports should be designed for the most critical (plausible) combination of reactions

$H := A_{hvDL} + A_{hvSL} + A_{hh} = 32.01 \cdot kip$

$V := A_{vvDL} + A_{vvSL} + A_{vh} = 51.72 \cdot kip$

Victor E. Saouma

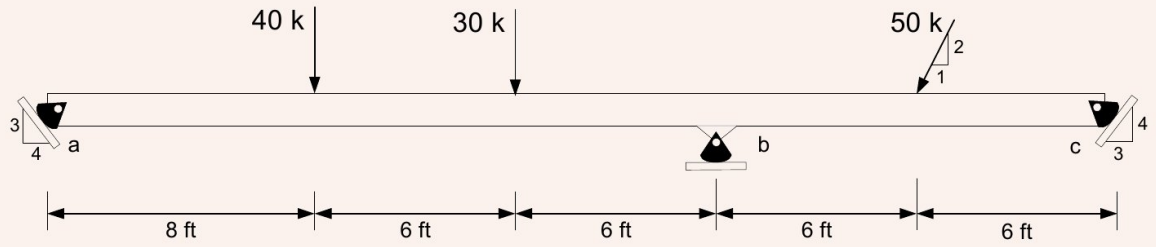
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.6 Inclined Supports

Determine the reactions of the following two span beam resting on inclined supports.



Solution:

A priori we would identify 5 reactions; however, we do have 2 equations of condition (one at each inclined support), thus with three equations of equilibrium, we have a statically determinate system.

$$\sum M_z^{\,b} = 0 \qquad R_{ay}\cdot 20\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 12\text{ft} - 30\text{kip}\cdot 6\text{ft} + 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 6\text{ft} - R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{ay}\cdot 20\text{ft} - R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 40\text{kip}\cdot 12\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 6\text{ft} - 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 6\text{ft}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \frac{3}{4}R_{ay} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) - \frac{4}{3}\cdot R_{cy} = 0$$

$$R_{cy} = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}R_{ay} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\right) = \frac{9}{16}\cdot R_{ay} - 16.77\text{kip}$$

$$\frac{9}{16}\cdot R_{ay} - R_{cy} = 16.77\text{kip}$$

Solving for those two equations:

$$\begin{pmatrix} 20 & -12 \\ \frac{9}{16} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 391.672\ \text{kip} \\ 16.77\text{kip} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 14.37\text{kip} \\ -8.69\text{kip} \end{pmatrix}$$

The horizontal components of the reactions at a and c are

$$R_{ax} := \frac{3}{4}\cdot R_{ay} = 10.78\cdot\text{kip}$$

$$R_{cx} := -\frac{4}{3}\cdot R_{cy} = 11.59\cdot\text{kip}$$

Finally, we solve for R...

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Finally, we solve for R_{by}

$$\sum M_z^{a} = 0 \qquad 40kip\cdot 8ft + 30kip\cdot 14ft - R_{by}\cdot 20ft + 50kip\cdot \sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 26ft - R_{cy}\cdot 32ft = 0$$

$$R_{by} := \frac{40kip\cdot 8ft + 30kip\cdot 14ft + 50kip\cdot \sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 26ft - R_{cy}\cdot 32ft}{20ft} = 109.04\cdot kip$$

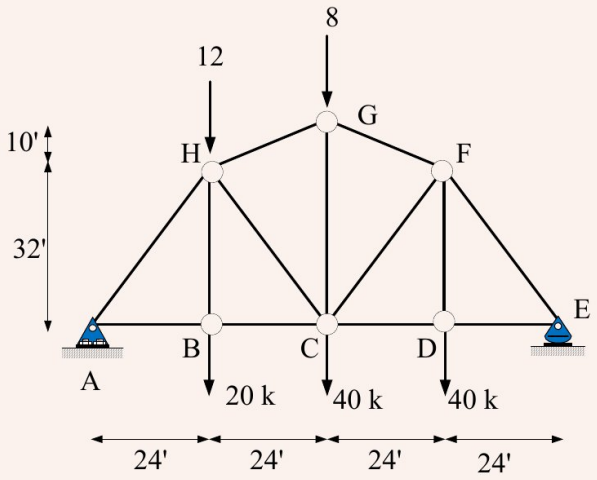
We check our results

$$\sum F_y = 0 \qquad R_{ay} - 40kip - 30kip - 50kip\cdot \sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) + R_{by} + R_{cy} = 0\cdot kip \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{ax} - 50kip\cdot \cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) + R_{cx} = 0\cdot kip \quad \text{OK!}$$

7.1 Truss Method of Joints

Using the method of joints, analyze the following truss



Solution:

1. R=3, m=13, 2j=16, and m+R=2j
2. We compute the reactions

$$\sum M_z^{E} = 0 \qquad (20kip + 12kip)\cdot 72ft + (40kip + 8kip)\cdot 48ft + 40kip\cdot 24ft - R_{Ay}\cdot 96ft = 0$$

$$R_{Ay} := \frac{(20kip + 12kip)\cdot 72ft + (40kip + 8kip)\cdot 48ft + 40kip\cdot 24ft}{96ft}$$

$$\boxed{R_{Ay} = 58\cdot kip}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad 20kip + 12kip + 40kip + 8kip + 40kip - R_{Ay} - R_{Ey} = 0$$

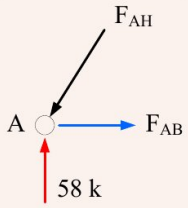
$$R_{Ey} := 20kip + 12kip + 40kip + 8kip + 40kip - R_{Ay}$$

$$\boxed{R_{Ey} = 62\cdot kip}$$

3. Consider each joint separately:
   Node A: Clearly AH is under compression and AB is under tension

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



$\sum F_y = 0$ $\quad -F_{AHy} + R_{Ay} = 0$

$F_{AHy} := -R_{Ay} = -58 \cdot kip$

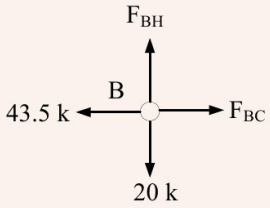
$L_y := 32ft \qquad L_x := 24ft \qquad L := \sqrt{L_y^2 + L_x^2} = 40 \cdot ft$

$F_{AH} := \frac{L}{L_y} \cdot F_{AHy} = -72.5 \cdot kip$ Compression

$\sum F_x = 0$ $\quad -F_{AHx} + F_{AB} = 0$

$F_{AB} := \frac{L_x}{L_y} \cdot R_{Ay} = 43.5 \cdot kip$ Tension

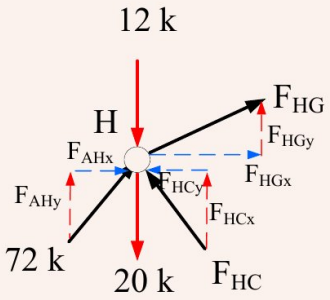
Node B:



$\sum F_x = 0$ $\quad \boxed{F_{BC} := 43.5kip}$ Tension

$\sum F_y = 0$ $\quad \boxed{F_{BH} := 20kip}$ Tension

Node H:



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0$ $\quad F_{AHx} - F_{HCx} - F_{HGx} = 0$

$$43.5\text{kip} - \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} \cdot F_{HC} - \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \cdot F_{HG} = 0$$

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{AHy} + F_{HCy} - 12\text{kip} - F_{HGy} - 20\text{kip} = 0$:

$$58\text{kip} + \frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} \cdot F_{HC} - \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \cdot F_{HG} - 12\text{kip} - 20\text{kip} = 0$$

This can be most conveniently written as

$$\begin{bmatrix} \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \\ -\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43.5\text{kip} \\ 26\text{kip} \end{pmatrix}$$

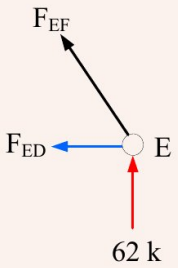
Solving we obtain

$$\begin{pmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \\ -\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 43.5\text{kip} \\ 26\text{kip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.5 \\ 52 \end{pmatrix} \cdot \text{kip}$$

$\boxed{F_{HC} = -7.5 \cdot \text{kip}}$ Compression

$\boxed{F_{HG} = 52 \cdot \text{kip}}$ Tension

Node E:



$\sum F_y = 0$ $\quad F_{EFy} := 62\text{kip}$

$$\boxed{F_{EF} := \frac{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}}{32\text{ft}} \cdot 62\text{kip} = 77.5 \cdot \text{kip}} \text{Compression}$$

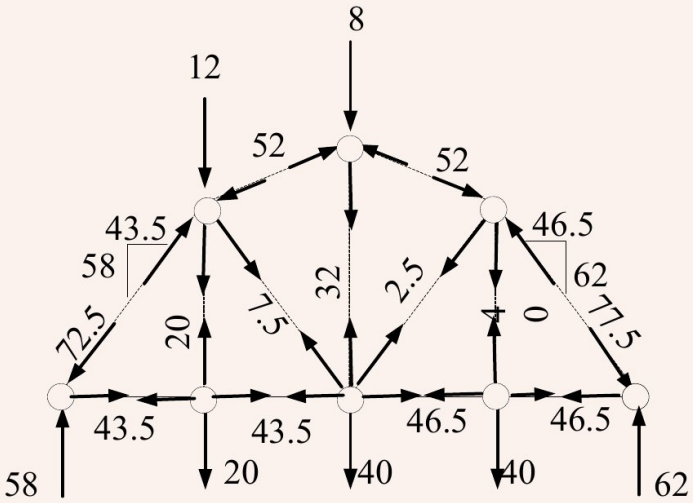
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0$ $F_{ED} = F_{EFx}$:

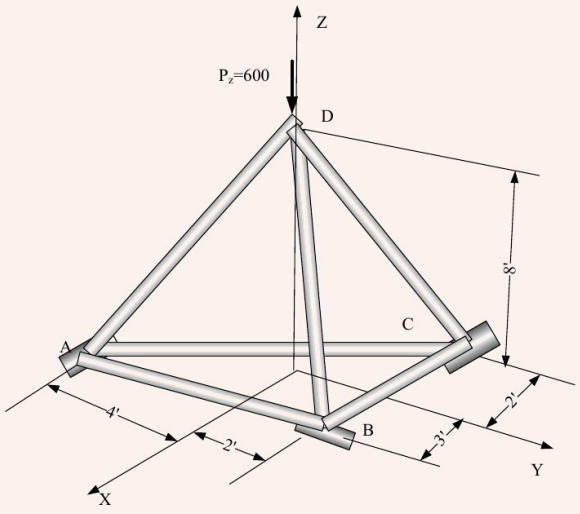
$$F_{ED} := 24\frac{ft}{32ft}\cdot 62kip = 46.5\cdot kip$$ Tension

The results of the analysis are summarized below



4. We would check our calculations by verifying equilibrium of forces at a node not previously used, such as *D*.

7.2 3D Truss



Solution:

1. Consider the free body diagram of the entire truss

$\sum M_{AB} = 0$ $C_z\cdot 5ft - 600\cdot 3ft = 0$ $C_z := \frac{600\cdot 3ft}{5ft}$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$C_z = 360$

$\sum M_{CB} = 0$ $\quad 600 \cdot 2\text{ft} - A_z \cdot 6\text{ft} = 0$ $\quad A_z := \frac{600 \cdot 2\text{ft}}{6\text{ft}}$

$A_z = 200$

$\sum F_z = 0$ $\quad B_z + 200 + 360 - 600 = 0$ $\quad B_z := 600 - 200 - 360$

$B_z = 40$

$\sum F_x = 0$ $\quad B_x := 0$

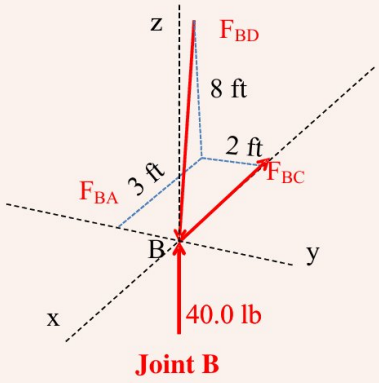
$\sum F_y = 0$ $\quad A_y - C_y = 0$

$\sum M_z = 0$ $\quad A_y \cdot 3\text{ft} + C_y \cdot 2\text{ft} = 0$ $\quad A_y = C_y = 0$

$A_y := 0$

$C_y := 0$

2. Consider the free body diagram of joint B



Joint B

$L_{BD} := \sqrt{(2\text{ft})^2 + (3\text{ft})^2 + (8\text{ft})^2} = 8.775 \cdot \text{ft}$

$\sum F_z = 0$ $\quad \frac{-8\text{ft}}{L_{BD}} \cdot F_{BD} + 40 = 0$

$F_{BD} := 40 \cdot \frac{-L_{BD}}{8\text{ft}} = -43.875$ Compression

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

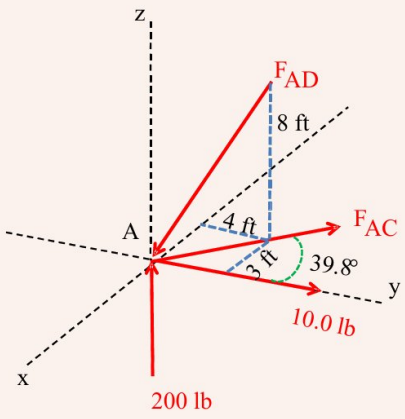
$\sum F_x = 0$ $\quad F_{BDx} - F_{BC} = 0$

$$F_{BDx} := \frac{-3\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 15$$ Tension

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{BDy} - F_{BA} = 0$

$$F_{BDy} := \frac{-2\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 10$$ Tension

3. FBD of joint A



$$L_{AD} := \sqrt{(8\,ft)^2 + (3\,ft)^2 + (4\,ft)^2} = 9.434\,ft$$

$\sum F_z = 0$ $\quad \frac{-8\,ft}{L_{AD}} \cdot F_{AD} + 200 = 0$

$$F_{AD} := 200 \cdot \frac{-L_{AD}}{8\,ft} = -235.85$$ Compression

$\sum F_x = 0$ $\quad F_{ADx} - F_{ACx} = 0$

$$\tan(\alpha) = \frac{5\,ft}{6\,ft} \qquad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{5}{6}\right) = 39.8\,deg$$

$$\frac{3\,ft}{L_{AD}} \cdot F_{AD} - F_{AC} \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$F_{AC} := \frac{\frac{3\,ft}{L_{AD}} \cdot -F_{AD}}{\sin(39.8\,deg)} = 117.2$$ Tension

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

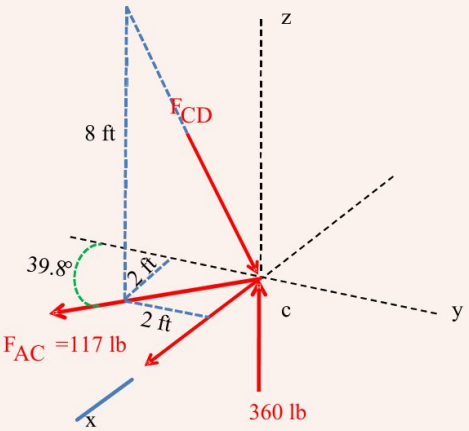
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_y = 0 \qquad F_{BDy} - F_{BA} = 0$

$\tan(\alpha) = \frac{5\,ft}{6\,ft} \qquad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{5}{6}\right) = 39.8 \cdot deg$

$F_{BA} := \frac{-2\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 10$ Tension

5. Joint C



$L_{CD} := \sqrt{(8\,ft)^2 + (2\,ft)^2 + (2\,ft)^2} = 8.485 \cdot ft$

$\sum F_z = 0 \qquad F_{CDz} + 360 = 0 \qquad \frac{-8\,ft}{L_{CD}} \cdot F_{CD} + 360 = 0$

$F_{CD} := -360 \cdot \frac{-L_{CD}}{-8\,ft} = -381.8$ Compression

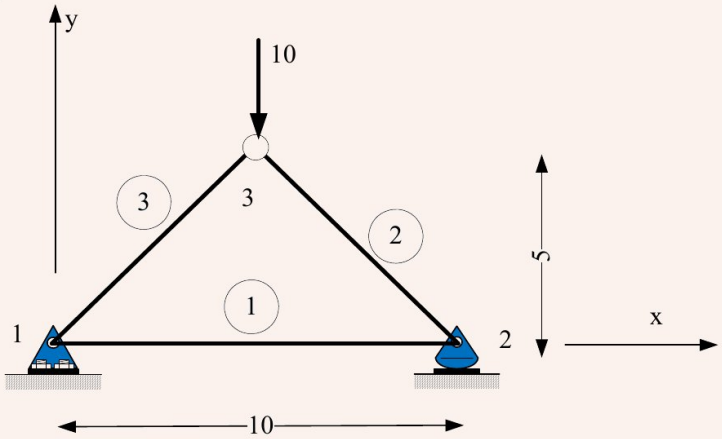
7.3 Truss I, Matrix Method

Determine all member forces for the following truss

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. We first determine the direction cosines

Member 1 (Nodes 1-2)

Node1: $\alpha_{11} := 1$ $\beta_{11} := 0$ Node2: $\alpha_{21} := -1$ $\beta_{21} := 0$

Member 2 (Nodes 2-3)

Node2: $\alpha_{22} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ $\beta_{22} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ Node3: $\alpha_{32} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ $\beta_{32} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$

Member 3 (Nodes 3-1)

Node2: $\alpha_{33} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ $\beta_{33} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ Node3: $\alpha_{31} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ $\beta_{31} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

2. Next we write the equations of equilibrium

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & 0 & \beta_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = 0$$

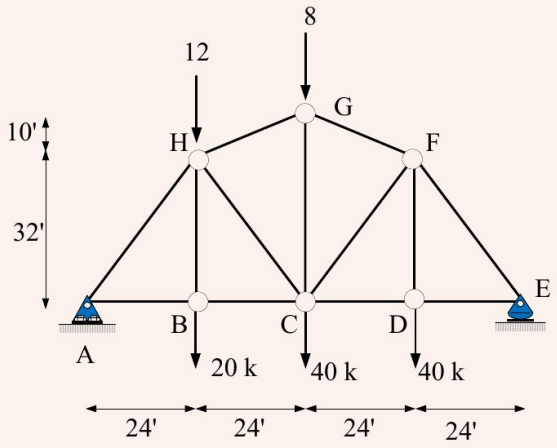
$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & 0 & \beta_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7.071 \\ -7.071 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

7.4 Truss II, Matrix Method

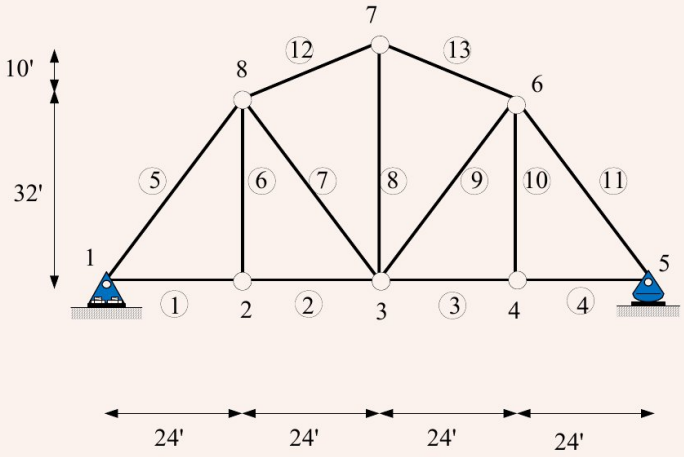
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Set up the statics matrix for the truss shown below



Solution:



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. We first determine the direction cosines

$$\frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} = 0.6$$

$$\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} = 0.8$$

$$\frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} = 0.385$$

$$\frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} = 0.923$$

2. Next we write the equations of equilibrium

2. Next we write the equations of equilibrium

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & -0.923 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.923 & 0.923 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.385 & -0.385 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.923 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{5y}
\end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ -12
\end{pmatrix}
= 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

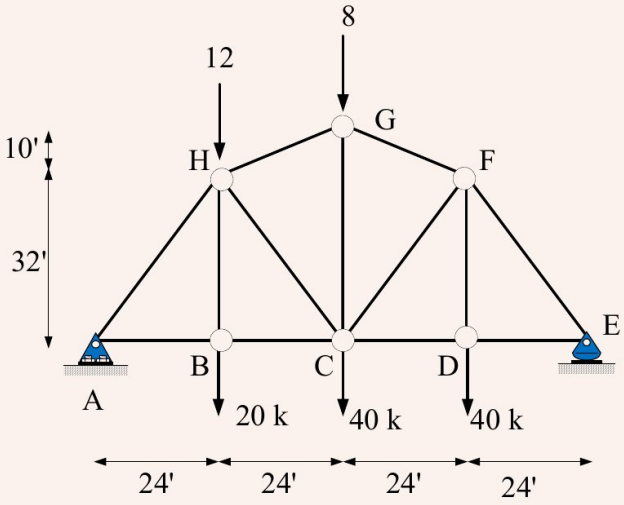
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{5y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & -0.923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.923 & 0.923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.385 & -0.385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.923 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} =$$

	1
1	43.5
2	43.5
3	46.5
4	46.5
5	-72.5
6	20
7	7.479
8	32.033
9	2.479
10	40
11	-77.5
12	-51.991
13	-51.991
14	0
15	58
16	62

7.5 Truss, Method of Sections

Determine F_{BC} and F_{HG} in the truss below



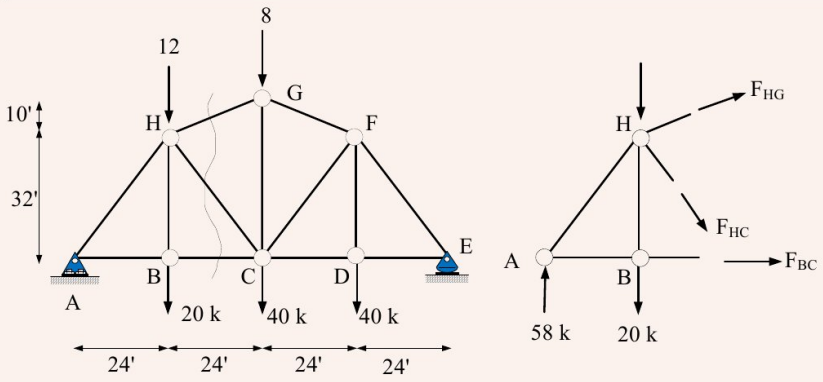
Solution:

Cutting through members HG, HC, and BC, we first take the summation of forces with respect to H:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



$\sum M_z^H = 0$ $\quad R_{Ay} \cdot 24\text{ft} - F_{BC} \cdot 32\text{ft} = 0$

$R_{Ay} := 58\text{kip}$ (From previous example)

$F_{BC} := \frac{24\text{ft}}{32\text{ft}} \cdot R_{Ay} = 43.5 \cdot \text{kip}$ Tension

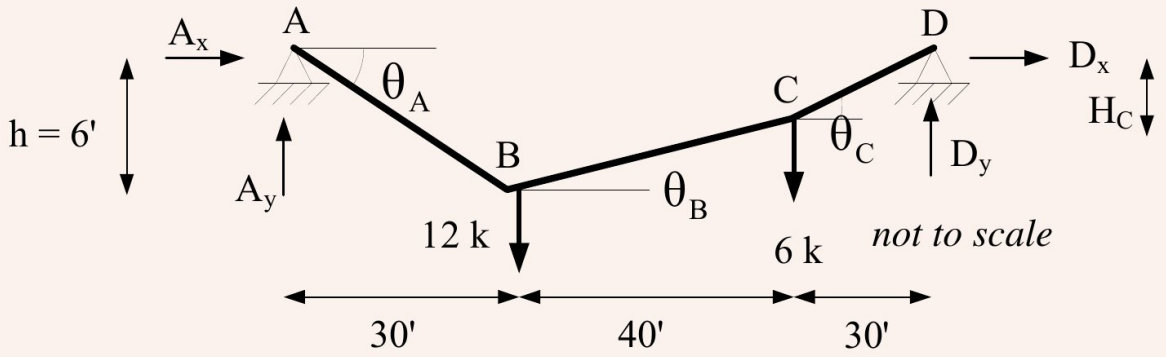
$\sum M_z^C = 0$ $\quad 58\text{kip} \cdot 48\text{ft} - (20\text{kip} + 12\text{kip}) \cdot 24\text{ft} - F_{HGx} \cdot 32\text{ft} - F_{HGy} \cdot 24\text{ft} = 0$

$$58\text{kip} \cdot 48\text{ft} - (20\text{kip} + 12\text{kip}) \cdot 24\text{ft} - 32\text{ft} \cdot F_{HG} \cdot \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} - 24\text{ft} \cdot F_{HG} \cdot \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} = 0$$

$F_{HG} := 52\text{kip}$ Compression

8.1 Funicular Cable Structures

Determine the reactions and the tensions for the cable structure shown below



Solution:

We have 4 external reactions, however the horizontal ones are equal and we can use any one of a number of equations of conditions in additiona to the three equations of equilibrium. First, we solve for the vertical reactions A_y, D_y and then for the horizontal ones (which are equal and opposite ($|H| = A_x = -D_x$). For this problem we could use the following 3 equations of static equilibrium $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M = 0$, however since we do not have any force in the x direction, the first equation is of no avail. Instead, we will consider the following set $\Sigma F_{..} = \Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$. Alternatively, we can consider the problem as one with 8

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

unknowns (A_x, A_y, D_x, D_y, θ_A, θ_B, θ_C, and h_C), to be solved through the 2 equations of equilibrium expressed at each of the four points of interesect.

1. Solve for D_y

$$\sum M_z^{A} = 0 \qquad 12\text{kip}\cdot 30\text{ft} + 6\text{kip}\cdot 70\text{ft} - D_y\cdot 100\text{ft} = 0$$

$$D_y := \frac{12\text{kip}\cdot 30\text{ft} + 6\text{kip}\cdot 70\text{ft}}{100\text{ft}} = 7.8\cdot\text{kip}$$

2. Solve for A_y

$$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 12\text{kip} - 6\text{kip} + D_y = 0$$

$$A_y := 12\text{kip} + 6\text{kip} - D_y = 10.2\cdot\text{kip}$$

3. Solve for the horizontal force by isolating the free body diagram AB

$$\sum M_z^{B} = 0 \qquad A_y\cdot 30\text{ft} - H\cdot 6\text{ft} = 0$$

$$H := \frac{A_y\cdot 30\text{ft}}{6\text{ft}} = 51\cdot\text{kip}$$

4. Solve for the sag at point C by isolating the free body diagram CD

$$\sum M_z^{C} = 0 \qquad -D_y\cdot 30\text{ft} + H\cdot h_c = 0$$

$$h_c := \frac{30\text{ft}\,D_y}{H} = 4.6\cdot\text{ft}$$

5. Solve for the cable internal forces or tractions in this case

$$\tan(\theta_A) = \frac{6\text{ft}}{30\text{ft}} \qquad \theta_A := \operatorname{atan}\left(\frac{6\text{ft}}{30\text{ft}}\right) = 11.31\cdot\text{deg}$$

$$T_{AB} := \frac{H}{\cos(\theta_A)} = 52.01\cdot\text{kip}$$

$$\tan(\theta_B) = \frac{6\text{ft} - h_c}{40\text{ft}} \qquad \theta_B := \operatorname{atan}\left(\frac{6\text{ft} - h_c}{40\text{ft}}\right) = 2.02\cdot\text{deg}$$

$$T_{BC} := \frac{H}{\cos(\theta_B)} = 51.03\cdot\text{kip}$$

$$\tan(\theta_C) = \frac{h_c}{30\text{ft}} \qquad \theta_C := \operatorname{atan}\left(\frac{h_c}{30\text{ft}}\right) = 8.7\cdot\text{deg}$$

$$T_{CD} := \frac{H}{\cos(\theta_C)} = 51.59\cdot\text{kip}$$

Victor E. Saouma

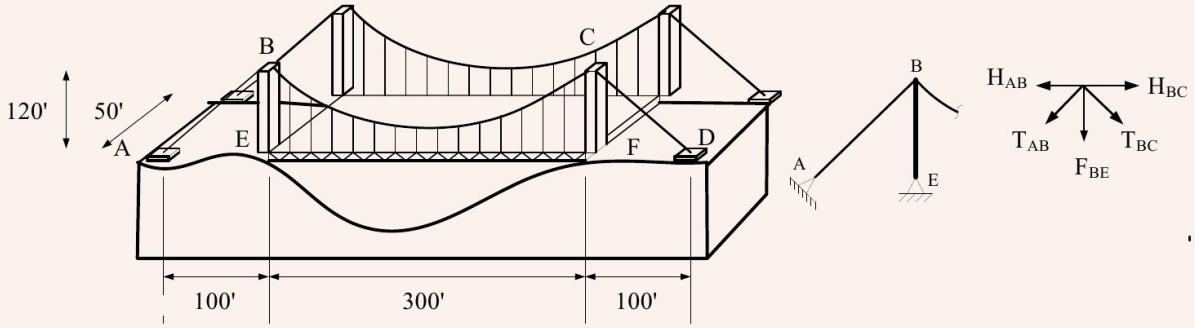
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

8.2 Design of Suspension Bridge

Design the following 4 lane suspension bridge by selecting the cable diameters assuming an allowable cable strength of $\sigma_{all} := 190ksi.$. The bases of the tower are hinged in order to avoid large bending moments. The total dead load is estimated at 200 psf. Assume a sag to span ratio of 1/5.



Solution:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. The dead load is carried by each cable with one half the total deal load or $p_1 := \frac{1}{2}\cdot 200\text{psf}\cdot 50\text{ft} = 5\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$
2. Using the HS 20 truck (or its distributed equivalent load of 0.64kip/ft per lane), the uniform additional load per cable is

   $p_2 := 2\cdot 0.64\,\frac{\text{kip}}{\text{ft}} = 1.28\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$

   Thus the total design load is

   $p := p_1 + p_2 = 6.28\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$
3. The thrust H is determined by

   $L := 300\text{ft}$

   $h := 60\text{ft}$

   $H := \frac{p\cdot L^2}{8\cdot h} = 1177.5\cdot\text{kip}$
4. The maximum tension is

   $r := \frac{1}{5}$ sag to span ratio

   $T_{max} := H\cdot\sqrt{1 + 16r^2} = 1508\cdot\text{kip}$
5. Note that if we used the approximate formula we woul dhave obtained

   $T_{maxApp} := H\cdot\left(1 + 8\cdot r^2\right) = 1554.3\cdot\text{kip}$
6. The required cross sectional area of the cable along the main span should be equal to

   $A := \frac{T_{max}}{\sigma_{all}} = 7.94\cdot\text{in}^2$

   which corresponds to a diameter

   $d := \sqrt{\frac{4\cdot A}{\pi}} = 3.18\cdot\text{in}$
7. We seek to determine the cable force in AB. Since the pylon cannot take any horizontal force, we should have the horizontal component of T_{max} equal and opposite to the horizontal component of T_{AB} or

   $T_{AB} := H\cdot\frac{\sqrt{(100\text{ft})^2 + (120\text{ft})^2}}{100\text{ft}} = 1839\cdot\text{kip}$

   The cable area should be

   $A := \frac{T_{AB}}{\sigma_{all}} = 9.68\cdot\text{in}^2$

   which corresponds to a diameter

   $d := \sqrt{\frac{4\cdot A}{\pi}} = 3.51\cdot\text{in}$
8. To determine the vertical load acting on the pylon, we must add the vertical components of T_{max} and T_{AB} (V_{BC} and V_{AB} respectively). We can determine V_{BC} from H and T_{max}, thus

   $P := \frac{120\text{ft}}{100\text{ft}}\cdot H + \sqrt{T_{max}^2 - H^2} = 2355\cdot\text{kip}$

   Using A36 steel with an allowable stress of $\sigma_{A36} := 21\text{ksi}$, the cross sectional area of the tower should be

   $A := \frac{P}{\sigma_{A36}} = 112\cdot\text{in}^2$

   Note that buckling of such a tower might govern the final dimensions

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

9. If the cables were to be anchored to a concrete block, the volume of the block shoul dbe at least equal to

$$V := \frac{\frac{120\,ft}{100\,ft}\cdot H}{150\,\frac{lbf}{ft^3}} = 9420\cdot ft^3$$

10.1 Simple Shear and Moment Diagram

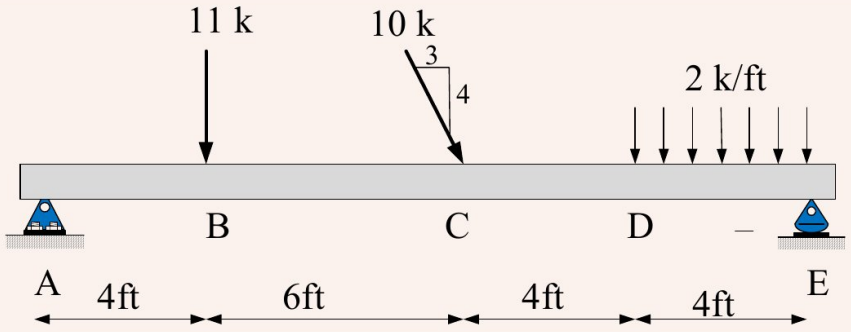
Draw the shear and moment diagram for the beam shown below.

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

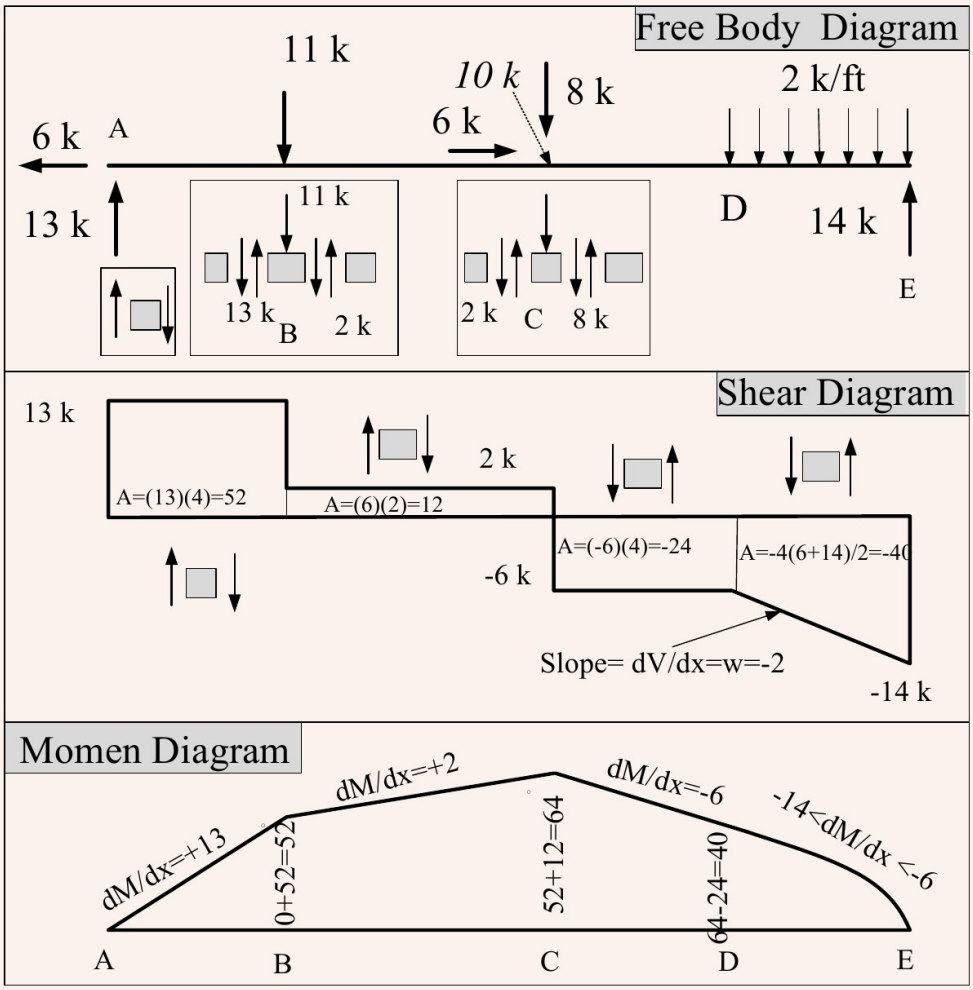
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

The free body diagram is drawn below



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

J.0.0 Identicon

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Reactions are determined from the equilibrium equations

$\sum F_x = 0 \qquad -A_x + 6kip = 0 \qquad A_x := 6kip$

$\sum M_A = 0 \qquad 11kip\cdot 4ft + 10kip\cdot\frac{3}{5}\cdot 10ft + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft\cdot 16ft - E_y\cdot 18ft = 0$

$$E_y := \frac{11kip\cdot 4ft + 10kip\cdot\frac{4}{5}\cdot 10ft + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft\cdot 16ft}{18ft} = 14\cdot kip$$

$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 11kip - 10kip\cdot\frac{4}{5} - 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft + E_y = 0$

$$A_y := 11kip + 8kip + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft - E_y = 13\cdot kip$$

Shear are determined next

1. At A the shear is equal to the reaction and is positive.
2. At B the shear drops (negative load) by 11 k to 2 k
3. At C it drops again by 8 k to -6 k
4. It stays constant up to D and then it decreases (constant negative slope since the load is uniform and negative) by 2 k per linear foot up to -14 k
5. As a check, -14 k is also the reaction previously determined at E.

Moment is determined last

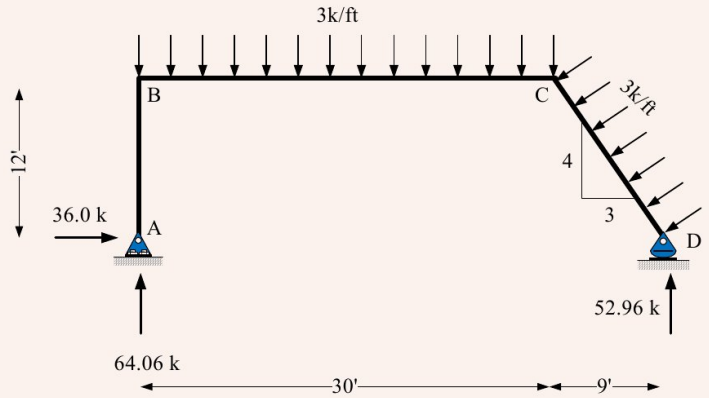
1. The moment at A is zero (hinge support)
2. The change in moment between A and B is equal to the area under the corresponding shear diagram, or
   $\Delta M_{BA} := 13kip\cdot 4ft = 52\cdot kip\cdot ft$
3. Changes between other points are determined the same by taking the area under the shear diagram

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

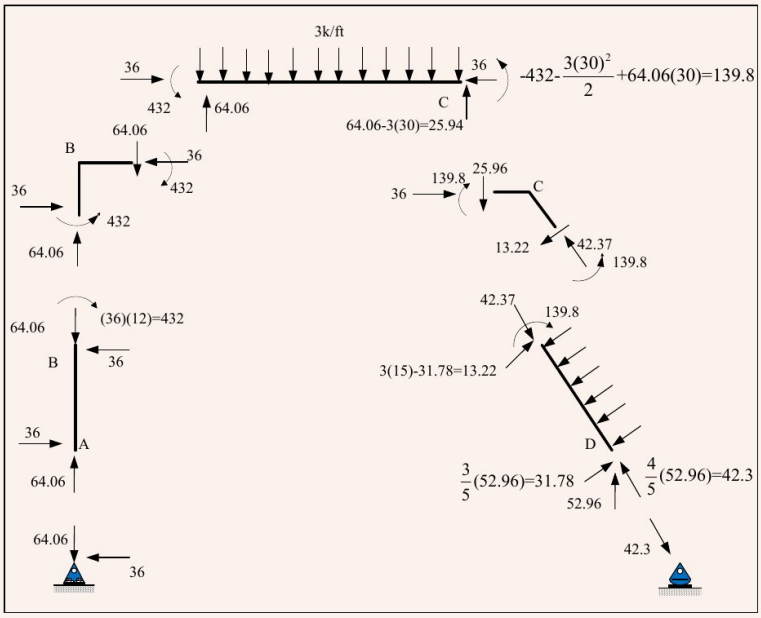
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

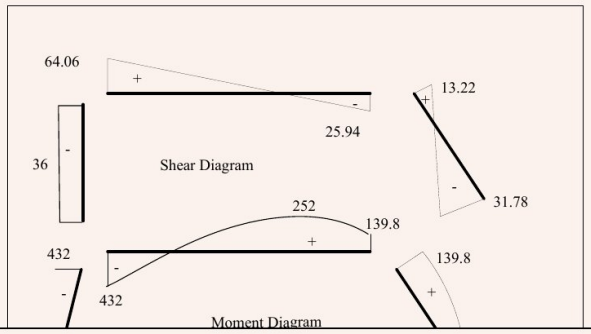
10.2 Frame Shear and Moment Diagram

Draw the shear and moment diagram of the following frame



Solution:

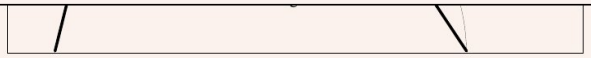




संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Reactions are determined first

$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ax} - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft = 0 \qquad R_{Ax} := \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft = 36\cdot kip$

$\sum M_A = 0 \qquad 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft\cdot 15ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 34.5ft - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 6ft - R_{Dy}\cdot 39ft = 0$

$$R_{Dy} := \frac{3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft\cdot 15ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 34.5ft - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 6ft}{39ft} = 52.96\cdot kip$$

$\sum F_y = 0 \qquad R_{Ay} - 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft - \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft + R_{Dy} = 0$

$R_{Ay} := 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft - R_{Dy} = 64.04\cdot kip$

We isolate each member and draw its free body diagram for each force component.

Shear

1. For A-B the shear is constant, equal to the horizontal reaction at A and negative according to our previously defined sign convention, $V_A := -36kip$
2. For member B-C at B, the shear must be equal to the vertical force which was transmitted along A-B, and which is equal to the vertical reaction at A, $V_B := R_{Ay} = 64.04\cdot kip$
3. Since B-C is subjected to a uniform load, the shear along B-C will have a slope equal to -3 and in terms of x (measured from B to C) is equal to
   $V_{BC}(x) := R_{Ay} - 3x$
4. The shear along C-D is obtained by decomposing the vertical reaction at D into axial and shear components. Thus, at D the shear is equal to $\frac{3}{5}\cdot R_{Dy} = 31.78\cdot kip$ and is negative. Based on our sign convention for the load, the slope of the shear must be equal to -3 along C-D. Thus the shear at point C is such that $V_c - \frac{5}{3}\cdot 9ft\cdot 3\,\frac{kip}{ft} = -\frac{3}{5}\cdot R_{Dy}$ or
   $V_c := \frac{5}{3}\cdot 9ft\cdot 3\,\frac{kip}{ft} - \frac{3}{5}\cdot R_{Dy} = 13.22\cdot kip$. The equation for shear is given by (for x going from C to D)
   $V_{CD}(x) := V_c - 3x$

Moment

1. Along A-B, the moment is zero at A (since we have a hinge) and its slope is equal to the shear, thus at B the moment is equal to $-36kip\cdot 12ft = -432\cdot kip\cdot ft$
2. Along B-C, the moment is equal todx

$$M_{BC} = M_B + \int_0^x V_{BC}(x)\,dx = -432kip\cdot ft + \int_0^x \left(R_{Ay} - 3x\right)dx = -432kip\cdot ft + R_{Ay}\cdot x - \frac{3x^2}{2}$$

which is a parabola. Substituting for x=30, we obtain at node C:

$$M_C := -432kip\cdot ft + R_{Ay}\cdot 30ft - \frac{3\,\frac{kip}{ft}\cdot (30ft)^2}{2} = 139.2\cdot kip\cdot ft$$

dM_{BC}

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. If we need to determine the maximum moment along B-C, we know that $\frac{dV_{BC}}{dx} = 0$ at the point where where V_{BC}=0,

that is $V_{BC}(x) = R_{Ay} - 3x = 0, x_{max} := \frac{R_{Ay}}{3\frac{kip}{ft}} = 21.3 \cdot ft$. In other words, the maximum moment occurs where the shear is

zero. Thus

$$M_{BCmax} := -432kip \cdot ft + R_{Ay} \cdot x_{max} - \frac{3\frac{kip}{ft} \cdot (x_{max})^2}{2} = 251.5 \cdot kip \cdot ft$$

4. Finally, along C-D the moment varies quadratically (since we had a linear shear), the moment first increases (positive shear), and then decreases (negative shear). The moment along C-D is given by

$M_{CD} = M_C + \int_0^x V_{CD}(x)\,dx = M_C + \int_0^x (V_c - 3x)\,dx = M_C + V_c \cdot x - \frac{3x^2}{2}$ which is a parabola. Substituting for x =15ft, we obtain at node D

$$M_D := M_C + V_c \cdot 15ft - 3\frac{\frac{kip}{ft} \cdot (15ft)^2}{2} = -0 \cdot kip \cdot ft \quad \text{OK!}$$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

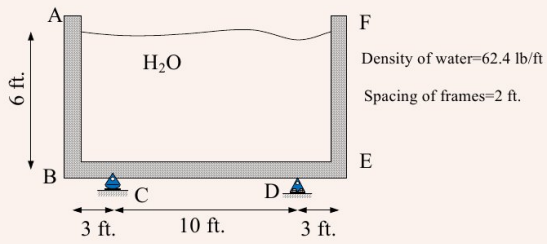
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

10.3 Frame Shear and Moment Diagram: Hydrostatic Load

The frame shown below is the structural support of a flume. Assuming that the frames are spaced 2 ft apart along the length of the flume,

1. Determine all internal member end actions
2. Draw the shear and moment diagrams
3. Locate and compute maximum internal bending moments
4. If this is a reinforced concrete frame, show the location of reinforcement

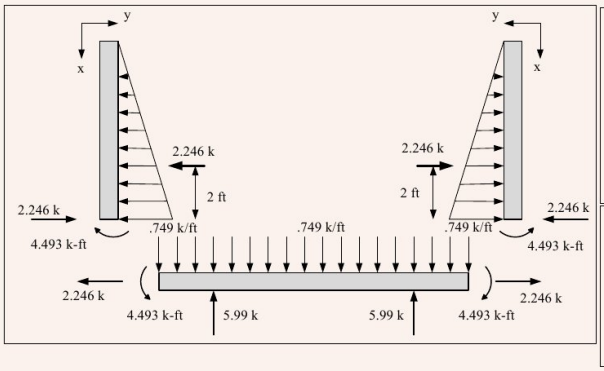


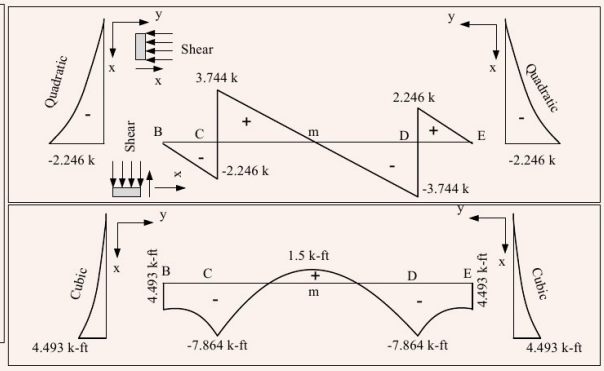
Solution:

The hydrostatic pressure causes lateral forces on the vertical members which can be treated as cantilevers fixed at the lower end. The pressure is linear and is given by $p(\gamma, h) := \gamma \cdot h$. Since each frame supports a 2 ft wide section of the flume, the equation for *w* (pounds/ft) is

$$w(h) := 2\text{ft} \cdot 62.4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} \cdot h \rightarrow \frac{124.8 \cdot h \cdot \text{lbf}}{\text{ft}^2}$$

At the base $w_{base} := w(6\text{ft}) = 0.749 \cdot \frac{\text{kip}}{\text{ft}}$. Note that this is both the lateral pressure on the end walls as well as the uniform load on the horizontal members.





संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

End Actions

1. Base force at B is $F_{Bx} := \frac{1}{2} w_{base} \cdot 6ft = 2.246 \cdot kip$
2. Base moment at B is $M_B := \frac{1}{3} F_{Bx} \cdot 6ft = 4.493 \cdot kip \cdot ft$
3. End forces at B for member B-E are equal and opposite
4. Reaction at C is $R_{Cy} := \frac{1}{2} w_{base} \cdot 16ft = 5.99 \cdot kip$

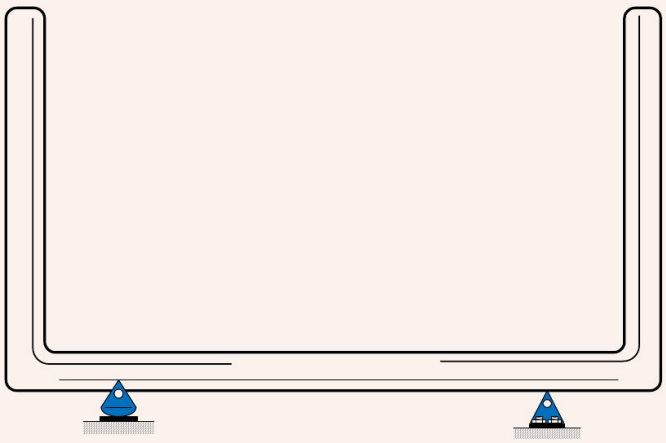
Shear forces

1. Base at B the shear force was determined eariler and was equal to $F_{Bx} = 2.246 \cdot kip$. Based on the orientation of the x-y axis, this is a negative shear.
2. The vertical shear at B is zero (neglecting the weight of A-B)
3. The shear to the left of C is $V_{Cleft} := 0 - w_{base} \cdot 3ft = -2.246 \cdot kip$
4. The shear to the right of C is $V_{Cright} := V_{Cleft} + R_{Cy} = 3.744 \cdot kip$

Moment diagrams

1. At the base: B $M_B = 4.493 \cdot kip \cdot ft$
2. At the support C, $M_C := -M_B - w_{base} \cdot 3ft \cdot \frac{3ft}{2} = -7.862 \cdot kip \cdot ft$
3. The maximum moment is equal to $M_{max} := M_C + w_{base} \cdot 5ft \cdot \frac{5ft}{2} = 1.498 \cdot kip \cdot ft$

Design: Reinforcement should be placed along the fibers which are under tension, that is on the side of the negative moment. The figure below schematically illustrates the location of the flexural reinforcement.

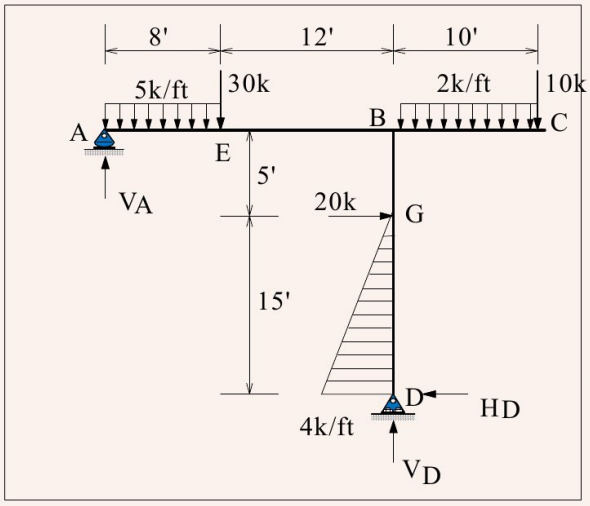


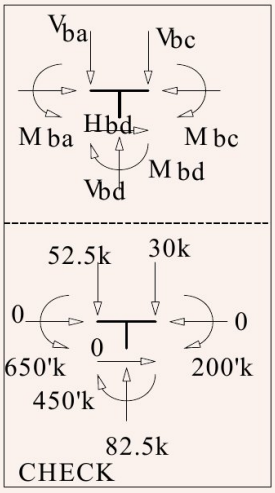
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

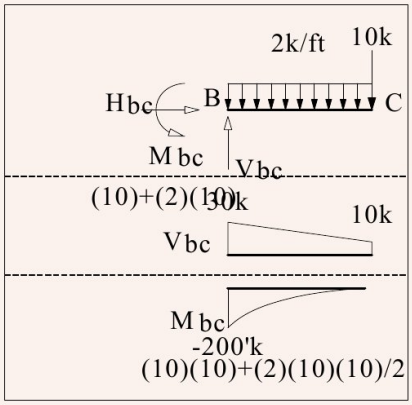
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

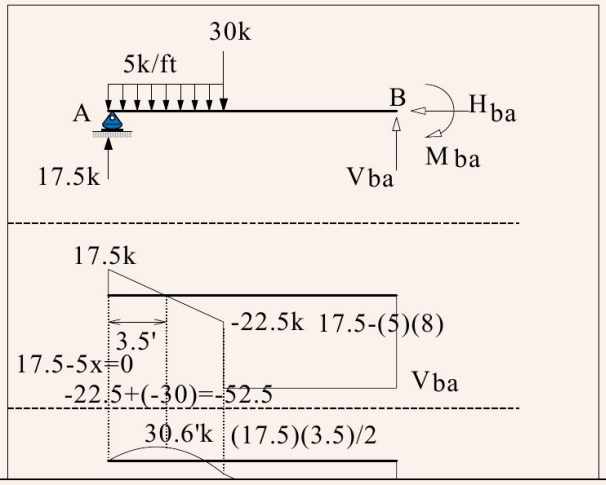
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

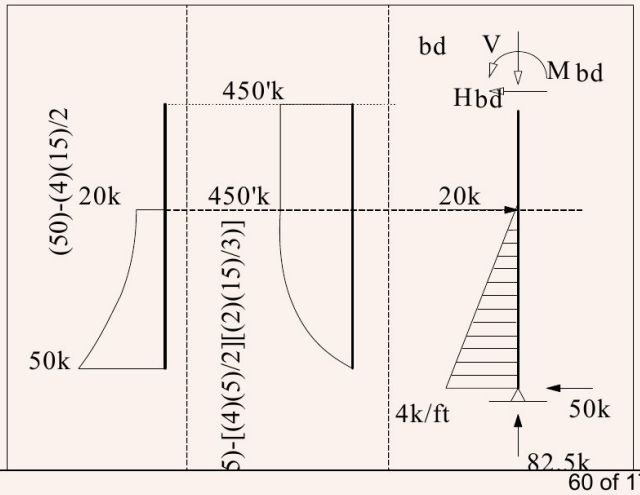
10.4 Shear Moment Diagrams for Frame











संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

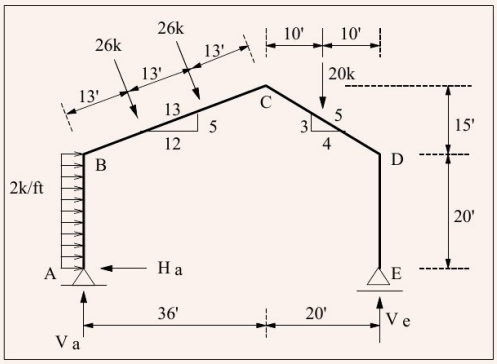
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

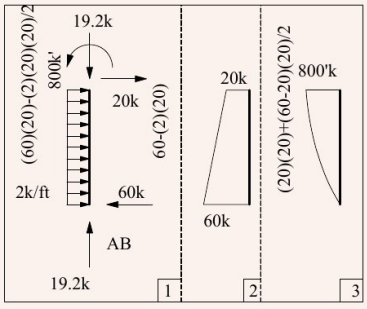
-20'k (17.5)(3.5)/2+(-22.5)(8-3.5)/2

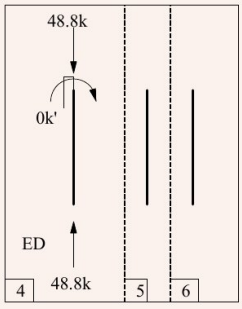
(-52.5)(12)+(-20) -650'k M_{ba}

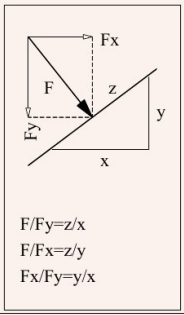
(50)(1

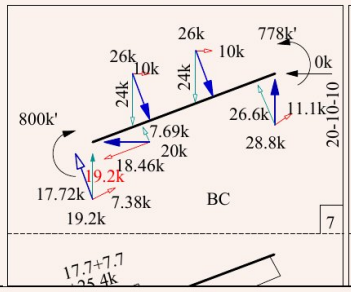
10.5 Shear Moment Diagrams for Inclined Frame

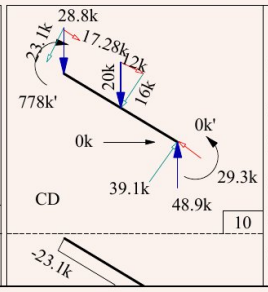












(20)(5)/13=7.7

(20)(12)/(13)=18.46

(19.2)(5)/(13)=7.38

(19.2)(12)/(13)=17.72

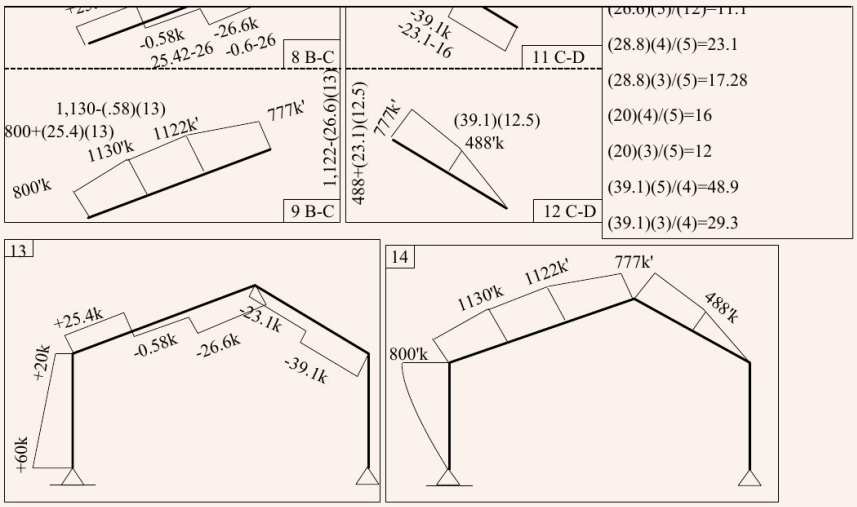
(26)(12)/(13)=24

(26.6)(13)/(12)=28.8

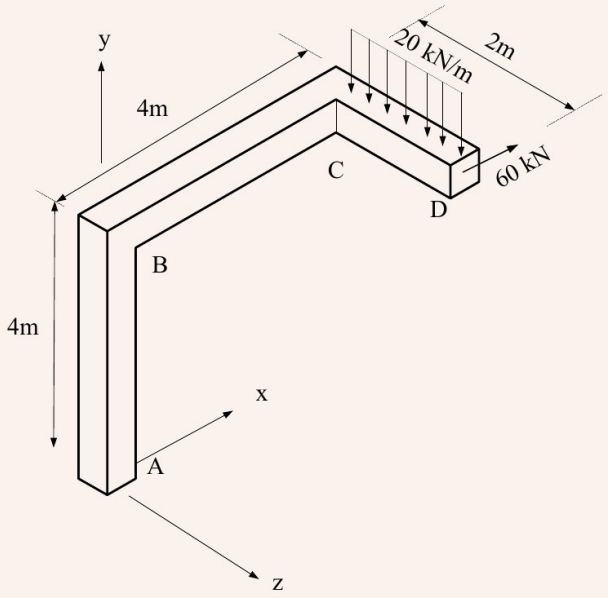
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



10.6 3D Frame



1. The frame has a total of 6 reactions (3 forces and 3 moments) at the support, and we have a total of 6 equations of equilibrium, thus it is staticall determinate.
2. Each member has the following internal forces (defined in terms of the local coordinate system of each member x' - y'- z' such that x is along the member)

Member	Internal Forces					
Member	Axial	Shear		Moment		Torsion
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
C - D		✓	✓	✓	✓	
B - C	✓		✓	✓	✓	✓
A - B	✓	✓		✓	✓	✓

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	Internal Forces					
Member	Axial	Shear		Moment		Torsion
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
C - D		✓	✓	✓	✓	
B - C	✓		✓	✓	✓	✓
A - B	✓	✓		✓	✓	✓

3. The numerical calculations for the analysis of the three dimensional frame are quite simple, however the main complexity stems from the difficulty in visualizing the inter-relations between internal forces of adjacent members.
4. In this particular problem, rather than starting by determining the reactions, it is easier to determined the internal forces at the end of each member starting with member C-D. Note that temporarily we adopt a sign convention which is compatible with the local coordinate systems.

C-D

$\sum F_{y'} = 0$ $\quad V_{y'C} := 20\frac{kN}{m}\cdot 2m = 40\cdot kN$

$\sum F_{z'} = 0$ $\quad V_{z'C} := 60kN$

$\sum M_{y'} = 0$ $\quad M_{y'C} := -60kN\cdot 2m = -120\cdot kN\cdot m$

$\sum M_{z'} = 0$ $\quad M_{z'C} := 20\frac{kN}{m}\cdot 2m\cdot\frac{2m}{2} = 40\cdot kN\cdot m$

B-C

$\sum F_{x'} = 0$ $\quad N_{x'B} := V_{z'C} = 60\cdot kN$

$\sum F_{y'} = 0$ $\quad V_{y'B} := V_{y'C} = 40\cdot kN$

$\sum M_{y'} = 0$ $\quad M_{y'B} := M_{y'C} = -120\cdot kN\cdot m$

$\sum M_{z'} = 0$ $\quad M_{z'B} := V_{y'C}\cdot 4m = 160\cdot kN\cdot m$

$\sum T_{x'} = 0$ $\quad T_{x'B} := -M_{z'C} = -40\cdot kN\cdot m$

A-B

$\sum F_{x'} = 0$ $\quad N_{x'A} := V_{y'B} = 40\cdot kN$

$\sum F_{y'} = 0$ $\quad V_{y'A} := N_{x'B} = 60\cdot kN$

$\sum M_{y'} = 0$ $\quad M_{y'A} := -T_{x'B} = 40\cdot kN\cdot m$

$\sum M_{z'} = 0$ $\quad M_{z'A} := M_{z'B} + N_{x'B}\cdot 4m = 400\cdot kN\cdot m$

$\sum T_{x'} = 0$ $\quad T_{x'A} := M_{y'B} = -120\cdot kN\cdot m$

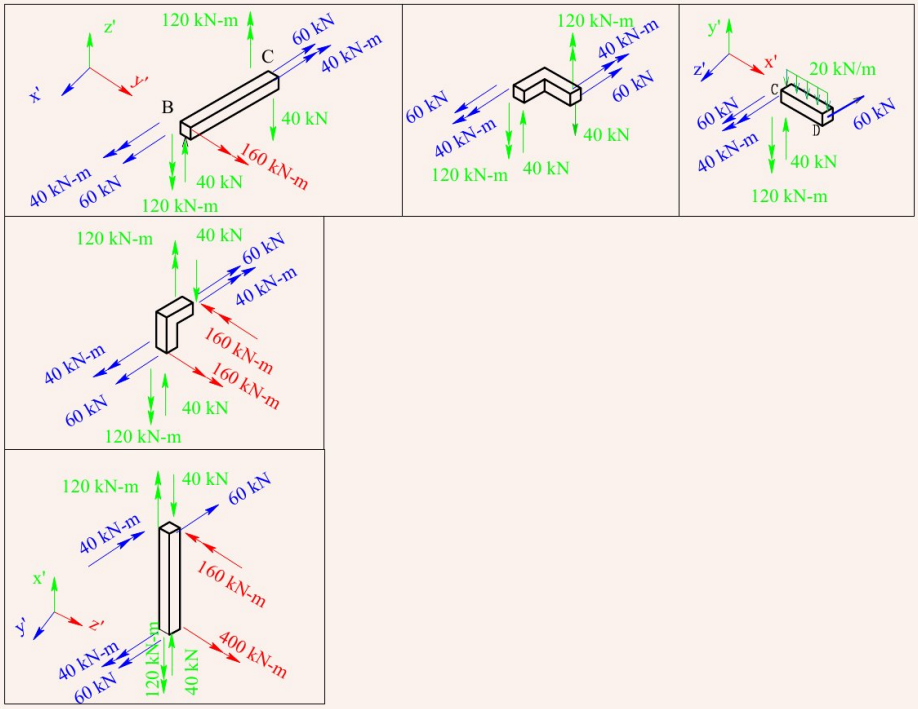
The interaction between axial forces N and shear V as well as between moments M and torsion T is clearly highlighted by this

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

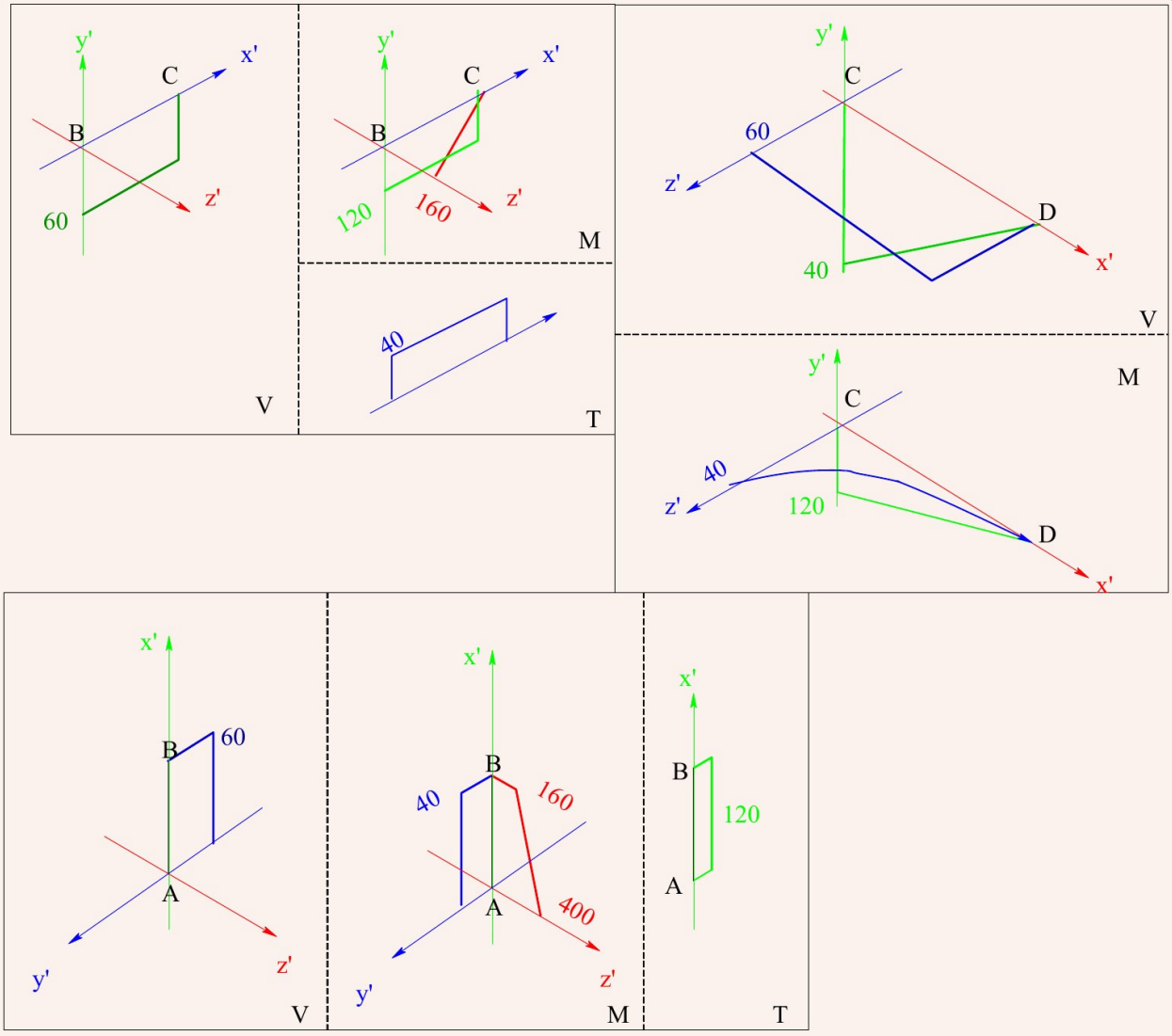
example.



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



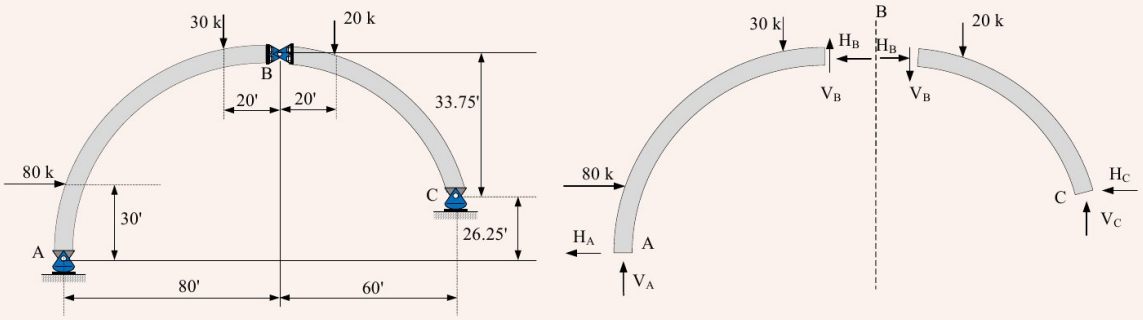
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

11.1 Three Hinged Arch, Point Loads

Determine the reactions of the three-hinged arch shown below



Solution:

Four unknowns, three equations of equilibrium, one equation of condition - staticall determinate

$$\sum M_z^C = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 140\,ft + 80\,kip\cdot(30\,ft - 26.25\,ft) - 30\,kip\cdot(60\,ft + 20\,ft) - 20\,kip\cdot(60\,ft - 20\,ft) + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 140\,ft + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 30\,kip\cdot 80\,ft + 20\,kip\cdot 40\,ft - 80\,kip\cdot 3.75\,ft$$

$$\boxed{R_{Ay}\cdot 140\,ft + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 2900\,kip\cdot ft}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad 80\,kip - R_{Ax} - R_{Cx} = 0$$

$$\boxed{R_{Ax} + R_{Cx} = 80\,kip}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ay} + R_{Cy} - 30\,kip - 20\,kip = 0$$

$$\boxed{R_{Ay} + R_{Cy} = 50\,kip}$$

$$\sum M_z^B = 0 \qquad R_{Ax}\cdot 60\,ft - 80\,kip\cdot 30\,ft - 30\,kip\cdot 20\,ft + R_{Ay}\cdot 80\,ft = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 80\,ft + R_{Ax}\cdot 60\,ft = 80\,kip\cdot 30\,ft + 30\,kip\cdot 20\,ft$$

$$\boxed{R_{Ay}\cdot 80\,ft + R_{Ax}\cdot 60\,ft = 3000\,kip\cdot ft}$$

Solving those four equations simultaneously we have:

$$\begin{pmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2900 \\ 80 \\ 50 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Ay \\ Ax \\ Cy \\ Cx \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2900 \\ 80 \\ 50 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 29.8 \\ 34.9 \\ 50.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Ay \\ Ax \\ Cy \\ Cx \end{pmatrix} \cdot kip = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 29.8 \\ 34.9 \\ 50.2 \end{pmatrix} \cdot kip$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

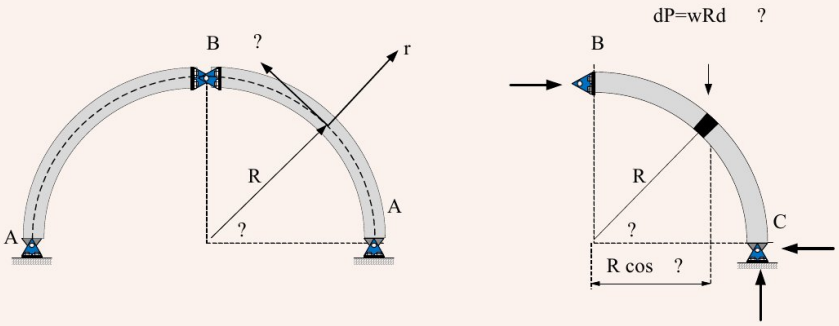
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

We can check our results by considering the summation with respect to B from the right:

$$\sum M_z^{\,B} = 0 \qquad -20\text{kip}\cdot 20\text{ft} - R_{Cx}\cdot 33.75\text{ft} + R_{Cy}\cdot 60\text{ft} = -0\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

11.2 Semi-Circular Arch

Determine the reactions of the three-hinged staticall determinate semi-circular arch under its own dead weight *w* (per unit arc length s, where ds=rdθ



Solution:

Reactions The reactions can be determined by **integrating** the load over the entire structure

1. Vertical Reaction is determined first

$$\sum M_A = 0 \qquad -C_y\cdot 2R + \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta\cdot R(1+\cos(\theta)) = 0$$

$$C_y = \frac{wR}{2}\cdot\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1+\cos(\theta))\,d\theta = \frac{\pi\,wR}{2}$$

2. Horizontal Reactions are determined next

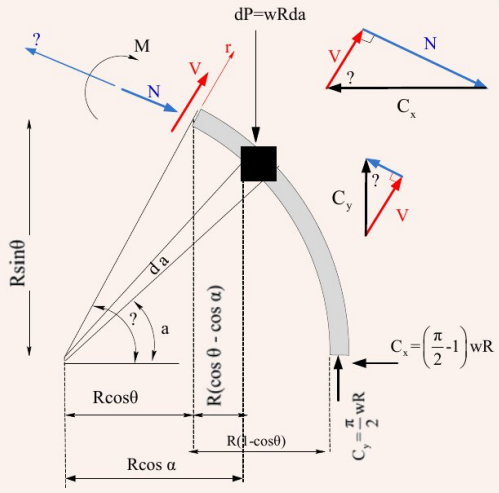
$$\sum M_B = 0 \qquad -C_x\cdot R + C_y\cdot R - \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} wR\,d\theta\cdot R\cos(\theta) = 0$$

$$C_z = \frac{\pi\,wR}{2} - \frac{wR}{2}\cdot\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\,d\theta = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR$$

Internal Forces can now be determined

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



1. Shear Forces: Considering the free body diagram of the arch, and summing the forces in the radial direction ($\Sigma F_R=0$)

$$-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\cos(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\sin(\theta)-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot\sin(\theta)+V=0$$

$$V=wR\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\cos(\theta)+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\theta)\right]$$

2. Axial Forces: Similarly, if we consider the summation of forces in the axial direction ($\Sigma F_\theta=0$)

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\sin(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\cos(\theta)-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot\cos(\theta)+N=0$$

$$N=wR\cdot\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\sin(\theta)\right]$$

2. Moment: Now we can consider the third equation of equilibrium ($\Sigma M_z=0$)

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\cdot R\sin(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\cdot R\cdot(1-\cos(\theta))+\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot R(\cos(\alpha)-\cos(\theta))+M=0$$

$$M=wR^2\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-\sin(\theta))+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]$$

Deflection are determined last

1. The real curvature ϕ is obtained by dividing the moment by EI

$$\phi=\frac{M}{EI}=\frac{wR^2}{EI}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-\sin(\theta))+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]$$

2. The virtual force $\delta\cdot\bar{P}$ will be a unit vertical point load in the direction of the desired deflection, causing a virtual internal moment

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

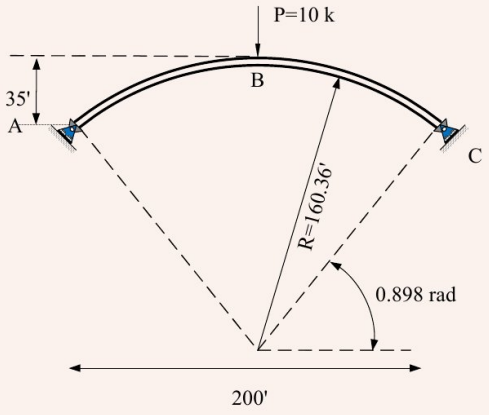
$$\delta\cdot\overline{M} = \frac{R}{2}\cdot(1 - \cos(\theta) - \sin(\theta)) \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

3. Hence, application of the virtual work equation yields:

$$1\cdot\Delta = 2\cdot\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{wR^2}{EI}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1 - \sin(\theta)) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]\cdot\left[\frac{R}{2}\cdot(1 - \cos(\theta) - \sin(\theta))\right]\cdot R\, d\theta = \frac{wR^4}{16EI}\cdot\left(7\cdot\pi^2 - 18\cdot\pi - 12\right)$$

11.3 Statically Indeterminate Arch

Determine the value of the horizontal reaction component of the indicated two-hinged solid rib arch, as caused by a concentrated vertical load of 10 k at the center line of the span. Consider shearing, axial, and flexural strains. Assume the rib is a W24x130 with a total area of 38.21 in^2, that it has a web area of 13.70 in^2, a moment of inertia equal to 4,000 in^4, E of 30,000 k/in^2, and a shearinf modulus of 13,000 k/in^2.

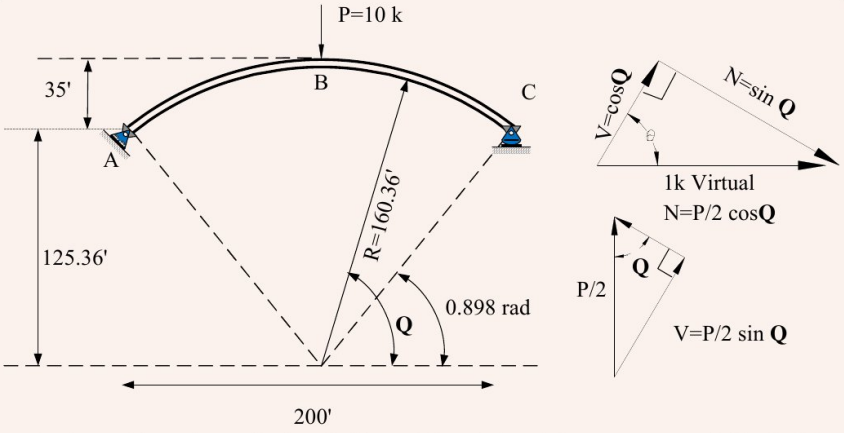


Solution:

1. Consider that end C is placed on rollers, as shown below.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



A unit ficticious horizontal force is applied at C. The axial and shearinf components of this ficticious force and of the vertical reaction at C, acting on any section θ in the right half of the rib, are shown at the right end of the rib in the figure above.

2. The expression for the horizontal displacement of C is

$$1\cdot\Delta_{Ch} = 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{V}\cdot\frac{V}{A_W\cdot G}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{N}\cdot\frac{N}{AE}\,ds$$

3. From the figure above, for the rib from C to B

$$M = \frac{P}{2}\cdot(100 - R\cdot\cos\theta)$$

$$\delta\cdot\overline{M} = 1\cdot(R\cdot\sin\theta - 125.36\,ft)$$

$$V = \frac{P}{2}\cdot\sin\theta$$

$$\delta\cdot\overline{V} = \cos\theta$$

$$N = \frac{P}{2}\cdot\cos\theta$$

$$\delta\cdot\overline{N} = -\sin\theta$$

$$ds = R\,d\theta$$

4. If the above values are substituted in the equation for the horizontal displacement of C and integrated between the limits of 0.898 and π/2, the result will be

$$\Delta_{Ch} = 22.55\,in + 0.023\,in - 0.003\,in$$

$$\Delta_{Ch} := 22.57\,in$$

5. The load P is now assumed to be removed fro mthe rib, and a real horizontal force of 1 k is assumed to act toward the right at C in conjunction with the ficticious force of 1 k acting to the right at the same point. The horizontal displacement of C will be given by

$$\delta_{ChCh} = 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{\overline{M}}{EI}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{V}\cdot\frac{\overline{V}}{A_W\cdot G}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{N}\cdot\frac{\overline{N}}{AE}\,ds = 2.309\,in + 0.002\,in + 0.002\,in$$

$\delta_{\dots} := 2.313\,in$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\delta_{ChCh} := 2.309\,in$

6. The value of the horizontal reaction component will be

$$H_C := \frac{\Delta_{Ch}}{\delta_{ChCh}} \cdot kip = 9.76 \cdot kip$$

7. If only flexural strains are considered, the result would be

$$H_{C_M} := \frac{22.55\,in}{2.309\,in} \cdot kip = 9.77 \cdot kip$$

Comments

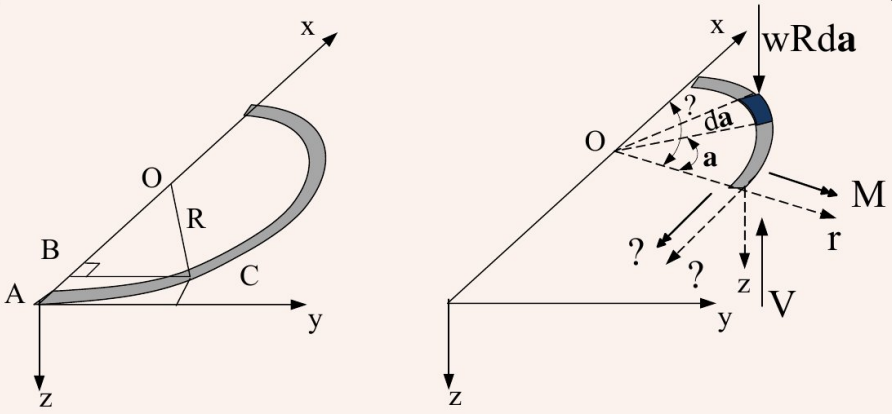
1. For the given rib and the single concentrated load at the center of the span it is obvious that the effects of shearing and axial strains are insignificant and can be disregarded.
2. Eroneous conclusions as to the relative importance of shearing and axial strains in the usual solid rib may be drawn, however, from the values in the equation for Δ_{Ch}. These indicated that the effects of the shearing strains are much more significant thatn those of the axial strains. This is actually the case for the single concentrated load chosen for the demonstration, but only because the rib does not approximate the funicular polygon for the single load. As a result, the shearing components on most sections of the rib are more important than would otherwise be the case.
3. The usual arch encountered in practice, however, is subjected to a series of loads, and the axis of the rib will approximate the funicular polygon for these loads. In other words, the line of pressure is nearly perpindicular to the right section at all points along the rib. Consequently, the shearing components are so small that the shearing strains are insignificant and are neglected
4. Axial strains, resulting in rib shortening, become increasingly important as the rise-to-span ratio of the arch decreases. It is advisable to determine the effects of the rib by considering flexural strains only, and then to check for effects or rib shortening.

11.4 Semi-Circular Box Girder

Determine the reactions of the semi-circular cantilevered box girder subjected to its own weight w.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

Reactions are again determined first

From geometry we have OA=R, OB=Rcosθ, CD = BA = OA - OB = R - Rcosθ, EB = R(1+cosθ) and BC = Rsinθ. The moment arms for the moments with respect to the x and y axis are BC and EB respectively. Applying three equations of equilibrium we obtain

$$F_z^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta = 0 \qquad \boxed{F_z^A = wR\pi}$$

$$M_z^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta\cdot R\cdot\sin\theta = 0 \qquad \boxed{M_z^A = 2\cdot w\cdot R^2}$$

$$M_y^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta\cdot R\cdot(1+\cos\theta) = 0 \qquad \boxed{M_y^A = -w\cdot R^2\cdot\pi}$$

Internal Forces are determined next

1. Shear Force:

$$\sum F_z = 0 \qquad V - \int_0^{\theta} wR\,d\alpha = 0$$

$$\boxed{V = wR\theta}$$

2. Bending Moment:

$$\sum M_R = 0 \qquad M - \int_0^{\theta} wR\,d\alpha\cdot R\cdot\sin\alpha = 0$$

$$\boxed{M = wR^2\cdot(1-\cos\theta)}$$

3. Torsion:

$$\sum M_\theta = 0 \qquad T + \int_0^{\theta} wR\,d\alpha\cdot R\cdot(1-\cos\alpha) = 0$$

$$\boxed{T = -wR^2\cdot(\theta-\sin\theta)}$$

Deflection are determined last

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

We assume a rectangular cross-section of width b and heigh d=2b and a Poisson's ratio of $\nu := 0.3$

1. Noting that the member will be subjected to both flexural and torsional deformations, we seek to determine the two stiffnesses.

2. The flexural stiffness EI is given by $EI = E\cdot\frac{b\cdot d^3}{12} = \frac{2Eb^4}{3}$

3. The torsional stiffness of solid rectangular sections $J = kb^3\cdot d$ where b is the shorter side of the section, d is the longer,

   and k is a factor equal to 0.229 for d/b=2. Hence $G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)} = \frac{E}{2.6}$, and $GJ = \frac{E}{2.6}\cdot 0.229\cdot b^4 = 0.176E\cdot b^4$.

4. Considering both flexural and torsional deformations, and replacing dx by rdθ:

$$\delta\cdot\overline{M}\cdot\Delta = \int_0^{\pi}\delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI_z}\cdot R\,d\theta + \int_0^{\pi}\delta\cdot\overline{T}\cdot\frac{T}{GJ}\cdot R\,d\theta$$

   where the real moments were given above.

5. Assuming a virtual downward force $\delta\cdot\overline{P} = 1$, we have

$$\delta\cdot\overline{M} = R\cdot\sin\theta$$

$$\delta\cdot\overline{T} = -R\cdot(1-\cos\theta)$$

6. Substituting these expressions into the equation for displacement (in 4)

$$1\cdot\Delta = \frac{w\cdot R^2}{EI}\cdot\int_0^{\pi}(R\cdot\sin\theta)\cdot(1-\cos\theta)\cdot R\,d\theta + \frac{w\cdot R^2}{GJ}\cdot\int_0^{\pi}(\theta-\sin\theta)\cdot R\cdot(1-\cos\theta)\cdot R\,d\theta$$

$$1\cdot\Delta = \frac{w\cdot R^4}{EI}\cdot\int_0^{\pi}\left[(\sin\theta-\sin\theta\cdot\cos\theta) + \frac{1}{0.265}\cdot(\theta-\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta\cdot\cos\theta)\right]\,d\theta$$

$$\boxed{\Delta = 20.56\cdot\frac{w\cdot R^4}{EI}}$$

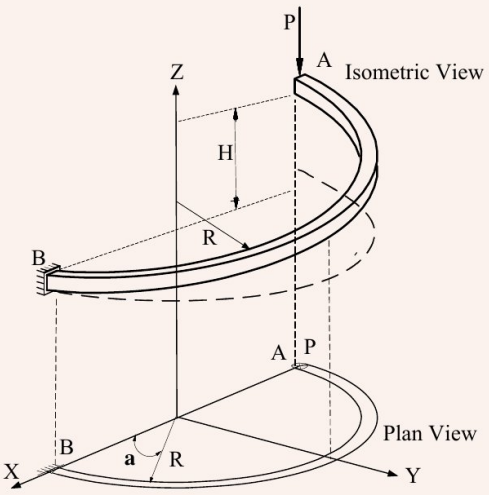
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

11.5 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Point Load

Determine the internal forces N, V_s, and V_w and the internal moments T, M, and M_w along the helicoidal cantilevered girder.



Solution:

1. We first determine the geometry in terms of the angle θ

$$x(R,\theta) := R\cdot\cos(\theta) \qquad y(R,\theta) := R\cdot\sin(\theta) \qquad z(H,\theta) := \frac{H}{\pi}\cdot\theta$$

2. To determine the unit vector **n** at any point we need the derivatives

$$dx(R,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}x(R,\theta) \rightarrow -R\cdot\sin(\theta) \qquad dy(R,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}y(R,\theta) \rightarrow R\cdot\cos(\theta) \qquad dz(H,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}z(H,\theta) \rightarrow \frac{H}{\pi}$$

and then determine the unit vector

$$\mathbf{n} = \frac{-R\cdot\sin(\theta)\mathbf{i} + R\cdot\cos(\theta)\cdot\mathbf{j} + \frac{H}{\pi}\cdot\mathbf{k}}{\left[R^2\cdot(\sin(\theta))^2 + R^2\cdot(\cos(\theta))^2 + \left(\frac{H}{\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{H}{\pi\cdot R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\left[-\sin\theta\cdot\mathbf{i} + \cos\theta\cdot\mathbf{j} + \left(\frac{H}{\pi\cdot R}\right)\cdot\mathbf{k}\right]$$

Since the denominator depends only on the geometry, it will be designated K.

3. The strong bending axis lies in a horizontal plane, and its unit vector can thus be determined

$$\mathbf{n}\times\mathbf{k} = \frac{1}{K}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi\cdot R}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{K}\cdot(\cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{j})$$

and the absolute magnitude of this vector $|\mathbf{n}\times\mathbf{k}| = \frac{1}{K}$, and thus

$$\mathbf{s} = \cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{i}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The unit vector along the weak axis is determined

$$\mathbf{w} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \frac{1}{K} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi \cdot R} \end{pmatrix} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{H}{\pi \cdot R} \cdot \sin\theta \cdot \mathbf{i} - \frac{H}{\pi \cdot R} \cdot \cos\theta \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \right)$$

5. With the geometry definition completed, we now examine the equilibrium equations.

$$\sum F = 0 \qquad \mathbf{F} = -\mathbf{P}$$

$$\sum M_b = 0 \qquad \mathbf{M} = -\mathbf{L} \times \mathbf{P}$$

where

$$\mathbf{L} = (R - R \cdot \cos\theta) \cdot \mathbf{i} + (0 - R \cdot \sin\theta) \cdot \mathbf{j} + \left(0 - \frac{\theta}{\pi} \cdot H\right) \cdot \mathbf{k}$$

and

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{P} = R \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 - \cos\theta & -\sin\theta & \frac{-\theta}{\pi} \cdot \frac{H}{R} \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} = PR \cdot \left[-\sin\theta \cdot \mathbf{i} - (1 - \cos\theta) \cdot \mathbf{j} \right]$$

and

$$\mathbf{M} = PR \cdot \left[\sin\theta \cdot \mathbf{i} + (1 - \cos\theta) \cdot \mathbf{j} \right]$$

6. Finally, the components of the force $\mathbf{F} = -Pk$ and the moment $\mathbf{M}$ are obtained by appropriate dot products with the unit vectors

$$N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{K} \cdot P \cdot \frac{H}{\pi \cdot R}$$

$$V_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0$$

$$V_w = \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{K} \cdot P$$

$$T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = -\frac{PR}{K} \cdot (1 - \cos\theta)$$

$$M_s = \mathbf{M} \cdot \mathbf{s} = PR \cdot \sin\theta$$

$$M_w = \mathbf{M} \cdot \mathbf{w} = -\frac{PH}{\pi \cdot K} \cdot (1 - \cos\theta)$$

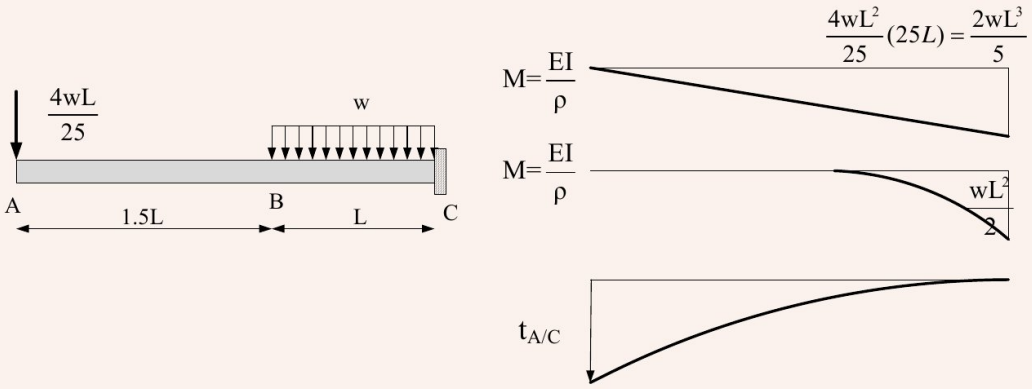
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.1 Moment Area, Cantilevered Beam

Determine the deflection at Point A



Solution:

$$EIt_{AC} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-2w\cdot L^2}{5}\right)\cdot\left(\frac{5L}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5L}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-w\cdot L^2}{2}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{9L}{4}\right) = \frac{-29w\cdot L^4}{24}$$

Thus,

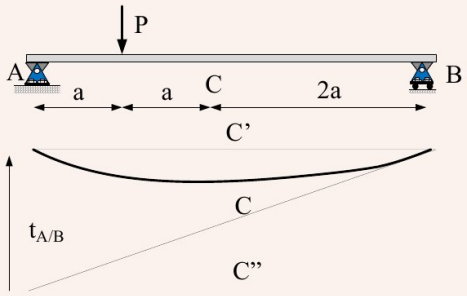
$$\Delta_A = \frac{-29w\cdot L^4}{24\cdot E\cdot I}$$

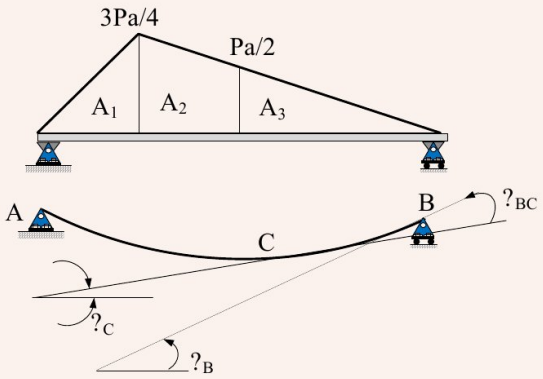
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.2 Moment Area, Simply Supported Beam

Determine Δ_C and θ_C for the following example





Solution:

Deflection Δ_C is determined from $\Delta_C = c'\cdot c = c'\cdot c'' - c''\cdot c$, $c''\cdot c = t_{CB}$, and $c'\cdot c'' = \frac{t_{AB}}{2}$

$$t_{AB} = \frac{1}{EI}\cdot\left[\left(\frac{3P\cdot a}{4}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}\right) + \left(\frac{3P\cdot a}{4}\right)\cdot\left(\frac{3a}{2}\right)\cdot\left(a + \frac{3a}{3}\right)\right] = \frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}$$

This is positive, thus above tangent from B

$$t_{CB} = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\left(\frac{P\cdot a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{P\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I}$$

Positive, thus above tangent from B. Finally,

$$\boxed{\Delta_C = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}\right) - \frac{P\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I} = \frac{11}{12}\cdot\frac{P\cdot a^3}{E\cdot I}}$$

Rotationa θ_C is

$$\theta_{BC} = \theta_B - \theta_C \Rightarrow \theta_C = \theta_B - \theta_{BC}$$

$$\theta_{BC} = A_3$$

$$\theta_B = \frac{t_{AB}}{L}$$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

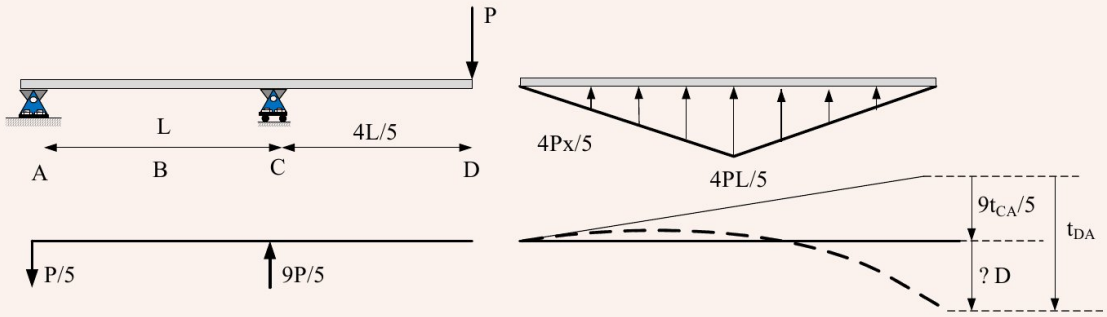
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\theta_C = \frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}\cdot\frac{1}{4a} - \left(\frac{P\cdot a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{2}\right) = \frac{P\cdot a^2}{8E\cdot I}$$

12.3 Maximum Deflection

Determine the deflection at D and the maximum deflection at B



Solution:

Deflection at D:

$$\Delta_D = t_{DA} - \frac{9}{5}\cdot t_{CA}$$

$$EIt_{CA} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{-2P\cdot L^3}{15}$$

$$t_{CA} = \frac{-2P\cdot L^3}{15E\cdot I}$$

$$EIt_{DA} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{17L}{15}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot\left(\frac{4L}{5}\right)\cdot\left(\frac{8L}{15}\right) = \frac{-234P\cdot L^3}{375}$$

$$t_{DA} = \frac{-234P\cdot L^3}{375E\cdot I}$$

Substituting we obtain

$$\Delta_D = \frac{-48}{125}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Maximum Deflection at B:

$$t_{CA} = \frac{-2P\cdot L^3}{15E\cdot I}$$

$$\theta_A = \frac{t_{CA}}{L} = \frac{-2P\cdot L^2}{15E\cdot I}$$

$$\theta_{AB} = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4P\cdot x}{5}\right)\cdot x\right] = \frac{-2}{5}\cdot\frac{P\cdot x^2}{E\cdot I}$$

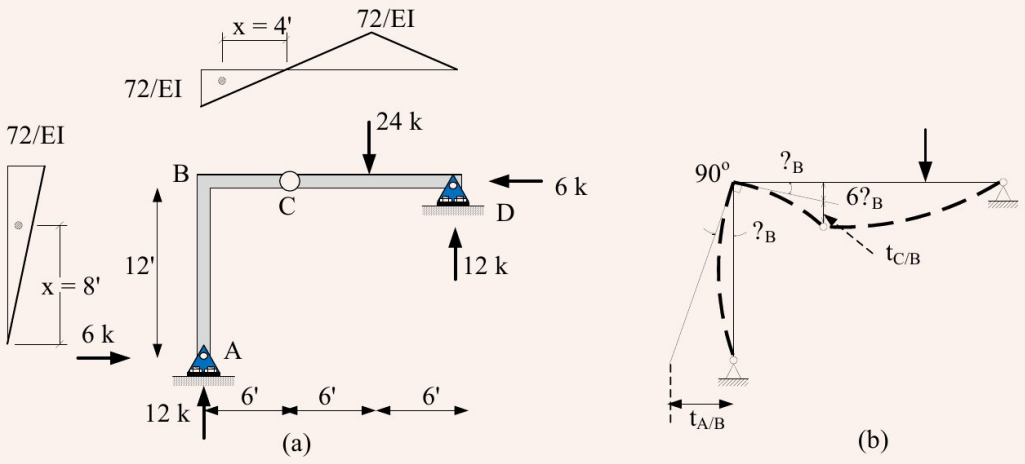
$$\theta_A = \theta_{AB} \Rightarrow \frac{-2P\cdot L^2}{15E\cdot I} = \frac{-2}{5}\cdot\frac{P\cdot x^2}{E\cdot I} \qquad x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta_{max} = \left(\frac{4P\cdot x}{5\cdot E\cdot I}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{3}\right) \text{ at } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\Delta_{max} = \frac{4\cdot P\cdot L^3}{45\cdot\sqrt{3}\cdot E\cdot I}}$$

12.4 Frame Deflection

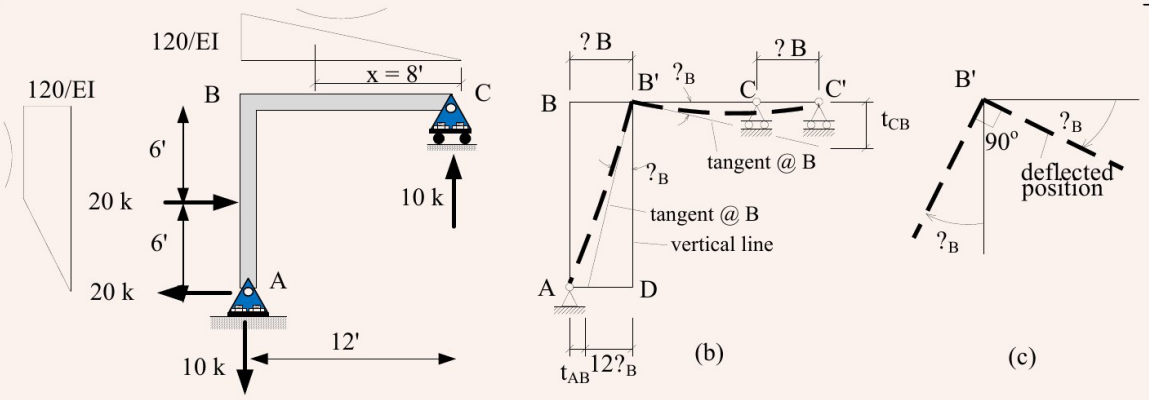
Complete the following example problem



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

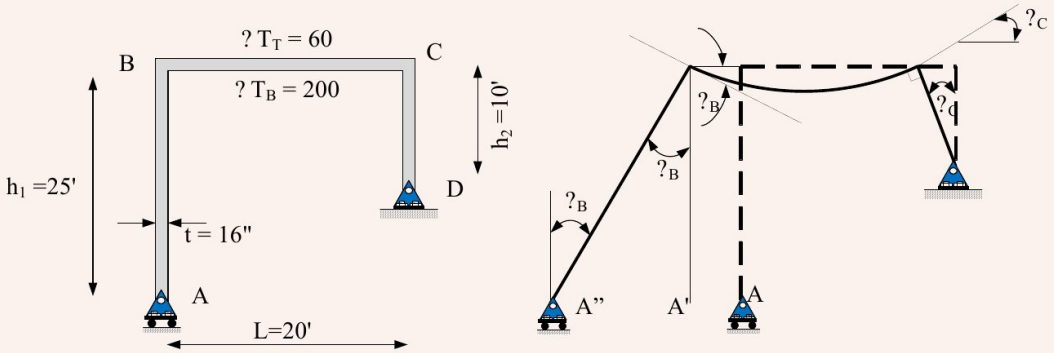
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



12.5 Frame Subjected to Temperature Loading

Neglecting axial deformation, compute displacement at A for the following frame



Solution:

1. First let us sketch the deformed shape

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2. BC flexes => $\theta_B = \theta_C \neq 0$

3. Rigid hinges at B and C with no load on AB and CD

4. Deflection at A

$$\Delta_A = A{\cdot}A'' = A{\cdot}A' + A'{\cdot}A''$$

$$A{\cdot}A' = \Delta_B = \Delta_C = \left|\theta_C\right|{\cdot}h_2$$

$$A'{\cdot}A'' = \left|\theta_B\right|{\cdot}h_1$$

5. We need to compute θ_B and θ_C

$$\theta_B = \frac{t_{CB}}{L}$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B \quad \text{OR} \quad \theta_C = \frac{t_{BC}}{L}$$

6. In order to apply the curvature area theorem, we need a curvature (or moment diagram)

$$\frac{1}{\rho} = \alpha{\cdot}\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right) = \frac{M}{E{\cdot}I}$$

7.

$$t_{CB} = A{\cdot}\frac{L}{2} \Rightarrow \left|\theta_B\right| = A{\cdot}\left(\frac{L}{2}\right){\cdot}\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{A}{2} \quad \text{OR} \quad \theta_B = \frac{-A}{2}$$

8.

$$\theta_{CB} = A$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B$$

$$\theta_C = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$$

9. From above

$$\Delta_A = \left|\theta_C\right|{\cdot}h_2 + \left|\theta_B\right|{\cdot}h_1 = \frac{A}{2}{\cdot}h_2 + \frac{A}{2}{\cdot}h_1 = \frac{A}{2}\left(h_1 + h_2\right)$$

$$A = \alpha{\cdot}\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right){\cdot}L$$

$$\Delta_A = \alpha{\cdot}\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right){\cdot}L{\cdot}\left(\frac{1}{2}\right){\cdot}\left(h_1 + h_2\right)$$

10. Substitute

$$\Delta_A := \left(6.5{\cdot}10^{-6}\right){\cdot}(200 - 60){\cdot}\frac{20\text{ft}}{16\text{in}}{\cdot}\frac{1}{2}{\cdot}35\text{ft}$$

$$\boxed{\Delta_A = 2.867{\cdot}\text{in}}$$

11. Other numerical values

$$\theta_B = \theta_C = \frac{A}{2}$$

$$\theta_B := \frac{1}{2}\left(6.5{\cdot}10^{-6}\right){\cdot}\left(\frac{200 - 60}{16\text{in}}\right){\cdot}20\text{ft} = 0.006825{\cdot}\text{rad}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\theta_C := \theta_B = 0.006825$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right)$$

$$\rho := \frac{1}{\left[\left(6.5\cdot10^{-6}\right)\cdot\left(\frac{200-60}{16in}\right)\right]} = 1465.2\cdot ft$$

12. In order to get M, we need E and I. Note the difference with other statically determinate structures; the stiffer the beam, the higher the moment; the higher the moment, the higher the stress? NO!!

13. $$\sigma = \frac{M\cdot y}{I} = \frac{E\cdot I}{\rho}\cdot\frac{y}{I} = \frac{E\cdot y}{\rho}$$

14. ρ is constant => BC is on arc of circle M is constant and $\frac{M}{EI} = \frac{d^2\cdot y}{dx^2}$ => $\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = c$ => $y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$

15. The slope is a parabola

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2\cdot y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Let us get curvature from the parabola slope and compare it with ρ

$$y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$$

$$\frac{dy}{dx} = cx + d$$

$$\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = c$$

at x=0, y=o, thus e=0

at x=0, $\frac{dy}{dx} = \theta_B = -0.006825rad$, thus $d = -0.006825rad$

at x=20 ft, $\frac{dy}{dx} = \theta_C = 0.006825rad$, thus $c(20ft) - 0.006825 = 0.006825$, thus $c = 6.825\cdot10^{-4}$

$$y = 6.825\cdot10^{-4}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - 10x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6.825\cdot10^{-4}\cdot(x-10)$$

$$\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = 6.825\cdot10^{-4}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\phi := 6.825 \cdot 10^{-4}$$

$$\rho := \frac{1}{\phi} \cdot ft = 1465.2 \cdot ft \quad \text{as expected!}$$

If we were to use the exact curvature formula $\dfrac{\dfrac{d^2 \cdot y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

$$\phi := \frac{6.825 \cdot 10^{-4}}{\left[1 + (0.006825)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0.000682$$

$$\rho := \frac{1}{\phi} \cdot ft = 1465.3 \cdot ft$$

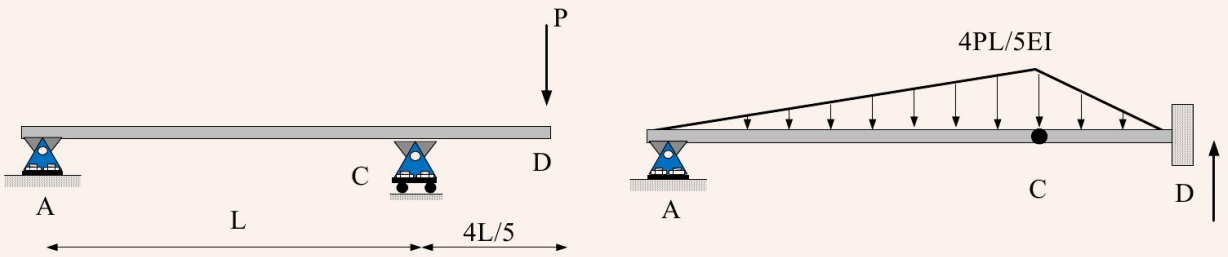
12.6 Conjugate Beam

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Analyze the following beam



Solution:

3 equations of equilibrium and 1 equation of condition = 4 = number of reactions. Deflection at D = Shear at D of the corresponding conjugate beam (Reaction at D) Take AC and ΣM with respect to C

$$R_A \cdot (L) - \left(\frac{4P \cdot L}{5E \cdot I}\right) \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$R_A = \frac{2 \cdot P \cdot L^3}{15E \cdot I}$$

(Slope in real beam at A) As computed before. Let us dram the moment diagram for the conjugate beam

$$M = \frac{P}{EI} \cdot \left(\frac{2}{15} \cdot L^2 \cdot x - \frac{2}{15} \cdot x^3\right) = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 \cdot x - x^3\right)$$

Point of maximum moment (Δ_{max}) occurs when $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 - 3x^2\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

as previously determined

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$M = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left[L^2 \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3\right]$$

$$M = \frac{4P \cdot L^3}{45 \cdot \sqrt{3} \cdot E \cdot I}$$ as before

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

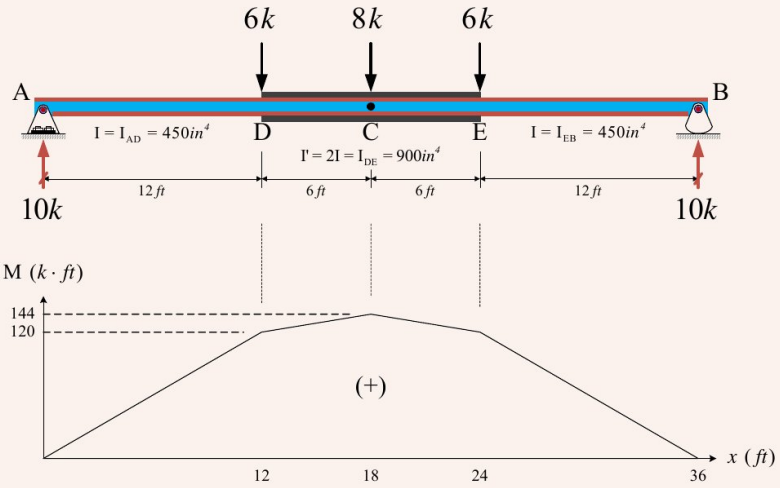
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रारूप प्रति

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

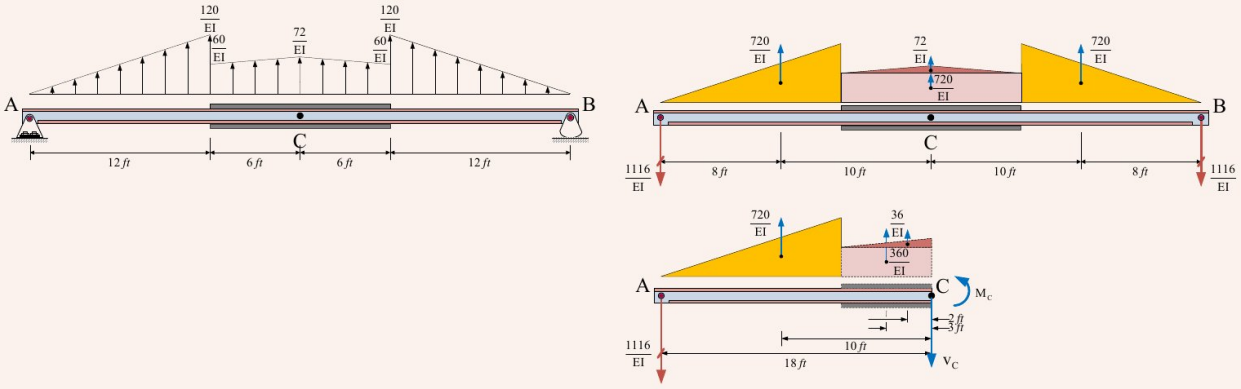
12.7 Conjugate Beam

Analyze the following beam



Solution:

From simple observation, the reactions at A and B are equal to 10 k. The elastic load on the conjugate beam is then shown below.



We next seek to determine the internal moment at C' in the conjugate beam. It is obtained from equilibrium:

$$\sum M_z^B = 0 \qquad \frac{1116\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 18ft - \frac{720\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 10ft - \frac{360\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 3ft - \frac{36\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 2ft + M_{C'} = 0$$

$E := 29\cdot 10^3 ksi$

$I := 450in^4$

$\Delta_C = M_{C'}$

$$\Delta_{C'} := \frac{720\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 10ft + \frac{360\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 3ft + \frac{36\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 2ft - \frac{1116\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 18ft = -1.554\cdot in$$

Victor E. Saouma

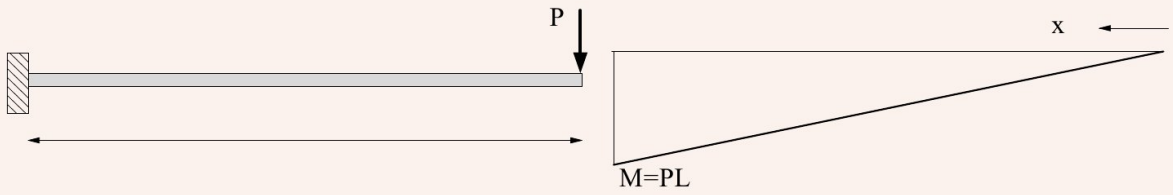
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.1 Deflection of a Cantilever Beam

Determine the deflection of the cantilever beam with span L under a point load P at its free end. Assume constant EI.



Solution:

$$W_e = \frac{1}{2}\cdot P\cdot \Delta_f$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2\cdot E\cdot I}\,dx$$

$$M = -P\cdot x$$

$$U(P, L, EI) := \frac{P^2}{2\cdot EI}\cdot \int_0^L x^2\,dx \rightarrow \frac{L^3\cdot P^2}{6\cdot EI}$$

$$\frac{1}{2}\cdot P\cdot \Delta_f = \frac{L^3\cdot P^2}{6\cdot EI}$$

$$\boxed{\Delta_f = \frac{P\cdot L^3}{3\cdot EI}}$$

Note that the solution of this problem was facilitated by the fact thatΔ_f is co-alligned with P.

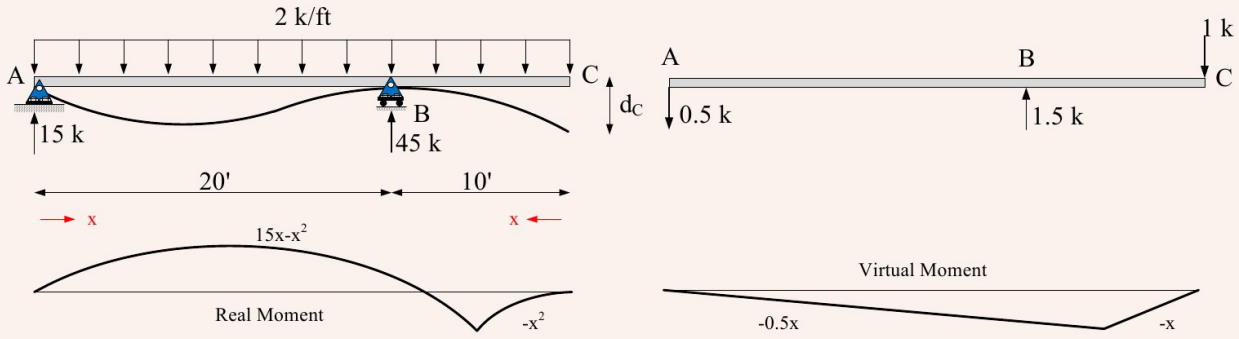
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.2 Beam Deflection

Determine the deflection at point C. $E := 29000ksi$, $I := 100in^4$



Solution:

For the virtual force method, we need to have two expressions for the moment, one due to the real load, and the other to the (unit) virtual one.

Element	x = 0	M	δM
AB	A	$15x - x^2$	- 0.5x
BC	C	$- x^2$	- x

For the virtual force method, we need to have two expressions for the moment, one due to the real load, and the other to the (unit) virtual one.

$$\Delta_C \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{P} = \int_0^L \bar{\delta} \cdot \bar{M} \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1 \cdot \Delta_C = \int_0^{20} (-0.5x) \cdot \left(\frac{15x - x^2}{EI} \right) dx + \int_0^{10} (-x) \cdot \left(\frac{-x^2}{EI} \right) dx$$

$$\Delta_C(EI) := \int_0^{20} (-0.5x) \cdot \left(\frac{15x - x^2}{EI} \right) dx + \int_0^{10} (-x) \cdot \left(\frac{-x^2}{EI} \right) dx \rightarrow \frac{2500}{EI}$$

$$\Delta_C := \frac{2500kip \cdot ft^3}{E \cdot I} = 1.49 \cdot in$$

Victor E. Saouma

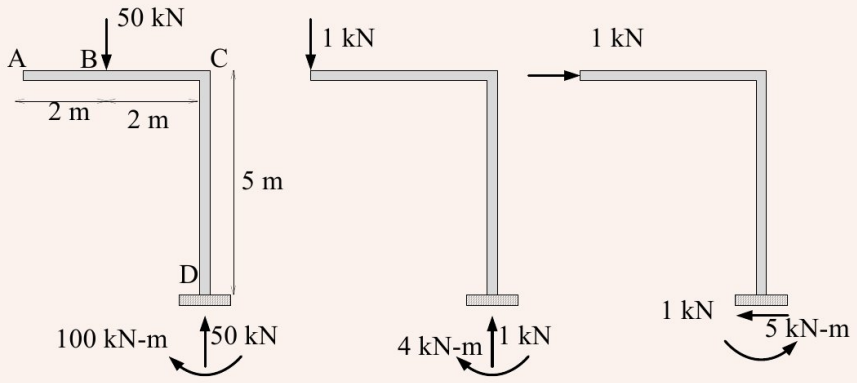
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

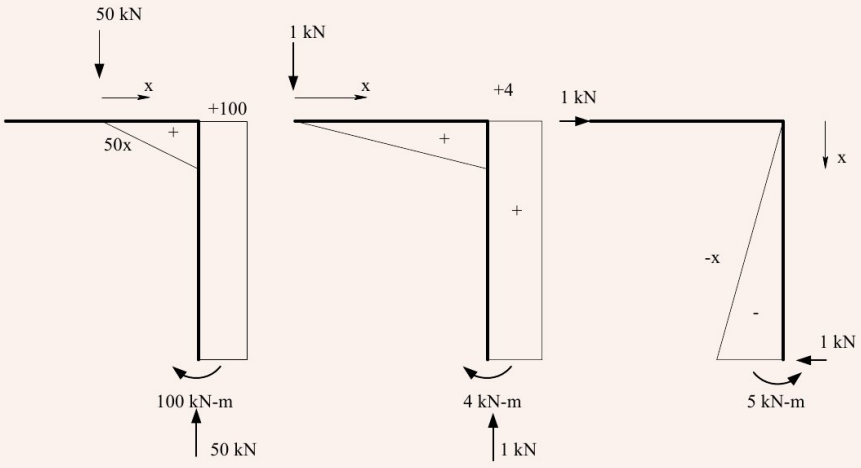
13.3 Deflection of a Frame

Determine both the vertical and horizontal deflection at A for the frame shown. $E := 200 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2}$, $I := 200 \cdot 10^6 mm^4$



Solution:

To analyze the frame we must determine analytical expressions for the moments along each member for the real load and the two virtual ones. One virtual load is a unit horizontal load at A, and the other a unit vertical one at A



Element	x = 0	M	δM_v	δM_h
AB	A	0	- x	0
BC	B	- 50x	- 2 - x	0
CD	C	100	4	- x

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that moments are considered positive when they produce compression on the inside of the frame. Substitution yields:

$$\Delta_v \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \overline{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1\Delta_v = \int_0^2 -x \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (-2 - x) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 4 \cdot \frac{100}{EI}\, dx$$

$$\Delta_v(EI) := \int_0^2 -x \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (-2 - x) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 4 \cdot \frac{100}{EI}\, dx \rightarrow \frac{7000}{3 \cdot EI}$$

$$\Delta_v := \frac{7000 kN \cdot m^3}{3 \cdot E \cdot I} = 5.833 \cdot cm$$

Similarly for the horizontal displacement

$$\Delta_h \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \overline{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1\Delta_h = \int_0^2 0 \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (0) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 -x \cdot \frac{100}{EI}\, dx$$

$$\Delta_h(EI) := \int_0^2 0 \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (0) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 -x \cdot \frac{100}{EI}\, dx \rightarrow -\frac{1250}{EI}$$

$$\Delta_h := \frac{-1250 kN \cdot m^3}{E \cdot I} = -3.125 \cdot cm$$

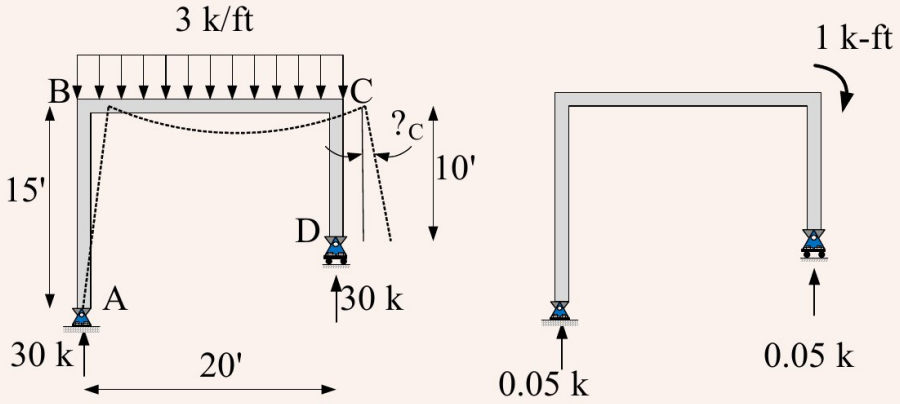
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.4 Rotation of a Frame

Determine the rotation of joint C for the frame shown. $E := 29000\text{ksi}$, $I := 240\text{in}^4$



Solution:

In this problem the virtual force is a unit moment applied at joint C, $\delta\cdot\overline{M_e}$. It will cause an internal moment $\delta\cdot\overline{M_i}$.

Element	x = 0	M	δM
AB	A	0	0
BC	B	$30x - 1.5x^2$	- 0.05x
CD	D	0	0

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that moments are considered positive when they produce compression on the outside of the frame. Substitution yields:

$$\theta_C \cdot \delta \cdot \overline{M_e} = \int_0^L \delta \cdot \overline{M} \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

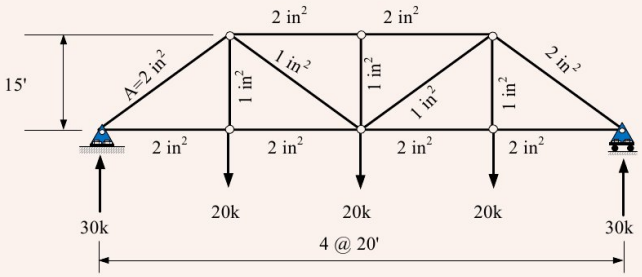
$$1 \cdot \theta_C = \int_0^{20} (-0.05x) \cdot \left(\frac{30x - 1.5x^2}{EI} \right) dx$$

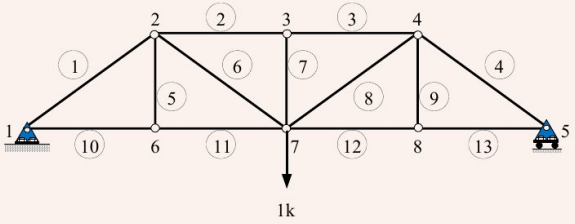
$$\theta_C(EI) := \int_0^{20} (-0.05x) \cdot \left(\frac{30x - 1.5x^2}{EI} \right) dx \rightarrow -\frac{1000}{EI}$$

$$\theta_C := \frac{-1000\,kip \cdot ft^2}{E \cdot I} = -0.021 \cdot rad$$

13.5 Truss Deflection

Determine the vertical deflection of joint 7 in the truss shown $E := 30000ksi$





Solution:

Two analyses are required. One with the real load, and the other using a unit vertical load at joint 7. Results for those analyses are summarized below. Note that advantage was taken of the symmetric load and structure.

Member	A in^2	L ft	P^e kip	δP kip	δPPL/A $k\text{-}ft/in^2$	n	nδPPL/A $k\text{-}ft/in^2$
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268	2	536
11 & 12	2	20	40	0.67	268	2	536
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693
2 & 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1417.8

Victor E. Saouma संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	A in^2	L ft	P^e kip	δP kip	δPPL/A $k\text{-}ft/in^2$	n	nδPPL/A $k\text{-}ft/in^2$
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268	2	536
11 & 12	2	20	40	0.67	268	2	536
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693
2 & 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1417.8
7	1	15	0	0	0	1	0
Total							4220.3

$$\Delta \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \bar{P} \cdot \frac{P}{A \cdot E}\, dx$$

$$1 \cdot \Delta = \Sigma \delta \cdot \bar{P}_e \cdot \frac{P_e \cdot L}{A \cdot E}$$

$$\Delta := \frac{4220.3 \frac{kip \cdot ft}{in^2}}{E} = 1.688 \cdot in$$

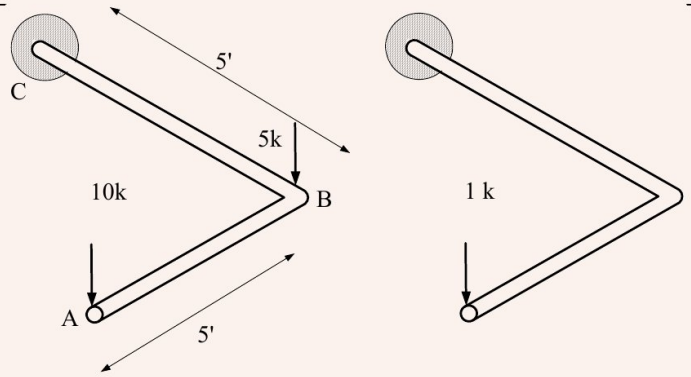
13.6 Torsional and Flexural Deformation

Determine the vertical deflection at A in the structure shown. $E := 30000ksi$, $I := 144in^4$, $G := 12000ksi$, $J := 288in^4$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. In this problem we have both flexural and torsional deformation. Hence we should determine the internal moment and torsion distribution for both the real and the unit virtual load.
2. Then we will use the following relation

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta_A = \int \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx + \int \bar{\delta}\cdot\bar{T}\cdot\frac{T}{GJ}\,dx$$

3. The moment and torsion expressions are given by

Element	x = 0	M	δM	T	δT
AB	A	10x	x	0	0
BC	B	15x	x	50	5

4. Substituting

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta_A = \int \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx + \int \bar{\delta}\cdot\bar{T}\cdot\frac{T}{GJ}\,dx$$

$$1\cdot\Delta_A = \int_0^5 x\cdot\frac{10x}{EI}\,dx + \int_0^5 x\cdot\frac{15x}{EI}\,dx + \int_0^5 5\cdot\frac{50}{GJ}\,dx$$

$$\Delta_A(E,I,G,J) := \int_0^5 x\cdot\frac{10x}{E\cdot I}\,dx + \int_0^5 x\cdot\frac{15x}{E\cdot I}\,dx + \int_0^5 5\cdot\frac{50}{G\cdot J}\,dx \rightarrow \frac{3125}{3\cdot E\cdot I} + \frac{1250}{G\cdot J}$$

$$\Delta_A := \frac{3125\,kip\cdot ft^3}{3\cdot E\cdot I} + \frac{1250\,kip\cdot ft^3}{G\cdot J} = 1.042\cdot in$$

13.7 Flexural and Shear Deformations in a Beam

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Determine the deflection of a cantilevered beam, of length L, subjected to an end force P due to both flexural and shear deformations. Assumed G=0.4E and a square solid beam cross section.

Solution:

1. The virtual work equation is

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta = \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot(x)\cdot d\phi(x)\,dx + \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}\cdot(x)\cdot\gamma_{xy}(x)\,dx = \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\,dx + \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}(x)\cdot\lambda\cdot\frac{V(x)}{GA}\,dx$$

2. The first integral yields for M=Px, and $\bar{\delta}\cdot M = 1\cdot x$

$$\int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\,dx = \frac{P}{EI}\cdot\int_0^L x^2\,dx$$

$$\frac{P}{EI}\cdot\int_0^L x^2\,dx \rightarrow \frac{94280057135446.5\cdot N\cdot ft^3}{EI}$$

3. The second integral represents the contribution of the shearing action to the total internal virtual work and hence to the total displacement.

4. Both the real shear V and the virtual shear $\bar{\delta}\cdot\bar{V}$ are constant along the length of the member, hence

$$\int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}(x)\cdot\lambda\cdot\frac{V(x)}{GA}\,dx = \frac{\lambda}{GA}\cdot\int_0^L 1\cdot(P)\,dx$$

$$\frac{\lambda}{GA}\cdot\int_0^L 1\cdot(P)\,dx \rightarrow \frac{374606093684.841\cdot N\cdot GPa\cdot ft}{GA}$$

5. Since $\lambda := 1.2$ for a square beam; hence

$$I = \frac{h^4}{12} \quad \text{and} \quad A = h^2$$

then

$$\Delta = \frac{P\cdot L}{3\cdot E}\cdot\left(\frac{12L^2}{h^4} + \frac{9}{h^2}\right) = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot\left(\frac{1.33L^2}{h^2} + 1\right)$$

6. Choosing $L := 20ft$ and $h := 1.5ft$ (L/h=13.3)

$$\Delta = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot\left[1.33\cdot\left(\frac{20ft}{1.5ft}\right)^2 + 1\right] = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot(237 + 1)$$

Thus the flexural deformation is 237 times the shear displacement. This comparison reveals why we normally neglect shearing deformation in beams. As the beam get shorter or deeper, or as L/h decreases, the flexural deformation decreases relative to the shear displacement. At L/h=5, the flexural deformation has reduced to $1.33\cdot 5^2 = 33.25$ times the shear displacement.

Victor E. Saouma

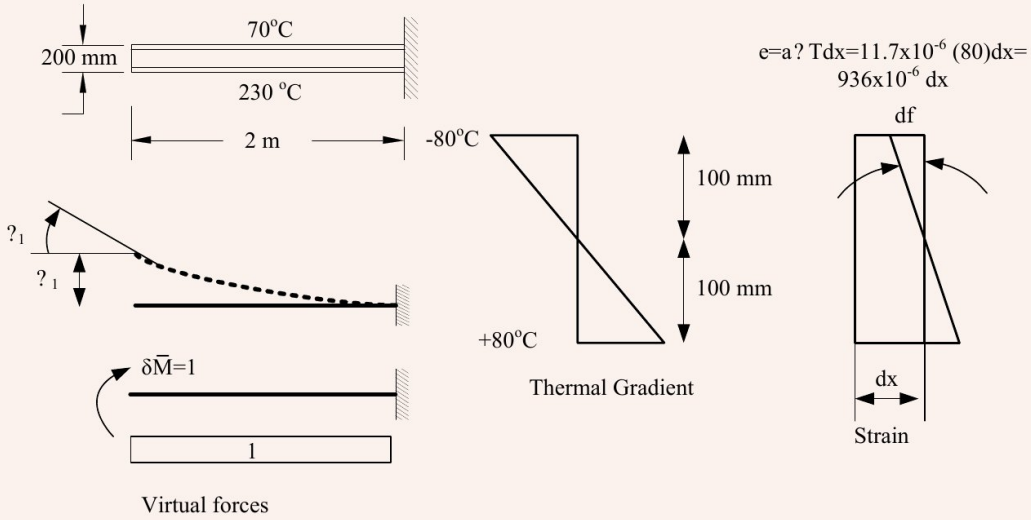
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.8 Thermal Effects in a Beam

Consider the cantilever beam shown. If the beam is a steel, wide flange section, 2 m long and 200 mm deep, what is the angle of rotation, θ_1, at the end of the beam caused by the temperature effect? The original uniform temperature of the beam was 40C.



Solution:

1. The external vurtual force conforming to the desired real displacement θ_1 is a moment $\delta\cdot\overline{M} = 1$ at the tip of the cantilever, producing an external work term of moment times rotation. The internal virtual force system for this cantilever beam is a uniform moment $\delta\cdot\overline{M_{int}} = 1$.
2. The real internal deformation results from (a) the average beam temperature of 150C, which is 110C above that of the original temperature, and (b) the temperature gradient of 160C across the depth of the beam.
3. The first part of the thermal effect produces only a lengthening of the beam and does not enter into the work equation since the virtual loading produces no axial force corresponding to an axial chnge in length of the beam.
4. The second effect (thermal gradient) produces rotation $d\phi$, and an internal virtual work term of $\int_0^L \delta\cdot\overline{M}\cdot\phi\, dx$
5. We determine the value of $d\phi$ by considering an extreme fiber thermal strain as shown above. The angular rotation in the length dx is the extreme fiber thermal strain divided by half the beam depth.

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2\cdot y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\varepsilon}{y} = \phi$$

$$1\cdot\theta_1 = \int_0^L \delta\cdot\overline{M}\cdot\phi\, dx$$

$$\theta_1 = \int_0^L 1\cdot\frac{\alpha\cdot\left(T_B - T_T\right)}{h}\, dx$$

$$\theta_1 := \frac{11.7\cdot10^{-6}\,\frac{m}{m}\cdot(230 - 70)\cdot 2m}{0.2m} = 0.01872\cdot rad$$

6. This example raises the following points
   a) The value of θ_1 would be the same for any shape of 200 mm deep steel beam that has its neutal axis of bending at middepth

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

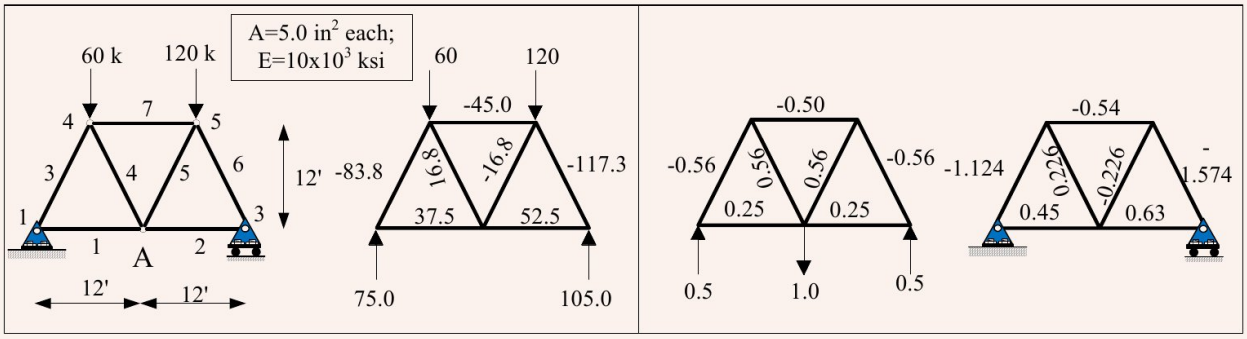
b) Curvature is produced only by thermal gradient and is independent of absolute temperature values.
c) The calculation of rotations by the method of virtual forces is simple and straightforward; the applied virtual force is a moment acting at a point where rotation is to be calculated.
d) Internal angular deformation dϕ has been calculated for an effect other than load-induced stresses. This extension of the method of virtual forces to treat inelastic displacements is obvious - all we need to know is a method for determining the inelastic internal deformations.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.9 Deflection of a Truss

Determine the deflection at node 2 for the truss shown



Solution:

Member	δP kip	P^e kip	L ft	A in^2	E ksi	δPPL/AE
1	0.25	37.5	12	5	10×10^3	22.5×10^{-4}
2	0.25	52.5	12	5	10×10^3	31.5×10^{-4}
3	-0.56	-83.8	13.42	5	10×10^3	125.9×10^{-4}
4	0.56	16.8	13.42	5	10×10^3	25.3×10^{-4}
5	0.56	-16.8	13.42	5	10×10^3	-25.3×10^{-4}
6	-0.56	-117.3	13.42	5	10×10^3	176.6×10^{-4}
7	-0.5	-45	12	5	10×10^3	54×10^{-4}
Total						410.5×10^{-4}

The deflection is thus given by

$$\delta \cdot \bar{P} \cdot \Delta = \sum_{n=1}^{7} \left(\delta \cdot \bar{P_e} \cdot \frac{PL}{AE} \right)$$

$$\Delta := 410.5 \cdot 10^{-4} \cdot ft = 0.493 \cdot in$$

Victor E. Saouma

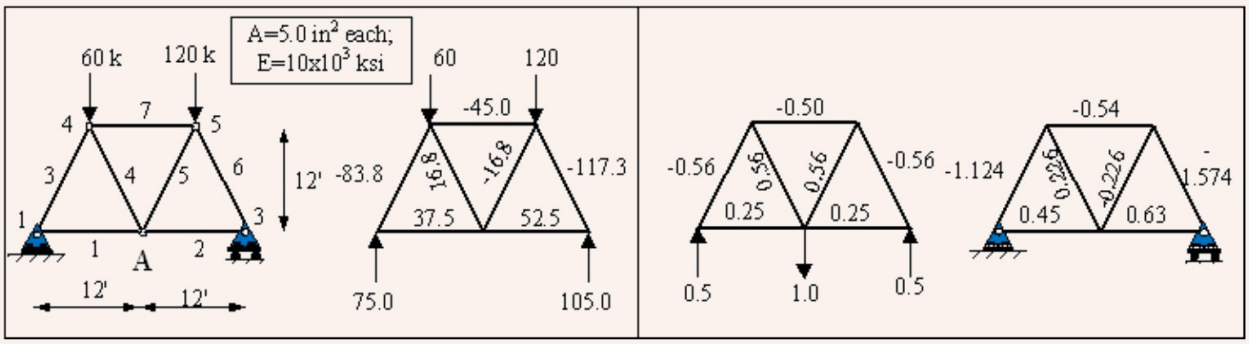
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.10 Thermal Deflection of a Truss; I

The truss shown is built such that the lower chords are shielded from the rays of the sun. On a summer day the lower chords are 30F cooler than the rest of the truss members. What is the magnitude of the vertical displacement at joint 2 as a result of this temperature difference?



Solution:

1. The virtual force system remains identical to that of the previous example because the desired displacement component is the same.
2. The real internal displacements are made up of the shortening of those members of the truss that are shielded from the sun.
3. Both the bottom chord members 1 and 2 thus shorten by

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\Delta L := \left(0.0000128 \frac{in}{in \cdot \Delta°F}\right)(30 \cdot \Delta°F) \cdot 12ft = 0.0553 \cdot in$$

4. Then,

$$1 \cdot \Delta = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P} \cdot \Delta L$$

$$\Delta := 0.25(-\Delta L) + 0.25(-\Delta L)$$

$$\Delta = -0.0276 \cdot in$$

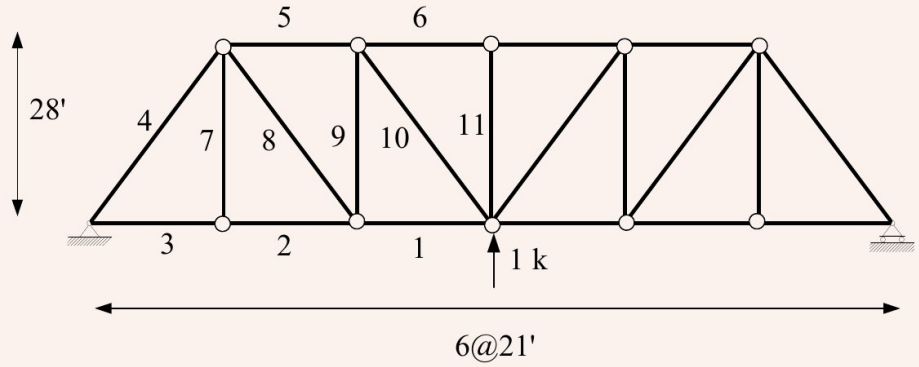
5. The negative sign n the displacement indicates that it is in opposite sense of the displacement; the assumed direction is always identical to the direction of the applied virtual force.
6. Note that the same result would be obtained if we had considered the internal displacements to be made up of lengthening of all truss members above the bottom chord.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.11 Thermal Deflection of a Truss; II

A six panel highway bridge is constructed with sidewalks outside the trusses so that the bottom chords are shaded. What will be the vertical deflection component of the bottom chord at the center of the bridge when the temperature of the bottom chord is 40F (ΔT) below that of the top chord, endposts, and webs? (coefficient of steel thermal expansion is $\alpha := 0.0000065 \cdot \frac{1}{\Delta°F}$



Solution:

1. The deflection is given by

$$\Delta \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{P} = \int_0^L \bar{\delta} \cdot \bar{P} \cdot \frac{P}{AE}\, dx = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P_i} \cdot \frac{P_i \cdot L_i}{AE} = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P_i} \cdot \Delta L_i = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P_i} \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

where ΔL is the temperature change in length of each member, and $\bar{\delta} \cdot \bar{P}$ are the member virtual internal forces

2. Taking advantage of symmetry (Note that we ignor members 1-3 because we assumed that they had the reference temperature, and all other members are subjected to a relative temperature increase of 40F)

Member	L ft	αΔTL	δP kip	δPΔL
4	35	0.0091	0.625	0.00568
5	21	0.00546	0.75	0.00409
6	21	0.00546	1.13	0.00616
7	0	0	0	0
8	35	0.0091	-0.625	-0.00568
9	28	0.00728	0.5	0.00364
10	35	0.0091	-0.625	-0.00568
11	0	0	0	0
Total				0.00821

3. Hence the total deflection is

$$\Delta := 2 \cdot 0.00821\,\text{ft} = 0.197 \cdot \text{in}$$

4. A more efficient solution would have consisted in considering members 1, 2, and 3 only and applying ΔT=-40F, we would obtain

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

the same displacement.

5. Note that the forces in members 1, 2, and 3 (-0.75, -0.375, and -0.375 respectively) were not included in the table because the corresponding ΔT=0.

6. A simple solution would have $\Delta T := -40 \cdot \Delta°F$ in members 1, 2,and 3 thus

Member	L ft	αΔTL	δP kip	δPΔL
1	21	-0.00546	-0.75	0.004095
2	21	-0.00546	-0.375	0.0020475
3	21	-0.00546	-0.375	0.0020475
Total				0.00819

$\Delta := 2 \cdot 0.00819 ft = 0.197 \cdot in$

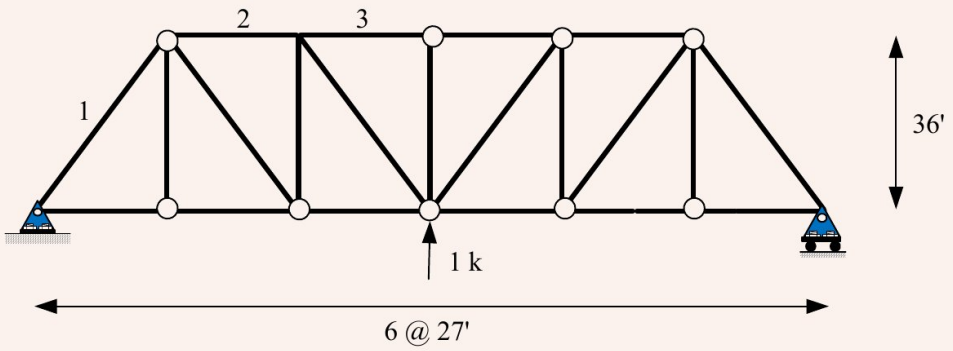
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.12 Truss with Initial Camber

It is desired to provide 3 in. of camber at the center of the truss shown below by fabricating the endposts and top chord members additionally long. How much should the length of each endpost and each panel of the top chord be increased?



Solution:

1. Assume that eachtop chord is increased 0.1 in.

Member	δP_{int} kip	ΔL in	$\delta P \Delta L$
1	0.625	0.1	0.0625
2	0.75	0.1	0.075
3	1.125	0.1	0.1125
Total			0.25

Thus,

$$2 \cdot 0.25\text{in} = 0.5 \cdot \text{in}$$

2. Since the structure is linear and elastic, the required increase of length for each section will be

$$\frac{3\text{in}}{0.5\text{in}} \cdot 0.1\text{in} = 0.6 \cdot \text{in}$$

3. If we use the practical value of 0.625in

$$\boxed{\frac{0.625\text{in} \cdot 0.5\text{in}}{0.1\text{in}} = 3.125 \cdot \text{in}}$$

Victor E. Saouma

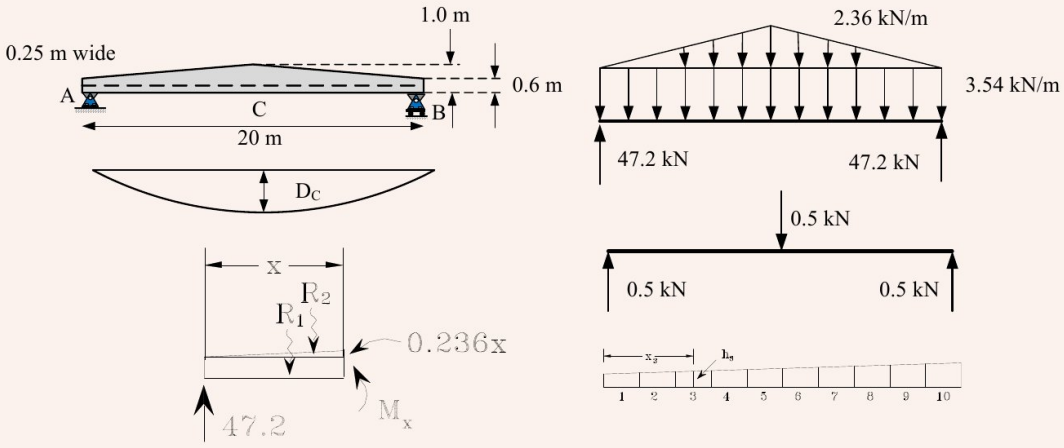
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.13 Prestressed Conrete Beam with Continuously Variable I

A prestressed concrete beam is made of variable depth for proper location of the straight pretensioning tendon. Determine the midspan displacement (point c) produced by the dead weight of the girder. The concrete weighs $w := 23.6\frac{kN}{m^3}$ and has $E := 25000MPa$. The beam is 0.25m wide.



Solution:

1. We seek an expression for the real moment M. This is accomplished by first determining the reactions and then considering the free body diagram.
2. We have the intermediary resultant forces

$$R_1(x) := 0.25m \cdot x \cdot 0.6m \cdot w \rightarrow \frac{3.54 \cdot kN \cdot x}{m}$$

$$R_2(x) := \frac{1}{2} \cdot 0.25m \cdot x \cdot \frac{0.4m}{10m} \cdot x \cdot w \rightarrow \frac{0.118 \cdot kN \cdot x^2}{m^2}$$

Hence,

$$M(x) := 47.2x - 3.54x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) - 0.118x^2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right) \rightarrow 47.2 \cdot x + -0.039 \cdot x^3 + -1.77 \cdot x^2$$

3. The moment of inertia of the rectangular beam varies continuously and is given, for the left half of the beam, by

$$I(x) = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$I(x) := \frac{1}{12}\cdot(0.25)\cdot(0.6 + 0.04x)^3 \rightarrow 0.021\cdot(0.04\cdot x + 0.6)^3$$

4. Thus, the real angle changes produced by the dead load bending are

$$d\phi = \frac{M}{EI}\cdot dx = \frac{47.2\cdot x + -0.039\cdot x^3 + -1.77\cdot x^2}{E\cdot\left(\frac{1}{48}\right)\cdot(0.6 + 0.04x)^3}$$

5. The virtual force system corresponding to the desired displacement is shown above with $\delta\cdot\overline{M} = \frac{1}{2}\cdot x$ for the left half of the span.

Since the beam is symmetrical, the virtual work equations can be evaluated for only one half of the beam and the final answer is then obtained by multiplying the half-beam result by two.

6. The direct evaluation of the integral $\int \delta\cdot\overline{M}\, d\phi$ is difficult beause of the expression for dϕ. Hence we shall use a numerical procedure, replacing the $\int \delta\cdot\overline{M}\cdot\left(\frac{M}{EI}\right) dx$ with the $\sum \delta\cdot\overline{M}\left(\frac{M}{EI}\right)\Delta x$, where each quantity in the summation is evaluated at the center of the interval Δx and held constant over the interval length. As Δx becomes very short, the solution approaches the exact answer.

7. An interval length of 1 meter, giving 10 elements in the half length of the beam, is chosen to establish an accurate result.

8. The internal virtual work quantity is then

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\, dx \sim \sum\left[\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\cdot\Delta x\right] = \sum\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{E\left(\frac{0.25}{12}\right)\cdot h^3}\cdot\Delta x = \frac{48}{E}\cdot\sum\left[\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{h^3}\cdot\Delta x\right]$$

9. The summation for the 10 elements in the left half of the beam gives

Segment	x	h	h^3	M	δM	$M\delta M/h^3$
1	0.5	0.62	0.238	23.2	0.25	24
2	1.5	0.66	0.288	66.7	0.75	174
3	2.5	0.7	0.343	106.4	1.25	388
4	3.5	0.74	0.405	150	1.75	648
5	4.5	0.78	0.475	173	2.25	820
6	5.5	0.82	0.551	200	2.75	998
7	6.5	0.86	0.636	222	3.25	1134
8	7.5	0.9	0.729	238	3.75	1224
9	8.5	0.94	0.831	250	4.25	1279
10	9.5	0.98	0.941	256	4.75	1292
Total						7981

10. The SI units should be checked for consistency. Letting the virtual force carry the units of kN, the virtual moment has the

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

units of m-kN, and the units of the equation

$$\frac{1}{kN}\cdot\frac{(m\cdot kN)\cdot(m\cdot kN)}{\frac{MN}{m^2}\cdot m^4}\cdot m = \frac{m}{1000} = mm$$

11. Then

$$\int_0^L \frac{\delta\cdot\overline{M}\cdot M}{EI}\,dx$$

$$2\cdot\left(\frac{48}{25000}\right)\cdot 7981\cdot 1\cdot mm = 30.65\cdot mm$$

and the deflection at midspan is

$$\Delta_c := 30.65\ mm$$

12. Acceptably accurate results may be obtained with considerably fewer elements (longer intervals Δx). Using four elements with centers at 2, 5, 8, and 10, the $\sum \delta\cdot\overline{M}\left(\frac{M}{EI}\right)\Delta x$ is

$$3(174) + 3\cdot(820) + 3\cdot(1224) + 1\cdot(1292) = 7946$$

which is only 0.4% lower than the 10 element solution. If we go to two elements, 3 and 8, we obtain a summation of $5\cdot 388 + 5\cdot 1224 = 8060$ which is 1% high. A one element solution, with x=5m and h=0.8m, gives a summation of 9136 which is 14.4% high and much less accurate than the 2 element solution.

13. Finally, it should be noted that the calculations involved in this example are essentially identical to those necessary in the moment area method.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

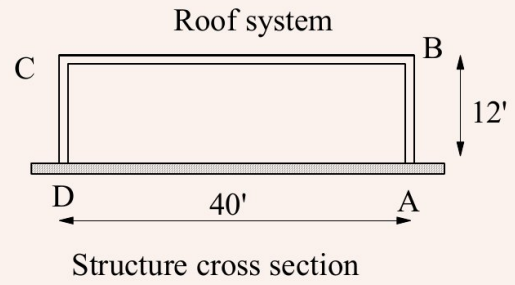
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

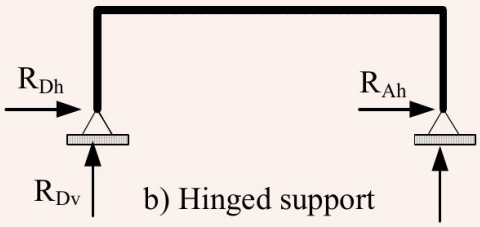
14.1 Steel Building Frame Analysis

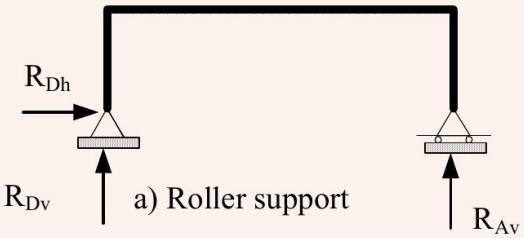
A small, mass-produced industrial building is to be framed in structural steel with a typical cross as shown below. The engineer is considering three different designs for the frame: (a) for poor or unknown soil conditions, the foundation for the frame may not be able to develop any dependable horizontal forces at its bases. In this case the idealized base conditions are a hinge at one of the bases and a roller at the other; (b) for excellent soil conditions with properly designed foundations, the base of the frame legs will have no tendency to move horizontally, and the idealized base condition is that of hinges at both points A and D; and (c) a design intermediate to the above cases, with a steel tie member capable of carrying only tension running between points A and D in the floor of the building. The foundations would not be expected to provide any horizontal restraint for this latter case, and the hinge-roller details at points A and D would apply. Critical design loads for a frame of this type are usually the gravity loads (deal load + snow load) and the combination of dead load and wind load. We will restrict our attention to the first condition, and will use a snow load of $S := 30\text{psf}$ and an estimated total dead load of $D := 20\text{psf}$. With frames spaced at $\text{spacing} := 15\text{ft}$ on centers along the length of the building, the design load is $w_{\text{total}} := \text{spacing}\cdot(S + D) = 750\cdot\frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$. If the frame is made of steel beam sections 21 in. deep and weight 62 lb/ft of length (W 21x62), and the member for design (c) is tentatively chosen as a 2 in^2 bar, determine the bending moment digrams for the three designs and discuss the alternate solutions

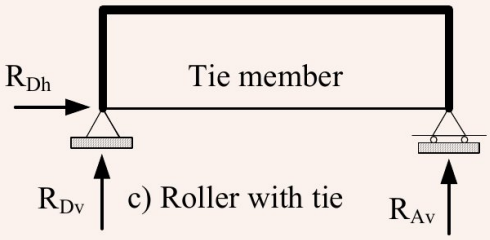
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



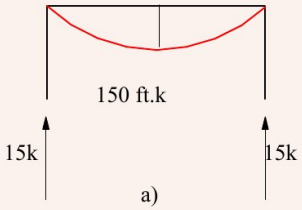


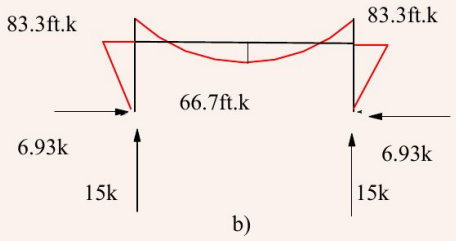


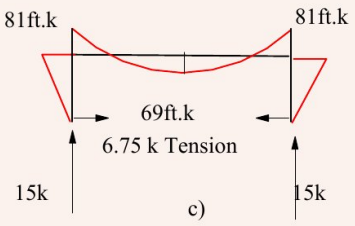


Solution:

Structure a This frame is statically determinate since it has three possible unknown external forces acting on it. Final bending moments are shown below.



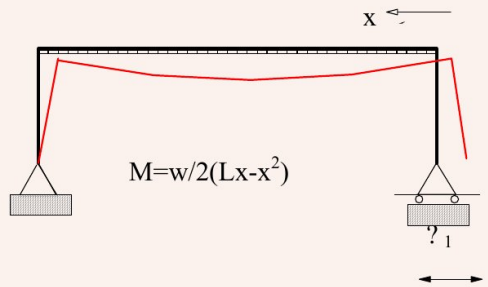




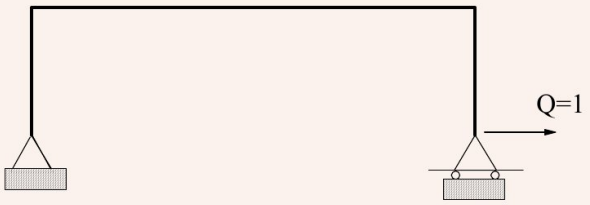
Structure b Hinging both legs of the frame results in another unknown force, making the structure statically indeterminate to the first degree (one redundant).
1. A lateral release at point A is chosen, with the redundant shearing force R1. The displacement Δ_1 in the primary structure, as a result of the real loading, shown in the figure below, is computed by virtual work.
2. The virtual force system produces virtual bending moment $\delta \cdot \overline{M}$, which is uniform across the top member of the frame.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

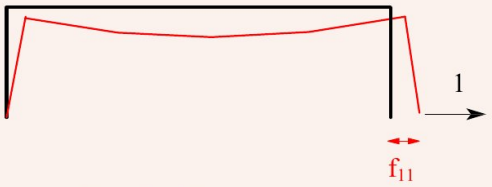
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



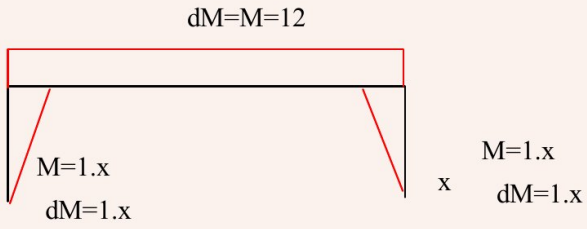
a) Moment caused by actual load on primary structure



b) Virtual forces



c) Real load for determining f_{11}



d) Moments produced by virtual forces and unit redundant

The virtual moment acting through the real angle changes given the internal work term

$$1\cdot\Delta_1 = \int_0^{40} \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx$$

3. Equating this to the external virtual work of $1\cdot\Delta_1$, we have

$$1\cdot\Delta_1 = \int_0^{40} 12\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.75\left(40x - x^2\right)}{EI}\,dx\cdot kip\cdot ft^3$$

$$\Delta_1(EI) := \int_0^{40} 12\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.75\left(40x - x^2\right)}{EI}\,dx\cdot kip\cdot ft^3 \rightarrow \frac{48000\cdot ft^3\cdot kip}{EI}$$

4. The equation of consistent displacement is $\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 = 0$. The flexibility coefficient f_{11} is computed by applying a unit horizontal force at the release and determining the displacement at the same point.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5. It is seen that the real loading and the virtual loading are identical for the calculations, and

$$1 \cdot f_{11} = 2\left(\int_0^{12} x \cdot \frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12 \cdot \frac{12}{EI}\,dx\right)$$

or

$$f_{11}(EI) := 2\left(\int_0^{12} x \cdot \frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12 \cdot \frac{12}{EI}\,dx\right) \cdot kip \cdot ft^3 \rightarrow \frac{6912 \cdot ft^3 \cdot kip}{EI}$$

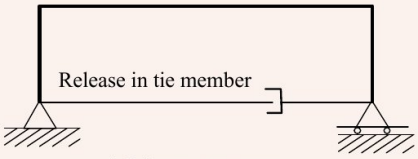
6. solving for R1

$$\frac{1}{EI} \cdot \left(48000 + 6912 R_1\right) = 0$$

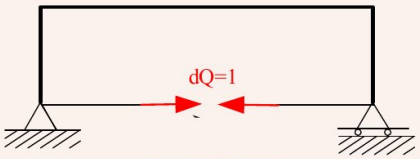
or

$$R_1 := \frac{48000}{6912} \cdot kip = 6.944 \cdot kip$$

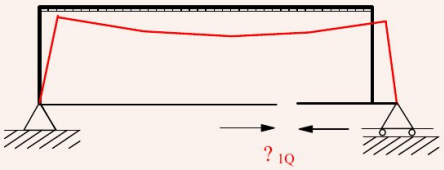
Structure c The frame with the horizontal tie between the points A and D has three unknown external forces. However, the structure is statically indeterminate to the first degree since the tie member provides one degree of internal redundancy.
1. The logical release to choose is a longintudinal release in the tie member, with the associated longitudinal displacement and axial force.
2. The primary structure is the frame with the tie member released.



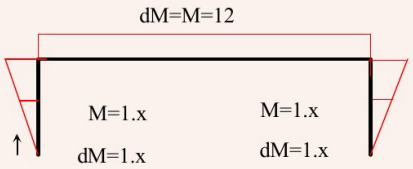
a) Primary structure



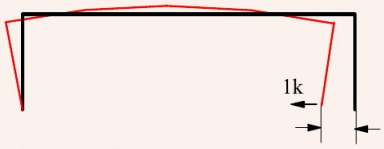
c) Virtual forces



b) Actual loading on primary structure



e) Moments produced by virtual forces and unit redundants



d) Real loading for computing f_{11} f_{11}

The compatability equation is based on the fact that the displacement at the release must be zero; that is, relative displacement of the two sections of the tie at the point of release must be zero, or

$$\Delta_1 + f_{11} \cdot R_1 = 0$$

where

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Δ_1 = displacement at release 1 in the primary structure, produced by the loading

f_{11} = relative displacement at release 1 for a unit axial force in the member

R_1 = force in the tie member in the original structure

3. Virtual work is used to determine both displacement terms.
4. The value of Δ_1 is identical to the displacement for structure (b) because the tie member has no forces (and consequently no deformation) in the primary structure. Thus,

$$\Delta_1 := \frac{48000\text{kip}\cdot\text{ft}^3}{30000\text{ksi}\cdot 1327\text{in}^4} = 2.083\cdot\text{in}$$

5. The flexibility coefficient f_{11} is composed of two separate effects: a flexural displacement due to the flexibility of the frame, and the axial displacement of the stressed tie member. The virtual and real loadins for this calculation are shown in the previous figure.

$$1\cdot f_{11} = 2\left(\int_0^{12} x\cdot\frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12\cdot\frac{12}{EI}\,dx\right) + \delta\cdot P\cdot\frac{PL}{EA}$$

$$1f_{11} = \frac{6912}{EI} + \frac{1\cdot 1\cdot 40}{EA}$$

$$f_{11} := \left(\frac{6912\text{kip}\cdot\text{ft}^3}{30000\text{ksi}\cdot 1327\text{in}^4} + \frac{40\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}}{30000\text{ksi}\cdot 2\text{in}^2}\right)\cdot\frac{1}{\text{kip}} = 0.308\cdot\frac{\text{in}}{\text{kip}}$$

6. The equation of consistent deformation is

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 = 0$$

or

$$R_1 := \frac{-\Delta_1}{f_{11}} = -6.764\cdot\text{kip}$$

7. The two displacement terms in the equation must carry opposite signs to account for their differences in direction.

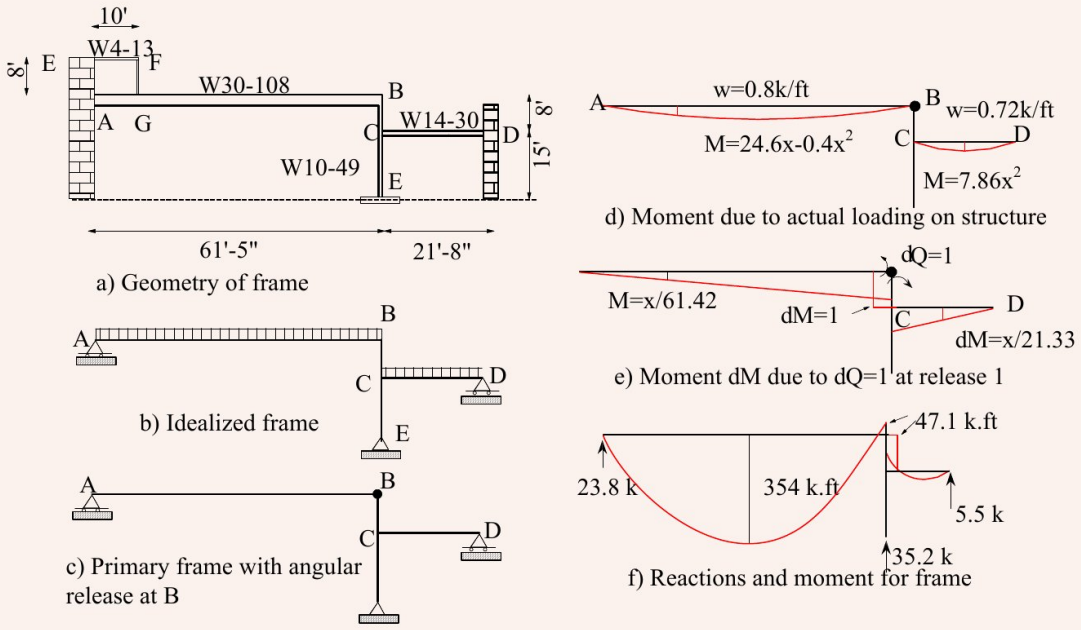
Comments The bending moment in the frame differes only slightly from that of structure (b). In other words, the tie member has such high axial stiffness that it provides nearly as much restraint as the foundation of structure (b). Frames with tie members are used widely in industrial buildings. A lesson to be learned here is that it is easy to provide high stiffness through an axially loaded member.
The maximum moment in frames (b) and (c) is about 55% of the maximum moment in frame (a). This effect of continuity and redundancy is typical - the positive bending moments in the members are lowered while the joint moments are increased and a more economical design can be realized. Finally, we should notice that the vertical reactions at the bases of the columns do not change with the degree of horizontal restraint at the bases.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.2 Analysis of Irregular Building Frame

The structural steel frame for the Church of the Holy Spirit, Penfield, New York is shown below. In this example we will discuss the idealization of the structure and then determine the forces and bending moments acting on the frame.



Solution:

1. The two main horizontal members of the frame are supported at points A and D by masonry walls.
2. The connection used at these points is not intended to transmit axial forces from the frame to the wall; accordingly, the axial forces in the horizontal members are assumed to be zero and the joints at A and D are idealized as rollers that transmit vertical forces only.
3. The base joint E is designed to resist both horizontal and vertical loads, but not moment, and is assumed to be a hinge.
4. Finally, joints B and C are designed to provide continuity and will be taken as rigid; that is, the angles of intersection of the members at the joint do not change with applied loading.
5. The frame is simplified for analysis by removing the small 4 in. wide flange members EF and FG and replacing their load effect by applying the roof load with acts on EF directly to the segment AG.
6. the idealized frame is shown above.
7. The dead load on the higher portion of the frame is $p_{AB} := 25\text{psf}$ times the frame spacing of $\text{spacing} := 13.33\text{ft}$, or

$w_{AB} := p_{AB} \cdot \text{spacing} = 333 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$ along the frame.

8. The dead load on CD is less beacuse the weight of the frame member is substantially smaller, and the dead load is about

$p_{CD} := 19\text{psf}$, or $w_{CD} := p_{CD} \cdot \text{spacing} = 253 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$.

9. Snow load is $S := 35\text{psf}$ over both areas, or $w_{Snow} := S \cdot \text{spacing} = 467 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$.

10. The total loads are then

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member AB: $w_{totAB} := w_{AB} + w_{Snow} = 0.8 \cdot \frac{kip}{ft}$

Member CD: $w_{totCd} := w_{CD} + w_{Snow} = 0.72 \cdot \frac{kip}{ft}$

11. the frame has four unknown reaction components and therefore has one redundant. Although several different releases are possible, we choose an angular (bending) release at point B.
12. The resulting primary structure is shown as (c) in the figure above, where the redundant quantitity R1 is the bending moment at point B.
13. The equation of compatability is

$$\theta_1 + f_{11} \cdot M_1 = 0$$

where θ_1 is the relative angular rotation corresponding to release 1 as produced by the actual loading, and f_{11} is the flexibility coefficient for a unit moment acting at the release.

14. From virtual work we have

$$1 \cdot \theta_1 = \int \delta\cdot\overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\, dx$$

and

$$1 \cdot f_{11} = \int \delta\cdot\overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\, dx$$

where $\delta\cdot\overline{M}$ and M are defined in (e) in the figure above.

15. Then

$$\theta_1(EI_{AB}, EI_{CD}) := \left[\frac{1}{EI_{AB}} \cdot \int_0^{61.42} \frac{x}{61.42} \cdot \left(24.6x - 0.4x^2\right) dx + \frac{1}{EI_{CD}} \cdot \int_0^{21.33} \frac{x}{21.33} \cdot \left(7.68x - 0.36x^2\right) dx \right]$$

$$\theta_1(EI_{AB}, EI_{CD}) \rightarrow \frac{291.31658667}{EI_{CD}} + \frac{7763.6329512000000002}{EI_{AB}}$$

16. With $I_{AB} := 4470in^4$ and $I_{CD} := 290in^4$

$$\theta_1(E) := \left(\frac{291}{E \cdot I_{CD}} + \frac{7764}{E \cdot I_{AB}}\right) \cdot in^4 \rightarrow \frac{118411}{43210 \cdot E}$$

17. Similarly

$$f_{11}(EI_{AB}, EI_{CD}, EI_{BC}) := \frac{1}{EI_{AB}} \cdot \int_0^{61.42} \left(\frac{x}{61.42}\right)^2 dx + \frac{1}{EI_{CD}} \cdot \int_0^{21.33} \left(\frac{x}{21.33}\right)^2 dx + \frac{1}{EI_{BC}} \cdot \int_0^{8} (1)^2 dx$$

$$f_{11}(EI_{AB}, EI_{CD}, EI_{BC}) \rightarrow \frac{8}{EI_{BC}} + \frac{20.473}{EI_{AB}} + \frac{7.11}{EI_{CD}}$$

18. With $I_{BC} := 273in^4$

$$f_{11}(E) := \left(\frac{8}{E \cdot I_{BC}} + \frac{20.473}{E \cdot I_{AB}} + \frac{7.11}{E \cdot I_{CD}}\right) \cdot in^4 \text{ simplify } \rightarrow \frac{0.058}{E}$$

Note that the numerators of θ_1 and f_{11} have units of $kip \cdot ft^2$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रारूप

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that the numerators of θ_1 and f_{11} have units of $\frac{}{in^4}$

19. Applying the compatability equation,

$$\frac{118411}{43210 \cdot E} + \frac{0.058}{E} \cdot M_1 = 0$$

and the bending moment at point B is

$$M_1 := \frac{-\frac{118411}{43210 \cdot E}}{\frac{0.058}{E}} \cdot kip \cdot ft = -47.248 \cdot kip \cdot ft$$

The reactions and moments in the structure are given in (f) in the figure above.

20. Once we have M_1, the structure is by now statically determinate and from statics we can complete the shear and moment diagrams.

Victor E. Saouma

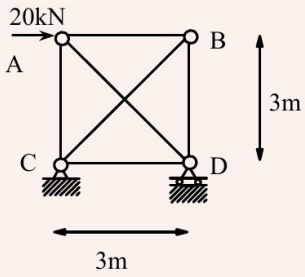
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.3 Redundant Truss Analysis

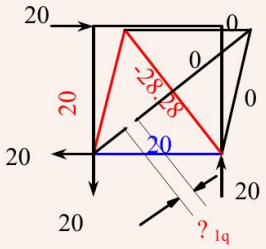
Determine the bar forces in the steel truss shown below using the flexibility method. The truss is part of a supporting tower for a tank, and the 20 kN horizontal load is produced by wind loading on the tank.



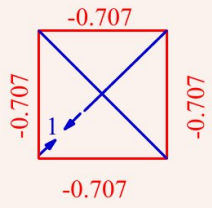
a) Original Structure



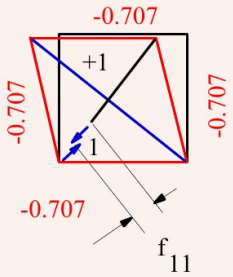
b) Primary structure



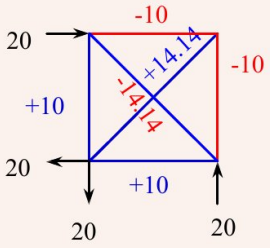
c) Primary structure subjected to real load



d) Virtual load on primary structure



e) Action of unit force corresponding to redundant R_1



f) Final results

Solution:

1. Applying the criteria for indeterminancy $2 \cdot 4 = 8$ equations, 6 members + 3 reactions => one degree of indeterminancy. A logitudnial release in any of the six bars may be chosen.
2. Because the truss members carry only axial load, the longitudinal release is identical to actually cutting the member and removing its axial force capability from the truss.
3. In analyzing the trusses with double diaganols it is both convenient and customary to select the release in one of the diganol members because the resulting primary structure will be the conventional truss to which we are accustomed.
4. Choosing the diagonal member BC for the release, we cut it and remove its axial stiffness from the structure. The primary structure is shown in (b) in the figure above.
5. The analysis problem reduces to applying an equation of compatability to the changes in length of the release member. The relative displacement Δ_1 of the two cut ends of member BC, as producued by the real loading, is shown in (d) in the figure above.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

6. The displacement is always measured along the length of the redundant member, and since the redundant is unstressed at this stage of the analysis, the displacement Δ_1 is equal to the relative displacement of joint B with respect to joint C.
7. This displacement must be eliminated by the relative displacements of the cut ends of member BC when the redundant force is acting on the member. The latter displacement is written in terms of the axial flexibility coefficient f_{11}, and the desired equation of consistent deformation is

$$\Delta_1 + f_{11} \cdot R_1 = 0$$

8. The quantity Δ_1 is given by

$$1 \cdot \Delta_1 = \sum \delta \cdot \bar{P} \left(\frac{PL}{AE} \right)$$

where $\delta \cdot \bar{P}$ and P are given in (d) and (e) in the figure above, respectively

9. Similarly,

$$f_{11} = \sum \delta \cdot \bar{P} \left(\frac{\bar{P} \cdot L}{AE} \right)$$

10. Evaluating these summations in tabular form:

Member	P kN	δP kN	L m	δPPL	δPPL
AB	0	-0.707	3	0	1.5
BD	0	-0.707	3	0	1.5
CD	20	-0.707	3	-42.42	1.5
AC	20	-0.707	3	-42.42	1.5
AD	-28.28	1	4.242	-119.96	4.242
BC	0	1	4.242	0	4.242
Total				-204.8	14.484

11. Since A = constant for each member

$$\Delta_1 = \sum \delta \cdot \bar{P} \left(\frac{PL}{AE} \right) = \frac{-204.8}{AE} \cdot kN^2 \cdot m \quad \text{and} \quad f_{11} = \frac{14.484}{AE} \cdot kN^2 \cdot m$$

then

$$\frac{1}{AE} \cdot \left(-204.8 + 14.484 \cdot R_1 \right) = 0$$

12. the solution for the redundant force value is $R_1 := \frac{204.8}{14.484} \cdot kN = 14.14 \cdot kN$

13. The final values for forces in each of the truss members are given by superimposing the forces due to the redundant and the forces due to the real loading.
14. The real loading forces are shown in (c) in the figure above, while the redundant force effect is computed by multiplying the member forces in (d) in the figure above by 2.83, the value of the redundant.

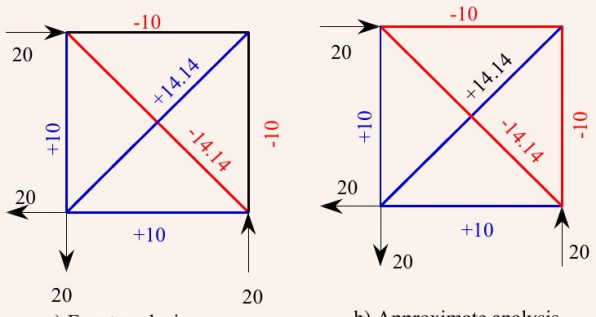
Member	δP kN	R_1δP kN	P kN	P_{total} kN
AB	-0.707	-10	0	-10
BD	-0.707	-10	0	-10
CD	-0.707	-10	20	10
AC	-0.707	-10	20	10
AD	1	14.14	-28.28	-14.14

Victor E. Saouma संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	δP kN	$R_1\delta P$ kN	P kN	P_{total} kN
AB	-0.707	-10	0	-10
BD	-0.707	-10	0	-10
CD	-0.707	-10	20	10
AC	-0.707	-10	20	10
AD	1	14.14	-28.28	-14.14
BC	1	14.14	0	14.14

15. It is informative to compare the member forces from this solution to the approximate analysis obtained by assuming that the double diagonals each carry half the total shear in the panel. The comparison is given in the figure below



a) Exact analysis

b) Approximate analysis

It reveals that the approximate analysis is the same as the exact analysis for this particular truss. The reason for this is that the stiffness provided by each of the diagonal members (against "shear" deformation of the rectangular panel) is the same, and therefore they each carry an equal portion of the total shear accross the panel.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.4 Truss with Two Redundants

Another panel with a second redundant member is added to the truss of the preceeding example

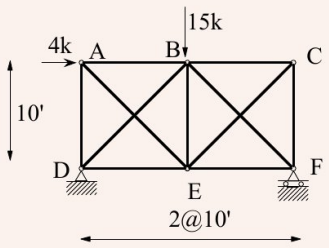
Solution:

1. The twice redundant truss is converted to a determinate primary structure by releasing two members of the truss; we choose two diagonals (DB and BF).
2. Releasing both diagonals in a single panel, such as members AE and DB, is inadmissible since it leads to an unstable truss form.
3. The member forces and required displacements for the real loading and for the two redundant forces in members DB and BF are given in the figure below.

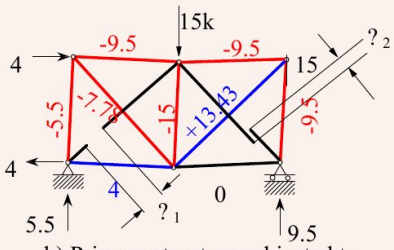
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

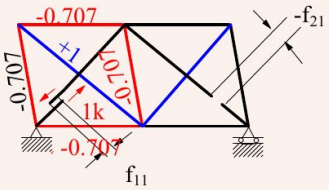
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



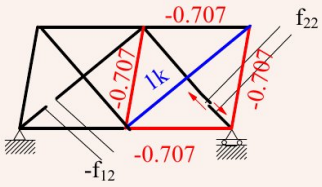
a) Original structure; all A=4 in^2



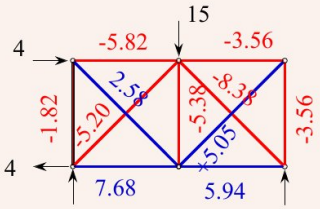
b) Primary structure subjected to real load



c) Action to unit force R_1=1



d) Action of unit force R2=1



e) Final results

4. Although the rela loading ordinarily stresses all members of the entire truss, we see that the unit forces corresponding to the redundant stress only those members in the panel that contain the redundant; all other bar forces are zero.
5. Recognizing this fact enables us to solve the double diagonal truss problem more rapidly than a frame with multiple redundants.
6. The virtual work equations for computing the six required displacements (two due to load and four flexibilities) are

$$1\cdot\Delta_1 = \sum \delta\cdot\overline{P}_1\left(\frac{PL}{AE}\right)$$

$$1\cdot\Delta_2 = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{PL}{AE}\right)$$

$$1\cdot f_{11} = \sum \delta\cdot\overline{P}_1\left(\frac{\overline{P}_1\cdot L}{AE}\right)$$

$$1\cdot f_{21} = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{\overline{P}_1\cdot L}{AE}\right)$$

$f_{12} = f_{21}$ by reciporocal theorem

$$1\cdot f_{22} = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{\overline{P}_2\cdot L}{AE}\right)$$

7. If we assume tension in a truss member as positive, use tensile unit loads when computing the flexibility coeeficients corresponding to the redundants, and let all displacement terms carry their own signs, then in the for the redundants a positive value of force indicates tension while a negative value menas the member is in compression.
8. The calculation of f_{22} involves only the six members in the left panel of the truss; f_{21} invloves only member BE.
9. The simple used for performing the displacement analyses, as summarized in tabular form, leads one quickly to the compatability equations which state that the cut ends of both redundant members must match (there can be no gaps or overlaps of members in the actual structure).

Member	P	P_1	P_2	Δ_1	Δ_1	f_{11}	f_{21}	f_{22}
				$\delta P_1 PL$	$\delta P_2 PL$	$\delta P_1 P_1 L$	$\delta P_2 P_1 L$	$\delta P_2 P_2 L$
AB	-9.5	-0.707	0	806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	P	P_1	P_2	Δ_1	Δ_1	f_{11}	f_{21}	f_{22}
				$\delta P_1 PL$	$\delta P_2 PL$	$\delta P_1 P_1 L$	$\delta P_2 P_1 L$	$\delta P_2 P_2 L$
AB	-9.5	-0.707	0	806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60
CF	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60
EF	0	0	-0.707	0	0	0	0	60
DE	4	-0.707	0	-340	0	60	0	0
AD	-5.5	-0.707	0	466	0	60	0	0
AE	7.78	1	0	1322	0	170	0	0
BE	-15	-0.707	-0.707	1272	1272	60	60	60
CE	13.43	0	1	0	2280	0	0	170
BD	0	1	0	0	0	170	0	0
BF	0	0	1	0	0	0	0	170
Total				3528	5164	580	60	580

10. The equations are

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 + f_{12}\cdot R_2 = 0$$

$$\Delta_2 + f_{21}\cdot R_1 + f_{22}\cdot R_2 = 0$$

or

$$\frac{1}{AE}\cdot\begin{pmatrix}580 & 60\\ 60 & 580\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\end{pmatrix} = \frac{-1.}{AE}\cdot\begin{pmatrix}3528\\ 5164\end{pmatrix}$$

11. The final set of forces in the truss is obtained by adding up, for each member, the three separate effects. In terms of the forces shown in the figure above, the force in any member is given by $F = P + R_1\cdot\overline{P_1} + R_2\cdot\overline{P_2}$

Member	P	P_1	P_2	R_1P_1	R_2P_2	P_{total}
AB	-9.5	-0.707	0	3.676	0	-5.82
BC	-9.5	0	-0.707	0	5.925	-3.56
CF	-9.5	0	-0.707	0	5.925	-3.56
EF	0	0	-0.707	0	5.925	5.94
DE	4	-0.707	0	3.676	0	7.68
AD	-5.5	-0.707	0	3.676	0	-1.82
AE	7.78	1	0	-5.2	0	2.58
BE	-15	-0.707	-0.707	3.676	5.925	-5.38
CE	13.43	0	1	0	-8.38	5.05
BD	0	1	0	-5.2	0	-5.2
BF	0	0	1	0	-8.38	-8.38

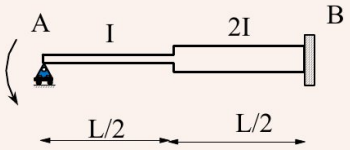
14.5 Analysis of Nonprismatic Members

The nonprismatic beam is loaded with an end moment M_A at its hinged end A. Determine the moment induced at the fixed end B by this loading.

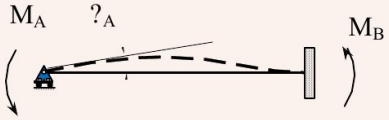
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



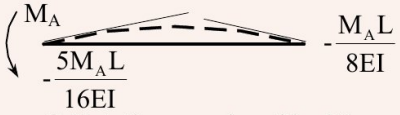
a) Beam with end B fixed



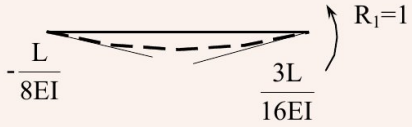
b) Elastic curve



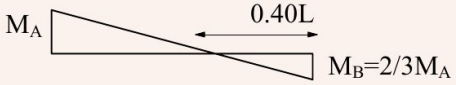
c) Primary structure



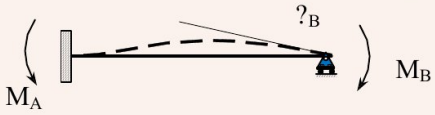
d) Rotations produced by M_A



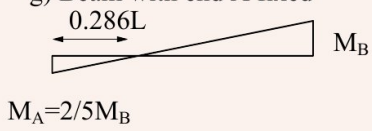
e) Rotations produced by a unit value of redundant R_1



f) Moment diagram for A hinged, B fixed



g) Beam with end A fixed



h) Moment diagram for A fixed, B hinged

Solution:

1. The beam has one redundant force; we select M_B as the redundant R_1, and obtain the primary structure shown in the figure above. It can be shown that the flexibility coefficients for unit moments applied at each end are those in (d) and (e) in the figure above, with a sing convention of counterclockwise as positive.
2. The equation of consistent displacement at B is

$$\frac{-M_A \cdot L}{8E \cdot I} + \frac{3}{16} \cdot \frac{L}{E \cdot I} \cdot R_1 = 0$$

and the value of M_B is

$$M_B = R_1 = \frac{2}{3} \cdot M_A$$

3. The resulting moment diagram is given in (f). We note that the inflection point is 0.4L from the fixed end. If the beam had a uniform value of I across its span, the inflection point would be L/3 from the fixed end. Thus the inflection point shifts toward the section of reduced stiffness.
4. The end rotation θ_A is given by

$$\theta_A = \frac{5}{16} \cdot \frac{M_A \cdot L}{E \cdot I} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot M_A \right) \cdot \frac{L}{E \cdot I} = \frac{11}{48} \cdot \frac{M_A \cdot L}{E \cdot I}$$

5. The ratio of the applied end moment to rotation $\frac{M_A}{\theta_A}$ is called the rotational stiffness and is

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{M_A}{\theta_A} = \frac{48}{11}\cdot\frac{E\cdot I}{L}$$

6. If we now reverse the boundary conditions, making A fixed and B hinged, and repeat the analysis for an applied moment M_B, the resulting moment diagram will be as given in (h) in the above figure. The moment induced at end A is only 40% of the applied end moment M_B. The inflection point is 0.286L from the fixed end A. The corresponding end rotation θ_B in (g) in the figure above is

$$\theta_B = \frac{11}{80}\cdot\frac{M_B\cdot L}{E\cdot I}$$

7. The rotational stiffness $\frac{M_B}{\theta_B}$ is

$$\frac{M_A}{\theta_A} = \frac{80}{11}\cdot\frac{E\cdot I}{L}$$

8. A careful comparison of the rotational stiffnesses, and of the moment diagrams in (f) and (h) in the figure above, illustrate the fact that flexural sections of increased stiffness attract more moment, and that inflection points always shift in the direction of decreased stiffness.
9. The approach illustrated here may be used to determine moments and end rotations in any type of non-prismatic member. The end rotations need in the force analysis may be calculated by either virtual work or moment area (or by other methods). Complex variations in EI are handles by numerical integration of the virtual work equation or by approximating the resultant M/EI area and their locations in the moment area method.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.6 Fixed End Moments for Nonprismatic Members

The beam of the previous example

Solution:

1. The beam has two redundant forces and we select M_A and M_B. Releasing these redundants, R_1 and R_2, we obtain the primary sturcture.
2. The equations of consistent deformations are

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 + f_{12}\cdot R_2 = 0$$

$$\Delta_2 + f_{21}\cdot R_1 + f_{22}\cdot R_2 = 0$$

where R_1 is M_A and R_2 is M_B.

3. The values of Δ_1 and Δ_2, the end rotations produced by the real loading on the primary structure, can be computed by the virtual work method.
4. The flexibility coefficients are also separately derived (not yet in these notes)
5. We define counterclockwise end moments and rotations as positive and obtain

$$\frac{L}{E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix}\frac{5}{16} & \frac{-1}{8}\\ \frac{-1}{8} & \frac{3}{16}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R_1\\ R_1\end{pmatrix} = \frac{w\cdot L^3}{E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix}-0.352\\ 0.0273\end{pmatrix}$$

from which

$$\boxed{R_1 = M_A = 0.0742 w\cdot L^2}$$

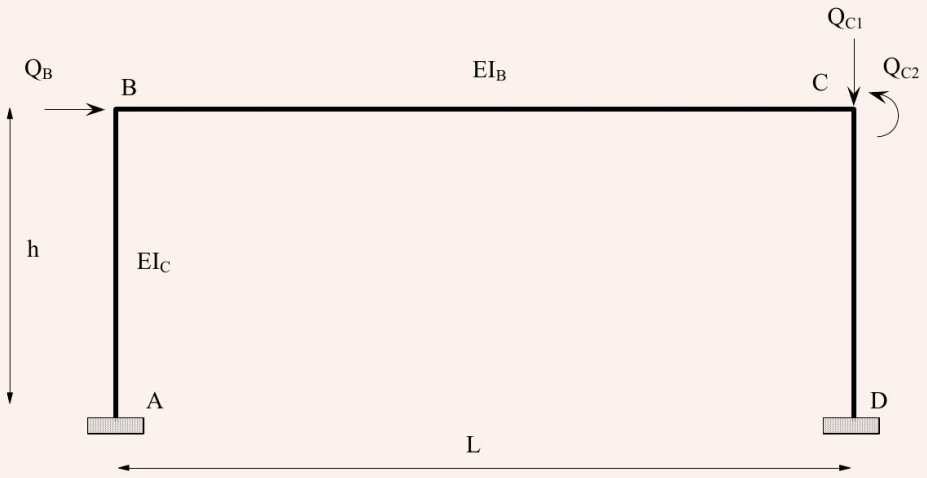
$$\boxed{R_2 = M_B = -0.0961 w\cdot L^2}$$

6. The stiffer end of the beam attracts 30% more than the flexible end.
7. For a prismatic beam with constant I, the fixed end moments are equal in magnitude ($M_A = -M_B = \frac{w\cdot L^2}{12}$) and intermediate in value between the two end moments determiend above.
8. Fixed end moments are an essential part of indeterminate analysis based on the displacement (stiffness) method and will be used exclusively in the Moment Distribution method.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

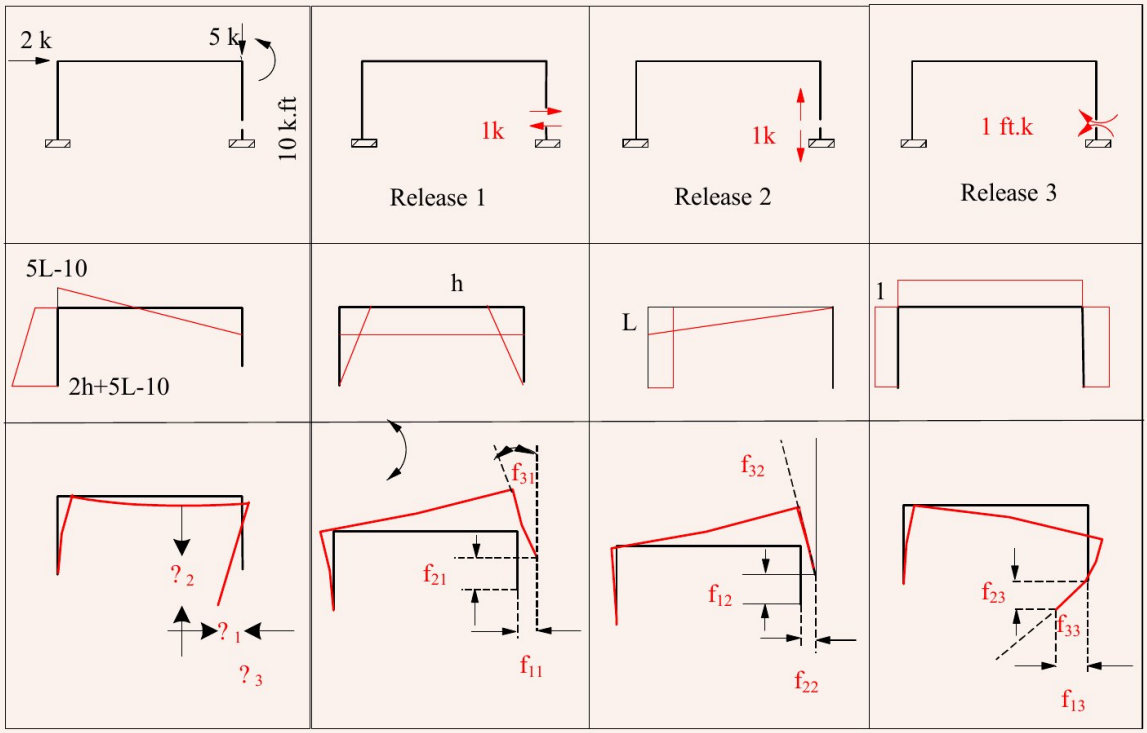
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.7 Rectangular Frame; External Load



Solution:

1. The structure is statically indeterminate to the third degree, and the displacements (flexibility terms) are shown in the figure above.
2. In order to evaluate the 9 flexibility terms, we refer tot he table.



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. Substituting $h := 10ft$, $L := 20ft$, and $EI_B = EI_C = EI$, the flexibility matrix then becomes

$$f = \frac{1}{EI} \cdot \begin{pmatrix} 2667 & 3000 & -300 \\ 3000 & 6667 & -400 \\ -300 & -400 & 40 \end{pmatrix}$$

and the vector of displacements for the primary structure is

$$\Delta = \frac{1}{EI} \cdot \begin{pmatrix} -12833 \\ -31333 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

where the units are kips and feet.

4. The inverse of the flexibility matrix is

$$f^{-1} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 2.4 & 0 & 18 \\ 0 & 0.375 & 3.75 \\ 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix}$$

5. Hence the reactions are determined from

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} := 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 2.4 & 0 & 18 \\ 0 & 0.375 & 3.75 \\ 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \left[\frac{1}{EI} \cdot \begin{pmatrix} -12833 \\ -31333 \\ 1800 \end{pmatrix} \right] \rightarrow \begin{pmatrix} 1.601 \\ -5 \\ 7.007 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.8 Frame with Temperature and Support Displacements

The single bay frame, of the previous example, has a height $h := 10\text{ft}$ and span $L := 20\text{ft}$ and its two supportsrigidly connected and is constructed of reinforced concrete. It supports a roof and wall partitions in such a manner that linear temperature variation occurs across the depth of the frame members when inside and outside temperatures differ. Assume the member depth is constant at 1 ft, and that the structure was built with fixed bases A and D at a temperature of 85F. The temperature is now 70F inside and 20F outside. We wish to determine the reactions at D under these conditions. Assume that the coefficient of linear expansion of reinforced concrete is $\alpha := 0.0000055 \cdot \frac{1}{\Delta°F}$.

Solution:

1. Our analysis proceeds as before, with the [D] vector interpreted appropriately. The three releases shown in the previous example, will be used.
2. The first stage in the analysis is the computation of the relative displacements $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$, $\Delta_{3\Delta}$, of the primary structure caused by temperature effects. These diaplcements are caused by two effects: axial shortening of the members because of the drop in average temperature (a middepth of the members), and curvature of the members because of the temperature gradient.
3. In the following discussion the contributions to the displacements due to the axial strain are denoted with a single prime (') and those due to curvature by a double prime (").
4. Consider the axial strain first. A unit length of frame member shortens as a result of the temperature decrease from 85F to 45F at the midepth of the member. the strain is therefore

$$\alpha\Delta T := \alpha \cdot 40 \cdot \Delta°F = 0.00022$$

5. The effect of axial strain on the relative displacements needs little analysis. The horizontal member shortens by an amount $\alpha\Delta T \cdot 20\text{ft} = 0.0044 \cdot \text{ft}$. The shortening of the vertical members results in no relative displacement in the vertical direction. No rotation occurs.
6. We therefore have $\Delta'_{1\Delta} := -\alpha\Delta T \cdot 20\text{ft} = -0.0044 \cdot \text{ft}$, $\Delta'_{2\Delta} := 0\text{ft}$, and $\Delta'_{3\Delta} := 0\text{rad}$
7. The effect of curvature must also be considered. A frame element of length dx undergoes an angular strain as a result of the temperature gradient. The change in length at an extreme fiber is

$$\varepsilon(dx) := \alpha \cdot 25 \cdot \Delta°F \cdot dx \rightarrow 0.0001375 \cdot dx$$

8. With the resulting real rotation of the cross section

$$d\phi(dx) := \frac{\varepsilon(dx)}{0.5} \cdot \text{rad} \rightarrow 0.000275 \cdot dx \cdot \text{rad}$$

9. The relative displacements of the primary structure at D are found by the virtual force method.
10. A virtual force $\delta \cdot \overline{Q}$ is applied in the direction of the desired displacement and the resulting moment diagram $\delta \cdot \overline{M}$ determined.
11. The virtual work equation

$$\delta \cdot \overline{Q} \cdot \Delta = \int \delta \cdot \overline{M}\, d\phi$$

is used to obtain each of the desired displacements at D.
12. The results, which you should verify, are

$$\Delta''_1 := 0.0828\text{ft}$$

$$\Delta''_2 := 0.1104\text{ft}$$

$$\Delta''_3 := -0.01104\text{rad}$$

13. Combining the effects of axial and rotational strain, we have

$$\Delta_1 := \Delta'_{1\Delta} + \Delta''_1 = 0.0784 \cdot \text{ft}$$

$$\Delta_2 := \Delta'_{2\Delta} + \Delta''_2 = 0.1104 \cdot \text{ft}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\Delta_3 := \Delta'_{3\Delta} + \Delta''_3 = -0.01104 \cdot \text{rad}$

14. We now compute the reduntants caused by temperature effects

$$R = f^{-1} \cdot (-\Delta)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.0784 \\ -0.1104 \\ 0.01104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0106 \\ 0.355 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot EI$$

where the units are kips and feet.

15. You should construct the moment diagram for the structure using the values of the redundant found in the analysis.
16. Notice the stiffness term EI does not cancel out in this case. Internal forces and reactions in a statically indeterminate subject to effects other than loads (such as temperature) are dependent on the actual stiffnesses of the structure.
17. The effects of axial strain caused by forces in the members have been neglected in this analsis. This is usual for low frames where bending strain dominates behavior. To illustrate the significance of this assumption, consider member BC. We have found $R_1 = 10.6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{EI}{EA}$. The tension in BC has this same value, resulting in a strain for the member of $10.6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{EI}{EA}$ .For a rectangular member, $\frac{I}{A} = \frac{b \cdot d^3}{12 \cdot bd} = \frac{d^2}{12}$. In our case d=1ft, therefore the axial strain is $10.6 \cdot 10^{-6} \cdot (0.0833) = 8.83 \times 10^{-7}$, which is several orders of magnitude smaller than the temperature strain computed for the same member. We may therefore rest assured that neglecting axial strain caused by forces does not affect the values of the redundants in a significant manner for this structure.
18. Now considert the effects of foundation movement on the same structure. The intermediate frame behavior depends on a structure that we did not design: the earth. The earth is an essential part of nearly all structures, and we must understand the effects of foundation behavior on structural behavior. for the purposes of this example, assume that a foundation has revealed the possibility of a clockwise rotation of the support at D of 0.001 radians and a downward movement of the support at D of 0.12 ft. We wish to evaluate the redundants R_1, R_2, and R_3 caused by this foundation movement.
19. No analysis is needed to determine the values of $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$, and $\Delta_{3\Delta}$ for the solution of the redundants. These displacements are found directly from the support movements, with proper consideration, of the originally chosen sign convention which defined the positive direction of the relative displacements. From the given support displacements, we find $\Delta_{1\Delta} := 0$, $\Delta_{2\Delta} := 0.12\text{ft}$, and $\Delta_{3\Delta} := 0.001\text{rad}$. Can you evaluate these quantities for a casr in which the displacements occured at A instead of D?
20. The values of the redundants is given by

$$R = f^{-1} \cdot (-\Delta)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -252.5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot EI$$

with units in kips and feet.

21. A moment diagram may now be constructed, and other internal force quantities computed from the now known values of the redundants. The redundants have been evaluated separately for effects of temperature and foundation settlement. These effects may be combined with those due to loading using the principle of superposition.

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.9 Braced Bent with Loads and Temperature Change

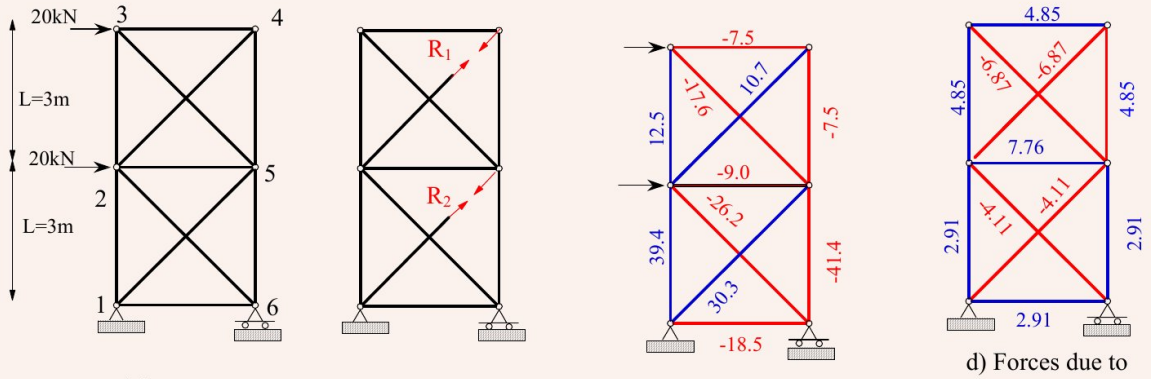
The struss shown below represents an internal braced bent in an enclosed shed, with lateral loads of 20 kN at the panel points. A temperature drop of 30C may occur on the other members (members 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, and 5-6). We wish to analyze the truss for loading and for temperature effects.

Solution:

1. The first step in the analysis is the definition of the two redundants. The choice of forces in diagonals 2-4 and 1-5 as redundants facilitates the computations because some of the load effects are easy to analyze.
2. The computations are organized in tabular form in Table ??. The first column gives the force in each bar caused by a unit load (1 kN) corresponding to release 1. These are denoted p_i and also represent the bar force $\frac{\overline{q_1}}{\delta \cdot \overline{Q_1}}$ caused by a virtual force $\delta \cdot \overline{Q_1}$

applied at the same location. Column 3 lists the same quantitiy for a unit load and for a virutal force $\delta \cdot \overline{Q_2}$ applied at release 2. These three columns constitute a record of the truss analysis needed for this problem.

Verticals: 500 mm^2 ; Webs: 250 mm^2; E=200,000 N/mm^2; a=1.0x10^{-5}/ °C



a) Structure b) Redundant forces c) Forces due to lateral load d) Forces due to temperature drop

3. Column 4 gives the value of L/EA for each bar in terms of L_c/EA_c of the vertical members. This is useful because the term L/EA cancels out in some of the calculations.
4. The method of virtual work is applied directly to compute the displacements Δ_{10} and Δ_{20} corresponding to the releases and

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The method of virtual work is applied directly to compute the displacements Δ_{1Q} and Δ_{2Q} corresponding to the releases and caused by the actual loads. Apply a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ at release 1. The internal virtual forces $\overline{q_1}$ are found in column 2. The internal virtual work $\overline{q_1}\cdot\Delta l$ is found in column 5 as the product of columns 1, 2 and 4. The summation of column 5 is $\Delta_{1q} = -122.42\cdot\frac{L_c}{EA_c}$. Similarly, column 6 is the product of columns 1, 3, and 4, giving $\Delta_{2q} = -273.12\cdot\frac{L_c}{EA_c}$.

5. The same method is used to compute the flexibilities. In this case, the real loading is a unit load corresponding to release 1 leading to f_{11} and f_{21}, and then to release 2 leading to f_{12} and f_{22}. Column 7 shows the computation for f_{11}. It is the product of column 2, representing force due to the real unit load with column 2 representing force due to a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ at the same location (release 1) multiplied by column 4 to include the L_c/EA_c term. Column 8 derives from columns 2, 3, and 4 and leads to f_{21}. Columns 9 and 10 are the computations for the remaining flexibilities.

6. We have assumed that a temperature drop of 30C occurs in the outer members. The corresponding length changes are found in column 11. Again using the virtual work method, column 12 tabulates the internal virtual work of th virtual forces through displacements Δl where for each bar, $\Delta l = \alpha l \Delta T$. Column 12 is therefore the product of columsn 2 and 11. The summation of the elements of column 12 is the displacement Δl corresponding to release 1. Column 13 repeats this process for Δ_2 corresponding to release 2.

7. The tabulated information provides the necessary terms for a matrix solution of the problem. We have

$$f = \begin{pmatrix} 8.66 & 1 \\ 1 & 8.66 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c}$$

$$\Delta q = \begin{pmatrix} -122.42 \\ -273.12 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c}$$

$$\Delta_\Delta = \begin{pmatrix} 6.36 \\ 4.24 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\cdot L_c$$

therefore

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 0.117 & -0.0134 \\ -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}$$

8. The redundant forces due to the applied load are

$$R = f^{-1}\cdot\left(-\Delta_Q\right)$$

$$R = \begin{pmatrix} -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}\cdot\begin{pmatrix} 122.42 \\ 273.12 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c} = \begin{pmatrix} 10.66 \\ 30.32 \end{pmatrix}$$

9. Thus $R_1 = 10.66\text{kN},\ R_2 = 30.32\text{kN}$

10. The redundant forces due to the temperature drop are $R = f^{-1}\cdot\left(-\Delta_\Delta\right)$

$$R = \begin{pmatrix} -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}\cdot\begin{pmatrix} -6.36 \\ -4.24 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\cdot L_c = \begin{pmatrix} -6.87 \\ -4.11 \end{pmatrix}\cdot 10^{-5}\cdot EA_c$$

11. Thus with $E := 200\frac{kN}{mm^2},\ A_c := 500mm^2$

$$R_1 := -6.87\cdot 10^{-5}\cdot E\cdot A_c = -6.87\cdot kN$$

$$R_2 := -4.11\cdot 10^{-5}\cdot E\cdot A_c = -4.11\cdot kN$$

12. Using the redundant forces from each of these analyses, the remainder of the bar forces are computed by simple equilibrium.

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

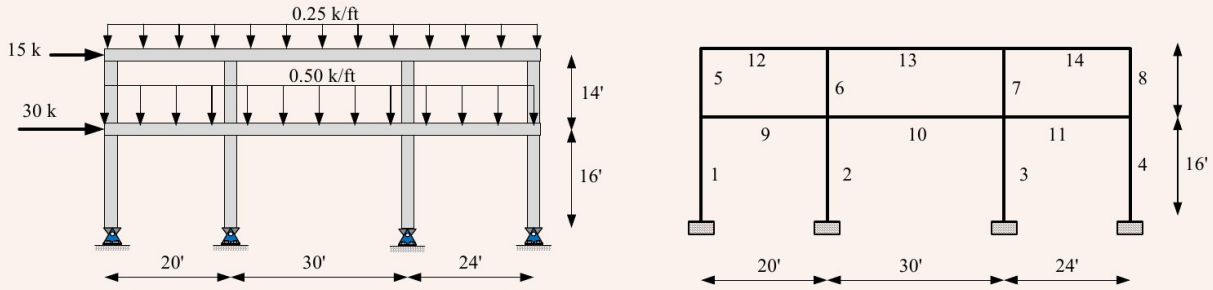
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Table ?? contains such computations. The bar forces in any bar is the force in column 1 added to that in column 2 multiplied by R_1 plus that is column 3 multiplied by R_2. This follows from the fact that columns 2 and 3 are bar forces caused by a force of unitiy corresponding to each of the redundants. The results of the calcultations are shown for the applied loading and for the temperature drop. The forces caused by the temperature drop are similar in magnitude to those caused by wind load in this example. Temperature differences, shrinkage, support settlement, or tolerance errors can cause important effects in statically indeterminate structures.

15.1 Approximate Analysis of a Frame Subjected to Vertical and Horizontal Loads

Draw the shear and moment diagrams for the following frame.



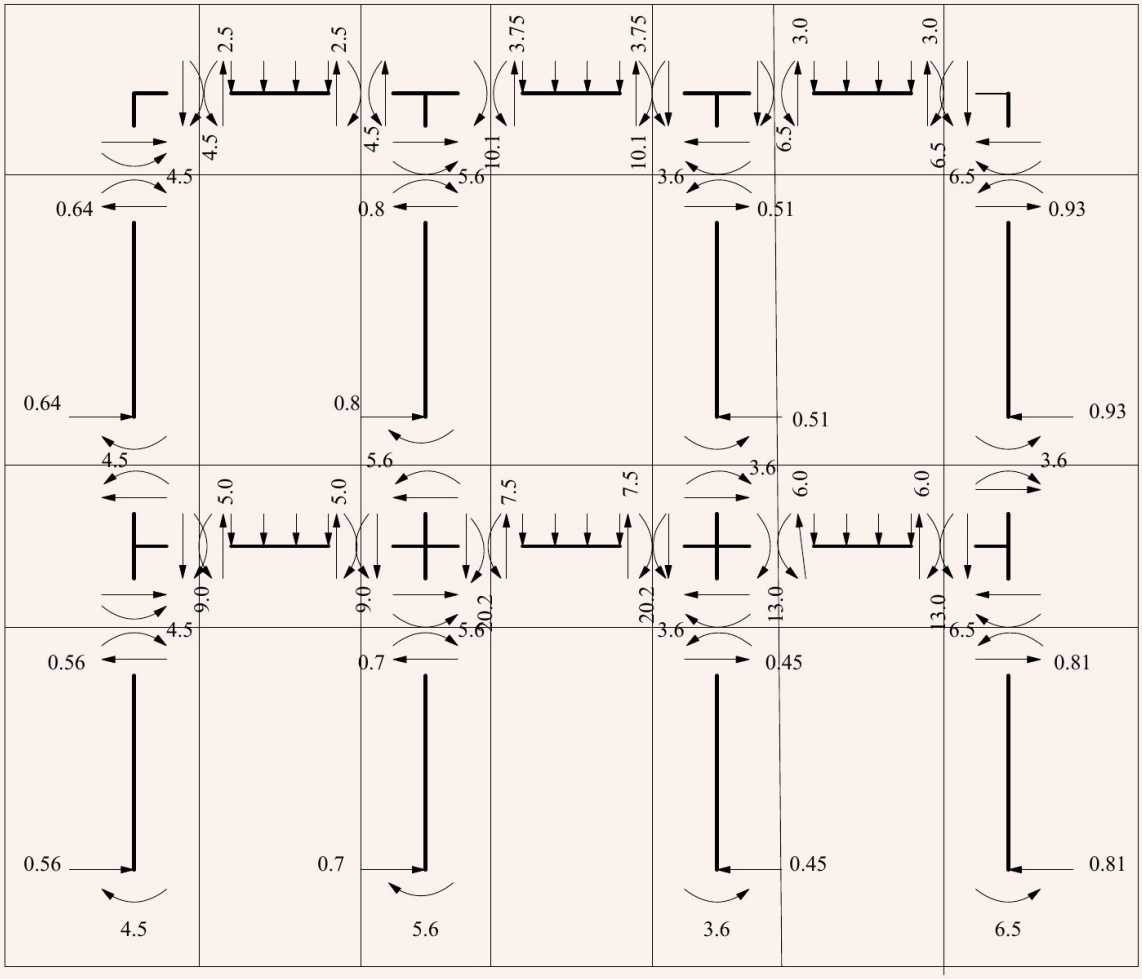
Solution:

The analysis should be conducted in conjunction with the free body diagram shown below.

Vertical Loads

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Gravity Loads

$w_{12} := 0.25 \frac{kip}{ft}$ $w_{13} := w_{12} = 0.25 \cdot \frac{kip}{ft}$ $w_{14} := w_{12} = 0.25 \cdot \frac{kip}{ft}$

$w_9 := 0.5 \frac{kip}{ft}$ $w_{10} := w_9 = 0.5 \cdot \frac{kip}{ft}$ $w_{11} := w_9 = 0.5 \cdot \frac{kip}{ft}$

Approximate Equations

$M_{left}(w, L) := -0.045 \cdot w \cdot L^2$ Maximum negative moment at girder end

$M_{cent}(w, L) := 0.08 \cdot w \cdot L^2$ Maximum positive moment

1. Top Girder Moments

$M_{12lft} := M_{left}(w_{12}, 20ft) = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12cnt} := M_{cent}(w_{12}, 20ft) = 8 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12rgt} := M_{12lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{13lft} := M_{left}(w_{13}, 30ft) = -10.125 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13cnt} := M_{cent}(w_{13}, 30ft) = 18 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13rgt} := M_{13lft} = -10.125 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14lft} := M_{left}(w_{14}, 24ft) = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14cnt} := M_{cent}(w_{14}, 24ft) = 11.52 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14rgt} := M_{14lft} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

2. Bottom Girder Moments

$M_{9lft} := M_{left}(w_9, 20ft) = -9 \cdot kip \cdot ft$

$M_{9cnt} := M_{cent}(w_9, 20ft) = 16 \cdot kip \cdot ft$

$M_{9rgt} := M_{9lft} = -9 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10lft} := M_{left}(w_{10}, 30ft) = -20.25 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10cnt} := M_{cent}(w_{10}, 30ft) = 36 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10rgt} := M_{10lft} = -20.25 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11lft} := M_{left}(w_{11}, 24ft) = -12.96 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11cnt} := M_{cent}(w_{11}, 24ft) = 23.04 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11rgt} := M_{11lft} = -12.96 \cdot kip \cdot ft$

3. Top Column Moments

$M_{5top} := M_{12lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{5bot} := -M_{5top} = 4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6top} := -M_{12rgt} + M_{13lft} = -5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6bot} := -M_{6top} = 5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7top} := -M_{13rgt} + M_{14lft} = 3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7bot} := -M_{7top} = -3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8top} := -M_{14rgt} = 6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8bot} := -M_{8top} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

4. Bottom Column Moments

$M_{1top} := M_{5bot} + M_{9lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{1bot} := -M_{1top} = 4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2top} := M_{6bot} - M_{9rgt} + M_{10lft} = -5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2bot} := -M_{2top} = 5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3top} := M_{7bot} - M_{10rgt} + M_{11lft} = 3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3bot} := -M_{3top} = -3.645 \cdot kip \cdot ft$

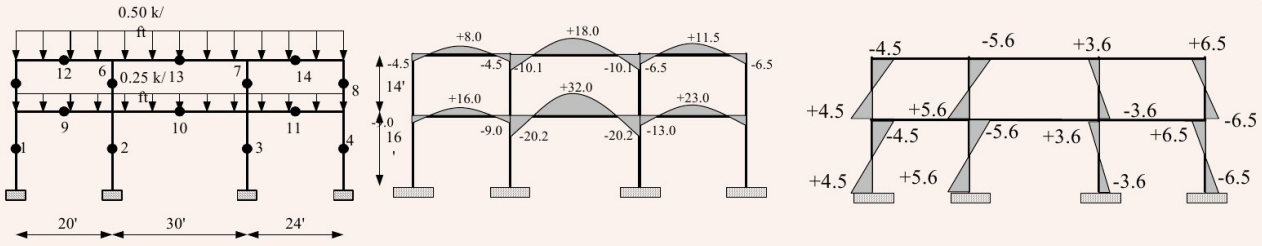
$M_{4top} := M_{8bot} - M_{11rgt} = 6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4bot} := -M_{4top} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



5. Top Girder Shear

$$V_{12lft} := \frac{w_{12} \cdot 20ft}{2} = 2.5 \cdot kip$$

$$V_{12rgt} := -V_{12lft} = -2.5 \cdot kip$$

$$V_{13lft} := \frac{w_{13} \cdot 30ft}{2} = 3.75 \cdot kip$$

$$V_{13rgt} := -V_{13lft} = -3.75 \cdot kip$$

$$V_{14lft} := \frac{w_{14} \cdot 24ft}{2} = 3 \cdot kip$$

$$V_{14rgt} := -V_{14lft} = -3 \cdot kip$$

6. Bottom Girder Shear

$$V_{9lft} := \frac{w_{9} \cdot 20ft}{2} = 5 \cdot kip$$

$$V_{9rgt} := -V_{9lft} = -5 \cdot kip$$

$$V_{10lft} := \frac{w_{10} \cdot 30ft}{2} = 7.5 \cdot kip$$

$$V_{10rgt} := -V_{10lft} = -7.5 \cdot kip$$

$$V_{11lft} := \frac{w_{11} \cdot 24ft}{2} = 6 \cdot kip$$

$$V_{11rgt} := -V_{11lft} = -6 \cdot kip$$

7. Column Shears

$h_5 := 14ft$ $h_6 := h_5 = 14 \cdot ft$ $h_7 := h_5 = 14 \cdot ft$ $h_8 := h_5 = 14 \cdot ft$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$h_1 := 16ft$ $h_2 := h_1 = 16 \cdot ft$ $h_3 := h_1 = 16 \cdot ft$ $h_4 := h_1 = 16 \cdot ft$

$$V_5 := \frac{M_{5top}}{\frac{h_5}{2}} = -0.643 \cdot kip$$

$$V_6 := \frac{M_{6top}}{\frac{h_6}{2}} = -0.804 \cdot kip$$

$$V_7 := \frac{M_{7top}}{\frac{h_7}{2}} = 0.521 \cdot kip$$

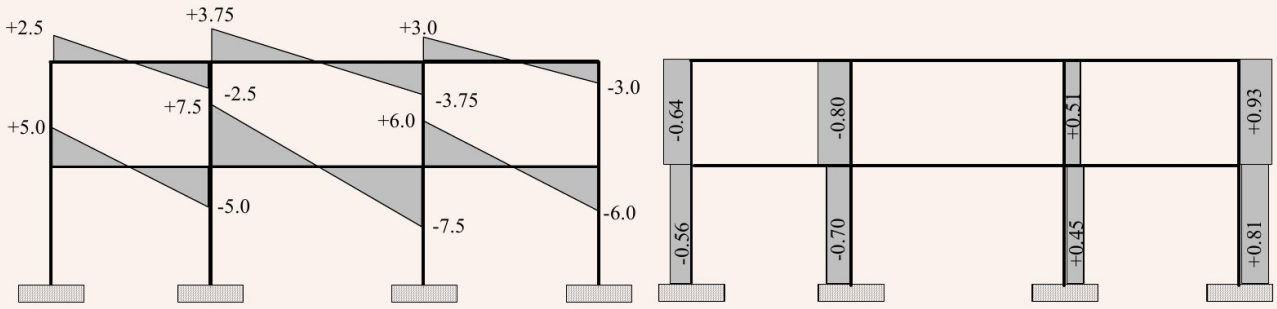
$$V_8 := \frac{M_{8top}}{\frac{h_8}{2}} = 0.926 \cdot kip$$

$$V_1 := \frac{M_{1top}}{\frac{h_1}{2}} = -0.563 \cdot kip$$

$$V_2 := \frac{M_{2top}}{\frac{h_2}{2}} = -0.703 \cdot kip$$

$$V_3 := \frac{M_{3top}}{\frac{h_3}{2}} = 0.456 \cdot kip$$

$$V_4 := \frac{M_{4top}}{\frac{h_4}{2}} = 0.81 \cdot kip$$



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

8. Top Column Axial Forces

$P_5 := V_{12lft} = 2.5 \cdot kip$

$P_6 := -V_{12rgt} + V_{13lft} = 6.25 \cdot kip$

$P_7 := -V_{13rgt} + V_{14lft} = 6.75 \cdot kip$

$P_8 := -V_{14rgt} = 3 \cdot kip$

9. Bottom Chord Axial Forces

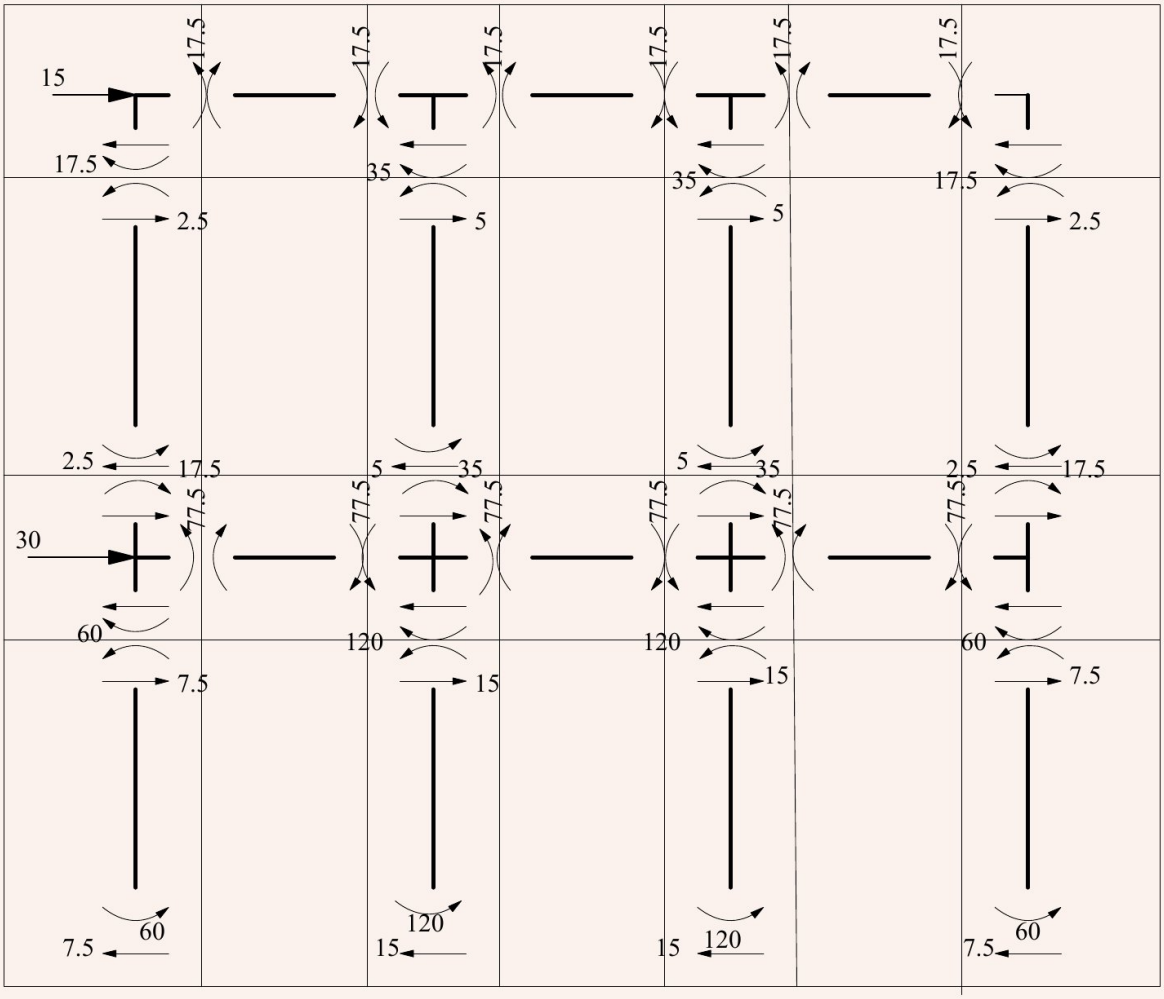
$P_1 := P_5 + V_{9lft} = 7.5 \cdot kip$

$P_2 := P_6 - V_{10rgt} + V_{9lft} = 18.75 \cdot kip$

$P_3 := P_7 - V_{11rgt} + V_{10lft} = 20.25 \cdot kip$

$P_4 := P_8 - V_{11rgt} = 9 \cdot kip$

Horizontal Loads



संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Horizontal Loads

$F_5 := 15kip$

$F_1 := 30kip$

Approximate Equations

$$V_{ext}(F,n) := \frac{F}{2 \cdot n}$$

$n_{bays} := 3$

1. Column Shears

$V_5 := V_{ext}(F_5, n_{bays}) = 2.5 \cdot kip$

$V_6 := 2 \cdot V_5 = 5 \cdot kip$

$V_7 := 2 \cdot V_5 = 5 \cdot kip$

$V_8 := V_5 = 2.5 \cdot kip$

$V_1 := V_{ext}(F_1 + F_5, n_{bays}) = 7.5 \cdot kip$

$V_2 := 2 \cdot V_1 = 15 \cdot kip$

$V_3 := 2 \cdot V_1 = 15 \cdot kip$

$V_4 := V_1 = 7.5 \cdot kip$

2. Top Column Moments

$$M_{5top} := \frac{V_5 \cdot h_5}{2} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{5bot} := -M_{5top} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{6top} := \frac{V_6 \cdot h_6}{2} = 35 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{6bot} := -M_{6top} = -35 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{7top} := \frac{V_7 \cdot h_7}{2} = 35 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{7bot} := -M_{7top} = -35 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{8top} := \frac{V_8 \cdot h_8}{2} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{8bot} := -M_{8top} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

3. Bottom Column Moments

$$M_{1top} := \frac{V_1 \cdot h_1}{2} = 60 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{1bot} := -M_{1top} = -60 \cdot kip \cdot ft$

$$M_{2top} := \frac{V_2 \cdot h_2}{2} = 120 \cdot kip \cdot ft$$

$M_{2bot} := -M_{2top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{2bot} := -M_{2top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3top} := \frac{V_3 \cdot h_3}{2} = 120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3bot} := -M_{3top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4top} := \frac{V_4 \cdot h_4}{2} = 60 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4bot} := -M_{4top} = -60 \cdot kip \cdot ft$

4. Top Girder Moments

$M_{12lft} := M_{5top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12rgt} := -M_{12lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13lft} := M_{12rgt} + M_{6top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13rgt} := -M_{13lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14lft} := M_{13rgt} + M_{7top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14rgt} := -M_{14lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

5. Bottom Girder Moments

$M_{9lft} := M_{1top} - M_{5bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

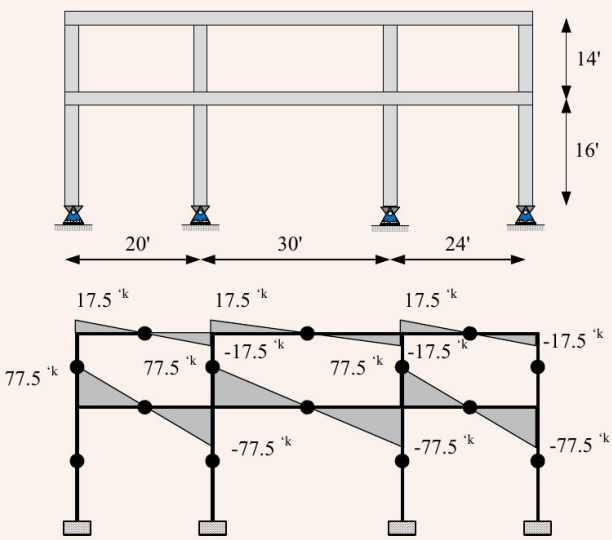
$M_{9rgt} := -M_{9lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$

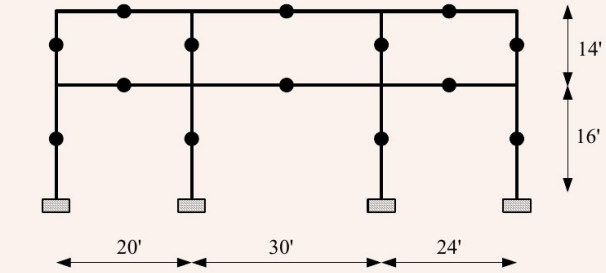
$M_{10lft} := M_{9rgt} + M_{2top} - M_{6bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

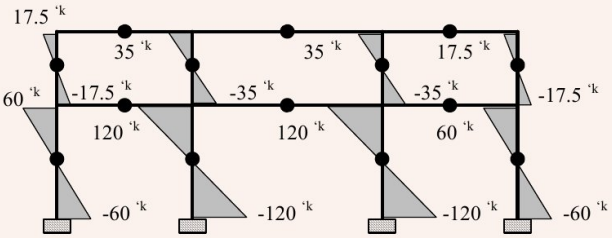
$M_{10rgt} := -M_{10lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11lft} := M_{10rgt} + M_{3top} - M_{7bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11rgt} := -M_{11lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$







संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

6. Top Girder Shear

$V_{12lft} := \frac{-2 \cdot M_{12lft}}{20ft} = -1.75 \cdot kip$

$V_{12rgt} := V_{12lft} = -1.75 \cdot kip$

$V_{13lft} := \frac{-2 \cdot M_{13lft}}{30ft} = -1.167 \cdot kip$

$V_{13rgt} := V_{13lft} = -1.167 \cdot kip$

$V_{14lft} := \frac{-2 \cdot M_{14lft}}{24ft} = -1.458 \cdot kip$

$V_{14rgt} := V_{14lft} = -1.458 \cdot kip$

7. Bottom Girder Shear

$V_{9lft} := \frac{-2 \cdot M_{9lft}}{20ft} = -7.75 \cdot kip$

$V_{9rgt} := V_{9lft} = -7.75 \cdot kip$

$V_{10lft} := \frac{-2 \cdot M_{10lft}}{30ft} = -5.167 \cdot kip$

$V_{10rgt} := V_{10lft} = -5.167 \cdot kip$

$V_{11lft} := \frac{-2 \cdot M_{11lft}}{24ft} = -6.458 \cdot kip$

$V_{11rgt} := V_{11lft} = -6.458 \cdot kip$

8. Top Column Axial Forces (+ve tension, -ve compression)

$P_5 := -V_{12lft} = 1.75 \cdot kip$

$P_6 := V_{12rgt} - V_{13lft} = -0.583 \cdot kip$

$P_7 := V_{13rgt} - V_{14lft} = 0.292 \cdot kip$

$P_8 := V_{14rgt} = -1.458 \cdot kip$

8. Bottom Column Axial Forces (+ve tension, -ve compression)

$P_1 := P_5 - V_{9lft} = 9.5 \cdot kip$

$P_2 := P_6 - V_{10rgt} + V_{9lft} = -3.167 \cdot kip$

$P_3 := P_7 - V_{11rgt} + V_{10lft} = 1.583 \cdot kip$

$P_4 := P_8 + V_{11rgt} = -7.917 \cdot kip$

Victor E. Saouma

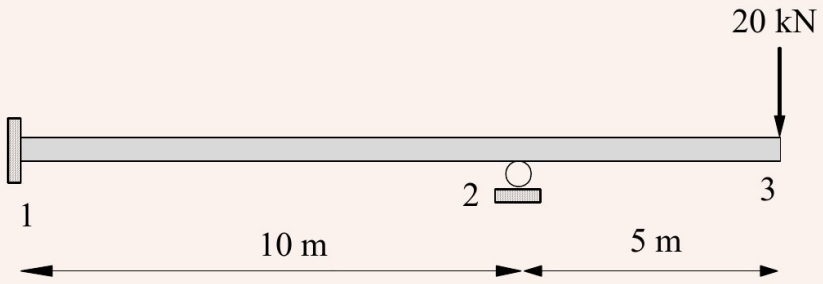
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.1 Propped Cantilever Beam

Find the end moments for the beam



Solution:

1. The beam is kinematicall indeterminate to the third degreee (θ_2, Δ_3, θ_3), however by replacing the overhang by a fixed end moment equal to 100 kN-m at support 2, we reduce the degreee of kinematic indeterminancy to one (θ_2).
2. The equilibrium relation is

$$M_{21} - 100\text{kN}\cdot\text{m} = 0$$

3. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\cdot\theta_1 + \theta_2\right) = \frac{2}{10}\cdot E\cdot I\cdot\theta_2$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_1 + 2\cdot\theta_2\right) = \frac{4}{10}\cdot E\cdot I\cdot\theta_2$$

4. Substituting into the equilibrium equations

$$\theta_2 = \frac{10}{4E\cdot I}\cdot M_{21} = \frac{250}{EI}$$

or

$$\boxed{M_{12} = \frac{2}{10}\cdot EI\cdot\theta_2 = \frac{2\cdot EI}{10}\cdot\frac{250}{EI} = 50\text{kN}\cdot\text{m}}$$

Victor E. Saouma

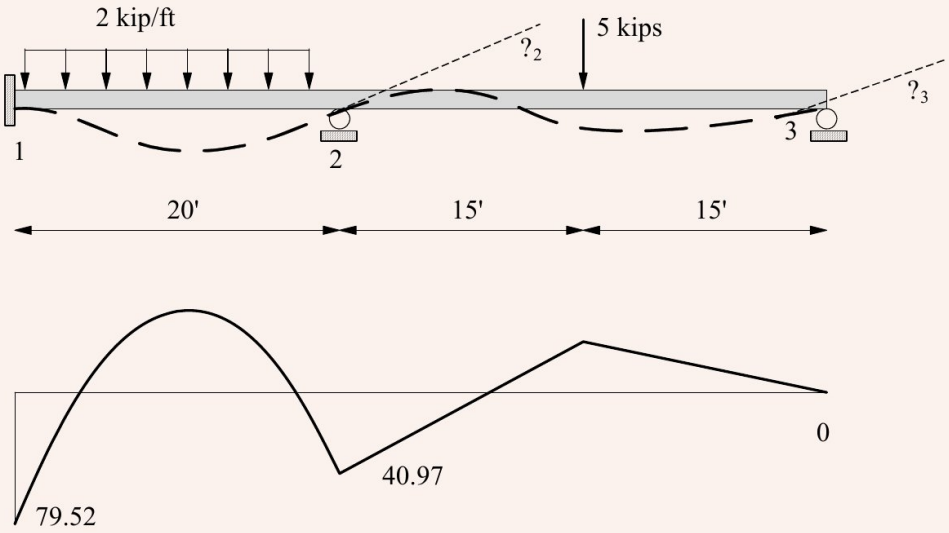
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.2 Two-Span Beam, Slope Deflection

Draw the moment diagram for the two span beam



Solution:

1. The unknows are θ_2 and θ_3
2. The equilibrium relations are

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{21} + M_{23} = 0$

$M_{32} = 0$

3. The fixed end moments are given by

$$M_{12F} = -M_{21F} = \frac{-w \cdot L^2}{12} \qquad M_{12F} := \frac{-\left(-2\,\frac{kip}{ft}\right)\cdot(20ft)^2}{12} = 66.667 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{23F} = -M_{32F} = \frac{-PL}{8} \qquad M_{23F} := \frac{-(-5kip)(30ft)}{8} = 18.75 \cdot kip \cdot ft$$

4. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2 \cdot E \cdot K_{12} \cdot \theta_2 + M_{12F} = \frac{2EI}{L_1} \cdot \theta_2 + M_{12F} = \frac{EI}{10} \cdot \theta_2 + M_{12F}$$

$$M_{21} = 2 \cdot E \cdot K_{12} \cdot (2\theta_2) + M_{21F} = \frac{4EI}{L_1} \cdot \theta_2 + M_{21F} = \frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + M_{21F}$$

$$M_{23} = 2 \cdot E \cdot K_{23} \cdot (2\theta_2 + \theta_3) + M_{23F} = \frac{2EI}{L_2} \cdot (2\theta_2 + \theta_3) + M_{23F} = \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 + M_{23F}$$

$$M_{32} = 2 \cdot E \cdot K_{23} \cdot (\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32F} = \frac{2EI}{L_2} \cdot (\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32F} = \frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 + M_{32F}$$

5. Substituting in the equilibrium equations

$$\frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + M_{21F} + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 + M_{23F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 = 47.917\ kip \cdot ft$$

$$\frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 + M_{32F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 = 18.75\ kip \cdot ft$$

or

$$EI \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 718.755 \\ 281.25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EI\theta_2 \\ EI\theta_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 718.755 \\ 281.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128.473 \\ 76.388 \end{pmatrix}$$

6. Substituting for the moments

$$M_{12} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{10} + M_{12F} = 79.514 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{21} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{5} - M_{12F} = -40.972 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{23} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{7.5} + \frac{EI\theta_3 \cdot kip \cdot ft}{15} + M_{23F} = 40.972 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{32} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{15} + \frac{EI\theta_3 \cdot kip \cdot ft}{7.5} - M_{23F} = -0 \cdot kip \cdot ft$$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.3 Two-Span Beam, Slope Deflection, Initial Deflection

Determine the end moments for the previous problem if the middle support settles by 6 in.

Solution:

1. Since we are performing a linear elastic analysis, we can separately analyze the beam for support settlement, and then add the moments to those due to the applied loads.
2. The unknowns are θ_2 and θ_3
3. The equilibrium relations are

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$M_{32} = 0$$

4. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\cdot\left(\theta_2 + 3\cdot\frac{0.5}{20}\right) = \frac{EI}{10}\cdot\theta_2 + \frac{3EI}{400}$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\cdot\left(2\theta_2 + 3\cdot\frac{0.5}{20}\right) = \frac{EI}{5}\cdot\theta_2 + \frac{3EI}{400}$$

$$M_{23} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3 + 3\cdot\frac{0.5}{30}\right) = \frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2 + \frac{EI}{15}\cdot\theta_3 + \frac{EI}{300}$$

$$M_{32} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3 + 3\cdot\frac{0.5}{30}\right) = \frac{EI}{15}\cdot\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3 + \frac{EI}{300}$$

5. Substituting into the equilibrium equations

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{EI}{5}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}=0 \qquad \frac{EI}{3}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3=\frac{-13EI}{1200}$$

$$\frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}=0 \qquad \frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3=\frac{-EI}{300}$$

or

$$EI\cdot\begin{pmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}=EI\cdot\begin{pmatrix}\frac{-13}{4}\\ -1\end{pmatrix}$$

which will give

$$\begin{pmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\frac{-13}{4}\\ -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{11}{360}\\ -\frac{7}{720}\end{pmatrix}$$

6. Thus the additional moments due to the settlement are

$$M_{12}(EI):=\frac{EI}{10}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}\ \text{simplify}\ \rightarrow\frac{EI}{225}$$

$$M_{21}(EI):=\frac{EI}{5}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}\ \text{simplify}\ \rightarrow\frac{EI}{720}$$

$$M_{23}(EI):=\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}\ \text{simplify}\ \rightarrow -0.0013888888888888888889\cdot EI$$

$$M_{32}(EI):=\frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}\ \text{simplify}\ \rightarrow -3.7037037037037037e\text{-}24\cdot EI$$

16.4 Frame, Slope Deflection

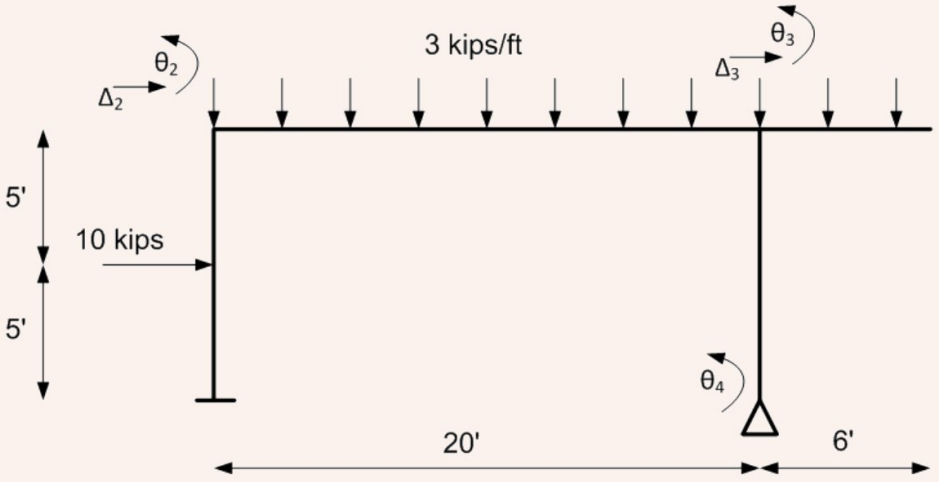
Determine the end moments for the frame

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रारूप प्रति

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. The effect of the 35 cantilever can be included by replacing it with its end moment.

$$M_3 = -w \cdot L \cdot \frac{L}{2} \qquad M_3 := 3\frac{kip}{ft} \cdot 6ft \cdot 6\frac{ft}{2} = 54 \cdot kip \cdot ft$$

2. The unknown displacements and rotations are

   Δ_2 and θ_2 at joint 2

   θ_3 and θ_4 at joints 3 and 4

   We observe that due to the lack of symmetry, there will be a lateral displacement in the frame, and neglecting axial deformations, $\Delta_2 = \Delta_3$

3. The equilibrium relations are

$$M_{23} + M_{32} = 0$$

$$M_{32} + M_{34} = -54kip \cdot ft$$

$$M_{43} = 0$$

$$V_{12} + V_{43} - 10kip = 0$$

   Thus we have four unknown displacements and four equations. However, the last two equations are in terms of of the shear forces, and we need to have them in terms of the end moments. This can be achieved through the following equilibrium relations

$$V_{12} = \frac{M_{12} + M_{21} + 50}{L_{12}}$$

$$V_{43} = \frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}}$$

   Hence, all four equations are now in terms of the moments.

4. The fixed end moments for member 23 are

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The fixed end moments for member 23 are

$$M_{21F} = \frac{-PL}{8} \qquad M_{21F} := \frac{-10\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{8} = -12.5\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

$$M_{23F} = \frac{-w\cdot L^2}{12} \qquad M_{21F} := \frac{-3\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot(20\text{ft})^2}{12} = -100\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

5. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{12F} = 0.2EI\cdot\left(\theta_2 - 0.3\Delta_2\right) + 12.5$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{21F} = 0.2EI\cdot\left(2\theta_2 - 0.3\Delta_2\right) - 12.5$$

$$M_{23} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3\right) + M_{23F} = 0.1EI\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3\right) + 100$$

$$M_{32} = 2\cdot E\cdot K_{32}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3\right) + M_{32F} = 0.1EI\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3\right) - 100$$

$$M_{34} = 2\cdot E\cdot K_{34}\cdot\left(2\theta_3 + \theta_4 - 3\frac{\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI\cdot\left(2\theta_3 + \theta_4 - 0.3\Delta_2\right) + 100$$

$$M_{43} = 2\cdot E\cdot K_{34}\cdot\left(\theta_3 + 2\theta_4 - 3\frac{\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI\cdot\left(\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2\right) + 100$$

6. Substituting into the equilibrium equations and dividing by EI

$$6\theta_2 + \theta_3 - 0.6\Delta_2 = \frac{-875}{EI}$$

$$\theta_2 + 6\theta_3 + 2\theta_4 - 0.6\Delta_2 = \frac{460}{EI}$$

$$\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2 = 0$$

and the last equilibrium equation is obtained by substituting V_{12} and V_{43} and multiplying by 10/EI

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 0.4\Delta_2 = \frac{-83.3}{EI}$$

or

$$EI\cdot\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & -0.6 \\ 1 & 6 & 2 & -0.6 \\ 0 & 1 & 2 & -0.3 \\ 1 & 1 & 1 & -0.4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -875 \\ 460 \\ 0 \\ -83.3 \end{pmatrix}$$

which will give

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -294.8 \\ 68.4 \\ -240.6 \\ -1375.7 \end{pmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

7. Substituting into the slope deflection equations gives the end moments

$$\begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{23} \\ M_{32} \\ M_{34} \\ M_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -47.88 \\ 47.88 \\ -115.8 \\ 61.78 \\ 0 \end{pmatrix}$$

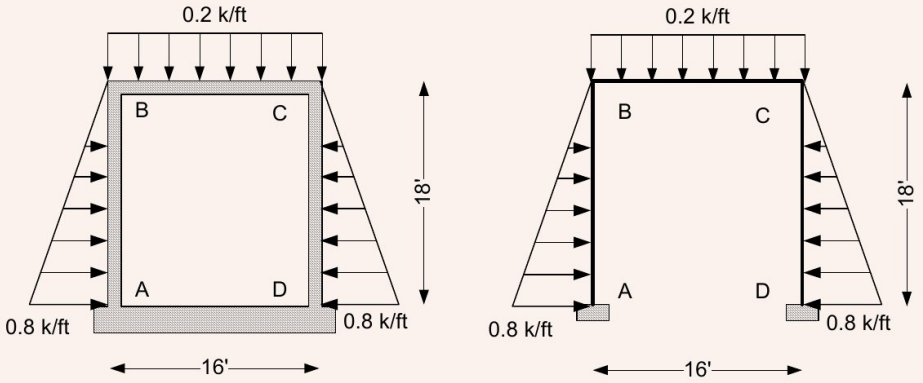
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.5 Box Culvert Slope Deflection

Draw the shear and moment diagram for the following box girder



Solution:

1. From symmetry $\theta_B = -\theta_C$, and at the base $\theta_A = \theta_D = 0$.
2. The fixed end moments are given by

$$FEM_{BC} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad FEM_{BC} := \frac{0.2\frac{kip}{ft}\cdot(16ft)^2}{12} = 4.267 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{CB} = \frac{-w \cdot L^2}{12} \qquad FEM_{CB} := -\frac{0.2\frac{kip}{ft}\cdot(16ft)^2}{12} = -4.267 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{AB} = \frac{w \cdot L^2}{20} \qquad FEM_{AB} := \frac{0.8\frac{kip}{ft}\cdot(18ft)^2}{20} = 12.96 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{BA} = \frac{-\left(w \cdot L^2\right)}{30} \qquad FEM_{BA} := -\frac{0.8\frac{kip}{ft}\cdot(18ft)^2}{30} = -8.64 \cdot kip \cdot ft$$

3. The moments are given by

$$M_{BC} = \frac{2EI}{16}\cdot\left(2\theta_B + \theta_C\right) + FEM_{BC} = \frac{EI}{8}\cdot\theta_B + 4.267$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{18}\cdot\left(2\theta_B + 0\right) + FEM_{BA} = \frac{2EI}{9}\cdot\theta_B - 8.64$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{18}\cdot\left(2\theta_B\right) + FEM_{AB} = \frac{EI}{9}\cdot\theta_B + 12.96$$

4. Equilibrium at joint B

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\frac{2EI}{9}\cdot\theta_B - 8.64 + \frac{EI}{8}\cdot\theta_B + 4.267 = 0$$

$$\theta_B(EI) := \frac{8.64 - 4.267}{\frac{2EI}{9} + \frac{EI}{8}} \rightarrow \frac{12.594}{EI}$$

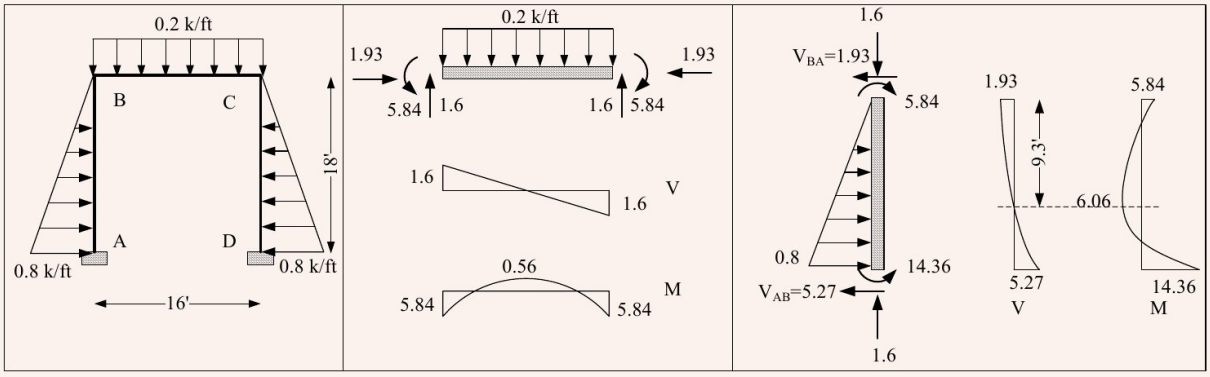
5. Substitute θ_B to get the moments

$$M_{BC} := \left[\frac{EI}{8}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) + 4.267\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow 5.841\cdot ft\cdot kip$$

$$M_{AB} := \left[\frac{EI}{9}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) + 12.96\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow 14.359\cdot ft\cdot kip$$

$$M_{BA} := \left[\frac{2EI}{9}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) - 8.64\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow -5.841\cdot ft\cdot kip$$

6. Member forces are determined from statics. Careful, the moment diagram is now based on the so-called "design" sign convention.



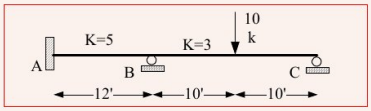
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

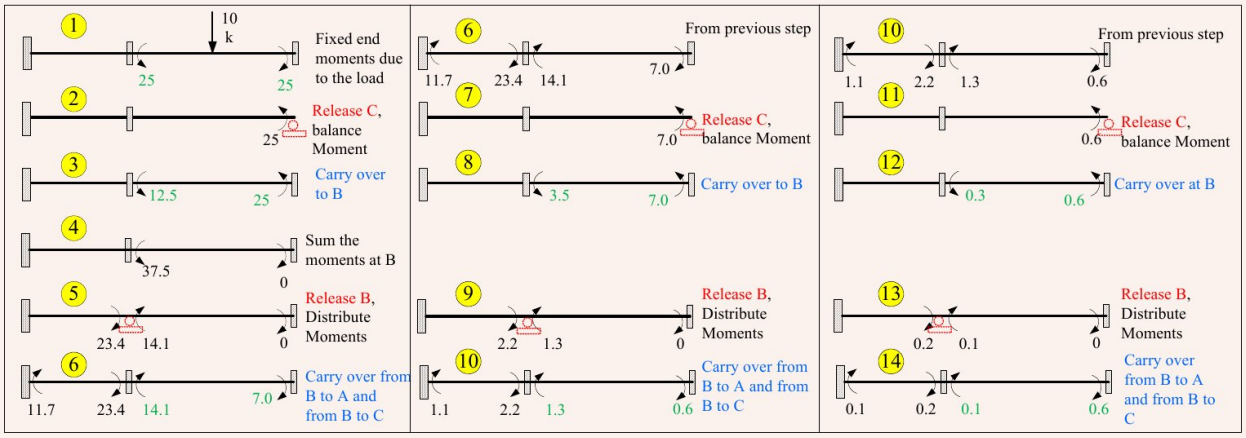
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

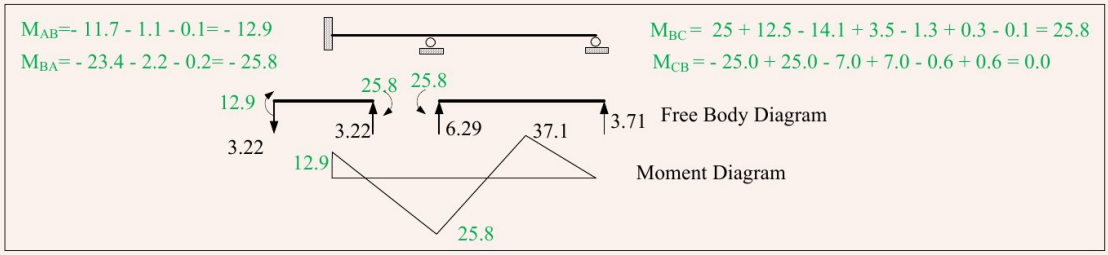
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.6 Continuous Beam

Solve for the moments at A and B by moment distribution, using (a) the ordinary method, and (b) the simplified method.







Solution:

For this example the fixed-end moments are computed as follows:

$$M_{BCF} = \frac{PL}{8} \qquad M_{BCF} := \frac{10\text{kip}\cdot 20\text{ft}}{8} = 25\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{CBF} := -M_{BCF} = -25 \cdot kip \cdot ft$

2. Since the relative stiffness is given in each span, the distribution factors are

$$DF_{AB} = \frac{K_{AB}}{\Sigma K} = \frac{5}{\infty + 5} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{5}{5 + 3} = 0.625$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{3}{5 + 3} = 0.375$$

$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{\Sigma K} = \frac{3}{3} = 1$$

3. The balancing computations are shown below.

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	3	3
DF	0	0.625	0.375	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-11.7	-23.4	-14.1	-7
			3.5	7
	-1.1	-2.2	-1.3	-0.6
			0.3	0.6
	-0.1	-0.2	-0.1	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

4. The above solution is that referred to as the ordinary method, so named to designate the manner of handling the balancing at the simple support at C. It is known, of course, that the final moment must be zero at this support because it is simple
5. Consequently, the first step is to balance the fixed-end moment at C to zero. The carry-over is then amde immediately to B. When B is balanced, however, a carry-over must be made back to C simply because the relative stiffness of BC is based on end C of this span being fixed. It is apparent, however, that the moment carried back to C (in this case -7.0) cannot exist at this joint. Accordingly, it is immediately balanced out, and a carry-over is again made to B, this carry-over being considerably smaller than the first. Now B is again balanced, and the process continues until the numbers involved become too small to have any practical value.
6. Alternatively, we can use the simplified method. It was previously shown that if the support at C is simple and a moment is applied at B, then the resistance of the span BC to this moment is reduced to three-fourths the value it would have had wit C fixed. Consequently, the relative stiffness of span BC is reduced to three-fourths of the value given, it will not be necessary to carry over to C.

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	2.25	3
DF	0	0.69	0.31	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-12.9	-25.8	-11.7	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	2.25	3
DF	0	0.69	0.31	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-12.9	-25.8	-11.7	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

7. From the standpoint of work involved, the advantage of the simplified method is obvious. It should always be used when the external (terminal) end of a member rests on a simple support, but it does not apply when a structure is continuous at a simple support. Attention is called to the fact that when the opposite end of the member is simply supported, the reduction factor for the stiffness is always 3/4 for a prismatic member but a variable quantity for a nonprismatic member.
8. One valuable feature of the tabular arrangement is that of dropping down one line for each balancing operation and making the carry-over on the same line. The practice clearly indicates the order of balancing the joints, which in turn makes it possible to check back in the event of an error. Moreover, the placing of the carry-over on the same line with the balancing moments definitely decreases the chances of omitting a carry-over.
9. The correctness of the answers may ina sense be checked by verifying $\Sigma M = 0$ at each joint. However, even though the final answers satisfy this equation at every join, this is in no way a check on the inital fixed end moments. These fixed end moments, therefore, should be checked with great care before beginning the balancing operation. Moreover, it occasionally happens that conpensating errors are made in the balancing, and these errors will not be apparent when cheking $\Sigma M = 0$ at each joint.

10. To draw the final shear and moment diagram, we start by drawing the free body diagram of each beam segment with the computed moments, and then solve from statics for the reactions

$12.9\text{kip}\cdot\text{ft} + 25.8\text{kip}\cdot\text{ft} - 12\text{ft}\,V_A = 0$ $\quad V_A := \dfrac{12.9\text{kip}\cdot\text{ft} + 25.8\text{kip}\cdot\text{ft}}{12\text{ft}} = 3.225\cdot\text{kip}$

$V_A + V_{BL} = 0$ $\quad V_{BL} := -V_A = -3.225\cdot\text{kip}$

$25.8\text{kip}\cdot\text{ft} + 10\text{kip}\cdot 10\text{ft} - 20\text{ft}\cdot V_{BR} = 0$ $\quad V_{BR} := \dfrac{25.8\text{kip}\cdot\text{ft} + 10\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{20\text{ft}} = 6.29\cdot\text{kip}$

$6.29\text{kip} + V_C - 10\text{kip} = 0$ $\quad V_C := 10\text{kip} - 6.29\text{kip} = 3.71\cdot\text{kip}$

$-V_{BL} - V_{BR} + R_B = 0$ $\quad R_B := V_{BL} + V_{BR} = 3.065\cdot\text{kip}$

Check: $R_A + R_B + R_C - 10\text{kip} = 0$ $\quad V_A + R_B + V_C - 10\text{kip} = 0\cdot\text{kip}$

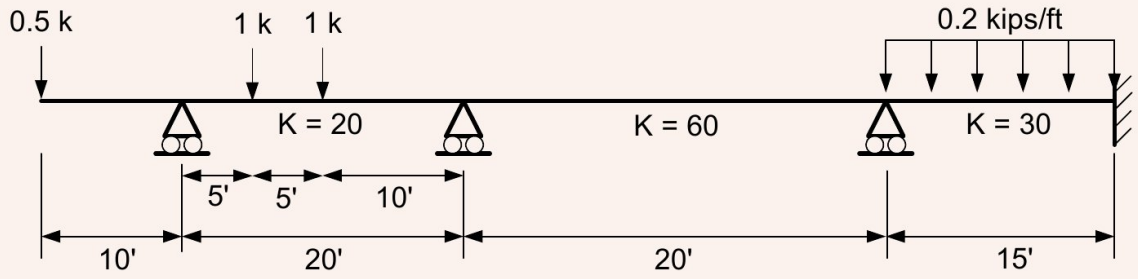
$M_{BC} := V_C\cdot 10\text{ft} = 37.1\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.7 Continuous Beam

Using the simplified method of moment distribution, find the moments in the following continuous beam. The values of I as indicated by the various values of K, are different for the various spans. Determine the values of the reactions, draw the shear and bending moment diagrams, and sketch the deflected structure.



Solution:

1. Fixed-end moments

$$M_{AOF} := -0.5kip \cdot 10ft = -5 \cdot kip \cdot ft$$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

For the 1 kip load:

$$M_{ABF} = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2} \qquad M_{ABF1} := \frac{1\text{kip} \cdot 5\text{ft} \cdot (15\text{ft})^2}{(20\text{ft})^2} = 2.812 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

$$M_{BAF} = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2} \qquad M_{BAF1} := \frac{1\text{kip} \cdot (5\text{ft})^2 \cdot 15\text{ft}}{(20\text{ft})^2} = 0.938 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

For the 4 kip load:

$$M_{ABF} = \frac{P \cdot L}{8} \qquad M_{ABF4} := \frac{4\text{kip} \cdot 20\text{ft}}{8} = 10 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

$$M_{BAF4} := -M_{ABF4} = -10 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

For the uniform load:

$$M_{CDF} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad M_{CDF} := \frac{0.2\frac{\text{kip}}{\text{ft}} \cdot (15\text{ft})^2}{12} = 3.75 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

$$M_{DCF} := -M_{CDF} = -3.75 \cdot \text{kip} \cdot \text{ft}$$

2. The balancing operation is shown below

Joint	A		B		C		D
Member	AO	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	0	20	15	60	60	40	40
DF	0	1	0.2	0.8	0.6	0.4	0
FEM	-5	12.8	-10.9			3.8	-3.8
		-7.8	-3.9				
			2.9	11.9	5.9		
				-2.9	-5.8	-3.9	-1.9
			0.6	2.3	1.1		
				-0.3	-0.7	-0.4	-0.2
			0.1	0.2			
Total	-5	5	-11.2	11.2	0.5	-0.5	-5.9

3. The only new point in this example is the method of handling the overhanging end. It is obvious that the final internal moment at A must be 5 kip-ft and, accordingly, the first step is to balance out 7.8 kip-ft of the fixed end moment at AB, leaving the required 5

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

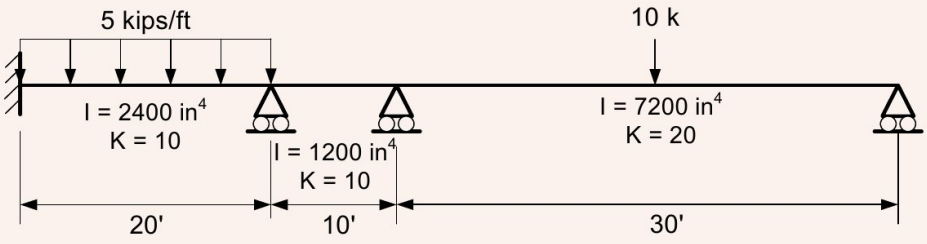
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

kip-ft for the internal moment at AB. Since the relative stiffness of BA has been reduced to three-fourths of its original value, to permit considering the support at A as simple in balancing, no carry-over from B to A is required.
4. The easiest way to determine the reactions is to consider each span as a free body. End shears are first determined as caused by the loads alone on each span and, following this, the end shears caused by the end moments are computed. These two shears are added algebraically to obtain the net end shear for each span. An algebraic summation of the end shears at any support will give the total reaction.

16.8 Continuous Beam, Initial Settlement

For the following beam find the moments at A, B, and C by moment distribution. The support at C settles by 0.1 in. Use

$E := 30000\text{ksi}$



Solution:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. Fixed-end moments

Uniform load:

$$M_{ABF} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad M_{ABF} := \frac{5\,\frac{kip}{ft} \cdot (20ft)^2}{12} = 166.667 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{BAF} := -M_{ABF} = -166.667 \cdot kip \cdot ft$$

Concentrated load:

$$M_{CDF} = \frac{P \cdot L}{8} \qquad M_{CDF} := \frac{10kip \cdot 30ft}{8} = 37.5 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := -M_{CDF} = -37.5 \cdot kip \cdot ft$$

Moments caused by deflection:

$$M_{BCF} = \frac{6EI \cdot \Delta}{L^2} \qquad M_{BCF} := \frac{6 \cdot E \cdot 1200in^4 \cdot 0.1in}{(10ft)^2} = 125 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{CBF} := M_{BCF} = 125 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{CDF} = -\frac{6EI \cdot \Delta}{L^2} \qquad M_{CDF} := -\frac{6 \cdot E \cdot 7200in^4 \cdot 0.1in}{(30ft)^2} = -83.333 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := M_{CDF} = -83.333 \cdot kip \cdot ft$$

2. Moment distribution

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	10	10	15	20
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	1
	167	-167			38	-38
			125	125	-83	-83
					60	121
FEM			-28	-56	-84	
	17	35	35	17		
			-3	-7	-10	
	1	2	1			
Total	185	-130	130	79	-79	0

The fixed-end moments caused by a settlement of supports have the same sign at both ends of each span adjacent to the settling support. The above computations have been carried to the nearest kip-ft, which for the moments of the magnitudes involved, would be significantly close for purposes of design.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.9 Frame

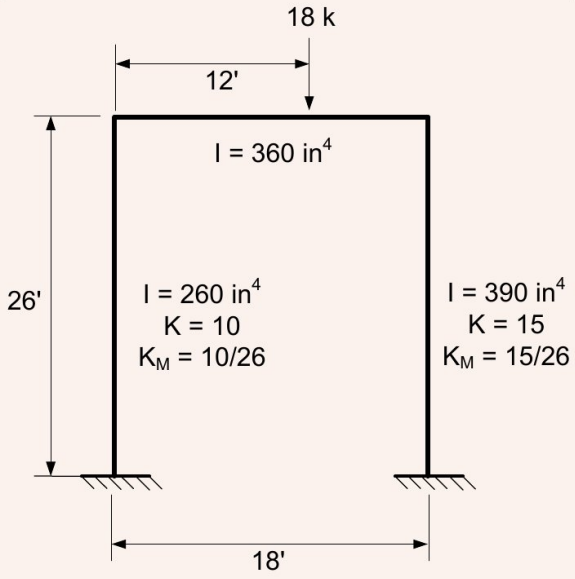
Find all moments by moment distribution for the following frame. Draw the bending moment diagram and the deflected structure.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रारूप पीडीएफ

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. The first step is to perform the usual moment distribution. The reader should fully understand that this balancing operation adjusts the internal moments at the ends of the members by a series of corrections as the joints are considered to rotate, until $\Sigma M = 0$ at each joint. The reader should also realize that during this balancing operation no translation of any joint is permitted.
2. The fixed-end moments are

$$M_{BCF} := \frac{18\text{kip}\cdot 12\text{ft}\cdot(6\text{ft})^2}{(18\text{ft})^2} = 24\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

$$M_{CBF} := -\frac{18\text{kip}\cdot 6\text{ft}\cdot(12\text{ft})^2}{(18\text{ft})^2} = -48\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

3. Moment distribution

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	20	20	15	15
DF	0	0.333	0.667	0.571	0.429	0
FEM			24	-48		
			13.7	27.4	20.6	10.3
	-6.3	-12.6	-25.1	-12.5		
			3.6	7.1	5.4	2.7
	-0.6	-1.2	-2.4	-1.2		
			0.3	0.7	0.5	0.2
		-0.1	-0.2			
Total	-6.9	-13.9	13.9	-26.5	26.5	13.2

4. The final moments listed in the table are correct only if there is no translation of any joint. It is therefore necessary to determine

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

whether or not, with the above moments existing, there is any tendency for side lurch of the top of the frame.
5. If the frame is divided into three free bodies, the result will be as shown below.

Inspection of this sketch indicates that if the moments of the first balance exist in the frame, there is a net force of $1.53\text{kip} - 0.8\text{kip} = 0.73\cdot\text{kip}$ tending to sway the frame to the left. In order to prevent side-sway, and thus allow these moments to exist (temporarily for the purpose of the analysis), it is necessary that an imaginary horizontal force ce considered to act to the right at B or C. This force is designated as the artificial joint restraint (abbreviated as AJR) and is shown below.

6. This illustration shows the complete load system which would have to act on the structure if the final moments of the first balance are to be correct. The AJR, however, cannot be permitted to remain, and thus its effect must be cancelled. This may be accomplished by finding the moments in the frame resulting from a force equal but opposite to the AJR and applied at the top.
7. Although it is not possible to make a direct solution for the moments resulting from this force, they may be determined inddirectly. Assume some unknown force P acts on the frame, as shown below, and causes it to deflect laterally to the left, without joint rotation, through some distance Δ. Now, regardless of the value of P and the value of the resulting Δ, the fixed-end moments induced in the ends of the columns must be proprtional to the respective values of K_M.

Recalling that the fixed end moment is $M_F = 6EI\cdot\frac{\Delta}{L^2} = 6EK_M\cdot\Delta$, where $K_M = \frac{1}{L^2} = \frac{K}{L}$ we can write

$$\Delta = \frac{M_{ABF}}{6E\cdot K_M} = \frac{M_{DCF}}{6E\cdot K_M}$$

$$\frac{M_{ABF}}{M_{DCF}} = \frac{K_{MAB}}{K_{MDC}} = \frac{10}{15}$$

These fixed-end moments could, for example, have values of -10 and -15 kip-ft, or -20 and -30, or -30 and -45, or any other combination so long as the above ratio is maintained. The proper procedure is to choose values for the fixed-end moments of approximately the same order of magnitude as the original fixed-end moments due to the real loads. This will result in the same accuracy for the results of the balance for the side-sway correction that was realized in the first balance for the real loads. Accordingly, it will be assumed that P, and the resulting Δ, are of such magnitude as to result in fixed-end moments shown below.
8. Obviously $\Sigma M = 0$ is not satisfied for joints B and C in this deflected frame. Therefore, these joints must rotate until equilibrium is reached. The effect of this rotation is determined in the distribution below.

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	20	20	15	15
DF	0	0.333	0.667	0.571	0.429	0
FEM	-30	-30			-45	-45
			12.9	25.8	19.2	9.6
	2.8	5.7	11.4	5.7		
			-1.6	-3.3	-2.4	-1.2
	0.2	0.5	1.1	0.5		
				-0.3	-0.2	-0.1
Total	-27	-23.8	23.8	28.4	-28.4	-36.7

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

9. During the rotation of joints B and C, as represented by the above distribution, the value of Δ has remained constant, with P varying in magnitude as required to maintain Δ.
10. It is now possible to determine the final value of P simply by adding the shears in the columns. The shear in any member, without external loads applied along its length, is obtained by adding the end moments algebraically and dividing by the length of the member. The final value of P is the force necessary to maintain the deflection of the frame after the joints have rotated. In other words, it is the force which will be consistent with the displacement and internal moments of the structure as determined by the second balancing operation. Hence this final value of P will be called the consistent joint force (abbreviated as CJF).
11. The consistent joint force is given by

$$CJF := \frac{27kip\cdot ft + 23.8kip\cdot ft}{26ft} + \frac{28.4kip\cdot ft + 36.7kip\cdot ft}{26ft} = 4.458\cdot kip$$

and inspection clearly indicates that the CJF must act to the left.
12. Obviously, then, the results of the last balance above are moments which will exist in the frame when a force of 4.45 kip acts to the left at the top level. It is necessary, however, to determine the moments resulting from a force of 0.73 kip acting to the left at the top level, and some as yet unknown factor "z" times 4.45 kip will be used to represent this force acting to the left.
13. The free body diagram for the member BC is shown above. $\Sigma H = 0$ must be satisfied for this figure, and if forces to the left are considered as positive, the result is $4.45z - 0.73 = 0$, and

$$z := \frac{0.73}{4.45} = 0.164$$

If this factor is applied to the moments obtained from the second balance, the result will be the moments caused by a force of 0.73 kip acting to the left at the top level. If these moments are then added to the moments obtained from the first balance, the result will be the final moments for the frame, the effect of the AJR having been cancelled. The combintaion of moments is shown below.

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
M from 1st balance	-6.9	-13.9	13.9	-26.5	26.5	13.2
z x M from 2nd balance	-4.4	-3.9	3.9	4.7	-4.7	-6
Final Moments	-11.3	-17.8	17.8	-21.8	21.8	7.2

14. If the moments are correct, the shears in the two columns of the frame shoul dbe equal and opposite to satisfy $\Sigma H = 0$ for the entire frame. This check is expressed

$$\frac{11.3kip\cdot ft + 17.8kip\cdot ft}{26ft} + \frac{-21.8kip\cdot ft + -7.2kip\cdot ft}{26ft} = 0\cdot kip$$

and

$$1.12kip - 1.11kip = 0.01\cdot kip \text{ (nearly)}$$

The signs of all moments taken from the previous table have been reversed to give the correct signs for the end moments external to the columns. It will be remembered that the moments considered in moment distribution are always internal for each member. However, the above check actually considers each column as a free body and so external moments must be used.
15. The moment under the 18 kip load is obtained by treating BC as a free body:

$$M_{18} := 5.77kip\cdot 12ft - 17.8kip\cdot ft = 51.44\cdot kip\cdot ft$$

16. The direction of side lurch may be determined from the obvious fact that the frame will always lurch in a direction opposite to the AJR. If required, the magnitude of this side lurch may be found. The procedure which follows will apply.

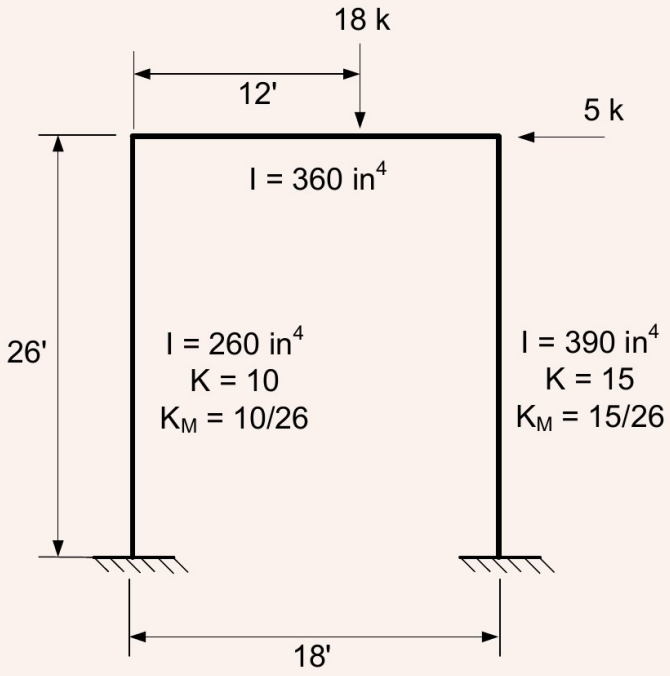
A force P of sufficient magnitude to result in the indicated column moments and the lurch Δ was applied to the frame. During the second balance this value of Δ was held constant as the joints B and C rotated, and the value of P was considered to vary as necessary. The final value of P was found to be 4.45 kip. Since Δ was held constant, however, its magnitude may be determined from the equation $M = 6EI\cdot\frac{\Delta}{L^2}$, where M is the fixed-end moment for either column, I is the moment of inertia for that column, and L is the length. This Δ will be the lurch for 4.45 kip acting at the top level. For any other force acting horizontally, Δ would vary proportially and thus the final lurch of the frame would be the factor z multiplied by Δ determined above.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.10 Frame with Side Load

Find by moment distribution the moments in the following frame



Solution:

The first balance will give the results shown

AB	BA	BC	CB	CD	DC
-7.2	-14.6	14.6	-22.5	22.5	0

A check of the member BC as a free body for $\Sigma H = 0$ will indicate that an AJR is necessary as follows:

$$AJR + 0.84kip - 0.87kip - 5kip = 0$$

from which

$$AJR := 5kip + 0.87kip - 0.84kip = 5.03 \cdot kip$$ in the direction assumed

The values of K_M for the two columns are shown, with K_M for column CD being K/2L because of the pin at the bottom. The horizontal displacement Δ of the top of the frame is assumed to cause the fixed-end moments shown there. These moments are proportional to the values of K_M and of approximately the same order of magnitude as the original fixed-end moments due to the real loads. The results of balancing out these moments are

AB	BA	BC	CB	CD	DC
-34.4	-28.4	28.4	23.6	-23.6	0

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$CJF := \frac{34.4\text{kip}\cdot\text{ft} + 28.4\text{kip}\cdot\text{ft} + 23.6\text{kip}\cdot\text{ft}}{26\text{ft}} = 3.323\cdot\text{kip}$$

and

$$5.03 - 3.32z = 0$$

from which

$$z := \frac{5.03\text{kip}}{CJF} = 1.514$$

The final results are

	AB	BA	BC	CB	CD	DC
M from 1st balance	-7.2	-14.6	14.6	-22.5	22.5	0
z x M 2nd balance	-52.1	-43	43	35.8	-35.8	0
Final moments	-59.3	-57.6	57.6	13.3	-13.3	0

If these final moments are correct, the sum of the column shears will be 5 kip

$$\Sigma V := \frac{59.3\cdot\text{kip}\cdot\text{ft} + 57.6\text{kip}\cdot\text{ft} + 13.3\text{kip}\cdot\text{ft}}{26\text{ft}} = 5.01\cdot\text{kip}$$

The 5 kip horizontal load acting at C enters into the problem only in connection withthe determination of the AJR. If this load had been applied to the column CD between the ends, it would have resulted in intial fixed-end moments in CD and these would be computed in the usual way. In addition, such a load would have enetered into the determination of the AJR, since the horizontal reaction of CD against the right end of BC would have been computed by treating CD as a free body.

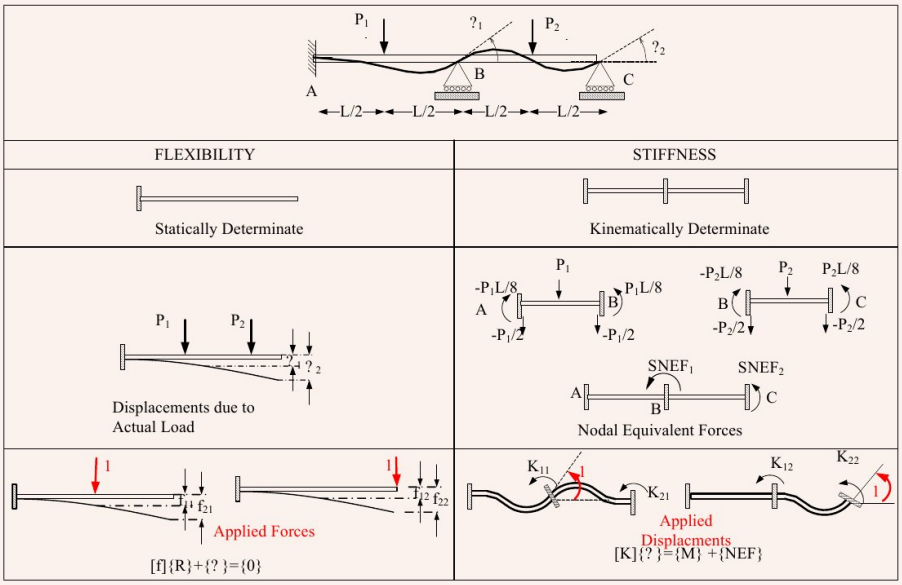
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

17.1 Beam

Considering the figure, let $P_1 = 2P$, $M = PL$, $P_2 = P$, and $P_2 = P$. Solve for the displacements.



Solution:

1. Using the previously defined sign convention (counterclockwise positive)

$$\Sigma NEF_1 = \frac{P_1 \cdot L}{8} - \frac{P_2 \cdot L}{8} = \frac{2P \cdot L}{8} - \frac{P \cdot L}{8} = \frac{P \cdot L}{8}$$

$$\Sigma NEF_2 = \frac{P \cdot L}{8}$$

2. If it takes 4EI/L (k_{44AB}) to rotate AB and 4EI/L (k_{22BC}) to rotate BC, it will take a total force of 8EI/L to simultaneously rotate AB and BC (Note that a rigid joint is assumed)

3. Hence, K_{11} which is the sum of the rotational stiffnesses at global d.o.f. 1, will be equal to $K_{11} = \frac{8EI}{L}$; similarly, $K_{21} = \frac{2EI}{L}$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

(k_{42BC})

4. If we rotate dof 2 by a unit angle, then we will have $K_{22} = \frac{4EI}{L}$ and $K_{12} = \frac{2EI}{L}$

5. The equilibrium relation can be written as

$$\begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PL \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{pmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

We note that the matrix corresponds to the structure's stiffness matrix, and not the augmented one.

6. The two by two matrix is next inverted

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \\ \frac{-5}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \end{pmatrix}$$

7. Next we need to determine both the reactions and the internal forces.
8. Recall that for each element $\mathbf{p} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}$, and in this case $\mathbf{p} = \mathbf{P}$ and $\boldsymbol{\delta} = \Delta$ for element AB. The element stiffness matrix has been previously derived, and in the case of the global and local d.o.f. are the same.
9. hence, the equilibrium equation for element AB, at the element level, can be written as

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2P}{2} \\ \frac{2PL}{8} \\ \frac{2P}{2} \\ \frac{-2PL}{8} \end{pmatrix}$$

Solving

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{107}{56} \cdot P & \frac{31}{56} \cdot PL & \frac{5}{56} \cdot P & \frac{5}{14} \cdot PL \end{pmatrix}$$

10. Similarly, for element BC:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \\ 0 \\ \frac{-5}{\cdot} \cdot \frac{P \cdot L^2}{} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ \frac{P}{2} \\ \end{pmatrix}$$

Victor E. Saouma

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 112 & EI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-PL}{8} \end{pmatrix}$$

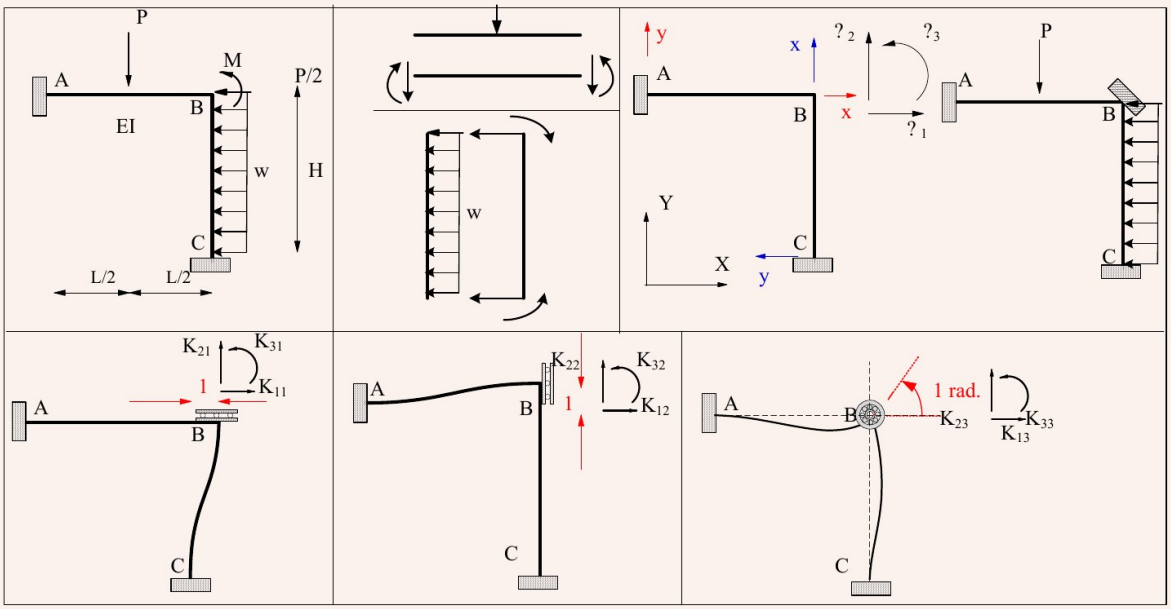
or

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8}\cdot P & \frac{9}{14}\cdot PL & \frac{-1}{7}\cdot P & 0 \end{pmatrix}$$

11. This simple example calls for the following observations:
    a) Node A has contributions from element AB only, while node B has contributions from both AB and BC
    b) We observe that $p_{3AB} \neq p_{1BC}$ even though they both correspond to a shear force at node B, the difference between them is equal to the reaction at B. Similarly, $p_{4AB} \neq p_{2BC}$ due to the externally applied moment at B
    c) From this analysis, we can draw the complete free body diagram and then the shear and moment diagrams which is what the engineer is most interested in for design purposes.

17.2 Frame

Whereas in the first example all local coordinate systems were identical to the global one, in this example we consider the orthogonal frame shown below.



Solution:

1. Assuming axial deformations, we do have three global degress of freedom Δ_1, Δ_2, and θ_3.
2. Constrain all degrees of freedom, and thus make the structure kineamatically determinate.
3. Determine the nodal equivalent forces for each element in its own local coordinate system (the first three values are associated with the first node, and the last three with the second node):

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

with the first node, and the last three with the second node):

$$\begin{pmatrix} p_1 & v_1 & m_1 & p_2 & v_2 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-P}{2} & \frac{-PL}{8} & 0 & \frac{-P}{2} & \frac{PL}{8} \end{pmatrix} \quad \text{Member AB}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & v_1 & m_1 & p_2 & v_2 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-wH}{2} & \frac{-w\cdot H^2}{12} & 0 & \frac{-wH}{2} & \frac{w\cdot H^2}{12} \end{pmatrix} \quad \text{Member BC}$$

4. Summing the nodal equivalent forces at node B in global coordinates we have

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-wH}{2} & \frac{-P}{2} & \frac{PL}{8} - \frac{w\cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

5. Next, we apply a unit displacement in each of the three global degrees of freedom, and we seek to determine the structure global stiffness matrix. Each entry K_{ij} of the global stiffness matrix will correspond to the internal force in degreee of freedome i, due to a unit displacement in degree of freedom j.

6. Recalling the force displacement relations derived earlier, we can assemble the global stiffness matrix in terms of contributions from both AB and BC.

		K_{i1} Δ_1	K_{i2} Δ_2	K_{i3} Δ_3
K_{1j}	AB	EA/L	0	0
	BC	$12EI/H^3$	0	$6EI/H^2$
K_{2j}	AB	0	$12EI/L^3$	$-6EI/L^2$
	BC	0	EA/H	0
K_{3j}	AB	0	$-6EI/L^2$	4EI/L
	BC	$6EI/H^2$	0	4EI/H

7. Summing up, the structure global stiffness matrix [**K**] is

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix}$$

8. The global equation of equilibrium can now be written

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-P}{2} \\ 0 \\ M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{wH}{2} \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{2} + \frac{w\cdot H^2}{2} \end{pmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} H^2 & L^2 & L & H \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 12 \end{pmatrix}$$

9. Solve for the displacements

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-P}{2} - \frac{wH}{2} \\ \frac{-P}{2} \\ M + \frac{PL}{8} - \frac{w \cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

10. To obtain the element internal forces, we will multiply each element stiffness matrix by the local displacements. For element AB, the local and global coordinates match, thus

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{8} \end{pmatrix}$$

11. For element BC, the local and global coordinates do not match, hence we will need to transform the dispalcements from their global to their local components. But since vector (displacement and load) and matrix transformation have not yet been covered, we not by inspection that the relationship between global and local coordinates for element BC is

Local	δ_1	δ_2	θ_3	δ_4	δ_5	θ_6
Global	0	0	0	Δ_2	$-\Delta_1$	θ_3

and we observe that there are no local or global displacements associated with dof 1-3; Hence, the internal forces for element BC are given by:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \\ -\Delta_1 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{wH}{2} \\ -\frac{w \cdot H^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{wH}{2} \\ \frac{w \cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

Note that the element is defined as going from C to B hence x,y,z correspond to Y, -X, Z.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

K भूकंपीय अभिलेख निस्यंदन (तीव्र फूरियर रूपांतरण)

सारांश

यह परिशिष्ट तीव्र फूरियर रूपांतरण (FFT) और बटरवर्थ निस्यंदक विधियों द्वारा भूकंपीय त्वरण अभिलेखों के निस्यंदन की व्याख्या करता है। सिद्धांत संकेत के निरूपण को काल-प्रक्षेत्र से आवृत्ति-प्रक्षेत्र में परिवर्तित करता है और संकेत को विभिन्न आवृत्तियों वाले घटक ज्या तथा कोज्या फलनों में विघटित करता है। आवृत्ति-सामग्री में परिवर्तन करके अभिलेख के भौतिक रूप से सार्थक भागों को सुरक्षित रखते हुए अवांछित रव और उच्च-आवृत्ति घटकों को हटाया जा सकता है। परिशिष्ट में फूरियर श्रेणी और रूपांतरण के गणितीय आधार, व्यावहारिक निस्यंदन कलनविधियाँ तथा संरचनात्मक अभिकल्पन और विश्लेषण में सामान्यतः प्रयुक्त प्रबल-गति भूकंपीय अभिलेखों के अनुप्रयोग सम्मिलित हैं।

K.1 फूरियर रूपांतरण की गणना 2983

किसी भूकंपीय अभिलेख, विशेषतः प्रबल-गति अभिलेख, से उच्च आवृत्तियों को निस्यंदित करना आवश्यक हो सकता है। यह अनुभाग सरल प्रक्रिया की व्याख्या करता है।

हम सामान्यतः संकेत को काल-प्रक्षेत्र में, अर्थात $f(t)$, देखते हैं। तथापि उसे आवृत्ति-प्रक्षेत्र में देखने के कुछ लाभ हैं।

फूरियर श्रेणी आँकड़ों के निरूपण की वैकल्पिक विधि प्रदान करती है: संकेत-आयाम को समय के फलन के रूप में निरूपित करने के स्थान पर संकेत को विभिन्न आवृत्तियों पर निहित सूचना की मात्रा द्वारा निरूपित किया जाता है। चित्र K.1 काल और आवृत्ति प्रक्षेत्रों में जोड़े गए रव सहित हार्मोनिक संकेत दर्शाता है।

फूरियर रूपांतरण विभिन्न आवृत्तियों की ज्या और कोज्या के योग में संकेत का विघटन करके उसे काल-प्रक्षेत्र से आवृत्ति-प्रक्षेत्र में ले जाते हैं,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2i\pi\omega t} \mathrm{d}t$$

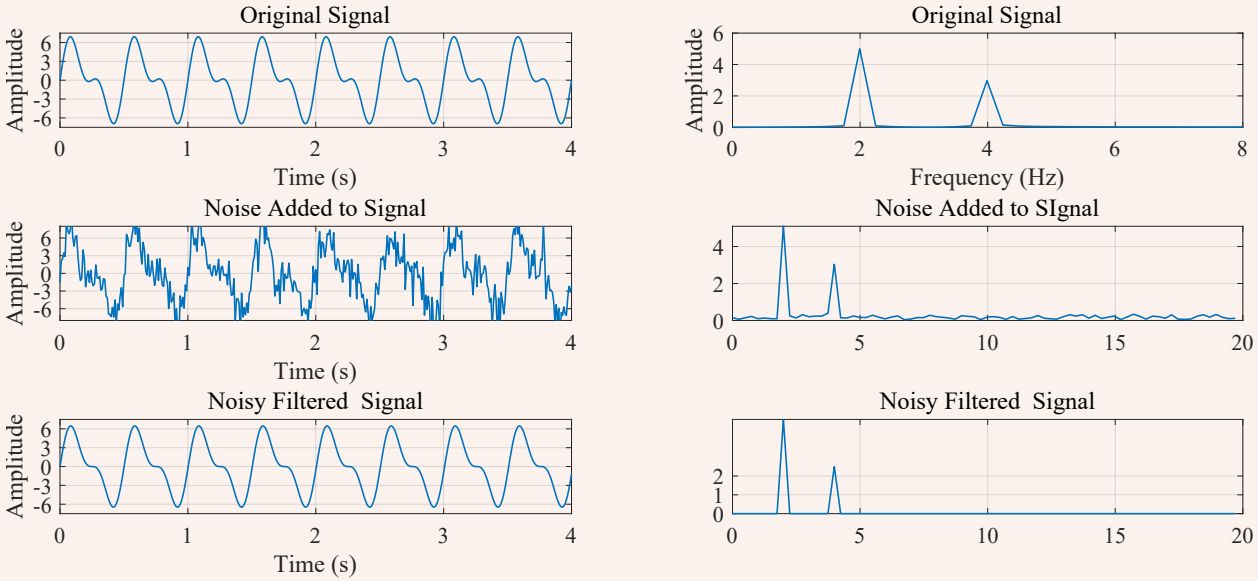
$$x(t) \overset{\text{FFT}}{\longrightarrow} X(\omega)$$

जबकि प्रतिलोम FFT निम्न प्रकार आवृत्ति-प्रक्षेत्र से पुनः काल-प्रक्षेत्र में ले जाता है:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{2i\pi\omega t} \mathrm{d}\omega$$

$$X(\omega) \overset{\text{FFT}^{-1}}{\longrightarrow} x(t)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र K.1: बटरवर्थ-निस्यंदित संकेतों के उदाहरण

6 आवृत्ति-प्रक्षेत्र में पहुँचने के बाद काल-प्रक्षेत्र में निस्यंदित आँकडों सहित लौटने से पहले विशेष निस्यंदकों, विशेषतः तथाकथित बटरवर्थ निस्यंदकों, का उपयोग किया जा सकता है। कुछ सर्वाधिक सामान्य बटरवर्थ निस्यंदक चित्र K.2 में दर्शाए गए हैं:

$$|H(j\omega)|^2 = \begin{cases} \text{Low pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{2n}} \\ \text{High pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_U}{\omega}\right)^{2n}} \\ \text{Band pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{2n}} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_U}{\omega}\right)^{2n}} \\ \text{Band stop} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^{2n}} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_U}\right)^{2n}} \end{cases}$$

जहाँ ω, ω_L, ω_U और n क्रमशः आवृत्ति, निस्यंदक की निम्न तथा उच्च आवृत्तियाँ और निस्यंदक की कोटि हैं।

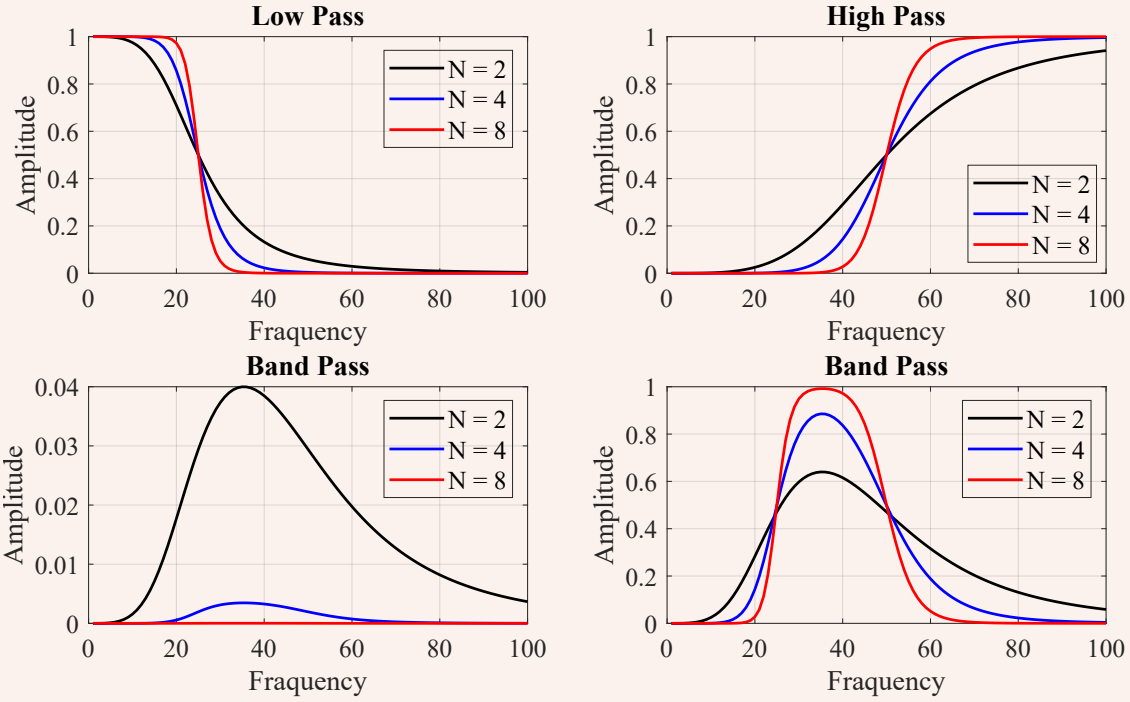
K.1 फूरियर रूपांतरण की गणना

व्यवहार में दो भिन्न स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं:

(a) सतत फलन $x(t)$ का रूपांतरण अपेक्षित है।

(b) अभिलिखित आँकडों के परिमित समुच्चय का रूपांतरण अपेक्षित है (भूकंप अभियांत्रिकी में सामान्य स्थिति)।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र K.2: विभिन्न n के लिए बटरवर्थ निस्यंदकों की तुलना

(a) सतत फलन का फूरियर रूपांतरण

$(-\infty, \infty)$ पर परिभाषित सतत फलन $x(t)$ के लिए फूरियर रूपांतरण की परिभाषा है

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

प्रक्रिया निम्न है:

1. फलन $x(t)$ को विश्लेषणात्मक रूप से परिभाषित करें।
2. उसे समाकल में प्रतिस्थापित करें।
3. समाकल का मूल्यांकन करें (यदि संभव हो तो विश्लेषणात्मक रूप से)।

उदाहरणार्थ, हार्मोनिक फलन पर विचार करें

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t).$$

ऑयलर सर्वसमिका का उपयोग करने पर,

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right),$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

रूपांतरण $\omega = \pm\omega_0$ पर आवेग देता है, जो दर्शाता है कि शुद्ध हार्मोनिक में एक ही आवृत्ति पर ऊर्जा होती है।

अनेक संरचनात्मक अनुप्रयोगों में, विशेषतः कंपन विश्लेषण में, आवृत्ति-सामग्री, अनुनाद और स्थिरता-व्यवहार को समझने के लिए संवृत-रूप रूपांतरणों का उपयोग किया जाता है।

(b) परिमित आँकड़ा-समुच्चय का फूरियर रूपांतरण (DFT और FFT)

भूकंप अभियांत्रिकी में सतत फलनों के स्थान पर प्रतिचयित आँकड़ों का उपयोग किया जाता है:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$$

जिनका प्रतिचयन समान काल-अंतराल Δt पर होता है।

कुल अवधि है

$$T = N\Delta t,$$

और प्रतिचयन आवृत्ति है

$$f_s = \frac{1}{\Delta t}.$$

विविक्त फूरियर रूपांतरण (DFT) की परिभाषा है

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N}, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

प्रतिलोम रूपांतरण है

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi kn/N}.$$

तीव्र फूरियर रूपांतरण (FFT), $O(N^2)$ के स्थान पर $O(N \log N)$ संक्रियाओं में DFT की गणना करने वाली एक दक्ष संख्यात्मक कलनविधि मात्र है।

आवृत्ति विभेदन और नाइक्विस्ट आवृत्ति

प्रतिचयन सिद्धांत से दो महत्वपूर्ण राशियाँ सीधे प्राप्त होती हैं:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}, \tag{K.1}$$

$$f_{\text{Nyquist}} = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t}. \tag{K.2}$$

- Δf आवृत्ति-विभेदन निर्धारित करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- f_{Nyquist} वह उच्चतम आवृत्ति है जिसे उपनामकरण के बिना निरूपित किया जा सकता है।

अतः भूकंपीय अभिलेखों के लिए:

- उच्च प्रतिचयन दर → अधिक नाइक्विवस्ट आवृत्ति।
- दीर्घ अवधि → बेहतर आवृत्ति-विभेदन।

भूकंपीय अभिलेखों के लिए व्यावहारिक प्रक्रिया

किसी भूकंपीय त्वरण अभिलेख के लिए:

1. माध्य हटाएँ (आधार-रेखा संशोधन)।
2. वैकल्पिक रूप से विंडो फलन (Hanning, Hamming) लागू करें।
3. FFT की गणना करें।
4. चुने हुए निस्यंदक फलन $H(\omega)$ से गुणा करें।
5. प्रतिलोम FFT की गणना करें।
6. परिणाम का वास्तविक भाग लें।

इससे निस्यंदित काल-इतिहास प्राप्त होता है।

7 प्रक्रिया को §I.5.3 में दिए गए MATLAB®कोड द्वारा स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण K.1: FFT

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

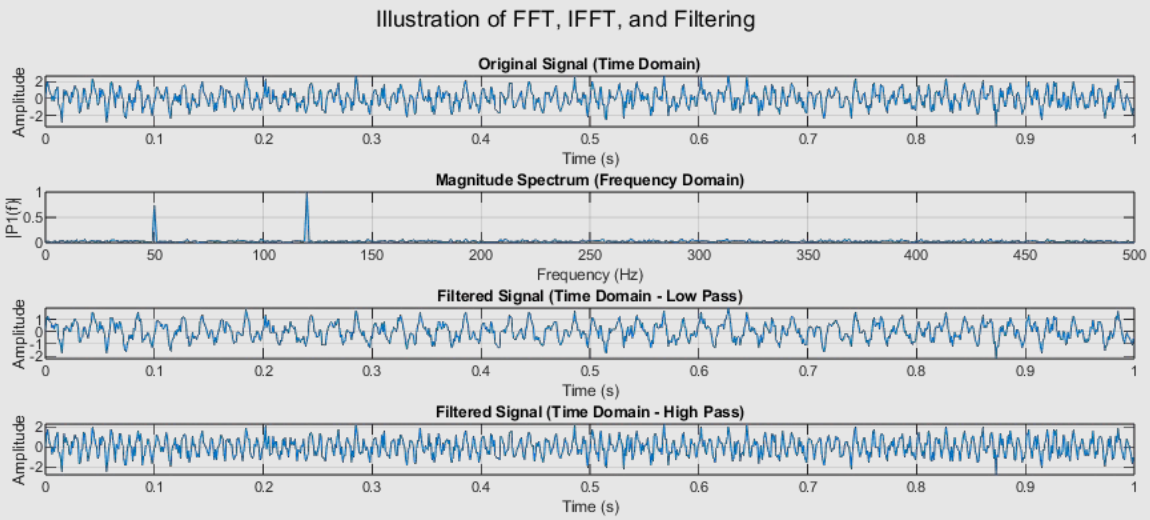
दो ज्यावक्रीय घटकों, जिनकी आवृत्तियाँ $f_1 = 50$ Hz और $f_2 = 120$ Hz हैं, को संयोजित करके एक संयुक्त संकेत बनाया जाता है। अधिक यथार्थपरक परिस्थिति के अनुकरण के लिए संकेत में यादृच्छिक रव जोड़ा जाता है।

संकेत को आवृत्ति-प्रक्षेत्र में रूपांतरित करने के लिए FFT लागू किया जाता है, जिससे वर्णक्रमीय घटक और उनके परिमाण प्रकट होते हैं।

IFFT संकेत को उसके आवृत्ति-प्रक्षेत्र निरूपण से पुनर्निर्मित करता है और रूपांतरण की उत्क्रमणीय प्रकृति प्रदर्शित करता है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



- **मूल संकेत:** काल-प्रक्षेत्र संकेत ज्यावक्रीय घटकों और जोड़े गए रव का संयुक्त प्रभाव दर्शाता है।
- **आवृत्ति वर्णक्रम:** FFT संकेत के प्रमुख आवृत्ति-घटकों (50 Hz और 120 Hz) को प्रकट करता है।
- **निम्न-पारक निस्यंदित संकेत:** निम्न-पारक निस्यंदक उच्च-आवृत्ति रव हटाकर अंतक आवृत्ति (100 Hz) से नीचे के घटकों को बनाए रखता है।
- **उच्च-पारक निस्यंदित संकेत:** उच्च-पारक निस्यंदक निम्न-आवृत्ति घटकों को हटाकर अंतक आवृत्ति (100 Hz) से ऊपर के घटकों को बनाए रखता है।
- **पुनर्निर्मित संकेत:** IFFT निस्यंदित और मूल दोनों संकेतों का यथार्थ पुनर्निर्माण करता है और रूपांतरण की उत्क्रमणीयता प्रदर्शित करता है।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

L रैखिक बीजगणित की समीक्षा

सारांश

किसी संरचना के परिमित संख्या में नोडों में विविक्तीकरण के कारण समाधान आव्यूह-आधारित होगा। किसी अवस्था पर विस्थापनों के समाधान के लिए एक आव्यूह को "प्रतिलोमित" करना आवश्यक होगा।

अतः यह अध्याय पाठक को रैखिक बीजगणित की संक्षिप्त समीक्षा प्रदान करता है। यद्यपि हम आव्यूह-प्रतिलोमन के लिए अंतर्निहित फलनों (जैसे MATLAB®में `inv` *अथवा Python में* `linalg.inv(a)`*) पर निर्भर करते हैं, फिर भी विभिन्न विकल्पों के आधारभूत कलनविधियों को समय-समय पर समझना आवश्यक है।*

L.1 आव्यूहों के विषय में 2988
L.1.1 परिभाषाएँ 2988
L.1.2 प्राथमिक आव्यूह संक्रियाएँ . . 2990
L.1.3 सारणिक 2991
L.1.4 प्रतिलोमन 2992
L.2 रैखिक समीकरणों के समाधान 2992
L.2.1 कार्यनीतियाँ 2992
L.2.2 अपघटन 2993
L.2.3 अप्रत्यक्ष विधियाँ 3000
L.3 आव्यूह-अभिलक्षण और संगणकीय संवर्द्धन 3001
L.3.1 विचित्रता और कोटि 3001
L.3.2 अभिलक्षणिक मान और अभिलक्षणिक सदिश 3002
L.3.3 अनुबंधन संख्या 3003
L.3.4 पूर्वानुबंधन 3003
L.4 उदाहरण 3006
L.4.1 उदाहरण L.1: गाउस विलोपन . . 3006
L.4.2 उदाहरण L.2: गाउस-जॉर्डन विलोपन 3007
L.4.3 उदाहरण L.3: **lu** अपघटन . . . 3008
L.4.4 उदाहरण L.4: चोलेस्की अपघटन 3009
L.4.5 उदाहरण L.5: गाउस-सीडेल . . . 3010
L.4.6 उदाहरण L.6: गाउस-सीडेल . . . 3011
L.4.7 उदाहरण L.7: एकल मान अपघटन 3011
L.4.8 उदाहरण L.8: पूर्वानुकूलन . . . 3012

L.1 आव्यूहों के विषय में

L.1.1 परिभाषाएँ

आव्यूहः

$$[A] = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

आव्यूह का आकार $\mathbf{A}_{m\times n}$ के रूप में इंगित किया जाता है और आव्यूह के किसी वैयक्तिक पद को A_{ij} कहा जाता है। ध्यान दें कि मुद्रित रूप में आव्यूह और सदिश सामान्यतः स्थूल अक्षरों में, अथवा हस्तलिखित रूप में टिल्ड के साथ $\tilde{A}$, लिखे जाते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सदिश: एक-स्तंभीय आव्यूह होते हैं:

$$\{X\} = \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{Bmatrix}$$

पंक्ति-सदिश होगा

$$\mathbf{C}^T = \lfloor C \rfloor = \lfloor \; B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_i \quad \dots \quad B_m \; \rfloor$$

ध्यान दें कि अदिश, सदिश और आव्यूह क्रमशः 0, 1 और 2 कोटि के प्रदिश होते हैं।

वर्ग आव्यूह: ऐसे आव्यूह हैं जिनमें पंक्तियों और स्तंभों की संख्या समान होती है। $\mathbf{A}_{m\times m}$

सममिति: $A_{ij} = A_{ji}$

तत्समक आव्यूह: ऐसा वर्ग आव्यूह है जिसके विकर्ण पदों के अतिरिक्त सभी प्रविष्टियाँ शून्य और विकर्ण पद एक के बराबर होते हैं। इसे प्रायः $\mathbf{I}$ द्वारा निरूपित किया जाता है, और

$$I_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i \neq j \\ 1, & if\, i = j \end{cases}$$

विकर्ण आव्यूह: ऐसा वर्ग आव्यूह है जिसके विकर्ण पदों के अतिरिक्त सभी प्रविष्टियाँ शून्य और विकर्ण पद शून्य से भिन्न होते हैं। इसे प्रायः $\mathbf{D}$ द्वारा निरूपित किया जाता है, और

$$D_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i \neq j \\ \neq 0, & if\, i = j \end{cases}$$

ऊपरी त्रिकोणीय आव्यूह: ऐसा वर्ग आव्यूह है जिसमें विकर्ण और उसके ऊपर की प्रविष्टियों के अतिरिक्त सभी प्रविष्टियाँ शून्य होती हैं। इसे प्रायः $\mathbf{U}$ द्वारा निरूपित किया जाता है, और

$$U_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i > j \\ \neq 0, & if\, i \leq j \end{cases}$$

निचला त्रिकोणीय आव्यूह: ऐसा वर्ग आव्यूह है जिसमें विकर्ण और उसके नीचे की प्रविष्टियों के अतिरिक्त सभी प्रविष्टियाँ शून्य होती हैं। इसे प्रायः $\mathbf{L}$ द्वारा निरूपित किया जाता है, और

$$L_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i < j \\ \neq 0, & if\, i \geq j \end{cases}$$

लांबिक आव्यूह: $\mathbf{A}_{m\times n}$ और $\mathbf{B}_{m\times n}$ को लांबिक कहा जाता है यदि $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$

वर्ग आव्यूह $\mathbf{C}_{m\times m}$ लांबिक होता है यदि $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

आव्यूह का अनुरेख: $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

उप-आव्यूह: किसी आव्यूह के भीतर स्थित आव्यूह होते हैं, उदाहरणार्थ

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ \hline 10 & 3 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 37 \\ 16 & 44 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 &= [4]\,[3 \;\; 2] = [12 \;\; 8] \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 14 & 34 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

उप-आव्यूहों पर उसी प्रकार संक्रिया करें जैसे वैयक्तिक आव्यूह-अवयवों पर की जाती है।

L.1.2 प्राथमिक आव्यूह संक्रियाएँ

किसी आव्यूह $\mathbf{A}_{m\times n}$ का **परिवर्त** एक अन्य आव्यूह $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T_{n\times m}$ है, ऐसा कि $B_{ij} = A_{ji}$ ध्यान दें कि

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

योग (व्यवकलन): $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n}$; $A_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$

अदिश गुणन: $\mathbf{B} = k\cdot\mathbf{A}$; $B_{ij} = kA_{ij}$

दो आव्यूहों का **आव्यूह गुणन** तभी संभव है जब पहले आव्यूह के स्तंभों की संख्या दूसरे आव्यूह की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो।

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{m\times n} &= \mathbf{B}_{m\times p}\cdot\mathbf{C}_{p\times n} \\
A_{ij} &= \underbrace{\lfloor\mathbf{B}_i\rfloor_{1\times p}\cdot\left\{\mathbf{C}_j\right\}_{p\times 1}}_{1\times 1} \\
&= \sum_{r=1}^{p} B_{ir}C_{rj}
\end{aligned}$$

आव्यूह गुणनफलों के कुछ महत्त्वपूर्ण गुण हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

साहचर्य: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

वितरणात्मक: $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

अक्रमविनिमेयता: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

L.1.3 सारणिक

किसी आव्यूह $\mathbf{A}_{n\times n}$ का सारणिक, जिसे $\det \mathbf{A}$ अथवा $|\mathbf{A}|$ द्वारा निरूपित किया जाता है, पुनरावर्ती रूप से निम्न प्रकार परिभाषित है

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j} \det \mathbf{A}_{1j}$$

जहाँ $\mathbf{A}_{1j}$ वह $(n-1)$x$(n-1)$ आव्यूह है जो आव्यूह $\mathbf{A}$ की ith पंक्ति और jth स्तंभ को हटाकर प्राप्त होता है।

किसी 2×2 आव्यूह के लिए

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a21$$

किसी 3×3 आव्यूह के लिए

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

किसी $n\times n$ आव्यूह का सारणिक परिकलित करने के लिए कंप्यूटर प्रोग्राम लिखना चुनौतीपूर्ण हो सकता है।

ध्यान दें कि किसी $n\times n$ आव्यूह के सारणिक में $n!$ पद होंगे, जिनमें से प्रत्येक में n गुणन सम्मिलित होंगे। अतः यदि $n = 10$ हो, तो $10! = 3,628,800$ पद होंगे और प्रत्येक में 9 गुणन सम्मिलित होने के कारण सारणिक के मूल्यांकन हेतु 30 मिलियन से अधिक चल-बिंदु संक्रियाएँ करनी होंगी। इसी कारण रैखिक समीकरण-निकाय के समाधान के लिए क्रैमर नियम का उपयोग अव्यावहारिक है।

सारणिकों के कुछ महत्त्वपूर्ण गुण:

1. किसी आव्यूह के परिवर्त का सारणिक उस आव्यूह के सारणिक के बराबर होता है

$$|\,\mathbf{A}\,| = |\,\mathbf{A}^T\,|$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. यदि कम-से-कम एक पंक्ति अथवा स्तंभ अन्य पंक्तियों अथवा स्तंभों का रैखिक संयोजन है, तो सारणिक शून्य होता है। इसका विलोम भी सत्य है: यदि सारणिक शून्य है, तो कम-से-कम एक पंक्ति अथवा स्तंभ अन्य पंक्तियों अथवा स्तंभों का रैखिक संयोजन होगा।
3. यदि पंक्तियों के बीच रैखिक निर्भरता है, तो स्तंभों के बीच भी रैखिक निर्भरता होगी और *vice-versa*।
4. किसी ऊपरी अथवा निचले त्रिकोणीय आव्यूह का सारणिक मुख्य विकर्ण पदों के गुणनफल के बराबर होता है।
5. दो वर्ग आव्यूहों के गुणनफल का सारणिक उनके वैयक्तिक सारणिकों के गुणनफल के बराबर होता है

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

[10] विचित्रता और कोटि का विवेचन दृढता आव्यूहों के संदर्भ में §45.1.1 में किया गया है।

L.1.4 प्रतिलोमन

[11] किसी वर्ग (अविचित्र) आव्यूह $\mathbf{A}$ के प्रतिलोम को $\mathbf{A}^{-1}$ द्वारा निरूपित किया जाता है और यह ऐसा होता है कि

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

[12] कुछ प्रेक्षण

1. किसी आव्यूह के परिवर्त का प्रतिलोम, उसके प्रतिलोम के परिवर्त के बराबर होता है
$$\mathbf{A}^{T^{-1}} = \mathbf{A}^{-1^T}$$
2. किसी आव्यूह-गुणनफल का प्रतिलोम, प्रतिलोमों का विपरीत-क्रम गुणनफल होता है
$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$
3. किसी सममित आव्यूह का प्रतिलोम भी सममित होता है।
4. किसी विकर्ण आव्यूह का प्रतिलोम एक अन्य विकर्ण आव्यूह होता है जिसकी प्रविष्टियाँ मूल आव्यूह की प्रविष्टियों के प्रतिलोम के बराबर होती हैं।
5. किसी त्रिकोणीय आव्यूह का प्रतिलोम त्रिकोणीय आव्यूह होता है।
6. किसी आव्यूह को प्रतिलोमित करने की तुलना में ऊपरी और निचले अपघटन अथवा गाउस विलोपन द्वारा उसका अपघटन ($\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$) संगणकीय रूप से अधिक दक्ष होता है।

L.2 रैखिक समीकरणों के समाधान

L.2.1 कार्यनीतियाँ

[13] जैसा कि §45.2.1 में विवेचित है, $\mathbf{K}^{-1}$ निर्धारित करने के लिए अपघटन एक अत्यंत महत्त्वपूर्ण चरण है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

14 हम रैखिक समीकरण-निकाय में $\mathbf{x}$ का समाधान प्राप्त करना चाहते हैं

$$\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

प्रतीकात्मक रूप से यह संक्रिया निम्न प्रकार निरूपित होती है:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

15 व्यापक रूप से इस संक्रिया के तीन उपागम हैं:

प्रत्यक्ष प्रतिलोमन क्रैमर नियम का उपयोग करता है, जहाँ $\mathbf{A}^{-1} = \frac{[adj\mathbf{A}]}{\mathbf{A}}$। किंतु यह उपागम $n \geq 3$ के लिए संगणकीय दृष्टि से अत्यंत अदक्ष है क्योंकि इसमें n उच्च-कोटि सारणिकों का मूल्यांकन आवश्यक है। इसका कभी उपयोग नहीं किया जाता (केवल 2×2 आव्यूह के हस्त-प्रतिलोमन को छोड़कर)।

अपघटन: सर्वाधिक सामान्य स्थिति में हम निम्न अपघटन चाहते हैं

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{LDU}$$

इस विधि में अपघटन प्राप्त करने के लिए संक्रियाओं की संख्या परिमित होती है और परिणाम यथार्थ होते हैं।

अप्रत्यक्ष विधियाँ: अथवा पुनरावर्ती अपघटन तकनीक, जिसमें आवश्यक संक्रियाओं की संख्या का कोई *a-priori* ज्ञान नहीं होता और उपयोगकर्ता द्वारा परिभाषित परिशुद्धता-स्तर वाला सन्निकट समाधान प्राप्त होता है।

16 प्रमुख समाधान विधियाँ तालिका L.1 में दर्शाई गई हैं।

तालिका L.1: रैखिक समीकरणों की समाधान विधियाँ

विधि	$\mathbf{b}$	प्रत्यक्ष	$\mathbf{A}^{-1}$
गाउस	हाँ	हाँ	नहीं
गाउस-जॉर्डन	हाँ	हाँ	नहीं
L-U	नहीं	हाँ	हाँ
चोलेस्की	नहीं	हाँ	हाँ
गाउस-सीडेल	हाँ	नहीं	नहीं

L.2.2 अपघटन

17 इस समाधान-वर्ग में हम आव्यूह पर प्रयुक्त की जा सकने वाली तीन प्राथमिक पंक्ति-संक्रियाओं का उपयोग करेंगे:

1. दो पंक्तियों के स्थानों को परस्पर बदलें।
2. किसी पंक्ति को शून्येतर अदिश से गुणा करें।
3. किसी पंक्ति के अदिश गुणज को दूसरी पंक्ति में जोड़ें अथवा उससे घटाएँ।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

L.2.2.1 गाउस विलोपन

18 हम समीकरणों को *पंक्ति-सोपानक* रूप में परिवर्तित करेंगे और पश्च-प्रतिस्थापन द्वारा अज्ञात चरों का समाधान करेंगे।

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\} \rightarrow \mathbf{U}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y}\}$$

19 पंक्ति-सोपानक रूप एक त्रिकोणीय आव्यूह है जिसमें किसी अग्रणी गुणांक के नीचे की सभी प्रविष्टियाँ शून्य होती हैं।

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_{mm} \end{bmatrix}$$

20 ध्यान दें कि यह विधि केवल $\mathbf{x}$ का समाधान प्रदान करेगी, $\mathbf{A}^{-1}$ का नहीं।

L.2.2.2 गाउस-जॉर्डन विलोपन

21 यह विधि गाउस विलोपन का विस्तार है। $\mathbf{A}$ को $\mathbf{U}$ में परिवर्तित करने के स्थान पर यह अज्ञात चरों वाले समीकरणों को *लघुकृत पंक्ति-सोपानक* रूप में बदलती है (जिसमें मुख्य विकर्ण की सभी प्रविष्टियाँ 1 और अन्य सभी प्रविष्टियाँ 0 होती हैं, अर्थात् $\mathbf{I}$)

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \rightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$$

अतः पश्च-प्रतिस्थापन आवश्यक नहीं होता और आव्यूह-प्रतिलोम स्पष्ट रूप से प्राप्त किया जा सकता है।

22 ध्यान दें कि गाउस-जॉर्डन समीकरणों का समाधान और मूल आव्यूह का प्रतिलोम, दोनों प्रदान करता है। इसके लिए गाउस अथवा LU अपघटन ($\frac{n^3}{3}$) की तुलना में तीन गुना (n^3) अधिक संक्रियाएँ आवश्यक हैं।

23 प्रक्रिया

- पंक्तियों को इस प्रकार परस्पर बदलें कि पूर्णतः शून्य प्रविष्टियों वाली सभी पंक्तियाँ नीचे हों।
- पंक्तियों को इस प्रकार परस्पर बदलें कि सबसे बड़ी, सर्वाधिक बाईं ओर की शून्येतर प्रविष्ट वाली पंक्ति ऊपर हो।
- शीर्ष पंक्ति को किसी अदिश से गुणा करें ताकि उसकी अग्रणी प्रविष्टि 1 हो जाए।
- शीर्ष पंक्ति के गुणजों को अन्य पंक्तियों में जोड़ें/घटाएँ ताकि शीर्ष पंक्ति की अग्रणी प्रविष्ट वाले स्तंभ की अन्य सभी प्रविष्टियाँ शून्य हो जाएँ।
- अगली सर्वाधिक बाईं ओर की शून्येतर प्रविष्टि के लिए चरण 2-4 तब तक दोहराएँ जब तक सभी अग्रणी प्रविष्टियाँ 1 न हो जाएँ।
- पंक्तियों को इस प्रकार परस्पर बदलें कि प्रत्येक शून्येतर पंक्ति की अग्रणी प्रविष्टि उसके ऊपर की पंक्ति की अग्रणी प्रविष्टि के दाईं ओर हो।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

L.2.2.3 LU अपघटन

[24] गाउस विलोपन और गाउस-जॉर्डन विलोपन दोनों संवर्धित आव्यूह $[A|b]$ का उपयोग करते हैं, अतः $\mathbf{b}$ ज्ञात होना चाहिए। इसके विपरीत, LU-अपघटन केवल आव्यूह $\mathbf{A}$ का उपयोग करता है; इसलिए गुणनखंडन पूरा होने पर इसे किसी भी सदिश $\mathbf{b}$ पर लागू किया जा सकता है।

[25] वास्तव में, कुछ अनुप्रयोगों में दाएँ पक्ष (RHS) के पूर्ण होने से पहले आव्यूह का अपघटन करना वांछनीय हो सकता है। उदाहरणार्थ, प्रत्यक्ष दृढता विधि में हमारे पास अनेक भार-स्थितियाँ हो सकती हैं, फिर भी हम दृढता आव्यूह को केवल एक बार प्रतिलोमित करना चाहेंगे। यह निम्न अपघटन द्वारा प्राप्त होगा:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{LU}$$

[26] समाधान में निम्न सम्मिलित हैं:

अपघटन: दाएँ पक्ष के सदिश से स्वतंत्र रूप से आव्यूह का

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}\underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

पश्च-प्रतिस्थापन: प्रत्येक दाएँ पक्ष के सदिश के लिए

1. ऊपर से आरंभ करते हुए $\mathbf{L}\{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{b}\}$ से $\{\mathbf{y}\}$ का समाधान करें।
2. नीचे से आरंभ करते हुए $\mathbf{U}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y}\}$ से $\{\mathbf{x}\}$ का समाधान करें।

[27] सदिश $\mathbf{y}$ वही है जिसमें गाउस विलोपन में $\mathbf{b}$ को लघुकृत किया गया था।

[28] अंकगणितीय रूप से:

1. दिया गया है:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

2. समाधान करें:

$$\begin{aligned} a_{11} &= u_{11} & a_{12} &= u_{12} \cdots & a_{1n} &= u_{1n} \\ a_{21} &= l_{21}u_{11} & a_{22} &= l_{21}u_{12} + u_{22} & a_{2n} &= l_{21}u_{1n} + u_{2n} \\ &\vdots \\ a_{n1} &= l_{n1}u_{11} & a_{n2} &= l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} & a_{nn} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn} + u_{nn} \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

3. मान लें:

$$\mathbf{A}^F = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

4. पंक्ति-दर-पंक्ति अथवा स्तंभ-दर-स्तंभ आगे बढ़ें

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}} \quad i > j \\ u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad i \leq j \\ l_{ii} &= 1 \end{aligned}$$

परिकलित अवयव l_{ij} अथवा u_{ij} सदैव संगत अवयव a_{ij} को अधिलेखित कर सकते हैं।

29 चरण-दर-चरण:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & A_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

30 स्तंभ-दर-स्तंभ प्रतिस्थापन करने पर

$$\begin{aligned} \lfloor\ L_{11}^{\checkmark} \quad L_{21}^{\checkmark} \quad L_{31}^{\checkmark}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{11} \quad A_{21} \quad A_{31}\ \rfloor && \text{Column 1} \\ \lfloor\ L_{11}U_{12} \quad L_{21}U_{12} + L_{22} \quad L_{31}U_{12} + L_{32}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{12} \quad A_{22} \quad A_{32}\ \rfloor \Rightarrow \lfloor\ U_{12}^{\checkmark} \quad L_{22}^{\checkmark} \quad L_{32}^{\checkmark}\ \rfloor && \text{Column 2} \\ \lfloor\ L_{11}U_{13} \quad L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \quad L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{13} \quad A_{23} \quad A_{33}\ \rfloor \Rightarrow \lfloor\ U_{13}^{\checkmark} \quad U_{23}^{\checkmark} \quad L_{33}^{\checkmark}\ \rfloor && \text{Column 3} \end{aligned}$$

और प्रत्येक चरण में n अज्ञातों का समाधान करें।

31 यदि $\mathbf{A}$ सममित हो, तब भी $\mathbf{L}^T \neq \mathbf{U}$।

32 MATLAB® में, यदि केवल $\mathbf{x}$ चाहिए और $\mathbf{A}^{-1}$ नहीं, तो `x = inv(A)*b` की तुलना में `x = A\b` को प्राथमिकता दी जाती है। इसके विपरीत `inv`, LU अथवा LDL अपघटन का उपयोग करता है।

33 सममित आव्यूहों के लिए LU अपघटन निम्न रूप में लघुकृत होता है:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad i \leq j \\ l_{ii} &= 1 \\ l_{ij} &= \frac{u_{ji}}{u_{jj}} \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

L.2.2.4 चोलेस्की अपघटन

34 यदि $\mathbf{A}$ सममित है, तो $\mathbf{A}^F$ सममित नहीं है। उदाहरणार्थ:

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ .25 & 1 & \\ .5 & -1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ & 4 & -6 \\ & & 9 \end{bmatrix}$$

35 जबकि, हम $\mathbf{A}$ का सदैव निम्न प्रकार अपघटन कर सकते हैं:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}^* \mathbf{D} \mathbf{U}^{*^T}$$

और सममित आव्यूहों के लिए यह निम्न रूप में लघुकृत होगा

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}^* \mathbf{D} \mathbf{L}^{*^T}$$

36 इसके अतिरिक्त, विकर्ण आव्यूह $\mathbf{D}$ को दो आव्यूहों के गुणनफल के रूप में गुणनखंडित किया जा सकता है: $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ अतः:

$$\mathbf{A} \rightarrow \underbrace{[\mathbf{L}^*]\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}[\mathbf{L}^*]^T}_{\mathbf{L}^T}$$

37 चरण-दर-चरण

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & A_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

38 अब स्तंभों के अनुदिश चलकर प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} \lfloor L_{11} \quad L_{21} \quad L_{31} \rfloor &= \sqrt{A_{11}} \quad \lfloor \frac{A_{12}}{L_{11}} \quad \frac{A_{13}}{L_{11}} \rfloor \quad \text{Column 1} \\ \lfloor L_{22} \quad L_{32} \rfloor &= \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} \quad \lfloor \frac{A_{32} - L_{21}L_{31}}{L_{22}} \rfloor \quad \text{Column 2} \\ L_{33} &= \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} \quad \text{Column 3} \end{aligned}$$

39 स्पष्टतः विकर्ण पद धनात्मक होने चाहिए।

40 इस कलनविधि को निम्न प्रकार संक्षेपित किया जा सकता है:

$$\begin{aligned} l_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\ l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1}}{l_{jj}} \qquad i > j \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

L.2.2.5 विचित्र मान अपघटन

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

41 विचित्र मान अपघटन (Singular Value Decomposition, SVD) एक बहुपयोगी गणितीय साधन है, जो किसी भी $m \times n$ आव्यूह A को तीन सरलतर, सुव्यवस्थित आव्यूहों में अपघटित करता है। इसे इस प्रकार व्यक्त किया जाता है:

$$A = U\Sigma V^T$$

जहाँ:

- U $(m \times m)$ एक लांबिक आव्यूह है, जिसके स्तंभ A के **वाम विचित्र सदिश** हैं।
- Σ $(m \times n)$ एक विकरण आव्यूह है, जिसमें A के **विचित्र मान** $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0)$ होते हैं।
- V^T $(n \times n)$ एक लांबिक आव्यूह है, जिसकी पंक्तियाँ A के **दक्षिण विचित्र सदिश** हैं।

42 विचित्र मान (σ_i) संगत विचित्र सदिशों के महत्त्व को निरूपित करते हैं और यह मापते हैं कि प्रत्येक सदिश आव्यूह की समग्र संरचना में कितना योगदान देता है।

43 U और V के स्तंभ क्रमशः A के पंक्ति-समष्टि और स्तंभ-समष्टि के लिए प्रसामान्य-लांबिक आधार बनाते हैं।

44 SVD, A को सरल रूप में परिवर्तित कर उसकी अंतर्निहित विशेषताओं—जैसे कोटि, परास और शून्य समष्टि—को प्रकट करता है।

45 SVD के अनेक अनुप्रयोग हैं। इनमें एक प्रमुख अनुप्रयोग रैखिक निकायों का समाधान है, विशेषतः उन दुःस्थित अथवा विचित्र आव्यूहों के लिए जहाँ पारंपरिक विधियाँ विफल हो जाती हैं।

46 इसकी प्रक्रिया निम्नलिखित है:

1. SVD संपन्न करें
   - A को U, Σ, और V^T में अपघटित करें।
   - निम्न संगणकीय साधनों का उपयोग करें:
     - Matlab: `[U, S, V] = svd(A)`
     - Python (NumPy): `U, S, Vt = np.linalg.svd(A)`
2. विचित्र मानों का विश्लेषण करें
   - Σ के विकरण अवयवों, अर्थात् विचित्र मानों, का निरीक्षण करें।
   - छोटे अथवा शून्य विचित्र मान संकेत देते हैं कि A दुःस्थित हो सकता है; अतः स्थिर संगणन सुनिश्चित करने के लिए नियमितीकरण अथवा निस्यंदन आवश्यक हो सकता है।
3. आव्यूह का पुनर्निर्माण करें

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- A का पुनर्निर्माण करके अपघटन की पुष्टि करें:

$$A = U\Sigma V^T$$

4. रैखिक निकायों का समाधान करें $Ax = b$ के लिए:

- SVD की सहायता से समाधान को व्यक्त करें:

$$x = V\Sigma^+ U^T b$$

जहाँ Σ^+, Σ का छद्म-व्युत्क्रम है, जो अशून्य विचित्र मानों का व्युत्क्रम लेकर और Σ का पक्षांतर करके प्राप्त किया जाता है।

- दुःस्थित आव्यूहों के लिए:
  - संगणन को स्थिर करने हेतु किसी सीमा से छोटे विचित्र मानों को त्यागकर नियमितीकरण करें।
  - यह उपाय अत्यंत छोटे विचित्र मान वाले आव्यूहों के लिए विशेष रूप से प्रभावी है।

5. आव्यूह का सन्निकटन करें

- विमीयता-न्यूनीकरण अथवा रव-निस्यंदन के लिए केवल शीर्ष k विचित्र मानों को रखकर Σ को छाँटें; अन्य मानों को शून्य कर दें।
- A के कोटि-k सन्निकटन का पुनर्निर्माण करें:

$$A_k = U_k \Sigma_k V_k^T$$

47 उदाहरणार्थ, दिया गया है:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix},$$

1. SVD की गणना करें:

- $U = A$ के स्तंभ-समष्टि का प्रसामान्य-लांबिक आधार।
- $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ (विचित्र मान)।
- $V^T = A$ के पंक्ति-समष्टि का प्रसामान्य-लांबिक आधार।

2. SVD से $Ax = b$ का समाधान करें:

$$x = V\Sigma^+ U^T b$$

3. यदि A दुःस्थित हो, तो स्थिरता सुनिश्चित करने हेतु छोटे विचित्र मानों का नियमितीकरण करें।

48 इस प्रकार SVD निकट-विचित्रता अथवा दुःस्थिति के कारण कठिनाई से अपघटित होने वाले आव्यूहों के लिए विशेष रूप से प्रभावी है और समीकरणों के समाधान, संगणन की स्थिरता तथा आव्यूह-गुणों के विश्लेषण के लिए एक सुदृढ ढाँचा प्रदान करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

L.2.2.6 QR अपघटन

49 QR अपघटन रैखिक बीजगणित में आव्यूह गुणनखंडन की एक मूलभूत तकनीक है, जिसमें दिए गए आव्यूह $\mathbf{A}$ को दो आव्यूहों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है: एक लांबिक (अथवा एकात्मक) आव्यूह $\mathbf{Q}$ और एक ऊपरी त्रिकोणीय आव्यूह $\mathbf{R}$। गणितीय रूप से:

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}.$$

50 यहाँ $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (अथवा सम्मिश्र प्रकरण में $\mathbf{Q}^*\mathbf{Q} = \mathbf{I}$) को संतुष्ट करता है; अतः उसके स्तंभ एक प्रसामान्य-लांबिक आधार बनाते हैं।

51 आव्यूह $\mathbf{R}$ ऊपरी त्रिकोणीय है, अर्थात् उसके विकर्ण के नीचे के सभी अवयव शून्य होते हैं। QR अपघटन सामान्यतः $m \times n$ विमा के आयताकार आव्यूहों पर लागू किया जाता है, जहाँ $m \geq n$।

L.2.3 अप्रत्यक्ष विधियाँ

52 पुनरावृत्त विधियाँ अत्यंत “बड़े” समीकरण-निकायों के लिए, अथवा तब जब समाधान का कोई प्रारंभिक “अनुमान” उपलब्ध हो, सर्वाधिक उपयुक्त होती हैं।

53 इनमें सबसे प्रचलित विधि गाउस-सीडेल विधि है।

L.2.3.1 गाउस-सीडेल

54 अपने रैखिक समीकरण-निकाय से आरंभ करते हुए

$$\begin{aligned} c_{11}x &+ c_{12}y &+ c_{13}z &= r_1 \\ c_{21}x &+ c_{22}y &+ c_{23}z &= r_2 \\ c_{31}x &+ c_{32}y &+ c_{33}z &= r_3 \end{aligned}$$

1^{st} समीकरण से x_1 का समाधान y, z के प्रारंभिक “अनुमान” $(y0, z_0)$ का उपयोग करके करें:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{r_1 - c_{12}y_0 - c_{13}z_0}{c_{11}} \\ y_1 &= \frac{r_2 - c_{21}x_1 - c_{23}z_0}{c_{22}} \\ z_1 &= \frac{r_3 - c_{31}x_1 - c_{32}y_1}{c_{33}} \end{aligned}$$

और इसी प्रकार & आगे बढ़ें ⋯

टिप्पणी:

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. पुनरावृत्त प्रक्रिया को अभिसरित माना जा सकता है यदि:

$$\left|\frac{\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{k-1}}{\mathbf{x}^{lk}}\right| \leq \varepsilon$$

2. शिथिलीकरण द्वारा अभिसरण को त्वरित किया जा सकता है:

$$x_i^k = \lambda x_i^k + (1-\lambda) x_i^{k-1}$$

जहाँ λ, 0 और 2 के मध्य एक भार गुणक है। 1 से छोटे मानों के लिए *अधोशिथिलीकरण* और 1 से बड़े मानों के लिए *अधिशिथिलीकरण* होता है। पहला अनभिसारी निकायों के लिए प्रयुक्त होता है, जबकि दूसरा अभिसारी निकायों के अभिसरण को त्वरित करने के लिए प्रयुक्त होता है। ढाँचा-विश्लेषण के लिए इष्टतम λ लगभग 1.8 है।

L.3 आव्यूह-अभिलक्षण और संगणकीय संवर्द्धन

L.3.1 विचित्रता और कोटि

55 यदि किसी आव्यूह $\mathbf{A}_{n\times n}$ का सारणिक शून्य हो, तो वह आव्यूह विचित्र कहलाता है।

56 जैसा कि पहले देखा गया है, इसका अर्थ है कि कम-से-कम एक पंक्ति अथवा एक स्तंभ अन्य पंक्तियों अथवा स्तंभों का रैखिक संयोजन है।

57 रैखिक समीकरण-निकाय की विचित्रता और कोटि की अवधारणाएँ संबद्ध गुणांक आव्यूह के अभिलक्षणिक मानों से घनिष्ठ रूप से संबंधित हैं।

58 $n \times n$ आकार के वर्ग आव्यूह $\mathbf{A}$ की विचित्रता उसके सारणिक से निर्धारित होती है। कोई आव्यूह तभी और केवल तभी विचित्र होता है जब उसका सारणिक शून्य हो; इससे स्पष्ट है कि उसकी कोटि पूर्ण नहीं है।

59 यह अवस्था सीधे A के अभिलक्षणिक मानों से जुड़ी है: सारणिक अभिलक्षणिक मानों का गुणनफल है, $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, जहाँ λ_i, $\mathbf{A}$ के अभिलक्षणिक मान हैं। यदि कोई भी अभिलक्षणिक मान $\lambda_i = 0$ हो, तो सारणिक शून्य हो जाता है और आव्यूह विचित्र होता है।

60 किसी आव्यूह की कोटि $\mathbf{A}$ में रैखिक रूप से स्वतंत्र पंक्तियों अथवा स्तंभों की अधिकतम संख्या को निरूपित करती है; बीजीय बहुलताओं को ध्यान में रखने पर यह आव्यूह के अशून्य अभिलक्षणिक मानों की संख्या के अनुरूप होती है। $n \times n$ आकार के पूर्ण-कोटि आव्यूह के सभी n अभिलक्षणिक मान अशून्य होते हैं। इसके विपरीत, यदि आव्यूह की कोटि $r < n$ हो, तो ठीक $n - r$ अभिलक्षणिक मान शून्य होते हैं।

61 संख्यात्मक दृष्टि से अभिलक्षणिक मान निकाय की अनुबंधनता को भी प्रभावित करते हैं। शून्य के निकट अभिलक्षणिक मान वाला आव्यूह, अविचित्र होने पर भी, संख्यात्मक अस्थिरता उत्पन्न कर सकता है; इससे रैखिक निकायों के सैद्धांतिक और व्यावहारिक दोनों विश्लेषणों में अभिलक्षणिक मानों का महत्त्व स्पष्ट होता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

[62] यदि n किसी संरचना के वैश्विक दृढता आव्यूह का आकार है, जिसमें सीमा-प्रतिबंधों को अभी सम्मिलित नहीं किया गया है (n = कुल आसंधियों की संख्या और प्रति आसंधि स्वतंत्रता-कोटियों की कुल संख्या का गुणनफल), तो उसकी कोटि r, n में से संभव दृढ-पिंड गतियों की संख्या घटाने के बराबर होगी (द्विविमीय और त्रिविमीय प्रकरणों में क्रमशः 3 और 6)।

[63] उदाहरणार्थ, समीकरण 44.1 में संवरि्द्धत दृढता आव्यूह $\mathbf{K}$ की कोटि r, n से छोटी है, जबकि $\mathbf{K}_{tt}$ के लिए $r = n$ है।

L.3.2 अभिलक्षणिक मान और अभिलक्षणिक सदिश

[64] रैखिक समीकरण-निकाय का एक विशेष रूप

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix}$$

वह है जिसमें दक्षिण पक्ष समाधान का एक गुणज हो:

$$\mathbf{A}\,\{\mathbf{x}\} = \lambda\,\{\mathbf{x}\}$$

इसे पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\,\{\mathbf{x}\} = \mathbf{0}$$

[65] इस समीकरण-निकाय का अतुच्छ समाधान तभी और केवल तभी संभव है जब $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ विचित्र हो, अर्थात्

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

अथवा

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

[66] सारणिक का प्रसार करने पर λ में n^{th} कोटि का बहुपद प्राप्त होता है, जिसे $\mathbf{A}$ का अभिलक्षणिक समीकरण कहते हैं। इसके n समाधान—जो वास्तविक अथवा सम्मिश्र हो सकते हैं—$\mathbf{A}$ के अभिलक्षणिक मान हैं, और प्रत्येक λ_i संतुष्ट करता है:

$$\mathbf{A}\,\{\mathbf{x}_i\} = \lambda_i\,\{\mathbf{x}_i\}$$

जहाँ $\{\mathbf{x}_i\}$ संगत अभिलक्षणिक सदिश है।

यह दर्शाया जा सकता है कि:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. कोटि n के वास्तविक सममित आव्यूहों के सभी n अभिलक्षणिक मान वास्तविक होते हैं।
2. अभिलक्षणिक सदिश परस्पर लांबिक होते हैं और E_n में एक लांबिक आधार बनाते हैं।

अभिलक्षणिक मानों और अभिलक्षणिक सदिशों का उपयोग स्थायित्व (व्याकुंचन) विश्लेषण, गतिक विश्लेषण तथा परिमित-अवयव सूत्रीकरणों के निष्पादन के आकलन में किया जाता है।

L.3.3 अनुबंधन संख्या

किसी आव्यूह की अनुबंधन संख्या, रैखिक निकाय $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ के समाधान की निवेश आँकड़ों में परिवर्तन अथवा संगणन के दौरान पूर्णांकन-त्रुटियों के प्रति संवेदनशीलता का माप है। यह बताती है कि निवेश $\mathbf{b}$ में दिए गए विक्षोभ के कारण निर्गम अर्थात् समाधान $\mathbf{x}$ कितना बदलेगा।

वर्ग आव्यूह $\mathbf{A}$ के लिए, यदि $\mathbf{A}$ विकर्णनीय अथवा सममित धन-निश्चित हो, तो 2-मानक (वर्णक्रमीय मानक) में अनुबंधन संख्या इस प्रकार परिभाषित है:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

जहाँ λ_{max} और λ_{min} क्रमशः $\mathbf{A}$ के सबसे बड़े और सबसे छोटे अभिलक्षणिक मान (निरपेक्ष मान में) हैं।

इस परिभाषा से:

- धन-निश्चित आव्यूहों के लिए $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$, क्योंकि $\lambda_{max} \geq \lambda_{min} > 0$।
- छोटा $\kappa(\mathbf{A})$ (1 के निकट) सुअनुबंधित आव्यूह को दर्शाता है, जबकि बड़ा मान दुःअनुबंधित आव्यूह का संकेत है।

L.3.4 पूर्वानुबंधन

यह उदाहरण OpenAI, 2025 द्वारा जनित है और इसकी व्याख्या सावधानीपूर्वक की जानी चाहिए। पाठकों को इसके परिणाम स्वीकार करने से पहले इसकी वैधता का सावधानीपूर्वक मूल्यांकन करना चाहिए।

पूर्वानुबंधन वह तकनीक है जिसमें रैखिक निकाय $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ को प्रत्यक्ष विधियों से हल करने से पूर्व आव्यूह $\mathbf{A}$ को इस प्रकार रूपांतरित किया जाता है कि उसके संख्यात्मक गुण सुधर जाएँ। इसका उद्देश्य $\mathbf{A}$ की अनुबंधन संख्या घटाकर अथवा आव्यूह-अपघटन को सरल बनाकर समस्या का समाधान सुगम करना है।

मूल निकाय $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ को एक पूर्वानुबंधक *आव्यूह* $\mathbf{M}$ की सहायता से समतुल्य रूप में बदला जाता है:

आव्यूह $\mathbf{M}$ का चयन इस प्रकार किया जाता है कि:

- $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}$ का सन्निकटन करे, किंतु उसका व्युत्क्रम निकालना सरल हो।
- $\mathbf{M}$ अविचित्र हो।

हम पूर्वानुबंधन के दो प्रकारों—वाम और दक्षिण—की चर्चा करते हैं; देखिए तालिका L.2।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका L.2: पूर्वानुबंधन: वाम और दक्षिण की तुलना

पक्ष	वाम पूर्वानुबंधन	दक्षिण पूर्वानुबंधन
पूर्वानुबंधित आव्यूह	$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}$
दक्षिण पक्ष	$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$ के रूप में रूपांतरित	अपरिवर्तित ($\mathbf{b}$)
पूर्वानुबंधक की क्रिया	$\mathbf{A}$ और $\mathbf{b}$, दोनों पर क्रिया	$\mathbf{A}$ और $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$ द्वारा अज्ञात राशियों पर क्रिया
लागू करने का चरण	समाधान से पहले पूरे निकाय को परिवर्तित करता है	समाधान-प्रक्रिया के दौरान केवल अज्ञात राशियों को परिवर्तित करता है

L.3.4.1 वाम पूर्वानुबंधन

74 वाम पूर्वानुबंधन में मूल रैखिक निकाय $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ को ऐसे रूप में बदला जाता है जो संख्यात्मक स्थिरता और दक्षता बढ़ाए। इसके लिए गुणांक आव्यूह $\mathbf{A}$ और दक्षिण-पक्ष सदिश $\mathbf{b}$, दोनों का पूर्वगुणन पूर्वानुबंधक आव्यूह $\mathbf{M}$ के व्युत्क्रम से किया जाता है। पूर्वानुबंधित निकाय है:

$$\underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{A}'}\,\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{b}'}.$$

75 प्रक्रिया:

1. पूर्वानुबंधित आव्यूह ($\mathbf{A}'$):
$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}.$$
यह रूपांतरित गुणांक आव्यूह है। पूर्वानुबंधक $\mathbf{M}$ इस प्रकार चुना जाता है कि:
   - $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}$ का सन्निकटन करे, किंतु उसका व्युत्क्रम निकालना सरल हो,
   - $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}'$ की अनुबंधनता सुधारे और संख्यात्मक विलायकों को अधिक स्थिर बनाए।
2. पूर्वानुबंधित दक्षिण पक्ष ($\mathbf{b}'$):
$$\mathbf{b}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}.$$
पूर्वानुबंधित आव्यूह के साथ संगति बनाए रखने हेतु दक्षिण पक्ष को भी रूपांतरित किया जाता है।
3. पूर्वानुबंधित निकाय का समाधान करें: नया निकाय है:
$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'.$$
चूँकि पूर्वानुबंधन $\mathbf{A}$ और $\mathbf{b}$, दोनों को परिवर्तित करता है, इसलिए मानक तकनीकों (जैसे LU अपघटन) द्वारा सीधे $\mathbf{x}$ का समाधान किया जाता है।

76 चरण इस प्रकार हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. $\mathbf{b}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$ की गणना करें।
2. पूर्वानुबंधित आव्यूह $\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ बनाएँ।
3. प्रत्यक्ष विलायक से $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ को हल कर $\mathbf{x}$ प्राप्त करें।

L.3.4.2 दक्षिण पूर्वानुबंधन

77 आरंभिक निकाय है:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

1. एक प्रतिस्थापन प्रस्तुत करें:
$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y},$$
जहाँ $\mathbf{M}$ पूर्वानुबंधक आव्यूह और $\mathbf{y}$ अज्ञात राशियों का नया सदिश है। इस प्रतिस्थापन से मूल समाधान $\mathbf{x}$ इस प्रकार पुनः प्राप्त होता है:
$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}.$$
2. मूल समीकरण में $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$ प्रतिस्थापित करें:
$$\mathbf{A}(\mathbf{M}\mathbf{y}) = \mathbf{b}. \Rightarrow (\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$
3. अब निम्न निकाय का समाधान करना है:
$$(\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$
4. $\mathbf{A}\mathbf{M}$ को निम्न रूप में अपघटित करें:
$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$
जहाँ:
   - $\mathbf{L}$ निम्न त्रिकोणीय आव्यूह है,
   - $\mathbf{U}$ ऊपरी त्रिकोणीय आव्यूह है।
5. $\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ का समाधान दो चरणों में करें:
   (a) अग्र प्रतिस्थापन से $\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{b}$ हल कर $\mathbf{z}$ प्राप्त करें।
   (b) पश्च प्रतिस्थापन से $\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{z}$ हल कर $\mathbf{y}$ प्राप्त करें।
6. $\mathbf{y}$ प्राप्त होने पर मूल अज्ञात सदिश $\mathbf{x}$ को पुनः प्राप्त करें:
$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}.$$

78 तालिका L.3 में विचित्र मान अपघटन और आव्यूह पूर्वानुबंधन की तुलना की गई है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका L.3: आव्यूह पूर्वानुबंधन और विचित्र मान अपघटन (SVD) की तुलना

पक्ष	आव्यूह पूर्वानुबंधन	विचित्र मान अपघटन (SVD)
उद्देश्य	बड़े निकायों के पुनरावृत्त विलायकों को त्वरित करता है।	आव्यूह-संरचना का विश्लेषण कर सुदृढ समाधान देता है।
आव्यूह का आकार	बड़े, विरल आव्यूह।	छोटे से मध्यम आकार के आव्यूह।
दुःअनुबंधन	पुनरावृत्त विलायकों के लिए अनुबंधनता सुधारता है।	दुःअनुबंधन का सीधे समाधान करता है।
दक्षता	पुनरावृत्त विधियों के लिए संगणकीय रूप से दक्ष।	संगणकीय रूप से महँगा, किंतु परिशुद्ध।
अनुप्रयोग	आंशिक अवकल समीकरणों के पुनरावृत्त विलायक, बड़े अनुरूपण।	PCA, आँकड़ा-संपीडन, रव-निस्यंदन, सुदृढ समाधान।
परिदृश्य	बारंबार अथवा बड़े पैमाने की समस्याएँ।	उच्च परिशुद्धता, आव्यूह-संरचना का विश्लेषण।

L.4 उदाहरण

L.4.1 उदाहरण L.1: गाउस विलोपन

इस प्रथम उदाहरण में दिए गए निकाय से केवल अज्ञात सदिश $\{\mathbf{x}\}$ ज्ञात करना है:

$$\begin{cases} +10x_1 & +x_2 & -5x_3 & = 1. \\ -20x_1 & +3x_2 & +20x_3 & = 2. \\ +5x_1 & +3x_2 & +5x_3 & = 6. \end{cases}$$

1. प्रथम समीकरण के $\frac{20}{10}$ गुने को दूसरे समीकरण में जोड़ने पर दूसरे समीकरण से x_1 का गुणांक विलोपित हो जाएगा।
2. प्रथम समीकरण के $\frac{5}{10}$ गुने को तीसरे समीकरण से घटाने पर तीसरे समीकरण से x_1 का गुणांक विलोपित हो जाएगा।

$$\begin{cases} 10.x_1 & +x_2 & -5.x_3 & = 1. \\ & +5.x_2 & +10.x_3 & = 4. \\ & +2.5x_2 & +7.5x_3 & = 5.5 \end{cases}$$

3. दूसरे समीकरण के $\frac{2.5}{5}$ गुने को तीसरे समीकरण से घटाने पर अंतिम समीकरण से x_2 का गुणांक विलोपित हो जाएगा:

$$\begin{cases} 10.x_1 & +x_2 & -5.x_3 & = 1. \\ & +5.x_2 & +10x_3 & = 4. \\ & & +2.5x_3 & = 3.5 \end{cases}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

4. अब पश्च-प्रतिस्थापन करते हुए नीचे से ऊपर की ओर समाधान प्राप्त किया जा सकता है:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3.5}{2.5} = 1.4 \\ x_2 &= \frac{4. - 10.x_3}{5.} = -2. \\ x_1 &= \frac{1. - x_2 + 5.x_3}{10.} = 1. \end{aligned}$$

L.4.2 उदाहरण L.2: गाउस-जॉर्डन विलोपन

इस दूसरे उदाहरण में $\{\mathbf{x}\}$ और आव्यूह-प्रतिलोम $\mathbf{A}^{-1}$, दोनों ज्ञात किए जाएँगे।

संक्रिया प्रथम उदाहरण के समान है; किंतु यहाँ आव्यूह $\mathbf{A}$ को $\mathbf{I}$ से संवर्द्धित कर $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ बनाया जाता है और दोनों उप-आव्यूहों पर एक साथ संक्रिया की जाती है।

1. प्रारंभिक आव्यूह

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & 3 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 6 \end{array}\right\}$$

2. प्रथम स्तंभ का विलोपन:
   (a) पंक्ति 1=0.1(पंक्ति 1)
   (b) पंक्ति 2=(द्वितीय पंक्ति)+20(नई पंक्ति 1)
   (c) पंक्ति 3=(पंक्ति 3) -5(नई पंक्ति 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.1 & -0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 7.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0.1 \\ 4 \\ 5.5 \end{array}\right\}$$

3. दूसरे स्तंभ का विलोपन:
   (a) पंक्ति 2=0.2(पंक्ति 2)
   (b) पंक्ति 1=(पंक्ति 1)-0.1(नई पंक्ति 2)
   (c) पंक्ति 3=(पंक्ति 3) -2.5(नई पंक्ति 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.7 & 0.06 & -0.02 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -1.5 & -0.5 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0.02 \\ 0.8 \\ 3.5 \end{array}\right\}$$

4. तीसरे स्तंभ का विलोपन:
   (a) पंक्ति 3=0.4(पंक्ति 3)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

(b) पंक्ति 1=(पंक्ति 1)+0.7(नई पंक्ति 3)
(c) पंक्ति 2=(पंक्ति 2)-2(नई पंक्ति 3)

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.36 & -0.16 & 0.28 \\ 0 & 1 & 0 & 1.6 & 0.6 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6 & -0.2 & 0.4 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1.4 \end{array}\right\}}_{\{x\}}$$

यह अंतिम समीकरण $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$ है।

L.4.3 उदाहरण L.3: **lu** अपघटन

दिया गया है:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & -7 \\ 1 & 6 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

उपर्युक्त प्रक्रिया के अनुसार इसे निम्न रूप में अपघटित किया जा सकता है:

पंक्ति 1: $u_{11} = a_{11} = 7$; $u_{12} = a_{12} = 9$; $u_{13} = a_{13} = -1$; $u_{14} = a_{14} = 2$

पंक्ति 2:

$$\begin{aligned} l_{21} &= \tfrac{a_{21}}{u_{11}} &&= \tfrac{4}{7} \\ u_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} &&= -5 - 4\tfrac{9}{7} &&= -10.1429 \\ u_{23} &= a_{23} - l_{21}u_{13} &&= 2 + 4\tfrac{1}{7} &&= 2.5714 \\ u_{24} &= a_{24} - l_{21}u_{14} &&= -7 - 4\tfrac{2}{7} &&= -10.1429 \end{aligned}$$

पंक्ति 3:

$$\begin{aligned} l_{31} &= \tfrac{a_{31}}{u_{11}} &&= \tfrac{1}{7} \\ l_{32} &= \tfrac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} &&= \tfrac{6 - (0.1429)(9)}{-10.1429} &&= -0.4647 \\ u_{33} &= a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} &&= -3 - (0.1429)(-1) - (-0.4647)(2.5714) &&= -1.6622 \\ u_{34} &= a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24} &&= -4 - (0.1429)(2) - (-0.4647)(-8.1429) &&= -8.0698 \end{aligned}$$

पंक्ति 4:

$$\begin{aligned} l_{41} &= \tfrac{a_{41}}{u_{11}} &&= \tfrac{3}{7} \\ l_{42} &= \tfrac{a_{42} - l_{41}u_{12}}{u_{22}} &&= \tfrac{-2 - (0.4286)(9)}{-10.1429} = -0.5775 \\ l_{43} &= \tfrac{a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}}{u_{33}} &&= \tfrac{-1 - (0.4286)(-1) - (0.5775)(2.5714)}{-1.6622} = 1.2371 \\ u_{44} &= a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} &&= -5 - (0.4286)(2) - (0.5775)(-8.1429) - (1.2371)(-8.0698) \\ & &&= 8.8285 \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

अथवा

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ .5714 & 1 & 0 & 0 \\ .1429 & -.4647 & 1 & 0 \\ .4286 & .5775 & 1.2371 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & -10.1429 & 2.571 & -8.143 \\ 0 & 0 & -1.662 & -8.069 \\ 0 & 0 & 0 & 8.8285 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}}_{\mathbf{A}}$$

L.4.4 उदाहरण L.4: चोलेस्की अपघटन

दिया गया है:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 13 & 6 \\ 10 & 13 & 27 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 72 \end{bmatrix}$$

स्तंभ 1:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} &&= \sqrt{4} &&= 2 \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} &&= \frac{6}{2} &&= 3 \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} &&= \frac{10}{2} &&= 5 \\ l_{41} &= \frac{a_{41}}{l_{11}} &&= \frac{4}{2} &&= 2 \end{aligned}$$

स्तंभ 2:

$$\begin{aligned} l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} &&= \sqrt{13 - 3^2} &&= 2 \\ l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} &&= \frac{13 - (5)(3)}{2} &&= -1 \\ l_{42} &= \frac{a_{42} - l_{41} l_{21}}{l_{22}} &&= \frac{6 - (2)(3)}{2} &&= 0 \end{aligned}$$

स्तंभ 3:

$$\begin{aligned} l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} &&= \sqrt{27 - 5^2 - (-1)^2} &&= 1 \\ l_{43} &= \frac{a_{43} - l_{41} l_{31} - l_{42} l_{32}}{l_{33}} &&= \frac{2 - (2)(5) - (0)(-1)}{1} &&= -8 \end{aligned}$$

स्तंभ 4:

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2} = \sqrt{72 - (2)^2 - (0)^2 - (-8)^2} = 2$$

अप्रकाशित प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -8 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}}_{\mathbf{A}}$$

L.4.5 उदाहरण L.5: गाउस-सीडेल

$$\begin{cases} 4x & +2y & +3z & = 8. \\ 3x & -5y & +2z & = -14. \\ -2x & +3y & +8z & = 27. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (8 - 2y_n - 3z_n)/4 \\ y_{n+1} &= (-14 - 3x_{n+1} - 2z_n)/(-5) \\ z_{n+1} &= (27 + 2x_{n+1} - 3y_{n+1})/(8) \end{aligned}$$

मान लें कि $x_0 = y_0 = z_0 = 0$; प्रथम पुनरावृत्ति से प्राप्त होगा

$$\begin{aligned} x_1 &= (8 - 2\times 0 - 3\times 0)/4 &&= 2 \\ y_1 &= (-14 - 3\times 2 - 2\times 0)/(-5) &&= 4 \\ z_1 &= (27 + 2\times 2 - 3\times 4)/(8) &&= 2.375 \end{aligned}$$

द्वितीय पुनरावृत्ति

$$\begin{aligned} x_2 &= (8 - 2\times 4 - 3\times 2.375)/4 &&= -1.781 \\ y_2 &= (-14 - 3\times(-1.781) - 2\times 2.375)/(-5) &&= 2.6814 \\ z_2 &= (27 + 2\times(-1.781) - 3\times 2.681)/8 &&= 1.924 \end{aligned}$$

तृतीय पुनरावृत्ति

$$\begin{aligned} x_3 &= (8 - 2\times 2.681 - 3\times 1.924)/4 &&= -0.784 \\ y_3 &= (-14 - 3\times(-0.784) - 2\times 1.924)/(-5) &&= 3.099 \\ z_3 &= (27 + 2\times 2\times(-0.784) - 3\times 3.099)/8 &&= 2.017 \end{aligned}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

पुनरावृत्ति	x	y	z
1	2.000	4.000	2.375
2	-1.781	2.681	1.924
3	-0.784	3.099	2.017
4	-1.062	2.969	1.996
5	-0.982	3.009	2.001
6	-1.006	2.997	2.000
7	-0.998	3.001	2.000
8	-1.001	3.000	2.000
9	-1.000	3.000	2.000
10	-1.000	3.000	2.000

L.4.6 उदाहरण L.6: गाउस-सीडेल

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3 \\ 2x+y &=& 8 \end{array}\right. \Rightarrow y=-3-x; \rightarrow y=8-2x \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5 \\ y &=& -2 \end{array}\right.$$

पुनरावृत्तीय समाधान:

पुनरावृत्ति	x	y	$N=x^2+y^2$	$\frac{N_i-N_{i-1}}{N_i}$
1	0	3	9	
2	2.5	0.5	6.5	38.00%
3	3.75	-0.75	14.625	55.56%
4	4.375	-1.375	21.03125	30.46%
5	4.6875	-1.6875	24.82031	15.27%
6	4.84375	-1.84375	26.86133	7.60%
7	4.921875	-1.92188	27.91846	3.79%
8	4.960938	-1.96094	28.45618	1.89%
9	4.980469	-1.98047	28.72733	0.94%
10	4.990234	-1.99023	28.86347	0.47%
11	4.995117	-1.99512	28.93169	0.24%
12	4.997559	-1.99756	28.96583	0.12%

L.4.7 उदाहरण L.7: एकल मान अपघटन

हम $\mathbf{y}=\mathbf{Ab}$ का समाधान चाहते हैं, जहाँ $\mathbf{A}$ एक अत्यंत दुर्व्यवस्थित मैट्रिक्स है और

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+1e-15 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2+1e-15 \end{bmatrix}$$

1. प्रत्यक्ष समाधान द्वारा हल करें

$$\mathbf{y}\begin{bmatrix} 1.2000 \\ 0.8000 \end{bmatrix}$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

2. एकल मान अपघटन (SVD) करें (MATLAB®आदेश `[U, S, V] = svd(A)` का उपयोग करके)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0 \\ 0 & 0.0000 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

3. नियमितीकरण सहित $\mathbf{S}$ का छद्म-व्युत्क्रम निर्मित करें; नियमितीकरण सीमा `1e-6` है। किंतु पहले हम आरंभीकरण करते हैं

$$\mathbf{S}_{plus} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. $\mathbf{S}$ की सभी प्रविष्टियाँ खोजें और सीमा से अधिक प्रविष्टियों को उनके व्युत्क्रम से प्रतिस्थापित करें

$$\mathbf{S}_{plus} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. `SVD` का उपयोग करके $\mathbf{A}$ का छद्म-व्युत्क्रम ज्ञात करें

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{plus} &= \mathbf{V}\mathbf{S}_{plus}U' \\ &= \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. छद्म-व्युत्क्रम का उपयोग करके समाधान करें

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{SVD} &= \mathbf{A}_{plus}\mathbf{b} \\ \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0.2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 + 1e - 15 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

SVD के लिए MATLAB®कोड §I.5.4 में दिया गया है।

L.4.8 उदाहरण L.8: पूर्वानुकूलन

मैट्रिक्स A और उसके गुण

1. यद्यपि दुर्व्यवस्थित मैट्रिक्स $\mathbf{A}$ सामान्यतः दिया होता है, इस प्रकरण में हम संबंध

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\top}$$

का उपयोग करके इसे कृत्रिम रूप से निर्मित करेंगे, जहाँ $\mathbf{D}$ पूर्व-चयनित अभिलक्षणिक मानों वाला विकर्ण मैट्रिक्स है और $\mathbf{Q}$ कोई भी लांबिक मैट्रिक्स है (यद्यपि वह अभिलक्षणिक सदिशों के अभिविन्यास को नियंत्रित करता है)।

2. हम $\mathbf{D}$ को अभिलक्षणिक मानों $\{1, 0.1, 0.01\}$ से निर्मित मानते हैं।

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0100 \end{bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

3. **Q** उत्पन्न करने के लिए पहले हमें यादृच्छिक संख्याओं के एक मैट्रिक्स की आवश्यकता है

$$\textbf{Random} = \begin{bmatrix} 0.4170 & 0.3023 & 0.1863 \\ 0.7203 & 0.1468 & 0.3456 \\ 0.0001 & 0.0923 & 0.3968 \end{bmatrix}$$

4. **Q**, **Random** के QR अपघटन से प्राप्त एक लांबिक मैट्रिक्स होगा:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.5010 & 0.7769 & -0.3813 \\ -0.8654 & -0.4499 & 0.2206 \\ -0.0001 & 0.4405 & 0.8978 \end{bmatrix}$$

5. तत्पश्चात हम $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\top$ निर्धारित करते हैं; प्रतिस्थापन से:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.3128 & 0.3978 & 0.0309 \\ 0.3978 & 0.7697 & -0.0177 \\ 0.0309 & -0.0177 & 0.0275 \end{bmatrix}$$

6. **A** के अभिलक्षणिक मान हैं:

$$\lambda(\mathbf{A}) = \{1.000, 0.100, 0.010\}$$

(जैसा अपेक्षित था, क्योंकि **A** का निर्माण **D** से हुआ है।)

7. **A** की प्रतिबंध संख्या है:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{1.0}{0.01} = 100.00$$

पूर्वानुकूलन मैट्रिक्स M पूर्वानुकूलन मैट्रिक्स **M**, चोलेस्की अपघटन $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ से प्राप्त होगा, जहाँ:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.5593 & 0 & 0 \\ 0.7112 & 0.5136 & 0 \\ 0.0552 & -0.1109 & 0.1101 \end{bmatrix}$$

और:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top = \begin{bmatrix} 0.3128 & 0.3978 & 0.0309 \\ 0.3978 & 0.7697 & -0.0177 \\ 0.0309 & -0.0177 & 0.0275 \end{bmatrix}$$

बाएँ-पक्ष का पूर्वानुकूलन

1. बाएँ से पूर्वानुकूलित निकाय की परिभाषा है:

$$\mathbf{A}_{\text{left-precond}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}, \quad \mathbf{b}_{\text{left-precond}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$$

2. प्रतिस्थापन से

$$\mathbf{A}_{\text{left-precond}} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

3. बाएँ से पूर्वानुकूलित मैट्रिक्स के अभिलक्षणिक मान हैं:

$$\lambda(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = \{1.000, 1.000, 1.000\}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

4. प्रतिबंध संख्या है:
$$\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = 1.00$$
5. प्रतिबंध संख्याओं का अनुपात है:
$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}})} = 100.00$$

दाएँ-पक्ष का पूर्वानुकूलन

1. दाएँ से पूर्वानुकूलित निकाय की परिभाषा है:
$$\mathbf{A}_{\text{right-precond}} = \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}$$
2. यदि हम $\mathbf{y}$ का समाधान करते, तो LU अपघटन करते। इस प्रकरण में
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$
और $\mathbf{U} = \mathbf{L}^t$ (ध्यान दें कि यह एक विशिष्ट प्रकरण है जिसमें $\mathbf{L}$ और $\mathbf{U}$ विकर्ण हैं।)
3. निकाय को दो चरणों में—पहले अग्र और फिर पश्च प्रतिस्थापन द्वारा—हल करें
4. दाएँ से पूर्वानुकूलित मैट्रिक्स है:
$$\mathbf{A}_{\text{right-precond}} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$
5. दाएँ से पूर्वानुकूलित मैट्रिक्स के अभिलक्षणिक मान हैं:
$$\lambda(\mathbf{A}_{\text{right-precond}}) = \{1.000, 1.000, 1.000\}$$
6. प्रतिबंध संख्या है:
$$\kappa(\mathbf{A}_{\text{right-precond}}) = 1.00$$
7. प्रतिबंध संख्याओं का अनुपात है:
$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{\kappa(\mathbf{A}_{\text{right-precond}})} = 100.00$$

परिणामों का सारांश

- मूल मैट्रिक्स $\mathbf{A}$ की प्रतिबंध संख्या: $\kappa(\mathbf{A}) = 100.00$
- बाएँ-पक्ष के पूर्वानुकूलन के बाद प्रतिबंध संख्या: $\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = 1.00$
- दाएँ-पक्ष के पूर्वानुकूलन के बाद प्रतिबंध संख्या: $\kappa(A_{\text{right-precond}}) = 1.00$
- बाएँ-पक्ष के पूर्वानुकूलन के लिए प्रतिबंध संख्याओं का अनुपात: 100.00
- दाएँ-पक्ष के पूर्वानुकूलन के लिए प्रतिबंध संख्याओं का अनुपात: 100.00

संबंधित MATLAB®कोड §I.5.5 में है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

वैकल्पिक A

ध्यान दें कि MATLAB®कोड में पाठक सीधे

$$A = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.99 & 0.98 \\ 0.99 & 1.00 & 0.99 \\ 0.98 & 0.99 & 1.00 \end{bmatrix}$$

का उपयोग कर सकता है, जिससे प्राप्त होगा

- मूल मैट्रिक्स की प्रतिबंध संख्या: 4.465028e+02
- बाएँ-पक्ष के पूर्वानुकूलन के बाद प्रतिबंध संख्या: 1.000000e+00
- दाएँ-पक्ष के पूर्वानुकूलन के बाद प्रतिबंध संख्या: 1.000000e+00
- प्रतिबंध संख्याओं का अनुपात (मूल / बाएँ से पूर्वानुकूलित): 4.465028e+02
- प्रतिबंध संख्याओं का अनुपात (मूल / दाएँ से पूर्वानुकूलित): 4.465028e+02

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

M प्रायिकता और सांख्यिकी

सारांश

यह अध्याय प्रायिकता और सांख्यिकी की आधारभूत संकल्पनाओं का परिचय देता है, जो अध्ययन का एक अत्यंत महत्त्वपूर्ण क्षेत्र है। अनेक उन्नत विषय और अधिकांश अनुप्रयुक्त उदाहरण प्रायिकतामूलक अनुकरणों पर आधारित हैं। अध्याय का आरंभ असतत और सतत यादृच्छिक चरों के बीच भेद स्पष्ट करने से होता है। तत्पश्चात व्यापक रूप से प्रयुक्त अनेक प्रायिकता-वितरणों के गुणों का विवेचन किया गया है। अंत में, बहुचर वितरणों और संयुक्त प्रायिकता फलनों की संकल्पना प्रस्तुत करते हुए प्रतिरूपण तथा विश्लेषण में उनके महत्त्व पर बल दिया गया है।

M.1 प्रायिकता और सांख्यिकी का परिचय . . 3016
M.2 प्रायिकता की मूलभूत संकल्पनाएँ 3016
M.2.1 नियतात्मक *बनाम* प्रायिकतामूलक 3016
M.2.2 परिभाषा 3017
M.2.3 सशर्त प्रायिकता 3018
M.2.4 यादृच्छिक चरों के प्रकार 3019
M.3 प्रायिकता-विश्लेषण के सांख्यिकीय उपकरण 3019
M.3.1 संचयी वितरण फलन 3020
M.3.2 विश्वास अंतराल 3021
M.4 सांख्यिकीय माप 3022
M.4.1 आघूर्ण और केंद्रीय प्रवृत्ति के माप 3022
M.4.2 चरों के बीच संबंध 3025
M.5 वितरण 3025
M.5.1 एकचर वितरण 3025
M.5.2 द्विचर वितरण 3030

M.1 प्रायिकता और सांख्यिकी का परिचय

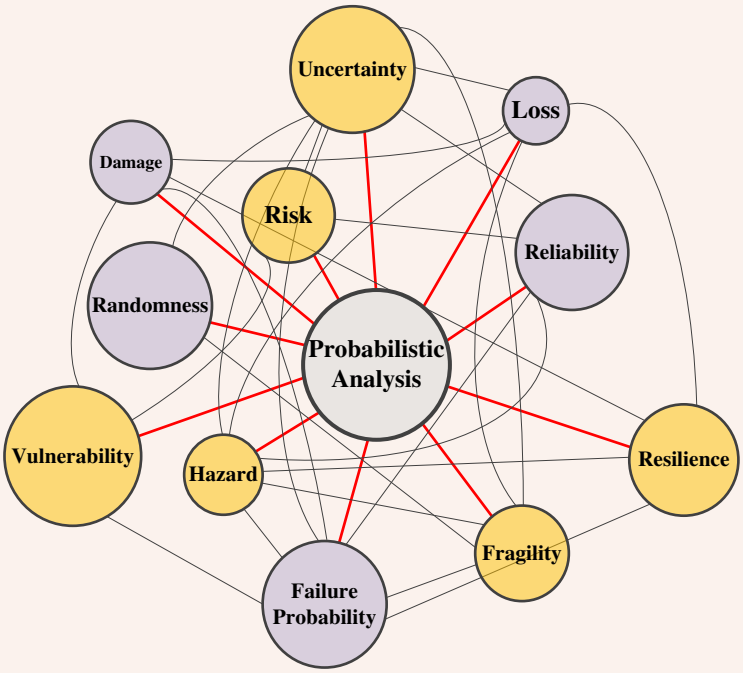
विज्ञान और अभियांत्रिकी के विविध क्षेत्रों में chap:trustregion तथा परिवर्तनशीलता को समझने का आधार प्रायिकता और सांख्यिकी हैं। यह अध्याय यादृच्छिकता का प्रतिरूपण करने और आँकड़ों का प्रभावी विश्लेषण करने के लिए आवश्यक संकल्पनाएँ विकसित करता है। आगे के अनुभागों में मूलभूत सिद्धांतों, प्रमुख वितरणों और सांख्यिकीय मापों का विवेचन किया गया है।

M.2 प्रायिकता की मूलभूत संकल्पनाएँ

M.2.1 नियतात्मक *बनाम* प्रायिकतामूलक

परंपरागत रूप से, संरचनात्मक पर्याप्तता का मूल्यांकन सुरक्षा गुणकों $SF = \frac{C}{D}$ द्वारा व्यक्त किया जाता रहा है, जहाँ C क्षमता (अर्थात् सामर्थ्य) और D माँग (अर्थात् भार) है। यद्यपि यह मूल्यांकन समझने में अत्यंत सरल है, तथापि इसकी अनेक सीमाएँ हैं: यह 1) सभी भारों को समान मानता है; 2) क्षमता और माँग से संबद्ध अनिश्चितताओं में भेद नहीं करता; 3) केवल सेवा-भारों तक सीमित रहता है; और अंततः 4) विभिन्न निष्पादन विधाओं के लिए भिन्न संरचनाओं की सापेक्ष विश्वसनीयता की तुलना की अनुमति नहीं देता। एक अन्य प्रमुख कमी यह है कि विश्लेषण में सभी प्राचलों को एकल मान दिया जाता है, जिससे विश्लेषण नियतात्मक हो जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र M.1: प्रायिकतामूलक विश्लेषण में समाविष्ट संकल्पनाओं का अंतर्संबंध (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021)

दूसरी ओर, तथाकथित प्रायिकतामूलक उपागम वस्तुतः नियतात्मक उपागम का ऐसा विस्तार है जिसमें अनिश्चितताओं को सम्मिलित किया जाता है। इनमें माँग, क्षमता, विश्लेषण के प्रकार, परिणामों की व्याख्या आदि से संबंधित अनिश्चितताएँ सम्मिलित हैं, किंतु इन्हीं तक सीमित नहीं हैं। परियोजना के लक्ष्य और अपेक्षित परिणामों के अनुसार प्रायिकतामूलक विश्लेषण में विभिन्न संकल्पनाएँ भूमिका निभाती हैं। चित्र M.1 में योजनाबद्ध रूप से दर्शाए गए इन प्राचलों की व्याख्या आगे की जाएगी।

M.2.2 परिभाषा

किसी घटना A की प्रायिकता 0 और 1 के बीच की भिन्न होती है।

$$0 \leq P\{A\} \leq 1$$

निश्चित रूप से घटित होने वाली घटना की प्रायिकता एक होती है। जो घटना घटित नहीं हो सकती, उसकी प्रायिकता शून्य होती है।

यादृच्छिक चर (RV) किसी ऐसी प्राकृतिक प्रक्रिया का परिणाम है जिसका निश्चितता से पूर्वानुमान नहीं लगाया जा सकता। किसी RV के सभी संभावित परिणामों के समुच्चय को "प्रतिदर्श समष्टि," Ω, कहा जाता है।

$$P\{\Omega\} = 1$$

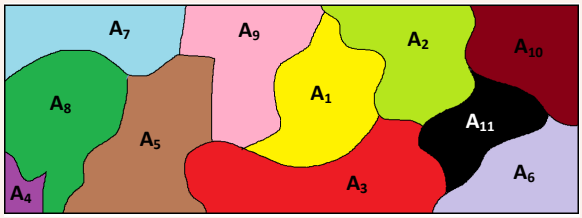
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रतिदर्श समष्टि में मान के प्रकार के आधार पर कोई यादृच्छिक चर "गुणात्मक" अथवा "मात्रात्मक" होता है। मात्रात्मक RV द्रव्यमान, तनन-सामर्थ्य और प्रत्यास्थता मापांक जैसे मान व्यक्त करते हैं। गुणात्मक RV लिंग और नस्ल जैसे मान व्यक्त करते हैं।

किसी परीक्षण को जितनी अधिक बार दोहराया जाता है, उतनी ही अधिक संभावना होती है कि किसी विशिष्ट घटना की सापेक्ष आवृत्ति उस घटना की प्रायिकता के निकट होगी। इसे "बृहत् संख्याओं का नियम" कहा जाता है। उदाहरणार्थ, यदि किसी सिक्के को अनेक बार उछाला जाए, तो उछालों की संख्या बढ़ने पर "चित" की संख्या और कुल उछालों की संख्या का अनुपात 1/2 के निकट होने की संभावना बढ़ती जाती है।

परस्पर असंयुक्त घटनाओं के प्रत्येक अनुक्रम A_1, A_2, ... के लिए, चित्र M.2:

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{A_i\}$$



चित्र M.2: प्रतिदर्श समष्टि और परस्पर असंयुक्त घटनाओं की संकल्पना (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021)

M.2.3 सशर्त प्रायिकता

B दिए होने पर A की सशर्त प्रायिकता, जिसे $P\{A|B\}$ लिखा जाता है, निम्न प्रकार परिभाषित है

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

$P\{A \cap B\}$ की व्याख्या इस संभावना/प्रायिकता के रूप में की जाती है कि B के घटित होने की जानकारी होने पर A घटित होगा।

दो घटनाएँ A और B एक-दूसरे से "स्वतंत्र" होती हैं यदि

$$P\{A|B\} = P\{A\}$$

अथवा,

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}.P\{B\}$$

इसका अर्थ है कि B के घटित होने की जानकारी का A के घटित होने की संभावना पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

M.2.4 यादृच्छिक चरों के प्रकार

यदि X एक RV है (अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों पर परिभाषित फलन), जिसके संभावित मानों $x_i \in R_X$, जहाँ $i = 1,2,...$ और R_X RV के मानों का परास है, की संख्या परिमित है, तो इसे "असतत यादृच्छिक चर" कहा जाता है।

X का किसी विशिष्ट मान x_i को ग्रहण करने की प्रायिकता, $p(x_i) = P(X = x_i)$, ऐसी संख्या है कि

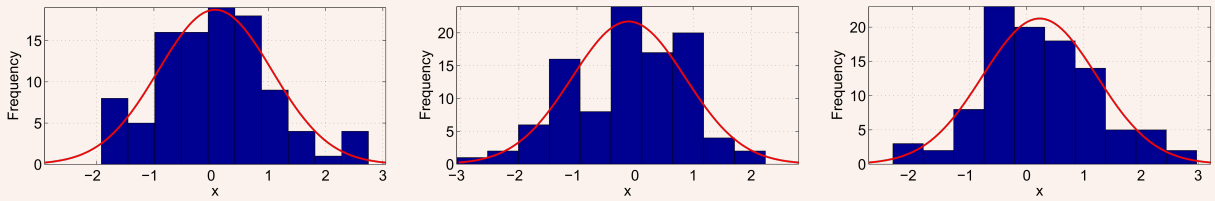
$$p(x_i) \geq 0$$

प्रत्येक $i = 1,2,...$ के लिए, और

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

युग्मों $(x_i; p(x_i))$, $i = 1,2,...$ के संग्रह को X का "प्रायिकता वितरण" कहा जाता है, जिसमें $p(x_i)$, X का "प्रायिकता द्रव्यमान फलन" है।

प्रतिदर्शों की संख्या कम होने पर परिणाम वास्तविक वितरण-प्रतिरूप को ठीक-ठीक प्रतिबिंबित नहीं कर सकते। उदाहरणार्थ, चित्र M.3 के सभी आलेख केवल 100 यादृच्छिक प्रतिदर्शों से उत्पन्न किए गए हैं। इनके बीच स्पष्ट अंतर देखा जा सकता है।



(a) 100 प्रतिदर्श, प्रथम प्रयास (b) 100 प्रतिदर्श, द्वितीय प्रयास (c) 100 प्रतिदर्श, तृतीय प्रयास

चित्र M.3: तीन प्रयासों में 100 प्रतिदर्शों से प्राप्त आयतचित्रों की तुलना

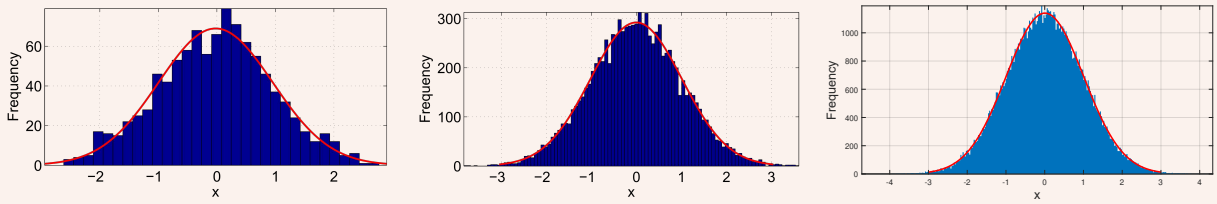
प्रतिदर्शों की संख्या बढ़ाने से सुधार होता है। चित्र M.4 के आलेख क्रमशः 1,000, 10,000 और 100,000 प्रतिदर्शों पर आधारित हैं।

M.3 प्रायिकता-विश्लेषण के सांख्यिकीय उपकरण

यदि R_X असतत समुच्चय के स्थान पर कोई अंतराल है, तो X एक "सतत यादृच्छिक चर" है। $X \in [a, b]$ होने की प्रायिकता है

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) 1,000 प्रतिदर्श (b) 10,000 प्रतिदर्श (c) 100,000 प्रतिदर्श

चित्र M.4: 1,000 से 100,000 प्रतिदर्शों से प्राप्त आयतचित्रों की तुलना

जहाँ $f(x)$, X का "प्रायिकता घनत्व फलन" (PDF) है। सदैव,

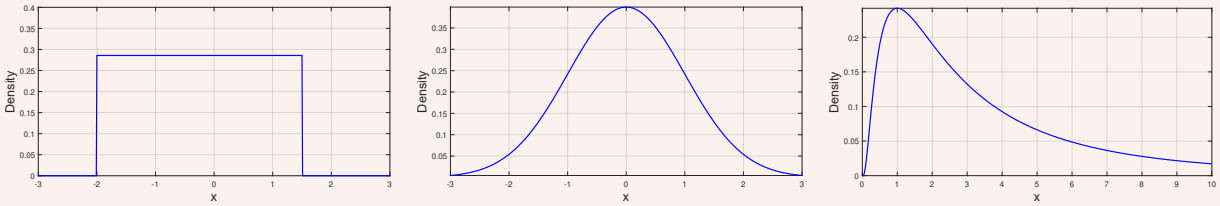
$$f(x) \geq 0$$

और,

$$\int_{R_X} f(x)dx = 1$$

तथा, यदि $x \notin R_X$, तो $f(x) = 0$।

चित्र M.5 तीन भिन्न प्रकार के सतत फलनों के PDF के तीन उदाहरण दर्शाता है। इन फलनों की विस्तृत व्याख्या आगे की जाएगी।



(a) एकसमान वितरण (b) प्रसामान्य वितरण (c) लघुगणकीय-प्रसामान्य वितरण

चित्र M.5: तीन सतत वितरण फलनों के उदाहरण

M.3.1 संचयी वितरण फलन

$X \leq x$ होने की प्रायिकता, $P(X \leq x) = F(x)$, को "संचयी वितरण फलन" (CDF) कहा जाता है और यह निम्न प्रकार परिभाषित है:

- असतत $X \leq x_n$ के लिए:

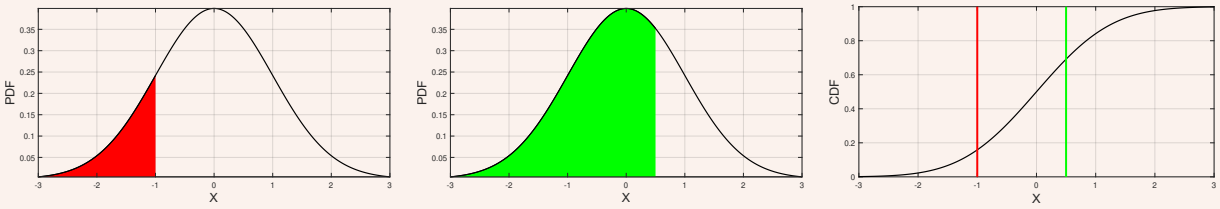
$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- सतत $X \leq x$ के लिए:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau) d\tau$$

चित्र M.6 प्रसामान्य वितरण के लिए PDF और CDF के बीच संबंध दर्शाता है।



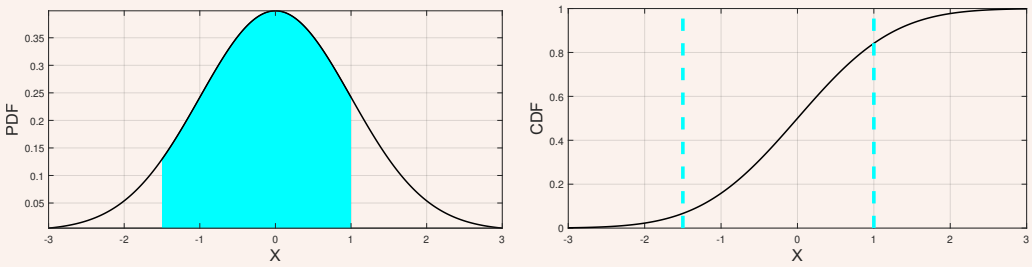
(a) PDF; निम्न प्रायिकता (b) PDF; उच्च प्रायिकता (c) संगत CDF

चित्र M.6: PDF और CDF के बीच संबंध

CDF के कुछ प्रमुख गुण निम्न प्रकार संक्षेपित किए जा सकते हैं:

- यदि $a < b$, तो $F(a) < F(b)$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

चित्र M.7 किसी परिबद्ध PDF और उसके संगत CDF के बीच संबंध दर्शाता है।



(a) एकसमान वितरण (b) प्रसामान्य वितरण

चित्र M.7: परिबद्ध PDF और CDF के बीच संबंध

M.3.2 विश्वास अंतराल

विश्वास अंतराल मानों का वह परास है जिसमें निर्दिष्ट विश्वास-स्तर के साथ वास्तविक समष्टि-प्राचल (जैसे माध्य अथवा अनुपात) के होने की संभावना होती है। यह किसी प्रतिदर्श से प्राप्त आकलन के chap:trustregion का परिमाण निर्धारित करता है, चित्र M.8।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

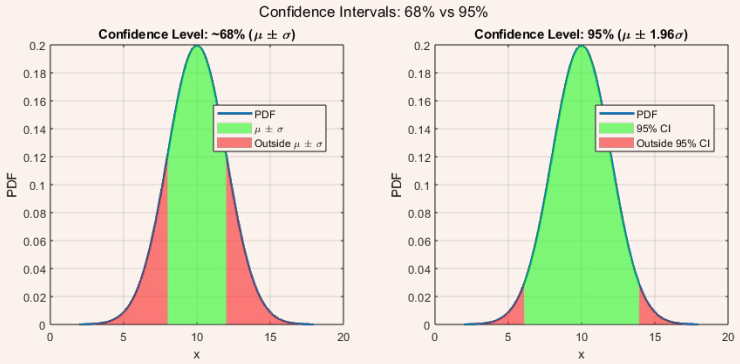
समष्टि-माध्य μ के लिए विश्वास अंतराल की गणना इस प्रकार की जाती है:

$$\text{CI} = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

जहाँ: $\bar{x}$: प्रतिदर्श-माध्य, z: विश्वास-स्तर के अनुरूप मानक प्रसामान्य वितरण से प्राप्त क्रांतिक मान (उदाहरणार्थ, 95% विश्वास के लिए $z = 1.96$), σ: समष्टि मानक विचलन, और n: प्रतिदर्श का आकार।

यदि समष्टि मानक विचलन σ अज्ञात है, तो प्रतिदर्श मानक विचलन s का उपयोग किया जाता है और t-वितरण लागू होता है:

$$\text{CI} = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$



चित्र M.8: विश्वास अंतराल का चित्रण

M.4 सांख्यिकीय माप

M.4.1 आघूर्ण और केंद्रीय प्रवृत्ति के माप

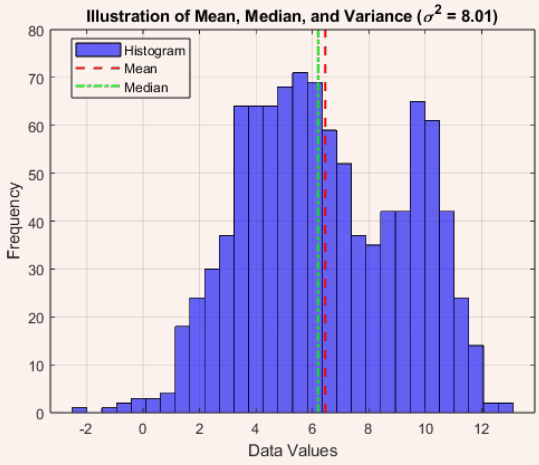
आघूर्ण वे मात्रात्मक माप हैं जो किसी प्रायिकता-वितरण के आकार और अभिलक्षणों का वर्णन करते हैं। प्रत्येक आघूर्ण आँकड़ों के विशिष्ट पक्षों, जैसे केंद्रीय प्रवृत्ति, परिवर्तनशीलता, विषमता और शिखरता, को अभिव्यक्त करता है। सर्वाधिक प्रयुक्त आघूर्णों और संबंधित मापों का वर्णन नीचे दिया गया है:

प्रथम आघूर्ण: माध्य माध्य आँकड़ों का अंकगणितीय औसत है और वितरण की केंद्रीय प्रवृत्ति को निरूपित करता है:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

माध्य यह इंगित करता है कि आँकड़े कहाँ संकेंद्रित हैं और इसे सामान्यतः स्थान के माप के रूप में प्रयुक्त किया जाता है, चित्र M.9।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र M.9: माध्य और माध्यिका का चित्रण

माध्यिका माध्यिका वह मान है जो आँकड़ा-समुच्चय के उच्चतर और निम्नतर अर्धांशों को पृथक करता है।

द्वितीय आघूर्ण: प्रसरण प्रसरण माध्य के परितः आँकड़ों के फैलाव अथवा परिक्षेपण का परिमाण निर्धारित करता है:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

यह आँकड़ों की परिवर्तनशीलता की जानकारी देता है। अधिक प्रसरण अधिक विस्तृत रूप से परिक्षिप्त आँकड़ा-बिंदुओं को इंगित करता है।

मानक विचलन मानक विचलन प्रसरण का वर्गमूल है और इसे आँकड़ों के समान मात्रकों में व्यक्त किया जाता है, चित्र M.10:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

प्रसरण की तुलना में इसकी व्याख्या अधिक सरल होने के कारण मानक विचलन का प्रायः उपयोग किया जाता है।

परिवर्तन गुणांक परिवर्तन गुणांक (COV) मानक विचलन और माध्य का अनुपात है, जो परिवर्तनशीलता का प्रसामान्यीकृत माप प्रदान करता है:

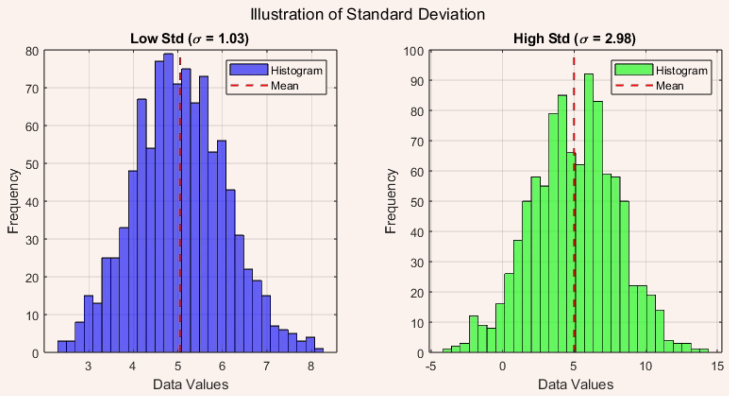
$$\text{COV} = \frac{\sigma}{\mu}$$

भिन्न मात्रकों अथवा मापक्रमों वाले आँकड़ा-समुच्चयों की परिवर्तनशीलता की तुलना में COV विशेष रूप से उपयोगी है।

तृतीय आघूर्ण: विषमता विषमता माध्य के परितः आँकड़ा-वितरण की असममिति को मापती है:

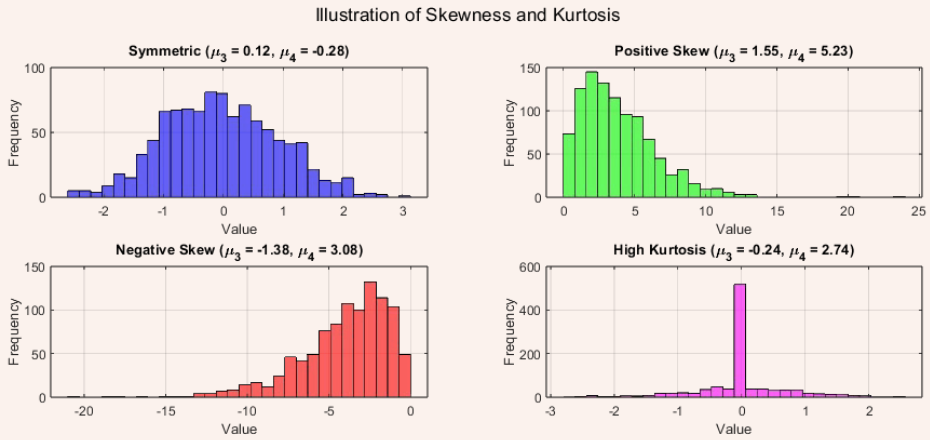
$$\text{Skewness} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^3$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र M.10: मानक विचलन का चित्रण

धनात्मक विषमता दाईं ओर अधिक लंबी पुच्छ वाले वितरण को इंगित करती है, जबकि ऋणात्मक विषमता बाईं ओर अधिक लंबी पुच्छ को इंगित करती है, चित्र M.11।



चित्र M.11: विषमता और शिखरता का चित्रण

चतुर्थ आघूर्ण: शिखरता शिखरता किसी प्रसामान्य वितरण की तुलना में वितरण के "शिखरत्व" अथवा "समतलता" का वर्णन करती है:

$$\text{Kurtosis} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^4 - 3$$

धनात्मक शिखरता तीक्ष्ण शिखर और भारी पुच्छों को इंगित करती है, जबकि ऋणात्मक शिखरता अधिक समतल वितरण को इंगित करती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

M.4.2 चरों के बीच संबंध

सहप्रसरण सहप्रसरण उस मात्रा को मापता है जिस तक दो चर एक साथ परिवर्तित होते हैं:

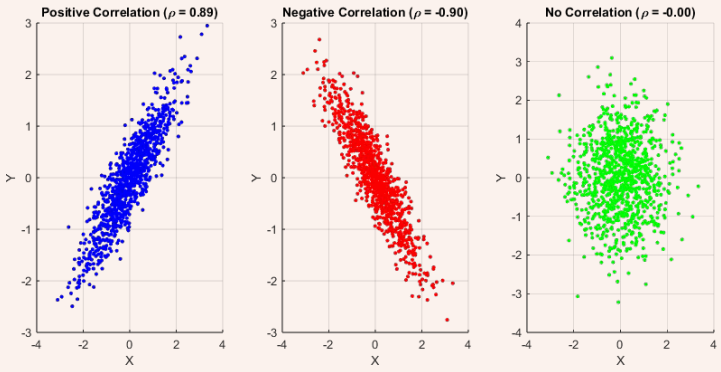
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$$

धनात्मक सहप्रसरण इंगित करता है कि चर एक साथ बढ़ते अथवा घटते हैं, जबकि ऋणात्मक सहप्रसरण विपरीत संबंध इंगित करता है।

सहसंबंध गुणांक: ρ_{xy} सहसंबंध की मात्रा का विमारहित माप है

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

1.0 अथवा -1.0 का सहसंबंध गुणांक पूर्ण रैखिक सहसंबंध इंगित करता है, चित्र M.12। धनात्मक मान इंगित करता है कि चर एक साथ बढ़ते अथवा घटते हैं, जबकि ऋणात्मक मान इंगित करता है कि एक चर के बढ़ने पर दूसरा घटता है। शून्य मान रैखिक सहसंबंध के अभाव को इंगित करता है; सामान्यतः इससे स्वतंत्रता अभिप्रेत नहीं होती।



चित्र M.12: सहसंबंध गुणांकों का चित्रण

M.5 वितरण

M.5.1 एकचर वितरण

प्रायिकतामूलक विश्लेषण में प्रत्येक अनिश्चित प्राचल को यादृच्छिक चर और उससे संबद्ध PDF द्वारा $X \sim f_X(x)$ के रूप में निरूपित किया जा सकता है। इस अनुभाग में सिविल अभियांत्रिकी में सामान्यतः प्रयुक्त कुछ एकचर वितरण-प्रतिरूप और उनके प्रमुख अभिलक्षण प्रस्तुत किए गए हैं। इनमें सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण हैं:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- एकसमान वितरण
- गाउस/प्रसामान्य वितरण
- लघुगणकीय-प्रसामान्य वितरण
- वाइबुल वितरण
- चरम मान (गंबेल) वितरण

एकसमान वितरण

एकसमान वितरणों का सामान्यतः उन यादृच्छिक चरों को निरूपित करने के लिए उपयोग किया जाता है जिनके आघूर्ण अज्ञात किंतु आधार ज्ञात होता है।

- संकेत-पद्धति: $X \sim \mathcal{U}(a, b)$
- PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- CDF:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

- सांख्यिकीय माप:

$$\begin{cases} \mu_X = \frac{a+b}{2} \\ \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{cases}$$

प्रसामान्य वितरण

मापन-त्रुटि, रव पद आदि को निरूपित करने के लिए अनेक अनुप्रयुक्त विज्ञान और अभियांत्रिकी क्षेत्रों में प्रसामान्य वितरण व्यापक रूप से प्रयुक्त होते हैं।

- संकेत-पद्धति: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- CDF:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\tau$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- सांख्यिकीय माप:

$$\begin{cases} \mu_X = \mu \\ \sigma_X = \sigma \end{cases}$$

लघुगणकीय-प्रसामान्य वितरण

मापन-त्रुटि, रव पद आदि को निरूपित करने के लिए अनेक अनुप्रयुक्त विज्ञान और अभियांत्रिकी क्षेत्रों में लघुगणकीय-प्रसामान्य वितरण व्यापक रूप से प्रयुक्त होते हैं।

- संकेत-पद्धति: $X \sim \mathcal{LN}(\lambda, \zeta)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\zeta^2}} \exp(-\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\zeta^2})$$

- CDF:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\sqrt{2}\zeta}\right) = \Phi\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)$$

  जहाँ erf त्रुटि फलन कहलाता है और Φ मानक प्रसामान्य वितरण का संचयी वितरण फलन है।
- सांख्यिकीय माप:

$$\begin{cases} \mu_X = e^{\lambda+\zeta^2/2} \\ \sigma_X = e^{\lambda+\zeta^2/2}\sqrt{e^{\zeta^2} - 1} \end{cases}$$

जहाँ λ और ζ चर के प्राकृतिक लघुगणक के क्रमशः माध्य और मानक विचलन हैं।

वाइबुल वितरण

इस प्रतिरूप का सामान्यतः विफलता-समय प्रकार के चरों के अभिलक्षणन में उपयोग किया जाता है। इसका उपयोग भंगुर सामग्रियों के सामर्थ्य और जीवनकाल प्राचलों के लिए किया जा सकता है,

- संकेत-पद्धति: $X \sim \mathcal{W}(\alpha, \beta)$
- PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

- CDF:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

- सांख्यिकीय माप:

$$\begin{cases} \mu_X = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \\ \sigma_X = \alpha\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2} \end{cases}$$

गंबेल वितरण

गंबेल वितरण (अथवा सामान्यीकृत चरम मान वितरण प्रकार-I) का उपयोग विभिन्न वितरणों के अनेक प्रतिदर्शों के अधिकतम (अथवा न्यूनतम) मान के वितरण का प्रतिरूपण करने के लिए किया जाता है।

- संकेत-पद्धति: $X \sim \mathcal{G}(\mu, \beta)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta} - e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- CDF:

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- सांख्यिकीय माप:

$$\begin{cases} \mu_X = \mu + \beta\gamma_e \\ \sigma_X = \frac{\pi\beta}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

जहाँ $\gamma_e = 0.577216...$ यूलर नियतांक है।

M.5.1.1 तुलना

चित्र M.13 निम्नलिखित अभिलक्षणों वाले विभिन्न वितरणों को दर्शाता है:

यहाँ तुलनात्मक विश्लेषण में प्रयुक्त वितरणों के अभिलक्षणों का वर्णन किया गया है, जिनमें उनके प्रायिकता घनत्व फलन (PDF), संचयी वितरण फलन (CDF) और प्रत्येक के लिए ग्रहण किए गए संख्यात्मक मान सम्मिलित हैं।

एकसमान वितरण

- **PDF:** a और b के बीच समतल वक्र, जो परास के भीतर सभी मानों की समान संभावना इंगित करता है।

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{for } a \le x \le b$$

- **CDF:** a से b तक रैखिक वृद्धि, जो 0 से आरंभ होकर 1 पर समाप्त होती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **प्रमुख प्राचल:**
  - $a = 0$: निम्न सीमा।
  - $b = 1$: उच्च सीमा।
- **अभिलक्षण:** विषमता अथवा शिखरता रहित सममित और समतल वितरण।

प्रसामान्य वितरण

- **PDF:** माध्य μ के परितः सममित घंटी-आकार का वक्र:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- **CDF:** S-आकार का वक्र, जो 0 से आरंभ होकर अनंतस्पर्शी रूप से 1 के निकट पहुँचता है।
- **प्रमुख प्राचल:**
  - $\mu = 0$: माध्य (शिखर का स्थान)।
  - $\sigma = 1$: मानक विचलन (फैलाव नियंत्रित करता है)।
- **अभिलक्षण:** विषमता रहित और शून्य शिखरता (मध्यमशिखरी) वाला सममित तथा एकबहुलक वितरण।

लघुगणकीय-प्रसामान्य वितरण

- **PDF:** 0 से आरंभ होने वाला धनात्मक रूप से विषम वक्र:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{for } x > 0$$

- **CDF:** S-आकार का वक्र, जो 0 से आरंभ होकर अनंतस्पर्शी रूप से 1 के निकट पहुँचता है।
- **प्रमुख प्राचल:**
  - $\mu = 0$: चर के लघुगणक का माध्य।
  - $\sigma = 0.25$: चर के लघुगणक का मानक विचलन।
- **अभिलक्षण:** दाईं ओर विषम, जिसकी शिखरता σ पर निर्भर करती है।

वाइबुल वितरण

- **PDF:** आकार प्राचल k के साथ परिवर्तित होता है:

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, \quad \text{for } x \geq 0$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

- **CDF:** $k > 1$ के लिए S-आकार का वक्र, जो 0 से आरंभ होकर अनंतस्पर्शी रूप से 1 के निकट पहुँचता है।
- **प्रमुख प्राचल:**
  - $k = 1.5$: आकार प्राचल।
  - $\lambda = 1$: मापक्रम प्राचल।
- **अभिलक्षण:** बहुपयोगी; बढ़ती, घटती अथवा नियत विफलता-दरों का प्रतिरूपण करता है।

गंबेल वितरण

- **PDF:** μ के निकट बहुलक वाला दक्षिण-विषम वितरण:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- **CDF:** असममित S-आकार का वक्र, जो 0 से आरंभ होकर अनंतस्पर्शी रूप से 1 के निकट पहुँचता है।
- **प्रमुख प्राचल:**
  - $\mu = 0$: स्थान प्राचल (शिखर की स्थिति)।
  - $\beta = 1$: मापक्रम प्राचल (फैलाव नियंत्रित करता है)।
- **अभिलक्षण:** दाईं ओर विषम; चरम मानों (जैसे अधिकतम वर्षा) के प्रतिरूपण में प्रयुक्त।

यह विस्तृत वर्णन वितरणों और विश्लेषण में उनके प्राचलों के लिए ग्रहण किए गए संख्यात्मक मानों का व्यापक अवलोकन प्रस्तुत करता है।

M.5.2 द्विचर वितरण

द्विचर वितरण दो यादृच्छिक चरों, X और Y, के संयुक्त व्यवहार का वर्णन करता है। यह परिणामों के सभी संभावित युग्मों (x, y) से संबद्ध प्रायिकताओं का अभिलक्षणन करता है। ऐसे वितरणों का उपयोग दो चरों के बीच संबंधों, निर्भरताओं और सहसंबंधों को समझने के लिए किया जाता है।

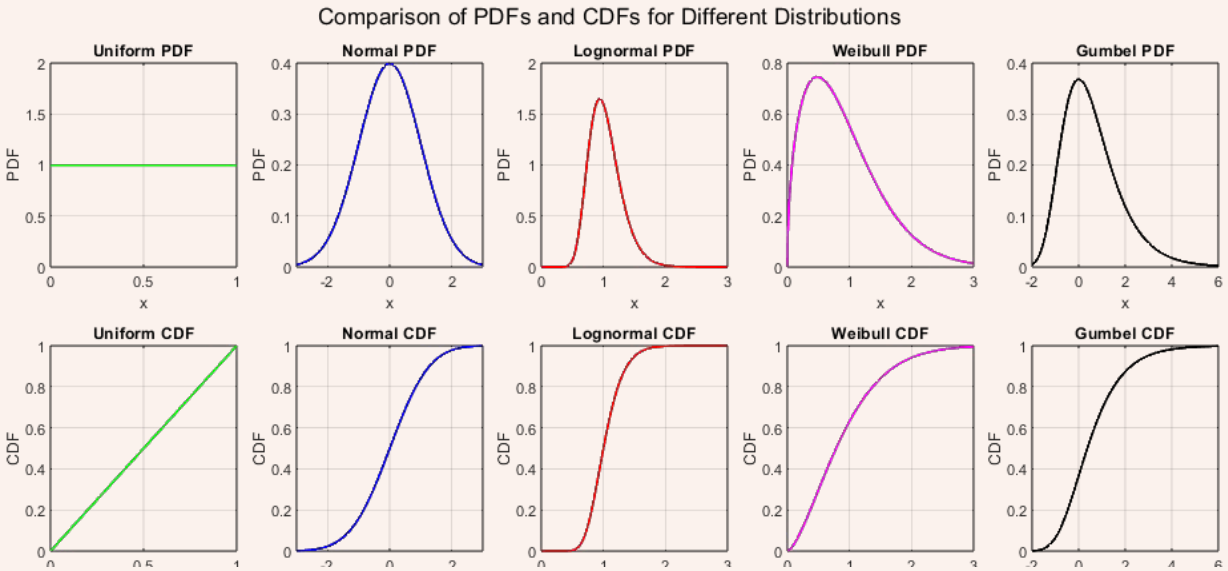
दो सतत यादृच्छिक चर X और Y दिए होने पर संयुक्त संचयी द्विचर वितरण फलन है:

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right)$$

संयुक्त घनत्व निम्न प्रकार परिभाषित है

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप



चित्र M.13: विभिन्न प्रायिकता (और संचयी) वितरण फलनों की तुलना

अथवा,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

फलतः, $(X,Y) \in A$ होने की प्रायिकता है:

$$\mathbb{P}(A) = \int_{A} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

द्विचर प्रसामान्य वितरण

द्विविमीय स्थिति ($k = 2$) में द्विचर प्रसामान्य वितरण का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन निम्न प्रकार परिभाषित है:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp$$
$$\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

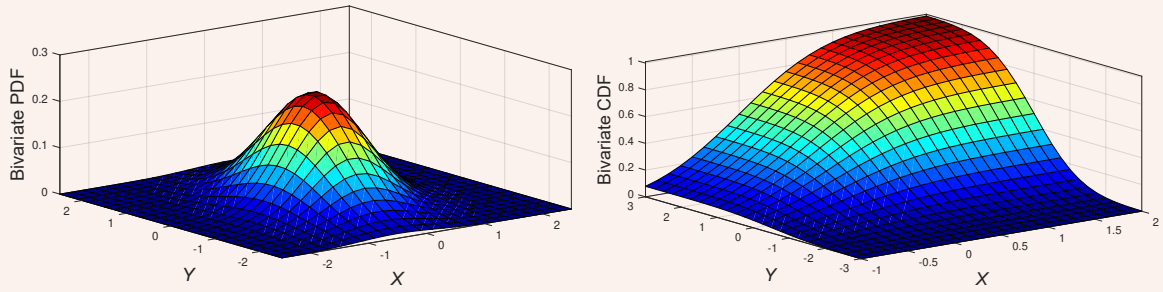
जहाँ:

- μ_X और μ_Y क्रमशः X और Y के माध्य हैं, जो प्रत्येक चर का केंद्रीय स्थान इंगित करते हैं।
- $\sigma_X > 0$ और $\sigma_Y > 0$ क्रमशः X और Y के मानक विचलन हैं, जो प्रत्येक चर के आँकड़ों के फैलाव अथवा परिक्षेपण को निरूपित करते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

- ρ, X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक है, जो दोनों चरों के बीच रैखिक संबंध की प्रबलता और दिशा को मापता है। इसका परास $-1 \leq \rho \leq 1$ है।

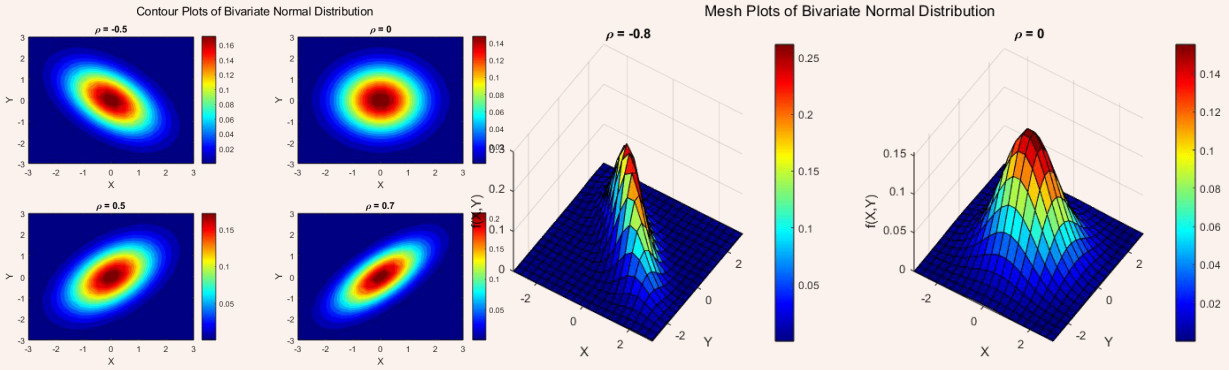
चित्र M.14 द्विचर प्रसामान्य वितरण के PDF और CDF का एक उदाहरण दर्शाता है, जिसमें $\mu_X = \mu_Y = 0.0$, $\sigma_X = 0.707$ और $\sigma_Y = 1.000$ हैं।



(a) द्विचर PDF (b) द्विचर CDF

चित्र M.14: द्विचर प्रसामान्य वितरण

चित्र M.15 द्विचर प्रसामान्य वितरण पर सहसंबंध ρ के प्रभाव को दर्शाता है।



(a) (b)

चित्र M.15: द्विचर प्रसामान्य वितरण पर सहसंबंध ρ का प्रभाव

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

N विश्वसनीयता सूचकांक

सारांश

यह परिशिष्ट संरचनात्मक सुरक्षा और विफलता-प्रायिकता के मात्रात्मक माप के रूप में विश्वसनीयता सूचकांक का परिचय देता है। संरचनात्मक क्षमता और माँग दोनों को यादृच्छिक चर (सामान्यतः प्रसामान्य अथवा लघुगणक-प्रसामान्य वितरण) मानते हुए विश्वसनीयता सूचकांक सुरक्षा-अंतर को माध्य क्षमता और माध्य माँग के अंतर के रूप में मापता है, जिसे संयुक्त मानक विचलन द्वारा सामान्यीकृत किया जाता है। परिशिष्ट विश्वसनीयता सूचकांक की गणना के अंकगणितीय और लघुगणकीय दोनों उपागम विकसित करता है, उसे लक्ष्य विफलता-प्रायिकताओं से संबद्ध करता है और अभिकल्पन सुरक्षा-गुणांकों से जोड़ता है। यह रूपरेखा निष्पादन-आधारित अभियांत्रिकी में प्रयुक्त प्रायिकतामूलक अभिकल्पन निर्णयों और जोखिम-सूचित आकलनों को आधार प्रदान करती है, जहाँ विभिन्न सीमा-अवस्थाओं के लिए निर्धारित संरचनात्मक विश्वसनीयता बनाए रखना अभिकल्पन प्रक्रिया का केंद्रीय उद्देश्य है।

भाग 5: उन्नत सिद्धांत एवं इष्टतमीकरण

1 विश्वसनीयता सूचकांक किसी संरचना, तंत्र अथवा घटक की सुरक्षा या विश्वसनीयता का मात्रात्मक माप है। इसका उपयोग सामान्यतः विभिन्न भारों अथवा पर्यावरणीय परिस्थितियों में संरचना या तंत्र की विफलता अथवा पतन की प्रायिकता के मूल्यांकन के लिए किया जाता है।

2 विश्वसनीयता सूचकांक की गणना विफलता अथवा पतन की प्रायिकता और संरचना अथवा तंत्र के सुरक्षा-अंतर या सुरक्षा-गुणांक के आधार पर की जाती है। इसे संख्यात्मक मान द्वारा व्यक्त किया जाता है; उच्च मान विफलता अथवा पतन की कम प्रायिकता और निम्न मान अधिक प्रायिकता दर्शाता है।

3 इसे क्षमता (C) और माँग (D) के अंतर से निर्धारित किया जाता है, जहाँ दोनों को यादृच्छिक चर माना जाता है (सामान्यतः प्रसामान्य, यद्यपि कुछ परिस्थितियों में लघुगणक-प्रसामान्य अधिक उपयुक्त हो सकता है)। चूँकि प्रसामान्य वितरण $[-\infty - \infty]$ में परिभाषित होते हैं, इसलिए विफलता की कुछ प्रायिकता सदैव रहेगी, चित्र N.1a।

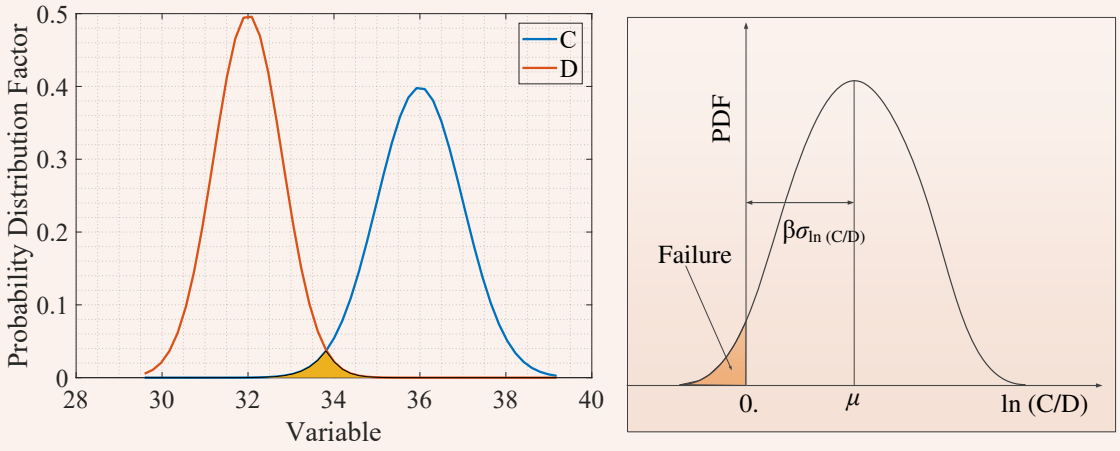
4 सुरक्षा-अंतर की गणना की विधि के अनुसार β निर्धारित करने के दो उपागम हैं।

अंकगणितीय

$$
\begin{aligned}
M &= C - D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \\
\sigma_M &= \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} \\
&= \frac{\mu_C - \mu_D}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}}
\end{aligned}
$$

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) माँग और क्षमता के प्रायिकता वितरण (b) विश्वसनीयता सूचकांक की परिभाषा

चित्र N.1: विश्वसनीयता सूचकांक की परिभाषाएँ

लघुगणकीय

$$
\begin{aligned}
M &= \ln C - \ln D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \quad \text{First order} \\
\sigma_M &= \sqrt{\frac{\sigma_C^2}{\mu_C^2} + \frac{\sigma_D^2}{\mu_D^2}} = \sqrt{V_C^2 + V_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\ln \mu_C - \ln \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} \\
&= \frac{\ln \mu_C / \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}}
\end{aligned}
$$

विश्वसनीयता सूचकांक β की ज्यामितीय परिभाषा चित्र N.1b में दी गई है।

संगत *विफलता-प्रायिकता* P_f, चित्र N.1b के छायांकित क्षेत्रफल और वक्र के नीचे के कुल क्षेत्रफल के अनुपात के बराबर है और $\Phi(-\beta)$ द्वारा दी जाती है, जहाँ Φ मानक प्रसामान्य संचयी प्रायिकता फलन है

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{N.1}$$

विश्वसनीयता सूचकांक और विफलता-प्रायिकता का संबंध चित्र N.2 में दर्शाया गया है।

विफलता के परिणामों को प्रतिबिंबित करने के लिए β का चयन किया जाता है, सारणी N.1।

अनेक घटकों अथवा निष्पादन की अनेक विधाओं के विश्वसनीयता सूचकांकों से किसी संरचना/तंत्र की समग्र विश्वसनीयता का आकलन किया जा सकता है। दो चरम स्थितियों पर विचार किया जा सकता है:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका N.1: इस्पात और कंक्रीट संरचनाओं के लिए चयनित मान

भार/अवयव का प्रकार	β
AISC	
DL + LL; अवयव	3.0
DL + LL; संयोजन	4.5
DL + LL + WL; अवयव	3.5
DL + LL +EL; अवयव	1.75
ACI	
तन्य विफलता	3-3.5
भंगुर विफलताएँ	3.5-4

श्रेणी तंत्र: यदि कोई एक घटक असंतोषजनक निष्पादन करता है तो ऐसा तंत्र असंतोषजनक निष्पादन करेगा। यदि तंत्र में श्रेणीक्रम में n घटक हों, iवें घटक के असंतोषजनक निष्पादन की प्रायिकता p_i और उसकी विश्वसनीयता $R_i = 1 - p_i$ हो, तो तंत्र की विश्वसनीयता, अर्थात सभी घटकों के संतोषजनक निष्पादन की प्रायिकता, है

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n \ = (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n)$$

समानांतर तंत्र: ऐसा तंत्र केवल तभी असंतोषजनक निष्पादन करेगा जब सभी घटक असंतोषजनक निष्पादन करें। अतः विश्वसनीयता है

$$R = 1 - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n \tag{N.2}$$

[10] विश्वसनीयता सूचकांक वर्तमान दशा का सापेक्ष माप हैं और संरचनात्मक निष्पादन का गुणात्मक आकलन प्रदान करते हैं। अपेक्षाकृत उच्च विश्वसनीयता सूचकांक वाली संरचनाओं से अच्छे निष्पादन की अपेक्षा होती है। मान अत्यधिक कम होने पर संरचना को संकटपूर्ण वर्गीकृत किया जा सकता है। β के लक्ष्य मान सारणी N.2 में दिए गए हैं। इसे चित्र N.2 में आगे स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण N.1: विश्वसनीयता सूचकांक

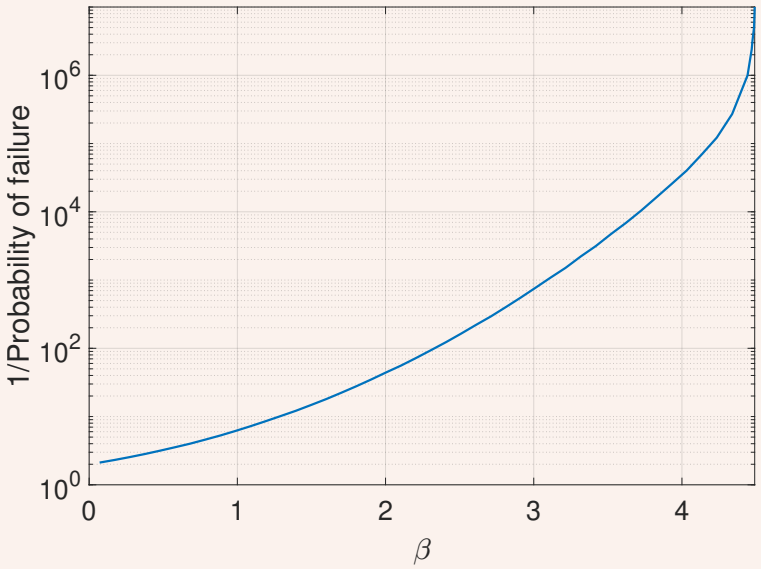
एक सरल आलंबित धरन (विस्तार L = 480 in., परिच्छेद मापांक S = 150 in^3, पराभव प्रतिबल: $\mu_{f_y} = 36$ ksi और $\sigma_{f_y} = 1$ ksi) पर बिंदु भार $\mu_P = 40$ kips और $\sigma_P = 1$ kips लगाया गया है।

1. दोनों विधियों द्वारा विश्वसनीयता सूचकांक निर्धारित करें।
2. मोंटे कार्लो अनुकरण द्वारा अध्ययन दोहराएँ।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका N.2: इस्पात और कंक्रीट संरचनाओं की विश्वसनीयता

अपेक्षित निष्पादन	β	विफलता-प्रायिकता
उच्च	5	3/10 million
अच्छा	4	3/100,000
औसत से ऊपर	3	1/1,000
औसत से नीचे	2.5	6/1,000
निम्न	2.0	2.3/100
असंतोषजनक	1.5	7/100
संकटपूर्ण	1.0	16/100



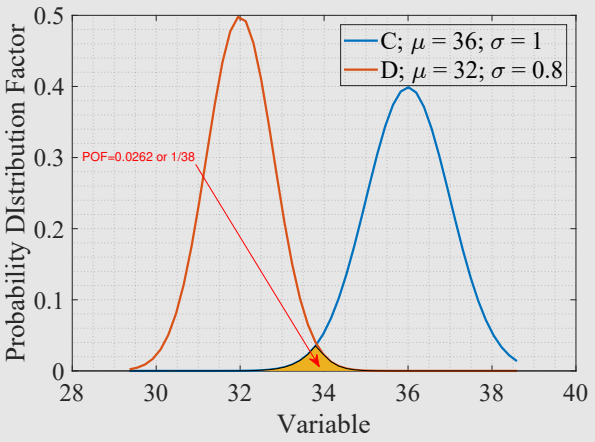
चित्र N.2: विश्वसनीयता सूचकांक β के पदों में विफलता-प्रायिकता

```
clear;clc; close all;
fs=16;font='Times New Roman';opengl software;
%
% Span of the beam(in)
L = 480;
% section modulus (in^3)
S = 150;
% Mean and Standard Deviation (SD) of Capacity,fy, (C) and Load (P)
Mu_C = 36;
SD_C = 1;
Mu_D = 40; % different units than C
SD_D = 1;
%Calculation of mean and SD of Demand (D)
Mu_D = Mu_D*L/4/S;
```

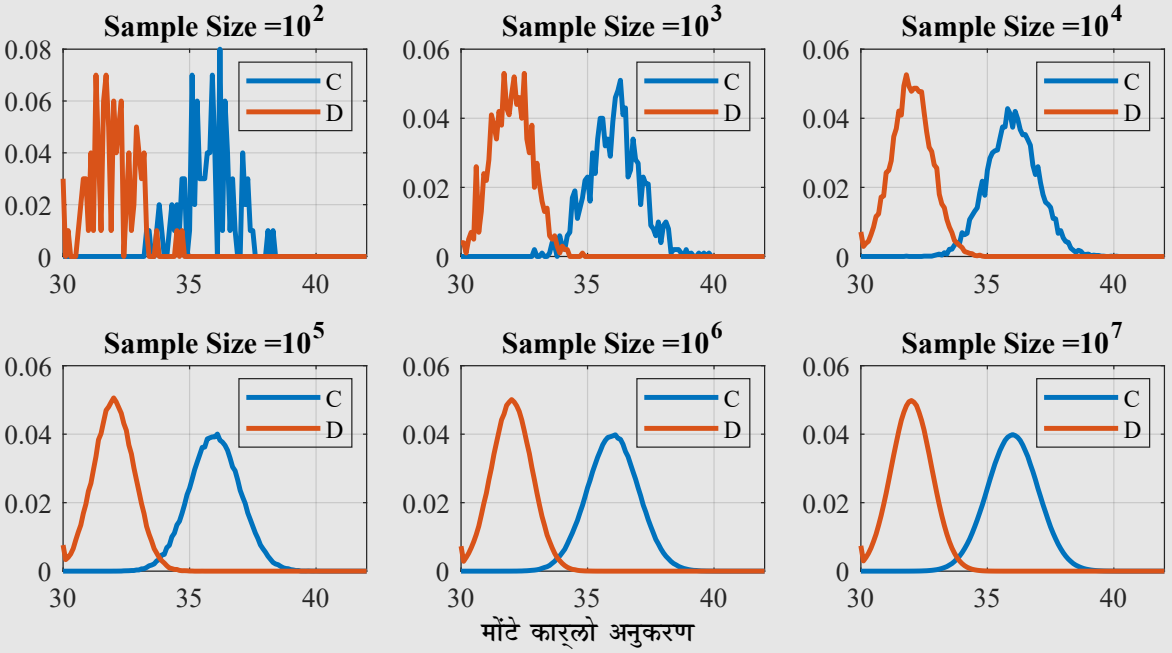

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

```
SD_D = SD_D*L/4/S;
sd=SD_D;md=Mu_D;sc=SD_C;mc=Mu_C;
%=========================================
% POF returns the Probability of Failure
%=========================================
% Approach (I): safety margin (M) = C - D, and C and D are normally distributed.
RI_I = (Mu_C-Mu_D)/sqrt(SD_C^2+SD_D^2);
POF_I = 0.5*(1 + erf(-RI_I/sqrt(2)));
% Approach (II): safety margin (M) = lnC - lnD, and C and D are normally
    distributed.
V_C = (SD_C/Mu_C);
V_D = (SD_D/Mu_D);
RI_II = log(Mu_C/Mu_D)/sqrt(V_C^2+V_D^2);
POF_II = 0.5*(1 + erf(-RI_II/sqrt(2)));
%
fprintf('Approach    beta    1/POF \n');
fprintf('I           %5.2f   %4.0f \n',RI_I,1/POF_I);
fprintf('II          %5.2f   %4.0f \n\n',RI_II,1/POF_II);
%=========================================
% Monte Carlo simulation to determine the probability of failure of the beam
% Approach: random numbers between 0 and 1 are created
% and the corresponding values of C and D are calculated
% using the inverse cumulative distribution function (icdf)
pd_C = makedist('Normal','mu',Mu_C,'sigma',SD_C);
pd_D = makedist('Normal','mu',Mu_D,'sigma',SD_D);
for p = 2:7
  subplot(2,3,p-1)
  SampleSize = 10^p;
  x(p-1)=SampleSize;
  CC = icdf(pd_C,rand(SampleSize,1));
  DD = icdf(pd_D,rand(SampleSize,1));
  N = sum(DD>CC);
  POF_MonteCarlo (p-1) = N/SampleSize;
  % Plot histograms
  bin=(30 : 0.1 : 42);
  plot(bin,hist(CC,bin)/SampleSize,bin,hist(DD,bin)/SampleSize,'LineWidth',2);
  xlim([30 42]);
  grid
  lgnd=legend('C','D');
  set(lgnd, 'Color','none')
  label=['Sample Size =10^' int2str(p)];
  title(label);
  set(gca,'FontName', font,'color', 'none','fontsize',fs/2);
  l=sprintf('%3.0f  %5.2e',p,POF_MonteCarlo (p-1));
  disp(l);
end
```


संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



उपागम	β	1/POF
I	3.12	1,119
II	3.15	1,232



प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

O विकृत्य पिंडों की यांत्रिकी: एक परिचय

सारांश

सब कुछ यांत्रिकी से आरंभ होता है। गणित में निहित होने के कारण यह विचरणात्मक विधियों और उनकी संगत व्युत्पत्तियों पर आगामी अध्यायों के लिए सुदृढ आधार प्रदान करती है। यह वास्तविक आवश्यकता की तुलना में कहीं अधिक विस्तृत है[1], अतः इस पुस्तक के अधिकांश पाठकों के लिए इसकी रुचि सीमित हो सकती है।

तथापि, मेरा दृढ विश्वास है कि संरचनात्मक अभियांत्रिकी में प्रवीणता के लिए विकृत्य पिंडों की यांत्रिकी (अर्थात् ठोस यांत्रिकी) का सुदृढ ज्ञान पूर्वापेक्षा है—ठीक उसी प्रकार जैसे किसी श्रेष्ठ वास्तुकार को संरचनात्मक अभियांत्रिकी पर भी अच्छा अधिकार होना चाहिए।

O.1 परिचय 3039
O.1.1 संकेतन 3040
O.1.2 प्रदिश 3042
O.1.3 प्रतिबल अपरिवर्तों की भौतिक व्याख्या 3047
O.2 सदिश क्षेत्र; विकृत्य पिंडों की यांत्रिकी 3049
O.2.1 बल 3049
O.2.2 कॉशी का प्रतिबल प्रदिश . . . 3049
O.2.3 शुद्धगतिकी 3052
O.3 सातत्य यांत्रिकी के मूलभूत नियम 3055
O.3.1 संरक्षण नियम 3056
O.3.2 अभिवाह 3056
O.3.3 द्रव्यमान संरक्षण; सातत्य समीकरण 3057
O.3.4 संवेग संरक्षण; गति समीकरण . 3058
O.3.5 ऊर्जा संरक्षण; ऊष्मागतिकी का प्रथम सिद्धांत 3060
O.4 संघटक समीकरण 3062
O.4.1 सामान्य त्रिविम (3D) अवस्था . 3063
O.4.2 अनुप्रस्थ समदैशिक अवस्था . . 3064
O.4.3 विशेष द्विविम (2D) अवस्थाएँ . 3064
O.5 परिघटनात्मक प्रेक्षण 3065
O.5.1 भार, विस्थापन और विकृति-नियंत्रित परीक्षण 3066
O.5.2 इस्पात और कंक्रीट की चरम-पूर्व/चरमोत्तर द्रव्य अनुक्रिया 3067
O.6 विरूपण का स्थानीयकरण 3068
O.6.1 प्रायोगिक साक्ष्य 3068
O.7 सीमा प्रतिबंध 3071
O.8 टोंटी आरेख 3072
O.9 आंतरिक बल की संकल्पना 3072

O.1 परिचय

1 अवसंरचना के उन्नत संरचनात्मक विश्लेषण के अध्ययन के लिए यांत्रिकी और परिमित-अवयव विधि के मूल सिद्धांतों में सुदृढ आधार आवश्यक है। इस अध्याय का उद्देश्य वस्तुतः एक संक्षिप्त समीक्षा प्रस्तुत करना है।

2 अपनाया गया उपागम पहले प्रदिश संकेतन का उपयोग करते हुए कठोर *सातत्य यांत्रिकी* प्रतिमान से आरंभ करना और तत्पश्चात अधिक पारंपरिक रूप से प्रयुक्त कार्तीय निर्देशांक तंत्र में उसका विस्तार करना है।

[1]संयोगवश यह अध्याय पहले किसी अन्य प्रकाशन (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) के लिए लिखा गया था और अंततः मैंने केवल कुछ छोटे परिवर्तनों के साथ इसे पूर्ण रूप में बनाए रखने का निर्णय लिया।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

O.1.1 संकेतन

[3] प्रदिश की संकल्पना (नीचे परिभाषित) ज्ञात मानते हुए, अभियांत्रिकी/यांत्रिकी में संकेतन विभिन्न रूप ले सकता है। तालिका O.1 देखें।

तालिका O.1: संकेतन

	$[A]$	A_{ij}	$\mathbf{A}$	
आव्यूह	✓	X	✓	$\lfloor x \rfloor [A] \{x\}$ $\mathbf{x.A.x}$
प्रदिश	X	✓	✓	$x_i A_{ij} x_j$ $\mathbf{x.A.x}$

अभियांत्रिकी/वोइट (टिमोशेंको) सममित द्वितीय-कोटि प्रदिशों को प्रायः स्तंभ आव्यूहों के रूप में लिखा जाता है। इस रूपांतरण तथा अन्य उच्चतर-कोटि प्रदिशों के स्तंभ आव्यूहों में रूपांतरण को वोइट संकेतन कहते हैं। वोइट नियम इस बात पर निर्भर करता है कि प्रदिश गतिक राशि (जैसे प्रतिबल) है अथवा शुद्धगतिक राशि (जैसे विकृति)।

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\sigma}\}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

आव्यूह: परिमित अवयव, $[A]$, $[\sigma]$, $\{F\}$। इन्हें परिकलनों में सारणियों से सरलता से संबद्ध किया जा सकता है।

प्रदिश: यांत्रिकी में कार्तीय रूप F_x, σ_{ij}, C_{ijkl} तथा $\mathbf{F}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{C}$। प्रदिश संकेतन में सूचकांक नहीं दर्शाए जाते। जहाँ कार्तीय सूचकांकीय समीकरण केवल कार्तीय निर्देशांकों पर लागू होते हैं, वहीं प्रदिश संकेतन के व्यंजक निर्देशांक तंत्र से स्वतंत्र होते हैं और बेलनाकार, वक्ररेखीय आदि अन्य निर्देशांक तंत्रों पर भी लागू होते हैं। सूचकांकीय संकेतन में प्रथम अथवा उच्चतर कोटि के प्रदिशों को मोटे अक्षरों में दर्शाया जाता है। सामान्यतः प्रथम-कोटि प्रदिशों के लिए छोटे अक्षर और द्वितीय (कोटि 2) तथा उच्चतर कोटि के प्रदिशों के लिए बड़े अक्षर उपयोग करने की अनुशंसा की जाती है। पदों के बीच बिंदु और द्विबिंदु लगाकर प्रदिश तथा आव्यूह संकेतन में अंतर किया जाता है, जैसे $\mathbf{a.b} \equiv a_i b_i$ (यहाँ '.' समान क्रम में आने वाले पुनरावृत्त सूचकांकों के एक युग्म के संकुचन को दर्शाता है), और $\mathbf{A} : \mathbf{B} \equiv A_{ij} B_{ij}$। इसी प्रकार $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ के तुल्य है।

[4] आगामी अनुभागों में अंतिम संकेतन (प्रदिश/सूचकांकीय) का संक्षिप्त विवेचन किया जाएगा। यद्यपि अभियांत्रिकी संकेतन संभवतः सबसे सरल और सहज है, यह प्रायः लंबे और पुनरावृत्त समीकरण उत्पन्न करता है। इसके विपरीत प्रदिश संकेतन छोटे और अधिक संहत रूप प्रदान करता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

[5] सामान्य सापेक्षता पर कार्य करते समय आइंस्टीन योग-चिह्न के नीचे और ऊपर उसकी योग-सीमा (जैसे $\sum_{i=1}^{n=3} a_{ij}b_i$) लिखते-लिखते ऊब गए। उन्होंने देखा कि अधिकांशतः ऊपरी सीमा (n) अंतरिक्ष की विमा (हमारे लिए 3, उनके लिए 4) के बराबर होती है और जब योग में दो पदों का गुणनफल हो, तब योग किसी पुनरावृत्त सूचकांक (हमारे उदाहरण में i) पर होता है। अतः उन्होंने निश्चय किया कि योग-चिह्न $\sum$ लिखने की आवश्यकता नहीं है, यदि पुनरावृत्त सूचकांक (i) हों। इस प्रकार प्रत्येक पुनरावृत्त सूचकांक मूक सूचकांक है और 1 से 3 की सीमा में उसका योग किया जाता है। जो सूचकांक पुनरावृत्त नहीं होता उसे मुक्त सूचकांक कहते हैं और उसका मान 1 से 3 तक माना जाता है। अतः यह तथाकथित सूचकांकीय संकेतन , आइंस्टीन संकेतन भी कहलाता है। निम्न नियम सूचकांकीय संकेतन को परिभाषित करते हैं:

1. यदि एक अक्षरी सूचकांक हो, तो वह सूचकांक i से n (प्रदिश का परिसर) तक जाता है। उदाहरणार्थ:
$$a_i = a^i = \lfloor\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ \rfloor \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\} \qquad i = 1, 2, 3$$
यह मानते हुए कि $n = 3$।
2. पुनरावृत्त (अर्थात् मूक) सूचकांक अपने परिसर के सभी मान ग्रहण करेगा और परिणामी प्रदिशों का योग किया जाएगा। उदाहरणार्थ:
$$a_{1i}x_i = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
3. प्रदिश की कोटि:
   - प्रथम-कोटि प्रदिश (जैसे बल) में केवल एक मुक्त सूचकांक होता है:
   $$a_i = a^i = \lfloor\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ \rfloor$$
   अन्य प्रथम-कोटि प्रदिश हैं $a_{ij}b_j$, F_{ikk}, $\varepsilon_{ijk}u_jv_k$।
   - द्वितीय-कोटि प्रदिश (अर्थात् द्वयादिक) में दो मुक्त सूचकांक होंगे।
   $$D_{ij} = \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{array} \right]$$
   अन्य उदाहरण हैं A_{ijip}, $\delta_{ij}u_kv_k$।
   - चतुर्थ-कोटि प्रदिश (जैसे प्रत्यास्थ स्थिरांक) में चार मुक्त सूचकांक होंगे।
4. x_i के सापेक्ष प्रदिश का अवकलज , i के रूप में लिखा जाता है। उदाहरणार्थ:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi_{,i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}; \quad \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_k} = T_{i,j,k};$$

[6] सूचकांकीय संकेतन की उपयोगिता समीकरण-निकायों को संहत रूप में प्रस्तुत करने में है। उदाहरणार्थ:
$$x_i = c_{ij}z_j \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 \\ x_2 & = & c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3 \\ x_3 & = & c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3 \end{array} \right.$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

इसी प्रकार:

$$A_{ij} = B_{ip}C_{jq}D_{pq}$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= B_{11}C_{11}D_{11} + B_{11}C_{12}D_{12} + B_{12}C_{11}D_{21} + B_{12}C_{12}D_{22} \\
A_{12} &= B_{11}C_{21}D_{11} + B_{11}C_{22}D_{12} + B_{12}C_{21}D_{21} + B_{12}C_{22}D_{22} \\
A_{21} &= B_{21}C_{11}D_{11} + B_{21}C_{12}D_{12} + B_{22}C_{11}D_{21} + B_{22}C_{12}D_{22} \\
A_{22} &= B_{21}C_{21}D_{11} + B_{21}C_{22}D_{12} + B_{22}C_{21}D_{21} + B_{22}C_{22}D_{22}
\end{aligned}$$

[7] सूचकांकीय संकेतन का उपयोग करके अदिश गुणनफल की परिभाषा पुनर्लिखी जा सकती है

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_i = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

O.1.2 प्रदिश

[8] प्रदिश ($\mathbf{T}$) प्रस्तुत करके सदिश की संकल्पना का सामान्यीकरण किया जाता है; प्रदिश मूलतः *सदिशों* $\mathbf{v}$ *पर संक्रिया करके अन्य सदिश उत्पन्न करता है* (अथवा प्रदिशों पर संक्रिया करके अन्य प्रदिश उत्पन्न करता है!)। इस संक्रिया को $\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}$ अथवा केवल $\mathbf{Tv}$ से दर्शाया जाता है।

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} \quad \text{or} \quad u_i = T_{ij}v_j \\
\mathbf{u} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{S} \quad \text{where} \quad \mathbf{S} = \mathbf{T}^T
\end{aligned}$$

यद्यपि प्रदिश मूलतः सदिशों (अथवा अन्य प्रदिशों) पर एक संकारक है, वह किसी विशिष्ट निर्देशांक तंत्र से स्वतंत्र भौतिक राशि भी है, जिसे किसी उपयुक्त निर्देशांक तंत्र के संदर्भ में सर्वाधिक सुविधापूर्वक निर्दिष्ट किया जाता है।

[9] प्रदिश प्रायः ऐसी भौतिक सत्ताओं के रूप में उत्पन्न होते हैं जिनके घटक सदिशों के बीच रैखिक संबंध के गुणांक होते हैं। प्रदिश का वर्गीकरण उसकी श्रेणी अथवा कोटि से किया जाता है। शून्य-कोटि प्रदिश किसी भी निर्देशांक तंत्र में एक निर्देशांक द्वारा निर्दिष्ट होता है और अदिश होता है। प्रथम-कोटि प्रदिश के अंतरिक्ष में तीन निर्देशांक घटक होते हैं, अतः वह सदिश है। सामान्य 3-D अंतरिक्ष में प्रदिश के घटकों की संख्या 3^n होती है, जहाँ $\mathbf{n}$ प्रदिश की कोटि है। बल और प्रतिबल क्रमशः कोटि 1 और 2 के प्रदिश हैं।

[10] द्वितीय-कोटि प्रदिशों को *द्वयादिक* भी कहते हैं और वे यांत्रिकी में अत्यंत सामान्य हैं (जैसे प्रतिबल, विकृति, जडत्व)।

O.1.2.1 संक्रियाएँ

[11] दो प्रदिशों (जिनकी कोटि समान होनी चाहिए) का योग सरलतः निम्न प्रकार परिभाषित है:

$$\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{T}_{ij} + \mathbf{U}_{ij}$$

(द्वितीय-कोटि) प्रदिश का अदिश गुणन निम्न द्वारा परिभाषित है:

$$\mathbf{S}_{ij} = \lambda\mathbf{T}_{ij}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

[12] दो प्रदिशों का बाह्य गुणनफल वह प्रदिश है जिसके घटक एक प्रदिश के प्रत्येक घटक को दूसरे प्रदिश के प्रत्येक घटक से गुणा करके बनते हैं। इससे ऐसी कोटि का प्रदिश प्राप्त होता है जो गुणक प्रदिशों की कोटियों के योग के बराबर है।

$$\begin{aligned} a_i b_j &= T_{ij} \quad \text{or} \left\{ \quad \right\}_{n\times 1} \lfloor \quad \rfloor_{1\times m} = \left[\quad \right]_{n\times m} \\ v_i F_{jk} &= b_{ijk} \\ D_{ij} T_{km} &= \phi_{ijkm} \end{aligned}$$

[13] दो प्रदिशों का आंतरिक गुणनफल: प्रत्येक प्रदिश से एक सूचकांक का संकुचन

$$\begin{aligned} & a_i b_i \\ a_i E_{ik} &= f_k \quad \text{or} \lfloor \quad \rfloor_{1\times m} \left[\quad \right]_{mxn} = \lfloor \quad \rfloor_{1xn} \\ E_{ij} F_{jm} &= G_{im} \quad \text{or} \left[\quad \right]_{n\times p} \left[\quad \right]_{p\times m} = \left[\quad \right]_{n\times m} \end{aligned}$$

[14] सदिश गुणनफल को परिभाषित किया जा सकता है

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \varepsilon_{pqr} a_q b_r \mathbf{e}_p = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

दूसरे समीकरण में एक मुक्त सूचकांक p है, अतः तीन समीकरण हैं; दो पुनरावृत्त (मूक) सूचकांक q और r हैं, अतः प्रत्येक समीकरण में नौ पद हैं। ε_{pqr} को क्रमचय चिह्न कहते हैं और यह निम्न प्रकार परिभाषित है

$$\varepsilon_{pqr} = \begin{cases} 1 & \text{If the value of } i,j,k \text{ are an even permutation of 1,2,3} \\ & \text{(i.e. if they appear as 1 2 3 1 2)} \\ -1 & \text{If the value of } i,j,k \text{ are an odd permutation of 1,2,3} \\ & \text{(i.e. if they appear as 3 2 1 3 2)} \\ 0 & \text{If the value of } i,j,k \text{ are not a permutation of 1,2,3} \\ & \text{(i.e. if two or more indices have the same value)} \end{cases}$$

दो प्रदिशों का अदिश गुणनफल निम्न प्रकार परिभाषित है

$$\mathbf{T} : \mathbf{U} = T_{ij} U_{ij}$$

किसी भी आयताकार तंत्र में। निम्न आंतरिक गुणनफल अभिगृहीत संतुष्ट होते हैं:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbf{U} &= \mathbf{U} : \mathbf{T} \\ \mathbf{T} : (\mathbf{U} + \mathbf{V}) &= \mathbf{T} : \mathbf{U} + \mathbf{T} : \mathbf{V} \\ \alpha(\mathbf{T} : \mathbf{U}) &= (\alpha\mathbf{T}) : \mathbf{U} = \mathbf{T} : (\alpha\mathbf{U}) \\ \mathbf{T} : \mathbf{T} &> 0 \text{ unless } \mathbf{T} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

O.1.2.2 अक्षों का घूर्णन

15 कार्तीय लंबकोणीय निर्देशांक तंत्रों के दो भिन्न समुच्चयों $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ और $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ पर विचार करें। किसी भी सदिश $\mathbf{v}$ को किसी एक तंत्र में व्यक्त किया जा सकता है

$$\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j = \overline{v}_j \bar{\mathbf{e}}_j$$

घटकों के दोनों समुच्चयों के बीच संबंध निर्धारित करने के लिए $\mathbf{v}$ का किसी एक आधार सदिश के साथ अदिश गुणनफल लिया जाता है

$$\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{v} = \overline{v}_i = v_j (\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j)$$

इस प्रकार नौ अदिश मान परिभाषित किए जा सकते हैं

$$a_i^j \equiv \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\overline{x}_i, x_j)$$

जो आधार सदिशों के नौ युग्मों के बीच दिक्-कोसाइन हैं। सहपरिवर्ती रूपांतरण किसी प्रदिश को एक आधार से दूसरे आधार में रूपांतरित करेगा:

$$\overline{v}_j \;=\; a_j^p v_p$$

ध्यान दें कि प्रथम और द्वितीय समीकरणों में मुक्त सूचकांक क्रमशः ऊपरी और निचले सूचकांक के रूप में प्रकट होता है।

16 सदिश $\mathbf{V}$ के $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ निर्देशांक तंत्र से $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ में रूपांतरण पर विचार करें, चित्र O.1a। समीकरण O.1 से

$$V_j = a_j^p \overline{V}_p \;\text{ or }\; \left\{ \begin{array}{rcl} V_1 &=& a_1^1 \overline{V}_1 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_1^3 \overline{V}_3 \\ V_2 &=& a_2^1 \overline{V}_2 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_2^3 \overline{V}_3 \\ V_3 &=& a_3^1 \overline{V}_3 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_3^3 \overline{V}_3 \end{array} \right.$$

अथवा,

$$\left\{ \begin{array}{c} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} a_x^X & a_x^Y & a_x^Z \\ a_y^X & a_y^Y & a_y^Z \\ a_z^X & a_z^Y & a_z^Z \end{array} \right]}_{a_j^k} \left\{ \begin{array}{c} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{array} \right\} \tag{O.1}$$

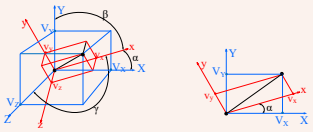
जहाँ a_i^j, अक्ष i का अक्ष j के सापेक्ष दिक्-कोसाइन है

- $a_x^j = (a_x^X, a_x^Y, a_x^Z)$, $\mathbf{x}$ के $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ और $\mathbf{Z}$ के सापेक्ष दिक्-कोसाइन
- $a_y^j = (a_y^X, a_y^Y, a_y^Z)$, $\mathbf{y}$ के $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ और $\mathbf{Z}$ के सापेक्ष दिक्-कोसाइन
- $a_z^j = (a_z^X, a_z^Y, a_z^Z)$, $\mathbf{z}$ के $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ और $\mathbf{Z}$ के सापेक्ष दिक्-कोसाइन

17 2D स्थिति, चित्र O.1b, के लिए रूपांतरण आव्यूह निम्न प्रकार लिखा जाता है

$$T = \left[\begin{array}{cc} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\alpha \end{array} \right]$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



(a) 3D (b) 2D

चित्र O.1: सदिश रूपांतरण

किंतु चूँकि $\gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha$ और $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, इसलिए $\cos\gamma = -\sin\alpha$ और $\cos\beta = \sin\alpha$; अतः रूपांतरण आव्यूह हो जाता है

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{O.2}$$

O.1.2.3 प्रदिश रूपांतरण

18 द्वितीय-कोटि प्रदिश T_{jq} का घूर्णन:

$$\begin{aligned} \overline{u}_j &= T_{jq}\overline{v}_q \\ \overline{u}_i &= a_i^j u_j \\ &= a_i^j T_{jq} v_q \\ &= a_i^j T_{jq} a_p^q \overline{v}_p \end{aligned}$$

किंतु चिह्नित तंत्र में $\overline{u}_i = \overline{T}_{ip}\overline{v}_p$ भी है; इन दोनों व्यंजकों को बराबर रखने पर प्राप्त होता है

$$\overline{T}_{ip} = a_i^j a_p^q T_{jq}$$

अतः,

$$\begin{aligned} \overline{T}_{ip} &= a_i^j a_p^q T_{jq} \quad \text{in Matrix Form} \quad [\overline{T}] = [A]^T[T][A] \\ T_{jq} &= a_i^j a_p^q \overline{T}_{ip} \quad \text{in Matrix Form} \quad [T] = [A][\overline{T}][A]^T \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

[19] यदि 2D स्थिति पर विचार किया जाए, तो समीकरण O.2 से

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T &= \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & 0 \\ T_{xy} & T_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \overline{T} &= \begin{bmatrix} \overline{T}_{xx} & \overline{T}_{xy} & 0 \\ \overline{T}_{xy} & \overline{T}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^T T A \end{aligned}$$

प्रतिस्थापित और सरलीकृत करने पर ($\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ और $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$)

$$\begin{Bmatrix} \overline{T}_{xx} \\ \overline{T}_{yy} \\ \overline{T}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{xy} \end{Bmatrix}$$

O.1.2.4 सममित द्वितीय-कोटि प्रदिशों के प्रमुख मान

[20] सातत्य यांत्रिकी के दो मूलभूत प्रदिश द्वितीय-कोटि और सममित (प्रतिबल और विकृति) हैं; यहाँ इन प्रदिशों के कुछ महत्त्वपूर्ण गुणों का परीक्षण किया जाता है। अंतरिक्ष के किसी बिंदु पर परिभाषित प्रत्येक सममित प्रदिश T_{ij} के लिए, प्रत्येक दिशा (इकाई अभिलंब n_j द्वारा निर्दिष्ट), चित्र O.2, से उस बिंदु पर आंतरिक गुणनफल द्वारा दिया गया सदिश संबद्ध होता है

$$v_i = T_{ij} n_j$$

यदि दिशा ऐसी हो जिसके लिए v_i, n_i के समानांतर हो, तो आंतरिक गुणनफल है

$$T_{ij} n_j = \lambda n_i$$

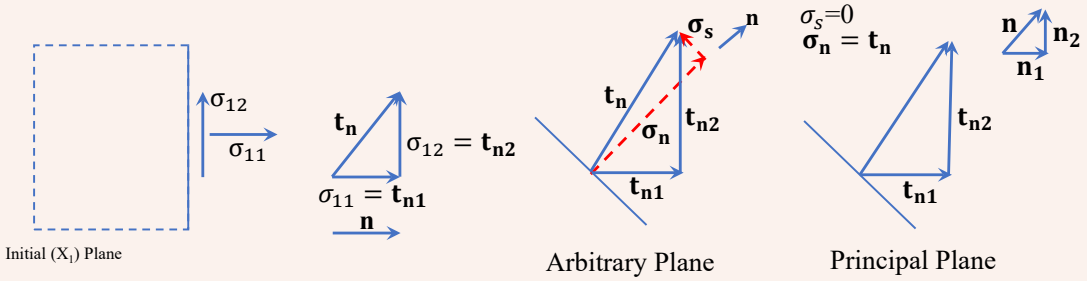
और दिशा n_i को T_{ij} की प्रमुख दिशा कहते हैं। चूँकि $n_i = \delta_{ij} n_j$, इसे निम्न प्रकार पुनर्लिखा जा सकता है

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) n_j = 0$$

जो चार अज्ञातों n_i और λ के लिए तीन समीकरणों का निकाय निरूपित करता है।

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3 &= 0 \\ T_{21} n_1 + (T_{22} - \lambda) n_2 + T_{23} n_3 &= 0 \\ T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + (T_{33} - \lambda) n_3 &= 0 \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र O.2: द्वितीय-कोटि प्रदिश की प्रमुख दिशाएँ

21 अतुच्छ समाधान ($n_i \neq 0$) के लिए गुणांकों का सारणिक शून्य होना चाहिए:

$$\left|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}\right| = 0$$

22 इस सारणिक के प्रसार से निम्न अभिलाक्षणिक समीकरण प्राप्त होता है

$$\lambda^3 - I_T \lambda^2 + II_T \lambda - III_T = 0$$

जहाँ मूलों को T_{ij} के प्रमुख मान कहते हैं और

$$\begin{aligned} I_T &= T_{ii} = \text{tr } T_{ij} \\ II_T &= \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}) \\ III_T &= |T_{ij}| = \det T_{ij} \end{aligned}$$

क्रमशः T_{ij} के प्रथम, द्वितीय और तृतीय अपरिवर्त कहलाते हैं। इन मूलों को $\lambda_{(1)} > \lambda_{(2)} > \lambda_{(3)}$ के क्रम में रखना प्रचलित है। प्रमुख प्रतिबलों के पदों में इन अपरिवर्तों को निम्न रूप में सरल किया जा सकता है

$$\begin{aligned} I_T &= T_{(1)} + T_{(2)} + T_{(3)} \\ II_T &= -(T_{(1)}T_{(2)} + T_{(2)}T_{(3)} + T_{(3)}T_{(1)}) \\ III_T &= T_{(1)}T_{(2)}T_{(3)} \end{aligned}$$

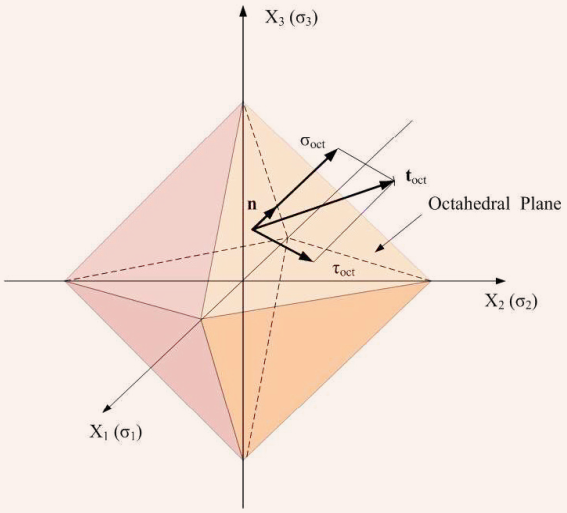
23 वास्तविक घटकों वाले सममित प्रदिश के प्रमुख मान भी वास्तविक होते हैं। यदि ये मान भिन्न हों, तो तीनों प्रमुख दिशाएँ परस्पर लंबकोणीय होती हैं।

O.1.3 प्रतिबल अपरिवर्तों की भौतिक व्याख्या

24 अष्टफलकीय तल वह है जो प्रत्येक प्रमुख-प्रतिबल दिशा के साथ समान कोण बनाता है, चित्र O.3; इस तल का अभिलंब निम्न से दिया जाता है

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र O.3: अष्टफलकीय तल

25 इस तल पर कर्षण-सदिश है

$$\mathbf{t}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

और अष्टफलकीय तल पर प्रतिबल का अभिलंब घटक निम्न से दिया जाता है

$$\sigma_{oct} = \mathbf{t}_{oct} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3}\mathbf{I}_1 = \sigma_{hyd}$$

26 अष्टफलकीय अपरूपण प्रतिबल निम्न से प्राप्त होता है

$$\tau_{oct}^2 = |\mathbf{t}_{oct}|^2 - \sigma_{oct}^2 = \frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{\sigma_2^2}{3} + \frac{\sigma_3^2}{3} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9}$$

27 बीजीय संक्रिया से दर्शाया जा सकता है कि

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

और अंततः अष्टफलकीय अपरूपण प्रतिबल की दिशा निम्न से दी जाती है

$$\cos 3\theta = \sqrt{2} \frac{J_3}{\tau_{oct}^3}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

28 प्रति इकाई आयतन प्रत्यास्थ विकृति ऊर्जा (कुल) को दो भागों में विघटित किया जा सकता है: $U = U_1 + U_2$, जहाँ

$$\begin{aligned} U_1 &= \tfrac{1-2\nu}{E} I_1^2 && \text{Dilational energy} \\ U_2 &= \tfrac{1+\nu}{E} J_2 && \text{Distortional energy} \end{aligned}$$

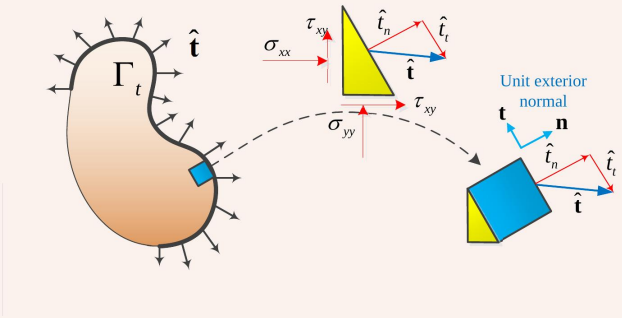
O.2 सदिश क्षेत्र; विकृत्य पिंडों की यांत्रिकी

O.2.1 बल

29 सातत्य यांत्रिकी में दो प्रकार के बल होते हैं

पिंड बल: पिंड के भीतर आयतन अथवा द्रव्यमान के अवयवों पर कार्य करते हैं, जैसे गुरुत्व, विद्युत-चुंबकीय क्षेत्र। $\mathrm{d}\mathbf{F} = \rho \mathbf{b} \mathrm{d}Vol$।

पृष्ठ बल: (अथवा कर्षण) संपर्क बल हैं जो मुक्त पिंड पर उसकी परिसीमा सतह पर कार्य करते हैं। इन्हें प्रति इकाई क्षेत्रफल बल के पदों में परिभाषित किया जाएगा, चित्र O.4, समीकरण O.3।



चित्र O.4: पृष्ठ बल

$$\int_\Gamma \mathbf{t} \mathrm{d}\Gamma = \mathbf{i} \int_\Gamma t_x \mathrm{d}\Gamma + \mathbf{j} \int_\Gamma t_y \mathrm{d}\Gamma + \mathbf{k} \int_\Gamma t_z \mathrm{d}\Gamma \tag{O.3}$$

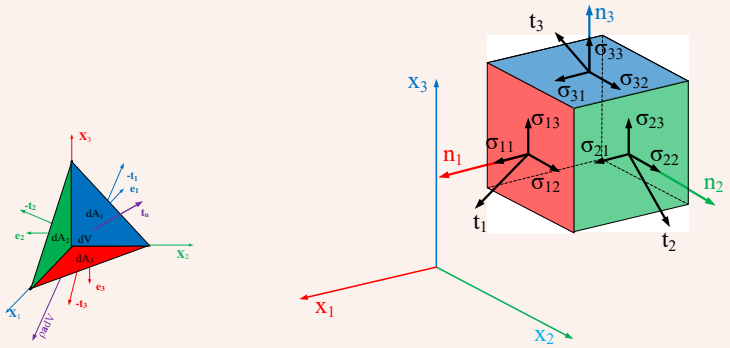
30 सामान्यतः कर्षण शब्द को पिंड की वास्तविक परिसीमा सतह तक सीमित रखा जाता है और काल्पनिक आंतरिक सतह के लिए प्रतिबल-सदिश शब्द प्रयुक्त होता है। निर्देशांक अक्षों के लंबवत तलों पर कर्षण-सदिश विशेष रूप से उपयोगी हैं। जब ऐसे तीन परस्पर लंबवत तलों पर किसी बिंदु पर कार्यरत सदिश दिए हों, तब किसी अन्य स्वेच्छ प्रवण तल पर उसी बिंदु का प्रतिबल-सदिश कर्षणों के प्रथम समुच्चय के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

O.2.2 कॉशी का प्रतिबल प्रदिश

31 बल की संकल्पना प्रारंभ में अमूर्त थी; अरस्तूवादी भौतिकी में इसे प्रेरक वेग कहा गया। गैलीलियो और न्यूटन (1687) ने इसे औपचारिक रूप दिया। प्रतिबल की संकल्पना 1822 तक दृढता से समझी नहीं

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

गई थी, जब कॉशी ने अभिलंब और स्पर्शरेखीय दोनों घटकों वाले कर्षण-सदिश $\mathbf{t} = t_n\mathbf{e}_n + t_t\mathbf{e}_t$ का विचार प्रस्तुत किया। उनकी "प्रतिभा" उस आकृति पर विचार करने में थी जो कॉशी चतुष्फलक , चित्र O.5a, के नाम से प्रसिद्ध हुई; इस पर उन्होंने न्यूटन का द्वितीय नियम (अथवा अधिक यथार्थतः कणों के लिए उसका ऑयलर-विस्तार: ऑयलर का गति का प्रथम नियम) लागू किया।



(a) चतुष्फलक (b) प्रतिबल

चित्र O.5: कॉशी: चतुष्फलक से प्रतिबल

[32] कॉशी चतुष्फलक का संतुलन देता है

$$\mathbf{t}dA - \mathbf{t}_1 dA_1 - \mathbf{t}_2 dA_2 - \mathbf{t}_3 dA_3 = \rho dV\mathbf{a}$$

जहाँ $\mathbf{a}$ त्वरण और ρ द्रव्यमान घनत्व है। फलकों के कृषेत्रफल निम्न से दिए जाते हैं

$$\begin{aligned} dA_1 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_1 dA \\ dA_2 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_2 dA \\ dA_3 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_3 dA \end{aligned}$$

संतुलन समीकरण में प्रतिस्थापित करके और $dV \to 0$ वाली सीमांत स्थिति पर विचार करने पर

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 \tag{O.4}$$

कर्षण-सदिशों के घटक होने चाहिए

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_2 &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_3 &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

[33] ध्यान देना चाहिए कि सातत्य यांत्रिकी में ऐतिहासिक और पारंपरिक रूप से प्रतिबल को $\mathbf{T}$ से दर्शाया जाता था। इसे σ से प्रतिस्थापित किया गया। समीकरण O.4 में प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{aligned} \mathbf{t} =& n_1(\sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3) + n_2(\sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3) \\ &+ n_3(\sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3) \\ =& (n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31})\mathbf{e}_1 + (n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32})\mathbf{e}_2 \\ &+ (n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33})\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा सरलतः

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{O.5}$$

34 कॉशी प्रतिबल प्रदिश नामक एक द्वितीय-कोटि प्रदिश होता है, जिसमें प्रथम (1st) अधोलिखित सूचकांक (i) बहिर्मुखी अभिलंब की दिशा को और द्वितीय सूचकांक (j) घटक बल की दिशा को निर्दिष्ट करता है, चित्र O.5b।

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right]}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

पूर्ववर्ती समीकरणों ने सातत्य यांत्रिकी की आधारशिला स्थापित करने में प्रमुख भूमिका निभाई।

35 अंततः, वॉइग्ट संकेतन (जिसका अभियांत्रिकी में सामान्यतः उपयोग होता है) सममित प्रदिश को उसकी कोटि घटाकर निरूपित करने की एक विधि है।

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{array} \right] \rightarrow \left\lfloor \begin{array}{cccccc} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} \end{array} \right\rfloor$$

36 टिप्पणी: हमने अभी तक संतुलन समीकरण (संवेग समीकरण) प्रस्तुत नहीं किया है।

O.2.2.1 द्रवस्थैतिक और विचलित प्रतिबल प्रदिश

37 मान लें कि σ माध्य अभिलंब प्रतिबल p को निरूपित करता है:

$$\sigma = -p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\text{tr } \boldsymbol{\sigma}$$

38 तब प्रतिबल प्रदिश को दो प्रदिशों के योग के रूप में लिखा जा सकता है:

द्रवस्थैतिक प्रतिबल जिसमें प्रत्येक अभिलंब प्रतिबल $-p$ के बराबर होता है और अपरूपण प्रतिबल शून्य होते हैं। द्रवस्थैतिक प्रतिबल समदैशिक माध्यम में आकार बदले बिना आयतन परिवर्तन उत्पन्न करता है।

$$\sigma_{hyd} = -p\mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{array} \right]$$

विचलित प्रतिबल: जो आकार में परिवर्तन उत्पन्न करता है।

$$\sigma_{dev} = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{array} \right]$$

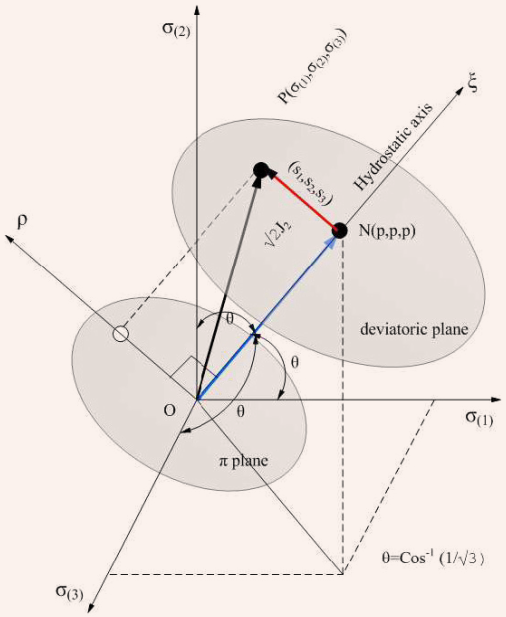
संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

O.2.2.2 प्रतिबल अवस्थाओं का ज्यामितीय निरूपण

39 तीन प्रमुख प्रतिबलों σ_1, σ_2 और σ_3 को निर्देशांक मानकर एक त्रिविम प्रतिबल समष्टि निर्मित की जा सकती है, चित्र O.6। इस प्रतिबल निरूपण को हेग-वेस्टरगार्ड प्रतिबल समष्टि कहा जाता है।

OP = **ON**+**NP**। इनमें पहला सदिश एकक सदिश $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ की दिशा में है और **NP**⊥**ON**।

ON प्रतिबल अवस्था का द्रवस्थैतिक घटक है; अक्ष $O\xi$ को द्रवस्थैतिक अक्ष ξ कहा जाता है और इस अक्ष के प्रत्येक बिंदु पर $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = p$, अथवा $\xi = \sqrt{3}p$ होता है। **NP** प्रतिबल अवस्था के विचलित घटक (s_1, s_2, s_3) को निरूपित करता है और ξ अक्ष के लंबवत है। द्रवस्थैतिक अक्ष के लंबवत किसी भी तल को विचलित तल कहा जाता है और इसे $\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}) = \xi$ से व्यक्त किया जाता है। मूलबिंदु से गुजरने वाले तल को π तल कहा जाता है और वह $\xi = 0$ से निरूपित होता है। द्रवस्थैतिक अक्ष को समाहित करने वाला कोई भी तल मध्याह्न तल कहलाता है। सदिश **NP** एक मध्याह्न तल में स्थित होता है और उसका परिमाण $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2}$ है।



चित्र O.6: प्रतिबल का ज्यामितीय निरूपण

O.2.3 शुद्धगतिकी

O.2.3.1 स्थिति और विस्थापन

40 किसी ठोस के विरूपण पर विचार करते समय दो पृथक निर्देशांक तंत्र हो सकते हैं, चित्र O.7:

द्रव्य निर्देशांक (X_1, X_2, X_3), जो अविरूपित मूल निर्देशांक तंत्र में परिभाषित होते हैं और लाग्रांजी निर्देशांक तंत्र को जन्म देते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

स्थानिक निर्देशांक (x_1, x_2, x_3), जो विरूपित निर्देशांक तंत्र में परिभाषित होते हैं। इससे ऑयलरी निर्देशांक तंत्र प्राप्त होता है।

अधिक स्पष्टतः, प्रारंभिक विन्यास में P_0 का स्थिति सदिश है

$$\mathbf{X} = X_1\mathbf{I}_1 + X_2\mathbf{I}_2 + X_3\mathbf{I}_3$$

जिसे यहाँ द्रव्य निर्देशांकों (X_1, X_2, X_3) में व्यक्त किया गया है। विरूपित विन्यास में कण P_0 नई स्थिति P पर पहुँच गया है और उसका स्थिति सदिश निम्न है

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$$

जिसे स्थानिक निर्देशांकों में व्यक्त किया गया है। विस्थापन सदिश $\mathbf{u}$, जो P_0 और P को जोड़ता है, द्रव्य अथवा स्थानिक, दोनों निर्देशांकों में व्यक्त किया जा सकता है

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= U_K\mathbf{I}_K \\ \mathbf{u} &= u_k\mathbf{i}_k\end{aligned}$$

O.2.3.2 विकृतियाँ

41 यदि विस्थापन प्रवणताएँ और स्वयं विस्थापन, दोनों छोटे हों, तो $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; अतः ऑयलरी और लाग्रांजी सूक्ष्म विकृति प्रदिशों को समान माना जा सकता है, $E_{ij} = E^*_{ij}$।

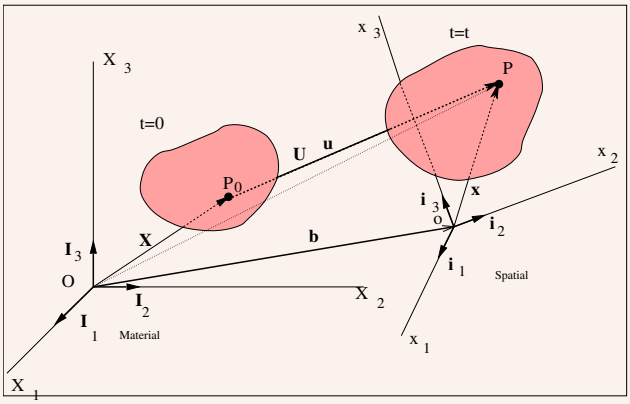
42 वैकल्पिक विकृति निरूपण भी प्रस्तुत किए जा सकते हैं, तालिका O.2।

तालिका O.2: विकृति निरूपण

		विस्थापन प्रवणता	
		लघु	बृहत्
विस्थापन	लघु	लाग्रांजी लघु विकृति (कॉशी)	लाग्रांजी बृहत् विकृति (ग्रीन–लाग्रांज)
	बृहत्	ऑयलरी लघु विकृति	ऑयलरी परिमित विकृति (ऑयलर–आल्मांसी)

43 इस पुस्तक में हम स्वयं को लाग्रांजी विकृति निरूपण तक सीमित रखेंगे।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप



चित्र O.7: स्थिति और विस्थापन सदिश

[44] यदि बृहत् विरूपण (जैसे व्याकुंचन में) को सम्मिलित किया जाए, तो कार्तीय निर्देशांक तंत्र में ऑयलरी परिमित विकृतियाँ हैं:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{O.6}
$$

अथवा

$$
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right)
$$

[45] ध्यान दें कि सामान्यतः प्रयुक्त अभियांत्रिकी अपरूपण विकृति को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है

$$
\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)
$$

[46] अधिकांश स्थितियों में विरूपण इतने छोटे होते हैं कि द्विघात पदों को छोड़ा जा सकता है; तब परिणामी समीकरण निम्न रूप में सरल हो जाते हैं

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\begin{array}{lllllllll} \varepsilon_{xx} & = & \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} & = & \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{zz} & = & \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} & = & \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}; & \gamma_{xz} & = & \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}; & \gamma_{yz} & = & \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}; \end{array}$$

अथवा

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,k} + u_{k,i}\right)$$

जिसे कॉशी विकृति कहा जाता है। परिमित अवयव विधि में विकृति को प्रायः रैखिक संकारक $\mathbf{L}$ के माध्यम से व्यक्त किया जाता है :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

अथवा

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array}\right\}}_{\mathbf{u}} \tag{O.7}$$

O.3 सातत्य यांत्रिकी के मूलभूत नियम

47 इस अनुभाग में हम वे अवकल समीकरण व्युत्पन्न करेंगे जो किसी बिंदु पर और समय के साथ प्रतिबल तथा विरूपण के परिवर्तन को नियंत्रित करते हैं। ये किसी भी सातत्य माध्यम पर लागू होंगे, किंतु अज्ञात प्रदिश क्षेत्र निर्धारित करने के लिए इतने समीकरण पर्याप्त नहीं होंगे। इसके लिए अगले अनुभाग में प्रतिबल और विकृति को संबद्ध करने वाले संघटक नियम प्रस्तुत किए जाएँगे।

48 केवल संघटक समीकरणों तथा सीमा और प्रारंभिक प्रतिबंधों के साथ ही प्रतिबल एवं विरूपण वितरण, अथवा विस्थापन या वेग क्षेत्रों के समाधान हेतु एक सुव्यवस्थित गणितीय समस्या प्राप्त होगी।

49 हम उन अवकल समीकरणों का सार प्रस्तुत करेंगे जो स्थानीय रूप से द्रव्यमान, संवेग और ऊर्जा के संरक्षण को व्यक्त करते हैं। ये संतुलन अवकल समीकरण, सातत्य यांत्रिकी के मूल अभिगृहीतों को व्यक्त करने वाले संतुलन समीकरणों के समाकल रूपों से व्युत्पन्न किए जाएँगे।

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

O.3.1 संरक्षण नियम

50 संरक्षण नियम शास्त्रीय भौतिकी के मूलभूत घटक हैं। कोई संरक्षण नियम आयतन V में, जो पृष्ठ S से परिबद्ध है, अदिश अथवा प्रदिश राशि का संतुलन स्थापित करता है। अपने सर्वाधिक सामान्य रूप में ऐसे नियम को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathcal{A}\mathrm{d}V}_{\text{Rate of variation}} + \underbrace{\int_S \boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}S}_{\text{Exchange by Diffusion}} = \underbrace{\int_V \mathbf{A}\mathrm{d}V}_{\text{Source}}$$

जहाँ $\mathcal{A}$ विचाराधीन राशि $\mathbf{a}$ (द्रव्यमान, रैखिक संवेग, ऊर्जा, आदि) का आयतनी घनत्व है, $\mathbf{A}$ बाहर से प्रदान की गई राशि के आयतनी घनत्व की दर है, और $\boldsymbol{\alpha}$ पृष्ठ S से, जो आयतन V की सीमा है, नष्ट होने वाली राशि के पृष्ठीय घनत्व की दर है तथा पृष्ठ के अभिलंब $\mathbf{n}$ का फलन होगा।

51 अतः पूर्ववर्ती समीकरण का अर्थ है: दाहिने पक्ष द्वारा प्रदत्त आगत राशि, सीमा के पार नष्ट होने वाली राशि और विचाराधीन राशि $\mathcal{A}$ में परिवर्तन के योग के बराबर है। विभिन्न राशियों की विमाएँ निम्न हैं

$$\begin{aligned}\dim(\mathbf{a}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-3})\\ \dim(\boldsymbol{\alpha}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-2}t^{-1})\\ \dim(\mathbf{A}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-3}t^{-1})\end{aligned}$$

52 अतः यह अनुभाग पूर्ववर्ती संरक्षण नियम को द्रव्यमान, संवेग और ऊर्जा पर लागू करेगा। परिणामी अवकल समीकरण ठोसों की असंपीड्यता (जो शास्त्रीय द्रवगतिकी और सुघट्यता सिद्धांतों में महत्त्वपूर्ण है), प्रतिबल प्रदिश के संतुलन एवं सममिति, और ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से संबंधित अतिरिक्त उपयोगी संबंध प्रदान करेंगे। पूर्वोक्त तीन संरक्षण नियमों तथा ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम का संयुक्त प्रतिपादन सामान्यतः सातत्य यांत्रिकी के मूलभूत नियम कहलाता है।

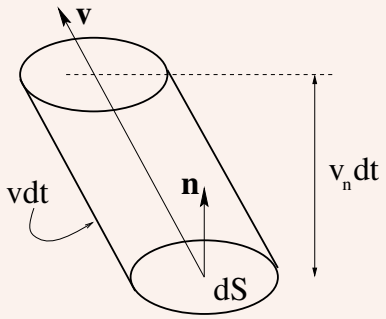
O.3.2 अभिवाह

53 प्रथम संरक्षण नियम के प्रतिपादन से पहले परिबंधक पृष्ठ के पार अभिवाह की संकल्पना परिभाषित करनी होगी। किसी पृष्ठ के पार अभिवाह को ऐसे काल्पनिक पृष्ठ पर विचार करके आलेखीय रूप से परिभाषित किया जा सकता है जो समष्टि में स्थिर है और जिसके आर-पार सातत्य "माध्यम" प्रवाहित होता है। यदि पृष्ठ को एक धन पक्ष दिया जाए और $\mathbf{n}$ को धन दिशा में लिया जाए, तो सूक्ष्म पृष्ठीय क्षेत्रफल $\mathrm{d}S$ से समय dt में प्रवाहित "द्रव्य" का आयतन उस बेलन के आयतन के बराबर है जिसका आधार $\mathrm{d}S$ और तिर्यक ऊँचाई vdt है, जो वेग सदिश $\mathbf{v}$ के समांतर है, चित्र O.8।

(यदि $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ ऋणात्मक हो, तो प्रवाह ऋण दिशा में होता है)। अतः आयतन अभिवाह को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं

$$\text{Volume Flux} = \int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_S v_j n_j \mathrm{d}S$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप



चित्र O.8: क्षेत्रफल dS से अभिवाह

जहाँ अंतिम रूप आयताकार कार्तीय घटकों के लिए है। इस परिभाषा का व्यापकीकरण करके dS के पार प्रति इकाई क्षेत्रफल निम्न अभिवाह परिभाषित किए जा सकते हैं:

$$\begin{aligned}\text{Mass Flux} &= \int_S \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} dS = \int_S \rho v_j n_j dS \\ \text{Momentum Flux} &= \int_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) dS = \int_S \rho v_k v_j n_j dS \\ \text{Heat flux} &= \int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} dS = \int_S q_j n_j dS\end{aligned}$$

O.3.3 द्रव्यमान संरक्षण; सातत्य समीकरण

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

[54] सदिश रूप निर्देशांकों के किसी भी चयन से स्वतंत्र है। यह समीकरण दर्शाता है कि वेग सदिश क्षेत्र का अपसरण $(-1/\rho)(d\rho/dt)$ के बराबर है; यह कण से दूर द्रव्य के प्रवाह की दर मापता है और कण के निकट घनत्व ρ में कमी की इकाई दर के बराबर है।

[55] यदि द्रव्य असंपीड्य हो, अर्थात प्रत्येक द्रव्य कण के चलते समय उसके निकट घनत्व नियत रहे, तो सातत्य समीकरण निम्न सरल रूप लेता है

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{or} \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

[56] यह असंपीड्यता की शर्त है ।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

O.3.4 संवेग संरक्षण; गति समीकरण

[57] यदि न्यूटन का तृतीय नियम लागू हो, तो कणों के किसी दिए हुए समुच्चय के कुल संवेग के परिवर्तन की समय-दर, उस समुच्चय के कणों पर कार्यरत सभी बाह्य बलों के सदिश योग के बराबर होती है। इस सिद्धांत का सातत्य रूप सातत्य यांत्रिकी का मूल अभिगृहीत[2] है। निम्न से आरंभ करते हुए

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \underbrace{\rho\mathbf{v}}_{\mathcal{A}}\,\mathrm{d}V - \int_S \underbrace{\mathbf{t}}_{\alpha}\,\mathrm{d}S = \int_V \underbrace{\rho\mathbf{b}}_{\mathbf{A}}\,\mathrm{d}V$$

और यह ध्यान रखते हुए कि

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{A}) &= \rho\mathbf{v} = \tfrac{m}{L^2 t}\\ \dim(\alpha) &= \mathbf{t} = \tfrac{ma}{L^2} = \tfrac{m}{Lt^2}\\ \dim(\mathbf{A}) &= = \rho\mathbf{b} = \tfrac{m}{L^3}\tfrac{L}{t^2} = \tfrac{m}{L^2t^2}\end{aligned}$$

अपसरण प्रमेय (समीकरण R.4) को स्मरण करें

$$\int_V v_{i,i}dV = \int_S \underbrace{v_i n_i}_{\text{flux}}\,dS$$

[58] किसी बंद पृष्ठ के पार सदिश फलन का अभिवाह, उस पृष्ठ से परिबद्ध आयतन पर उस फलन के अपसरण के समाकल के बराबर होता है। $t_i = T_{ij}n_j$ प्रतिस्थापित करके और अपसरण प्रमेय (समीकरण R.4) लगाने पर प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}\int_V \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i\right)\mathrm{d}V &= \int_V \rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V\\ \int_V \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}V &= 0\end{aligned}$$

अथवा किसी स्वेच्छ आयतन के लिए

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}$$

जो कॉशी का (प्रथम) गति समीकरण, अथवा रैखिक संवेग सिद्धांत, अथवा अधिक सरलतः संतुलन समीकरण है। त्रिविम (3D) और स्थैतिक समस्याओं के लिए इसका विस्तार करने पर प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 &= 0\\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 &= 0\\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 &= 0\end{aligned} \tag{O.8}$$

[2] अभिगृहीत: ऐसा कथन, जिसे स्वयंसिद्ध भी कहा जाता है और जिसे बिना प्रमाण के सत्य माना जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{T}} + \rho \underbrace{\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{O.9}$$

59 समीकरण (O.8) कॉशी के गति समीकरणों को निरूपित करता है। न्यूटनी (अश्यान) तरल के लिए प्रतिबल प्रदिश केवल अभिलंब प्रतिबल में सरल हो जाता है,

$$T_{ij} = \sigma\, \delta_{ij},$$

जहाँ σ (गतिक) अभिलंब प्रतिबल को और δ_{ij} क्रोनेकर डेल्टा को निरूपित करता है। फलतः,

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = \sigma, \qquad T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0.$$

60 इन संबंधों को समीकरण (O.8) में प्रतिस्थापित करने पर मिलता है

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \rho b_1 = \rho a_1, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \rho b_2 = \rho a_2, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} + \rho b_3 = \rho a_3,$$

जहाँ a_i कण के त्वरण के घटक हैं।

61 तरल कण विस्थापनों को प्रस्तुत करते हुए

$$a_1 = \ddot{\xi}, \qquad a_2 = \ddot{\eta}, \qquad a_3 = \ddot{\zeta},$$

और यह ध्यान रखते हुए कि द्रवगतिक सूत्रीकरण में गुरुत्व को स्थैतिक द्रवस्थैतिक क्षेत्र में सम्मिलित किया जाता है (अतः वृद्धिशील समस्या के लिए $b_i = 0$), समीकरण निम्न रूप में सरल हो जाते हैं

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \rho \ddot{\xi}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \rho \ddot{\eta}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} = \rho \ddot{\zeta}.$$

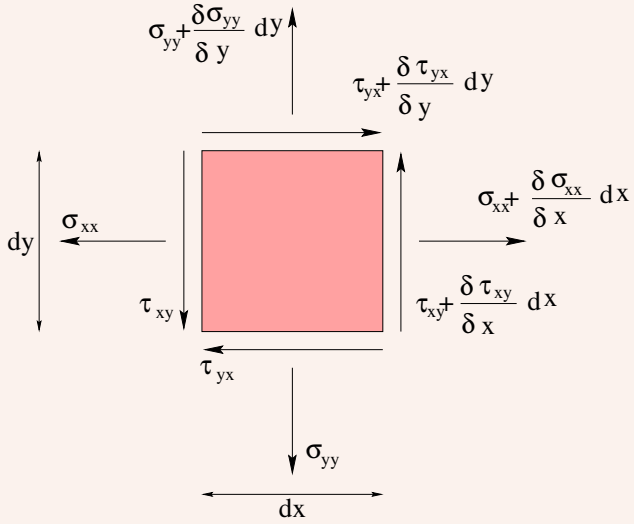
62 अंततः, $w = \rho g$ का उपयोग करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

जो द्रवगतिक विश्लेषण में प्रयुक्त संबंध हैं।

63 ध्यान दें कि इन समीकरणों को संतुलन की धारणा (न्यूटन के द्वितीय नियम द्वारा) के साथ $\mathrm{d}x_1 \times \mathrm{d}x_2 \times \mathrm{d}x_3$ विमाओं वाले सूक्ष्म अवयव के मुक्त-पिंड आरेख से भी व्युत्पन्न किया जा सकता था, चित्र O.9।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र O.9: प्रतिबलों का संतुलन, कार्तीय निर्देशांक

O.3.5 ऊर्जा संरक्षण; ऊष्मागतिकी का प्रथम सिद्धांत

64 ऊष्मागतिकी का प्रथम सिद्धांत किसी (बंद) तंत्र पर किए गए कार्य और तंत्र में ऊष्मा अंतरण को तंत्र की ऊर्जा में परिवर्तन से संबद्ध करता है। हम मानेंगे कि तंत्र में ऊर्जा अंतरण केवल पृष्ठीय कर्षण एवं पिंड बलों द्वारा तंत्र पर किए गए यांत्रिक कार्य और सीमा के पार ऊष्मा अंतरण से होते हैं।

65 यदि केवल यांत्रिक राशियों पर विचार किया जाए, तो सातत्य के लिए ऊर्जा संरक्षण सिद्धांत को समीकरण O.8 में दिए गति समीकरण से सीधे व्युत्पन्न किया जा सकता है। इसके लिए आयतन V पर समीकरण O.8 और वेग v_i के अदिश गुणनफल का समाकल लिया जाता है।

$$\int_V \rho v_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \int_V v_i T_{ji,j}\mathrm{d}V + \int_V \rho b_i v_i \mathrm{d}V$$

बाएँ पक्ष पर विचार करें

$$\int_V \rho v_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v_i v_i \mathrm{d}V = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v^2 \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}$$

जो सातत्य में गतिज ऊर्जा K के परिवर्तन की समय-दर को निरूपित करता है।

66 यदि ऊष्मीय प्रक्रियाओं पर विचार करें, तो सातत्य में कुल ऊष्मा की वृद्धि-दर निम्न है

$$Q = -\int_S q_i n_i \mathrm{d}S + \int_V \rho r \mathrm{d}V$$

Q की विमा शक्ति की है[3], अर्थात ML^2T^{-3}, और इसकी SI इकाई वाट (W) है। $\mathbf{q}$ चालन द्वारा प्रति इकाई क्षेत्रफल ऊष्मा अभिवाह है; इसकी विमा MT^{-3} और संगत SI इकाई Wm^{-2} है। अंततः, r

[3] कार्य=$FL = ML^2T^{-2}$; शक्ति=कार्य/समय

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रति इकाई द्रव्यमान विकिरण ऊष्मा नियतांक है; इसकी विमा $MT^{-3}L^{-4}$ और संगत SI इकाई Wm^{-6} है। अतः

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}+\int_V D_{ij}T_{ij}\mathrm{d}V=\int_V (v_iT_{ji})_{,j}\mathrm{d}V+\int_V \rho v_i b_i\mathrm{d}V+Q$$

67 अब दाहिने पक्ष के प्रथम समाकल को अपसरण प्रमेय (समीकरण R.4) द्वारा पृष्ठीय समाकल में बदलते हैं; चूँकि $t_i=T_{ij}n_j$, अतः प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}+\int_V D_{ij}T_{ij}\mathrm{d}V &= \int_S v_i t_i\mathrm{d}S+\int_V \rho v_i b_i\mathrm{d}V+Q\\ \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+Q\end{aligned}$$

68 यह समीकरण बाएँ पक्ष पर सातत्य की कुल यांत्रिक ऊर्जा के परिवर्तन की समय-दर को दाहिने पक्ष पर पृष्ठीय और पिंड बलों द्वारा किए गए कार्य की दर से संबद्ध करता है।

69 यदि यांत्रिक और अयांत्रिक दोनों ऊर्जाओं पर विचार किया जाए, तो प्रथम सिद्धांत कहता है कि *गतिज तथा आंतरिक ऊर्जा के योग के परिवर्तन की समय-दर, कार्य की दर और प्रति इकाई समय सातत्य को प्रदान की गई अथवा उससे निकाली गई अन्य सभी ऊर्जाओं (ऊष्मीय, रासायनिक, विद्युतचुंबकीय, आदि) के योग के बराबर है।* ऊष्मायांत्रिक सातत्य के लिए आंतरिक ऊर्जा के परिवर्तन की समय-दर को निम्न समाकल व्यंजक से व्यक्त करना प्रचलित है

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \rho u\mathrm{d}V$$

जहाँ u प्रति इकाई द्रव्यमान आंतरिक ऊर्जा अथवा विशिष्ट आंतरिक ऊर्जा है। ध्यान दें कि प्रथम सिद्धांत में U केवल अवकल के रूप में आता है; अतः यदि इस राशि का वास्तविक मूल्यांकन करना हो, तो ऐसा संदर्भ मान आवश्यक है जिसके लिए U शून्य हो।

70 U की विमा ऊर्जा की है: $\dim\ U=ML^2T^{-2}$, और SI इकाई जूल है। इसी प्रकार $\dim\ u=L^2T^{-2}$ तथा SI इकाई जूल/Kg है।

71 ऊर्जा समाकलों के रूप में प्रथम सिद्धांत को पुनः निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\overbrace{\underbrace{\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v_i v_i\mathrm{d}V}_{\frac{dK}{dt}=\dot{K}}+\underbrace{\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \rho u\mathrm{d}V}_{\frac{dU}{dt}=\dot{U}}}^{\text{Rate of increase}} = \underbrace{\overbrace{\int_S t_i v_i\mathrm{d}S}^{\text{Exchange}}+\overbrace{\int_V \rho v_i b_i\mathrm{d}V}^{\text{Source}}}_{\frac{dW}{dt}(\mathcal{P}_{ext})} + \underbrace{\overbrace{\int_V \rho r\mathrm{d}V}^{\text{Source}}-\overbrace{\int_S q_i n_i\mathrm{d}S}^{\text{Exchange}}}_{Q(\mathcal{P}_{cal})}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अथवा

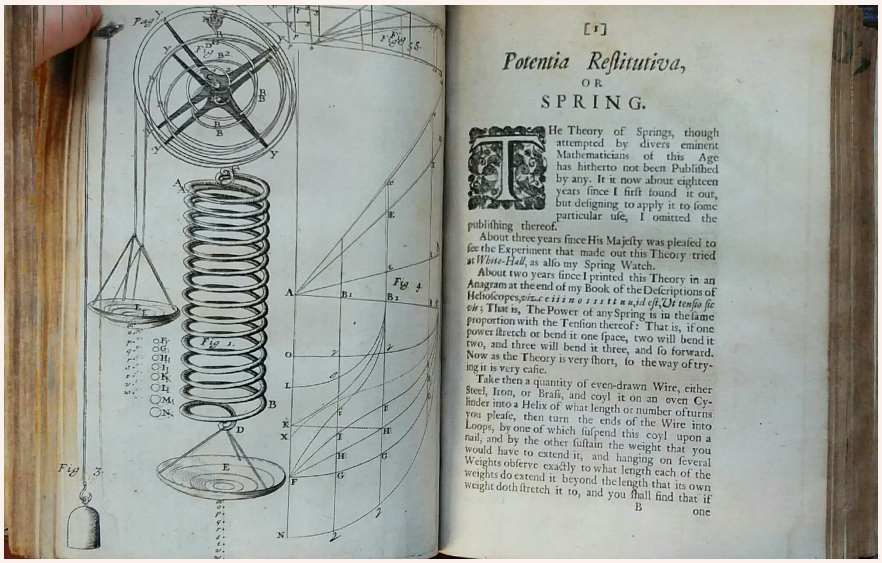
$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + Q \tag{O.10}$$

72 आदर्श प्रत्यास्थता में ऊष्मा अंतरण को नगण्य माना जाता है और समस्त आगत कार्य को पुनर्प्राप्य संचित प्रत्यास्थ विकृति ऊर्जा के रूप में आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तित माना जाता है, जिसे पिंड का भार हटाने पर कार्य के रूप में पुनः प्राप्त किया जा सकता है।

73 किंतु सामान्यतः विरूपित होते द्रव्य में आगत कार्य का अधिकांश भाग पुनर्प्राप्य रूप से संचित नहीं होता, बल्कि विरूपण प्रक्रिया में क्षयित होकर पिंड का तापमान बढ़ाता है और अंततः ऊष्मा के रूप में चालित होकर बाहर निकल जाता है।

O.4 संघटक समीकरण

74 हुक[4] ने 1676 में एक वर्णविपर्यय *c.e.i.i.n.o.s.s.t.t.u.u* प्रकाशित किया। केवल 1678 में उन्होंने इसकी कुंजी (लैटिन में) *ut tensio, sic vis* प्रकाशित की, जिसका अर्थ है “जितना विस्तार, उतना बल।” उन्हीं के शब्दों में: *किसी भी कमानी की शक्ति उसके तनाव के समानुपाती होती है: अर्थात यदि एक शक्ति उसे एक दूरी तक खींचती अथवा मोड़ती है, तो दो शक्तियाँ उसे दो दूरी तक और तीन शक्तियाँ तीन दूरी तक मोड़ेंगी, और इसी प्रकार आगे*, चित्र O.10। वास्तव में कहा गया था कि हुक को “बहुत कम और बहुत देर से जाना गया।”


[1]

Potentia Reſtitutiva,
OR
SPRING.

THE Theory of Springs, though attempted by divers eminent Mathematicians of this Age has hitherto not been Publiſhed by any. It is now about eighteen years ſince I firſt found it out, but deſigning to apply it to ſome particular uſe, I omitted the publiſhing thereof.

About three years ſince His Majeſty was pleaſed to ſee the Experiment that made out this Theory tried at *White-Hall*, as alſo my Spring Watch.

About two years ſince I printed this Theory in an Anagram at the end of my Book of the Deſcriptions of Heliſcopes, *viz. c e i i i n n o s s s t t u u, id eſt, Ut tenſio ſic vis*; That is, The Power of any Spring is in the ſame proportion with the Tenſion thereof: That is, if one power ſtretch or bend it one ſpace, two will bend it two, and three will bend it three, and ſo forward. Now as the Theory is very ſhort, ſo the way of trying it is very eaſie.

Take then a quantity of even-drawn Wire, either Steel, Iron, or Braſs, and coyl it on an even Cylinder into a Helix of what length or number of turns you pleaſe, then turn the ends of the Wire into Loops, by one of which ſuſpend this coyl upon a nail, and by the other ſuſtain the weight that you would have to extend it, and hanging on ſeveral Weights obſerve exactly to what length each of the weights do extend it beyond the length that its own weight doth ſtretch it to, and you ſhall find that if

B one

चित्र O.10: कमानियों पर हुक के व्याख्यान की पट्टिका

75 इसके बाद हुक प्रत्यास्थता के निर्विवाद जनक बन गए।

[4] न्यूटन के समकालीन हुक अत्यंत गोपनीय, कटु और ईर्ष्यालु थे (सालिएरी और मोत्सार्ट की भाँति), क्योंकि उनका मानना था कि अनेक खोजों का श्रेय उन्हें नहीं दिया गया।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

O.4.1 सामान्य त्रिविम (3D) अवस्था

76 सामान्यीकृत हुक नियम को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad i,j,k,l = 1,2,3 \tag{O.11}$$

77 प्रत्यास्थ नियतांकों के (चतुर्थ-कोटि) प्रदिश D_{ijkl} के 81 (3^4) घटक होते हैं; किंतु $\boldsymbol{\sigma}$ और $\boldsymbol{\varepsilon}$, दोनों की सममिति के कारण अधिकतम 36 $\left(\frac{9(9-1)}{2}\right)$ पृथक प्रत्यास्थ पद होते हैं।

78 हुक नियम लिखने के लिए द्वि-सूचकांक तंत्र को प्रायः छह के परिसर वाले सरल सूचकांक तंत्र से प्रतिस्थापित किया जाता है:

$$\sigma_k = \overbrace{D_{km}}^{6^2=36}\,\varepsilon_m \qquad k,m = 1,2,3,4,5,6$$

79 लामे नियतांकों के पदों में समदैशिक पिंड के लिए हुक नियम निम्न प्रकार लिखा जाता है

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \lambda\delta_{ij}E_{kk} + 2\mu E_{ij} && \text{or} \quad \mathbf{T} = \lambda\mathbf{I}_E + 2\mu\mathbf{E} \\ E_{ij} &= \frac{1}{2\mu}\left(T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\delta_{ij}T_{kk}\right) && \text{or} \quad \mathbf{E} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\mathbf{I}_T + \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} \end{aligned}$$

80 अभियांत्रिकी नियतांकों के पदों में:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

81 इसी प्रकार x_1x_3 और x_2x_3 तलों में शुद्ध अपरूपण के लिए हमारे पास है

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = \sigma_{12} &= \tau \quad \text{all other} \quad \sigma_{ij} = 0 \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{\tau}{G} \end{aligned}$$

और μ अपरूपण मापांक G के बराबर है। अभियांत्रिकी नियतांकों के पदों में समदैशिक द्रव्य के लिए हुक नियम बनता है

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{I}_\varepsilon\right) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\mathbf{I}_\sigma \end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

82 विकृति समीकरण को त्रिविम (3D) कार्तीय निर्देशांकों में विस्तारित करने पर प्राप्त होता है:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy}(2\varepsilon_{xy}) \\ \gamma_{yz}(2\varepsilon_{yz}) \\ \gamma_{zx}(2\varepsilon_{zx}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

83 इस समीकरण को प्रतिलोमित करने पर प्राप्त होता है

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy}(2\varepsilon_{xy}) \\ \gamma_{yz}(2\varepsilon_{yz}) \\ \gamma_{zx}(2\varepsilon_{zx}) \end{Bmatrix} \tag{O.12}$$

O.4.2 अनुप्रस्थ समदैशिक अवस्था

84 अनुप्रस्थ समदैशिक द्रव्य के लिए प्रतिबल-विकृति संबंध को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{11}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{zz} &= a_{13}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + a_{33}\sigma_{zz} \\ \gamma_{xy} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= a_{44}\tau_{xz} \end{aligned}$$

और

$$a_{11} = \frac{1}{E}; \qquad a_{12} = -\frac{\nu}{E}; \qquad a_{13} = -\frac{\nu'}{E'}; \qquad a_{33} = -\frac{1}{E'}; \qquad a_{44} = -\frac{1}{\mu'}$$

जहाँ E समदैशिकता के तल में यंग मापांक और E' उसके अभिलंब तल में यंग मापांक है। जब तल में तनन लगाया जाता है, तब ν समदैशिकता के तल में अनुप्रस्थ संकुचन के अनुरूप है; जब तल के अभिलंब तनन लगाया जाता है, तब ν' समदैशिकता के तल में अनुप्रस्थ संकुचन के अनुरूप है; μ' समदैशिकता के तल और उसके अभिलंब किसी भी तल के अपरूपण मापांक के अनुरूप है, तथा μ समदैशिकता के तल का अपरूपण मापांक है।

O.4.3 विशेष द्विविम (2D) अवस्थाएँ

85 प्रायः सरलीकारी धारणाओं द्वारा त्रिविम (3D) समस्या को द्विविम (2D) समस्या में बदला जा सकता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

समतल विकृति z दिशा में लंबे पिंड वाली उन समस्याओं के लिए, जिनमें भार अथवा ज्यामिति में कोई परिवर्तन नहीं है, $\varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$। अतः समीकरण O.12 में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{ccc} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ \nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$$

अक्षसममिति घूर्णन ठोसों में ध्रुवीय निर्देशांक तंत्र का उपयोग किया जा सकता है और

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned}$$

संघटक संबंध पुनः त्रिविम (3D)/समतल विकृति के अनुरूप है

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{rz} \end{array} \right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{cccc} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{array} \right\}$$

समतल प्रतिबल यदि z दिशा में अनुदैर्ध्य विमा, x और y दिशाओं की तुलना में बहुत छोटी हो , तो संपूर्ण मोटाई में $\tau_{yz} = \tau_{xz} = \sigma_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$। पुनः समीकरण O.12 में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} &= \frac{1}{1-\nu^2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{1}{1-\nu} \nu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \end{aligned}$$

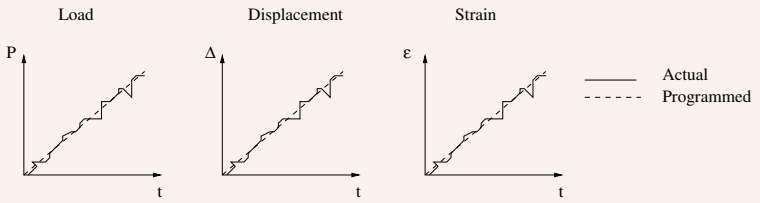
O.5 परिघटनात्मक प्रेक्षण

[86] हम विभंग परीक्षण और कंक्रीट की अनुक्रिया से संबद्ध कुछ सामान्य परिघटनात्मक पहलुओं की संक्षिप्त चर्चा करते हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

O.5.1 भार, विस्थापन और विकृति-नियंत्रित परीक्षण

87 कंक्रीट के रैखिक और अरैखिक विभंग यांत्रिकी पर आगे बढ़ने से पहले यह आवश्यक है कि पाठक परीक्षण के दौरान नमूने को एकसमान तनन भार, विस्थापन नियंत्रण अथवा विकृति नियंत्रण में रखने पर द्रव्य और संरचना की अनुक्रियाओं के अंतर को समझे। आधुनिक परीक्षण उपकरणों को भार (भार-कोशिका से मापा गया), विस्थापन (आंतरिक विस्थापन पारक्रमित्र से मापा गया), अथवा विकृति (विकृति/क्लिप गेज अथवा अन्य उपकरणों से मापी गई) की पूर्वनिर्धारित दर लगाने के लिए क्रमादेशित किया जा सकता है, चित्र O.11



चित्र O.11: परीक्षण नियंत्रण

भार नियंत्रण: अनुप्रस्थ शीर्ष नमूने के विरूपण अथवा अनुक्रिया से स्वतंत्र बढ़ता हुआ भार लगाता है। सभी द्रव्यों में तनन सामर्थ्य पहुँचने पर अचानक भंगुर विफलता होती है। नमूने में संचित विकृति ऊर्जा, नमूने का चरम भार प्राप्त होते ही अचानक मुक्त हो जाती है; अतः यह आकस्मिक विफलता विस्फोटक हो सकती है।

विस्थापन/स्ट्रोक नियंत्रण: अनुप्रस्थ शीर्ष नमूने पर बढ़ता हुआ विस्थापन लगाता है। मृदुकरण द्रव्य में विस्थापन बढ़ने के साथ प्रतिबल धीरे-धीरे घटता है और चरमोत्तर अनुक्रिया प्राप्त होती है। इस स्थिति में विकृति ऊर्जा क्रमशः मुक्त होती है और दरार निर्माण के दौरान पृष्ठीय ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है।

विकृति नियंत्रण: यह विस्थापन नियंत्रण के अनुरूप है, अंतर केवल इतना है कि पुनर्निवेशन संकेत ("रणनीतिक रूप से स्थित") विकृति गेज, क्लिप गेज अथवा नमूने के किसी स्वेच्छ विरूपण (जो आवश्यक नहीं कि भार दिशा के अनुरूप हो) से प्राप्त होता है। इस परीक्षण के लिए क्लिप गेज अथवा विकृति गेज को परीक्षण उपकरण को पुनर्निवेशन संकेत देना पड़ता है ताकि स्ट्रोक को उसके अनुसार समायोजित किया जा सके।

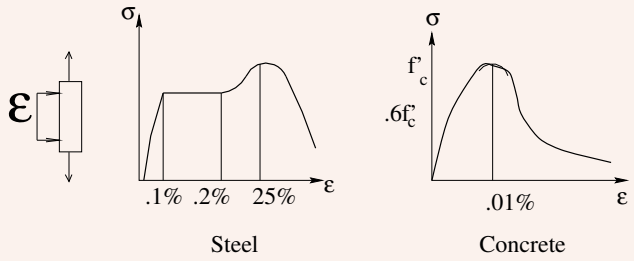
88 अधिकांश कंक्रीट विभंग परीक्षण विकृति नियंत्रण में किए जाते हैं, जिसमें दरार के मुख पर स्थित गेज नमूने की अनुक्रिया प्रदान करता है।

89 स्ट्रोक और विकृति, दोनों नियंत्रित परीक्षणों के लिए बंद-पाश प्रायोगिक व्यवस्था आवश्यक होती है, जो सामान्यतः महँगी है और हाल तक व्यापक रूप से उपलब्ध नहीं थी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

O.5.2 इस्पात और कंक्रीट की चरम-पूर्व/चरमोत्तर द्रव्य अनुक्रिया

90 कंक्रीट विभंग के परिचय के रूप में धातुओं और कंक्रीट की चरम-पूर्व तथा चरमोत्तर अनुक्रियाओं की तुलना करें, जैसा चित्र O.12 में दर्शाया गया है; दोनों परिणाम बिना दरार अथवा खाँचे वाले नमूने के विकृति-नियंत्रित परीक्षण से प्राप्त हुए हैं।



चित्र O.12: धातुओं और कंक्रीट के प्रतिबल-विकृति वक्र

1. **चरम-पूर्व**:

   (a) धातु पराभव प्रतिबल σ_{yld} और लगभग 0.1% विकृति तक रैखिक प्रत्यास्थ अनुक्रिया प्रदर्शित करती है। इसके बाद आंतरिक विस्थापन-सुघट्य विरूपण के कारण 25% तक विकृति हो सकती है, जिसके पश्चात विकृति कठोरीकरण होता है।

   (b) कंक्रीट लगभग $0.6 f_t'$ तक रैखिक अनुक्रिया प्रदर्शित करता है। इसके बाद आंतरिक सूक्ष्म-दरारें चरम प्रतिबल f_t' और लगभग 0.01% की संगत विकृति तक अरैखिक अनुक्रिया उत्पन्न करती हैं।

   भार नियंत्रण में केवल चरम-पूर्व अनुक्रिया मापी जा सकती है।

2. **चरमोत्तर**:

   (a) चरमोत्तर क्षेत्र में धातुओं की अनुक्रिया अभी पूर्णतः समझी नहीं गई है। वह न केवल व्यावहारिक उपयोग की नहीं है, बल्कि नेकिंग से भी बड़े स्तर पर आच्छादित रहती है।

   (b) चरमोत्तर क्षेत्र में कंक्रीट की अनुक्रिया विशेष रूप से रोचक है, क्योंकि वह अतिरिक्त विकृतियाँ प्रदर्शित कर सकती है। चित्र O.12 में कंक्रीट अनुक्रिया की अवरोही शाखा औसत द्रव्य अनुक्रिया का आदर्शीकरण है। अधिक यथार्थ वर्णन में उत्पन्न दरारों के स्थानीयकरण को सम्मिलित करना चाहिए। अतः स्थानीयकृत दरार से दूर प्रत्यास्थ भारमुक्ति होती है और दरार पर, जहाँ विकृति को उचित रूप से परिभाषित नहीं किया जा सकता, प्रतिबल-दरार-मुख विस्थापन अधिक उपयुक्त प्रतिरूप है। इसकी चर्चा अगले अनुभाग में होगी।

   चरमोत्तर अनुक्रियाएँ केवल विस्थापन अथवा विकृति-नियंत्रित परीक्षणों में प्राप्त की जा सकती हैं।

91 दोनों ही स्थितियों में प्रतिबल-विकृति वक्र के नीचे का क्षेत्र उस ऊर्जा को निरूपित करता है जिसे

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

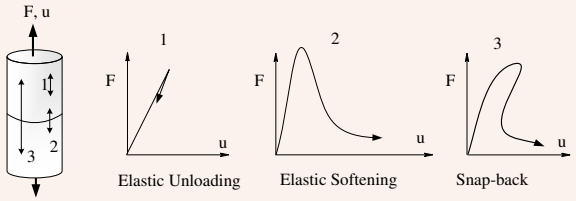
इकाई विभंग पृष्ठ अवशोषित कर सकता है; अतः कंक्रीट धातुओं की तुलना में अधिक भंगुर अनुक्रिया प्रदर्शित करेगा।

92 प्रयोगों से यह देखने के बाद कि कंक्रीट की स्थूल अनुक्रिया मृदुकरण दर्शाती है, और धातुओं की तन्य अनुक्रिया को आंतरिक विस्थापनों से संबद्ध करने के बाद अगला प्रश्न उठता है: कंक्रीट का मृदुकरण क्यों होता है?

O.6 विरूपण का स्थानीयकरण

O.6.1 प्रायोगिक साक्ष्य

93 यदि तनन भार F से एकाक्षीय रूप से भारित कंक्रीट नमूने पर विचार करें, तो विन्यास 1, 2 अथवा 3 में लगाए गए LVDT (रैखिक परिवर्ती विस्थापन पारक्रमित्र) से दीर्घन अभिलिखित किया जा सकता है, चित्र O.13।



चित्र O.13: एकाक्षीय भारित कंक्रीट नमूनों में स्थानीयकरण का प्रायोगिक अभिलेखन

94 चरम भार प्राप्त होने और दरार आरंभ होने पर पारक्रमित्र 1 प्रत्यास्थ भारमुक्ति, 2 विकृति मृदुकरण और 3 स्नैप-बैक अभिलिखित करेगा।

95 यदि $\sigma = F/A$ और $\varepsilon = u/L$ लेकर समांगीकरण किया जाए, तो स्पष्ट है कि दरार के आर-पार विकृति की एकल परिभाषा नहीं दी जा सकती। इस स्थान पर विकृति को अब परिभाषित नहीं किया जा सकता; इसके स्थान पर दरार को उसके दरार-मुख विस्थापन COD से अभिलक्षित करना चाहिए, जिसे प्रतिबल के साथ (σ-COD) आलेखित किया जाएगा।

96 नियंत्रित विस्थापन में दरार के आर-पार प्रतिबल संचारित करने की यह क्षमता मृदुकरण द्रव्यों की विशेषता है।

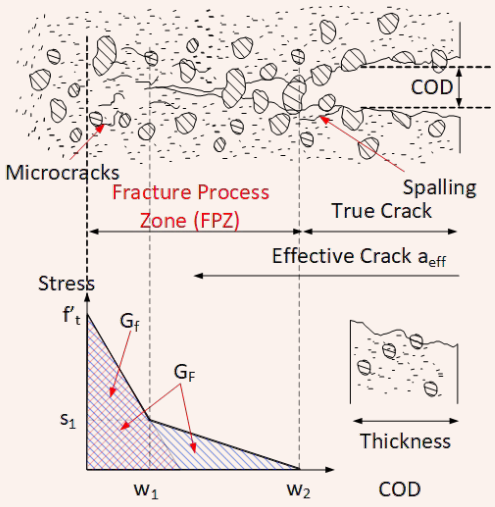
O.6.1.1 σ-cod आरेख, हिलरबोर्ग प्रतिरूप

97 पूर्ववर्ती चर्चा से स्पष्ट है कि कंक्रीट मृदुकरण को प्रतिबल-दरार-मुख चौड़ाई वक्र (न कि प्रतिबल-विकृति वक्र) से अभिलक्षित किया जाता है। मृदुकरण अनुक्रिया का यथार्थ अभिलक्षण आदर्शतः बिना दरार वाले नमूने के एकाक्षीय परीक्षण से प्राप्त किया जाना चाहिए। किंतु यह पाया गया है (Li and Liang, 1986; Hordijk, Reinhardt, and Cornelissen, 1989) कि ये परीक्षण न केवल अत्यंत संवेदनशील हैं, बल्कि भिन्न ज्यामितियों, आकारों और परीक्षण मशीनों से अत्यधिक भिन्न परिणाम मिल

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सकते हैं। अतः मृदुकरण वक्र प्रायः खाँचे वाले नमूनों के परीक्षण से अप्रत्यक्ष रूप से निर्धारित किया जाता है।

98 कंक्रीट के अरैखिक विभंग साहित्य में संभवतः सर्वाधिक उद्धृत कार्य में हिलरबोर्ग (Hillerborg, Modéer, and Petersson, 1976) ने 1976 में एक अत्यंत सरल और सुरुचिपूर्ण प्रतिरूप प्रस्तुत किया, जिसका गुणात्मक वर्णन पहले किया जा चुका है। इस प्रतिरूप में दरार दो भागों से बनी है, चित्र O.14:



चित्र O.14: हिलरबोर्ग का काल्पनिक दरार प्रतिरूप

1. वास्तविक अथवा भौतिक दरार, जिसके आर-पार कोई प्रतिबल संचारित नहीं हो सकता। इस क्षेत्र में विस्थापन और प्रतिबल, दोनों में असातत्य होता है।
2. काल्पनिक दरार अथवा विभंग प्रक्रिया क्षेत्र (FPZ), जो पूर्ववर्ती दरार के आगे होता है और निम्न से अभिलक्षित है:

   (a) इसके अग्रभाग पर चरम प्रतिबल कंक्रीट के तनन सामर्थ्य के बराबर होता है

   (b) काल्पनिक दरार के अग्रभाग पर f_t' से भौतिक दरार के अग्रभाग पर शून्य तक घटता हुआ प्रतिबल वितरण

   ध्यान दें कि FPZ के अनुदिश विस्थापन में असातत्य और प्रतिबल में सातत्य होता है।

99 यह प्रतिरूप अरैखिक विभंग यांत्रिकी के परिमित अवयव विश्लेषण में सर्वाधिक प्रयुक्त प्रतिरूपों में से है; किंतु संगणनात्मक जटिलता के कारण केवल कुछ "अभियांत्रिकी" संरचनाओं का विश्लेषण किया गया है। इसके अतिरिक्त,

1. अवरोही शाखा में एक नति-परिवर्तन बिंदु होता है।

   (a) प्रथम भाग को प्रतिबल-मुक्त दरार के आगे (असंयुक्त) सूक्ष्म-दरारों से संबद्ध किया गया है

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

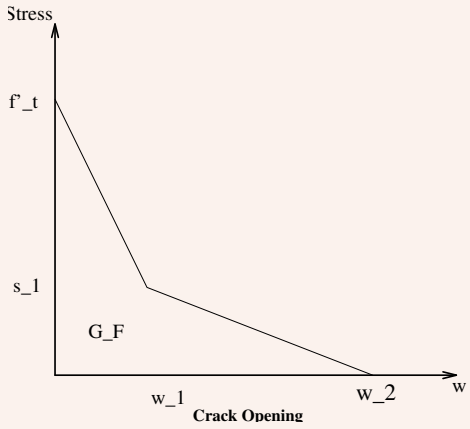
(b) द्वितीय भाग को गिट्टियों द्वारा दरार सेतुकरण से संबद्ध किया गया है

2. वक्र के नीचे का क्षेत्र, जिसे विभंग ऊर्जा G_F कहा जाता है (G_c अथवा क्रांतिक ऊर्जा विमोचन दर से भ्रमित न करें), दरार का इकाई पृष्ठ उत्पन्न करने में व्यय होने वाली ऊर्जा का माप है।
3. अनेक परीक्षण आँकड़ों के विश्लेषण से Bažant (बाज़ांत) और ओह (Bažant, 1984) ने पाया कि G_F का पूर्वानुमान (लगभग 16% परिवर्तन गुणांक के साथ) निम्न आनुभविक समीकरण से किया जा सकता है:

$$G_F = 0.0214(f_t' + 127) f_t'^2 \frac{d_a}{E_c} \tag{O.13}$$

जहाँ E_c और f_t' पाउंड प्रति वर्ग इंच में तथा d_a गिट्टी का आकार इंच में है।

4. G_F: अथवा विभंग ऊर्जा। गुरुत्व बाँधों के लिए 1.35×10^{-3} kip/in. का मान अनुशंसित है (Saouma et al., 1991)। ध्यान दें कि चाप बाँधों के लिए प्रयोगशाला परीक्षणों के आधार पर इस मान को संभवतः बढ़ाया जा सकता है। साथ ही, G_F का बेहतर संकेत पाने के लिए निकाले गए कोरों पर प्रयोगशाला परीक्षण किए जा सकते हैं (Brühwiler, E., 1988)।
5. मृदुकरण आरेख ($\sigma - COD$) का आकार; सामान्यतः विकृति मृदुकरण के लिए द्वि-रैखिक प्रतिरूप प्रयुक्त किया जाना चाहिए। चित्र O.15 के संदर्भ में, हाल के व्यापक अनुसंधान का विषय विभंग



चित्र O.15: कंक्रीट विकृति-मृदुकरण प्रतिरूप

ऊर्जा G_F का प्रायोगिक निर्धारण और उससे प्राप्त मृदुकरण आरेख का आकार रहा है (Cedolin, Dei Poli, and Iori, 1987; Petersson, 1981; Whitman et al., 1988; Jeang and Hawkins, 1985; Gopalaratnam and Shah, 1985; Duda, 1990; Giuriani and Rosati, 1986)। संख्यात्मक अनुकरणों पर G_F के यथार्थ मान और मृदुकरण वक्र के आकार की प्रासंगिकता आँकने के लिए विभंग प्रयोगों के तीन भिन्न समुच्चयों का औसत प्रतिवेदित विभंग ऊर्जा से विश्लेषण किया जाता है। मृदुकरण आरेख का आकार (Whitman et al., 1988) में प्रस्तावित द्वि-रैखिक रूप माना जाता है, चित्र O.15। इस सरल प्रतिरूप को तनन सामर्थ्य f_t' और विभंग

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

ऊर्जा G_F के पदों में अद्वितीय रूप से परिभाषित किया जा सकता है। (Brühwiler and Whitman, 1990) में पाया गया कि 1" अधिकतम आकार की गिट्टी वाले कंक्रीट के लिए इष्टतम बिंदु हैं:

$$s_1 = 0.4 f_t' \tag{O.14}$$

$$w_1 = 0.8 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.15}$$

$$w_2 = 3 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.16}$$

जबकि संरचनात्मक कंक्रीट के लिए (Whitman et al., 1988) संगत मान हैं:

$$s_1 = \frac{f_t'}{4} \tag{O.17}$$

$$w_1 = 0.75 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.18}$$

$$w_2 = 5 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.19}$$

जहाँ f_t' एकाक्षीय तनन सामर्थ्य है। अरैखिक विभंग यांत्रिकी विश्लेषण में इस तनन सामर्थ्य को शून्य नहीं लिया जा सकता, अन्यथा विभंग प्रक्रिया क्षेत्र नहीं होगा। चूँकि f_t' का प्रायोगिक निर्धारण विरल है, इसे f_c' का 9% माना जाता है (Mindess and Young, 1981)।

6. प्रत्यक्ष तनन परीक्षण के स्थान पर विकृति नियंत्रण में आनमनी परीक्षण किया जा सकता है और विभंग ऊर्जा G_F को भार तथा संगत विस्थापन वक्र के नीचे के क्षेत्र से निर्धारित किया जा सकता है।
7. गतिक विश्लेषण में बाँध कंक्रीट के विभंग गुण भारण दर और पूर्वभारण, दोनों पर निर्भर करते हैं। परीक्षण परिणाम (Brühwiler and Whitman, 1990) दर्शाते हैं कि भारण दर बढ़ने पर विभंग गुण सामान्यतः बढ़ते हैं। किंतु गतिक संपीडन पूर्वभारण, अर्ध-स्थैतिक और उच्च भारण दरों, दोनों पर विभंग गुणों को घटाता है।

O.7 सीमा प्रतिबंध

100 सामान्यतः सीमा प्रतिबंध नियंत्रक अवकल समीकरण (ठोस यांत्रिकी में संवेग संरक्षण अथवा संतुलन) के संगत ऑयलर-लाग्रांज समीकरणों से प्राप्त किए जा सकते हैं।

101 जिन क्षेत्र चरों के नियंत्रक अवकल समीकरण में उच्चतम अवकलज $2m$ कोटि का हो, उनके लिए (§47.2.6):

अनिवार्य (अथवा बलात्, अथवा ज्यामितीय) सीमा प्रतिबंध, यदि $\eta(a)$ अथवा $\eta(b)$ =0 (क्योंकि ऑयलर समीकरण की व्युत्पत्ति के लिए यह अनिवार्य था)। अनिवार्य सीमा प्रतिबंधों में शून्य कोटि (स्वयं क्षेत्र चर) से लेकर m-1 तक के अवकलज सम्मिलित होते हैं। गणितीय रूप से ये डिरिक्ले सीमा-मान समस्याओं के अनुरूप हैं।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका O.3: संरचनात्मक विश्लेषण में सीमा प्रतिबंधों के उदाहरण

समस्या	अक्षीय अवयव वितरित भार	आनमनी अवयव वितरित भार
अवकल समीकरण	$AE\frac{d^2u}{dx^2} - q = 0$	$EI\frac{d^4w}{dx^4} - q = 0$
m	1	2
अनिवार्य सीमा प्रतिबंध $[0, m-1]$	u	$w, \frac{dw}{dx}$
प्राकृतिक सीमा प्रतिबंध $[m, 2m-1]$	$\frac{du}{dx}$ अथवा $\sigma_{xx} = Eu_{,x}$	$\frac{d^2w}{dx^2}$ और $\frac{d^3w}{dx^3}$ अथवा $M = EIw_{,xx}$ और $V = EIw_{,xxx}$

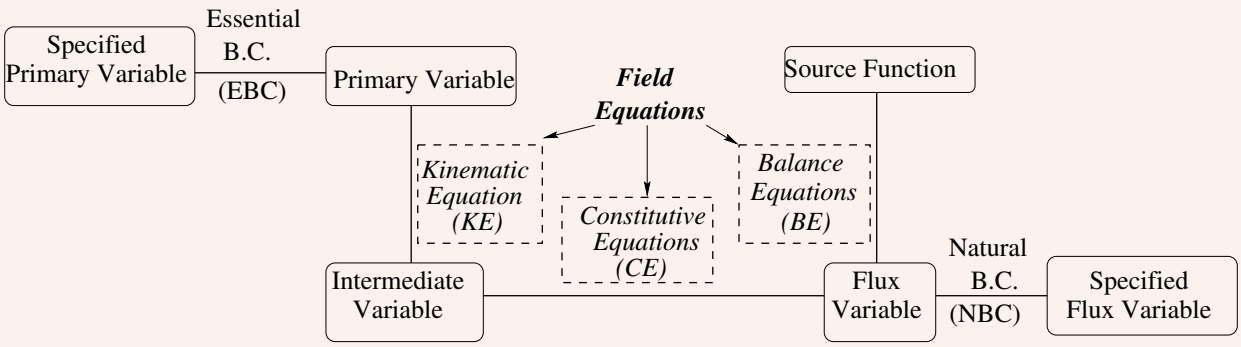
प्राकृतिक (अथवा स्थैतिक), यदि η को स्वेच्छ छोड़ा जाए, तो $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$ का उपयोग $x = a$ अथवा b पर आवश्यक होगा। प्राकृतिक सीमा प्रतिबंधों में m और उससे उच्च कोटि के अवकलज सम्मिलित होते हैं। गणितीय रूप से ये न्यूमान सीमा-मान समस्याओं के अनुरूप हैं।

मिश्रित सीमा-मान समस्याएँ, जिनमें सीमा के पूरक भागों (जैसे Γ_u और Γ_t) पर अनिवार्य और प्राकृतिक, दोनों सीमा प्रतिबंध निर्दिष्ट होते हैं। गणितीय रूप से ये तथाकथित रॉबिन सीमा-मान समस्याओं के अनुरूप हैं।

तालिका O.3 संरचनात्मक विश्लेषण के उदाहरण देती है।

O.8 टोंटी आरेख

102 इस सदिश क्षेत्र समस्या के लिए संगत टोंटी आरेख (चित्र O.16) चित्र O.17 में दर्शाया गया है।

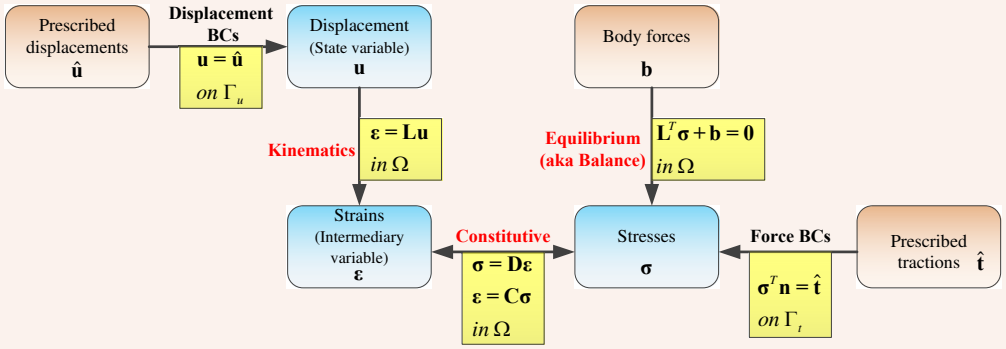


चित्र O.16: टोंटी आरेख के घटक (Felippa, 2000)

O.9 आंतरिक बल की संकल्पना

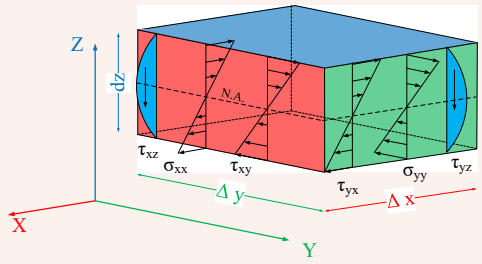
103 प्रतिबल और विकृति की मूल राशियों के पदों में विश्लेषण करना सदैव सरल नहीं होता; अतः उन्हें उनके समाकल मानों—*आंतरिक* बलों और विस्थापनों—से प्रतिस्थापित करना सुविधाजनक है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र O.17: विरूपणीय पिंडों के यांत्रिकी का टोंटी आरेख

104 हम *आंतरिक बलों* को प्रतिबलों के समाकल के रूप में परिभाषित करते हैं। पट्टों के लिए चित्र O.18 प्राप्त होता है और प्रति इकाई चौड़ाई परिणामी निम्न हैं



चित्र O.18: प्रतिबलों के पदों में आंतरिक बल

$$\text{Membrane (Axial) Forces} \quad \mathbf{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz \quad \rightarrow N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz \text{ etc.}$$

$$\text{Bending Moments} \quad \mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} z dz \quad \rightarrow M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz \text{ etc.}$$

$$\text{Transverse Shear Forces} \quad \mathbf{V} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\tau} dz \quad \rightarrow V_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz \text{ etc.}$$

प्रारूप प्रति

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

P वेस्टरगार्ड को श्रद्धांजलि

सारांश

मेरे विचार में वेस्टरगार्ड बीसवीं शताब्दी के संभवतः सर्वाधिक असाधारण अभियंता के रूप में विशिष्ट हैं। उनका दृष्टिकोण—जिसे केवल कुछ ही विभूतियों, विशेषतः स्टीफन तिमोशेंको, ने साझा किया—एक पाँव दृढतापूर्वक संरचनात्मक अभियांत्रिकी में और दूसरा संरचनात्मक यांत्रिकी में रखकर उन्नत यांत्रिकी तथा गणित के माध्यम से तत्काल व्यावहारिक महत्त्व की समस्याओं को हल करना था। यही द्वैत दृष्टि, जिसका पूर्व उदाहरण रैंकिन (§6.8.2) ने दिया, लंबे समय से मेरा अपना व्यावसायिक आदर्श रही है।

अतः यह मात्र संयोग नहीं है कि वेस्टरगार्ड ने दो मूलभूत समीकरण दिए—एक विभंग यांत्रिकी में और दूसरा बाँध अभियांत्रिकी में—और दोनों ही क्षेत्र मेरे अपने कार्य के निकट हैं।

इस बौद्धिक नायक को श्रद्धांजलि स्वरूप मैंने इस पुस्तक का एक परिशिष्ट उनकी दो सर्वाधिक प्रतिष्ठित व्युत्पत्तियों को समर्पित किया है।

पहली व्युत्पत्ति दरार के अग्रभाग पर प्रतिबल क्षेत्र का विश्लेषणात्मक समाधान प्रस्तुत करती है और औपचारिक रूप से एक नए विषय—विभंग यांत्रिकी—के जन्म को चिह्नित करती है। मैंने जानबूझकर इस व्युत्पत्ति को उसकी पूर्ण गणितीय कठोरता तक पहुँचाया है—यह दुर्बल हृदय वालों का कार्य नहीं—क्योंकि अभियंताओं को भी कभी-कभी रुककर उस गणितीय समाधान की सुंदरता को पहचानना चाहिए जिसे एक अत्यंत व्यावहारिक समस्या की सेवा में लगाया गया हो।

दूसरी व्युत्पत्ति में, जिसे उन्होंने हूवर बाँध के अभिकल्प पर Bureau of Reclamation के साथ सहयोग करते समय विकसित किया, वेस्टरगार्ड ने बाँध के फलक पर भूकंपीय गति से प्रेरित जलगतिक बलों के लिए अत्यंत सुरुचिपूर्ण व्यंजक प्राप्त किया।

दोनों प्रकरणों में यांत्रिकी और गणित पर वेस्टरगार्ड की अनुपम पकड़ स्पष्ट रूप से अभियांत्रिकी की सेवा में लगी—जिसने अमूर्त सिद्धांत को स्थायी व्यावहारिक महत्त्व के समाधानों में रूपांतरित किया।

P.1 दरार-अग्र प्रतिबल क्षेत्र 3074
P.1.1 एरी प्रतिबल फलन 3074
P.1.2 समाधान 3077
P.2 तरल-संरचना अंतःक्रिया 3082

P.1 दरार-अग्र प्रतिबल क्षेत्र

P.1.1 एरी प्रतिबल फलन

1 वेस्टरगार्ड के समाधान (Westergaard, 1933) को पूर्णतः समझने के लिए सर्वप्रथम सम्मिश्र चरों में व्यक्त एरी प्रतिबल फलनों का परिचय आवश्यक है। दरार-अग्र प्रतिबल तीव्रता गुणक की संपूर्ण व्युत्पत्ति का उसकी समस्त कठोरता, सूक्ष्मता और गणितीय लालित्य सहित अनुसरण करना एक प्रवीण यांत्रिकीविद् के मन से सीधे संवाद करना है। फिर भी यही बुद्धि एक व्यावहारिक अभियंता की भी थी, जो अमूर्त विश्लेषण को तात्कालिक व्यावहारिक समस्याओं के ठोस समाधानों में रूपांतरित कर सकता था—यह द्वैत अगले अनुभाग में स्पष्ट होगा।

2 प्रत्यास्थता समस्याओं में हम स्थानिक निर्देशांकों के पदों में ऐसा फलन खोजते हैं जो संतुलन और

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

सुसंगतता दोनों समीकरणों को संतुष्ट कर सके। एरी ने दर्शाया कि ऐसा फलन $\Phi(\mathbf{x})$ इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \, \partial x_2}. \tag{P.1}$$

यह दर्शाया जा सकता है (इन समीकरणों को समीकरण O.8 में सीधे प्रतिस्थापित करके) कि संतुलन समीकरण स्वतः संतुष्ट होता है।

रैखिक प्रत्यास्थ समदैशिक पदार्थों के लिए सुसंगतता समीकरण की संतुष्टि हेतु Φ का निम्न प्रकार होना भी आवश्यक है

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \Phi \right) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0 \tag{P.2}$$

जहाँ ∇^2 **लाप्लासीय संकारक** है। लाप्लास समीकरण के समाधान को **प्रसंवादी फलन** कहते हैं।

ध्रुवीय निर्देशांकों में

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \Phi \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right)$$

अतः एरी प्रतिबल फलन प्रत्यास्थता समस्याओं को हल करने में सक्षम बनाता है, बशर्ते Φ का ऐसा उचित चयन किया जा सके जो प्राकृतिक परिसीमा शर्तों (प्रतिबलों) को संतुष्ट करे।

सम्मिश्र चर

जैसा अगले अध्याय में दिखाया जाएगा, वृत्ताकार छिद्र के चारों ओर प्रतिबल क्षेत्र निर्धारित करने के लिए एरी प्रतिबल फलन का वास्तविक चरों के साथ उपयोग किया जा सकता है। किंतु 1) दीर्घवृत्ताकार छिद्र (इंग्लिस) के चारों ओर प्रतिबलों तथा दरार-अग्र (वेस्टरगार्ड) पर प्रतिबलों का विश्लेषण करने हेतु एरी प्रतिबल फलनों को सम्मिश्र चरों तक विस्तारित करना आवश्यक है।

सर्वप्रथम सम्मिश्र संख्या z को इस प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$z = x_1 + i x_2 = r e^{i\theta}$$

जहाँ $i = \sqrt{-1}$, x_1 तथा x_2 कार्तीय निर्देशांक हैं और r तथा θ ध्रुवीय निर्देशांक हैं।

आगे हम **वैश्लेषिक फलन** $f(z)$ को ऐसे फलन के रूप में परिभाषित करते हैं जिसके अवकलज केवल z पर निर्भर करते हैं। शृंखला नियम लगाने पर

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \, \frac{\partial z}{\partial x_1} = f'(z) \, \frac{\partial z}{\partial x_1} = f'(z) \tag{P.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \, \frac{\partial z}{\partial x_2} = f'(z) \, \frac{\partial z}{\partial x_2} = i f'(z) \tag{P.4}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

9 यदि $f(z) = \alpha + i\beta$, जहाँ α और β, x_1 तथा x_2 के वास्तविक फलन हैं, और $f(z)$ वैश्लेषिक है, तो समीकरण P.3 तथा P.4 से:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(z)}{\partial x_1} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_1} = f'(z),\\ \frac{\partial f(z)}{\partial x_2} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_2} = if'(z)\end{aligned}\right\} \quad \underbrace{i\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right)}_{i\ 1^{st}\ \text{समीकरण}} = \underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + i\frac{\partial \beta}{\partial x_2}}_{2^{nd}\ \text{समीकरण}}$$

10 वास्तविक और काल्पनिक भागों को बराबर करने पर **कॉशी-रीमान** समीकरण प्राप्त होते हैं:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial \beta}{\partial x_2};\quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = -\frac{\partial \beta}{\partial x_1}$$

11 यदि इन दोनों समीकरणों का पहले x_1 और फिर x_2 के सापेक्ष अवकलन करके उन्हें जोड़ें, तो प्राप्त होता है

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} = 0 \qquad \text{or} \qquad \nabla^2(\alpha) = 0$$

जो लाप्लास समीकरण है।

12 इसी प्रकार:

$$\nabla^2(\beta) = 0$$

अतः किसी वैश्लेषिक फलन का वास्तविक भाग (α) और काल्पनिक भाग (β), दोनों अलग-अलग लाप्लास समीकरण का समाधान देते हैं तथा α और β **संयुग्मी प्रसंवादी फलन** हैं।

सम्मिश्र एरी प्रतिबल फलन

13 यह दर्शाया जा सकता है कि किसी भी प्रतिबल फलन को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\Phi = \mathrm{Re}[(x_1 - ix_2)\psi(z) + \chi(z)] \tag{P.5}$$

बशर्ते $\psi(z)$ (psi) और $\chi(z)$ (chi), दोनों x_1 तथा x_2 के प्रसंवादी (अर्थात् $\nabla^2(\psi) = \nabla^2(\chi) = 0$) वैश्लेषिक फलन हों। ψ और χ को प्रायः कोलोनोव-मुस्खेलिशिवली सम्मिश्र विभव कहते हैं।

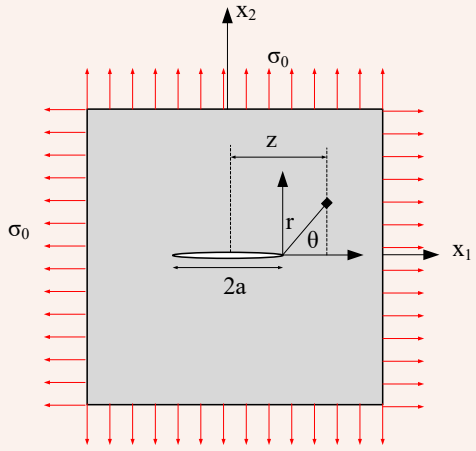
14 यदि $f(z) = \alpha + i\beta$ और α तथा β दोनों वास्तविक हैं, तो इसका संयुग्मी फलन इस प्रकार परिभाषित है:

$$\bar{f}(\bar{z}) = \alpha - i\beta$$

15 ध्यान दें कि संयुग्मी फलनों को संयुग्मी प्रसंवादी फलनों से भ्रमित नहीं करना चाहिए। अतः समीकरण P.5 को पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\Phi = \mathrm{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)]$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र P.1: अनंत पट्टिका में दरार

16 समीकरण P.1.1 को समीकरण P.1 में प्रतिस्थापित करके प्रतिबल निर्धारित किए जा सकते हैं

$$\begin{aligned} \sigma_{11}+\sigma_{22} &= 4\mathrm{Re}\psi'(z) \\ \sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\psi''(z)+\chi''(z)] \end{aligned} \tag{P.6}$$

और वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को अलग करके $\sigma_{22}-\sigma_{11}$ & σ_{12} को हल किया जा सकता है।

17 विस्थापन भी इसी प्रकार प्राप्त किए जा सकते हैं।

P.1.2 समाधान

18 Kirsch, 1898 ने वृत्ताकार छिद्र के चारों ओर प्रतिबल सांद्रण का व्यंजक विकसित किया और बाद में Inglis, 1913 ने दीर्घवृत्ताकार छिद्र के लिए उसका समकक्ष व्यंजक व्युत्पन्न किया; किंतु तीक्ष्ण दरार के अग्रभाग पर प्रतिबल क्षेत्र का व्यंजक Westergaard, 1933 ने व्युत्पन्न किया।

19 एक अनंत पट्टिका पर विचार करें, जिस पर एकसमान द्विअक्षीय प्रतिबल σ_0 लगा है और जिसके केंद्र में लंबाई $2a$ की दरार है, चित्र P.1। इंग्लिस समाधान से ज्ञात है कि दरार-अग्र पर सैद्धांतिक रूप से अनंत प्रतिबल होगा, किंतु उससे न तो विचित्रता की प्रकृति और न ही प्रतिबल क्षेत्र व्युत्पन्न किया जा सकता है।

20 वेस्टरगार्ड का समाधान (Westergaard, 1933), $\Phi(z)$ को प्रसंवादी फलन मानकर आरंभ होता है (अतः वह लाप्लास समीकरण $\nabla^2(\Phi)=0$ को संतुष्ट करता है)। फलन $\phi(z)$ के प्रथम और द्वितीय अवकलज क्रमशः $\phi'(z)$ तथा $\phi''(z)$ से और उसके प्रथम तथा द्वितीय समाकल क्रमशः $\bar{\phi}(z)$ तथा $\bar{\bar{\phi}}(z)$ से निरूपित किए जाते हैं।

21 वेस्टरगार्ड ने अभिगृहीत किया कि

$$\Phi = \mathrm{Re}\bar{\bar{\phi}}(z) + x_2\mathrm{Im}\bar{\phi}(z)$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दरार समस्या का समाधान है[1]। $\phi(z)$ को वैश्लेषिक माना गया है।

22 सत्यापित करें कि Φ द्विपप्रसंवादी समीकरण को संतुष्ट करता है। प्रथम अवकलज लेते हुए और यह स्मरण रखते हुए कि $\frac{\partial}{\partial x_1} f(z) = f'(z)$, प्राप्त होता है

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathrm{Re}\,\bar{\bar{\phi}}\right) + \left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}\bar{\phi}(z) + \mathrm{Im}\bar{\phi}(z) \underbrace{\frac{\partial x_2}{\partial x_1}}_{0} \right] \tag{P.7}$$

$$= \mathrm{Re}\bar{\phi}(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi(z) \tag{P.8}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathrm{Re}\bar{\phi}(z)\right) + \left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}\phi(z) + \mathrm{Im}\phi(z)\frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right] \tag{P.9}$$

$$= \mathrm{Re}\phi(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi'(z) \tag{P.10}$$

इसी प्रकार x_2 के सापेक्ष अवकलन करके और समीकरण P.4 से यह स्मरण रखते हुए कि $\frac{\partial}{\partial x_2} f(z) = i f'(z)$, प्राप्त होता है

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{Re}\bar{\bar{\phi}}(z) + [x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathrm{Im}\bar{\phi}(z)\right) + \frac{\partial x_2}{\partial x_2}\mathrm{Im}\bar{\phi}(z)] \tag{P.11}$$

$$= -\mathrm{Im}\bar{\phi}(z) + x_2 \mathrm{Re}\phi(z) + \mathrm{Im}\bar{\phi}(z) \tag{P.12}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{Re}\phi(z) + \mathrm{Re}\phi(z)\frac{\partial x_2}{\partial x_2} \tag{P.13}$$

$$= -x_2 \mathrm{Im}\phi'(z) + \mathrm{Re}\phi(z) \tag{P.14}$$

इसी प्रकार यह दर्शाया जा सकता है कि

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -x_2 \mathrm{Re}\phi'(z) \tag{P.15}$$

प्रतिबलों और Φ के द्वितीय आंशिक अवकलजों के व्यंजक व्युत्पन्न करने के पश्चात् उन्हें समीकरण P.2 में प्रतिस्थापित करने पर दर्शाया जा सकता है कि द्विपप्रसंवादी समीकरण संतुष्ट होता है; अतः Φ एक वैध समाधान है।

23 यदि यह सत्यापित करना हो कि प्रतिबल वास्तव में संतुलन और सुसंगतता दोनों समीकरणों को संतुष्ट करते हैं (जो वे Φ द्वारा द्विपप्रसंवादी समीकरण की संतुष्टि के फलस्वरूप करते हैं), तो 2D में समीकरण O.8 से:

1. संतुलन:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{P.16}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \tag{P.17}$$

[1] ध्यान दें कि एरी प्रतिबल फलन Φ को सम्मिश्र फलन $\phi(z)$ से भ्रमित नहीं करना चाहिए।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

प्रथम समीकरण पर विचार करें

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1}[\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)] \\
&= \mathrm{Re}\phi'(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi''(z) \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_2}[-x_2 \mathrm{Re}\phi'(z)] \\
&= -\mathrm{Re}\phi'(z) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}\phi'(z) \\
&= -\mathrm{Re}\phi'(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi''(z)
\end{aligned}$$

इन दोनों समीकरणों को समीकरण P.16 में प्रतिस्थापित करने पर शून्य प्राप्त होता है। इसी प्रकार दर्शाया जा सकता है कि समीकरण P.17 भी संतुष्ट होता है।

2. सुसंगतता: समतल विकृति में विस्थापन निम्न हैं

$$\begin{aligned}
2\mu u_1 &= (1-2\nu)\mathrm{Re}\,\bar{\phi}(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi(z) \\
2\mu u_2 &= 2(1-\nu)\mathrm{Im}\bar{\phi}(z) - x_2 \mathrm{Re}\,\phi(z)
\end{aligned}$$

और ये विकृतियों के समाकलन से प्राप्त होते हैं, जबकि विकृतियाँ प्रतिबलों से प्राप्त होती हैं। जाँच के रूप में परिकलित करते हैं

$$\begin{aligned}
2\mu\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\
&= (1-2\nu)\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z) \\
&= (1-\nu)\underbrace{[\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)]}_{\sigma_{11}} - \nu \underbrace{[\mathrm{Re}\phi(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)]}_{\sigma_{22}} \\
&= (1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}
\end{aligned}$$

यह स्मरण रखते हुए कि

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

तब

$$E\varepsilon_{11} = (1-\nu^2)\sigma_{11} - \nu(1+\nu)\sigma_{22}$$

यह दर्शाता है कि $E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} - \sigma_{33})$, और समतल विकृति के लिए, $\varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ and $E\varepsilon_{11} = (1-\nu^2)\sigma_{11} - \nu(1+\nu)\sigma_{22}$

[24] अब तक Φ को समस्या से स्वतंत्र रूप से परिभाषित किया गया था; हमने केवल उसके पदों में प्रतिबल निर्धारित किए और सत्यापित किया कि द्विवप्रसंवादी समीकरण संतुष्ट होता है।

[25] अब ϕ इस प्रकार निर्धारित करना है कि परिसीमा शर्तें संतुष्ट हों। बाद में स्पष्ट होने वाले कारणों से समस्या का उस स्थिति तक व्यापकीकरण करते हैं जिसमें पट्टिका पर द्विअक्षीय प्रतिबल अवस्था लागू है। अतः:

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

1. दरार के अनुदिश: $x_2 = 0$ तथा $-a < x_1 < a$ पर $\sigma_{22} = 0$ है (कर्षण-मुक्त दरार)।
2. अनंत पर: $x_2 = \pm\infty$ पर $\sigma_{22} = \sigma_0$।

समीकरण P.10 से ध्यान दें कि $x_2 = 0$ पर σ_{22} निम्न में सरल हो जाता है

$$(\sigma_{22})_{x_2=0} = \mathrm{Re}\phi(z) \tag{P.18}$$

[26] इसके अतिरिक्त, अपेक्षा है कि $x_1 \to \infty$ पर $\sigma_{22} \to \sigma_0$ और $|\, x_1 - a \,| > \varepsilon$ होने पर σ_{22}, σ_0 से अधिक होगा (इंग्लिस द्वारा पूर्वानुमानित विचित्रता के कारण)। अतः σ_{22} का संभावित चयन $\sigma_{22} = \frac{\sigma_0}{1-\frac{a}{x_1}}$ हो सकता है; सममिति हेतु इसे $\sigma_{22} = \dfrac{\sigma_0}{\left(1-\frac{a^2}{x_1^2}\right)}$ तक विस्तारित किया जाता है। किंतु $x_2 = 0$ तथा $-a < x_1 < a$ पर $\sigma_{22} = 0$ भी आवश्यक है; अतः दरार के अनुदिश फलन $\phi(z)$ काल्पनिक होना चाहिए, और

$$\sigma_{22} = \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x_1^2}}}\right)$$

[27] अतः समीकरण P.18 से प्राप्त होता है (x_1 से z में संक्रमण ध्यान दें)।

$$\phi(z) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

[28] यदि चर परिवर्तन करके $\eta = z - a = re^{i\theta}$ परिभाषित करें, $\frac{\eta}{a} \ll 1$ मानें, और स्मरण रखें कि $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, तो समीकरण P.10 का प्रथम पद इस प्रकार पुनर्लिखित किया जा सकता है

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\phi(z) &= \mathrm{Re}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{\eta^2+2a\eta}{\eta^2+a^2+2a\eta}}} \approx \mathrm{Re}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{2a\eta}{a^2}}} \\
&\approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2\eta}} \approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2re^{i\theta}}} \approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}e^{-i\frac{\theta}{2}} \approx \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

[29] यह स्मरण रखते हुए कि $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ और $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, द्वितीय पद में $x_2 = r\sin\theta$ प्रतिस्थापित करते हैं

$$x_2\mathrm{Im}\phi' = r\sin\theta\mathrm{Im}\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\frac{a}{2(re^{i\theta})^3}} = \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

30 उपर्युक्त समीकरणों को समीकरण P.10, P.14 तथा P.15 के साथ संयोजित करने पर प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}
\sigma_{22} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\ \sin\frac{3\theta}{2}\right)+\cdots\\
\sigma_{11} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\ \sin\frac{3\theta}{2}\right)+\cdots\\
\sigma_{12} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\ \cos\frac{3\theta}{2}+\cdots
\end{aligned}$$

31 स्मरण रखें कि यह द्विअक्षीय प्रकरण था। x_1 दिशा में $-\sigma_0$ के बराबर दाब अध्यारोपित करके एकाक्षीय प्रकरण पुनरुत्पादित किया जा सकता है; किंतु इससे दरार-अग्र के निकट प्रतिबल क्षेत्र प्रभावित नहीं होना चाहिए।

32 समान दृष्टिकोण से, दूर-क्षेत्र अपरूपण प्रतिबलों (आगे परिभाषित विधा II) के अधीन पट्टिका में दरार-अग्र के चारों ओर प्रतिबल क्षेत्र के व्यंजक ϕ के निम्न व्यंजक से व्युत्पन्न किए जा सकते हैं

$$\Phi_{II}(z) = -x_2\mathrm{Re}\bar{\phi}_{II}(z) \Rightarrow \phi_{II} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

और उसी दरार के लिए, किंतु प्रतिसमतल अपरूपण प्रतिबलों (विधा III) के अधीन

$$\Phi'_{III}(z) = \frac{\sigma_{13}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

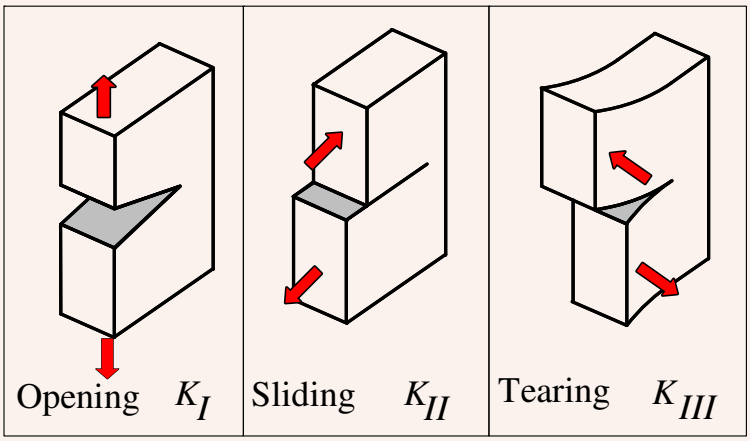
33 इरविन[2] (Irwin, 1957) ने *प्रतिबल तीव्रता गुणक* की संकल्पना प्रस्तुत की, जिसे इस प्रकार परिभाषित किया गया है:

$$\left\{\begin{array}{c} K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{array}\right\} = \lim_{r\to 0,\theta=0}\sqrt{2\pi r}\left\{\begin{array}{c} \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \end{array}\right\}$$

जहाँ σ_{ij} दरार-अग्र के निकट प्रतिबल हैं और K_i ऊपरी तथा निचले दरार-पृष्ठों की एक-दूसरे के सापेक्ष तीन स्वतंत्र शुद्धगतिक गतियों से संबद्ध हैं, जैसा चित्र P.2 में दर्शाया गया है

[2]Office of Naval Research (ONR) ने इरविन को द्वितीय विश्वयुद्ध के दौरान लिबर्टी जहाजों की विफलता की जाँच करने को कहा था, ठीक वैसे ही जैसे तीस वर्ष पूर्व इंग्लिस ब्रिटिश जहाजों की विफलता की जाँच कर रहे थे।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र P.2: दरार विस्थापन की स्वतंत्र विधाएँ

P.2 तरल-संरचना अंतःक्रिया

Mahdavi, 2023 की पीएचडी शोध-प्रबंध “Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR” से।

एक युगांतरकारी शोधपत्र में Westergaard, 1933 ने किसी बाँध पर कार्यरत जलगतिक बलों को संबद्ध (अथवा परिमित-अवयव संदर्भ में संकेंद्रित) द्रव्यमान के माध्यम से परिमाणित करने के लिए एक मॉडल विकसित किया। वर्तमान विश्लेषण में इसी मॉडल का उपयोग किया जाएगा।

व्यापक रूप से अपनाए जाने के बावजूद, लेखक की सर्वोत्तम जानकारी के अनुसार इस मॉडल का कभी पूर्ण विवरण प्रस्तुत नहीं किया गया। इसके स्थान पर केवल इसके अंतिम समीकरण प्रस्तुत और प्रयुक्त किए जाते हैं।

वेस्टरगार्ड का यह अन्वेषण अनेक दृष्टियों से अत्यंत रोचक है। सर्वप्रथम, यह यांत्रिकी के मूल सिद्धांतों में दृढता से निहित एक अत्यंत व्यावहारिक अभियांत्रिकी समस्या का समाधान प्रदान करता है। दूसरे, यांत्रिकी से संबद्ध कठोरता के बावजूद वेस्टरगार्ड सिद्धांतवादी आग्रह से बँधे नहीं हैं; प्रत्युत, वे जानते हैं कि समाधान तक पहुँचने के लिए आवश्यकता पडने पर किन मान्यताओं को शिथिल किया जा सकता है।

सैद्धांतिक मॉडल

यद्यपि जलगतिक बलों को समाहित करने वाले संबद्ध द्रव्यमान की गणना के लिए सीधे §P.2 पर जाया जा सकता है, किंतु उसकी व्युत्पत्ति को समझना महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि यह गणित, यांत्रिकी और अभियांत्रिकी का अत्यंत सुरुचिपूर्ण समन्वय है।

अतः इस अनुभाग में (Westergaard, 1933) के युगांतरकारी शोधपत्र की अत्यंत विस्तार से समीक्षा की जाएगी।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जब जल-दाब ज्ञात हों, तब प्रतिबलों पर उनके प्रभाव की गणना स्थैतिक भारों के लिए प्रयुक्त विधियों से की जा सकती है। अतः जिस समस्या पर विशेष ध्यान आवश्यक है, वह भूकंप के दौरान जल-दाबों में होने वाला परिवर्तन है।

संकेतन

निम्नलिखित संकेतन अपनाया गया है:

x, y, z	आयताकार निर्देशांक x और y, जैसा कि चित्र P.3 में दर्शाया गया है; x-अक्ष जल की अविक्षुब्ध सतह के अनुदिश, जलाशय की ओर निर्देशित और बाँध के ऊर्ध्वप्रवाह मुख के तल के लंबवत है; y-अक्ष ऊर्ध्वाधर अधोमुखी है।
t	समय।
h	जलाशय की गहराई।
g	गुरुत्वजनित त्वरण। (समी. P.26)
w	जल का प्रति इकाई आयतन भार, (समी. P.26)
k	जल का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (दाब को प्रति इकाई आयतन के आयतन-ह्रास से विभाजित किया गया है)। (समी. P.26)
ξ और η	क्रमशः x और y दिशाओं में किसी जल-कण के विस्थापन।
ξ_0	बाँध के ऊर्ध्वप्रवाह मुख पर ξ का मान।
σ	गतिक क्रिया के कारण जल में प्रतिबल, तनन में धनात्मक (इसे पूर्व से विद्यमान जलस्थैतिक दाब के साथ संयोजित करना है)।
α	भूकंप की तीव्रता मापने वाला अनुपात = नींव के त्वरण का अधिकतम क्षैतिज घटक, जिसे g से विभाजित किया गया है।
T	नींव के क्षैतिज कंपनों का आवर्तकाल।
r, v	नींव के क्षैतिज कंपनों का आयाम और अधिकतम वेग।
v_n	जल में ध्वनि का वेग।
i	जब आवर्तकाल T हो तब जल में प्रसार-तरंगों की लंबाई।
c_n	समीकरणों P.33, और P.37 द्वारा परिभाषित मान ($n = 1, 3, 5 \ldots$ के साथ)।
p	गतिक क्रिया के कारण गहराई y पर बाँध के ऊपर जल का अधिकतम दाब।
p_0	तल ($y = h$) पर p का मान।
Q	दाबों p द्वारा गहराई y पर सीधे गुरुत्व बाँध में उत्पन्न क्षैतिज अपरूपण।
Q_0	तल ($y = h$) पर Q का मान।
M	दाबों p द्वारा गहराई y पर सीधे गुरुत्व बाँध में उत्पन्न बंकन आघूर्ण।
M_s	तल ($y = h$) पर M का मान।
o, K	सन्निकट सूत्रों में गुणांक (समी. P.45 से P.51)।
b, b'	चित्र P.5 में दर्शाए गए आयाम

स्वचालित अनुवाद

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जल की गति के समीकरण

चूँकि संबद्ध गतियाँ छोटी हैं, इसलिए अपेक्षाकृत सरल समीकरणों (द्रव में ध्वनि) का उपयोग किया जा सकता है। ठोसों के प्रत्यास्थता सिद्धांत की दृष्टि से इन समीकरणों को अपरूपण प्रतिबलों से रहित प्रत्यास्थता समीकरणों के रूप में समझा जा सकता है। आयतन-अवयव $dxdydz$ पर कार्यरत बल प्रतिबल σ के पदों में व्यक्त किए जाते हैं, जिसे विक्षोभ से पूर्व विद्यमान जलस्थैतिक दाब पर अध्यारोपित करना आवश्यक है।

न्यूटनी द्रव (अर्थात् असंपीड्य द्रव) के गतिक संतुलन के लिए डेलाम्बर सिद्धांत (समी. O.3.4) का उपयोग करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{P.19}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{P.20}$$

ये x और y दिशाओं में गति के समीकरण हैं। चूँकि गति xy-तल के समानांतर है, इसलिए z (ऊर्ध्वाधर) दिशा में गति पर विचार नहीं किया जाता। विकृति निम्न से दी जाती है

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

जल के लिए

$$p = \frac{1}{2}\sigma_{ii} = k\varepsilon_{ii}$$

अतः प्रतिबल को निम्न रूप में पुनर्लिखा जा सकता है

$$\sigma = k\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \tag{P.21}$$

इस प्रकार गति समीकरणों P.19, P.20 और P.21 द्वारा नियंत्रित होती है। संपीड्य द्रवों के जलगतिकी के सामान्य समीकरणों से तुलना दर्शाती है कि ये समीकरण केवल तभी लागू होते हैं जब ξ और η छोटे हों तथा, इसके अतिरिक्त, गुणनफलों $\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ और $\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ का $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ से अनुपात नगण्य हो।

समीकरणों P.31, P.32, और P.35 में दिए गए समाधानों में ये अनुपात गति के आयाम को जलाशय की गहराई से विभाजित करने पर प्राप्त राशि की कोटि के पाए जाएँगे।

केवल क्षैतिज गति मानते हुए प्रारंभिक अध्ययन

यद्यपि बाँध पर कार्यरत जल का ऊर्ध्वाधर विस्थापन हो सकता है, यह प्रारंभिक अध्ययन उस ऊर्ध्वाधर गति की उपेक्षा करेगा। फिर भी इससे समस्या पर कुछ प्रकाश पड़ेगा। $\eta = 0$ रखने पर समी. P.19 और P.21 से प्राप्त होगा:

$$k\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{P.22}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यह तरंग समीकरण (समी. 35.16) है, जिसका सामान्य समाधान निम्न रूप का है

$$G(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v_s}\right) + g\left(t + \frac{x}{v_s}\right)$$

सरलीकरणकारी मान्यता के रूप में विचार किया जाता है कि भूकंप के दौरान बाँध आवर्तकाल T वाली सरल आवर्त गति करता है और अधिकतम त्वरण αg का मान $t = 0, T, 2T$ आदि पर होता है। अतः गति निम्न से दी जाएगी

$$\xi_0 = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^4}\cos\frac{2\pi t}{T} \tag{P.23}$$

$\xi_{x=0} = \xi_0$ के साथ समीकरण P.22 निम्न द्वारा संतुष्ट होगा

$$\xi = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2}\left[\beta\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v_2}\right) + (1-\beta)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v_s}\right)\right] \tag{P.24}$$

जहाँ β एक स्थिरांक है, और,

$$v_s = \sqrt{\frac{gk}{w}} \tag{P.25}$$

v_s जल में तरंग-वेग, अर्थात् ध्वनि-वेग है (अल्प आवृत्ति के कारण निश्चय ही ये तरंगें ध्वनि के रूप में श्रव्य नहीं होंगी)। निम्न मानों का उपयोग करने पर

$$\begin{aligned} k &= 300,000 \text{ lbs/in}^2 = 21,600 \text{ton/ft}^2 \\ g &= 32.2 \text{ ft/sec}^2 \\ w &= 0.03125 \text{ ton/ft}^3 \end{aligned} \tag{P.26}$$

$v_s = 4,718$ ft/sec प्राप्त होता है।

समीकरण P.24 में कोसाइन के आगे गुणक β वाला पद बाँध से दूर जाती तरंगों को निरूपित करता है, जबकि गुणक $1-\beta$ वाला पद बाँध की ओर आती तरंगों को निरूपित करता है।

समीकरण P.24 और P.21, $x = 0$ (अर्थात् बाँध के ऊर्ध्वप्रवाह मुख पर) के लिए देते हैं:

$$\sigma = (1-2\beta)\frac{\alpha T}{2\pi}\sqrt{gkw}\sin\frac{2\pi t}{T} \tag{P.27}$$

जब $\beta > 1/2$ हो, तब बाँध से दूर जाती तरंगें उसकी ओर आती तरंगों पर प्रबल होती हैं।

समीकरण P.27 दर्शाता है कि बाँध पर अधिकतम दाब, अर्थात् $(-\sigma)_{max}$, समय $t = \frac{T}{4}, \frac{5T}{4}, \frac{9T}{4}, \ldots\ldots$ पर होता है और निम्न के बराबर है,

$$p = (2\beta - 1)\frac{\alpha T}{2\pi}\sqrt{gkw} \tag{P.28}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यह ध्यान देना चाहिए कि बाँध का अधिकतम त्वरण और फलतः बाँध के गतिमान द्रव्यमान के कारण सर्वाधिक जड़त्व बल तब उत्पन्न होते हैं जब $t = 0, T, 2T, \ldots$ हो। अतः दाब p और जड़त्व बलों से बाँध में उत्पन्न प्रतिबलों को दो प्रत्यावर्ती धाराओं की भाँति संयोजित करना होगा, जिनमें आवर्तकाल के एक-चतुर्थांश का कलांतर हो।

समीकरण P.23 से बाँध का अधिकतम वेग है,

$$v = \frac{\alpha g T}{2\pi} \tag{P.29}$$

इस प्रकार समीकरण P.25 और P.29 को P.28 में प्रतिस्थापित करने पर दाब का मान प्राप्त होता है

$$p = (2\beta - 1)\frac{v}{v_s}k \tag{P.30}$$

जब $\beta = 1$ हो, अर्थात् तरंगें केवल बाँध से दूर जाती हों, तब समीकरण P.28 (अथवा वैकल्पिक रूप से समीकरण P.30), समीकरण P.26 में दिए संख्यात्मक स्थिरांकों तथा $\alpha = 0.1$ और $T = \frac{4}{3}$ sec. के साथ, $p = 3.13$ tons/ft^2 देता है। किंतु चूँकि जल ऊर्ध्वाधर दिशा में "निकल" सकता है, इसलिए वास्तविक दाब बहुत कम होते हैं और जलाशय की गहराई में एकसमान वितरित नहीं होते। सही समाधान में शीर्ष पर जल-दाब शून्य प्राप्त होना चाहिए।

जल की क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर गतियों पर विचार करने वाला समाधान

यदि जल को ऊर्ध्वाधर दिशा में भी गतिशील होने दिया जाए, तो भी समीकरणों P.19, P.20 और P.21 को निम्न परिसीमा प्रतिबंधों के अधीन संतुष्ट करना होगा:

1. $\sigma = 0$, at $y = 0$;
2. $\eta = 0$, at $y = h$;
3. $\xi = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{T}$, at $x = 0$;
4. σ converges toward 0 when x becomes large.

प्रथम प्रतिबंध के अनुसार, η के छोटे मानों के लिए $\sigma = 0$ को अविक्षुब्ध सतह पर निर्दिष्ट किया जाए अथवा विक्षुब्ध सतह पर, इससे कोई उल्लेखनीय अंतर नहीं पड़ता।

तीनों समीकरणों और परिसीमा प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाला समाधान फूरिये श्रेणी पर आधारित है

$$\xi = -\frac{\alpha g T^2}{\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{T}\sum_{1,3,5,\ldots}^{n}\frac{1}{n}e^{-q_n}\sin\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.31}$$

$$\eta = \frac{\alpha q T^2}{\tau^3}\cos\frac{2\pi t}{T}\sum_{1,3,0_n..}^{n}\frac{1}{n c_n}e^{-q_n}\cos\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.32}$$

जहाँ

$$c_n = \sqrt{1 - \frac{16 w h^2}{n^2 g k T^2}} \tag{P.33}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

and

$$q_n = \frac{n\pi c_n x}{2h}$$

समीकरण P.33 देता है,

$$\frac{1}{c_n} - c_n = \frac{16wh^2}{n^2 c_n g k T^2} \tag{P.34}$$

तब समीकरण P.21, P.31, P.32, और P.34 देंगे

$$\sigma = -\frac{8\alpha w h}{\pi^2} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} e^{-q_n} \sin\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.35}$$

t, x, और y के सापेक्ष अवकलन करके सरलता से सत्यापित किया जा सकता है कि समीकरण P.31, P.32, और P.35 प्रत्येक बिंदु पर समीकरण P.19 और P.20 को संतुष्ट करते हैं। समीकरण P.21 संतुष्ट होता है, क्योंकि समीकरण P.31 और P.32 से समीकरण P.35 की व्युत्पत्ति में इसका उपयोग किया गया था। इसके अतिरिक्त, η और σ के व्यंजकों का निरीक्षण सहज ही दर्शाता है कि प्रतिबंध 1, 2, और 4 संतुष्ट होते हैं। यह सत्यापित करने के लिए कि $x = 0$ पर प्रतिबंध 3 संतुष्ट होता है, $x = 0$ के लिए समीकरण P.31 की तुलना $0 < u < \pi$ होने पर फूरिये श्रेणी के रूप में $\frac{\pi}{4}$ के व्यंजक से करनी होगी,

$$\frac{\pi}{4} = \sin u + \frac{1}{3}\sin 3u + \frac{1}{5}\sin 5u + \ldots$$

वर्तमान अनुप्रयोग में $u = \frac{\pi y}{2h}$ है।

इस प्रकार सभी निर्दिष्ट प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं। तथापि, समीकरणों की प्रयोज्यता एक अतिरिक्त प्रतिबंध पर निर्भर करती है: समाधान द्वारा परिभाषित विस्थापन तथा x और y के सापेक्ष उनके अवकलज छोटे होने चाहिए। अतः बड़े विस्थापनों की संभावनाओं पर विचार करना आवश्यक है। एक संभावना जल में अनुनाद से संबद्ध है; दूसरी का अन्वेषण जल की सतह द्वारा निर्मित तरंग के आकार और बाँध के ऊर्ध्वप्रवाह मुख के अनुदिश ऊर्ध्वाधर गतियों को निर्धारित करके किया जाएगा।

अपने शोधपत्र में Westergaard, 1933 जल में अनुनाद की संभावना पर विचार करते हैं और निष्कर्ष निकालते हैं कि भूकंप के प्रमुख कंपनों का आवर्तकाल 1 sec. से कम होने की संभावना नहीं है, अतः अनुनाद के इस रूप की उपेक्षा की जा सकती है।

बाँध पर दाब

समीकरण P.35 से अधिकतम जल-दाब ($x = 0$ के लिए $p = -\sigma$) तब होता है जब $t = 0, T, 2T, \ldots$ हो। अतः,

$$p = \frac{8\alpha w h}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} \sin\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.36}$$

जहाँ, पूर्ववत्, समीकरण P.35 के अनुसार तथा समीकरण P.26 में दिए संख्यात्मक स्थिरांकों के साथ:

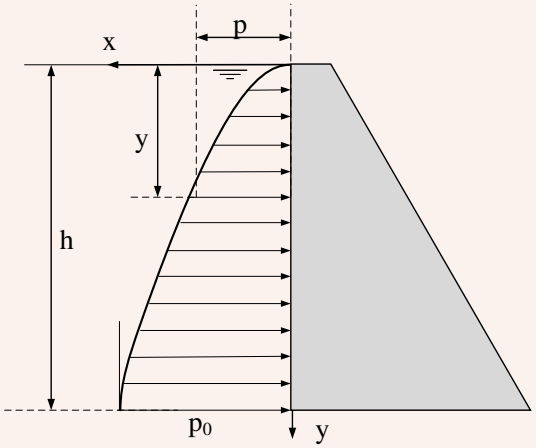
$$c_n = \sqrt{1 - \frac{16wh^2}{n^2 g k T^2}} = \sqrt{1 - \frac{0.71889}{n^2}\left(\frac{h \text{ sec.}}{1000 \text{ T ft}}\right)^2}. \tag{P.37}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

दाब p का अधिकतम मान जलाशय के तल $(y = h)$ पर होता है और यह है,

$$p_0 = \frac{8\alpha w h}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 c_n} \tag{P.38}$$

चित्र P.3 दाब p का वितरण-प्रोफाइल दर्शाता है। समीकरण P.38 से अवकलज $\frac{dp}{dy}$, $y = 0$ पर अनंत



चित्र P.3: जल की गतिक क्रिया के कारण बाँध पर दाब (Westergaard, 1933)

और $y = h$ पर शून्य है; अर्थात् p के वक्र की शीर्ष पर क्षैतिज स्पर्शरेखा और तल पर ऊर्ध्वाधर स्पर्शरेखा है।

तालिका P.1 की मदें 1 और 2, समीकरण P.37 और P.38 से परिकलित अनुपात $\frac{p_0}{\alpha h}$ और p_0 के संख्यात्मक मान प्रस्तुत करती हैं। अनुपात $\frac{p_0}{\alpha h}$, h के साथ केवल धीरे-धीरे परिवर्तित होता है। $h = 600$ ft, $T = \frac{4}{3}$ sec. (और $h = 200$ ft, $T = \frac{4}{9}$ sec.) के लिए गहराई $y = \frac{h}{2}$ पर दाब $p = 0.814 p_0$ पाया गया।

अपरूपण और आघूर्ण

कैंटिलीवर (गुरुत्व बाँध) की भाँति कार्यरत बाँध के विभिन्न क्षैतिज परिच्छेदों में भार p द्वारा उत्पन्न क्षैतिज अपरूपण बलों और बंकन आघूर्णों को व्यक्त करना विशेष रूप से उपयोगी हो सकता है। अपरूपणों को कैंटिलीवर की प्रति इकाई चौड़ाई बल के रूप में, उदाहरणार्थ tons per foot में, और आघूर्णों को प्रति इकाई चौड़ाई आघूर्ण के रूप में, उदाहरणार्थ foot-tons per foot (अथवा केवल tons) में व्यक्त किया जाता है। गहराई y पर अपरूपण Q, गहराई h पर Q_0, गहराई y पर आघूर्ण M, और गहराई h पर M_0, समी. P.36 के p से निम्न समाकलन द्वारा प्राप्त होते हैं

$$Q = \int_0^y p\,dy; \quad Q_0 = \int_0^h p\,dy; \quad M = \int_0^y Q\,dy; \quad M_0 = \int_0^h Q\,dy$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

तालिका P.1: आवर्तकाल $T = \frac{4}{3}$ सेकंड के संगत संख्यात्मक परिणाम

मद जलाशय की गहराई, h	Ft.	छोटी	200	600	800
1 दाब गुणांक, $\frac{p_0}{sh}$	ton/ft^3	0.023202	0.023407	0.025254	0,027257
2 $a = 0, 1$ होने पर तल पर दाब, p_0	ton/ft^2	⋯	0.468	1.515	2.181
3 अपरूपण गुणांक,	ton/ft^3	0.016961	0.017094	0.018286	0.019576
4 $\alpha = 0.1$ होने पर तल पर अपरूपण, Q_0	ton/ft	...	68.4	658.3	1253
5 आघूर्ण गुणांक, $\frac{M_0}{\alpha h^3}$	ton/ft^3	0.0068089	0.0068576	0.0072947	0.0077666
6 $a = 0, 1$ होने पर तल पर आघूर्ण, M_0	ft.-ton/ft	...	5486	157600	397600
7 $C = \frac{15M_0}{4\alpha m^2}$	ton/ft^3	0.025533	0.025716	0.027355	0.029125
8 $K = C\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h \text{ sec.}}{1000\text{T ft.}}\right)^2}$	ton/ft^3	0.025533	0.025507	0.025282	0.025068
समी. P.45, P.46, P.47, P.51, और P.53 से सन्निकट गुणांक					
9 $\frac{p_0}{a^h}$	$\frac{\text{ton}}{ft^3}$	0.0255	0.0257	0.0276	0.0296
10 $\frac{Q_0}{ah^2}$	$\frac{\text{ton}}{ft^3}$	0.0170	0.0171	0.0184	0.0198
11 $\frac{M_0}{ah^3}$	$\frac{\text{ton}}{f^3}$	0.00680	0.00686	0.00736	0.00790

अधिकतम कृषैतिज त्वरण αg के बराबर है। T परिवर्तित करने पर, यदि h को उसी अनुपात में बदला जाए तो निर्दिष्ट गुणांक स्थिर रहते हैं; उदाहरणार्थ, $h = 800$ft., $T = \frac{4}{3}$ sec. के लिए दिए गुणांक $h = 600$ft., $T = 1$ sec. और $h = 200$ft., $T = \frac{1}{3}$ sec. की स्थितियों पर लागू होते हैं; $h = 200$ft, $T = \frac{4}{3}$ sec. के लिए दिए गुणांक $h = 600$ft, $T = 4$sec की स्थिति पर लागू होते हैं।

अप्रकाशित प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

परिभाषित करने पर

$$q = \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} \tag{P.39}$$

प्राप्त होता है:

$$Q = \frac{16\alpha w h}{\pi^3}\left(q - \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n}\cos\frac{n\pi y}{2h}\right) \tag{P.40}$$

$$Q_0 = \frac{16}{\pi^3}\alpha v h^2 q \tag{P.41}$$

$$M = \alpha w h^3\left(\frac{16q}{\pi^2}\frac{y}{h} - \frac{32}{\pi^4}\sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^4 c_n}\sin\frac{n\pi y}{2h}\right) \tag{P.42}$$

$$M_0 = \alpha w h^3\left(\frac{16q}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^4}\sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{3}}}{n^4 c_n}\right) \tag{P.43}$$

(P.44)

समीकरण P.39, P.41, और P.43 से परिकलित अनुपातों $\frac{Q_0}{\alpha h^2}$ और $\frac{M_0}{\alpha h^3}$ तथा Q_0 और M_{00} के संख्यात्मक मान भी तालिका P.1 (मदें 3, 4, 5, और 6) में दिए गए हैं।

सन्निकट सूत्रों की व्युत्पत्ति

चित्र P.3 के दाब-आरेख को दीर्घवृत्त के एक चतुर्थांश से प्रतिस्थापित करके परिकलन सरल किया जा सकता है (नीचे व्युत्पन्न समीकरण P.54 देखें); p के लिए किसी विशिष्ट पैमाने पर अंकित करने पर दीर्घवृत्त वृत्त बन जाता है। तथापि, चित्र P.3 के वक्र को ऊर्ध्वाधर अक्ष वाले परवलय से प्रतिस्थापित करने पर अधिक संतोषजनक सन्निकट निरूपण प्राप्त होता है, जैसा चित्र P.4 में दर्शाया गया है, भले ही इस परवलय की तल पर प्रवण स्पर्शरेखा हो। परवलय निम्न सरल सूत्र देता है, जिनमें C, h और T के अनुपात पर निर्भर गुणांक है:

$$p = C\alpha\sqrt{hy}; \qquad p_0 = C\alpha h \tag{P.45}$$

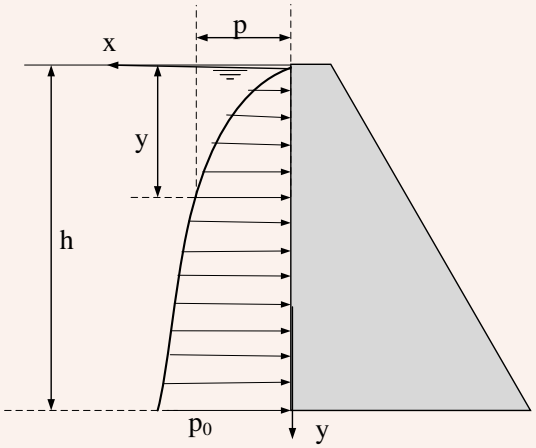
$$Q = \frac{2}{3}C\alpha y\sqrt{hy}; \qquad Q_0 = \frac{2}{3}C\alpha h^2 \tag{P.46}$$

$$M = \frac{4}{15}C_{\alpha y^2}\sqrt{hy}; \qquad M_0 = \frac{4}{15}C_\alpha h^2 \tag{P.47}$$

गुणांक C इस प्रकार निर्धारित किया जा सकता है कि p_0 का मान समीकरण P.38 से परिकलित मान के बराबर हो; किंतु C को इस प्रकार निर्धारित करने पर कि आघूर्ण M_0 का मान समीकरण P.43 से परिकलित मान के बराबर हो, समग्र दाब-आरेख का बेहतर निरूपण प्राप्त होता है। ज्ञात M_0 के पदों में तब प्राप्त होता है,

$$C = \frac{15M_0}{4\alpha h^2}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र P.4: दाबों का सन्निकट वितरण (Westergaard, 1933)

तालिका P.1 (मद 7) C के कुछ संख्यात्मक मान दर्शाती है। ध्यान दें कि C की विमा प्रति इकाई आयतन बल है; C को ah से गुणा करने पर दाब, प्रति इकाई क्षेत्रफल बल के रूप में, प्राप्त होता है।

विचारित परिसर में गुणांक C धीरे-धीरे परिवर्तित होता है। त्वरित आकलन के लिए C का कोई स्थिर मान मानना पूर्णतः उचित है; उदाहरणार्थ, $T \geq \frac{4}{3}$ sec के साथ:

$$h < 310 \text{ ft} \qquad C = 0.026 \frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.48}$$

$$310 \text{ ft} < h < 540 \text{ ft} \qquad C = 0.027 \frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.49}$$

$$540 \text{ ft} < h < 680 \text{ ft} \qquad C = 0.028 \frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.50}$$

ये C के विविक्त मान हैं। C को व्यक्त करने के लिए ऐसा सतत फलन होना बेहतर होगा जो पूरे परिसर में सन्निकट रूप से लागू हो। C में परिवर्तन का मुख्य स्रोत समीकरण P.37 द्वारा $n = 1$ के साथ परिभाषित स्थिरांक c_n है; c_1, समीकरण P.39 और P.43 की प्रत्येक योग-श्रेणी के प्रथम पद के हर में प्रकट होता है। अतः $C = \frac{K}{c_1}$ प्रकार के सन्निकट सूत्र को आजमाना उचित है, जिसमें K एक स्थिरांक है। सूत्र होगा

$$C = \frac{K}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}}$$

तालिका 2 (मद 8) में दर्शाए K के मान इस सूत्र में मद 7 के C के मानों का उपयोग करके परिकलित किए गए हैं। इन परिणामों के निरीक्षण से ज्ञात होता है कि $K = 0.0255$ ton-ft^{-3} मान अपनाया जा सकता

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

है। निष्कर्षतः, समीकरण P.45, P.46, और P.47 में गुणांक C निम्न सूत्र द्वारा संतोषजनक रूप से दिया जाता है

$$C = \frac{0.0255 \text{ ton-ft}^{-3}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000\text{T}}\right)^2}} \tag{P.51}$$

जल-दाबों के लिए परिणामी सन्निकट सूत्र

भूकंप से पूर्व विद्यमान जलस्थैतिक दाबों में जोड़े जाने वाले अधिकतम जल-दाबों का निम्न सन्निकट सूत्र इस अध्ययन का मुख्य निष्कर्ष है; इसे सीधे समीकरण P.45 और P.51 से प्राप्त किया गया है:

$$p = C\alpha\sqrt{hy} \tag{P.52}$$

$$= \frac{0.0255 \text{ ton-ft}^{-3}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}}\alpha\sqrt{hy} \tag{P.53}$$

तथापि, त्वरित परिकलनों के लिए समीकरण P.45, P.48, P.49, और P.50 प्रयुक्त किए जा सकते हैं। समीकरण P.53 के उपयोग से प्राप्त गुणांकों $\frac{p_0}{\alpha h}$, $\frac{Q_0}{\alpha h^2}$, और $\frac{M_0}{\alpha h^2}$ के मान तालिका 2 में मदों 9, 10, और 11 के रूप में दिए गए हैं। क्रमशः मदों 1,3 , और 5 से तुलना दर्शाती है कि सन्निकटन संतोषजनक है।

दाबों के निरूपण के लिए परवलय के स्थान पर दीर्घवृत्त के एक चतुर्थांश (जैसा ऊपर सुझाया गया) का उपयोग करने पर, समीकरण P.53 तक पहुँचाने वाली प्रक्रिया के समान प्रक्रिया से निम्न सन्निकट सूत्र प्राप्त होता है:

$$p = \frac{0.0204 \text{ ton ft}^{-3}\alpha\sqrt{y(2h - y)}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}} \tag{P.54}$$

यह सूत्र M_0 के ठीक वही मान देता है जो समीकरण P.53 देता है, किंतु p_0 और कुल बल Q_0 के मान अत्यंत छोटे देता है। समीकरण P.53, p_0 और Q_0 के कुछ अधिक मान देता है और अधिक उपयुक्त है।

ध्यान दें कि दाब p तब उत्पन्न होते हैं जब $t = 0, T, 2T$ आदि हो, अर्थात् (प्रतिबंध (3) देखें) जब कंपन के दौरान बाँध अधोप्रवाह की चरम स्थिति में हो। अतः इन जल-दाबों के कारण उत्पन्न प्रतिबलों को बाँध के स्वयं के द्रव्यमान के त्वरण के कारण उत्पन्न अधिकतम प्रतिबलों में जोड़ना आवश्यक है।

जब कंपन के दौरान बाँध ऊर्ध्वप्रवाह की चरम स्थिति में हो, तब दाब p की दिशा उलट जाती है और वे तनन बन जाते हैं। अधोप्रवाह की चरम स्थिति के दाबों की भाँति इन तननों को भी पूर्व से विद्यमान जलस्थैतिक दाबों के साथ संयोजित करना है। तालिका 2 के संख्यात्मक मानों का निरीक्षण दर्शाता है कि वायुमंडलीय दाब सम्मिलित करने पर जल में परिणामी प्रतिबल के तनन अथवा अत्यंत अल्प संपीडन बनने की कोई संभावना नहीं है।

मान्य स्थितियों से भिन्न स्थितियों में सूत्रों की प्रयोज्यता

सूत्र इस मान्यता के अधीन व्युत्पन्न किए गए थे कि कोई अतिप्रवाह नहीं है। उत्प्लव-मार्ग के ऊपर अतिप्रवाह की स्थिति में सुझाव है कि समीकरण P.53 का उपयोग किया जाए, जिसमें गहराइयाँ h और y

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

बाँध के पीछे कुछ दूरी पर जलाशय की समतल सतह से मापी जाएँ। तब दाबों का परवलयी आरेख पूर्ववत् प्रयुक्त होता है, केवल उसका शीर्ष काट दिया जाता है।

यद्यपि सूत्र इस मान्यता के अधीन व्युत्पन्न किए गए थे कि ऊर्ध्वप्रवाह मुख एक ऊर्ध्वाधर तल है, वे अन्य स्थितियों—उदाहरणार्थ, चाप बाँधों—में अपेक्षित दाबों का संकेत भी देंगे।

संबद्ध द्रव्यमान

बाँध पर जल की गतिक क्रिया की कल्पना करने के लिए जल के किसी निश्चित पिंड को बाँध के साथ गतिशील माना जा सकता है, जबकि जलाशय का शेष भाग निष्क्रिय रहता है। इस उद्देश्य से बाँध के साथ गतिशील जल-पिंड को संबद्ध द्रव्यमान की क्षैतिज परतों में हिमीकृत ((Westergaard, 1933) में बर्फ) माना जा सकता है, जबकि जलाशय का शेष भाग रिक्त कर दिया जाए।

सरल शब्दों में, जलगतिक बलों को संबद्ध द्रव्यमान से उत्पन्न जड़त्व बलों द्वारा प्रतिस्थापित किया जा रहा है।

बाँध के साथ गतिशील माने गए जल-पिंड अथवा संबद्ध द्रव्यमान का आकार इस प्रकार निर्धारित किया जाना चाहिए कि जड़त्व बल, गतिक क्रिया के कारण जल द्वारा वास्तव में लगाए गए दाबों के बराबर हो जाएँ।

संबद्ध द्रव्यमान को निम्न दो में से किसी एक प्रकार से लागू किया जा सकता है

चौड़ाई बढ़ाना b, जैसा मूलतः Westergaard, 1933 ने सूत्रबद्ध किया। यहाँ b, गहराई y पर x दिशा में संबद्ध द्रव्यमान का अनुप्रस्थ आयाम है। तब बाँध के ऊर्ध्वप्रवाह मुख के प्रति इकाई क्षेत्रफल का संगत द्रव्यमान $\frac{bw}{g}$ हो जाता है, और त्वरण αg होने पर संगत जड़त्व बल $\frac{bw}{g} \times \alpha g = \alpha w b$ हो जाता है, जो p के बराबर होना चाहिए, अर्थात्

$$b = \frac{p}{\alpha w}$$

जब दाबों को उपयुक्त पैमाने पर अंकित किया जाए, तब इस संबद्ध द्रव्यमान (अथवा बर्फ) का आकार p के आरेख के समान होता है।

वर्तमान उद्देश्य के लिए p के किसी सन्निकट व्यंजक से b निर्धारित करना पर्याप्त होगा; उदाहरणार्थ (समीकरण P.45, P.48, P.49, और P.50 की तुलना करें),

$$p = 0.02734 \text{ ton-ft}^{-3} \alpha \sqrt{hy}$$

जो $w = 0.03125$ ton-ft^{-3} के साथ देता है,

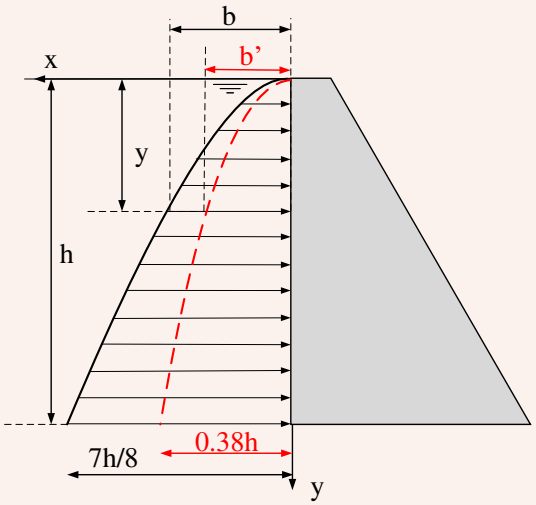
$$b = \frac{7}{8}\sqrt{hy} \tag{P.55}$$

चित्र P.5, समीकरण P.55 द्वारा परिभाषित जल अथवा बर्फ के पिंड को दर्शाता है। जल-पिंड के स्थान पर समान द्रव्यमान वाले कंक्रीट के तुल्य पिंड पर विचार किया जा सकता है। यदि कंक्रीट का भार 144 lb/ft^3 हो, तो b के संगत आयाम हो जाता है,

$$b' = 0.38\sqrt{hy}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

चित्र P.5 का बिंदुकित वक्र कंक्रीट के इस पिंड को दर्शाता है।



चित्र P.5: जल-पिंड जिसे बाँध के साथ गतिशील माना जा सकता है। (Westergaard, 1933)

संबद्ध द्रव्यमान परिमित-अवयव विश्लेषण के संदर्भ में अधिक सुविधाजनक उपागम है। इसमें बाँध के ऊर्ध्वप्रवाह मुख के प्रति इकाई क्षेत्रफल में द्रव्यमान जोडना होगा

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{p(y)}{\alpha g} \tag{P.56}$$

जलगतिक दाब पुनः समीकरण P.53 द्वारा दिया जाता है

$$p(y) = C\alpha\sqrt{hy}$$

जहाँ C समी. P.51 में निर्धारित किया गया था और इसे (समी. P.37 से) निम्न रूप में पुनर्लिखा जा सकता है

$$C = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{16\rho_w H_w^2}{gkT^2}}} \tag{P.57}$$

समीकरण P.56-P.57 को संयोजित करने पर, बाँध पर जल की गतिक क्रिया के कारण बाँध के ऊर्ध्वप्रवाह मुख के प्रति इकाई क्षेत्रफल संकेंद्रित द्रव्यमान के निर्धारण का अंतिम संबंध होगा

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{K\sqrt{hy}}{g\sqrt{1 - \frac{16\rho_w h^2}{gkT^2}}} \tag{P.58}$$

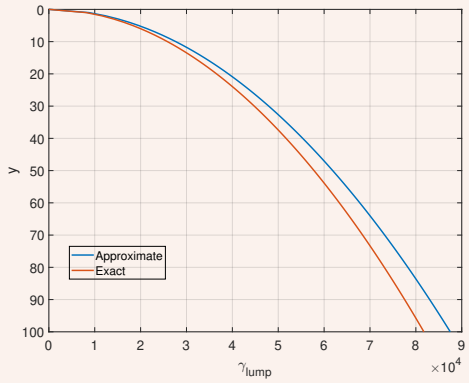
ध्यान देना चाहिए कि अपने मूल शोधपत्र में वेस्टरगार्ड ने पूर्ववर्ती समीकरण का एक अतिरिक्त सरलीकरण (T पर निर्भरता हटाकर) किया था, जिससे प्राप्त हुआ:

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{7}{8}\rho_w\sqrt{hy}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जिसका साहित्य में सर्वाधिक उल्लेख होता है, किंतु यह समीकरण P.58 की तुलना में कम यथार्थ है।

चित्र P.6, उपर्युक्त समीकरणों पर आधारित सन्निकट और यथार्थ समाधानों के बीच अंतर एक काल्पनिक बाँध मॉडल के लिए दर्शाता है, जिसमें जल-स्तर h, 100 m है।



चित्र P.6: प्रति इकाई क्षेत्रफल संकेंद्रित द्रव्यमान बनाम ऊँचाई

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Q विश्वास-क्षेत्र तथा लेवेनबर्ग-मार्क्वार्ट विधियाँ

Mahdavi, 2023 के पीएच.डी. शोधप्रबंध “Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR” से।

सारांश

यह परिशिष्ट प्राचल-अभिज्ञान तथा अरैखिक न्यूनतम-वर्ग समस्याओं में प्रयुक्त विश्वास-क्षेत्र और लेवेनबर्ग-मार्क्वार्ट इष्टतमीकरण विधियों के गणितीय आधार तथा व्यावहारिक कलनविधियाँ प्रस्तुत करता है। टेलर श्रेणी प्रसारों और इष्टतमता की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्तों से आरंभ करते हुए, यह परिशिष्ट प्रवणता-आधारित इष्टतमीकरण, गाउस-न्यूटन विधि तथा लेवेनबर्ग-मार्क्वार्ट की अनुकूली अवमंदन कार्यनीति का सिद्धांत विकसित करता है, जो कठिन भू-दृश्य में तीव्र अभिसरण को सुदृढता के साथ संतुलित करती है। अभिसरण निकष, मापक्रमण कार्यनीतियाँ और प्राचल आकलन हेतु स्थानीय अनिश्चितता सन्निकटन सहित, यह परिशिष्ट संरचनात्मक विश्लेषण तथा प्राचल अंशांकन अनुभागों में संदर्भित संपूर्ण सैद्धांतिक एवं संगणकीय ढाँचा प्रदान करता है।

Q.1 विश्वास-क्षेत्र 3097
Q.2 कलनविधि 3100
Q.3 MATLAB®सूत्रीकरण 3101
Q.4 वास्तविक-समय दृश्यांकन 3104

मसृण फलनों की न्यूनीकरण समस्याएँ हल करने के लिए सामान्यतः टेलर प्रमेय का उपयोग किया जाता है। यह मानते हुए कि $f : R^n \to R$ सतत अवकलनीय है और $p \in R^n$ है, तब हमारे पास (Nocedal and Wright, 2006):

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x+tp)^T p \tag{Q.1}$$

जहाँ कोई $t \in (0,1)$ है। इसके अतिरिक्त, यदि f द्विवतः सतत अवकलनीय है, तो:

$$\nabla f(x+p) = \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x+tp)p\,dt \tag{Q.2}$$

और

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2}p^T \nabla^2 f(x+tp)p \tag{Q.3}$$

जहाँ कोई $t \in (0,1)$ है। इष्टतमता की आवश्यक शर्तें यह मानकर व्युत्पन्न की जाती हैं कि x^* एक स्थानीय न्यूनक है, और तत्पश्चात् $\nabla f(x^*)$ तथा $\nabla^2 f(x^*)$ के विषय में तथ्यों को सिद्ध किया जाता है।

शर्तें:

प्रथम-कोटि आवश्यक शर्तें: यदि x^* स्थानीय न्यूनक है और f, x^* के एक खुले प्रतिवेश में सतत अवकलनीय है, तो $\nabla f(x^*) = 0$।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

द्वितीय-कोटि आवश्यक शर्तें: यदि x^*, f का स्थानीय न्यूनक है तथा $\nabla^2 f$ विद्यमान है और x^* के एक खुले प्रतिवेश में सतत है, तो $\nabla f(x^*) = 0$ तथा $\nabla^2 f(x^*)$ धनात्मक अर्ध-निश्चित है।

द्वितीय-कोटि पर्याप्त शर्तें यदि $\nabla^2 f$, x^* के एक खुले प्रतिवेश में सतत है, $\nabla f(x^*) = 0$ है और $\nabla^2 f(x^*)$ धनात्मक निश्चित है, तो x^*, f का कठोर स्थानीय न्यूनक है।

Q.1 विश्वास-क्षेत्र

[3] इष्टतमीकरण कलनविधियाँ सामान्यतः एक आरंभिक अनुमान-बिंदु से आरंभ होकर क्रमिक पुनरावृत्तियों की ओर तब तक बढती हैं, जब तक स्वीकार्य परिशुद्धता वाला समाधान न मिल जाए अथवा आगे कोई प्रगति संभव न हो। विभिन्न इष्टतमीकरण कलनविधियों का अंतर एक पुनरावृत्ति से अगली पुनरावृत्ति तक जाने की कार्यनीति में होता है। उत्तम कलनविधियों में निम्नलिखित गुण होने चाहिए (Nocedal and Wright, 2006):

- सुदृढता: आरंभिक बिंदु के सभी युक्तिसंगत मानों के लिए इन्हें अपने वर्ग की विविध समस्याओं पर अच्छा कार्य करना चाहिए।
- दक्षता: इन्हें अत्यधिक संगणक समय अथवा भंडारण की आवश्यकता नहीं होनी चाहिए।
- परिशुद्धता: इन्हें आँकडों की त्रुटियों अथवा संगणक पर कलनविधि लागू करते समय उत्पन्न अंकगणितीय पूर्णांकन त्रुटियों के प्रति अत्यधिक संवेदनशील हुए बिना समाधान को सटीकता से पहचानना चाहिए।

इष्टतमीकरण कलनविधियों में अगली पुनरावृत्ति ज्ञात करने की मूलतः दो कार्यनीतियाँ हैं: 1. रेखा-अन्वेषण 2. विश्वास-क्षेत्र। रेखा-अन्वेषण विधि में कलनविधि द्वारा एक दिशा निर्धारित की जाती है और उसी दिशा में अगला बिंदु इस प्रकार पाया जाता है कि फलन का मान घट जाए। विश्वास-क्षेत्र कार्यनीति वर्तमान बिंदु के चारों ओर उस क्षेत्र का उपयोग करती है जिसमें फलन का द्विघाती सन्निकटन स्वीकार किया जाता है। इस अध्ययन में हम दूसरी विधि पर केंद्रित हैं।

[4] विश्वास-क्षेत्र कार्यनीति में वर्तमान बिंदु x_k के निकट एक प्रतिरूप फलन m_k निर्मित किया जाता है, जो उस बिंदु के आसपास वास्तविक फलन के व्यवहार का सन्निकटन करता है। किंतु यह फलन अन्य बिंदुओं पर मूल फलन का सन्निकटन करने में सक्षम नहीं भी हो सकता, क्योंकि m_k के न्यूनतम मान का अन्वेषण x_k के चारों ओर परिभाषित क्षेत्र तक सीमित है। प्रत्याशी चरण p निम्न समीकरण हल करके निर्धारित किया जाता है:

$$\min m_k(x_k + p) \quad s.t. \|p\| \leq \Delta_k \tag{Q.4}$$

[5] यदि विश्वास-क्षेत्र बहुत बडा है, तो समाधान फलन में पर्याप्त कमी नहीं देगा; अतः क्षेत्र की त्रिज्या घटाकर समस्या पुनः हल करनी चाहिए। सामान्यतः विश्वास-क्षेत्र वह गोला है जिसे $\|p\|_2 \leq \Delta$ से परिभाषित किया जाता है, जहाँ $\Delta \geq 0$ विश्वास-क्षेत्र की त्रिज्या है।

[6] प्रतिरूप m_k सामान्यतः इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$m_k(x_k + p) = f_k + p^T \nabla f_k + \frac{1}{2} p^T B_k p \tag{Q.5}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ f_k तथा ∇f_k, बिंदु x_k पर परिकलित फलन और प्रवणता के मान हैं। आव्यूह B_k या तो हेसियन $\nabla^2 f_k$ है अथवा उसका कोई सन्निकटन।

7 यदि हम मानें कि प्रत्येक पुनरावृत्ति में m_k, f के टेलर श्रेणी प्रसार पर आधारित द्विघाती फलन है, तो:

$$f(x_k + p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_k + tp) p \tag{Q.6}$$

जहाँ $f_k = f(x_k)$ तथा $g_k = \nabla f(x_k)$ हैं और t अंतराल (0,1) में कोई अदिश है। B_k को वास्तविक हेसियन $\nabla^2 f(x_k)$ के बराबर मानने पर विश्वास-क्षेत्र न्यूटन विधि प्राप्त होती है, जिसमें निम्न उपसमस्या का समाधान खोजा जाता है:

$$\min m_k(p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p \quad s.t. \|p\| \leq \Delta_k \tag{Q.7}$$

8 विश्वास-क्षेत्र विधि का एक महत्त्वपूर्ण चरण प्रत्येक पुनरावृत्ति पर विश्वास-क्षेत्र की त्रिज्या निर्धारित करना है। इस प्रयोजन के लिए निम्न अनुपात परिभाषित किया जाता है:

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + p_k)}{m_k(0) - m_k(p_k)} \tag{Q.8}$$

9 यदि नए फलन का मूल्यांकन वर्तमान मान से अधिक है, तो उपर्युक्त समीकरण का हर सदैव धनात्मक होने के कारण ρ_k ऋणात्मक होगा और चरण ने फलन को घटाने के स्थान पर बढ़ाया है; अतः चरण स्वीकार्य नहीं है। यदि ρ_k का मान 1 के निकट है, तो इस चरण में m_k, $f(x_k)$ के पर्याप्त निकट है और अगली पुनरावृत्ति में क्षेत्र विस्तृत किया जा सकता है। किंतु यदि यह शून्य के निकट अथवा ऋणात्मक है, तो अगली पुनरावृत्ति में क्षेत्र की त्रिज्या घटानी चाहिए। चित्र Q.1 2 चरों वाली विश्वास-क्षेत्र विधि की 4 पुनरावृत्तियाँ दर्शाता है; इसमें नीले और लाल बिंदु क्रमशः वर्तमान बिंदु तथा अगली पुनरावृत्ति के अनुमान को निरूपित करते हैं। जैसा कहा गया है, विश्वास-क्षेत्र केवल तभी विस्तृत होता है जब अगले बिंदु का अनुमान फलन में पर्याप्त कमी प्रदान करे।

10 इस अध्ययन की समस्या के लिए संगत उद्देश्य फलन, जैकोबियन, प्रवणता तथा हेसियन आव्यूह (Dennis and Schnabel, 1983) निम्न हैं:

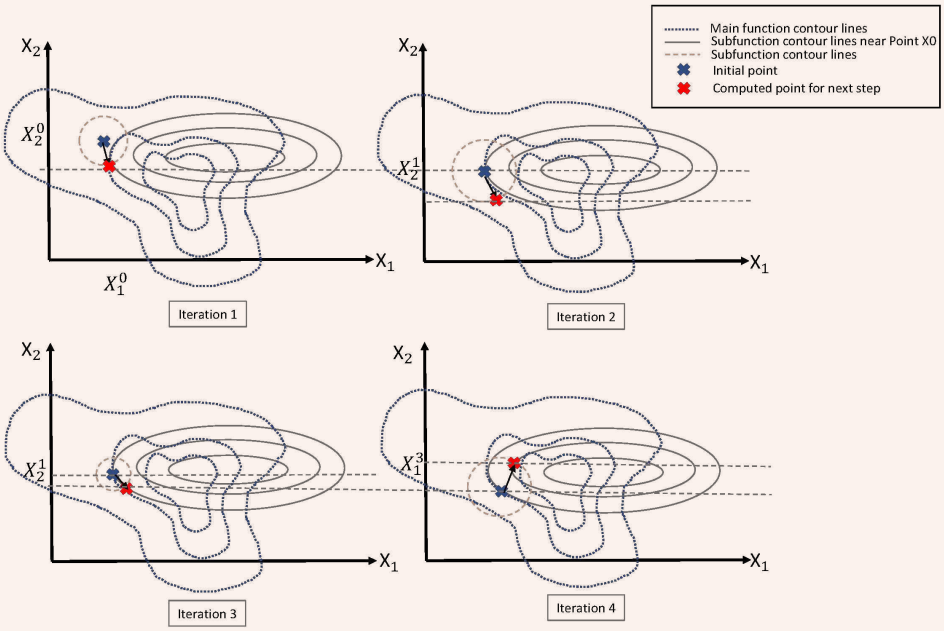
$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}')^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}') = \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m} (u_i - u_i')^2 \tag{Q.9}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}')] = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}^T} = -\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}^T} = -\mathbf{L} \tag{Q.10}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left[(\mathbf{u} - \mathbf{u}')^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}') \right] = 2\mathbf{J}^T \mathbf{r} \tag{Q.11}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\nabla f(\mathbf{x}) \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[2\mathbf{J}^T \mathbf{r} \right] = 2\mathbf{J}^T \mathbf{J} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \mathbf{r} \tag{Q.12}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र Q.1: विश्वास-क्षेत्र कलनविधि

[11] न्यूनतम के निकट, $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \mathbf{r} \to 0$ होने पर $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \simeq 2\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ प्राप्त होता है। लेवेनबर्ग-मार्क्वार्ट विधि (Dennis and Schnabel, 1983) के उपयोग से $\mathbf{x}_{k+1}$ को निम्न प्रकार हल किया जा सकता है:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\varepsilon_k \mathbf{I} + \mathbf{H}\left(\mathbf{x}_k\right)\right]^{-1} \nabla f\left(\mathbf{x}_k\right) \tag{Q.13}$$

जहाँ ε_k ऐसा है कि $\left[\varepsilon_k \mathbf{I} + \mathbf{H}\left(\mathbf{x}_k\right)\right]$ के सभी अभिलक्षणिक मान धनात्मक निश्चित हों। अंततः लेवेनबर्ग-मार्क्वार्ट विधि का वह विकास प्रस्तुत किया जा सकता है जिसे विश्वास-क्षेत्र विधि कहते हैं। इसमें उद्देश्य फलन $m_k(\mathbf{x})$ को उस विश्वास-क्षेत्र के भीतर न्यूनतम किया जाता है जहाँ टेलर श्रेणी से प्राप्त द्विघाती सन्निकटन विश्वसनीय माना जाता है:

$$m_k\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k\right) = f\left(\mathbf{x}_k\right) + \nabla f\left(\mathbf{x}_k\right)^T \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\right)^T \mathbf{H}\left(\mathbf{x}_k\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\right) \tag{Q.14}$$

[12] विश्वास-क्षेत्र को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$_k = \left\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \leq \Delta_k\right\}; \Delta_k > 0 \tag{Q.15}$$

इष्टतमीकरण समस्या अब यह हो जाती है:

$$\min_{\mathbf{x}} \left\{m_k\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k\right) : \mathbf{x}_k \in \Omega_k\right\} \tag{Q.16}$$

[13] क्षेत्र के अद्यतन हेतु आवश्यक शर्त निम्न है:

$$\rho_k = \frac{f\left(\mathbf{x}_k\right) - f\left(\mathbf{x}_{k+1}\right)}{f\left(\mathbf{x}_k\right) - m_k\left(\mathbf{x}_{k+1}\right)} \tag{Q.17}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

14 आरंभिक बिंदु का अद्यतन लेवेनबर्ग-मार्क्वार्ट विधि में दर्शाए गए अद्यतन के समान है। इस विधि में इन प्राचलों की ऊपरी और निचली सीमाएँ भी निम्न प्रकार परिभाषित की जा सकती हैं:

$$\min_{\mathbf{x}} \{m_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) : \mathbf{x}_k \in \Omega_k\}; \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \tag{Q.18}$$

15 प्राचल-अभिज्ञान प्रक्रिया का आरंभिक बिंदु प्रयोगशाला परीक्षणों से निर्धारित किया जा सकता है (जिससे $\varepsilon^{\infty}|_{T=T_0}$, $\tau_L(T_0)$ तथा $\tau_C(T_0)$ का प्रारंभिक आकलन मिलता है)। वैकल्पिक रूप से, बाँध-शिखर विस्थापन का वक्र-अनुकूलन किया जा सकता है:

$$u_{irr}^{AAR}(t,\theta) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_C(\theta)}}}{1 + e^{-\frac{(t-\tau_l(\theta))}{\tau_C(\theta)}}} u_{irr}^{AAR,\infty} \tag{Q.19}$$

(जहाँ u_{irr}^{AAR} तथा $u_{irr}^{AAR,\infty}$ क्रमशः अपरिवर्तनीय, समय एवं तापमान-आश्रित विस्थापन तथा AAR के कारण अंतिम विस्थापन हैं) समय-प्राचलों का रूढ़िवादी आकलन देता है, किंतु $\varepsilon^{\infty}|_{T=T_0}$ का नहीं। लक्ष्य प्राचलों को इस प्रकार प्रसामान्यीकृत करना चाहिए कि सभी आरंभिक मान समान परिमाण-कोटि के हों, अर्थात्: a) आरंभिक परिवर्तन इतना बड़ा हो कि परिकलित परिणामों में परिवर्तन उत्पन्न करे (बड़े प्रसामान्यीकृत मान अभिज्ञान प्रक्रिया को तुरंत रोक सकते हैं); और b) प्राचलों का अंतिम परिवर्तन इतना छोटा हो कि अंतिम समाधान के चारों ओर बड़े दोलनों के बिना अभिज्ञात प्राचलों का सूक्ष्म अंतिम समायोजन संभव हो (अत्यल्प प्रसामान्यीकृत प्राचल बड़े अंतिम दोलन का कारण बन सकता है)।

16 अंतिम आँकड़ा-क्षेत्र को महत्त्व देने हेतु भार फलन प्रस्तुत किया जा सकता है, क्योंकि उसमें सामान्यतः बड़ा निरपेक्ष मान होता है और इस कारण वह सामान्य भारों के प्रभाव की तुलना में AAR प्रसार के अपरिवर्तनीय प्रभाव का अधिक प्रतिनिधि है। ध्यान दें कि इस निकाय-अभिज्ञान में तापीय विश्लेषण आवश्यक नहीं है और व्यावहारिक दृष्टि से इसमें प्रतिबल-विश्लेषण निवेशिका में सम्मिलित केवल तीन चरों का सरल संशोधन होता है।

Q.2 कलनविधि

17 दिए गए $\hat{\Delta} > 0$, $\Delta_0 \in (0, \hat{\Delta})$, तथा $\eta \in [0, \frac{1}{4})$: ((Nocedal and Wright, 2006))
$k = 0, 1, 2, \ldots$ के लिए
ρ_k का मूल्यांकन करें
यदि $\rho_k < \frac{1}{4}$
  $\Delta_{k+1} = \frac{1}{4}\Delta_k$
अन्यथा
  यदि $\rho_k > \frac{3}{4}$ और $\|p_k\| = \Delta_k$
    $\Delta_{k+1} = \min(2\Delta_k, \hat{\Delta})$
  अन्यथा
    $\Delta_{k+1} = \Delta_k$;
यदि $\rho_k > \eta$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$x_{k+1} = x_k + p_k$$
अन्यथा
$$x_{k+1} = x_k;$$
समाप्त (के लिए)

Q.3 MATLAB®सूत्रीकरण

18 प्रक्रिया को चित्र Q.2 में दर्शाए प्रवाह-आरेख के अनुसार MATLAB®में कूटबद्ध किया गया है। कूट मूलतः फलन के चारों ओर निर्मित है, जो $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ के यूक्लिडीय मानक के वर्ग को न्यूनतम करता है

$$\min\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2 = \min\left(f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 + \cdots + f_n(\mathbf{x})^2\right)$$

जहाँ

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2 = \sqrt{f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 \cdots f_n(\mathbf{x})^2}$$

$$\text{अवशेष} \qquad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$$

जहाँ $\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$ परिमित अवयव विश्लेषण द्वारा परिकलित विस्थापन का सदिश (चयनित बिंदु पर) है और $\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$ मापे गए संगत मानों का सदिश है। दोनों समय के फलन हैं।

19 MATLAB®में यह अपेक्षाकृत सरल संक्रिया है[1]

```
[x,resnorm,residual,exitflag,output] = lsqnonlin(fun,x0,lb,ub,options)
```

जहाँ

`fun`	न्यूनतम किया जाने वाला फलन
`x0`	आरंभिक मानों का सदिश
`lb`	निचली सीमा का सदिश
`ub`	ऊपरी सीमा का सदिश
`options`	इष्टतमीकरण विकल्पों को परिभाषित करने वाली संरचना
`resnorm`	x पर अवशेष का वर्गित 2-मानक: $\sum(fun(\mathbf{x}).^2)$
`residual`	समाधान पर उद्देश्य फलन का मान, सामान्यतः (fun(x).
`exitflag`	हलकर्ता को रोकने का कारण
`output`	इष्टतमीकरण प्रक्रिया की अंतिम सूचना (एक संरचना)

20 अधिकांश प्राचल अपेक्षाकृत सरल हैं, किंतु सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण समुच्चय `options` है। इस परियोजना में प्रयुक्त विकल्पों में निम्न सम्मिलित हैं

[1] एक नमूना MATLAB®कूट परिशिष्ट I.6.1 में दिया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

`MaxFunEvals`	फलन मूल्यांकनों की अधिकतम संख्या
`MaxIter`	पुनरावृत्तियों की अधिकतम संख्या
`TolFun`	फलन की सहिष्णुता
`tolx`	अज्ञातों की सहिष्णुता
`MaxPCGIter`	पूर्वानुकूलित संयुग्मी प्रवणता पुनरावृत्तियों की अधिकतम संख्या
`TolPCG`	PCG पुनरावृत्ति की समापन सहिष्णुता
`Typicalx`	वह सारणी जो प्राचल-सारणी $\mathbf{x}$ का प्ररूपी परिमाण निर्दिष्ट करती है, जिसका उपयो प्रवणता आकलन हेतु परिमित अंतरों के मापक्रमण में किया जाता है।
`FiniteDifferenceStepSize`	परिमित अंतरों हेतु सदिश चरण-आकार गुणक; इसे हस्तचालित रूप से परिभाषित किया ताकि अन्वेषण के समुचित कार्य को सुनिश्चित किया जा सके।

[21] परिमित-अंतर चरण-आकार ने हमारे विश्लेषण की प्रगति में निर्णायक भूमिका निभाई। यदि इसे निर्दिष्ट न किया जाए, तो अग्रगामी परिमित अंतरों के लिए इस प्राचल का पूर्वनिर्धारित मान sqrt(eps) होता है। किंतु हमारे प्रकरण-अध्ययन में यह मान परिवर्तन उत्पन्न करने के लिए अत्यल्प परिमित-अंतर चरण देता था; इसलिए निवेश चरों को परिवर्तित करने पर कार्यक्रम कोई अंतर नहीं पकड सका और अंततः इष्टतमीकरण उत्तर के रूप में आरंभिक अनुमान ही लौटा। परिमित-अंतर चरण-आकारों का सदिश (v) परिभाषित करने पर कार्यक्रम प्रत्येक चर x के लिए परिमित अंतर δ का परिकलन इस प्रकार करता है:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{v} \cdot \max(abs(\mathbf{x}), \mathrm{Typicalx}); \tag{Q.20}$$

[22] बडे मान परिभाषित करने से चरों में अधिक स्पष्ट अंतर उत्पन्न हुए और इस प्रकार अनुक्रिया-चर प्रांत में फलन का युक्तिसंगत अन्वेषण सुनिश्चित हुआ।

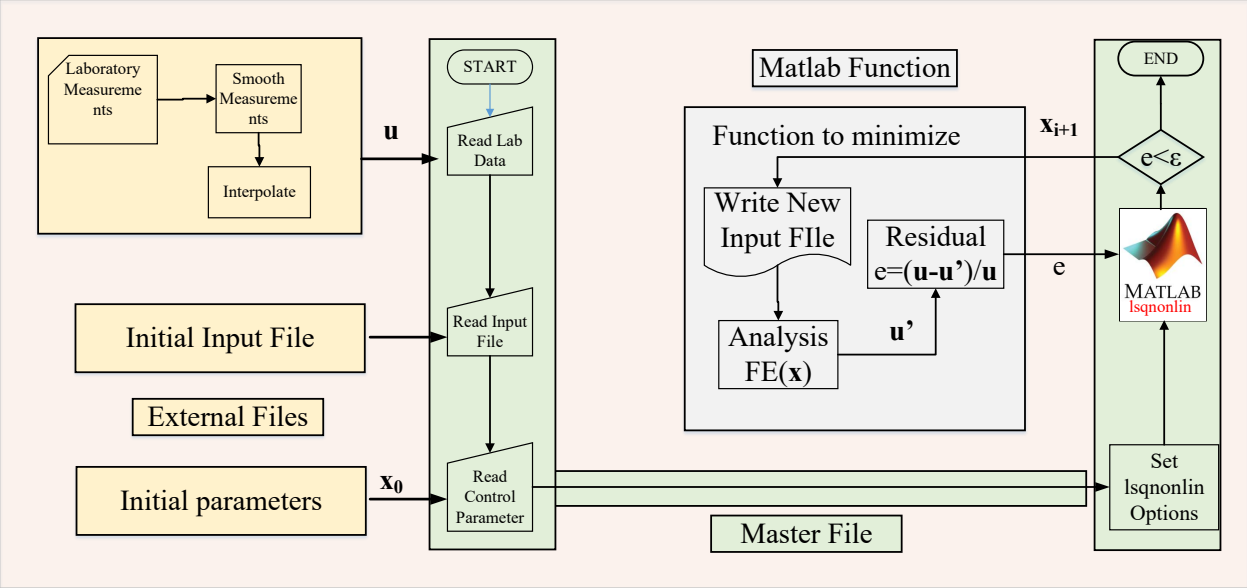
MATLAB®कूट

[23] MATLAB®कूट का वर्णन चित्र Q.2 में है और इसका अनुसरण अपेक्षाकृत सरल है।

[24] ध्यान दें कि इस प्रकरण में विश्लेषण क्षार-समुच्चय अभिक्रिया (AAR) से प्रभावित बाँध पर केंद्रित है। उद्देश्य AAR प्रतिरूप के प्राचल इस प्रकार निर्धारित करना है कि परिमित अवयव विश्लेषण से प्राप्त शिखर विस्थापन क्षेत्रीय मापों से निकटता से मेल खाएँ।

1. क्षेत्रीय माप पढे और समायोजित किए जाते हैं।
2. नियंत्रण निवेशिका पढकर तीन भागों में विभाजित की जाती है: मध्य भाग में कूट द्वारा संशोधित की जाने वाली पंक्तियाँ (AAR गुणों से संबद्ध) होती हैं, जबकि दोनों समीपवर्ती भाग अपरिवर्तित रहते हैं। न्यूनीकरण फलन द्वारा बाद में उपयोग के लिए संगत विभाजक पंक्ति-संख्याएँ अभिलिखित की जाती हैं।
3. उपयोक्ता-परिभाषित चर बाहरी Excel संचिका से पढे जाते हैं।
4. इष्टतमीकरण प्राचल निर्धारित किए जाते हैं।
5. तत्पश्चात् `lsqnonlin` फलन, §Q.3, आहूत किया जाता है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र Q.2: प्राचल-अभिज्ञान प्रक्रिया का प्रवाह-आरेख

फलन की परिभाषा

25 कलनविधि का एक महत्त्वपूर्ण भाग न्यूनतम किए जाने वाले फलन की परिभाषा है।

1. $\mathbf{x}$ के पदों में नई निवेशिका लिखें (प्रथम पुनरावृत्ति में $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ के पूर्वनिर्धारित मानों का उपयोग करें)। नियंत्रण संचिका का पूर्व विभाजन इसे सुगम बनाता है।
2. परिमित अवयव विश्लेषण करें (इस प्रकरण में Merlin का उपयोग करके)।
3. निर्गम संचिका से परिकलित विस्थापन $\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$ निकालें।
4. अवशेष $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$ परिकलित करें।
5. अवशेषों का मानक e परिकलित करें।
6. विस्थापनों का नया मानक-सदिश लौटाएँ।

26 कार्यक्रम का समापन पहले चयनित मानक और विकल्पों के आधार पर `lsqnonlin` द्वारा नियंत्रित होता है (§Q.3)। चूँकि MATLAB®कूट द्वारा न्यूनतम किए जाने वाले फलन को सीधे आहूत नहीं किया जाता, अतिरिक्त प्राचल (जैसे $\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$) `global` चरों के रूप में प्रेषित किए जाते हैं।

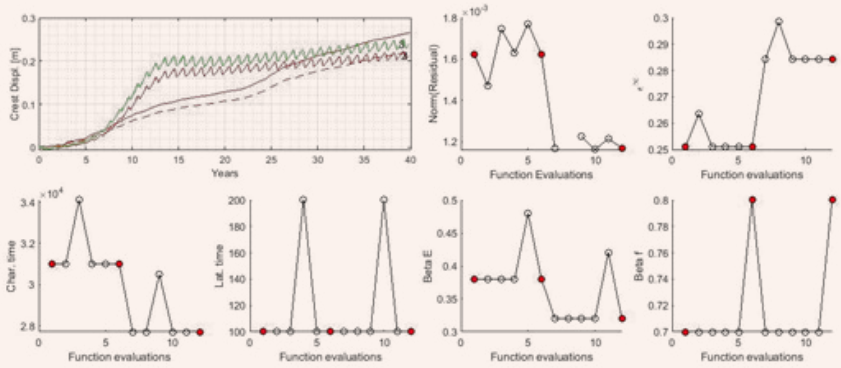
27 न्यूनतम-वर्ग अरैखिक इष्टतमीकरण करने हेतु एक MATLAB®कूट §I.6.1 में दिया गया है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Q.4 वास्तविक-समय दृश्यांकन

28 यह ध्यान में रखते हुए कि बाँध में AAR प्रसार के प्रत्येक अरैखिक परिमित अवयव अनुकार में 3 घंटे से अधिक समय लग सकता है और प्राचल-अभिज्ञान प्रक्रिया में अनेक विश्लेषण आवश्यक होते हैं, यह अत्यंत संगणन-गहन प्रक्रिया है।

29 अतः चित्र Q.3 में दर्शाया आलेखीय उपयोक्ता अंतरापृष्ठ प्रयुक्त होता है। प्रथम चतुर्थांश में मध्यवर्ती विस्थापनों ($\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$) की तुलना मापे गए विस्थापनों ($\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$) से की गई है। अन्य तीन चतुर्थांशों में अभिज्ञात किए जाने वाले चयनित चरों (ε^{∞}, τ_l, तथा τ_c) को पुनरावृत्ति संख्याओं के पदों में आलेखित किया गया है।



चित्र Q.3: क्षार-समुच्चय अभिक्रिया प्राचल-अभिज्ञान हेतु आलेखीय उपयोक्ता अंतरापृष्ठ (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021)

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

R सदिश कलन: एक परिचय

सारांश

यह परिशिष्ट इस पुस्तक की कुछ व्युत्पत्तियों को समझने के लिए आवश्यक सदिश कलन के मूल तत्त्वों को समाहित करता है। आगे अध्ययन हेतु अनुशंसित संदर्भ (Schey, 1973) है। ध्यान दें कि यह अनुभाग न तो सर्वांगीण है, न ही संपूर्ण; इसका उद्देश्य पूर्वज्ञान का पुनर्स्मरण कराना है।

R.1 मूल परिभाषाएँ 3105
R.1.1 अदिश के सापेक्ष अवकलज . . 3105
R.1.2 अपसरण 3107
R.1.3 प्रवणता 3110
R.2 समाकल प्रमेय 3113
R.2.1 सदिश का समाकल 3113
R.2.2 रेखा समाकल 3114
R.2.3 खंडशः समाकलन 3114
R.2.4 गाउस: अपसरण प्रमेय 3114
R.2.5 स्टोक्स प्रमेय 3116
R.2.6 ग्रीन: प्रवणता प्रमेय 3116

1 क्षेत्र किसी सतत प्रदेश पर परिभाषित फलन है। इसमें *अदिश क्षेत्र* $g(\mathbf{x})$, *सदिश क्षेत्र* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ अथवा *प्रदिश क्षेत्र* $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ सम्मिलित हैं।

2 सर्वप्रथम हम *अवकल सदिश संकारक* “नैबला” प्रस्तुत करते हैं, जिसे ∇ से निरूपित किया जाता है

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

3 यह भी ध्यान दें कि सदिश क्षेत्र के अवकलन की उतनी ही विधियाँ हैं जितनी सदिशों के गुणन की; यह सादृश्य तालिका R.1 में दिया गया है।

गुणन		अवकलन		प्रदिश की कोटि
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$	बिंदु	$\nabla\cdot\mathbf{v}$	अपसरण	$\downarrow$
$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$	सदिश गुणन	$\nabla\times\mathbf{v}$	कुंतल	$\rightarrow$
$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$	प्रदिश	$\nabla\mathbf{v}$	प्रवणता	$\uparrow$

तालिका R.1: गुणन तथा अवकलन संकारकों के बीच सादृश्य

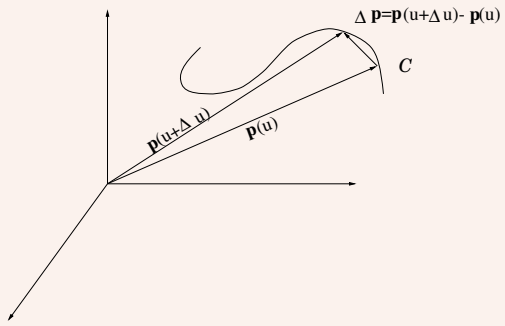
R.1 मूल परिभाषाएँ

R.1.1 अदिश के सापेक्ष अवकलज

4 अदिश u के सापेक्ष सदिश $\mathbf{p}(u)$ का अवकलज, चित्र R.1, निम्न प्रकार परिभाषित है

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} \equiv \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{p}(u+\Delta u) - \mathbf{p}(u)}{\Delta u}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र R.1: स्थिति सदिश $\mathbf{p}$ का अवकलन

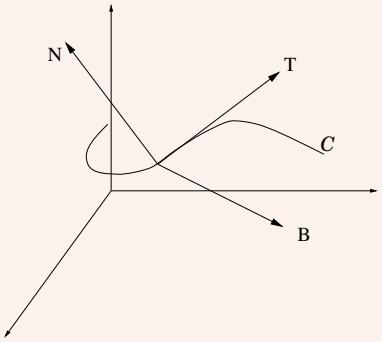
5 यदि $\mathbf{p}(u)$ एक *स्थिति सदिश* $\mathbf{p}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$ है, तो

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

वक्र की स्पर्शरेखा की दिशा में सदिश है।

6 यदि u समय t है, तो $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ वेग है।

7 *अवकल ज्यामिति* में यदि हम फलन $\mathbf{p}(u)$ द्वारा परिभाषित वक्र C पर विचार करें, तो $\frac{d\mathbf{p}}{du}$, C का स्पर्शरेखीय सदिश है। यदि u वक्र के किसी बिंदु से मापा गया वक्ररेखीय निर्देशांक s है, तो $\frac{d\mathbf{p}}{ds}$, C का एकक स्पर्शरेखीय सदिश $\mathbf{T}$ है, चित्र R.2। और निम्न संबंध प्राप्त होते हैं



चित्र R.2: वक्र की वक्रता

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{T}$$
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$$
$$\kappa = \text{ वक्रता}$$
$$\rho = \frac{1}{\kappa} \text{ वक्रता त्रिज्या}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

यह भी ध्यान दें कि यदि $\left|\frac{d\mathbf{p}}{ds}\right| \neq 0$ है, तो $\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds} = 0$।

R.1.1.1 उदाहरण R.1: वक्र की स्पर्शरेखा

$t = 2$ पर वक्र $x = t^2 + 1$, $y = 4t - 3$, $z = 2t^2 - 6t$ का एकक स्पर्शरेखीय सदिश निर्धारित करें।

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(t^2+1)\mathbf{i} + (4t-3)\mathbf{j} + (2t^2-6t)\mathbf{k}\right] = 2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t-6)\mathbf{k}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right| = \sqrt{(2t)^2 + (4)^2 + (4t-6)^2}$$

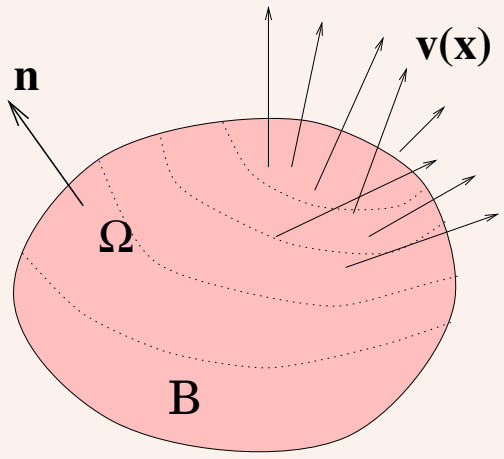
$$\mathbf{T} = \frac{2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t-6)\mathbf{k}}{\sqrt{(2t)^2 + (4)^2 + (4t-6)^2}}$$

$$= \frac{4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(4)^2 + (4)^2 + (2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k} \quad \text{के लिए} \quad t = 2$$

R.1.2 अपसरण

R.1.2.1 सदिश

8 सीमा Ω वाले पिंड $\mathcal{B}$ के सदिश क्षेत्र का *अपसरण*, चित्र R.3, यह मानकर परिभाषित किया जाता है कि पृष्ठ के प्रत्येक बिंदु पर अभिलंब $\mathbf{n}$ है और पिंड को सदिश क्षेत्र $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ घेरे हुए है। पिंड का आयतन $v(\mathcal{B})$ है।



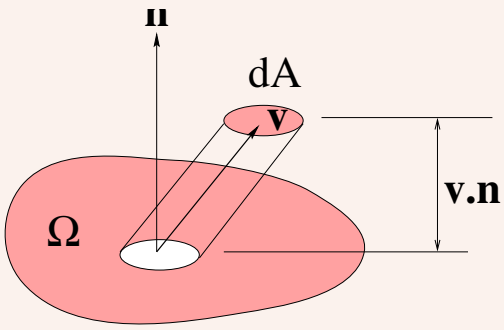
चित्र R.3: ठोस प्रदेश को पार करता सदिश क्षेत्र

9 अतः सदिश क्षेत्र का अपसरण निम्न प्रकार परिभाषित है

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv \lim_{v(\mathcal{B})\to 0} \frac{1}{v(\mathcal{B})} \int_{\Omega} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dA$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

जहाँ $\mathbf{v}.\mathbf{n}$ को प्रायः *अभिवाह* कहते हैं और यह एकक समय में dA से गुजरने वाले "तरल" का कुल आयतन निरूपित करता है, चित्र R.4 यह आयतन बेलन के आधार dA और उसकी ऊँचाई $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ के गुणनफल के बराबर

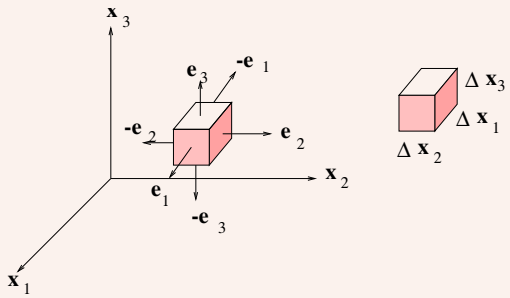


चित्र R.4: क्षेत्रफल dA से होकर अभिवाह

है। सीमा की स्पर्शरेखीय प्रवाह-रेखाएँ किसी तरल को बाहर नहीं जाने देतीं, जबकि सीमा के अभिलंब प्रवाह-रेखाएँ उसे सर्वाधिक दक्षता से बाहर जाने देती हैं।

[10] इस प्रकार अपसरण सदिश क्षेत्र के परिवर्तन की दर मापता है।

[11] यह परिभाषा स्पष्टतः ठोस प्रदेश के आकार से स्वतंत्र है। फिर भी Δx_1, Δx_2 तथा Δx_3 भुजाओं वाले आयताकार समांतरषट्फलक, जिसके अभिलंब सदिश निर्देशांक अक्षों की दिशाओं में हैं, पर विचार करके अपसरण को समझा जा सकता है, चित्र R.5। यदि मूलबिंदु के निकटतम कोने को $\mathbf{x}$ पर स्थित मानें,



चित्र R.5: अपसरण के मूल्यांकन हेतु अत्यल्प अवयव

तो अभिलंब सदिश $\mathbf{e}_1$ और $-\mathbf{e}_1$ वाले दो पृष्ठों का योगदान (समीकरण R.1.2.1 से) है

$$\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\to 0} \frac{1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_2\Delta x_3} [\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta x_1\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{v}(x)\cdot(-\mathbf{e}_1)]dx_2dx_3$$

अथवा

$$\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\to 0} \frac{1}{\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_2\Delta x_3} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta x_1\mathbf{e}_1)-\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\Delta x_1}\cdot\mathbf{e}_1 dx_2dx_3 = \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta x_1}\cdot\mathbf{e}_1$$
$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1}\cdot\mathbf{e}_1$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः इसका व्यापकीकरण किया जा सकता है

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_i$$

अथवा वैकल्पिक रूप से

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3\right) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \partial_i v_i = v_{i,i}\end{aligned}$$

सदिश का अपसरण एक *अदिश* है।

लाप्लासीय संकारक निम्न प्रकार परिभाषित है

$$\nabla^2 F \equiv \nabla\nabla F = F_{,ii}$$

R.1.2.1.1 उदाहरण R.2: सदिश का अपसरण

बिंदु $(1,-1,1)$ पर सदिश $\mathbf{A} = x^2z\mathbf{i} - 2y^3z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$ का अपसरण निर्धारित करें।

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (x^2z\mathbf{i} - 2y^3z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial x^2z}{\partial x} + \frac{\partial - 2y^3z^2}{\partial y} + \frac{\partial xy^2z}{\partial z} \\ &= 2xz - 6y^2z^2 + xy^2 \\ &= 2(1)(1) - 6(-1)^2(1)^2 + (1)(-1)^2 = -3 \quad \text{पर} \quad (1,-1,1)\end{aligned}$$

R.1.2.2 द्वितीय-कोटि प्रदिश

समीकरण R.1.2.1 के सादृश्य से, द्वितीय-कोटि प्रदिश क्षेत्र $\mathbf{T}$ का अपसरण है

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x}) \equiv \lim_{v(\mathcal{B})\to 0} \frac{1}{v(\mathcal{B})} \int_\Omega \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA$$

जो सदिश क्षेत्र है

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_p}\mathbf{e}_q$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।
प्रारूप

R.1.3 प्रवणता

R.1.3.1 अदिश क्षेत्र

16 अदिश क्षेत्र $g(\mathbf{x})$ की *प्रवणता* वह सदिश क्षेत्र $\nabla g(\mathbf{x})$ है, जिसके लिए किसी भी एकक सदिश $\mathbf{v}$ हेतु $\mathbf{v}$ की दिशा में दिशिक अवकलज dg/ds निम्न है

$$\frac{dg}{ds} = \nabla g \cdot \mathbf{v}$$

जहाँ $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{ds}$ है। ध्यान दें कि परिभाषा में किसी निर्देशांक निकाय का संदर्भ नहीं है। अतः प्रवणता एक *सदिश निश्चर* है।

17 किसी आयताकार कार्तीय निर्देशांक निकाय में घटक ज्ञात करने के लिए हम उपयोग करते हैं

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{dx_i}{ds}\mathbf{e}_i$$
$$\frac{dg}{ds} = \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}$$

जिसे प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathbf{e}_i$$

अथवा

$$\nabla\phi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi$$
$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

और ध्यान दें कि यह एक *सदिश* क्षेत्र परिभाषित करता है।

18 अदिश क्षेत्र की प्रवणता का भौतिक महत्त्व यह है कि वह उस दिशा में संकेत करती है जिसमें क्षेत्र सर्वाधिक तीव्रता से बदलता है (त्रिविमीय पृष्ठ के लिए प्रवणता, पृष्ठ के स्पर्शी तल के अभिलंब की दिशा में होती है)। सदिश $\|\nabla g(\mathbf{x})\|$ समोच्च रेखाओं के लंबवत है।

19 $\nabla g(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ की दिशा में अदिश क्षेत्र के परिवर्तन की दर देता है।

R.1.3.1.1 उदाहरण R.3: अदिश क्षेत्र की प्रवणता I

बिंदु $(1,-2,-1)$ पर दिशा $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ में $\phi = x^2yz + 4xz^2$ की प्रवणता निर्धारित करें।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

$$\nabla\phi = \nabla(x^2yz + 4xz^2) = (2xyz + 4z^2)\mathbf{i} + (x^2z\mathbf{j} + (x^2y + 8xz)\mathbf{k}$$
$$= 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k} \quad \text{पर} \quad (1, -2, -1)$$
$$\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$
$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = (8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}$$

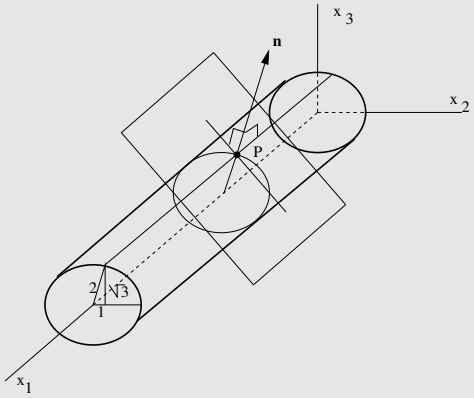
चूँकि यह अंतिम मान धनात्मक है, उस दिशा में ϕ बढ़ता है।

R.1.3.1.2 उदाहरण R.4: अदिश क्षेत्र की प्रवणता ii

सांतत्यक में प्रतिबल प्रदिश कार्तीय अक्षों के सापेक्ष निम्न प्रकार दिया गया है

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3^2 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

उस तल के बिंदु $P(2, 1, \sqrt{3})$ पर प्रतिबल सदिश (अथवा कर्षण) निर्धारित करें, जो P पर बेलनाकार पृष्ठ $x_2^2 + x_3^2 = 4$ का स्पर्शी है,



बिंदु P पर प्रतिबल प्रदिश है

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

P पर पृष्ठ का एकक अभिलंब इससे प्राप्त होता है

$$\nabla(x_2^2 + x_3^2 - 4) = 2x_2\mathbf{2_2} + \mathbf{2x_3e_3}$$

बिंदु P पर,

$$\nabla(x_2^2 + x_3^2 - 4) = 2\mathbf{2_2} + \mathbf{2\sqrt{3}e_3}$$

अतः P पर एकक अभिलंब है

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_3$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अतः कर्षण सदिश निम्न से निर्धारित होगा

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5/2 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

अथवा $\mathbf{t}^{\mathbf{n}} = \frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \sqrt{3}\mathbf{e}_3$

R.1.3.2 सदिश क्षेत्र

20 सदिश क्षेत्र की प्रवणता को इस प्रकार भी परिभाषित किया जा सकता है

$$[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

अर्थात् $[\nabla\mathbf{v}]_{ij}$, jवें निर्देशांक अक्ष के सापेक्ष $\mathbf{v}$ के iवें घटक के परिवर्तन की दर देता है।

21 $\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}}$ और $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$ का अंतर ध्यान दें। आव्यूह निरूपण में एक दूसरे का परिवर्त है।

22 सदिश की प्रवणता कोटि 2 का प्रदिश है।

23 सदिश की प्रवणता की ज्यामितीय व्याख्या की जा सकती है, चित्र R.6। यदि दो बिंदु a और b एक-दूसरे के निकट हों (अर्थात् Δs अत्यल्प हो) और एकक सदिश $\mathbf{m}$, a से b की दिशा में हो, तो a पर सदिश क्षेत्र का मान $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ तथा b पर उसका मान $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})$ है। चूँकि प्रांत में स्थिति के साथ सदिश क्षेत्र बदलता है, ये दोनों सदिश लंबाई और अभिविन्यास दोनों में भिन्न हैं।

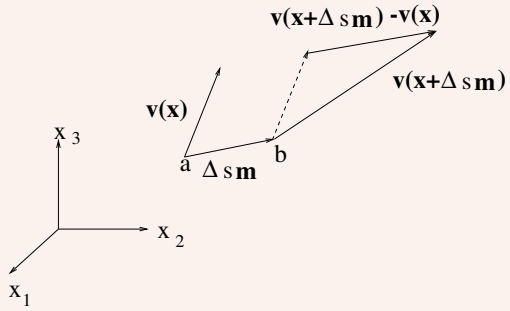
24 अब यदि $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ की एक प्रति को स्थानांतरित करके b पर रखें, तो दोनों सदिशों का अंतर देखा जा सकता है। $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ और $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})$ के शीर्षों को जोड़ने वाला सदिश $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})$ है, अर्थात् सदिश में परिवर्तन। इस परिवर्तन को Δs से विभाजित करने पर निर्दिष्ट दिशा में चलते हुए परिवर्तन की दर प्राप्त होती है।

25 Δs के शून्य की ओर जाने पर सीमा लेने से प्राप्त होता है

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\Delta s} \equiv D\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{m}$$

26 राशि $D\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{m}$ को *दिशिक अवकलज* कहते हैं, क्योंकि यह $\mathbf{m}$ की दिशा में चलते हुए सदिश क्षेत्र के परिवर्तन की दर देती है।

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।



चित्र R.6: सदिश की प्रवणता

R.1.3.2.1 उदाहरण R.5: सदिश क्षेत्र की प्रवणता

द्विविमीय सरल सदिश क्षेत्र की प्रवणता निर्धारित करनी है, जो निम्न है

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2, 2xy)$$

इस सदिश क्षेत्र की प्रवणता $\nabla\mathbf{F}$ ज्ञात करने के लिए सदिश के प्रत्येक घटक के x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलज परिकलित करते हैं, अतः

$$\nabla\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)$$

अथवा

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}x^2 = 2x \tag{R.1}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}2xy = 2x \tag{R.2}$$

अतः

$$\nabla\mathbf{F} = (2x, 2x)$$

R.2 समाकल प्रमेय

R.2.1 सदिश का समाकल

[27] सदिश $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{e}_1 + R_2(u)\mathbf{e}_2 + R_3(u)\mathbf{e}_3$ का समाकल निम्न प्रकार परिभाषित है

$$\int \mathbf{R}(u)du = \mathbf{e}_1\int R_1(u)du + \mathbf{e}_2\int R_2(u)du + \mathbf{e}_3\int R_3(u)du$$

यदि ऐसा सदिश $\mathbf{S}(u)$ विद्यमान हो कि $\mathbf{R}(u) = \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))$, तो

$$\int \mathbf{R}(u)du = \int \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))\,du = \mathbf{S}(u) + c$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

R.2.2 रेखा समाकल

[28] दिया है $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{e}_1 + y(u)\mathbf{e}_2 + z(u)\mathbf{e}_3$, जहाँ $\mathbf{r}(u)$ स्थिति सदिश है जो बिंदु P_1 को P_2 से जोड़ने वाला वक्र C परिभाषित करता है तथा इन बिंदुओं पर क्रमशः $u = u_1$ और $u = u_2$ हैं। साथ ही $A(x, y, z) = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$, C के अनुदिश परिभाषित और सतत सदिश फलन है। तब P_1 से P_2 तक C के अनुदिश $\mathbf{A}$ के स्पर्शरेखीय घटक का समाकल निम्न है

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

यदि $\mathbf{A}$ बल हो, तो यह समाकल संगत कार्य को निरूपित करेगा।

[29] यदि समोच्च बंद है, तो *समोच्च समाकल* को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

[30] यह दर्शाया जा सकता है कि यदि $\mathbf{A} = \nabla\phi$, तो

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \quad P_1 \text{ को } P_2 \text{ से जोड़ने वाले पथ } C \text{ से स्वतंत्र है}$$
$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{बंद समोच्च रेखा के अनुदिश}$$

R.2.3 खंडशः समाकलन

[31] खंडशः समाकलन का सूत्र है

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du \tag{R.3}$$

R.2.4 गाउस: अपसरण प्रमेय

[32] सर्वाधिक व्यापक प्रकरण में हमारे पास है

$$\int_\Omega \delta F = \int_{\delta\Omega} F$$

[33] अपसरण प्रमेय (जिसे ओस्त्रोग्राद्स्की प्रमेय भी कहते हैं) ठोस यांत्रिकी में बार-बार आता है और इसे निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{v}\,d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{v}.\mathbf{n}\,d\Gamma \quad \text{अथवा} \quad \int_\Omega v_{i,i}\,d\Omega = \int_\Gamma v_i n_i\,d\Gamma \tag{R.4}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

अर्थात् आयतन पर सदिश अपसरण, पृष्ठ पर सदिश अभिवाह के बराबर है।

34 2D-1D रूपांतरणों के लिए हमारे पास है

$$\int_A \nabla\cdot\mathbf{q} dA = \oint_s \mathbf{q}^T \mathbf{n} ds \tag{R.5}$$

35 इस प्रमेय को कभी-कभी आकाश में ग्रीन प्रमेय कहा जाता है।

36 *ग्रीन-गाउस* प्रमेय

$$\int_\Omega \Phi \nabla\cdot\mathbf{v} d\Omega = \int_\Gamma \Phi \mathbf{v}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_\Omega (\nabla\Phi)^T \mathbf{v} d\Omega \tag{R.6}$$

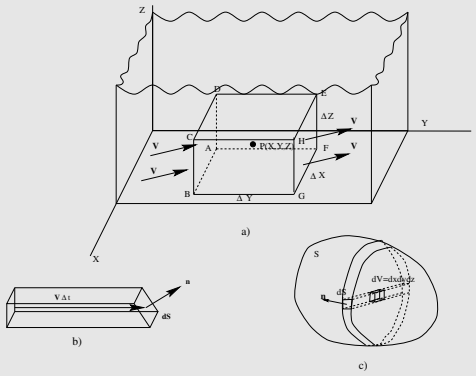
यदि $\mathbf{v}^T = [\ \Psi \quad 0 \quad 0\ ]$ चुनें, तो प्राप्त होता है

$$\int_\Omega \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} d\Omega = \int_\Gamma \Phi \Psi n_x d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Psi d\Omega$$

R.2.4.1 उदाहरण R.6: अपसरण प्रमेय की भौतिक व्याख्या

अपसरण प्रमेय की भौतिक व्याख्या प्रस्तुत करें।

किसी तरल का वेग क्षेत्र $\mathbf{v}(x,y,z)$ है। सर्वप्रथम $P(x,y,z)$ पर केंद्रित और $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ विमाओं वाले समांतरषट्फलक में प्रति एकक आयतन, प्रति एकक समय निवल अंतर्वाह निर्धारित करना है (a)।



$$\begin{aligned}
v_x\big|_{x,y,z} &\approx v_x \\
v_x\big|_{x-\Delta x/2,y,z} &\approx v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x \quad \text{AFED} \\
v_x\big|_{x+\Delta x/2,y,z} &\approx v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x \quad \text{GHCB}
\end{aligned}$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

x तलों के आर-पार प्रति एकक समय निवल अंतर्वाह है

$$\Delta V_x = \left(v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z - \left(v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z$$
$$= \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

इसी प्रकार

$$\Delta V_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$
$$\Delta V_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

अतः प्रति एकक आयतन और प्रति एकक समय कुल वृद्धि निम्न होगी

$$\frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \text{div } \mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}$$

इसके अतिरिक्त, यदि Δt के दौरान dS को पार करने वाले कुल तरल पर विचार करें (b), तो यह $(\mathbf{v}\Delta t)\cdot\mathbf{n}dS = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS\Delta t$ होगा; अथवा प्रति एकक समय dS को पार करने वाले तरल का आयतन $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$ है।

अतः किसी सुवेच्छ आयतन (c) के लिए, बंद पृष्ठ S को प्रति एकक समय पार करने वाले तरल की कुल मात्रा $\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$ है। किंतु यह $\int_V \nabla\cdot\mathbf{v}dV$ (समीकरण R.2.4.1) के बराबर है; अतः

$$\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{v}dV$$

जो अपसरण प्रमेय है।

R.2.5 स्टोक्स प्रमेय

37 स्टोक्स प्रमेय कहता है कि

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS = \int\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

जहाँ S, C द्वारा परिसीमित दो फलकों वाला खुला पृष्ठ है।

R.2.6 ग्रीन: प्रवणता प्रमेय

38 तल में ग्रीन प्रमेय, स्टोक्स प्रमेय का विशेष प्रकरण है।

$$\oint(Rdx + Sdy) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)dxdy$$

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भाग II–IV एवं परिशिष्टों के संदर्भ

AASHTO, LRFD (2017). *AASHTO LRFD Bridge Design Specifications*. 8th Edition. AASHTO; Subcommittee on Bridges.

AASHTO, Seismic (2011). *AASHTO Guide Specifications for LRFD Seismic Bridge Design*. AASHTO; Subcommittee on Bridges.

Abramowitz, M. and I. Stegun (1970). *Handbook of Mathematical Functions*. Tech. rep. Applied Mathematics Series, No. 55. National Bureau of Standard.

Academie Royale des Sciences (1741). "*Eloge de M. De La Hire*". In: *Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Annee MDCCXVIII*, pp. 76–89.

ACI 318 (2019). *Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and commentary*. American Concrete Institute.

ACI 318.2-14 (2014). *Building code requirements for Concrete Thin Shells (ACI 318.2-14) and commentary*. Tech. rep. American Concrete Institute.

American Institute of Steel Construction (2016). *Specification for structural steel building ANSI/AISC 360-16*. American Institute of Steel Construction.

American Society of Civil Engineers (2017). *Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings*. ASCE/SEI 41-17. Reston, VA: American Society of Civil Engineers.

Anthropic (2025). *Claude*. https://www.anthropic.com/claude. AI assistant.

Applied Technology Council (2012a). *Seismic Performance Assessment of Buildings Volume 1 - Methodology*. Tech. rep. FEMA P-58-1. Federal Emergency Management Agency.

– (2012b). *Seismic performance assessment of buildings, (Volume 1): Methodology*. Tech. rep. ATC-58-1. Redwood City, CA: Federal Emergency Management Agency.

ASCE/SEI 7-16 (2017). *Minimum Design Loads For Buildings and Other Structures*. Tech. rep. American Society of Civil Engineers.

ATC-13 (1985). *Earthquake damage evaluation data for California. Report No.ATC-13*. Tech. rep. Redwood City, CA: Applied Technology Council.

ATC-40 (1996). *Seismic evaluation and retrofit of concrete buildings. Volume 1*. Tech. rep. Redwood City, CA: Applied Technology Council.

Atkinson, G. and D. Boore (1995). "Ground-motion relations for eastern North America". In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 85.1, pp. 17–30.

Baker, A. and A. Amarakone (1964). "" Inelastic Hyperstatic Frames Analysis"". In: *Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete*, pp. 85–142.

Baker, A. L. L. (1956). *The ultimate-load theory applied to the design of reinforced & prestressed concrete frames*. Concrete Publications.

Baker, E., L Kovalevsky, and F. Rish (1972). *Structural Analysis of Shells*. McGraw Hill.

Baker, J. (2015). "Efficient analytical fragility function fitting using dynamic structural analysis". In: *Earthquake Spectra* 31.1, pp. 579–599.

Baker, J. and N. Jayaram (2008). "Correlation of spectral acceleration values from NGA ground motion models". In: *Earthquake Spectra* 24, pp. 299–317.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Baker, W. F. (2023). *William Baker: Structural Engineer and Problem Solver*. The Grainger College of Engineering, University of Illinois Urbana–Champaign.
Bate, S. et al. (1962). "Ultimate Load Design Of Concrete Structures." In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 21.2, pp. 399–442.
Bathe, K. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall Inc.
Bažant, Ž. (1984). "Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal". In: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 110.4, pp. 518–535.
Bendixen, A. (1914). *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*. German. [The Method of Alpha-Equations for the Analysis of Frame Structures]. Germany.
Benjamin, J. and C. Cornell (1970). *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*. New York: McGraw Hill.
Berry, M., M. Parrish, and M. Eberhard (2004). *Peer Structural Performance database*. Tech. rep. Pacific Earthquake Engineering Research Center; University of California, Berkeley.
Bertero, R. and V. Bertero (2002). "Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach". In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31, pp. 627–652.
Bhatt, P (1986). *Programming the matrix analysis of skeletal structures*. E. Horwood.
Billington, D. (1965). *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
Billington, D. (1983). *Structural Studies*. Tech. rep. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Bisplinghoff, R. L., J. W. Mar, and T. H. Pian (1965). *Statics of deformable solids*. Dover.
Bisshopp, K. and D. C. Drucker (1945). "Large deflection of cantilever beams". In: *Quarterly of applied mathematics* 3.3, pp. 272–275.
Bolt, B. (1973). "Duration of strong ground motion". In: *Proceedings of the 5th World Conference on Earthquake Engineering*. Vol. 1, pp. 1304–1313.
Bommer, J. and A. Martinez-Pereira (1999). "The effective duration of earthquake strong motion". In: *Journal of earthquake engineering* 3.02, pp. 127–172.
Boore, D., W. Joyner, and T. Fumal (1997). "Equations for estimating horizontal response spectra and peak acceleration from western North American earthquakes: A summary of recent work". In: *Seismological research letters* 68.1, pp. 128–153.
Bozorgnia, Y. and V. Bertero (2003). "Damage spectra: characteristics and applications to seismic risk reduction". In: *Structural Engineering, ASCE* 129, pp. 1330–1340.
Bradley, B. (2010). "A generalized conditional intensity measure approach and holistic ground-motion selection". In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 39.12, pp. 1321–1342.
Brandonisio, G. and A. De Luca (2020). "Statics of Buttressed Masonry Arches in Light of Traditional Design Rules". In: *Proceedings of XXIV AIMETA Conference 2019* 24. Springer, pp. 2162–2176.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Branson, D. E. et al. (1963). *Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams*. Tech. rep. Alabama. State Highway Department.
Brühwiler, E. and F. Whitman (1990). "Failure of Dam Concrete Subjected to Seismic Loading Conditions". In: *Engineering Fracture Mechanics* 35.3, pp. 565–572.
Brühwiler, E. (1988). *Fracture Mechanics of Dam Concrete Subjected to Quasi-Static and Seismic Loading Conditions*. (in German). Lausanne: Doctoral Thesis No 739, Swiss Federal Institute of Technology.
Bryant, L., J. Brokaw, and P. Mlakar (Jan. 1993). *Reliability Modeling of Concrete Overstressing*. Tech. rep. Report Submitted to U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station. JAYCOR, Vicksburg Mississippi.
Bucher, C. (2009). *Computational analysis of randomness in structural mechanics: Structures and infrastructures book series, Vol. 3*. Crc Press.
CALTRANS, S. (2013). *CALTRANS Seismic Design Criteria*. California Department of Transportation.
Campbell, K. and Y. Bozorgnia (2012). "Cumulative absolute velocity (CAV) and seismic intensity based on the PEER-NGA database". In: *Earthquake Spectra* 28.2, pp. 457–485.
Carol, I and J Murcia (1989). "Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an 'exact'formulation—I. Theory". In: *Computers & structures* 33.1, pp. 79–87.
Castigliano, A. (1879). *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Vol. 1. AF Negro.
Cedolin, L., S. Dei Poli, and I. Iori (1987). "Tensile Behavior of Concrete". In: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 113.3.
Cella, P. (1999). "Reexamining the catenary". In: *The College Mathematics Journal* 30.5, pp. 391–393.
Center, P. E. E. R. (2010). *Pacific Earthquake Engineering Research (PEER) Performance-Based Earthquake Engineering Framework*.
Chen, W. and H. Zhang (1990). *Structural Plasticity*. Springer-Verlag.
Chopra, A. and R. Goel (1999). "Capacity-Demand-Diagram Methods Based on Inelastic Design Spectrum". In: *Earthquake Spectra* 15, pp. 637–656.
Civil Engineers, A. S. of (2017). *Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings*. ASCE/SEI 41-17.
– (2022). *Minimum Design Loads and Associated Criteria for Buildings and Other Structures*. ASCE/SEI 7-22.
Clough, R. W. (1966). "Effect of stiffness degradation on earthquake ductility requirements". In: *Proceedings of Japan earthquake engineering symposium*.
Clough, R. and J. Penzien (1993). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill Inc., London, UK.
Cohen, I. B. (2002). "Newton's concepts of force and mass, with notes on the Laws of Motion". In: *The Cambridge Companion to Newton*. Ed. by I. Cohen and G. Smith.
Cornell, C. A. (1964). *Stochastic process models in structural engineering*. Department of Civil Engineering, Stanford University.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Cornell, C. and F. Jalayer (2002). “Factored nonlinear displacement demand estimation methods for probability-based safety assessment”. In: *Annual Meeting Research Digest No. 2002-7, A publication of the Pacific Earthquake Engineering Research Center*.

Coulomb, C. (1773). “*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l’architecture*”. In: *mémoires de l’académie Royale des Sciences* 7, pp. 343–382.

Couplet, C. (1729). “*De la poussée des voûtes*”. In: *Mémoires de l’académie Royale des Sciences*, pp. 79–117.

– (1730). “*Seconde partie de l’examen des voûtes*”. In: *mémoires de l’académie Royale des Sciences*, pp. 117–141.

Courant, R., K. Friedrichs, and H. Lewy (1967). “On the partial difference equations of mathematical physics”. In: *IBM Journal of Research and Development* 11.2, pp. 215–234.

Cuthill, E. and J. McKee (1969). “Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices”. In: *Proceedings of the 1969 24th national conference*, pp. 157–172.

Da Vinci, L. (1490). *Códice de Madrid I*. Biblioteca Nacional de España.

d’Alembert, J. l. R. (1743). *Traite de dynamique*. First edition. Collation: [4], xxvi, [2], 186, [2]. With 4 folding engraved plates. Paris: David l’aine.

D’Ambrisi, A. and M. Mezzi (2015). “An energy-based approach for nonlinear static analysis of structures”. In: *Bulletin of Earthquake Engineering* 13.5, pp. 1513–1530.

Danyzy, A. (1732). “Méthode générale pour déterminer la résistance qu’il faut opposer à la poussée des voûtes”. In: *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier* 2.1718-1745, pp. 40–56.

de Belidor, B. F. (1729). *La science des Ingegnieurs*. Chez Nyon.

– (1757). *Nouveau cours de mathématique a l’usage de l’artillerie et du génie...* Chez Nyon.

de la Hire, P. (1712). “*Sur la construction des voûtes dans les édifices*”. In: *mémoires de l’académie Royale des Sciences* 69.

de La Hire, Philippe (1695). *Traité de Mécanique, où l’on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts, et les propriétés des corps pesans lesquelles ont un plus grand usage dans la physique*. La Compagnie des libraires.

Den Hartog, J. P. (1961). *Strength of materials*. Dover.

Dennis, J. and R. Schnabel (1983). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Englewood Cliffs.

Desayi, P (1964). “Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete”. In: *Journal of the American Concrete Institute* 61.3, pp. 1169–1183.

Desmorat, R. et al. (2008). *Anisotropic damage model for multifibre dynamics and pseudo-dynamics analyses*.

Dolati, S. S. K., A. Matamoros, and W. Ghannoum (2023). “Evaluating the effects of loading protocol on the strength and deformation capacity of Flexure-Shear critical concrete columns”. In: *Engineering Structures* 279, p. 115592.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Douglas, J (2011). *Ground Motion Estimation Equations 1964–2010*.
Duda, H. (1990). “Stress-Crack-Opening Relation and Size Effect in High-Strength Concrete”. In: *Darmastad Concrete* 5, pp. 35–46.
Eddy, H. T. (1878). *Researches in graphical statics*. D. van Nostrand.
Eisenberg, M. A. and L. Malvern (1973). “On Finite Element Integration in Natural Co-ordinates”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7, pp. 574–575.
Elnashai, A. and L. Di Sarno (2015). *Fundamentals of earthquake engineering: from source to fragility*. John Wiley & Sons.
Elwood, K. and J. Moehle (2002). *Shake table tests and analytical studies on the gravity load collapse of reinforced concrete frames*. Tech. rep. PEER Report 2003/01. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California.University of California, Berkeley.
Erberik, M. (2015). “Seismic Fragility Analysis”. In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. by M. Beer et al. Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–10.
Estekanchi, H., A. Vafai, and M. Sadeghazar (2004). “Endurance time method for seismic analysis and design of structures”. In: *Scientia Iranica* 11, pp. 361–370.
European Committee for Standardization (CEN) (2010). *Eurocode – Basis of Structural Design (EN 1990:2002+A1:2005+A1:2005/AC:2010)*. European Standard. Brussels, Belgium: CEN.
Felippa, C. (1999). *Finite Element Lecture Notes*. Tech. rep. Dept. of Aerospace Engineering, University of Colorado, Boulder.
– (2000). *Lecture Notes in Advanced Finite Element Methods (ASEN 5367)*. Tech. rep. Dept. of Aerospace Engineering, University of Colorado, Boulder.
FEMA (1997a). *NEHRP commentary on the guidelines for seismic rehabilitation of buildings*. Tech. rep. Washington, DC: Federal Emergency Management Agency.
– (1997b). *NEHRP guidelines for seismic rehabilitation of buildings*. Tech. rep. Washington, DC: Federal Emergency Management Agency.
FEMA (2012). *Seismic Performance Assessment of Buildings*. P-58.
FEMA-356 (2000). *Prestandard and Commentary for the Seismic Rehabilitation of Buildings*. Tech. rep. Federal Emergency Managemt Agency.
Feodossiev, V. (1977). *Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis*. Traduction Française. Moscou: Editions MIR.
Filiatrault, A. (2013). *Elements of earthquake engineering and structural dynamics*. Presses inter Polytechnique.
Filippou, F., E. Popov, and V. Bertero (Nov. 1983). “Modeling of Reinfored Concrete Joints under Cyclic Excitations”. In: *ASCE, Journal of Structural Engineering* 109.11.
Finsterwalder, U. (1933). “Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe mit kreissegmentförmigem Querschnitt”. In: *Ingenieur-Archiv* 4.1, pp. 43–65.
Fischler, M. A. and R. C. Bolles (1981). “Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography”. In: *Communications of the ACM* 24.6, pp. 381–395.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Flügge, W. (1973). *Stresses in shells*. Second Edition. Springer Verlag.
Freeman, S. (1978). "Prediction of response of concrete buildings to severe earthquake motion". In: *Proceedings of Douglas McHenry international symposium on concrete and concrete structures*. Ed. by A. C. Institute. Detroit, MI, USA.
– (1998). "The capacity spectrum method". In: *Proceedings of the 11th European conference on earthquake engineering*. Paris, France.
Gakuhari, Y. (Aug. 2021). "Modeling Considerations Related to Concrete with AAR". MA thesis. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Gallagher, R. (1975). *Finite Element Analysis Fundamentals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
Gavin, H. P. (2012). *Mathematical Properties of Stiffness Matrices*. CEE 421L, Matrix Structural Analysis course notes. Duke University, Department of Civil and Environmental Engineering.
Georg, R. (Dec. 2014). "Historical Analysis of Arches and Modern Shells". Saouma, Victor E. advisor. M.S. Thesis. Boulder, CO, U.S.A.: University of Colorado, Dept. Civ. Eng.
Gerstle, K. (1974). *Basic Structural Analysis*. Out of Print. McGraw-Hill.
Ghannoum, W. (2010). Personal communication.
– (2020). *Decision-Oriented Column Simulation Capabilities for Enhancing Disaster Resilience of RC Building*. "Seminar at the University of Colorado, Boulder".
Ghorbani, R. et al. (2022). "Uniaxial model for simulating the cyclic behavior of reinforced concrete members". In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 51.15, pp. 3574–3597.
Gibson, J. E. (1968). *The design of shell roofs*. Spon.
Giuriani, E. and G. P. Rosati (1986). "Behaviour of Concrete Elements under Tension After Cracking". In: *Studi e Ricerche, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato* 8. (in Italian), pp. 65–82.
Gopalaratnam, V. S. and S. Shah (1985). "Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension". In: *ACI Journal* 82, pp. 310–323.
Gunay, S. and K. Mosalam (2013). "PEER performance-based earthquake engineering methodology, revisited". In: *Journal of Earthquake Engineering* 17.6, pp. 829–858.
Gutenberg, B. and C. Richter (1954). "Frequency and energy of earthquakes". In: *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena*, pp. 17–19.
Hamburger, R. et al. (2004). "The ATC-58 Project: Development of next-generation reformance-based earthquake engineering design criteria for buildings". In: *Proceeding of the 13th World Conference on Earthquake Engineering*. Vancouver, Canada.
Hariri-Ardebili, M. and H. Mirzabozorg (2014). "Estimation of probable damages in arch dams subjected to strong ground motions using endurance time acceleration functions". In: *KSCE Journal of Civil Engineering* 18, pp. 574–586.
Hariri-Ardebili, M. and V. E. Saouma (2015). "Quantitative failure metric for gravity dams". In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 44, pp. 461–480.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Hariri-Ardebili, M., V. E. Saouma, and K. Porter (2016). "Quantification of Seismic Potential Failure Modes in Concrete Dams". In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*.
Hariri-Ardebili, M. et al. (2016). "A new class of seismic damage and performance indices for arch dams via ETA method". In: *Engineering Structures* 110, pp. 145–160.
Haselton, C. et al. (2011). "Accounting for ground-motion spectral shape characteristics in structural collapse assessment through an adjustment for epsilon". In: *Structural Engineering* 137.3, pp. 332–344.
Haselton, C. B. et al. (2008). "An assessment to benchmark the seismic performance of a code-conforming reinforced-concrete moment-frame building". In: *Pacific Earthquake Engineering Research Center* 2007/1.
Haselton, C. B. et al. (2016). "Calibration of model to simulate response of reinforced concrete beam-columns to collapse." In: *ACI Structural Journal* 113.6.
Heyman, J. (1997). *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge University Press.
Heyman, J. (1969). "The safety of masonry arches". In: *International Journal of Mechanical Sciences* 11.4, pp. 363–385.
Higham, N. J. (2002). *Accuracy and stability of numerical algorithms*. SIAM.
Hillerborg, A., M. Modéer, and P. Petersson (1976). "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements". In: *Cement and Concrete Research* 6.6, pp. 773–782.
Hinton, E. and D. Owen (1977). *Finite Element Programming*. Academic Press, London.
Hordijk, D., H. Reinhardt, and H. Cornelissen (1989). "Fracture Mechanics Parameters of Concrete from Uniaxial Tensile Tests as Influenced by Specimen Length". In: *RILEM-SEM Int. Conference on Fracture Mechanics of Rock and Concrete*. Ed. by S. Shah and S. Swartz. New-York: Springer-Verlag.
Hoshiya, M and Z Hasgur (1978). "AR and MA models of nonstationary ground motion". In: *Bull. Int. Inst. Seismol. Earthq. Eng.* 16, pp. 55–68.
Howard, S. (1966). *Structure: An Architect's Approach*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
Hsu, T. et al. (1963). "Micro cracking of Plain Concrete and the Shape of the Stress-Strain Curve". In: *Journal of the American Concrete Institute* 60, pp. 209–224.
Huerta, S. (2008). "The analysis of masonry architecture: A historical approach: To the memory of professor Henry J. Cowan". In: *Architectural Science Review* 51.4, pp. 297–328.
Ibarra, L. F. (2004). "Global collapse of frame structures under seismic excitations". PhD thesis. Stanford University.
ICBO (1994). *Uniform Building Code*. Tech. rep. International Conference of Building Officials.
Inglis, C. (1913). "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners". In: *Trans. Inst. Naval Architects* 55, pp. 219–241.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Irwin, G. (1957). “Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate”. In: *Transactions ASME, J. Appl. Mech.* 24.

Jalayer, F. (2003). “Direct probabilistic seismic analysis: implementing non-linear dynamic assessments”. PhD thesis. Palo-Alto, CA: Stanford University.

Jankovic, S. and B. Stojadinovic (2004). “Probabilistic performance-based seismic demand model for {R/C} frame buildings”. In: *Proceeding of the 13th World Conferance on Earthquake Engineering*. Vancouver, B.C., Canada.

Jeang, F. L. and N. M. Hawkins (1985). *Nonlinear Analysis of Concrete Fracture*. Structures and Mechanics Report. Seattle, WA: Department of Civil Engineering, University of Washington.

Joukowsky, N. Y. (1948). *Sobranie Sochinenii (Collected Works)*. Vol. 2. 25 vols., 1935–1950. The bicycle wheel problem (ring on elastic foundation) appears in the mechanics volume; first solved ca. 1890s at the Moscow Technical School. Moscow: Gostekhizdat.

Kaila, K. and H. Narain (1971). “A new approach for preparation of quantitative seismicity maps as applied to Alpide belt-Sunda arc and adjoining areas”. In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 61.5, pp. 1275–1291.

Kang, D. (2010). “An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation”. PhD thesis. Dept. of Civil Engineering, University of Colorado, Boulder.

Kappos, A. (1997). “Seismic damage indices for RC buildings: evaluation of concepts and procedures”. In: *Progress in Structural Engineering and Materials* 1, pp. 78–87.

Kassimali, A. (2021). *Matrix analysis of structures*. Cengage Learning.

Kennedy, M. C. and A. O’Hagan (2001). “Bayesian Calibration of Computer Models”. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 63.3, pp. 425–464.

Kent, D. and R. Park (1971). “Flexural Members with Confined Concrete”. In: *Journal of the Structural Division, ASCE* 97.ST7.

Kinney, J. (1957). *Indeterminate Structural Analysis*. Out of Print. Addison-Wesley.

Kirsch, C (1898). “Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre”. In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 42, pp. 797–807.

Kolosova, G. S. and V. V. Kuroyedov (2013). “Application of Krylov’s functions for solving structural mechanical problems”. In: *Stroitel’stvo Unikal’nyh Zdanij i Sooruzenij* 9, p. 42.

Ladeveze, P. (1983). “Sur une théorie de l’endommagement anisotrope”. In: *Rapport Interne LMT* 34, pp. 1–34.

Lee, T.-H. and K. M. Mosalam (2004). “Probabilistic fiber element modeling of reinforced concrete structures”. In: *Computers and Structures* 82, pp. 2285–2299.

Li, V. C. and E. Liang (1986). “Fracture Processes in Concrete and Fiber Reinforced Cementitious Composites”. In: *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 112.6, pp. 566–586.

Lignos, D. G. and H. Krawinkler (2013). “Development and utilization of structural component databases for performance-based earthquake engineering”. In: *Journal of Structural Engineering* 139.8, pp. 1382–1394.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Lin, T. and J. Baker (2014). “Conditional Spectra”. In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. by M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–13.
Lin, T. and S. Stotesbury (1981). *Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers*. John Wiley.
Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th ed. Contains extensive historical notes. Cambridge: Cambridge University Press.
Mackie, K. and B. Stojadinovic (2005). *Fragility basis for California highway overpass bridge seismic decision making*. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
Mahdavi, G. (Dec. 2023). “Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR”. PhD thesis. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Mander, J. B., M. J. Priestley, and R Park (1988). “Theoretical stress-strain model for confined concrete”. In: *Journal of structural engineering* 114.8, pp. 1804–1826.
Maney, G. A. (1915). “Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution”. In: *Studies in Engineering*. University of Minnesota.
Mashayekhi, M. and H. Estekanchi (2013). “Investigation of strong-motion duration consistency in endurance time excitation functions”. In: *Scientia Iranica* 20, pp. 1085–1093.
Mashayekhi, M., H. Estekanchi, and H. Vafai (2019a). “Simulation of Endurance Time Excitations Using Increasing Sine Functions”. In: *Int. J. Optim. Civil Eng* 9.1, pp. 65–77.
– (2019b). “Simulation of endurance time excitations via wavelet transform”. In: *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering* 43.3, pp. 429–443.
Mashayekhi, M. et al. (2018a). “Development of hysteretic energy compatible endurance time excitations and its application”. In: *Engineering Structures* 177, pp. 753–769.
Mashayekhi, M. et al. (2018b). “Simulation of Cumulative Absolute Velocity Consistent Endurance Time Excitations”. In: *Journal of Earthquake Engineering*, pp. 1–26.
Mazars, J. (1986). “A Description of Micro- and Macroscale Damage of Concrete Structures”. In: *Engineering Fracture Mechanics* 25.5–6, pp. 729–737.
Mazzoni, S. et al. (2006). *OpenSees Command Language Manual*. Tech. rep. University of California, Berkeley: The Open System for Earthquake Engineering Simulation.
McGuire, W and R. Gallagher (1979). *Matrix Structural Analysis*. First Edition.
McGuire, W. and G. Winter (1968). *Steel structures*. Prentice-Hall.
Menegotto, M. and P. Pinto (1973). “Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames including Changes in Geometry and Non-Elastic Behavior”. In: *IABSE symposium on resistance and ultimate deformability of structure. Acted on by Well-Defined Repeated Loads. Lisbon: ACmPress*. Vol. 15, pp. 15–22.
Milankovitch, M. (1907). “Theorie der druckkurven”. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 55, pp. 1–27.
Mindess, S. and F. Young (1981). *Concrete*. Prentice-Hall, Inc.
Morris, M. (1991). “Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments”. In: *Technometrics* 33.2, ”161–174”.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Moseley, H. (1833). “L. On a new principle in statics, called the Principle of least Pressure”. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 3.16, pp. 285–288.
– (1869). *The mechanical principles of engineering and architecture*. J. Wiley & son.
Nobile, L. and V. Bartolomeo (2014). “Methods for the assessment of historical masonry arches”. In: *Proc., 5th European Conf. of Civil Engineering (ECCIE'14)*, pp. 160–167.
Nocedal, J. and S. Wright (2006). *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media.
Norris, C. H. and J. Wilbur (1960). *Elementary Structural Analysis*. McGraw-Hill.
Nozari, A. and H. Estekanchi (2011). “Optimization of endurance time acceleration functions for seismic assessment of structures”. In: *International Journal of Optimization in Civil Engineering* 1, pp. 257–277.
O’Hara, T. and J. Jacobson (1991). *Standardization of the cumulative absolute velocity*. Tech. rep. Electric Power Research Inst.
Olsson, A. and G. Sandberg (2002). “Latin hypercube sampling for stochastic finite element analysis”. In: *Journal of Engineering Mechanics* 128.1, pp. 121–125.
OpenAI (2025). *ChatGPT: Conversation with AI*. Generated in response to a user’s query. Available at `https://chat.openai.com`.
Ottosen, N. and H. Petersson (1992). *Introduction to the Finite Element Method*. Prentice-Hall.
Padgett, J., B. Nielson, and R. DesRoches (2008). “Selection of optimal intensity measures in probabilistic seismic demand models of highway bridge portfolios”. In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 37, pp. 711–725.
Park, R. and T. Paulay (1991). *Reinforced concrete structures*. John Wiley & Sons.
Park, Y.-J. and A. H.-S. Ang (1985). “Mechanistic seismic damage model for reinforced concrete”. In: *Journal of structural engineering* 111.4, pp. 722–739.
PEER (2014). *Ground Motion Database*. Last viewed November 2014. Pacific Earthquake Engineering Research Center.
Petersson, P. (Dec. 1981). *Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and similar Materials*. Tech. rep. TVBM 1006. Lund, Sweden: Lund Institute of Technology.
Pilkey, W. and W. Wunderlich (1994). *Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods*. CRC Press.
Pippard, A. J., E. Tranter, and L Chitty (1936). “The Mechanics Of The Voussoir Arch.(Includes Appendix).” In: *Journal of the Institution of Civil Engineers* 4.2, pp. 281–306.
Pippard, A. J. S. and J. F. Baker (1943). *The analysis of engineering structures*. Edward Arnold London.
Pitarka, A. et al. (1998). “Three-dimensional simulation of the near-fault ground motion for the 1995 Hyogo-ken Nanbu (Kobe), Japan, earthquake”. In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 88.2, pp. 428–440.

 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Pollalis, S. N. (1999). *What is a bridge? the making of Calatrava's bridge in Seville*. MIT Press.
Porter, K. (2003). "An overview of PEER's performance-based earthquake engineering methodology". In: *Proceedings of the 9th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP9)*. San Francisco, CA.
Porter, K., R. Kennedy, and R. Bachman (2007). "Creating Fragility Functions for Performance-Based Earthquake Engineering". In: *Earthquake Spectra* 23, pp. 471–489.
Portland Cement Association (1947). *Handbook of frame constants: Beam factors and moment coefficients for members of variable section*. Portland cement association.
– (1954). *Design of Barrel Shell Roofs*. Tech. rep. Portland Cement Association.
Powell, G. H. (Dec. 2008). "Structural Analysis: Are We Relying Too Much on Computers. Part 2: A Solution". In: *STRUCTURE Magazine*. Structural Forum article.
Priestley, M. B. (1965). "Evolutionary spectra and non-stationary processes". In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pp. 204–237.
Przemieniecki, J. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Reprinted by Courrier (formerly Dover). New York: McGraw-Hill.
Ragueneau, F. et al. (2006). "Anisotropic damage for concrete within multifibre beam finite element theory". In: *First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology*.
Ramamoorthy, S., P. Gardoni, and J. Bracci (2006). "Probabilistic Demand Models and Fragility Curves for Reinforced Concrete Frames". In: *Journal of Structural Engineering* 132, pp. 1563–1572.
Rankine, W. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*. Charles Griffin and Company.
Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
Reich, R. (May 1993). "On the Marriage of Mixed Finite Element Methods and Fracture Mechanics: An Application to Concrete Dams". PhD thesis. University of Colorado, Boulder.
Rezaeian, S. and A. Der Kiureghian (2008). "A stochastic ground motion model with separable temporal and spectral nonstationarities". In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 37.13, pp. 1565–1584.
– (2010). "Simulation of synthetic ground motions for specified earthquake and site characteristics". In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 39.10, pp. 1155–1180.
Rezaeian, S. and X. Sun (2014). "Stochastic ground motion simulation". In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. by M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–15.
Richart, F. E., A. Brandtzæg, and R. L. Brown (1928). *A study of the failure of concrete under combined compressive stresses*. Tech. rep. University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering ...

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Saenz, L. P. (1964). "discussion of" Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete" by Desayi and Krishnan". In: *Journal of the American Concrete Institute* 61, pp. 1229–1235.
Saltelli, A. (2002). "Making Best Use of Model Evaluations to Compute Sensitivity Indices". In: *Computer Physics Communications* 145.2, pp. 280–297.
Saouma, V. and M. Sivaselvan (2014). *Hybrid simulation: Theory, implementation and applications*. CRC Press.
Saouma, V. E. and M. Hariri-Ardebili (2021). *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures*. Springer-Nature.
Saouma, V. E., D. Kang, and G. Haussmann (2012). "A computational finite-element program for hybrid simulation". In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 41.3, pp. 375–389.
Saouma, V. E. et al. (Aug. 1991). "Effect of aggregate and specimen size on fracture properties of dam concrete". In: *ASCE, Journal of Materials in Civil Engineering* 3.3, pp. 204–218.
Saouma, V. E. et al. (2013). "Real-time hybrid simulation of a nonductile reinforced concrete frame". In: *Journal of Structural Engineering* 140.2.
Schey, H. (1973). *Div Grad Curl and all That; An Informal Text on Vector Calculus*. W.W. Norton.
Schodek, D. and M. Bechthold (2014). *Structures*. Pearson.
Schrama, W. (2021). "A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames". In: *TU Delft, Civil Engineering*. Bachelor Thesis.
Schueller, W. (1996). *The design of Building Structures*. Prentice Hall.
Scott, B., R. Park, and M. Priestley (1982). "Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rages". In: *ACI Journal* 79.1, pp. 13–27.
SEAOC (1995). *Performance-based seismic engineerin, SEAOC Vision 2000 Committee*. Tech. rep. Sacramento, CA: Structural Engineers Association of California.
Segura, C. (2011). "Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code". MA thesis. University of Colorado, Boulder.
Shinozuka, M. and Y Sata (1967). "Simulation of nonstationary random process". In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 93.1, pp. 11–40.
Slate, F. and S. Olsefski (1963). "X-Rays for Study of Internal Structures and Microcracking of Concrete". In: *Journal of the American Concrete Institute* 60, pp. 575–587.
Smars, P. (2000). "Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes". PhD thesis. Katholieke Universiteit Leuven.
– (2022). Personal Communication.
Sobol', I. M. (2001). "Global Sensitivity Indices for Nonlinear Mathematical Models and Their Monte Carlo Estimates". In: *Mathematics and Computers in Simulation* 55.1–3, pp. 271–280.
Sohier, H., H. Piet-Lahanier, and J.-L. Farges (2015). "Analysis and optimization of an air-launch-to-orbit separation". In: *Acta Astronautica* 108, "18–29".

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Sohier, H., J.-L. Farges, and H. Piet-Lahanier (2014). “Improved of the Representativity of the Morris Method for Air-Launch-to-Orbit Separation”. In: *Preprints of the 19th World Congress*.

Sokolnikoff, I. (1956). *Mathematical Theory of Elasticity*. New York, NY.: McGraw-Hill.

Somerville, P. et al. (1997). “Modification of empirical strong ground motion attenuation relations to include the amplitude and duration effects of rupture directivity”. In: *Seismological Research Letters* 68.1, pp. 199–222.

Sonavane, T. (2014). “Analysis of Arches”. MA thesis. Boulder, Colorado: University of Colorado.

Southwell, R. V. (1935). “Stress-calculation in frameworks by the method of” systematic relaxation of constraints”—I and II”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 151.872, pp. 56–95.

Spacone, E., V. Ciampi, and F. Filippou (Aug. 1992). *A BEAM ELEMENT FOR SEISMIC DAMAGE ANALYSIS*. Tech. rep. UCB/EERC-92/07. Earthquake Engineering Research Center College of Engineering, University of California, Berkeley.

Stewart, J. (2009). *Verification Methods and NRC Regulations: A Brief Overview*. Tech. rep. Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States).

Suselo, A. A. (2021). “Simulated Behavior of Rectangular Reinforced Concrete Columns under Seismic Loading”. PhD thesis. The University of Texas at San Antonio.

Taborda, R. and D. Roten (2014). “Physics-based ground-motion simulation”. In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. by M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–33.

Takeda, T., M. A. Sozen, and N. N. Nielsen (1970). “Reinforced concrete response to simulated earthquakes”. In: *Journal of the structural division* 96.12, pp. 2557–2573.

Taucer, F, E. Spacone, and F. Filippou (1991a). “A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures: Earthquake Engineering Research Center”. In: *College of Engineering, University of California*.

– (1991b). *A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures: Earthquake Engineering Research Center*. Tech. rep. College of Engineering, University of California.

Thacker, B. et al. (2004). *Concepts of Model Verification and Validation*. Tech. rep. LA-14167. Los Alamos National Laboratory.

Thandavamoothy, T. (2011). *Structural Analysis*. First Edition. YMCA Library Building, New Delhi, India: OXFORD University Press, pp. 1016–1088.

Timoshenko, S., S. Woinowsky-Krieger, et al. (1959). *Theory of plates and shells*. Vol. 2. McGraw-hill New York.

USBR-manual (2011). *Dam safety risk analysis, Best practices training manual, Version 2.2*. Tech. rep. Denver, Colorado: U.S. Department of the Interior Bureau of Reclamation in coorporation with the U.S. Army Corps of Engineers.

USGS (2003). *PSHA Interactive Deaggregation Tool, U.S. Geological Survey*.

Vamvatsikos, D. and C. Cornell (2002). “Incremental dynamic analysis”. In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31, pp. 491–514.

 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

Vamvatsikos, D. and C. Cornell (2004). “Applied incremental dynamic analysis”. In: *Earthquake Spectra* 20, pp. 523–553.
Červenka, J. (1994). “Discrete crack modeling in concrete structures”. PhD thesis. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Vitruvius (1960). *The Ten Books on Architecture*. Dover.
Vlasov, V. (1961). “Thin walled elastic beams (2nd edn) National Science Foundation”. In: *Washington, DC*.
Voldoire, F. and Y. Bamberger (2008). *Mécanique des structures*. Presses Ponts et Chaussées.
Wang, C.-h. et al. (2001). “Hysteretic models for deteriorating inelastic structures”. In: *Journal of Engineering Mechanics* 127.11, pp. 1200–1202.
Wang, G. et al. (2016). “A general definition of integrated strong motion duration and its effect on seismic demands of concrete gravity dams”. In: *Engineering Structures* 125, pp. 481–493.
Wang, W., C. Gu, and T. Bao (2013). “Safety Monitoring Index of High Concrete Gravity Dam Based on Failure Mechanism of Instability”. In: *Mathematical Problems in Engineering* 2013, pp. 1–14.
Wen, Y.-K. (1976). “Method for random vibration of hysteretic systems”. In: *Journal of the engineering mechanics division* 102.2, pp. 249–263.
Westergaard, H. (1933). “Water Pressures on Dams During Earthquakes”. In: *Transactions ASCE* 59.8, pp. 418–433.
White, R., P. Gergely, and R. Sexmith (1976). *Structural Engineering*. Out of Print. John Wiley & Sons.
Whitehead, R. (2020). “Sarinen’s Shells: The Evolving Influence of Engineering and Construction”. In: *Constructing Building Enclosures*. Routledge, pp. 105–123.
Whitman, F. et al. (1988). “Fracture Energy and Strain Softening of Concrete as Determined by Means of Compact Tension Specimens”. In: *Materials and Structures* 21, pp. 21–32.
Whitney, C. et al. (1952). *Manuals of Engineering Practice-31: Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*. Tech. rep. New York: American Society of Civil Engineering.
Williams, M. S., I. Villemure, and R. G. Sexsmith (1997). “Evaluation of seismic damage indices for concrete elements loaded in combined shear and flexure”. In: *Structural Journal* 94.3, pp. 315–322.
Winkler, E. (1879). “*Die Lage der Stützlinie im Gewölbe*”. In: *Deutsche Bauzeitung* 13, pp. 117–119, 127–128, 130.
– (1880). “*Die Lage der Stützlinie im Gewölbe*”. In: *Deutsche Bauzeitung* 14, pp. 58–60.
Yamamoto, Y. (2011). “Stochastic model for earthquake ground motion using wavelet packets”. PhD thesis. Palo-Alto, CA: Stanford University, Stanford.
Yamamoto, Y. and J. Baker (2013). “Stochastic model for earthquake ground motion using wavelet packets”. In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 103.6, pp. 3044–3056.

OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

भाग II–IV एवं परिशिष्टों के संदर्भ

Yassin, M. H. M. (1994). “Nonlinear analysis of prestressed concrete structures under monotonic and cyclic loads”. PhD thesis. University of California.

Youngs, R. et al. (1997). “Strong ground motion attenuation relationships for subduction zone earthquakes”. In: *Seismological Research Letters* 68.1, pp. 58–73.

Zareian, F. and H. Krawinkler (2009). *Simplified performance based earthquake engineering, Report No. 169*. Tech. rep. Stanford University.

Zareian, F. et al. (2010). “Basic concepts and performance measures in prediction of collapse of buildings under earthquake ground motions”. In: *The Structural Design of Tall and Special Buildings* 19, pp. 167–181.

Zeris, C. and S. Mahin (1988). “Analysis of Reinforced Concrete Beam-Columns under Uniaxial Excitation.” In: *Journal of Structural Engineering, ASCE* 114(ST 4), pp. 804–820.

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग II–IV: विश्लेषण

$p - \delta$, 1818, 1850
chap:trustregion
  analysis, 2015
  quantification, 2015

AASHTO, 2137
acknowledgments, xxi
airfoil, 724
airplane, 758
aleatory, 2016
alkali aggregate reaction, 2064, 2971
allowable stress design, 1725
alluvial plot, 774
anagram, 2931
analysis
  cloud, 2171, 2175
  damage, 2203
  endurance time, 2175
  loss, 2195
  multiple strip, 2169
  nonlinear, 2203
  response spectrum, 2136
analytical baseline, 1688
annual rate of exceedance, 2117
approximate, 1287
approximate analysis, 1281
  cantilever method, 1305
  frames, 1315
  lateral deflections, 1313
  portal method, 1290
  tube systems, 1308
  vertical load, 1287
  wall subsystems, 1307
arch, 1056
  circular, 1057
  elastic Center, 1088
  generalized solution, 1073
  helicoidal, 1097
  hingeless, 1065
  hingeless circular, 2292
  masonry, 1027
  parabolic, 1357
  temperature, 1354
  three hinged, 1057
  three-hinged circular, 2266
  two hinged, 1064
  two hinged arch design, 1346
  variable i, 1357
arche
  three-hinged circular, 2250
Archimedes' principle, 762
architects
  Jahn, Helmut, 914
  Pei, I.M., 914, 1097
architecture
  Dulles airport, 914
  Louvre staircase, 1097
  Pyramide du Louvre, 914
  Sagrada Familia, 1097
  Sony Center, 914
attenuation models, 2085
author, xlii
autocovariance, 2019
axial load
  impact on flexural deformation, 1841
axial vibration
  natural frequencies, 1704
axisymmetry, 2934

backbone, 1967, 1984
barge, 759
base isolation, 1234, 1708
  example, 1234
Bauschinger
  effect, 1739
  effect, 1735
Bayesian parameter identification, 2059
beam
  bimetallic, 829
  conjugate, 841, 842

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

curved, 789, 915, 1094, 1478
elastic foundation, 817
Euler-Bernoulli, 1374
flexure & shear deformation, 878
floating, 816
Galerkin, 1670
king post, 914
large deflections, 965
queen post, 912
rigid offset, 1486
ring, 886
semi-rigid, 1489
thermal, 879
Timoshenko, 1378
torsion & flexure, 876
variable cross section, 1494
beam-column, 1374
nonlinear formulation, 1857
Belidor, 1029
bicycle wheel, 821
biffurcation, 1836
bifurcation point, 970
bimoment, 854
body force, 2917
Botero, 2110
boundary conditions, 1369, 1424, 1426, 1427, 1516, 2940
Dirichlet, 1516
inclined, 756
mixed, 1516
Neuman, 1516
boundary value problem, 1369
box culvert, 943
bridge
Alamillo, 2366
Dora Riparia, 1036
Gard, 1103
George Washington, 1339
Goethals, 2136
loads, 2238
suspension, 1013
Viaducte de Chillon, 811
Walnut Lane, 1264
Broken Obelisk, 767
bubble function, 1613
buckling, 1837
column, 969, 1837
constrained, 981
eigenvalue, 972
elastic, 973
frame, 1838
frames, 986
inelastic, 989
water tower, 982
without $\mathbf{k}_{geom}$, 1851
buoyancy
centre of, 762
Butterworth filter, 2851

cable, 992
catenary, 1017
comparison, 1024
parabola, 998
prestress, 1016
sag, 1015
temperature, 1015, 1016
trolley cable, 1021
capacity
Curve, 2125
Diagram, 2125
Function, 2125
curve, 2129, 2132, 2167
function, 2173
capacity design
example, 1230
Carder, 747
Castigliano, 1036, 1082, 1086
theorems, 1566
casualties, 2196
Cauchy strain, 2923
Cauchy stress tensor, 2919
Cauchy tetrahedron, 2918
Cauchy's equation of motion, 2927
center of pressure, 1047

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग II–IV: विश्लेषण

central difference method, 1701
chap:trustregion, 2015
characteristic equation, 2246
Charles Mosca, 1036
chemical bonds, 1737
chord, 992
circular ring, 886
Clapeyron's theorem, 919
coefficient of variation, 2892
coefficient plot, 2029
collapse, 2209
  mechanism, 2165
column
  life-safety, 1995
compressive meridian, 1733
computational fuse, 1960
condensation, 1461
condition number, 1452, 1457
condition of incompressibility, 2926
conditional spectra, 2097
confidence interval, 2890
congruent transformation, 1481
consequnce function, 2196
conservation laws, 2924, 2925
conservation of energy, 2929
conservation of momentum, 2926
consistency condition, 1742
constitutive
  Bauschinger, 1909
  bilinear, 1909
  Drucker-Prager, 1734
  Ghannoum, 1984
  heuristic models, 1907
  hysteretic, 1964
  Ibarra Krawinkler, 1963
  Mohr-Coulomb, 1734
  peak oriented, 1969
  pinching, 1970
  shear limit state, 1960
  strength degradation, 1975
  Tresca, 1732
constitutive equations, 2931
continuity equation, 2926
continuum mechanics, 1906, 2919
control
  displacement, 1828
  load, 1820
convergence, 1811, 1813, 1825
coordinate system
  stiffness method, 1365
  triangular, 1590
correlation, 2017
  matrix, 2018
correlation coefficient, 2894
costs, 2195
Coulomb, 1034
Couplet, 1032
covariance, 2017, 2894
  spatial, 2019
  temporal, 2019
cumulative
  displacement demand, 2186
  inelastic duration, 2184
  distribution function, 2889

D'Alembert, 1534
d'Alembert's principle, 1200
dam
  pine flat, 2093
damage
  measure, 2204
  multiple, 2209
  assessment, 2132
  Index, 2187
  index, 2183
  metrics, 2186
  probabilistic representation, 2186
damping
  Rayleigh coefficients, 1687
damping ratio, 1203
Danyzy, 1033
data mining, 1989
de la Hire, 1028
de Veubeke, 1531

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग II–IV: विश्लेषण

decision
  variable, 2204
decomposition, 2862
  Cholesky, 2866
  LU, 2864
  QR, 2869
  singular value, 1457, 2867
dedication, iii
deflected shape diagrams, 1282
deflection
  curvature, 819
  curvature area method, 831
  integration, 813
  large, 1846
  virtual work, 863
deformation theory, 1739
degree
  freedom, 1366
  freedom-rotational, 1659
  kinematic indeterminacy, 1369
demand, 2129
  capacity ratio, 2184
  curve, 2134
  loads, 2143
  spectrum, 2132
design codes, 1237, 1244
design vs. analysis, 710, 1237, 2201
determinant, 749
deterministic, 1240, 1725
differential vector operator, 2974
direction cosines, 781, 1412
Dirichlet, 1369
Dirichlet b.c., 2940
discrete Fourier transform, 2852
discretization, 1426
dislocation, 1738
displacement control, 1828
displacement ductility, 1230, 1707
distributed plasticity, 1906
distribution
  bivariate, 2899
  bivariate normal, 2900
  gumbel, 2897
  lognormal, 2896
  noraml (Gauss), 2895
  Poisson, 2118
  uniform, 2895
  univariate, 2894
  weibull, 2896
downtime, 2195
drift, 1281, 2132
drilled shaft, 2139
ductility, 1750
  example, 1230
  ratio, 1764
Duhamel integral, 1211
  rectangular pulse, 1213
  step load, 1211
Dulles airport, 1321
dummy index, 2909
dynamic amplification factor, 1211
dynamic analysis, 1677
  frames, 1678
  when, 1199
dynamic effects, 2131

effective length, 986
effective mass matrix, 1699
Eiffel tower, 1328
eigenvalue, 1450, 1700, 2870
  buckling, 972
  problem, 1836
  stiffness, 1450
  stiffness matrix, 1447
eigenvalues & eigenvectors, 2871
Einstein's notation, 2909
elastic
  instability, 1836
  solution, 1776
element
  hierarchical, 1613
  isoparametric, 1629
  Lagrangian, 1610
  nodal equivalent loads, 1650

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग II–IV: विश्लेषण

parasitic shear, 1657
stress recovery, 1647
elementary effect, 2031
elliptic integral, 966
elliptic integrals, 2244
endurance
time analysis, 2172
time excitation functions, 2104
engineering
demand parameter, 2180, 2204
shear strain, 2923
epistemic, 2016
equal displacement rule, 1230
equation of motion, 2926
equations of statics, 1462
equilibrium, 745
global, 935
equivalent viscous damping, 1229
error
estimate, 1813
hidden, 1864
error discovery program, xxiii
Euler, 1511
equation, 1514
method, 1690, 1809
Euler-Lagrange, 1523
Eulerian angles, 1417
explicit
incremental analysis, 1844
method, 1816

factor of safety, 1719
failure mode, 1719, 2129
fast Fourrier transform, 2851
fault tolerance, 1719
Fermi's solution, 1281
FFT, 2852
filter
Butterworth, 2851
finite element, 1617
bilinear rectangle, 1597
brick, 1598
compatibility, 1626
constant strain triangle, 1595
error, 1624
lower bound solution, 1625
mesh verification, 1992
modelling, 1988
numerical integration, 1641
requirements, 1623
flexibility, 892
method, 1384
matrix, 899
floating body, 762
flow rule, 1741
flux, 2925
force, 1540, 2917
in terms of displacement, 925
force-shear-moment
differential relations, 793
integral relations, 794
foreword, iv
form follows function, 764
Fourier analysis
periodic forcing, 1215
Fourier transform, 2852
fracture process zone, 1949
fragility
curve, 2185
curve vs. surface, 2211
definitions, 2208
vs. vulnerability vs. hazard, 2208
continuous vs. discrete, 2210
curve, 2208
role in PBEE, 2212
free body diagram, 749
free index, 2909
free vibration, 1206
initial conditions, 1688
frequency domain, 2852
frequency response function, 1215
function
consequence, 2196
cumulative distribution, 2889

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग II–IV: विश्लेषण

fundamental laws, 2924
funicular
  cable, 993
  polygon, 992

gable frame, 754
Galerkin, 1661
  FE discretization, 1670
  weak form, 1668
Galileo, 845, 862
Gauss elimination, 2863
Gauss-Jordan decomposition, 2863
Gauss-Seidel, 951, 2869
geometric
  nonlinearity, 1832
  stiffness matrix, 1832
geometric nonlinearity, 993
gondola, 997
grid, 757
ground motion
  intensity, 2085
  prediction equation, 2086
Gutenberg Richter law, 2083
guyed tower, 1012

Hamilton, 1523, 1535
hardening
  isotropic, 1735, 1740, 1745
  kinematic, 1735, 1746
  modulus, 1739
  work, 1739
hazard
  analysis, 1719
  curve, 2117
heat transfer, 1674
helicoidal, 1097
Hellinger-Reissner, 1531
hermitian interpolation, 1605
high frequency, 1678
Hilber-Hughes-Taylor, 1696
hinge formation, 2132, 2144
Hooke's law, 2931, 2932
hourglas, 1656
Hu-Washizu, 1531
hydrodynamic, 2928
hydrostatic fluid, 2928
hydrostatic pressure
  dependent, 1733
  independent, 1731
hyperstatic, 748
hypocentral distance, 2087
hysteresis, 1228
  energy dissipation, 1229

IDA curve, 2174
identicon, 2371, 2679
identifiability, 2057
ill-condition, 1455
Impetus, 2918
impulse response function
  example, 1210
incremental dynamic analysis, 2167
independent mechanisms, 1779
index
  performance, 2184
indicial notation, 2909
indirect methods, 2869
influence line, 735, 953
inner product, 2912
instability, 749
  geometric, 749
integration
  full, 1654
  reduced, 1655
  selective reduced, 1656
integration methods, 1818
intensity
  measure, 2204
  measure, 2167, 2204
interaction diagram, 1254
internal forces, 788
interpolation
  Hermitian, 1605
  Lagrangian, 1600
interstory drift, 2186

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

invariants, 2916
isopleth, 988
isostatic, 748

Jacobian, 1812
Jacobsen formula, 1229
Joyner-Boore distance, 2086

Kiewit, 2136
kinematic
  indeterminacy, 1369
  instability, 1469
  matrix, 1470
kinematically admissible field, 1778
Kuhn-Tucker, 1742, 1932
kurtosis, 2893

laboratory observations, 1735
Lagrange, 1535
Lagrangian
  function, 1524
  interpolation, 1600
Lame's constants, 2932
latin hypercube, 2021, 2033
  etymology, 2022
  example, 2023
law
  large numbers, 2886
layer/fiber section, 1868
least squares
  weighted nonlinear, 2053
Legendre polynomial, 1646
Leonardo da Vinci, 747
Levenberg–Marquardt, 2052
Levenberg-Marquardt, 2667, 2968
limit state, 2181, 2210
  elements, 1947
  calibration&validation, 2182
  multiple, 2183
  shear, 1960
linear equations, 2861
Linear Regression, 2170
linearization, 1810

load
  resistance and factor design, 1725
  bridge, 2238
  combination, 735, 2238
  dead, 2224
  demand, 2155
  earthquakes, 2227
  hydrostatic, 751
  impact, 730
  incremental, 2131
  limit, 1776
  live, 2224
  parabolic, 752
  path, 736
  pattern, 2131
  placement, 2242
  projected, 734
  secondary, 731
  thermal, 733
  unsafe theorem, 1777
  wind, 724, 2225
logarithmic decrement, 1205
logic tree, 2117
lower bound
  lumped plasticity analogy, 1802
  pushover analogy, 1798
  slabs, 1792
  theorem, 1783
LRFD, 1241
  Limitations, 2199
lsqnonlin, 2064, 2970, 2971
lumped-plasticity, 1713, 1802, 1896, 1957, 2001, 2009, 2510

Müller-Breslau, 957
Magazini Generali, 1335
Maillart, 1335
margin of safety, 1719
material coordinates, 2921
matrix
  augmented stiffness, 1424
  condition number, 1452
  decomposition, 1424

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग II–IV: विश्लेषण

decomposition vs. inversion, 1456
ill-conditioned, 1453
orthogonal, 1413
structural analysis, 1361
matrix inversion, 2861
maximum likelihood estimation, 2168, 2170
Maxwell-Betti, 867, 899, 957
mean, 2891
mechanics of deformable bodies, 2908
mechanics review, 2908
mechanism, 1776
method of moments, 2168
modal analysis, 1221
example, 1223
mode shapes, 1221
model
complexity, 1990
Rezaeian and Der Kiureghian, 2101
Yamamoto and Baker, 2102
modified Newton-Raphson, 1823
modulus
hardening, 1739
tangent, 1742
tangent elastic, 1740
moment
curvature
generalization, 1762
curvature
$\sigma - \varepsilon \to m - \phi$, 1754
$m - \phi$, 1752
distribution, 945
envelope, 795
redistribution, 1953
statistics, 2891
Monte Carlo simulation, 2020
Morris method, 2030
Moseley, 1036
motion
Cauchy equations of, 2927
first law of, 2918
fluid, 724
ground, 713
harmonic, 1206
rigid body, 1451, 1469, 1587, 1623
water, 2952
Mozart, 2931

natural frequency, 1201
footbridge, 1226
Nervi
Palazetto dello sport, 764
Neuman, 1369
Neuman b.c., 2940
Newmark, Nathan, 1693
Newmark-beta method, 1702
Newton
method, 1809
Newtonian fluid, 2927
nodal equivalent forces, 928
nodal numbering, 1457
nomograph, 988
nonlinear
analysis
element formulation, 1854
notation, xxviii
sources, 1713
types of, 1716
why, 1715
equations
Runge-Kutta, 1690
Euler method, 1690
norm, 1411
Euclidian, 2970
euclidian, 1813
infinity, 1825
notation, xxiv, xxxiii
indicial, 2909
Voigt, 2909
numerical analysis
explicit, 1698
Hilber-Hughes-Taylor, 1696
implicit, 1693
numerical integration, 1641

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग II–IV: विश्लेषण

Gauss-Legendre, 1644
newton-cotes, 1642

occurrence time, 2092
octahedral stress, 2916
opensees, 1913
operator
differential, 1662
incremental, 1844
Jacobian, 1632, 1634
strain **I**, 2923
tensor, 2911
variation, 1511
optimality, 2965

Pacific Earthquake Engineering Research Center, 2182
parallel systems, 2904
parameter identification, 2046
MATLAB program, 2065
Pascal triangle, 1587
PBEE
example, 2213
first generation, 2199
implementation, 2206
key documents, 2217
Matlab example, 2674
PBA, 2201
PBSD, 2201
SEAOC, 2191
second generation, 2202
peak
ground acceleration, 2120
shear force, 2186
performance
assessments
intensity, 2098
scenario, 2098
time based, 2099
based
assessment, 2190
earthquake engineering, 2189
earthquake engineering (PBEE), 1726, 2198
engineering, 1268, 2189
seismic design, 2190
point, 2132
pieds droits, 1029
pipeline, 880
Pippard, 1037
plane strain, 2933
plane stress, 2934
plastic
displacement, 2155
moment, 2151
hinge, 840, 1776, 2131
hinge length, 2151
length, 1956
modulus, 1739
solution, 1776
zone, 1949
plates, 1104
axisymmetric bending, 1115
circular plates, 1115
Kirchoff, 1109
Reissner-Mindlin, 1104
variational formulation, 1119
point estimate method, 2025
Poisson's probability model, 2092
polynomial chaos expansion, 2028
position, 2921
potential
energy, 1543, 1562
external work, 1542
potential energy, 1520
precision, 1455
preconditioning, 1455, 1457, 2872
predictor, corrector, 1820
presure
dynamic, 724
principal values, 2915
principle
complementary virtual work, 1552, 1783

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग II–IV: विश्लेषण

Hamilton, 1523
thermodynamics, 1539
total complementary potential energy, 1566
total potential energy, 1520, 1562
virtual work, 1558, 1777
probabilistic
risk assessment, 1719
seismic demand analysis, 2171
probability, 2885
conditional, 2887
distribution, 2888
prolegomena, v
pushover, 2129
analysis, 1797

QR decomposition, 2869

R/C
beams, 715
bond, 1749
buildings, 737
columns LRFD, 1254
moment of inertia, 1952
plastic strength, 1245
pushover, 2139
Random Sample Consensus (RANSAC), 2049
random variable, 2886, 2888
random variables, 2037
rank, 1451, 2870
rate theory, 1739
Rayleigh damping, 1222
calibration, 1687
Rayleigh-Ritz, 1572
reaction, 744
reaction vector, 1821
reciprocal frame
example, 804
recurrence relationship, 2083
redundancy, 1719
reliability index, 1242, 1719, 2902
repair cost, 2195
residual forces, 1821
resonance, 1207
pedestrian, 1226
response spectra, 2145, 2173
response spectrum, 1217
example, 1219
retrofit, 2130, 2132
rigidity factor, 1492
risk assessment, 1719
Robin b.c., 2940
root finding, 1808
rupture distance, 2086

safety, 1718
safety-critical system, 1719
sag, 992
Saint-Venant, 852
Salieri, 2931
Secant
method, 1815
Newton, 1824
seismic
coefficient, 2132
hazard analysis
deterministic, 2089
probabilisitc, 2090
hazard curves, 2093
hazard deaggregation, 2095
hazard map, 2094
load, 727
source model, 2084
Seismic hazard analysis
Matlab example, 2672
seismic record
filtering, 2851
seismogenic
depth, 2086
distance, 2086
sensitivity analysis, 2030
serendipity, 1588
series system, 2904
shape functions, 1588, 1590

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग II–IV: विश्लेषण

Shear
  V_{2500}, 2156
shear building, 1223
shear deformation
  transverse, 846
shear modulus, 2932
shells, 1123
  cylindrical free, 1154
  cylindrical on beams, 1179
  design barrel roof, 2337
  general theory, 1123
  membrane, 1149
  shallow, 1145
shock spectrum, 1213, 1214
sign convention
  analysis, 924
  design, 792
  stiffness method, 1364
Simpson's rule, 1325
single-degree-of-freedom system (SDOF), 1200
singularity, 2870
skewness, 2892
slenderness ratio, 986
slope deflection, 934
Smars, 1044
Sobol indices, 2035
soil-structure interaction, 1232, 1707
solid mechanics, 2908
spatial coordinates, 2921
spatial distribution ratio, 2184
spectra
  target response, 2096
spring
  defelction, 1572
  helicoidal, 827, 888
standard deviation, 2892
state determination
  beam column
    flexibility, 1876
    stiffness, 1861
  truss, 1856
  zero length element, 1896
  zero length section, 1902
static
  determinacy, 748
  indeterminacy, 1369
statics
  matrix, 780
statistics, 2885
stiffness
  matrix
    tangent, 1820
    geometric, 1832
  assembly, 1430, 1481
  augmented, 1423
  axial vs. flexural, 1678
  coefficients, 1372
  computer implementation, 1427
  definition, 1372
  direct, 1385
  eigenvalues, 1447
  element, 1372
  equation numbers, 1429
  flexibility relation, 1474
  grid element, 1375
  location matrix, 1429
  matrix derivation, 1619
  nodal numbering, 1457
  orthogonal structures, 1383
  strain energy, 1450
stochastic ground motion, 2100
strain, 2923
  large, 1833
  linear operator, 2923
strain energy, 1541
  stiffness matrix, 1450
  virtual, 1543
strains, 2922
  Eulerian, 2922
stress
  geometric representation, 2920
  hydrostatic, 2920
  recovery, 1424

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग II–IV: विश्लेषण

Stressor, 2125
structural
  design, 1237
    ASD, 1240
    LRFD, 1241
    performance based earthquake engineering, 1268
    prestressed concrete, 1263
    R/C beam, 1245
    R/C column, 1254
    safety, 1237
  response, 2132
structural dynamics, 1198
structures
  idealization, 1362
  modeling, xlii, 1832
substructuring, 1461
Sum of Squared Error Minimization, 2170
supports, 745

tangent modulus
  engineering derivation, 1744
  generalized derivation, 1740
tangent stiffness matrix, 1683
Taylor series, 1624, 1690, 1693, 1809, 2965
  finite difference estimation, 2026
temperature
  beam deflection, 879
  curvature relation, 836
  frame deflection, 837
tensile meridian, 1733
tension stiffening, 1921, 1951
tensor, 2911
  stress, 2918
tensor notation, 2909
tensors, 2911
thermodynamics
  potential, 1906
  first law, 1539, 2929
  first principle, 2929
  law, 865
thrust, 992
thrust line, 1047
time discretization, 1691
Timoshenko, 1378
Tonti diagram
  D'Alembert, 1536
  deformable body, 2941
  Hamilton, 1536
  Hu-Washizu, 1534
  Lagrange, 1536
Tonti diagrams, 2941
tornado diagram, 2042
torsion
  deformation, 852
    s^t Venant/Uniform, 852
  St Venant, 1381
  Vlasov, 1381
torsional
  deformation
    Vlasov/nonuniform, 853
traction, 1540, 2917
traction vectors, 2919
transformation
  Eulerian angles, 1417
  matrix, 1409
  tensors, 2914
  vectors, 2912
transient dynamic analysis, 1677
transverse isotropy, 2933
tri-diagonal matrix, 919
tributatry area, 740
truss
  analysis, 768
  nonlinear formulation, 1854
  stiffness matrix, 1373
trust region, 2966
tuned mass damper, 1232, 1708
  example, 1233

uniform hazard spectra, 2097
upper bound theorem, 1777

variance, 2892
variational formulation, 1683

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।

विषय सूची — भाग II–IV: विश्लेषण

variational principle
Hu-Washizu, 1531
Varignon's theorem, 747
vector fields, 2917
verification & validation, 1992
virtual work
complementary, 863
visualization, 2065, 2972
Voigt notation, 2909, 2920
von Mises, 1732
voussoir, 1027
generalized solution, 1044
historical development, 1028
vulnerability, 2208

warping constant, 854, 855
wave equation, 1225, 1704
wave speed
axial, 1704
weak form, 1513, 1670
weak points, 2130
weakest link, 1990
weight factor, 1670
weighted residual
Galerkin, 1661
Winkler, 1037
work, 1542
complementary virtual, 1552
internal, 1544
path independence, 1545
principle virtual, 1558
virtual, 1552

yield
condition, 1730
function, 1731, 1740
line, 1792, 1949
strength, 2150
stress, 1738
surface, 1731

zero-length
element, 1896
section element, 1900

प्रारूप

संरचनात्मक विश्लेषण के चार ग्रंथ © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
OpenAI के Codex द्वारा मूल अंग्रेज़ी संस्करण से अनूदित;
अनुवाद में त्रुटियाँ संभव हैं।